Seminario 4
La competenza nella comunicazione

Roberto Tortora
roberto.tortora@unina.it

Bardonecchia
Lunedì 29 agosto, 9:00-13:00

Comunicare: che cosa dicono importanti documenti: NCTM, Matematica 2001, indicazioni ministeriali.

Comunicare a gesti, con linguaggio parlato, con linguaggio scritto

Comunicare da insegnante a studente, da studente a studente, da studente ad insegnante.

L'altra faccia di comunicare. Ascoltare.

La semantica e la pragmatica

Verso la precisione terminologica. Elogio dell'ambiguità.

Gli errori.

Comunicare:

NCTM,

Matematica 2001

Mat@bel

….

Gli Standards del NCTM – National Council of Teachers of Mathematics 1999

I Principi per la Matematica nella scuola

Descrivono i requisiti fondamentali per avere una qualità elevata nei programmi di matematica.

- ***Principio dell'Equità***
- ***Principio del Curriculum***
- ***Principio dell'Insegnamento***
- ***Principio dell'Apprendimento***
- ***Principio dellaValutazione***
- ***Principio della Tecnologia***

Il Principio dell'Equità

Un'educazione matematica di eccellenza richiede equità. I programmi di matematica devono promuovere l'apprendimento della matematica di ***tutti*** gli studenti.

- Per tutti devono essere fissate aspettative alte e forniti adeguati sostegni.
- Il Principio dell'Equità richiede di prendere in considerazione le differenze individuali per aiutare ciascuno a imparare la matematica.

Il Principio del Curriculum

Un curriculum è più di una raccolta di attività:

- Il curriculum di matematica *deve essere coerente*
- Il curriculum di matematica *deve essere impostato su argomenti importanti*
- Il curriculum di matematica *deve essere ben articolato nei vari livelli scolastici*

Il Principio dell'Insegnamento

Un insegnamento efficace della matematica richiede che si capisca che cosa gli studenti sanno e di che cosa hanno bisogno, per poi sostenerli e "sfidarli" a impadronirsene nel migliore dei modi.

A questo scopo:

- Occorre sapere e "capire" la matematica, conoscere strategie di tipo pedagogico e comprendere i modi di apprendere degli studenti.
- Occorre saper costruire nelle classi ambienti di apprendimento ricchi e stimolanti.
- Occorre ricercare continui miglioramenti nel proprio lavoro.

Il Principio dell'Apprendimento

*Gli studenti devono **capire** la matematica, costruendo attivamente nuova conoscenza a partire dall'esperienza e dalla conoscenza già posseduta.*

- La comprensione nell'apprendimento della matematica è essenziale.
- Gli studenti **possono** imparare la matematica capendola.

Il Principio della Valutazione

La valutazione serve a sostenere l'apprendimento e dà informazioni preziose sia agli insegnanti che agli studenti

- La valutazione dovrebbe potenziare l'apprendimento degli studenti.
- La valutazione è un valido strumento per prendere decisioni sul piano didattico.

Il Principio della Tecnologia

La tecnologia ha un ruolo essenziale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica.

- La tecnologia rinforza l'apprendimento degli studenti.
- La tecnologia sostiene un insegnamento efficace della matematica.
- La tecnologia influenza gli stessi contenuti della matematica.

I 5 standards di Contenuto

Å Numeri e operazioni
- Algebra
- Geometria
- Misura
- Analisi dei dati e Probabilità

I 5 standards di Processo

Å Risolvere problemi (Problem solving)
- Argomentare e dimostrare
- Comunicare
- Collegare
- Rappresentare

- Questi dieci “Standards” non costituiscono una suddivisione netta del curriculum di matematica in parti disgiunte. La matematica è un corpo disciplinare unico, e dunque le aree descritte dagli standard sono strettamente interconnesse e integrate. I Processi si esplicano attraverso i Contenuti, e viceversa i contenuti si apprendono mediante i Processi.

Comunicare

- La comunicazione è una parte essenziale della matematica e dell'educazione matematica.
- Essa è un modo di condividere le idee e di rendere più chiara la comprensione. E' attraverso la comunicazione che le idee diventano oggetto di riflessione, di raffinamento, di discussione, e possono essere modificate.
- Il processo di comunicazione aiuta anche a costruire i significati e a rendere permanenti le idee, nella misura in cui esse vengono rese pubbliche.

- Quando gli studenti sono sfidati a pensare e a ragionare sulla matematica e a comunicare ad altri, in forma orale o scritta, i risultati del loro pensiero, essi imparano ad essere chiari e persuasivi.
- Ascoltare le spiegazioni di un altro dà agli studenti l'opportunità di approfondire la loro spessa comprensione.
- Le discussioni in cui idee matematiche vengono esplorate da varie prospettive servono ai partecipanti ad affinare il loro pensiero e a renderli capaci di trovare connessioni.

- Gli studenti che sono coinvolti in una discussione in cui devono giustificare le loro soluzioni – specialmente se c’è disaccordo – arriveranno a capire meglio la matematica proprio mentre cercano di convincere i compagni.
- In aggiunta questa attività serve a sviluppare il linguaggio appropriato per esprimere i contenuti della matematica e a rendersi conto della necessità della precisione tipica di questo linguaggio.

- Siccome la matematica di solito viene presentata usando un linguaggio simbolico, la comunicazione dei contenuti matematici in forma orale o scritta per lo più non viene riconosciuta come una componente importante dell'insegnamento. E per gli studenti non è spontaneo parlare di matematica. Gli insegnanti devono dunque aiutarli a imparare come si fa.

- Riflessione e comunicazione sono processi intrecciati nell'apprendimento della matematica. Comunicare al fine di riflettere può diventare un'attività normale, a condizione che gli insegnanti dedichino a ciò la dovuta attenzione e un'esplicita programmazione.
- I bambini piccoli ad esempio possono imparare a giustificare le loro risposte e a descrivere le loro strategie. I più grandicelli possono essere invitati a "pensare ad alta voce" e a riesaminare i loro ragionamenti di fronte alle domande non banali che gli pone l'insegnante o un compagno. Con l'esperienza, gli studenti diventano bravi ad organizzare e a registrare i loro pensieri.

- Per sostenere efficacemente la discussione in classe, l'insegnante deve costruire una comunità in cui gli studenti si sentano liberi di esprimere le loro idee. I più piccoli hanno bisogno dell'aiuto dell'insegnante per riuscire a scambiarsi idee di matematica in una forma che sia comprensibile per gli altri. Per gli studenti di questa età, imparare a vedere le cose con gli occhi di un altro è una vera sfida.

Nuove Indicazioni per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. (Fioroni, 2007)

Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. Nella scuola primaria si potrà utilizzare il gioco, che ha un ruolo cruciale nella comunicazione, nell'educazione al rispetto di regole condivise, nell'elaborazione di strategie adatte a contesti diversi.

La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico. Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola.

Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive. Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni, …) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti.

Comunicare
- a gesti,
- con linguaggio parlato,
- con linguaggio scritto

Comunicare:
- da insegnante a studente,
- da studente a studente,
- da studente a insegnante

L'altra faccia di comunicare: ascoltare.

Una particolare forma di comunicazione è la spiegazione (cfr. Mariotti, 2015), attività solitamente riservata all'insegnante.

Spiegare richiede di tenere conto dell'interlocutore, di farsene un modello mentale e di scegliere le cose da dire e il modo di dirlo sulla base dell'obiettivo di farsi capire e di far capire.

E' già stato notato che la competenza linguistica "evoluta" è solo in minima parte l'adesione a standard lessicali e sintattici sofisticati, ma sta molto di più nella consapevolezza dello scopo del proprio discorso e soprattutto nel farsi carico dell'interlocutore, delle sue caratteristiche, delle sue esigenze.

Questa abilità non è banale. E purtroppo non ci si lavora nella scuola, non nell'ora di matematica, dove gli studenti sono valutati per come eseguono e mai per come spiegano.

Questa cosa l'ho capita guardando i visi dei bambini ripresi nelle attività presentate in (Di Paola *et al.*, 2015).

Un primo esempio è tratto da un lavoro condotto da Di Paola e altri in Sicilia con bambini della scuola dell’infanzia e della scuola primaria alle prese con il gioco dello schermo.

Di Paola B., Ruisi M., Sunseri Trapani A. (2015). E questo dove lo metto? Esperienze geometriche in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria. In D’Amore B., Sbaragli S. (a cura di), *La didattica della Matematica, disciplina per l’apprendimento*, Bologna: Pitagora.

Importanza di giochi e attività di descrizione (di figure, di configurazioni, di mappe, eccetera).
La versione cinetica di questi giochi: il gioco della creta.
I temi di italiano (e le lezioni di italiano) possono farsi carico di questa esigenza.

Un secondo esempio è il resoconto della conclusione di una attività condotta in una seconda elementare, di esplorazione di regolarità aritmetiche (con avvio precoce all'algebra e all'argomentazione). Tutta l'attività è stata condotta in forma cooperativa, e riguarda ciò che si ottiene sommando tre numeri naturali consecutivi.

GIOCHIAMO CON I NUMERI

Insegnante
Carmela Pagnozzi

Relatore
Prof. Roberto Tortora

OBIETTIVO

Giocare con i numeri naturali a gruppi consecutivi per scoprire delle regolarità

Genitori adesso tocca a voi!!!!

DOMANDA

Dateci tre numeri consecutivi

Facciamo le loro somme

Che relazione c’è tra i risultati ottenuti e i tre numeri consecutivi?

Adesso date una serie ordinata

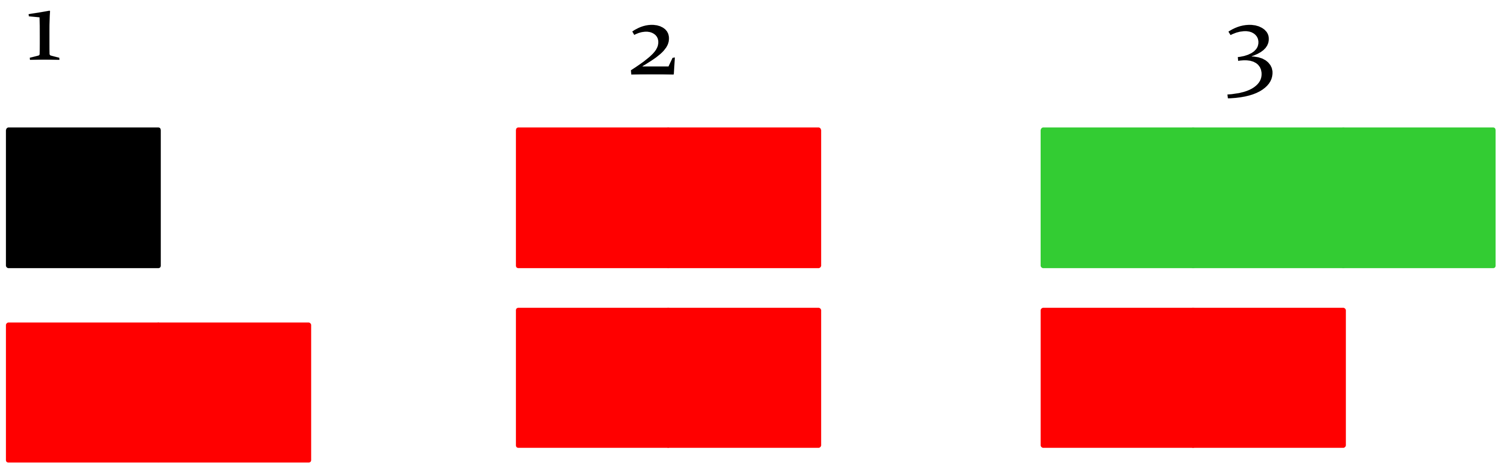
Quale altra regolarità notate?

Da queste somme risaliamo ai 3 numeri consecutivi

12-18- 27-39-45

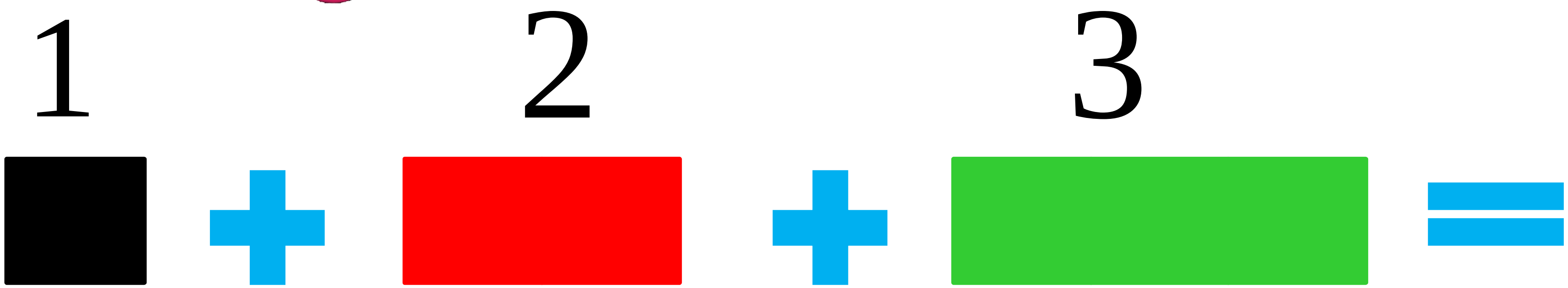
Quindi…

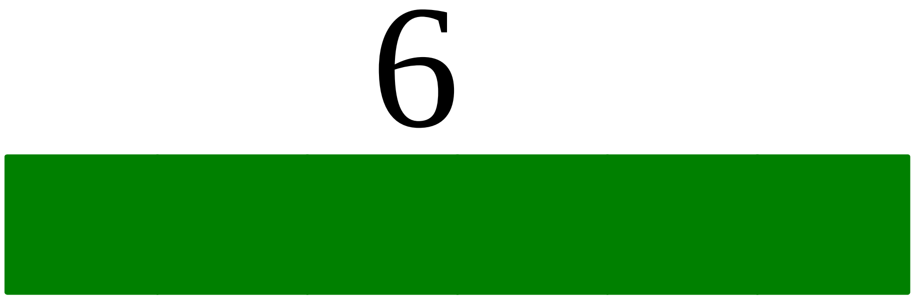
1 Regolarità



Se togliamo una unità all’ultima cifra e l’aggiungiamo alla prima, otteniamo 3 numeri uguali

2 Regolarità



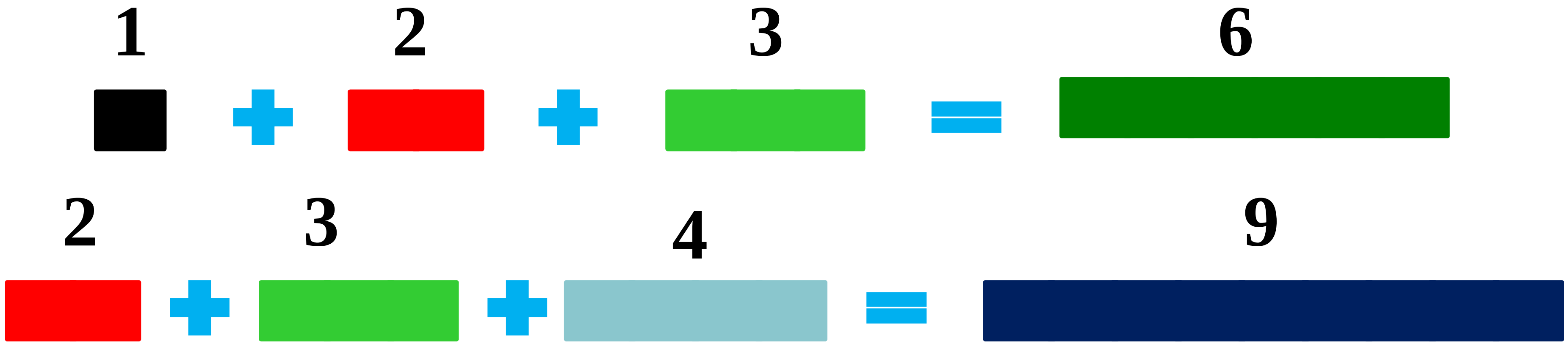


$6:3 = 2$

$6:2 = 3$

Il risultato è sempre multiplo di 3 e del numero centrale

3 Regolarità



Se il numero centrale è pari
anche il risultato è pari
Se il numero centrale è dispari
anche il risultato è dispari

4 Regolarità (serie ordinata)

1-2-3	3-4-5	5-6-7	7-8-9	9-10-11
6	12	18	24	30

La differenza tra una somma e l'altra è sempre costante e sempre un multiplo di 3 (in questo caso +6)

CONCLUSIONI

Questo laboratorio inserito nella programmazione didattica annuale, nonché in quella in itinere, non ha tolto tempo e spazio alle attività programmate perché gli alunni hanno:
é

- ***Rafforzato*** il calcolo orale;
- ***Consolidato*** il concetto della moltiplicazione, anche come addizione ripetuta;
- ***Sperimentato*** ancora una volta il triplo dei numeri;
- ***Imparato*** a riconoscere i numeri primi e i numeri composti e quindi i multipli e i divisori
- ***A considerare*** come utile la distinzione tra numeri pari e numeri dispari;
- ***Attuato*** diverse strategie di calcolo per fare proprie quelle più immediate;
- ***Messo in atto*** un lavoro di ricerca e di sperimentazione per cercare le regolarità.

Nel lavoro di ricerca le scoperte sono state condivise e fatte proprie dal gruppo e non dal singolo componente, favorendo così il senso della cooperazione e dellôintegrazione.

Le tre componenti del linguaggio

Sintassi

Semantica

Pragmatica

L'analisi delle varie componenti del linguaggio
(e dei concetti e procedure di cui sono costituite le dimostrazioni)

Le tre ggio

Sintassi

Pragmatica

Semantica

L'analisi delle varie componenti del linguaggio
(e dei concetti e procedure di cui sono costituite le dimostrazioni)

Le tre ... ggio

Sintassi

Pragmatica

Semantica

Le questioni inerenti il significato e la verità/falsità delle proposizioni

Le tre … ggio

L'analisi delle varie componenti del linguaggio
(e dei concetti e procedure di cui sono costituite le dimostrazioni)

Sintassi

Pragmatica

Semantica

Le questioni inerenti il significato e la verità/falsità delle proposizioni

L'uso di un costrutto linguistico nel contesto di una comunicazione fra soggetti

La definizione di VERITAô secondo Tarski

La definizione di VERITAô secondo Tarski

Il numero 5 è maggiore del numero 3

La definizione di VERITAô secondo Tarski

<u>Il numero 5</u>   è maggiore del   numero 3

La definizione di VERITAô secondo Tarski

<u>Il numero 5</u> è maggiore del numero 3

5

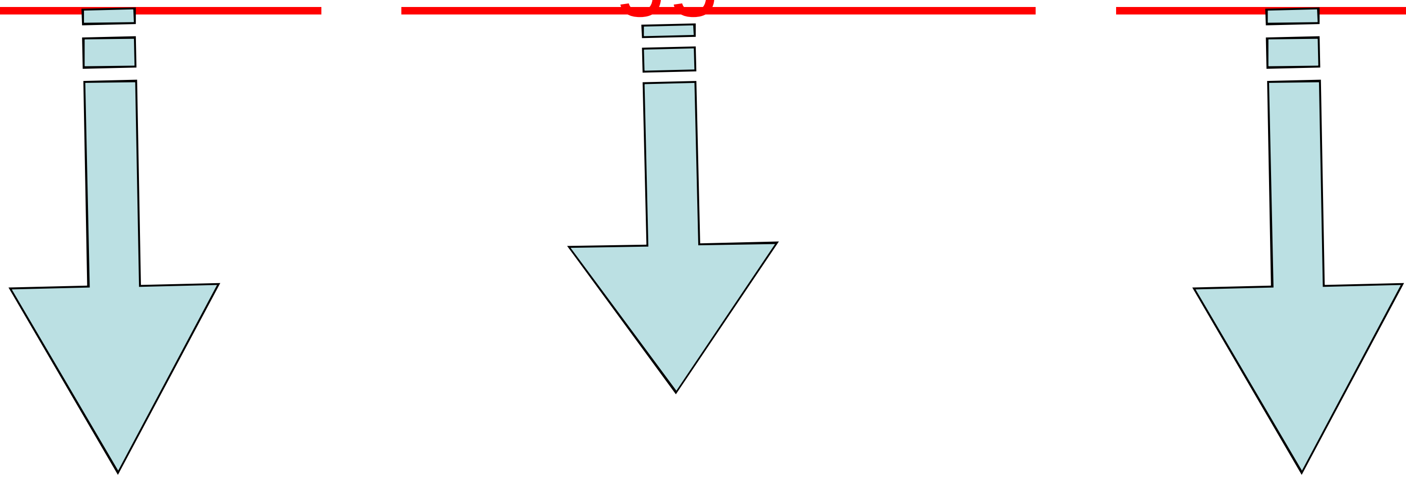
La definizione di VERITAô secondo Tarski

Il numero 5 è maggiore del numero 3

5 3

La definizione di VERITAô secondo Tarski

<u>Il numero 5</u>   <u>è maggiore del</u>   <u>numero 3</u>



5   3

La definizione di VERITAô secondo Tarski

Il numero 5   è maggiore del   numero 3

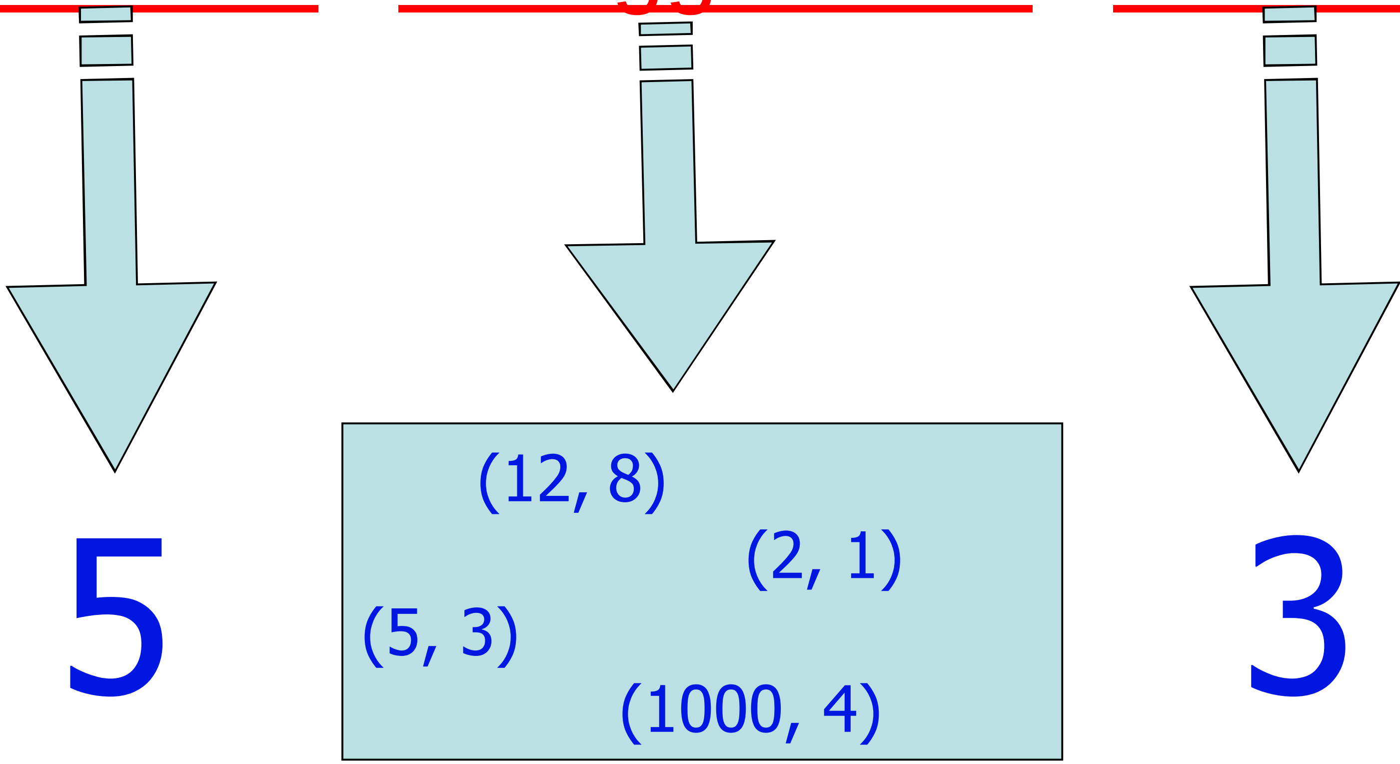
5

Tutte le coppie di numeri dove il primo è maggiore del secondo

3

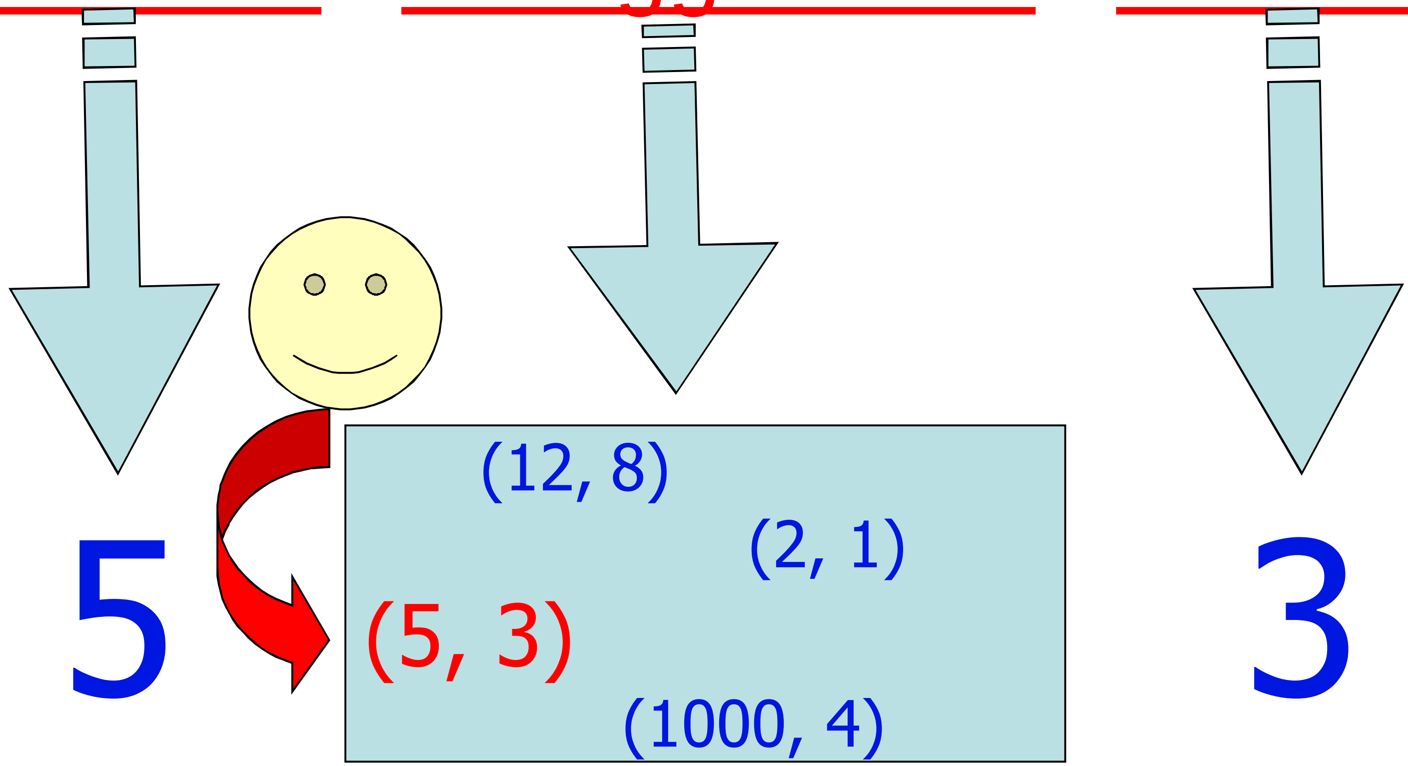
La definizione di VERITAô secondo Tarski

Il numero 5 è maggiore del numero 3



La definizione di VERITAô secondo Tarski

Il numero 5 è maggiore del numero 3



La definizione di VERITAô
seco

La proposizione
ñ5 è maggiore di 3ò
è VERA!

Il numero 5

5

(12, 8)

(2, 1)

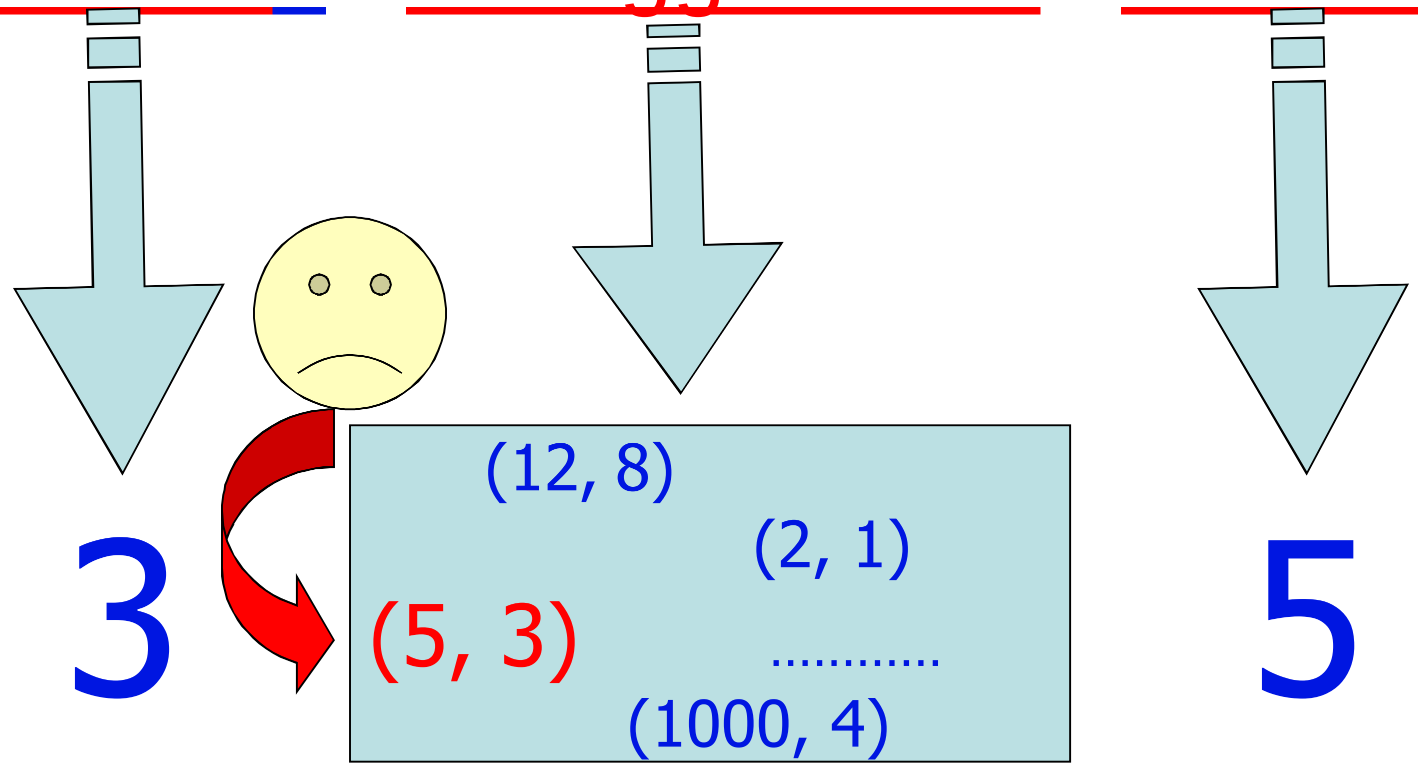
(5, 3)

(1000, 4)

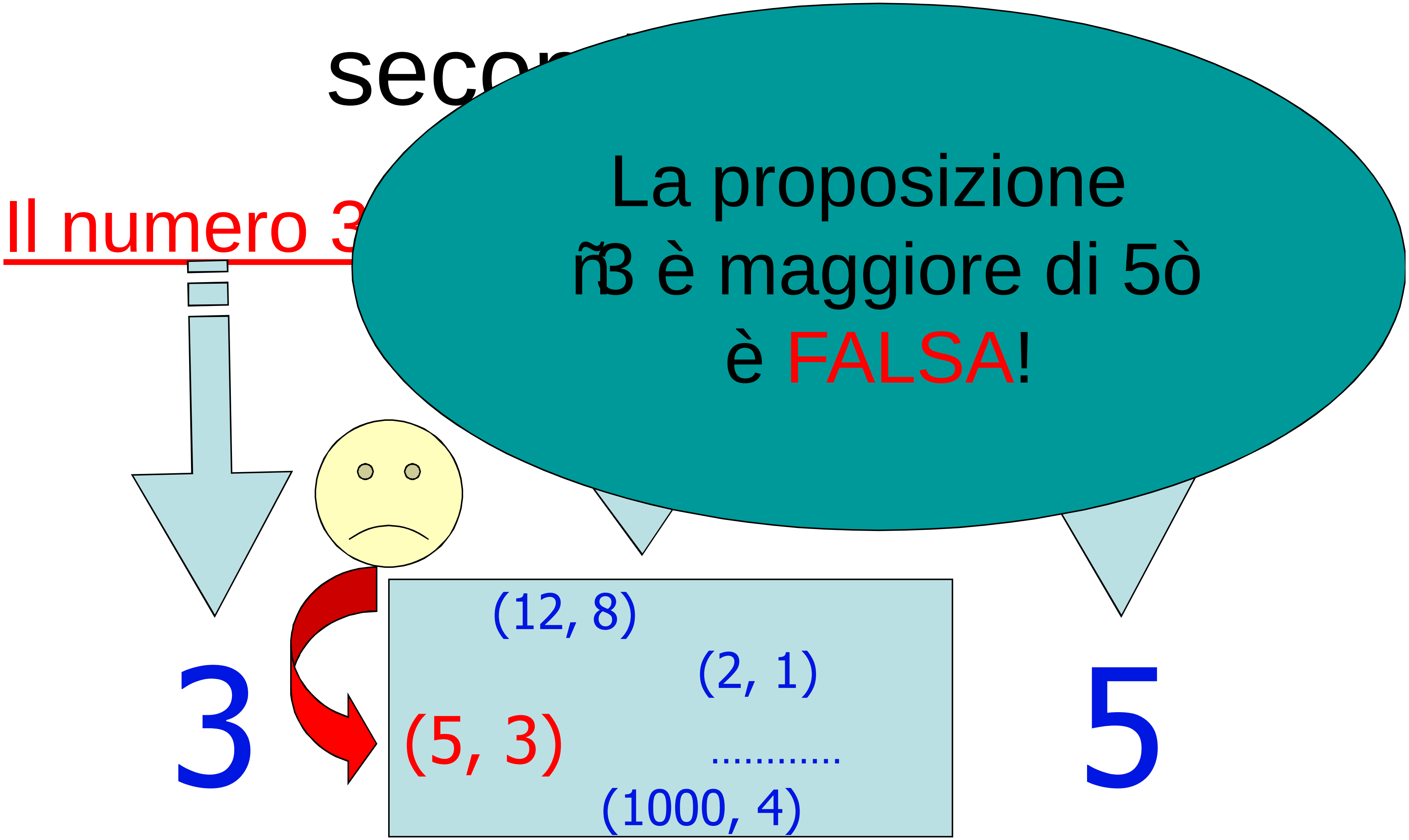
3

La definizione di VERITAô secondo Tarski

Il numero 3 è maggiore del numero 5



La definizione di VERITAô seco



Che cosa si può fare per trasferire in una situazione concreta l'idea di Tarski?

(Diceva Leibniz: "Calculemus")

Si può dire di una frase come "Giovanni è simpatico" se è vera o falsa?

Una classificazione dei linguaggi

(senza pretese di correttezza tassonomica o di esaustività)

- Linguaggi formali (logica, matematica, informatica)
- Lingue comuni (con tutte le distinzioni al loro interno)
- In particolare forme sincopate derivate dalle lingue comuni
- Linguaggio delle immagini, dei gesti, del corpo

Da *Repubblica* on-line del 29/12/2014

Norman, nave ferma al largo, ancora a bordo in 149 video Arrivati 49 in salvo a Bari Foto I volti - video - foto diretta tv Un naufrago turco nel porto pugliese: "Ho visto 4 morti". La Marina non conferma Video In volo su nave in fiamme - foto - Video Passeggero: "In balìa di freddo e fumo" - foto Dalla Grecia verso Ancona con 478 persone, 44 gli italiani (5 già in Puglia) - video **Audio Il "mayday" / Il caso Ultimo controllo, 6 carenze: "Riparare presto"** di M.MINELLA **Il comandante è spezzino, parla la figlia - Campani tre marittimi - foto - Feriti a Otranto video Moglie della vittima Scheda Incidenti - Ragazze: "Come il Titanic" - Soprano attesa in Toscana Video Madre e bimbi salvati foto**

	Sintassi	Semantica	Pragmatica
Linguaggi formali	SI	SI	NO ?
Lingua comune	SI	SI	SI
Forme sincopate	SI ?	NO ?	SI
Altri linguaggi	SI ?	NO ?	SI

Verso la precisione terminologica. Ma anche elogio dell’ambiguità.

Riccioli d'oro e i tre orsi

ovvero:

La proporzionalità con i bambini,

tra narrazione e costruzioni

Riccioli d’oro e i tre orsi

Robert Southey 1837

La storia

Il testo

Le proporzioni

La storia

“C’erano una volta tre orsi che vivevano in una casina nella foresta. C’era papà orso grande e grosso, c’era mamma orsa grande la metà, ed infine vi era un orsetto piccolo grosso la metà della mamma. Una bella mattina i tre orsi facevano colazione e papà orso disse: «Questa zuppa è troppo calda. Aspettiamo che si raffreddi facendo una passeggiata nel bosco».
Difatti i tre orsi uscirono dalla loro casetta avviandosi nella foresta. Mentre erano fuori, capitò da quelle parti una bella bambina bionda di nome Riccioli d’oro, che vedendo la casetta nel bosco e domandandosi chi vi abitasse, bussò alla porta. Nessuno aprì, ma la bimba, che era molto curiosa, entrò ugualmente, vedendo una bella tavola apparecchiata per tre.

C’era una ciotola grossa grossa, una scodella grossa la metà ed una grossa la metà di quest’ultima. Riccioli d’oro assaggiò la zuppa nella scodella grossa: «Oh! È troppo calda e poi è troppo grossa e pesante per le mie piccole manine» esclamò; allora assaggiò la zuppa che era nella scodella grossa la metà: «Oh! È troppo fredda!». Vi era rimasta solo la scodellina piccola.
Riccioli d’oro sorseggiò la zuppa anche da quest’ultima: «Oh! Questa si che va bene!» e soddisfatta, vuotò completamente la piccola ciotola.
Poi entrò in un’altra stanza dove vide tre seggiole. C’era una seggiola grossa grossa, una seggiola grossa la metà, ed una seggiolina grossa la metà di quest’ultima. Riccioli d’oro si sedette sulla seggiola grossa grossa: «Oh! È troppo dura!» disse. Allora si sedette in quella grossa la metà: «Oh! È troppo scomoda!» esclamò, poi si sedette in quella piccola piccola: «Oh! Questa si che va bene!», ma la sedia si ruppe e Riccioli d’oro cadendo si fece male il piedino e sentì il bisogno di sdraiarsi un po’.

Entrò quindi in un'altra stanza. Là vide tre letti: c'era un letto grosso grosso, uno grosso la metà, ed uno grosso la metà di quello di mamma orsa. Riccioli d'oro si sdraiò sul letto grosso grosso: «Oh! Questo è troppo duro!» disse. Provò allora il letto grosso la metà: «Oh! Questo è troppo soffice!» esclamò, poi si stese su quello del piccolo orsetto e disse: «Oh! Questo va proprio bene!» e comodamente sdraiata sul lettino, la bimba si addormentò. Intanto i tre orsi fecero ritorno a casa; guardarono la tavola e papà orso, grosso grosso, disse, con la sua voce forte forte: «Qualcuno ha assaggiato la mia zuppa!». Mamma orsa, grossa la metà, disse: «Qualcuno ha assaggiato la mia zuppa!». Infine, il piccolo orsetto esclamò: «Qualcuno ha assaggiato la mia zuppa, e l'ha bevuta tutta!». I tre orsi entrarono nell'altra camera. Babbo orso grosso grosso disse: «Qualcuno si è seduto sulla mia sedia!». Mamma orsa, grossa la metà, disse: «Qualcuno si è seduto sulla mia sedia!». L'orsetto grosso la metà della mamma esclamò: «Qualcuno si è seduto sulla mia sedia e l'ha rotta!».

Ecco che i tre orsi entrarono nella camera da letto. Babbo orso grosso grosso disse: «Qualcuno si è steso sul mio letto!». Mamma orsa, grossa la metà, disse:«Qualcuno si è è steso sul mio letto!». Infine il piccolo orso gridò: «Qualcuno si è steso sul mio letto, ed eccola qua!».
Quell'urlo acuto svegliò Riccioli d'oro di soprassalto. Quando la bimba vide i tre orsi davanti a se, spaventata più che mai, saltò giù dal lettino, corse fuori dalla stanza, saltò fuori dalla finestrella bassa e fuggì via nella foresta, tanto velocemente come mai le sue gambe l'avevano fatta correre. Correva dalla sua mamma e una volta giunta a casa le raccontò tutto quello che era successo ma la mamma non le credette. "

Bambini aiutate voi la piccola Riccioli d'oro a ricostruire tutto ciò che le è successo. Provate a rappresentare i tre orsi, le tre ciotole, le tre sedie e i tre lettini cosicché la mamma di Riccioli d'oro possa crederle!!

Struttura narrativa:

✓ Il testo è stato riscritto rispetto alla proposta originale per adattarlo alle esigenze didattiche del progetto;

✓ La situazione problematica è posta dalla stessa Riccioli d'oro agli alunni;

✓ Presenta blocchi narrativi che si ripetono;

✓ Il racconto non si conclude con le classiche richieste dei problemi matematici da risolvere.

Linguaggio:

Durante il testo si fa ricorso a:

✓ linguaggio semplice e familiare,vicino all'esperienze dei bambini;

✓ espressioni gergali, di uso quotidiano:

"*una bella mattina…*" "*capitò da quelle parti…*" "*vuotò completamente la piccola ciotola*" "*svegliò Riccioli d'oro di soprassalto…*"

Sintassi:

Durante il testo si fa ricorso a:

✓uso preponderante degli aggettivi, al fine di rafforzare il senso evocativo della proporzionalità: "*papà orso grosso grosso, mamma orsa grossa la metà, e il piccolo orsetto grosso la metà di quest'ultima…*"

✓Ogni oggetto (ciotola, sedia letto) acquisisce lo stesso aggettivo del personaggio al quale appartiene: "*c'era una ciotola grossa grossa, una grossa la metà e una grossa la metà di quest'ultima…*"

Proporzionalità

Metà
Doppio
Quadruplo

Concetto di > e <

Struttura moltiplicativa

Unità di misura

Struttura additiva

Le tre dimensioni

Il progetto

Fase 1
Presentazione del racconto

Fase 2
Conversazione guidata

Fase 3
La rappresentazione grafica

Fase 4
La misurazione

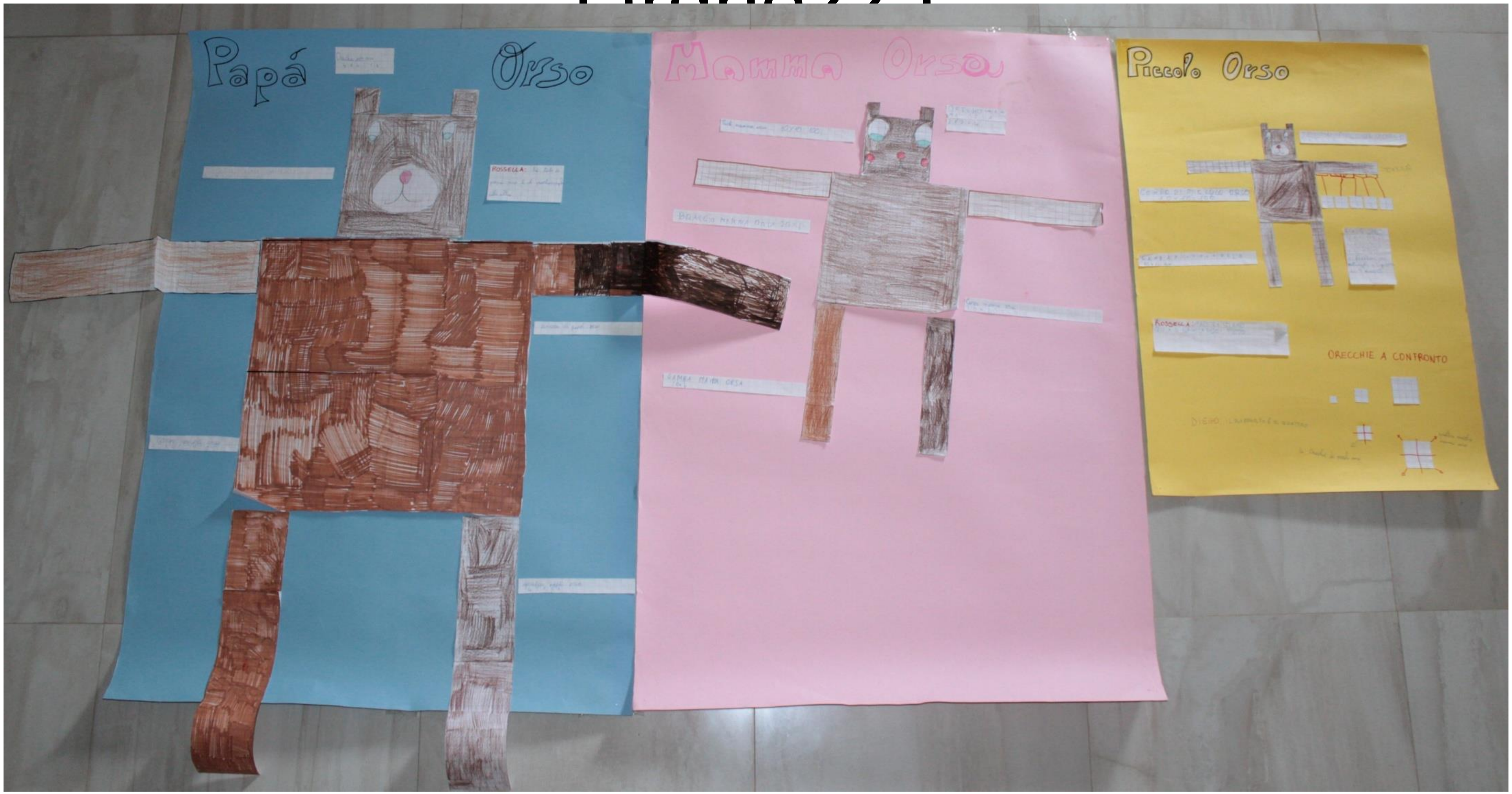
Fase 5
Alla scoperta delle tre dimensioni

Fase 6
Verifica

I protagonisti

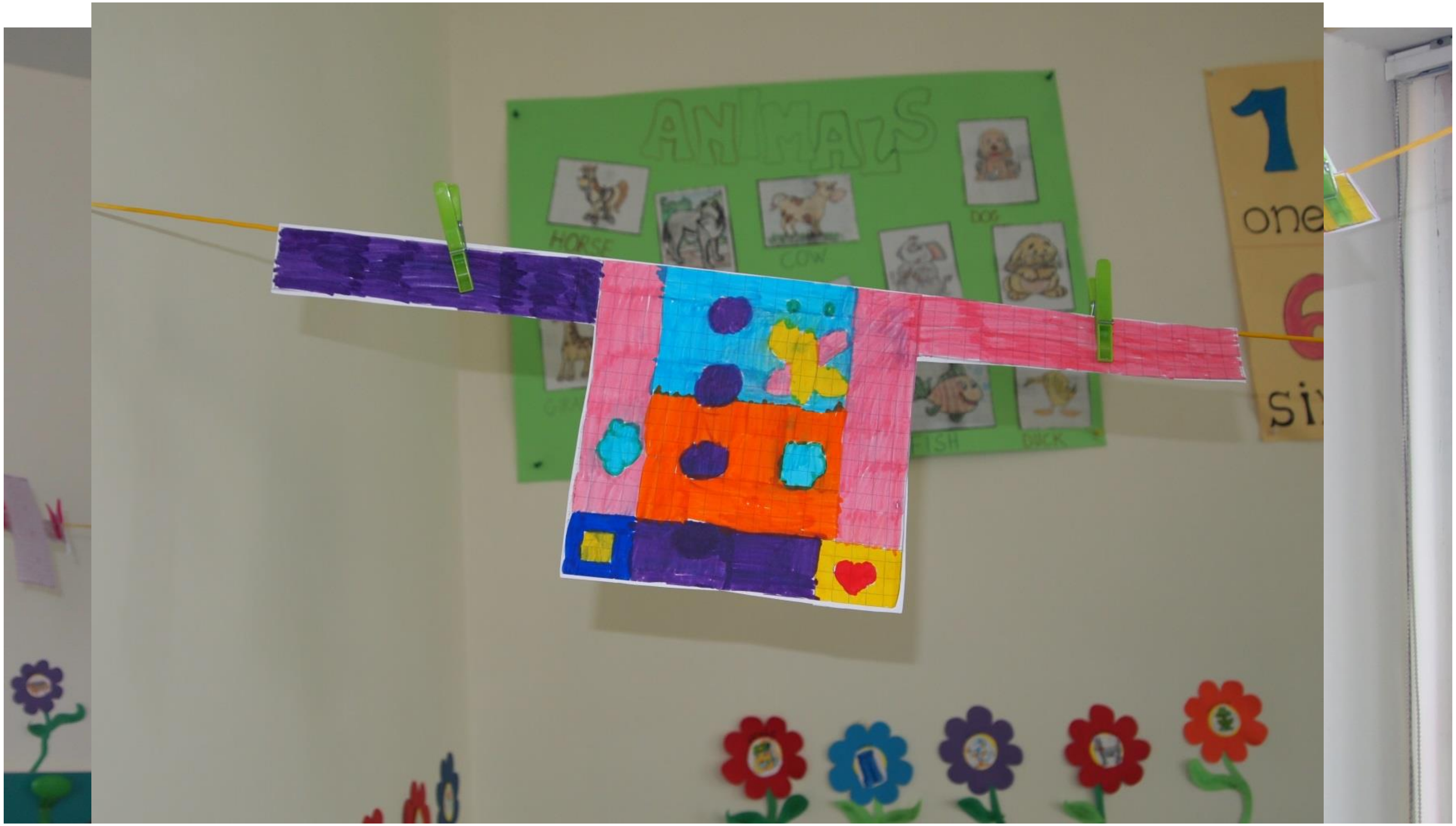
I tre orsi

2 DIMENSIONI: Altezza e larghezza



Verifica

Costruiamo maglie per i tre orsi



Manca la vita

Il progetto di Mattia

3 DIMENSIONI:

<u>Altezza, larghezza e profondità</u>

Che cos'è la profondità?

"E' quando fai un tuffo e vedi quanto è profondo il mare."

"E' quando entri in un tunnel, quello buio. E hai paura che non finisce più!"

"E' quando scavi e fai un fosso sulla sabbia e ci entri dentro. Quello è profondo!"

Cubi e cubetti

Cubi e cubetti

Un'altra attività sulla nozione di "numeri consecutivi"

I numeri consecutivi.

Prendi quattro numeri consecutivi; moltiplica i medi fra loro e gli estremi fra loro; sottrai. Cosa ottieni? Che succede se prendi altri quattro numeri?

Numeri consecutivi per farci operazioni, congetture e dimostrazioni. Ma tutto come pretesto per discutere dell'intreccio tra lingua naturale (significato non banale della parola "consecutivi"), linguaggio dell'algebra (sono "consecutive" le lettere *a b c d* dell'alfabeto italiano?), ambiguità ineliminabile dalla comunicazione, e opportunità offerte da tali ambiguità sul versante didattico.

ELOGIO DELL'AMBIGUITA'.

L'ambiguità è una preziosa risorsa didattica.

Ambiguità non vuol dire svalutare le caratteristiche della matematica né darla in pasto a chi nega il valore rigoroso della scienza e di questa disciplina in particolare.

Ambiguità significa riconoscere alle dette caratteristiche il ruolo di ideali cui costantemente tendere, e che appartengono ad una formalizzazione intesa come continuamente perfettibile, esito di lunghi processi storici e cognitivi.

Ma la matematica che si usa, e soprattutto quella che si apprende è decisamente un'altra. Può essere ampiamente modellata e personalizzata a seconda delle necessità e conosciuta e interpretata in modi diversi da persone diverse. Sta in ciò la difficoltà e insieme il fascino del compito di chi la insegna.

E nel frattempo la matematica resta assoluta, ma solo quella, con buon pace di tutti, ufficiale o presunta tale.

Parole ambigue

Nomenclatura ambigua o infelice

- Numeri reali/immaginari
- Quoziente, dividere
- Altezza
- Positivo/negativo - affermazione/negazione
- La nomenclatura sui limiti
- Definizioni inclusive/esclusive in geometria
- Figura geometrica

Il primo ciclo è il luogo e il tempo del graduale passaggio dal concreto all'astratto.
Mi richiamo all'attività proposta da Di Martino, in cui c'era da dividere in parti alcune barrette di cioccolato.
"Dividere": che significa?
Può essere un'azione e porta allora con sé tutte le problematiche di un'azione concreta: quando è facile e quando è difficile, come si fa, occorrono strumenti, che grado di precisione vogliamo o possiamo reggiungere, e così via.
E può essere un'operazione, e lo scenario cambia.
E sui "significati" della nozione formale di divisione potremmo discutere fino a tardi!

Definizioni inclusive/esclusive: eterno tormento
Vediamo alcuni esempi di frammenti di classificazione delle cose più disparate.
Le classificazioni sono una cosa importante. Diceva U. Eco che la cultura è elencazione e classificazione.

EQUINI
- **cavalli**
- **asini**
- **muli**
- **zebre**
- **…**

BELLE ARTI
- **pittura**
- **scultura**
- **architettura**
- **musica**
- **…**

DITA

- pollice
- indice
- medio
- anulare
- mignolo

DITA DEL PIEDE

- alluce
- ??
- ??
- ??
- ??

QUADRILATERI
CON ANGOLI RETTI

- quadrati
- con lati uguali a 2 a 2

DITA

- **pollice**
- **indice**
- **medio**
- **anulare**
- **mignolo**

DITA DEL PIEDE

- **alluce**
- **??**
- **??**
- **??**
- **??**

RETTANGOLI

- **quadrati**
- **con lati uguali a 2 a 2**

DITA

pollice
indice
medio
anulare
mignolo

DITA DEL PIEDE

alluce
??
??
??
??

QUADRILATERI
CON ANGOLI RETTI

quadrati
rettangoli

Non sempre c’è un nome per ogni nodo!

Non tutti gli oggetti hanno un nome!

Qualche nome si usa per cose diverse!

E’ il caso della parola “rettangolo”, contesa fra due diversi nodi!
Non c’è nulla da fare, se il mondo va così.
Ma non è grave, basta saperlo e provare a mettersi d’accordo.

Altri casi, già citati da Ferrari: retta/curva; numero naturale/razionale/reale

Rivedere i contenuti della matematica

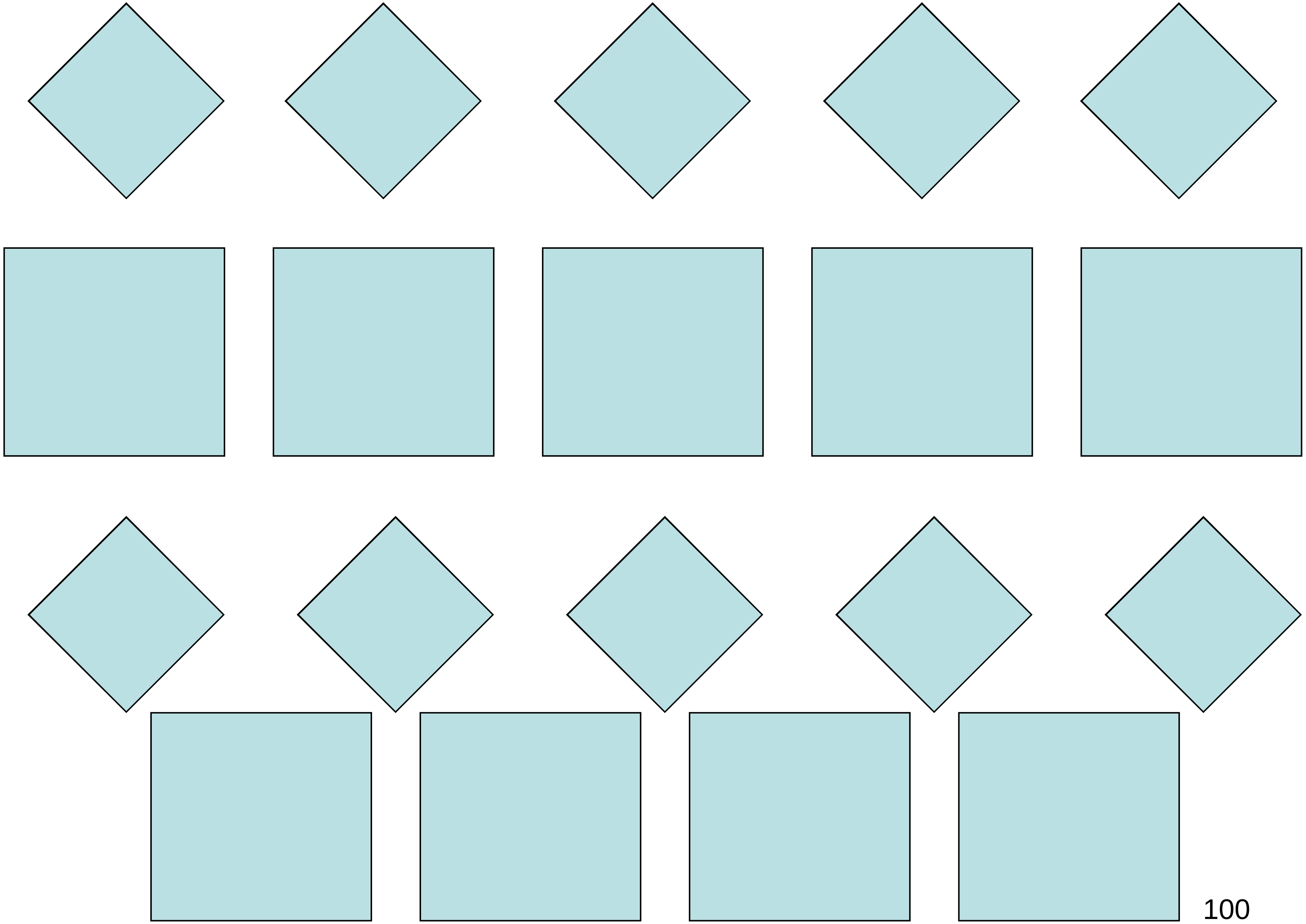
Definizioni inclusive/esclusive: chi ha ragione?

Ma sarà vero quello che si dice, che è conveniente che un rettangolo sia anche un quadrato? Conveniente per chi?

Chi autorizza i matematici a impossessarsi delle parole di senso comune e ad imporre la propria definizione?

Va bene, concediamoglielo, ma purché non pretendano che la loro è per tutti la scelta migliore!

Diverso e ben più grave è il caso dei nomi in geometria che dipendono dall'orientamento:
base e altezza di un rettangolo, lato obliquo di un trapezio, e così via, che generano insidiosi e resistenti misconcetti rinforzati dai disegni stereotipati. Vedi anche la confusione tra rette verticali e rette perpendicolari, insieme linguistica e concettuale.
Esaminiamo il caso speciale del quadrato/rombo.
Mentre sappiamo che ogni quadrato è un rombo, un diffuso misconcetto sostiene che non è così, ma non tanto perché il rombo abbia lati non tutti uguali, piuttosto perché il rombo "poggia sulla punta".



Un esempio.
In una recente mostra dedicata alle opere di Escher erano stati predisposti molti pannelli esplicativi, rivolti specialmente alle scolaresche. Nei frequenti casi in cui nei dipinti comparivano alternanze di quadrati con i lati paralleli ai bordi della cornice e quadrati con i lati orientati a 45° rispetto ai precedenti, le didascalie parlavano sistematicamente di quadrati e rombi.

Un errore intollerabile per un matematico.

Non che i rombi non siano quadrati, ma qualificare un quadrilatero come quadrato o rombo in dipendenza del suo solo orientamento spaziale, e non dell'uguaglianza o meno dei suoi lati, è grave!
Eppure è uso assai comune.
Ma il mio intento non è sanzionare errori, piuttosto interpretarli e se possibile usarli.
A mio avviso, questo è un tipico caso in cui l'errore è certamente grave, ma è un errore di inopportunità, e consiste nell'uso di un linguaggio troppo colloquiale inadatto ad un contesto pubblico e avente per giunta chiare finalità educative.
Sostengo che molto spesso anche gli errori degli studenti sono di questa natura, e come tali andrebbero rubricati.

Sulla relatività della matematica e sulla sua dipendenza dal contesto

Distinguiamo due punti di vista, peraltro interconnessi:

- teorico
- pedagogico.

Sul piano teorico è nota la distinzione tra la concezione cosiddetta platonista della matematica, secondo cui i concetti della matematica preesistono e sono indipendenti da noi,

e l'altra secondo cui le nozioni di matematica sono libere costruzioni umane, soggette come tali alla fallibilità di ogni altra opera umana e all'evoluzione nel tempo.

Ma in tutti e due i casi, anche se si ammette che ad esempio i numeri naturali stiano da qualche parte fuori di noi, nella natura o nell'empireo, resta il fatto che nella testa di ciascuno di noi, scienziati compresi, se ne forma una copia più o meno imperfetta.

Ed è con questi numeri che dobbiamo fare i conti.

Diventano così centrali i processi comunicativi, sia quelli propriamente detti, cioè interpersonali, sia quelli intrapersonali, corrispondenti all'azione del pensare.

Anche attribuendo alla matematica caratteristiche di certezza e perfezione, resta che ogni comunicazione è essenzialmente imperfetta.

Ne segue che, in linea di principio, non ci sono dimostrazioni matematiche sicure, se è vero che ogni dimostrazione è stata pensata una prima volta, poi detta e scritta e ripetuta forse innumerevoli volte, ma sempre come contenuto di un atto comunicativo.
E se è assai improbabile, per motivi statistici, che finora sia sfuggito a tutti gli osservatori un baco nel Teorema di Pitagora, è altrettanto vero che la probabilità di errore non è trascurabile per i risultati meno noti e più difficili che si producono nella ricerca matematica, e del resto non è affatto raro scoprire imperfezioni, mancanze o veri e propri errori nei moderni lavori.

Lasciamo questi fatti speculativi e veniamo al versante dell'insegnamento. Qui la comunicazione diventa centrale e non è più quella rarefatta e vicina alla perfezione dei testi per specialisti. Ne segue che ogni nozione di cui si parla a scuola è per necessità approssimativa.
Addirittura si potrebbe suggestivamente sostenere che tutta l'educazione matematica impartita nel corso dei lunghi anni di scuola non è altro che un percorso di approssimazioni successive ai concetti della matematica.

Si veda ad esempio la discussione sulla nozione di triangolo in Ercole Castagnola e R. Tortora, Che cos'è un triangolo? Un excursus critico fra le varie definizioni. *Progetto Alice*, vol. 10, 2009, pagg. 421-449.

E bisogna anche insegnare agli studenti ad aggiustare il proprio linguaggio sul contesto.

In un recente libro di Stefano Bartezzaghi (*Come dire. Galateo della comunicazione*. Milano: Mondadori, 2011), dedicato all'uso corretto della lingua italiana, si legge che per ogni locuzione la domanda giusta da porsi non è

"*Come si dice?*",

ma piuttosto

"*Quanto si addice?*".

Lo stesso vale per la matematica.

Se non ci occupiamo serenamente di questi elementi di imperfezione presenti nella matematica della scuola,

corriamo seriamente il rischio di confinare la matematica in un dominio separato dalla realtà,

il rischio che la matematica si usi solo a scuola e poi nel resto della vita si regredisca ad approcci irrazionali e inadeguati.

E parliamo allora degli errori

Mi rifaccio soprattutto al bel libro di Raffaella Borasi:
Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors.
Norwood, New Jersey, USA, 1996.
L'Autrice propone una radicale rivalutazione dell'errore nell'attività scolastica.
Non solo, come prima, strumento diagnostico prezioso nelle mani dell'insegnante, ma tappa insostituibile dell'apprendimento.

Borasi si rifà al significato etimologico della parola errore, quello di un cammino senza una direzione o una meta precisa, per affermare che spesso solo un tale tipo di esplorazione riesce a stimolare adeguatamente la curiosità e permette di conquistare concetti difficili, scoprire collegamenti tra cose diverse, confrontare idee e strategie, mettere alla prova procedure.

Vi si può leggere un elogio della lentezza nel fare matematica
(cfr. R. Tortora, Slow Mathematics. Manifesto per la difesa del buon gusto. In *Matematica e didattica: come privilegiare l'apprendimento*, a cura di B. D'Amore, Pitagora, Bologna, 1999, pagg. 19-25).

< l’errore non è (QUASI) mai assoluto, ma (QUASI) sempre dipende dal contesto >

E’ una tesi un po’ provocatoria.

Ma non vorrei essere frainteso.

Proverò a insinuare dubbi su cosa sia un errore e se e quando se ne possa parlare.

Ma senza arrivare a conclusioni del tipo:

“Niente è un errore, quindi bando alle regole e bando alle valutazioni”

- in altre parole: “Tutte le vacche sono grigie”
- o anche: “Tutti colpevoli, nessun colpevole”

Che cosa significa errore

Proviamo ad approfondire che cosa significa propriamente errore.
Non è facile.
Occorrerebbero molto tempo e molte competenze per condurre un'analisi della parola da vari punti di vista (lessicale, etimologico, storico) e anche per distinguerne il significato da quello delle molte altre parole variamente collegate ad essa (sia in italiano che in altre lingue), come falso/falsità, menzogna, inganno, peccato, eccetera.

La sua etimologia collega la parola ad “errare”, cioè andarsene in giro senza una meta precisa o anche cercando la strada.

Filosofi e altri studiosi hanno sottolineato in vario modo l’importanza dell’errore sul piano etico e gnoseologico, sia per un individuo, che per la società nel suo insieme.

La nozione di errore ha connotazioni in ambito cognitivo, etico, sociale.

Qui limitiamoci a considerare l’errore come la violazione di una regola. Per meglio orientarsi conviene distinguere, come si fa in ambito giuridico, il livello di importanza della regola.

Nel caso della matematica, ci sono regole, o meglio fatti, attinenti alla natura degli oggetti disciplinari, che vanno dai fatti “singolari” del tipo $2 + 2 = 4$ (ed è allora un errore dire che $2 + 2 = 5$) a fatti generali, come le proprietà delle operazioni aritmetiche (e in questo caso gli errori sono di algebra).
Queste “regole” hanno priorità alta e qui non sembra ci siano dubbi nell’identificare gli errori.
Eppure anche a questo livello non dobbiamo dimenticare un insegnamento importante della storia, e cioè che i più significativi avanzamenti della conoscenza spesso avvengono proprio col negare validità a fatti concepiti fino a quel momento come indiscutibili.

Un esempio fra tutti: la nozione di infinito secondo Dedekind, che viola il principio di Aristotele secondo cui il tutto è maggiore della parte.
Una bella domanda è: “A che cosa porta provare a ragionare su $2 + 2 = 5$?”
Attenzione: non voglio mettere qui gli studenti di una classe normale al livello dei grandi geni della storia, il punto non è questo. Ma può accadere benissimo che dietro ad un errore comune si nascondano significative analogie con fatti della scienza.
Spesso un errore non è che l’adesione cocciuta ad uno schema mostratosi finora valido, senza accorgerci che una situazione nuova richiede di cambiare punto di vista.

Propongo l'esempio un po' difficile, di un errore comune che viene di solito giudicato in modo severo: lo sviluppo del quadrato di un binomio eseguito con disinvoltura al modo seguente:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

Invece che al modo corretto $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Il quadrato non è una funzione lineare, ma giustappunto quadratica e dunque non ha la proprietà che è caratteristica delle funzioni lineari, cioè che:

$$f(a + b) = f(a) + f(b),$$

una proprietà così bella e così ricca di conseguenze, che uno vorrebbe poterne godere i benefici sempre, quando lecitamente si può e magari anche quando non si può.

Ebbene, proprio questo si fa continuamente in matematica, in fisica e in altri campi, ed è quello che si chiama processo di linearizzazione.

Ad esempio molte leggi della fisica vengono presentate in termini di proporzionalità diretta fra due grandezze (l'allungamento di una molla in funzione della forza applicata, per fare un solo esempio), proprio per poter beneficiare dei vantaggi della linearità.

Anche se quasi sempre i legami fra le due grandezze in gioco sono più complicati, si preferisce darne una versione semplificata e approssimata in termini lineari. Naturalmente occorre saperlo, avere cioè consapevolezza e controllo delle approssimazioni che si adottano.

Lo si fa anche in matematica: tutte le volte che si costruiscono nuovi valori intermedi di una funzione a partire da un certo numero di valori calcolati con precisione, con il tipico metodo dell'interpolazione lineare, si *fa finta* che per quella funzione f valga la proprietà $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Lo si fa per il logaritmo, per l'esponenziale, per le funzioni trigonometriche e così via, tutte funzioni, sia chiaro, per le quali quella benedetta uguaglianza non è assolutamente vera. L'idea matematica sottostante trova la sua codifica rigorosa nello sviluppo di una funzione in serie di Taylor, dove l'interpolazione lineare corrisponde ad usare delle varie potenze solo la prima.

Pensando a ciò, è lecito chiedersi se sia davvero un errore scrivere $(a + b)^2 = a^2 + b^2$?

Io la metterei così: è troppo semplice dire che è un errore e basta, quando invece:

1. questa uguaglianza è approssimativa e corrisponde ad attribuire al quadrato una proprietà di linearità che esso non possiede;
2. questa attribuzione si fa spesso in matematica e nelle sue applicazioni, perché consente di ottenere importanti vantaggi, ma per potersi considerare accettabile occorrono appropriate ipotesi sulla grandezza dei numeri in gioco;
3. nell'ambito del calcolo algebrico l'approssimazione che tale uguaglianza esprime non è in ogni caso appropriata.

La scelta di scrivere $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ in luogo della versione corretta $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, risponde senz'altro ad un'esigenza di semplicità, alla voglia (certo, inconsapevole) di estendere regole efficaci oltre i loro confini noti di validità, nella speranza o fiducia che continuino a funzionare. Questo comportamento è una costante strategia degli esseri umani, spesso efficace. Qual è il compito della scuola e degli insegnanti? Permettere agli studenti di capire quando e perché occorre cambiare le regole e quando invece conviene continuare a usare le vecchie.

Il problema è avere consapevolezza e controllo delle approssimazioni; e scegliere, fra le varie opzioni sempre disponibili, quella che meglio si addice al contesto in cui ci si trova.
Troppo ambizioso? Forse.
Difficile da dire agli studenti? Certo, se il discorso parte da noi.
Ma quando l'"errore" parte da loro, attribuirlo ad una intuizione, e dargli credito, spiegando magari che un'altra strada è possibile e magari preferibile, può essere un ottimo approccio didattico.

Ad un livello più basso nella gerarchia di importanza delle regole, ci sono le regole di tipo procedurale o attinenti alla scrittura.
Vanno dall'uso delle parentesi, e dei loro vari tipi,
alle procedure per la risoluzione delle equazioni
(incognita a sinistra, termini noti a destra),
alla nomenclatura delle nozioni geometriche
(definizioni inclusive/esclusive, già esaminate),
fino a mille piccole prescrizioni il cui scopo sembra soprattutto quello di ottenere prestazioni uniformi dagli studenti.

Vediamo anche qui un esempio. Sia da calcolare l'area di un triangolo di cui è data la base e l'altezza, poniamo 5m e 6m. Come si fa? Così:

$$5 \times 6 = 30:2 = 15 \text{ m}^2$$

O no? E', come tutti sanno, un comunissimo errore: con la proprietà transitiva dell'uguaglianza, se ne ricava infatti 5´6 = 15, uno strafalcione!

Ma sfido chiunque a negare di aver scritto sequenze di operazioni di questo tipo su un qualche pezzo di carta per uso personale. Lo facciamo infatti, senza batter ciglio, tutte le volte che procediamo mano a mano che acquisiamo i dati. Ma allora, che cosa rappresenta davvero la scrittura corretta, cioè la seguente?

$$\frac{5\times 6}{2}=\frac{30}{2}=15$$

Essa contiene il compendio della sequenza di operazioni effettuate, ed è il modo migliore per dare *stabilità* a quanto eseguito e renderlo *comunicabile* senza ambiguità; dunque una sistemazione a posteriori.

Bene: una delle acquisizioni della scrittura matematica e algebrica è proprio la capacità di passare dalla semplice operatività sequenziale alla visione d'insieme. Per gli studenti è un punto di arrivo importante ed è giusto che li si guidi ad esso.
Ma imparare ad usare un abbigliamento adeguato quando si è in un ambiente formale non significa che occorre portare sempre la cravatta, anche a casa.
Quello che sto dicendo è che scrivere

$$5 \times 6 = 30 : 2 = 15 \text{ m}^2$$

non deve essere considerato un errore in assoluto, ma casomai un comportamento inopportuno se è adottato in sede non privata e quando l'intento è di comunicare ad altri ciò che si fa.

D’altra parte, come già notato, qui c’entra la proprietà transitiva dell’uguaglianza. Cioè:
Se A = B **e** B = C, allora A = C. Chiarissima, no? La capiscono tutti, detta così (anche se appare stucchevole, come del resto tutte le proprietà dell’uguaglianza)
Ma chi gliel’ha mai detto agli studenti che in una sequenza di passaggi con l’ “uguale” siamo in presenza di una congiunzione?

Una situazione (suggerita da una di voi)

Quesito INVALSI:

Quale delle seguenti operazioni dà un risultato maggiore?

$10 \times 0,5$ $\qquad$ $10 : 0,5$

$10 + 0,5$ $\qquad$ $10 - 0,5$

Laboratorio

1. Esercizi di descrizione/comunicazione: (il telegrafo), la creta, lo schermo (disponibile carta a quadretti)
2. Un problema da risolvere e commentare a scelta fra tre: le pizze, il rettangolo, quale media?
3. Esercizi di riconoscimento di aspetti semantici o pragmatici nelle pagine di un quotidiano, in particolare negli inserti pubblicitari. Cercare imprecisioni e ambiguità e costruire versioni emendate.
4. La favola di Riccioli d'Oro,.
5. Analisi di parole ambigue o problematiche: dentro/fuori, distanza, angolo, simile, uguale, figura, solido, divisione. Proposte didattiche per discuterne.

Tre problemi

LE PIZZE

Josè ha mangiato metà di una pizza.
Ella ha mangiato metà di un'altra pizza
Josè dice di aver mangiato più pizza di Ella, ma Ella ribatte che ne hanno mangiato la stessa quantità.
Usa parole e disegni per mostrare che Josè potrebbe aver ragione.

IL RETTANGOLO

Il rapporto della lunghezza della base di un rettangolo e della sua altezza è di 4 a 3.

La sua area è di 300 pollici quadrati.

Quali sono la sua altezza e la sua base?

QUALE MEDIA?

Durante la prima metà di un viaggio in auto si procede alla velocità costante di 60 km/h, per l'altra metà alla velocità costante di 100 km/h. Qual è la velocità media?

Dentro/fuori

Curve chiuse

Campo di pallavolo e occhio di falco

Strategie per i labirinti

QuickTimeÊ e un
decompressore
sono necessari per visualizzare quest'immagine.

QuickTimeÊ e un
decompressore
sono necessari per visualizzare quest'immagine.

QuickTimeÊ e un
decompressore
sono necessari per visualizzare quest'immagine.

BIBLIOGRAFIA

AA.VV.: 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics, USA.

AA.VV.: 2001. *Matematica 2001. La Matematica per il cittadino. Scuola Primaria, Scuola Secondaria di primo Grado.* Liceo Vallisneri, Lucca. http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo/

AA.VV.: 2003. *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Ciclo secondario.* Liceo Vallisneri, Lucca.

AA.VV. (Rete Galileo), 2010, *Non solo far di conto, percorsi integrati di matematica e scienze nella scuola di base*, Benevento, Il Chiostro.

Bartezzaghi, S. (2011). *Come dire. Galateo della comunicazione.* Milano: Mondadori.

Borasi R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors.* Norwood, New Jersey, USA: Ablex Publishing Corporation

Castagnola, E. & Tortora, R. (2009). Che cos'è un triangolo? Un excursus critico fra le varie definizioni. *Progetto Alice*, vol. 10; p. 421-449.

BIBLIOGRAFIA

Di Paola B., Ruisi M., Sunseri Trapani A. (2015). E questo dove lo metto? Esperienze geometriche in continuità tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di), *La didattica della Matematica, disciplina per l'apprendimento*, Bologna: Pitagora.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Mariotti M. A. (2015). Spiegare, argomentare e dimostrare: un nodo dell'educazione matematica. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di), *La didattica della Matematica, disciplina per l'apprendimento*, Bologna: Pitagora.

Mellone M. (2011a). The influence of theoretical tools on teachers' orientation to notice and classroom practice: a case study. *J. of Math. Teacher Education*, 14, 269-284.

Mellone M. (2011b). "Looking for tricks": a natural strategy, early forerunner of algebraic thinking. In Pytlak, M., Swoboda, E. (a cura di) *proc. CERME 7,* Università di Rzezsow, Polonia, 1882-1890.

BIBLIOGRAFIA

Mellone, M., Romano, P. e Tortora, R. (2013). Different ways of grasping structure in arithmetical tasks, as steps toward algebra. *Proc. of CERME 8*, Antalya, Turchia. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG3/WG3_MelloneRomanoTortora.pdf.

Mellone M., Tortora R. (2015). Ambiguity as a cognitive and didactic resource. In Krainer K., Vondrová N. (a cura di), *Proc. of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, Praga, febbraio 2015, 1434-1439.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tortora, R. (1999). Slow Mathematics. Manifesto per la difesa del buon gusto. In D'Amore B. (a cura di), *Matematica e didattica: come privilegiare l'apprendimento*, Pitagora, Bologna, 19-25.

Tortora R. (2015). Si fa presto a dire ERRORE. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di), *La didattica della Matematica, disciplina per l'apprendimento*, Bologna: Pitagora.