XXXIII Convegno UMI-CIIM Pavia, 7 ottobre 2016

## ARGOMENTARE E DIMOSTRARE NELLA SCUOLA

ROSA IADEROSA

Liceo Statale "G.B. Vico" di Corsico Insegnante ricercatore

### Perché questo laboratorio didattico

Molto spesso agli insegnanti non è facile accedere a ricerche e studi, che sono invece fondamentali per la loro formazione didattica, inizale e in servizio.

Ritengo che quello che ho cercato di raccogliere qui, frutto di studi ed esperienze durate anni, possa essere utile e ancora oggi attuale per chi si trova a dover *insegnare a scuola* attività che devono essere costruite con competenza, e che riguardano <u>l'argomentare e il dimostare a scuola in matematica.</u>

#### Il laboratorio in sintesi

- terminologia
- breve inquadramento teorico
- spunti e riflessioni didattiche
- attività dei partecipanti e discussione finale

## Un po' di terminologia

**ARGOMENTAZIONE** 

#### Possibili definizioni

Uno dei modi più semplici per caratterizzare l'argomentazione consiste nel partire dalla definizione di "argomento" come "ragione addotta per la validità di una affermazione" (può trattarsi di un dato, di un'esperienza, del riferimento ad una teoria condivisa, ecc.), e nel considerare una "argomentazione" come "un discorso che coordina diversi argomenti al fine di giustificare una affermazione".

Importanti vocabolari (come il Webster, per la lingua inglese) adottano tale definizione. Ci si rende tuttavia conto, quando si vuole analizzare un testo, stabilire se si tratta di una argomentazione e analizzarla, che si tratta di una definizione insufficiente, in quanto alcune parole usate ("ragione", "coordina"...) dovrebbero a loro volta essere definite, e soprattutto non operativa per l'analisi.

"...Con il termine argomentazione si intende la presentazione di varie tesi e la loro verifica o confutazione con semplici ragionamenti, con esempi immediati o con prove sperimentali. ..."

(C. Marchini, 2003)

## Interazioni tra argomentazione e dimostrazione

"...La matematica ha un modo proprio di trattare i problemi, a differenza delle scienze sperimentali, in cui convivono argomentazione e dimostrazione. Questo perché nella matematica sono presenti aspetti intuitivi e sperimentali oltre ai ben noti aspetti formali o deduttivi.

Lo studioso che affronta un problema, nella ricerca della soluzione procede con argomentazioni che possono avere la forma di ragionamenti di tipo induttivo o euristico o ancora per analogia, generalizzazione o particolarizzazione. In questa fase non vi è nulla di sistematico: è questo il momento in cui la fantasia e il gusto del matematico hanno il sopravvento e a volte la strada corretta da percorrere è frutto di conclusioni errate che vengono usate come ispirazioni. Una volta individuata la soluzione, la giustificazione della stessa è affidata alla capacità di sviluppare il pensiero formale rigoroso mediante dimostrazioni. Infatti al ragionamento ipotetico deduttivo è affidato il compito che, ad esempio, in Fisica, è tenuto dall'esperimento concreto, cioè la conferma delle argomentazioni..."

(C. Marchini,2003)

## Dunque, l'argomentazione...

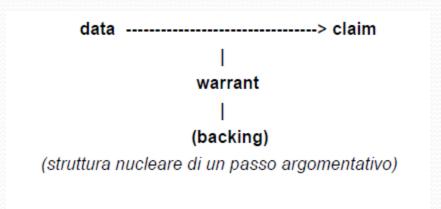
è un'attività linguistica che:

- serve per convincere sé stessi e altri della validità delle nostre affermazioni
- deve fondarsi su un ragionamento
- può negare o affermare una tesi
- a volte viene prodotta per dare spiegazioni in una fase euristica
- •

#### IL MODELLO DI TOULMIN

Argomentazione è un testo costituito da uno o più passi argomentativi concatenati. Un passo argomentativo è identificabile attraverso la presenza di un DATO (data), di una CONCLUSIONE (claim) e di una GARANZIA (warrant) che giustifica la validità della CONCLUSIONE tenuto conto del DATO.

A sua volta, il warrant può esplicitamente o implicitamente riferirsi a un insieme di conoscenze, principi, ecc. eventualmente organizzati in sistema: SUPPORTO (backing)



## SUPPORTO (backing) alla GARANZIA (warrant)

In matematica le affermazioni sono garantite dalle teorie di riferimento

### Il pensiero teorico

Nasce quindi successivamente il problema *dell'approccio al pensiero teorico*, necessario per fornire le teorie di riferimento.

## L'approccio al pensiero teorico

#### Pensiero teorico

esercizio della razionalità teorica con questi requisiti:

- Validità delle affermazioni assunta consapevolmente come obiettivo da raggiungere e basata su warrant appartenenti a un sistema organizzato e coerente di conoscenze ("teoria")
- Processi consapevoli di scoperta e validazione di affermazioni/proprietà secondo strategie adeguate per produrre affermazioni vere
- Forme di comunicazione adottate consapevolmente e coerenti con gli standard comunicativi della comunità di riferimento

(Boero, 2011)

#### LOGICA e PENSIERO LOGICO

- La *logica* studia la correttezza dei ragionamenti, rispetto a sistemi formali che la garantiscono
- Il *pensiero logico* è un'attività del pensiero umano che va oltre i confini della logica, a volte si basa anche su *abitudini*, consuetudini riconosciute socialmente, *concezioni ingenue* e non universalmente riconoscibili

### E A SCUOLA?

### La necessità per l'insegnamento

E' necessario, anzi indispensabile, che nell'insegnare a ragionare a scuola si parta dalle concezioni intuitive spontanee degli allievi, si indaghi su queste, si rilevi il loro modo spontaneo di giustificare affermazioni di tipo concreto, induttivo, deduttivo, in modo da comprendere in quale modo innestare canoni corretti e formali su queste attività del pensiero preesistenti.

#### Consultiamo i documenti ufficiali

Il nucleo di processo "argomentare e congetturare" caratterizza le attività che preparano alla dimostrazione, ossia a una delle attività che contraddistinguono il pensiero matematico maturo, quale sarà acquisito negli anni successivi della scuola secondaria superiore.

Si considerano perciò quei processi eminentemente discorsivi che concernono il pensiero matematico; essi risultano da un intreccio dialettico tra rappresentazioni simboliche (i segni dell'aritmetica, le figure della geometria) e le attività discorsive su questi con cui il soggetto dà significato agli enunciati matematici, che sono sempre di tipo misto (segni specifici del linguaggio simbolico proprio della matematica e parole del linguaggio naturale; esempio: "un numero di tre cifre è certamente maggiore di un numero con due cifre").

(da Matematica 2001, documento UMI)

#### Dallo stesso documento

Il significato dei segni matematici è analizzabile a due livelli:

- quello diretto dei segni (es. il significato del numero 12)
- quello del discorso in cui tali segni entrano

"se il 7 febbraio è un mercoledì e l'anno non è bisestile anche il 7 marzo è un mercoledì", la cui verità dipende da una relazione tra il numero dei giorni di febbraio negli anni non bisestili (28) e il numero dei giorni della settimana (7): siccome 28 è un multiplo di 7 (cioè la divisione 28:7 dà resto o) il primo giorno di febbraio e di marzo sono lo stesso, e così via per i successivi...

# Anche qui si fa riferimento al pensiero "naturale"

Il primo significato riguarda principalmente le definizioni dei concetti, il secondo quello delle relazioni tra queste. La matematica è costituita da enunciati in cui sono coinvolti continuamente i due aspetti. Comprendere la matematica significa possedere queste due funzioni del discorso. Le attività didattiche sono quindi finalizzate allo sviluppo di queste due funzioni, che affondano le loro radici nelle attività discorsive che il soggetto possiede in modo 'naturale' e che coinvolgono attività cognitive usuali. A livello maturo tali funzioni evolvono verso la dimostrazione matematica, che ha specificità proprie

# Il valore formativo dell'argomentazione

Molta attenzione dovrà essere dedicata alla verbalizzazione delle attività discorsive che gli alunni esplicano nell'esplorare campi di esperienza: mai come in questo caso le funzioni del linguaggio sono essenziali per la costruzione dei significati matematici (nei due sensi detti sopra).

In tal modo l'attività discorsiva diventa argomentazione matematica e successivamente dimostrazione.

#### Importanza dell'argomentazione

l'argomentazione è al tempo stesso il **fine** (competenza da promuovere) e **il mezzo** attraverso cui si realizza l'insegnamento-apprendimento di contenuti curricolari

## Un ambito principe per argomentare: il problema

LA CAROVANA (dai testi del rally matematico transalpino)

Ali e Fatima guardano passare una carovana di asini e di cavalli.

Ci sono anche degli uomini, che sono tutti sui cavalli.

Su ogni cavallo c'è un solo uomo con una cassa dietro di lui.

Su ogni asino ci sono solo due casse.

Ali conta le zampe degli animali e ne trova 52.

Fatima conta le casse: ce ne sono 21 in tutto.

Quanti uomini ci sono in questa carovana? Spiegate la vostra risposta.

## La carovana è un problema "ricco"

ABBIAMO ESEGUITO QUESTO PROCEDIMENTO: SAPENDO CHE IN
TUTTO LE ZAMPE SONO 52 ABBIAMO DIVISO IL NUMERO PER
LE QUATTRO ZAMPE DIOGNI ANIMALE, VENIVANO 13
D
TOI ABBIAMO DISEGNATO GLI ANIMALI, AISISIAMO AGGIUNTO
ONA CASSA A CIASCON ANIMALE, QUELLE AVANZATE LE ABB
MO DISTRIBUTE NA OGNI ANIMACE FINDA ESAURIRE.
ALLA FINE SONO VENUTT 5 CAVALLE SICCOME SO CON
COVID 100 CIPD 101 100 100 100 100 100 100 100 100 10
DAVALLO CETA UN COMO ABBIAMO TROVATO 5 COMINI
IIII animati,
T = 1 cassa

## Le attività argomentative

Le attività argomentative in cui si producono ipotesi o si generano condizionalità sono riconducibili a due modalità principali, che opportunamente coltivate appaiono fondamentali per permettere la transizione nel lungo periodo al pensiero teorico proprio della matematica. Esse sono caratterizzate dal diverso modo con cui il soggetto si rapporta al mondo esterno rispetto al suo mondo interno.

La prima modalità è caratterizzata dalla produzione di congetture interpretative di ciò che si vede (percepisce), ad es. al fine di organizzarlo.

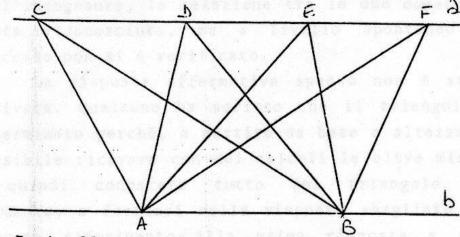
La seconda è caratterizzata dalla produzione di *congetture* previsionali (ad es. ipotesi su una situazione futura).

# Caratteristiche del discorso argomentativo (rif. Duval)

- Il ruolo di una proposizione è strettamente legato al suo contenuto semantico
- I "connettori" della lingua naturale servono ad esplicitare il contenuto della relazione tra due proposizioni (conseguenza, giustificazione, opposizione,...)
- La concatenazione tra le varie proposizioni è per "connessione estrinseca": le frasi si aggiungono con una coerenza tematica globale, ma non devono seguire un rigido ordinamento sequenziale.

#### Un esempio a supporto di questa caratterizzazione di Duval per il discorso argomentativo

In questa figura la retta a è parallela alla retta b. I triangoli ABC, ABD, ABE, ABF, qui rappresentati hanno tutti la stessa base AB.



- 1 Puoi affermare che, relativamente alla base AB, hanno tutti la stessa altezza?
- 2 Un triangolo è completamente determinato quando se ne conoscono base e altezza?

Problema: un triangolo ha la base di 18 cm e l'altezza di 12 cm. Qual è il perimetro del triangolo?

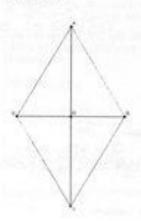
## Allievi di terza media non colgono il nesso deduttivo

- se il triangolo fosse completamente determinato da base e altezza, quello costruito a partire da base e altezza date sarebbe unico.
- in figura ci sono più triangoli, fra loro diversi (non congruenti), che hanno la stessa base e la stessa altezza.
- un triangolo di base e altezza assegnate non è unico, da cui la conclusione.

Le risposte di un campione di allievi mostrano che questo nesso non è stato colto spontaneamente in molto casi: Gli allievi, o forniscono calcoli sbagliati, o giustificano l'insufficienza dei dati con altre motivazioni, relative alle formule che conoscono

### Un altro esempio

 Completa questa argomentazione ricordando che un rombo è un parallelogrammo con i lati tutti congruenti:



A volte si utilizza la tesi per spiegarla

Le diagonali di un rombo sono perpendicolari

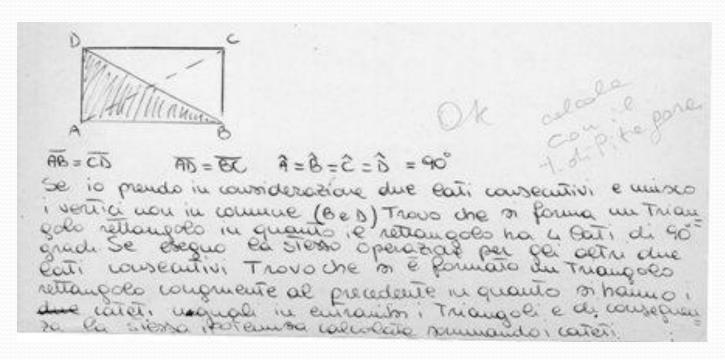
 Un allievo di prima liceo scientifico

#### Buone argomentazioni

#### La somma di due numeri dispari è dispari perché...

2) La somma di due numeri dispari è dispari l' perché communando due mi meri dispari è dispari è dispari è dispari è formato da un minero pari per che un minero do n' pari +1 più n' più n' pari +1 più n' più n' pari +1 più n' più

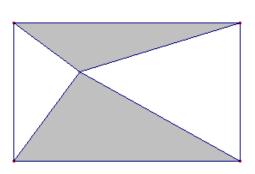
#### Se un quadrilatero è un rettangolo allora ha le diagonali uguali



Un esempio di problema che testimonia le fasi in evoluzione delle capacità argomentative e dimostrative

#### L'EREDITA'

Due fratelli ereditano un terreno rettangolare: per dividerlo in due parti della medesima estensione, un conoscente suggerisce loro di piantare un palo in un punto qualsiasi del terreno e congiungerlo ai quattro paletti infissi nei quattro vertici del terreno rettangolare. Uno dei fratelli prenderà la parte colorata in grigio nel disegno, l'altro la rimanente. Le due parti sono davvero uguali?

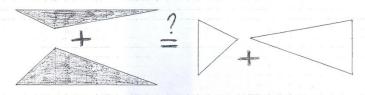


Due tustelli ereditano un terreno di torma rettangolare: per dividerlo in due parti della medesi na estensione, un conoscente suggerisce loso di partico un palo in un puno qualsiosi del terreno e congiungerlo ai quattro paletti intessi ner quattro vertici del terreno rettangolare. Uno dei tratelli prendeva la parte colorata in griggio nel disegno, l'altro la rimariente.

Le due parti sono darvivo uguali?

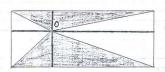


- · Il problema viene proposto in una classe 3°, o anche nel secondo guadromestre de una classe 2°.
- a La visposta di questo, così comi e posto e senza alcuna indicacione elo auto, savebbe probabilmente negativo. In quanto l'alumno difficilmente riesce a vedera come la parte colorata in pripio sia equiestesa repetto alla parte non colorata. La difficoltà mappione puo cansisteve nel "vedere diversa la somma (in termine di avec) di triangole diversi". O quanto meno, di tronte ad una rispasta positivo, difficilmente saprebbeno prostiterarla.



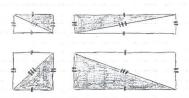
· una motodologia disottera di supporto al problema può vivelarsi l'Aliceo del sottimane CADRU-GEOMETRE II, che si suppone phialmer pri imprimo Alizzone.

come prima cosa viene chresta los di seprere la tipora dato, esbavando le parti come sopra; viene par detto lova de diseprare due segmente, perpendicadare Tra lora, pressanti per il panto O e parallelli av lati del rettampolo. Dovrebbero cost realizzare una Tipora del tipo:



i segmente cosi tracciati individuana quattro coppie di triangoli

una volta catrività tele Tigora, gli alunni sono ora in grada (o divrebbero ossere in grada) di applicare il II criterio di congruenza tra triangole, ad ogni coppia di triangole indiveduati dalla "suddivisione" del rettangolo in quattro parti.



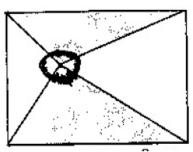
Una bella analisi a priori di un insegnante in formazione Ecco alcuni protocolli che illustrano i possibili atteggiamenti dei ragazzi

#### Gli allievi:

1) Non comprendono il significato del testo del problema (confrontano i triangoli di uguale colore separatamente).

Tra gli allievi di Scuola Media Inferiore, alcuni non hanno compreso che l'equiestensione di cui parla il problema è riferita alla somma delle aree delle figure di ugual colore: alcuni hanno pensato a confrontare tra loro le figure di ugual colore; altri a confrontare la somma delle aree delle figure di colore diverso .

Non sono ugueli perete se si traccia l'alterza di due triangoli grigi, si può notire che una è maggiore dell'altre a quindi il area reno. Maggiore



"no, perché le basi dei triangoli colorati in grigio occupano la base maggiore del rettangolo e hanno l'ampiezza dell'angolo alvertice maggiore, formando così un'apertura più grande. E poi le parti non possono essere uguali perché per dividere un rettangolo in parti uguali bisogna dividerlo con le diagonali" (Alessia, III media)

#### 2) Non vedono l'equivalenza.

Ci sono alunni – solo di Scuola Media Inferiore- che non riconoscono (negano) l'equivalenza delle due aree (bianca e grigia), anche tentando di darne una spiegazione.

"Non sono uguali, perché se si traccia l'altezza dei due triangoli grigi, si può notare che essa è maggiore dell'altra, e quindi l'area sarà maggiore" (Guendalina, III media).

#### Si <u>basano sull'evidenza</u> 'guardando la figura', senza cercare giustificazioni razionali;

Come è naturale e prevedibile, questo atteggiamento è molto diffuso tra gli allievi di Scuola Media Inferiore. E' importante, però, considerare come meno ingenuo, all'inizio dell'attività dimostrativa, l'atteggiamento di chi tenta di esplicitare verbalmente ciò che la percezione e l'intuizione visiva gli suggeriscono

SE SOTRAL AUNA UN PO'DI SPAZIO

DA UNA PARTE LO OTTERRALISALL'ALTRA

ALLAR GANDO UNA PARTE BIANCA, UNA PARTE NERA

SI RIMPICCIOLISCE MA L'ALTRA SI INGROSSA.

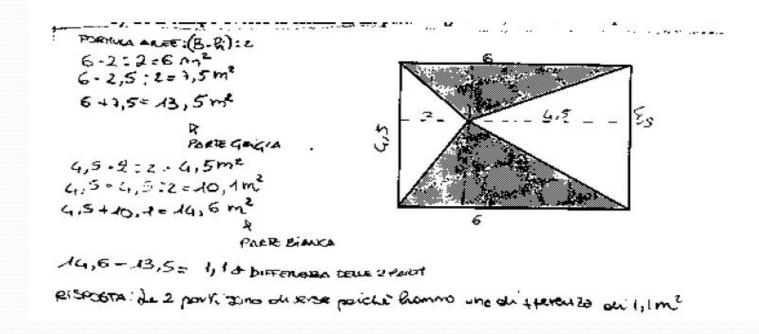
QUINDI SOUO SEMPRE UCUALI.

(Silvia, III media)

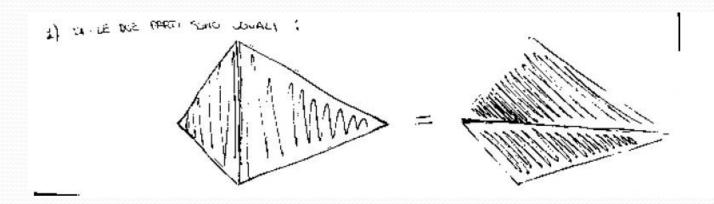
"Le due parti sono uguali perché la figura viene divisa sempre partendo dai vertici; di conseguenza una parte piccola viene compensata sempre con una più grande" ( un alunno di IV ginnasio)

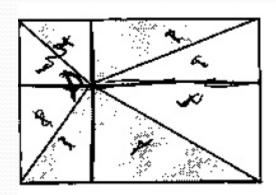
- 4) 'misurano' sul disegno, per:
  - a) valutare (bene o male) i risultati approssimati;
  - b) validare l'intuizione;

Questo atteggiamento rivela l'incapacità, da parte dell'allievo, di riconoscere nel disegno di una figura geometrica, la rappresentazione di un'intera classe di figure con proprietà comuni. La verifica di una certa proprietà, effettuata sulle misure del particolare disegno, viene così impropriamente generalizzata ad altre figure analoghe. Superare questo atteggiamento costituisce un'importante tappa nel cammino verso l'astrazione.



#### 5) Effettuano <u>costruzioni</u> (trattamento della figura).





& divide il compo in a posti possero de P attengo a quadribationi tutti divisi in due posti uguali, un grigia e una Gianca.....

#### Il "trattamento" della figura

Sia tra gli allievi della scuola media inferiore che superiore (più frequente fra questi ultimi) si rileva un atteggiamento particolarmente interessante e importante nell'attività dimostrativa: il ricorso ad una trasformazione della figura assegnata tracciando altri segmenti, punti notevoli, o modificando la forma delle figura stessa, che aiuta a riconoscere meglio proprietà geometriche note, e produrre ulteriori ragionamenti. In questo caso gioca un ruolo fondamentale la rappresentazione grafica e il "trattamento" di questa (cfr.: Duval....). E' rilevante notare, come emerge dai protocolli che riportiamo, il fatto che questa operazione induca in misura più o meno esplicita il riconoscimento della arbitrarietà del punto in cui si trova il

palo

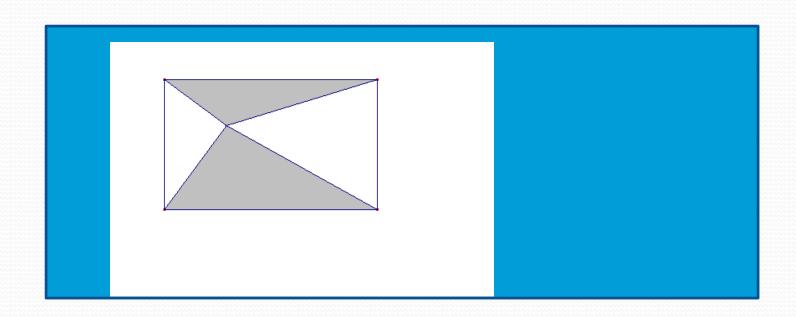
6) Effettuano <u>argomentazioni</u> basate su proprietà geometriche note.

DICUTERIOD IL RETTANDOLO IN FRAFATI CON CENTROS IL
PLANO OTO DAN 2 FRAFATILI) NOTO CHE MI
CONTRO DEL CANTO DEL CANTO DEL CANTO DEL
CONTRE DIAGONACE UN LATO DEL CANTO DEL
CONTRE DIAGONACE UN LATO DEL CANTO DEL
CONTRETA DIAGONACE UN LATO DEL
CONTRETA DIAGONACE UN CANTO CHE
TENTELLE LA CANTO CHE LA CANTO DEL
CONTRETA LA CANTO CHE
CONTRETA LA CANTO DEL
CONTRETA LA C

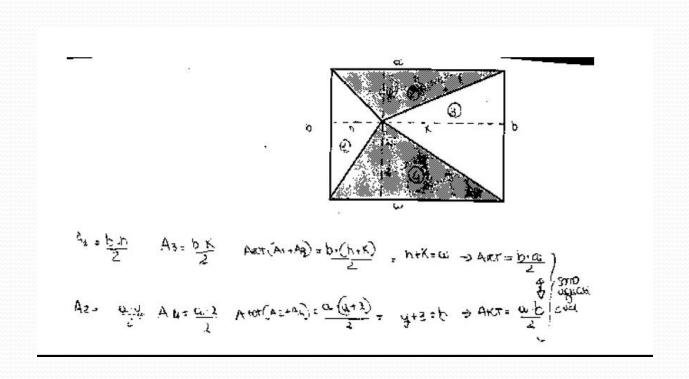
DE, le 2 peur vous chape book à catefre qui à triands suit conjuctife on peur qui à triands pronque se confragame partie qui à triands prinque pour considerat come ny unite la serie chi à triands chi à came se forme un suit triangle, en AB= Okksen de à triangle pour à capier come ny unite la AB= Okksen de à triangle pour à capier come ny unite la AB= Okksen de à triangle pour à capier de desse di desse pour pour pour produite consideration come ny unite la AB= Okksen de à triangle pour de desse produite consideration come ny unite la CE. Peur cui à la capier produite consideration come ny unite la capier pour de desse produite pour produite consideration come ny unite la capier produite de la capier produite de la capier produite de la capier produite consideration come ny unite la capier produite consideration con la capier produite con la capier

2) Mo, le positione de posso non à relevoure product le minure desse le desse le desse le minure de posso son de la production la mondant de la posso le mondant de la posso della posso d

"Sì, perché se si divide il campo rettangolare verticalmente partendo dal palo (puntino) e si sommano, ad esempio, le due parti grigie di sinistra si ottiene il triangolo intero bianco. Così anche orizzontalmente .Se si divide sia orizzontalmente che verticalmente si nota che i lati dei triangoli sono le diagonali dei rettangoli formati" (Marco, III media)



- 7) Si servono del <u>calcolo letterale</u>
  - a) semplicemente;
  - b) unitamente al ragionamento deduttivo.



1) So to the parti sono regulario quella grande sia la passissione del primeter all'antimo del primeter all'attengalo. A infato colcolondo l'aren alci triongli apporti e sommendale, il risultato mai la meta dell'aren all'assessionella

il risultato serai la sometri dell'anea
abl utengela

Dissortes escué: a.R. + El. - h.s = a. (h.s + R.2), a. e. = A attengela

## Il passaggio tra le due attività: argomentare e dimostrare, a scuola

"La nostra evoluzione della conoscenza avviene attraverso errori, tentativi su congetture...

...La dimostrazione in geometria è il punto di arrivo di una graduale evoluzione, durata secoli, che da varie prove legate all'evidenza ha condotto al rigore del formalismo...

Lo sviluppo del pensiero dimostrativo nell'allievo si può seguire sia tenendo conto di quello che è stato l'itinerario storico-culturale che ha portato alla dimostrazione, sia favorendol'interazione sociale tra gli allievi e facendoli discuetre tra loro per convincersi reciprocamente delle proprie argomentazioni..."

(N. Balacheff)

## Dall'argomentare al dimostrare in matematica

Nonostante l'argomentazione sia un'attività svincolata dalla matematica, (ha infatti un interesse anche in ambito linguistico e testuale), nell'insegnamento della matematica la dimostrazione si innesta attraverso una evoluzione formale e teorica dell'argomentazione.

### I diversi stadi dell'argomentare/dimostrare (N. Balacheff)

"Expliquer, prouver, démontrer"

non sono sinonimi nella pratica dell'insegnamento della matematica

( è necessario distinguere tali attività degli allievi per comprendere la complessità del problema dell'apprendimento della dimostrazione)

#### Tre termini specifici

**explication**: ha le sue radici nelle conoscenze del soggetto ed è l'attività mentale con la quale egli riconosce la validità di un'affermazione

**preuve:** il passaggio dall'explication alla preuve consiste in un processo sociale attraverso il quale il soggetto spiega verbalmente per far accettare la validità dell'enunciato ad altri

**démonstration:** una sequenza di enunciati organizzata seguendo delle regole codificate. Un enunciato è riconosciuto come vero se è dedotto da altri enunciati che lo precedono attraveso regole di deduzione appartenenti ad un insieme ben definito.

#### Ancora: (N. Balacheff)

"Un *ragionamento* è l'attività intellettuale, in generale non del tutto esplicita, di manipolazione delle informazioni, date o acquisite, per produrre nuove informazioni"

Il ragionamento si considera un *processo di validazione* quando la sua finalità è assicurare la validità di una proposizione (prova) ed eventualmente produrre una spiegazione (dimostrazione)

### Le prove fornite dagli allievi sono di vario tipo e possiedono diversi gradi di astrazione

CONGETTURE: tratte da pochi casi, in cui è assente il processo di validazione, oppure tratte dall'esame di qualche caso, ma poi messe alla prova su problemi simili

GENERALIZZAZIONI: fatte a partire da un esempio particolare, ma con un ragionamento che giustifichi il passaggio ad una classe di problemi simili

#### Più evolute:

- ESPERIENZE MENTALI in cui si passa da prove pragmatiche a prove intellettuali, che richiedono già una interiorizzazione di esperienze particolari su singoli casi e proprietà (una buona giustificazione razionale fornita da un allievo di terza media)
- COSTRUZIONI INTELLETTUALI fondate su teorie più o meno formalizzate (la consapevolezza di una teoria di riferimento, con assiomi e regole di inferenza)

# Continuità o frattura tra argomentazione e dimostrazione in matematica a scuola?

Duval mette in evidenza elementi di discontinuità tra discorso argomentativo e dimostrativo.

Utilizza didatticamente proprio questi elementi di frattura per mettere a confronto i testi prodotti dagli allievi e per condurli alle conquista della consapevolezza nella strutturazione di un testo dimostrativo

#### Duval

Duval sostiene la forte differenza tra "organizzazione deduttiva" del pensiero e "organizzazione argomentativa" del pensiero.

L'argomentazione si struttura più liberamente, nel linguaggio naturale, pur avendo connotazioni di tipo logico, mentre il discorso dimostrativo si articola in maniera *rigidamente ordinata e sequenziale*, tra premesse e conseguenze.

### Aspetti del discorso argomentativo e dimostrativo

Nell'organizzazione del discorso dimostrativo è essenziale distinguere:

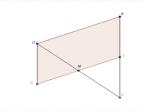
- l'aspetto *semantico* (legato ai significati)
- l'aspetto sintattico (legato alle regole di strutturazione in cui dalla premessa, attraverso le regole di inferenza, si deduce la conseguenza

#### Nel discorso dimostrativo:

- ad ogni passo di deduzione le proposizioni non intervengono direttamente per il loro contenuto semantico, ma per il loro "stato operatorio", cioè per il ruolo che esse svolgono (premessa o conseguenza) in quel punto della dimostrazione;
- i "connettori" del linguaggio, oltre ad essere operatori sulle proposizioni, possono anche semplicemente indicarne lo stato operatorio e quindi essere sottointesi;
- la concatenazione tra le proposizioni è paragonabile ad un calcolo: avviene applicando le regole di inferenza, è strettamente sequenziale.

## Riflessioni sull'insegnamento della dimostrazione

Di fronte a problemi come quello che segue, Duval ha constatato due atteggiamenti dei ragazzi, che sono contrapposti dal punto di vista "colto" ma la cui differenza non appariva ai loro occhi O, B, C, sono tre punti non allineati. I è il punto medio di BC e D è il punto tale che OBID sia un parallelogrammo. Chiamiamo M il punto medio di ID. Perché M è il punto medio di OC?



#### I due atteggiamenti:

#### **Allievo**

"OICD è un parallelogrammo perché le sue diagonali OC e ID si tagliano nel loro punto medio"

#### Struttura del ragionamento:

le diagonali OC e ID si tagliano nel loro punto medio

(quindi)

OICD è un parallelogrammo

.....

#### Allievo 2

"Se M è il punto medio di ID e se OICD è un parallelogrammo, allora M è il punto medio di OC perché le diagonali di un parallelogrammo si tagliano nel loro punto medio"

#### Struttura del ragionamento:

M è punto medio di ID

OICD è un parallelogrammo

(quindi)

*M* è punto medio di OC

(perché)

le diagonali di un parallelogrammo si tagliano nel loro punto medio

#### In effetti:

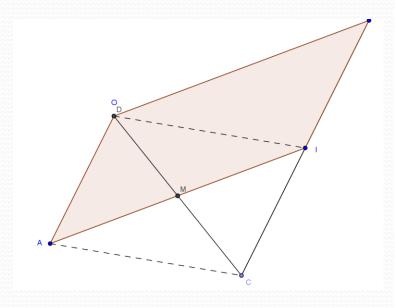
Se oscuriamo i connettori sottointesi da parte dei ragazzi, e consideriamo solo le proposizioni, senza fare riferimento al loro "statuto operatorio", i due ragionamenti appaioni simili...

## Per evidenziare ai ragazzi la differenza

Duval propone attività didattiche in cui si richieda all'allievo da un lato di costruire argomentazionmi "libere" per cercare la giustificazione di un enunciato, dall'altro di costruire "grafi proposizionali" che evidenzino la concatenazione delle proposizioni e quindi il loro statuto operatorio (aspetto sintattico), e che mettano in luce i passaggi inferenziali.

Dal confronto dell'uso dei connettori nel linguaggio naturale, e degli schemi costruiti, appare evidente se l'allievo ha consapevolezza dei passaggi deduttivi e quindi se ha costruito consapevolmente e correttamente una dimostrazione.

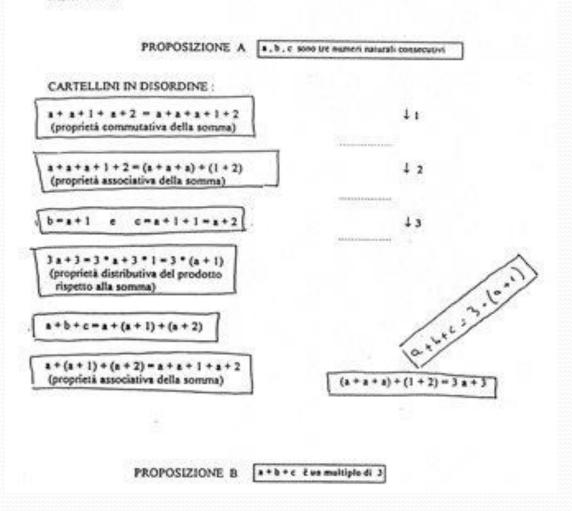
#### Un possibile percorso



L'esplicitazione di vari passi deduttivi consente agli allievi di evidenziare le inferenze

### Attività di tipo prevalentemente sintattico (più semplici in ambito aritmetico/algebrico)

Le frasi che seguono crano tutte su cartellini e Marco le aveva disposte ordinatamente in modo che costituissero un ragionamento corretto per giustificare la proprietà B a partire dalla proposizione A. Un colpo di vento ha rimescolato tutti i cartellini. Disponili tu in un nuovo ordine collegandoli con frasi numerate.



#### Attività di tipo sintattico (in ambito geometrico)

avoia 3

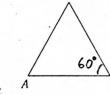
#### Attività di riordino di una sequenza deduttiva

Riordina nella sequenza corretta, numerandole, le varie proposizioni che concorrono a giustificare la seguente affermazione:

Un triangolo A B C tale che: AB = AC e mis <ABC= 60 è equilatero

#### **PROPOSIZIONI**

- a) proposizione n. ...  $mis < ABC + mis < BCA = 120^{\circ}$
- b) proposizione n. ... Il triangolo ABC è isoscele
- c) proposizione n. ... AC = BC
- d) proposizione n. ...  $mis < CBA = mis < BCA = 60^{\circ}$
- e) proposizione n. ... il triangolo ABC è equilatero
- f) proposizione n. ...  $mis < BAC = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ} = mis < ABC$



motivo: A perché somma di angoli uguali e ciascuno di ampiezza 60°

motivo: perché AB = AC (ipotesi)

motivo:

per la proposizione in f) e per la

proposizione "se in un triangolo due
angoli sono uguali allora i lati ad
essi opposti sono uguali

motivo: perché mis <BCA = 60° (ipotesi) e per la proposizione "in un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali"

motivo: per ché AB = AC (per ipotesi) e AC = BC per la proposizione in c).

motivo: per la proposizione "la somma degli angoli interni di un triangolo misural 80°" e la proposizione in a).

#### In conclusione

Gli studi di Duval mettono in luce come attvità linguistiche accompagnate dalla costruzione di schemi deduttivi possano condurre gli studenti alla consapevolezza dei passaggi deduttivi e, successivamente, anche ad esplicitare le regole di inferenza soggiacenti

Alcune ricerche hanno messo in evidenza come esistano comunque anche alcuni aspetti di continuità tra le due attività (argomentazione e dimostrazione)

#### Le unità cognitive (Boero, Garuti)

"durante la produzione di una congettura, fortemente legata ad un *campo di esperienza*, *l'alunno* progressivamente perviene al suo enunciato attraverso una intensa attività argomentativa, che si sintreccia funzionalmente alla giustificazione della plaiusibilità delel scelte ocmpiute. Nella fase successiva di dimostrazione dell'enunciato, l'alunno si collega a tale processo in modo coerente, organizzando in catena logica alcune delle giustificazioni (argomenti) prodotte durante la costruzione dell'enunciato."

#### E da grandi?

Nella matematica "colta" l'argomentazione lascia sempre più il posto alla dimostrazione poiché il linguaggio naturale si sostituisce gradualmente a quello formalizzato

#### **ALCUNI SPUNTI DIDATTICI**

### ALCUNE PROPOSTE PER PREPARARE GRADUALMENTE AL PENSIERO E ALLE ATTIVITA' DIMOSTRATIVE

Nella scuola secondaria di primo grado i ragazzi dovrebbero essere abituati sistematicamente a:

- descrivere procedure verbalmente
- verbalizzare le strategie risolutive di un problema
- osservare e descrivere configurazioni attraverso l'uso di modelli dinamici in geometria
- giustificare razionalmente proprietà geometriche e aritmetiche
- risolvere problemi geometrici in cui sia necessario il "trattamento" della figura
- trasformare correttamente enunciati in varie forme linguistiche con un uso consapevole dei connettivi
- .....

#### Alcune attività

- motivare risposte
- giustificare affermazioni
- discutere collettivamnente "ragionamenti" forniti da alcuni allievi, non necessariamente corretti
- educare a distinguere tra:
- verifiche su esempio
- argomentazioni su casi generali
- congetture e controesempi
- dare spazio a problemi vari, non prevalentemente di tipo calcolativo e sulla misura
- introdurre precocemente il linguaggio algebrico

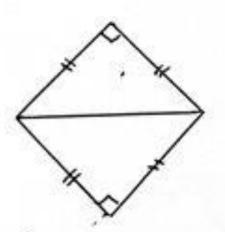
## UN ESEMPIO RAPPRESENTATIVO

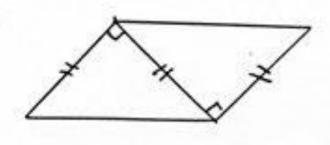
Già in seconda media coesistono diverse forme di "prova"

#### Classe seconda media

- B) Osserva attentamente le seguenti figure. Stabilisci:
  - se hanno lo stesso perimetro
  - se hanno la stessa area

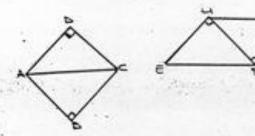
Spiega le motivazioni di ciascuna risposta.





Osserva assensamente le seguenti figure. Subblisci:

- se haveo lo stesso perimeno
- se harmo la stessa area
- spriego le motivazioni di ciascuna risposta



Secondo me sono menoli de genera, ma il pero, meso è disecto perolle mine. è pui grande degle d'altre collecte perolle mine : g(lea)-letectotale.

Statiste Collecte (lean)-contragnime la comi permine l'orien decen prima grande e reprolle elle reconde, seconde me, onche se mon del contragnime i dotte e minera delle due dia puel.

Special de mainements: Come po aigé desso messes conserventes des precuestos e despretativa, in participativo des xormes (Abaca) é directo aigé participativa de conserventes (Abaca) e de conserventes

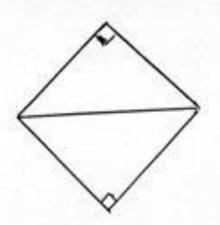
SECONDA FIGURA PERCETTIVI FURRIANTI CT, "PIÙGRANDE"

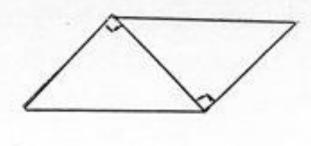
Osserva attentamente le seguenti figure. Stabilisci:

- se hanno lo stesso perimetro No, padre uella rema ligioca i s terrugli hanno anse lati i aste

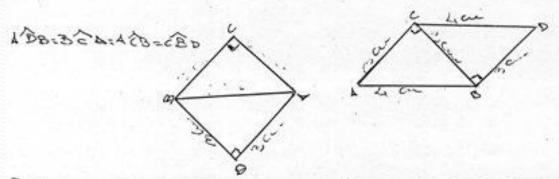
- se hanno la stessa area si perché le due Agure econocità, es un composte autroubt de . . - spiega le motivazioni di ciascuna risposta. Transpoli inquali

to de somo più coste combranto all'ipotamiza, union alla e ligiosa to è composti da e potamise e de e cotte dei e triangoli quindi ai e figura ha il pormetre pui ango





#### C'è anche una "via di mezzo"



1) Betrache delitique non hanco le stesse perice perchè dopo aver mismoto con il righello (onche se capira ad accisio) sia i cateti che l'i potenusa dei quattro trionadei he motato che exomo uguas. Na mel olispore a due a due formando a sissolisegnate sopra in uno vengomo esposti como perimetro i cateti dei olie triongeli mentre nel seconda ligura le olie ipotenusa e due cateti chimoli, sia pacendo un reagionamento secondo il quale l'i potenusa oli un trionagelo rettanglo mon e una inquale a un cateta, si a qua cardo i realiti calcoli, posa olire che le olie pique mon la calcoli, posa olire che le olie pique mon la calcoli, posa olire che le olie pique mon la calcoli, posa olire che le olie pique mon la calcoli, posa olire che le olie pique mon la calcoli, posa olire che le olie pique mon la calcoli, posa olire che le olie pique mon la calcoli, posa olire che le olie pique mon la calcoli, posa perimetro.

La giustificazione razionale sembra dover trovare conferma anche nel calcolo con misure rilevate dal disegno

#### Un altro importante documento

(classe terza media)

Non rurre le gique piane possono essere costruire con i 7 per li rangiorm: ala ne sono inpossi sici. Per esempio la sequente mon è una giquia tangiam

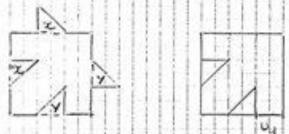


Pre azzi vaze a questa conclusione è possibile seguice due strade: vé RificARE se la Sigura esiste provando vazie combinazioni, o oito strare, attraverso le ze gole giá comosciute, se la Sigura è possibile o mo. "Dato ralmente è molto memo sicuro e preciso e soprattutto più lungo il primo metodo, poiché la mon riuscita dell'esercizio può dipendere, mon solo da l Satto che la Sigura mon esiste, ma anche dall'incapacità del risolutore o da ll'insuf. Sicienza dei rentativi.

Cosi, per dimo straze che la Soglia non è una gigu. ra rangzum si squittano le seguenti zegole: l'azza del qua dzato rangzum è di 80° (u: lato

- il l'uro di Qx é il più piccolo ma i segmenti dei pezzi rungzam. Verifica e "dimostrazione"

in Sarri Ca Suglia si pud massozmaze im un quadra ro a lei equivalente, copzendo i rechi, con i vaigna con golini spozgenti.



Il luto del quadratino univat (01), se la Soglia sos se una sigura tamazam, dovrebbe essere uguale o più grande rispetto ad o il luto di Q1.

Considerando questo, si più giungere alla con dusione che l'a del quadra to equivalente alla Soglia (e quindi la Soglia stessa) è si aramente maggiore dell'a del quadra to tangram, poi de la prima è si e la seconda 9 ° , e quindi la soglia, non essendo equivalente al quadra to tangram.

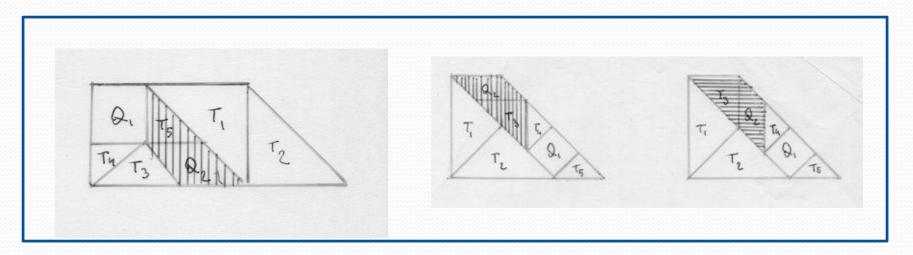
#### Nel biennio della scuola secondaria superiore

- riflettere sul significato di vero/falso
- attività di tipo sintattico :"giocare "con le frasi e i loro pezzi"...
   (esempio)
- verbalizzare le strategie risolutive di un problema
- formulare e riformulare enunciati
- formulare congetture attraverso l'esplorazione della figura con un software di geometria dinamica
- individuare i vincoli di una figura e quindi ipotesi e tesi di un teorema (esempio)
- Riflessione consapevole sul significato delle seguenti attività: verifica giustificazione – generalizzazione - dimostrazione

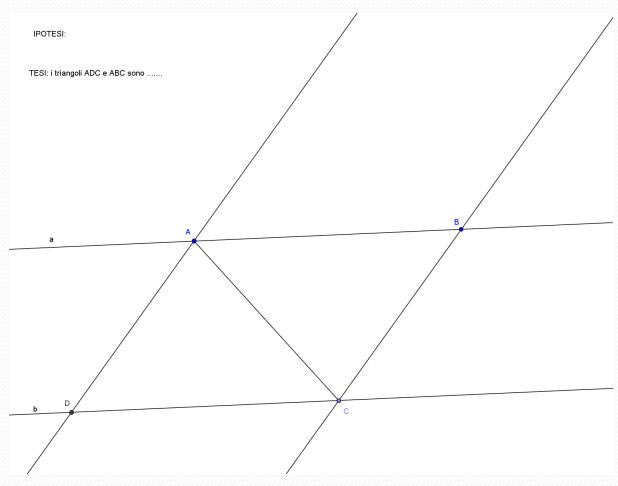
#### **QUALCHE ESEMPIO IMPORTANTE:**

#### giocare con le frasi nel gioco del Tangram

- SE una figura è un trapezio rettangolo ALLORA la figura si può construire con 7 pezzi tan
- SE una figura si può costruire con 7 pezzi tan ALLORA la figura è un trapezio rettangolo
- SE una figura NON è un trapezio rettangolo ALLORA la figura NON si può costruire con 7 pezzi tan
- SE una figura NON si può costruire con 7 pezzi tan ALLORA la figura NON è un trapezio rettangolo

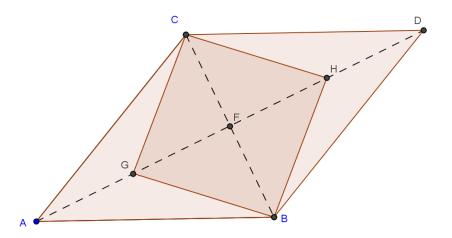


## Esplorare una figura e formulare una congettura



#### Formulare congetture rispettando i vincoli

ABCD parallelogrammo
G è punto medio di AF
H è punto medio di FD
GBHC è un.....



### Ma si possono individuare livelli di competenza su queste attività?

- Riordino di enunciati in una sequenza logica di tipo deduttivo
- Analisi di enunciati con l'uso di connettivi e del "se...allora..."
- Distinzione tra verifiche e dimostrazioni
- Consapevolezza dei passi deduttivi e di alcune regole di inferenza
- Formulazione di congetture
- ......