Promuovere competenze matematiche: un lungo cammino dalla scuola dell’infanzia all’università.

Il caso della competenza legata ai concetti di rapporto e di proporzionalità

Riflessioni di

Michele Pellerey

A partire dal caso dello sviluppo della competenza nel saper valorizzare il concetto di **rapporto,** e quello di **pensiero proporzionale** collegato**,** per interpretare situazioni di studio e di vita e risolvere i problemi che ne emergono, il mio è un invito a riflettere sul lungo cammino formativo relativo allo sviluppo di competenze matematiche che si radica nella scuola dell'infanzia.

Prologo

Alcune riflessioni sulla natura delle competenze e sulla distinzione tra conoscenze e competenze

Credo utile riflettere subito su una distinzione spesso non considerata a sufficienza.

A) Il processo di apprendimento basato sull’acquisizione e comprensione di un concetto, o di un procedimento, anche al fine di ricordarlo.

B) Il processo di valorizzazione del concetto, o del procedimento, compreso e ricordato nell’affrontare una nuova situazione o nel produrre una risposta attesa.

Primo passaggio

Un recente lavoro di Rosetta Zan ha evidenziato come il quesito di un problema posto agli studenti solleciti almeno due processi complessi, che vanno oltre la pura conoscenza di concetti e procedimenti matematici:

a) la comprensione del testo del problema sul piano linguistico (incluso il lessico);

b) l'interpretazione del problema sulla base delle conoscenze (enciclopedia) relative al contesto evocato dal problema.

Utilizzare la propria conoscenza per affrontare una situazione problematica (sfidante) specifica, implica non solo di aver compreso i concetti matematici coinvolti, ma anche di avere un certa famigliarità con il campo applicativo e con il lessico che lo descrive nelle sue componenti fondamentali.

Oltre che la capacità generale di gestire il processo di comprensione di un testo.

Secondo passaggio

Solo nell’ultimo decennio è diventato chiaro che fin da piccoli le funzioni esecutive elementari, cioè le capacità di gestire i propri processi cognitivi, affettivi e volitivi, implicati nell’apprendere (comprendendo) e quelli nell’utilizzare quanto appreso, a esempio per produrre qualcosa, per rispondere (non ripetitivamente) a una domanda, per interpretare una situazione, ecc., sono differentemente strutturati. Quindi ……

Si spiega così assai bene perché si può sapere bene qualcosa, ma non la si può valorizzare in un’attività produttiva, se:

a) non si ha un’adeguata conoscenza (anche linguistica) dell’ambito applicativo;

b) non si è in grado di attivare le funzioni esecutive coinvolte; cioè, non si è in grado di gestire se stessi nell’attivare le conoscenze implicate e nel trasferirle nel nuovo contesto.

Alcune osservazioni sul processo di comprensione e di trasferimento concettuale e procedurale

Preludio

Il concetto di differenza presenta non poche difficoltà di comprensione, che possono incidere nell'affrontare anche un semplice quesito connesso con il trovare la differenza tra due quantità.

Laura ha 9 palline. Mario ne ha 4. Qual è la differenza tra quanto ha Laura e quanto ha Mario? Può essere interpretato almeno in tre modi:

a) Quante ne ha Laura in più di Mario?

b) Quante ne ha Mario di meno di Laura?

c) Quante ne dobbiamo dare a Mario perché ne abbia come Laura?

Il processo mentale evoca il rapporto tra tutto e parte: tra una totalità e le sue parti, più che l'operazione da compiere. Insistere sull'operazione (la + o la -) da compiere può disorientare.

Perché la differenza si può trovare sia aggiungendo unità al minore, sia togliendo unità al maggiore.

Meglio usare un supporto grafico o gestuale (le dita)

9

? 4

Sul processo di comprensione

I concetti matematici, soprattutto quando vengono definiti, si presentano in maniera abbastanza astratta.

Sia Lucio Lombardo Radice, sia Bruno de Finetti amavano ripetere che un **concetto astratto** per gli studenti deve essere un **multi-concreto.**

Che cosa può significare questa affermazione?

Che **un concetto astratto deve poter fare riferimento a un molteplicità di situazioni**.

Cioè le esperienze vissute e discusse negli anni dalla scuola dell’infanzia in poi devono diventare la base per una consapevolezza adeguata e una possibile rappresentazione astratta di un concetto.

In questo processo gioca un ruolo non indifferente l'uso della **parola (o dell'espressione linguistica),** che nei vari contesti e nel tempo tende a collegarsi con una molteplicità di riferimenti, rendendo più agevole valorizzarla nelle differenti situazioni.

La parola **rapporto** evoca inizialmente l'analoga parola relazione. Ciò soprattutto in riferimento ai rapporti tra persone, sia ad atteggiamenti verso situazioni o oggetti.

Nel linguaggio specialistico matematico il termine evoca certamente confronto, ma soprattutto confronto da un punto di vista quantitativo: di più, di meno, uguale; più alto, meno alto, alto uguale; ecc.

Più avanti emergono indicazioni più precise: il doppio, la metà, il triplo, un terzo.

Poi in ogni ambito dell'aritmetica, della geometria, delle scienze compaiono rapporti di ogni tipo.

Si tratta di una molteplicità di esperienze che dovrebbero fare da supporto a una presa di consapevolezza di tale concetto, quando lo si esplicita formalmente, in genere in seconda secondaria di primo grado.

Dal punto di vista didattico occorrerebbe strutturare un percorso progressivo:

- **verticale**:

nell’ individuare i traguardi o tappe fondamentali da conseguire negli anni per giungere a una comprensione adeguata collegata a un uso valido nell’interpretare le situazioni e risolvere le questioni connesse;

- **orizzontale**:

nel senso allargare in ogni tappa l’ambito esperienziale applicativo, sia all’interno della matematica, sia soprattutto negli altri ambiti: scientifico e tecnologico, di vita quotidiana, artistico, storico- geografico, ecc.

Tuttavia da un punto di vista sia concettuale, sia operativo, occorre tener conto di un aspetto che complica questo paesaggio. Si tratta delle molte forme attraverso cui un rapporto può essere espresso:

- come frazione: 3/4
- come decimale: 0, 75
- come percentuale: 75%
- come divisione: 3 : 4

Tanto che a sedici anni (o nelle vita) molti non sanno gestire tale concetto.

Nelle ultime elezioni svoltesi in un paese europeo è andato a votare il 70% degli aventi diritto al voto.
Di questi il 20% ha votato per il partito A.
Quale percentuale di aventi diritto al voto ha votato per il partito A?

Omesse: 2%

□ A. 60%	scelta dal 2,3 %
□ B. 50%	scelta dal 24,0 %
□ C. 20%	scelta dal 34,9 %
□ D. 14%	scelta dal 36,3 %

Una competenza adeguata avrebbe potuto far leva proprio sulle diverse forme di rappresentazione del concetto trasformando il problema: invece di usare le percentuali per rispondere, passare alle frazioni o ai decimali corrispondenti per poi risalire alle percentuali:

70% = 7/10 = 0,7
20% = 2/10 = 0,2

20% x 70% = 7/10 x 2/10 = 14/100 = 14%

20% x 70% = 0,7 x 0,2 = 0,14 = 14%

Quando un concetto possiede tanti nomi (o forme rappresentative) ciò significa che esso è usato in molti campi di pensiero e di azione.

Di qui la sua **centralità** nel processo educativo.

Per questo l'aspetto **orizzontale** dell'allargamento dell'esperienza con esso è essenziale, così il passare agevolmente da una forma rappresentativa all'altra.

Fin dalla quinta primaria in poi occorrerebbe favorire l'uso di forme equivalenti di rappresentazione.

rapporto	divisione	frazione	decimale	percentuale
1 su 1	1 : 1	1 / 1	1, 00	100%
1 su 2	1 : 2	1 / 2	0, 50	50%
1 su 4	1 : 4	1 / 4	0, 25	25%

Esplorare poi progressivamente l’uso delle varie forme rappresentative nei vari ambiti di conoscenza.

A esempio, l’ambito economico-finanziario utilizza soprattutto la forma percentuale.

Mentre quello cartografico usa prevalentemente quello tradizionale

(a esempio come rapporto 1 : 200 000, in cm).

La probabilità e la statistica tendono a privilegiare sia frazione, sia percentuale.

La misura di grandezze valorizza soprattutto quella di numero decimale.

In molti sussidiari per la quinta primaria in geografia si cita la densità della popolazione elle Regioni.

La densità di popolazione: rapporto tra numero degli abitanti e superficie in km quadrati

Qual è la Regione con densità maggiore e quella con densità minore? Che cosa significa?

C’è una relazione tra la configurazione del territorio e densità?

Prima conclusione

Giungere a possedere un’adeguata competenza matematica, come nel caso del concetto di rapporto, richiede un cammino lungo, continuo, sistematico sia verticalmente, sia orizzontalmente.

Qui si gioca la continuità scolastica.

Ulteriori osservazioni sul «rapporto» tra capacità e competenza

La questione capacità-competenza è l’analogo del rapporto tra potenza e atto, tra la possibilità di … e l’effettivo raggiungimento di ….

La **capacità** di uno studente è il suo stato di preparazione, cioè la potenzialità che egli ha di poter imparare quanto gli viene proposto (condizione necessaria ma non sufficiente).

Ma senza l’azione del docente, cioè il coinvolgimento in attività didattiche, tali capacità non possono diventare **competenze**.

Questo vale anche per la comprensione profonda, significativa, di quanto viene proposto. Quanto di nuovo viene presentato deve potersi collegare con quanto già possiede lo studente.

Cioè, quanto già sa è la base su cui appoggiare quanto si propone di nuovo e quindi esso deve essere adeguatamente solido.

Quando di introducono in maniera formale rapporti e proporzioni lo studente deve già possedere un’ampia esperienza in merito.

Si può quindi parlare di un **movimento a spirale**.

Le varie tappe sono le conoscenze significative da possedere, e le relative competenze applicative, per poter poi procedere verso nuovi traguardi di conoscenza e quindi di competenza.

Le iniziali conoscenze e competenze tendono quindi ad **approfondirsi e allargarsi** nel corso di tutta l'esperienza scolastica e si devono aprire a un movimento di apprendimento permanente.

Non dimenticando al momento giusto di esplorare due rapporti estremamente significativi, anche storicamente, oltre che concettualmente:

a) tra diagonale e lato del quadrato;

b) tra lunghezza della circonferenza e del diametro.

Sullo sviluppo del pensiero proporzionale

Nella pratica scolastica si introducono le proporzioni nella seconda classe della secondaria di primo grado.

Ma anche in questo caso occorre che ciò avvenga quando si sia formata una buona base esperienziale di situazioni in cui è coinvolta la proporzionalità.

Tenendo conto anche di concetti simili presenti nell'**ambito linguistico-retorico**.

Analogie e similitudini

La vita sta alla vecchiaia come la giornata sta alla sera

Metafore (analogie contratte)

La vecchiaia è la sera della vita

A esempio, una delle questioni Invalsi era (2a primaria):

La mamma di Luca per fare 2 panini ha usato: 4 fette di pane, 2 fette di prosciutto cotto, 1 mozzarella.

Per fare 4 panini ha bisogno di:

….. fette di pane

….. fette di prosciutto cotto

….. mozzarelle

È questo un ambito assai comune in cui gioca la proporzionalità: quello delle ricette.

Ma anche della composizione di molte sostanze di uso comune.

Un altro ambito assai comune è quello dei prezzi.

In questi casi si possono usare vari schemi e diagrammi utili per fondare il pensiero proporzionale

La pompa di benzina

Su una pompa di benzina sono normalmente indicati due numeri: quello dei litri erogati e quello corrispondente degli euro da pagare.

litri	1	2	3	4	5	6
euro	1,500	3,000	4,500	6,000	………….	………..

Uno schema utile è quello a forma di tabella.

Un'automobile consuma un litro ogni quindici chilometri. Quanta benzina consuma per fare 135 chilometri?

1	?
15	135

In genere in quinta primaria si introducono i diagrammi cartesiani

Se le patate costano 0,50 euro al chilogrammo, allora.

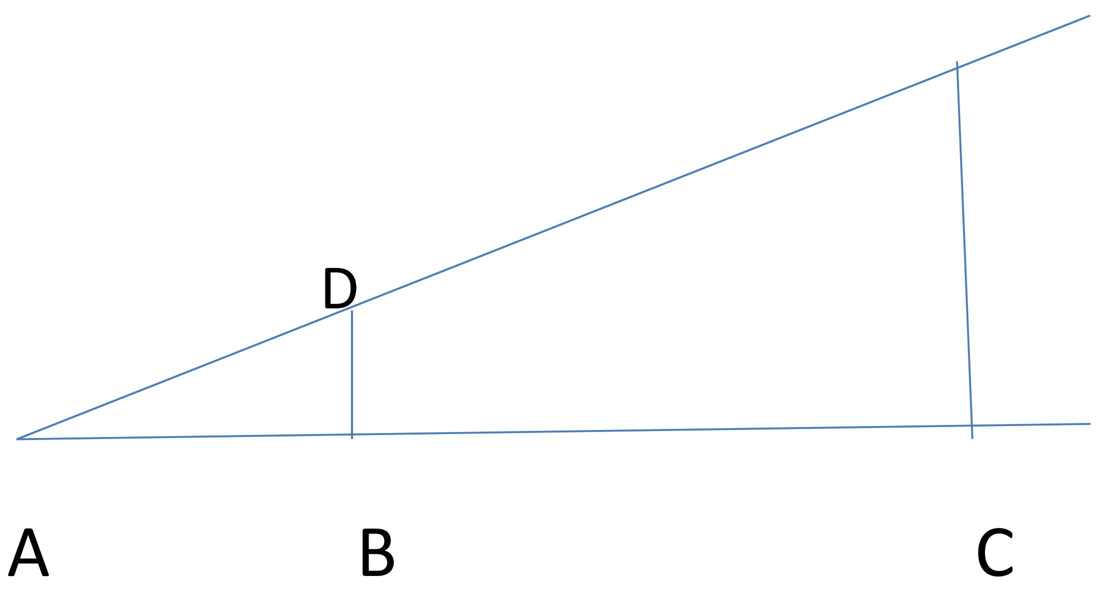
Si può costruire un diagramma cartesiano mettendo in verticale il prezzo e in orizzontale la quantità.

Segnando il costo delle varie quantità al posto giusto che cosa si nota?

Un altro ambito di esperienza è quello degli ingrandimenti e degli impiccolimenti.

E delle relative riduzioni in scala (mappe, piantine)

o delle pendenze (stradali)



pendenza della strada del 4 per 100

in venticinque metri quanto si innalza la strada?
E in cinquanta metri?
E in un metro?

Anche nel caso del pensiero proporzionale c'è un ampio spazio di esplorazione della sua presenza nei molteplici ambiti esperienziali dello studente.

Ai vari livelli di sviluppo e di forme di rappresentazione.

Si tratta della **componente orizzontale** dello sviluppo del concetto di competenza.

la **dimensione verticale**, cioè la progressività nell'impostare la sua costruzione matematica.

Già quando si parla di divisione nella primaria si introduce la sua proprietà fondamentale: l'invariantiva.

Concettualmente ci si trova già vicini al concetto di equivalenza tra divisioni.

3 : 4 è equivalente a 6 : 8

Il passaggio successivo è quello relativo alle frazioni. Anche in questo caso moltiplicano o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero si ottengono frazioni equivalenti.

10/15 = 2/3

che può anche essere scritto

10 : 15 è equivalente a 2 : 3

Lascio a voi l'esplorazione verticale delle varie tappe nelle quali è possibile sviluppare progressivamente il **pensiero proporzionale** e le sue rappresentazioni, giungendo a dominare il concetto di **proporzionalità diretta** e **proporzionalità inversa**.

Chiudo con la proposta di una esplorazione.

Il formato della carta

Una risma comprende:
500 fogli
80 gr/mq
21 cm x 29,7 cm
2,5 kg

Perché sono state scelte queste dimensioni e perché un formato di questo tipo si chiama A4 ?

Il «folio» della carta

Dimensioni: 841 mm x 1189 mm

Area del "folio": 841 x1189 = 999949, cioè circa 1000000 mm quadrati = 1 metro quadrato

Rapporto tra i lati del "folio": 1189 : 841 = 1,4137, cioè circa la radice quadrata di 2

Piegando il folio a metà si ottengono altri due rettangoli il cui rapporto tra il lato lungo e quello corto è sempre radice quadrata di 2.

Continuando a piegare si ottengono via via rettangoli di area più piccola ma il rapporto tra loro lati rimane sempre radice quadrata di 2.

Sono tutti tra loro proporzionali, valendo la proporzione: $1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2$

Si ottengono così i vari formati della carta in mm:

A0 = 1189 x 841 = 999 949

A1 = 841 x 594 = 499 554

A2 = 594 x 420 = 249 480

A3 = 420 x 297 = 124 740

A4 = 297 x 210 = 62 370

A5 = …… x ……

I cui lati sono proporzionali e le cui aree ………….

Conclusione

Parlare di competenza matematica nell’affrontare problemi che emergono sia all’interno della matematica, sia all’esterno di essa, è un lungo cammino che implica un’adeguata progettazione didattica sia in verticale, sia in orizzontale, e nel quale l’aspetto linguistico occupa non poco spazio.

Grazie