

**XXXIII Convegno UMI-CIIM**  
**Pavia**  
**7-8-9/10/2016**

**LABORATORIO**

**La probabilità: uno strumento per  
l'acquisizione di competenze**

**Livelli scolari:** primaria, secondaria di I e II grado

Piera Romano  
Laura Afeltra  
Nicoletta Grasso

# Perché un laboratorio sul tema probabilità?

Tema incertezza nei test Pisa 2006



Nel framework del Pisa 2015 si pone l'attenzione sulla centralità dell'argomento nella nostra vita

Inserimento della Probabilità e della Statistica nei Curriculum scolastici  
INDICAZIONI NAZIONALI



Quesiti di probabilità in tutti i test , nazionali ed internazionali. Dati e Previsioni è diventato uno dei 4 Nuclei Fondanti dei QdR



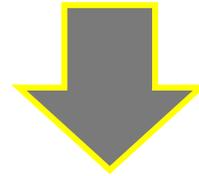
In science, technology and everyday life, uncertainty is a given. Uncertainty is therefore a phenomenon **at the heart of the mathematical analysis of many problem situations**, and the theory of probability and statistics as well as techniques of data representation and description have been established to deal with it. (OECD, 2015, p. 19).



# MA...

L'esame di Probabilità e Statistica non è sempre obbligatorio nel corso di laurea in Matematica

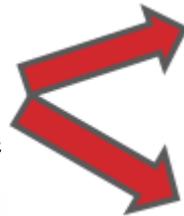
E, oggi seppur l'esame è obbligatorio, è comunque sempre basato su un approccio di tipo assiomatico, una totale assenza di riflessione sugli aspetti didattici (Vighi).



Insicurezza nell'insegnamento, come emerge da diversi studi nazionali ed internazionali, che determina la scelta di introdurre questi temi alla fine del programma, se c'è tempo!

*E' ormai noto che il successo di qualunque curriculum relativo alla probabilità per sviluppare il ragionamento probabilistico degli studenti dipende notevolmente dalla comprensione della probabilità da parte degli insegnanti. (Stohl)*

Necessità di formazione specifica sul tema



Percorsi M@tabel, 23 risorse didattiche

Ad esempio [«Giocando con tre Dadi»](#)

Su base volontaria?

# Prologo al percorso di classe

In una prima fase, discussione tra docenti e ricercatori, sia di approfondimento sui contenuti disciplinari, sia di analisi epistemologica

(...) create opportunity to work with teachers, to ask questions and to see common purposes in using inquiry approaches that bring both groups closer in thinking about and improving mathematics teaching and learning (Jaworski & Goodchild, 2006)

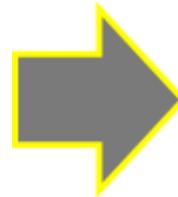
## Formazione efficace



Rafforzare il **CCK** (Common Content Knowledge)

Prestare attenzione al **SCK**  
(Specialized Content Knowledge )

Analisi delle reali dinamiche di classe attraverso l'analisi di estratti, raccolti dalle docenti (Incontri di ricerca, tesi di laurea, laboratori)



**Docente mediatore  
consapevole**

# Struttura del Laboratorio

- Questionario con 4 Item
- Discussione collettiva
- Analisi di strumenti di mediazione semiotica.

# ITEM 1

1. Docente: Nel lancio di un solo dado, qual è la probabilità da attribuire a ciascuna faccia?
2. Gennaro: Non ce n'è una favorita, per ciascuna la probabilità è  $1/6$ .
3. Gianluigi: Ma, lanciando i dadi, abbiamo ottenuto il 5 8 volte su un totale di 63. La probabilità di avere 5 dovrebbe essere perciò  $8/63$ , che approssimativamente è 0.127
4. Flavia:  $1/6$  è circa 0.167...non è la stessa cosa
5. Vincenzo: Sì, possiamo usare entrambe le definizioni...ma abbiamo studiato che in questo caso la probabilità certamente è  $1/6$ .

- Per ciascuna risposta fornita dagli studenti, discuti se essa è corretta o meno, da un punto di vista matematico, motivando la risposta.
- In riferimento alle risposte che consideri non corrette, descrivi un insieme di possibili ulteriori domande che faresti ai tuoi studenti per sostenerli nel processo di apprendimento e per individuare la risposta corretta o anche solo adeguata.

# Commenti all'Item 1

Approccio classico e frequentista

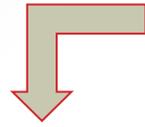
- Gioco con i dadi
- istogramma umano(primaria)
- simulatore del lancio di una moneta
- Gratta&Vinci

Legge dei Grandi Numeri



# Quadro teorico item 1

Il contesto del gioco d'azzardo è un contesto privilegiato



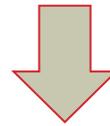
La prima formalizzazione della teoria della probabilità è scaturita dall'analisi di un gioco con i dadi (Batanero, 2005)

La definizione classica è intuitiva



Sembra avere la meglio su quella frequentista

Intervengono la Legge dei Grandi Numeri e le nuove tecnologie (BetOnMath)



L'insegnante deve tener conto della stretta connessione tra i due approcci (Ponte, 2008), consapevole delle rispettive difficoltà intrinseche



conoscenza dei "casi"



ripetibilità

# ITEM 2

Dopo attività di esplorazione del lancio di un solo dado, l'insegnante decide di spostare l'attenzione degli studenti con la seguente domanda:

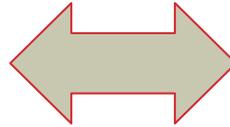
*“Quante sono le possibilità che lanciando due dadi si abbia sette come somma dei due valori delle facce?”*

- Descrivi il modo in cui risponderesti alla domanda, sulla base delle tue conoscenze disciplinari
- Sulla base della tua esperienza di insegnamento, quali sono le risposte, corrette o non corrette, che possono emergere dalla discussione con gli studenti?
- Descrivi le difficoltà che possono incontrare gli studenti nell'affrontare questo quesito, specificando il livello scolastico a cui fai riferimento.

# Quadro teorico item 2

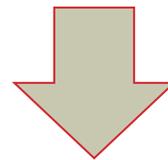
Un insegnante che sta sviluppando l'SKC nel contesto della probabilità deve anche tener conto  
(Ponte, 2008)

delle difficoltà e degli errori degli studenti

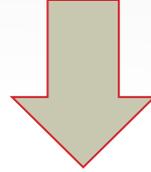


delle idee controintuitive

- Ambiguità linguistiche (Borasi, 1996)
- Incertezza e caso
- Rappresentatività, disponibilità (Tversky, Kahneman, 1974)
- Presenza di idee controintuitive a livello iniziale di conoscenza (Borovnik & Peard, 1996).
- Coercitività delle intuizioni (Fishbein, 1975)



NON SOLO GLI STUDENTI, MA ANCHE GLI  
INSEGNANTI IN FORMAZIONE



IN UNO STUDIO DELLA BATANERO  
(*Batanero, 2005*)

*When two dice are simultaneously thrown it is possible that one of the following two results occurs:*

*Result 1: A 5 and a 6 are obtained.*

*Result 2: A 5 is obtained twice.*

*Select the response that you agree with the most:*

- |   |              |
|---|--------------|
| <i>a. The chances of obtaining each of these results is equal</i> | <i>66.2%</i> |
| <i>b. There is more chance of obtaining result 1 (correct)</i>    | <i>6.2%</i>  |
| <i>c. There is more chance of obtaining result 2.</i>             | <i>2.3%</i>  |
| <i>d. It is impossible to give an answer.</i>                     | <i>25.3%</i> |

**L'ERRORE PUO' E DEVE DIVENTARE UNA  
RISORSA DIDATTICA**

# ITEM 3

A proposito del quesito precedente, di seguito è riportato un estratto di un dialogo di classe tra la docente e alcuni studenti:

1. Docente: Quante sono le possibilità che lanciando due dadi si abbia sette come somma dei due valori delle facce?
2. Giovanni: Ci sono 11 somme possibili, da 2 a 12.
3. Gianluigi: No, mica abbiamo un dado ad 11 facce. Secondo me dobbiamo considerare tutti i casi.
4. Docente: Ok, quindi quanti sono i casi?  
Gli studenti lavorano in gruppo, poi uno di loro afferma:
5. Massimo: Ci sono 21 possibilità.

- Per ciascuna risposta fornita dagli studenti, discuti se essa è corretta o meno, da un punto di vista matematico, motivando la risposta.
- In riferimento alle risposte che consideri non corrette, descrivi un insieme di possibili ulteriori domande che faresti ai tuoi studenti per sostenerli nel processo di apprendimento e per individuare la risposta corretta o anche solo adeguata.
- In riferimento al quesito posto, è possibile individuare un altro contesto problematico alternativo al gioco dei dadi? ●

# Quadro teorico item 3

Contare in ambito  
probabilistico



Equiprobabilità



Circolarità



Esigenza di un  
contesto diverso  
dai giochi



Competenze  
trasversali

Attività  
laboratoriali

Diversi modelli statistici

Avvio all'argomentazione

$$b) P_{\text{max}} = P_1 \cdot P_2 = 7 \cdot 2 = 14\%$$

N. 4  
2 dadi e 7 facce

: nel modello di Maxwell si considerano tutte le combinazioni possibili.

$$\text{Maxwell: } S_6 = \frac{5}{49}$$

(2,4)(5,1)(3,3)(1,5)(4,2)

$\rightarrow$  tutte le combinazioni possibili.

$$\text{Einstein: } S_6 = \frac{3}{28}$$

(1,5)(2,4)(3,3)

Nel modello

di Einstein si considerano una sola volta le combinazioni possibili.

Es: (1,5) ~~(5,1)~~

$$\text{Fermi: } S_6 = \frac{2}{21}$$

(1,5)(2,4)

$\rightarrow$  tutte le combinazioni possibili.

Nel modello di Fermi ~~non~~ si considerano una sola volta le combinazioni e non si considerano le coppie con due numeri uguali. Es: (3,3) ~~no~~

N. 5

# ITEM 4



La foto mostra un mediatore semiotico costruito ed utilizzato in un percorso didattico realizzato in una classe seconda di scuola primaria.

Qui di seguito è riportato un estratto di una conversazione.

(Emanuele ha in mano un foglio su cui ha disegnato e ritagliato la ruota.

Dopo aver piegato il foglio per tre volte, esclama di aver capito una cosa importante.)

1 Emanuele: Ho capito che ci sono otto pezzi.

2 Fulvio: No, i pezzi sono quattro: il rosso, il blu, il rosa e l'arancione.

(....)

3 Insegnante: Se giro la ruota 8 volte quali colori dovrebbero uscire?

4 Angelo: 4 volte rosso, 2 volte blu, 1 volta arancione e 1 volta rosa.

5 Maria: Però non è sempre così. A volte il blu è uscito per un sacco di volte e il rosa non vuole uscire mai.

- Per ciascuna risposta fornita dagli studenti, discuti se essa è corretta o meno, da un punto di vista matematico, motivando la risposta.
- In riferimento alle risposte che consideri non corrette, descrivi un insieme di possibili ulteriori domande che faresti ai tuoi studenti per sostenerli nel processo di apprendimento e per individuare la risposta corretta o anche solo adeguata.
- In riferimento allo strumento proposto, discuti quali sono i relativi punti di forza e di debolezza. Formula una proposta per un altro mediatore con le stesse potenzialità.

# Un contesto per l'acquisizione di competenze

## Il problema dei rappresentanti

***Una classe è composta da 25 alunni: 15 femmine e 10 maschi. Si devono estrarre a sorte 2 rappresentanti di classe. Quale è la probabilità che siano un maschio e una femmina?***

***Esiste una diversa composizione della classe, relativamente al numero di maschi e di femmine, per cui la probabilità è la stessa del caso precedente?***

## RIFLESSIONI CONCLUSIVE

Il percorso sperimentale proposto:



Mira a sviluppare **competenze**



Tiene conto delle *voci storiche*



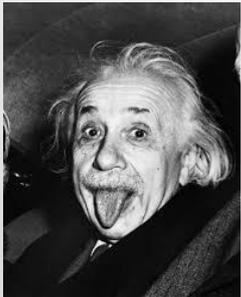
Enfatizza il ruolo delle **intuizioni**



Utilizza **strumenti semiotici** come supporto e controllo



Rende lo studente **consapevole**



*“Non ho mai insegnato ai miei allievi; ho solo cercato di fornire loro le condizioni in cui possono imparare”*

**Grazie per l'attenzione**

# BIBLIOGRAFIA

- Afeltra, L. (2015). *Il ruolo delle intuizioni nella didattica della probabilità. Il contesto di esperienza del gioco d'azzardo* (Unpublished master's thesis). Department of Mathematics, University of Naples "Federico II", Naples, Italy.
- Batanero, C. Godino J. D., Cañizares M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. *Proceedings of First ICMI African Regional Conference. Johannesburg: ICMI*
- Batanero, C., & Díaz, C. A. R. M. E. N. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3-13.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on Errors as "Springboards for Inquiry": A Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Company.
- Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. In A. Bishop, et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239-288). Dordrecht: Kluwer.
- Fischbein, H. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children (Vol. 85). Springer Science & Business Media.
- Jaworski, B., & Goodchild, S. (2006). Inquiry Community in an activity theory frame. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings PME 30* (Vol. 3, pp. 353-360). Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.
- Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD (2015), *PISA 2105 Mathematics Framework*. Paris: OECD.
- Ponte, J. P. (2008). Preparing teachers to meet the challenges of statistics education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: [http://www.ugr.es/~icmi/iase\\_study/](http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/).
- Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpretation students' non-standard reasoning: insights for mathematics teacher education. *For the Learning of Mathematics*, 36(2), pp. 8-13.
- Tversky A., Kahneman D. (1974). Judgement under Uncertainty: Heuristic and Biases. *Science, New Series*, Vol. 185, N.4157; pp. 1124-1131.