UMI - CIIM
UNIONE MATEMATICA ITALIANA
COMMISSIONE ITALIANA
PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

III Scuola Estiva per insegnanti UMI CIIM ï AIRDM

Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica

Competenze algebriche: cosa si intende e come è possibile svilupparle

Maria Alessandra Mariotti

Università di Siena

L'algebra a scuola

- Molto tempo speso e é risultati deludenti : cosa resta di tanto lavoro?
- La manipolazione simbolica come attività auto referente é
- Necessità di una riflessione più attenta su gli obiettivi didattici dellôinsegnamento dellôalgebra:

  conoscenze e competenze

Conclusioni che emergono dalla ricerca internazionale …

- the teaching of algebra is typically instrumental rather than relational, with a dominance of symbolic algebra over other representations (Kieran, 1992; Borba & Confrey, 1996; Kieran & Sfard, 1999). Consequently, though they learn to manipulate algebraic expressions,

  students do not seem to be able to use them for meaningful mathematical communication.

Competenze in algebra

ñAlgebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analysing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modelling, justifying, proving, and predicting.ò

(Kieran, 2004)

Dalle indicazioni nazionali

Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro é In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti é il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico é un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Dalle indicazioni nazionali

Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

é

2. Gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dellâanalisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;

Dalle indicazioni nazionali

é

5 . il concetto di modello matematico é

6 . costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

- PRIMO BIENNIO -***Aritmetica e algebra***

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. In questo contesto saranno studiate le proprietà delle operazioni.

Dall'aritmetica all'algebra

Continuità o rottura?

Aritmetica e Algebra: continuità o rottura?

- Soluzione algebrica e soluzione aritmetica di un problema.
- Lettere e numeri. Qual è significato di espressioni come le seguenti

$$3 + 5 = 8 \qquad\qquad (a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

é cosa significa **calcolare**?

Lavoro individuale: risolvere il seguente

- Problema

Distribuire 380 arance tra 85 studenti in modo che ogni ragazzo abbia 4 arance e ogni ragazza ne abbia 5. Quanti sono i ragazzi e quante le ragazze?

Lavoro individuale: dare una soluzione senza usare le lettere …

- Problema

Distribuire 380 arance tra 85 studenti in modo che ogni ragazzo abbia 4 arance e ogni ragazza ne abbia 5. Quanti sono i ragazzi e quante le ragazze?

Soluzione algebrica

- Sia x il numero dei ragazzi e sia y il numero delle ragazze

$$\begin{cases} 4x + 5y = 380 \\ x + y = 85 \end{cases}$$

Soluzione aritmetica

- Cominciamo con il dare 4 arance ad ogni studente, in questo modo saranno state distribuite $85 * 4 = 340$ arance.
- Dunque le restanti $380 - 340 = 40$ arance sono quelle che vanno alle ragazze, che devono essere allora 40.
- I ragazzi sono $85 - 40 = 45$

Unôinversione del processo :

Aritmetica

Dati **Risultato**

Algebra

Si assume il risultato

Si esprime la relazione con i dati
equazione

Si risolve lôequazione

Si interpreta la soluzione dellôeq.

L'uso delle lettere

Un poôdi storia é

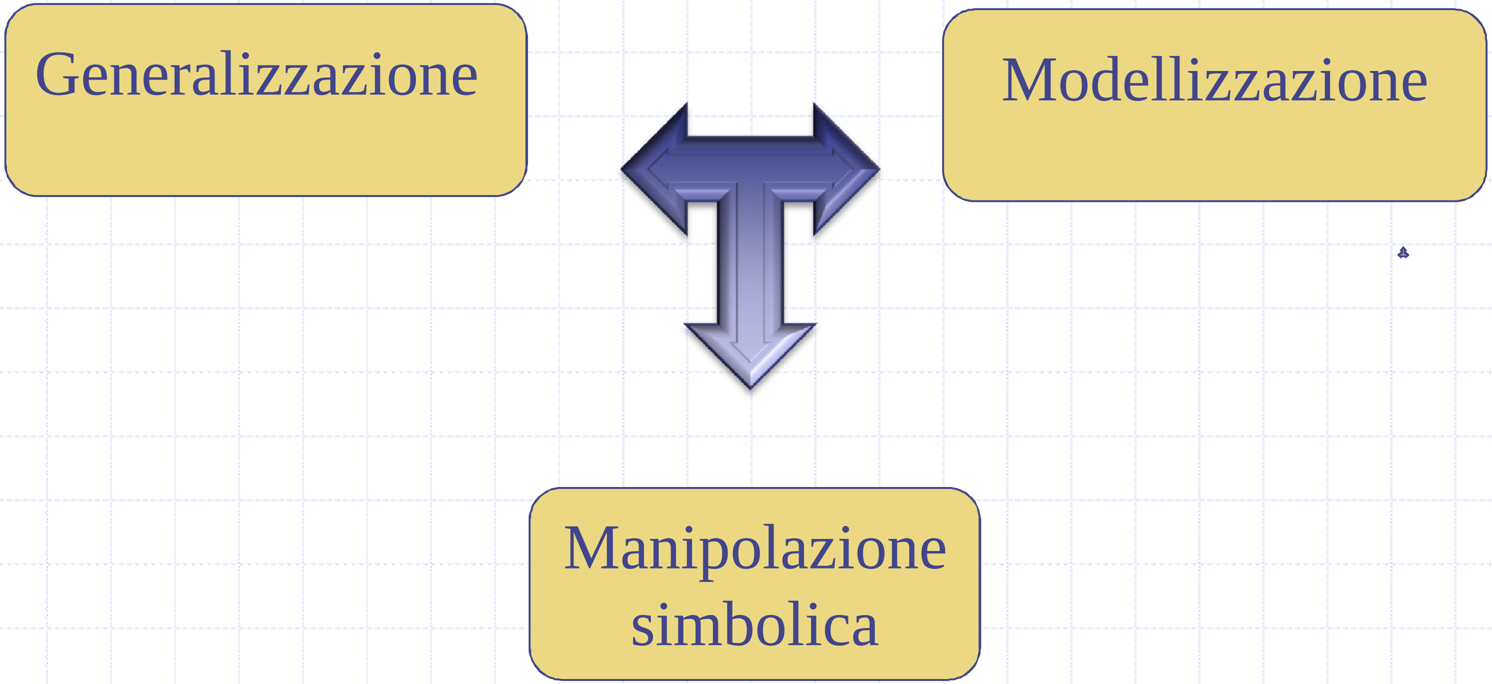
- 1 fase retorica: (ant. a Diofanto) tutto a parole
- 2 fase sincopata: (da Diofanto alla fine del XVI secolo), introduzione di abbreviazioni per le incognite, ma i calcoli sono eseguiti verbalmente.
- 3 fase simbolica/ (introdotta da Viète, 1540-1603), l'lagebra non solo per risolvere un problema, trovare un'incognita, ma per provare regole che legano la varie quantità ed esprimere soluzioni generali.

Uso delle lettere:

Processi legati allôuso delle lettere

- Modellizzazione
  - Messa in formule ...
    - Descrizione e soluzione di problemi
- Generalizzazione
  - Esprime la generalità ï ad esempio regolarità numeriche
- Manipolazione simbolica
  - Come legarla a quelle precedenti?
  - Quale senso possiamo dare a questa attività?

Lettere e linguaggio delle lettere



Lettere e linguaggio delle lettere

Processi legati allôuso delle lettere

- Modellizzazione
  - Messa in formule ... e soluzione di problemi
- Generalizzazione
  - Esprime la generalità ï ad esempio regolarità numeriche
- Manipolazione simbolica
  - Come legarla a quelle precedenti?
  - Quale senso possiamo dare a questa attività?

Semantica di una formula

- Problema

In una classe di 30 alunni, ogni due maschi ci sono 3 femmine. Detto M il numero dei maschi e F il numero delle femmine, quale delle seguenti relazioni è corretta:

a) $3M = 2F$ b) $2M + 3F = 30$

c) $12\,M + 18\,F = 30$ d) $2M = 3F$

Lettere e linguaggio delle lettere

Processi legati allôuso delle lettere

- Modellizzazione
  - Messa in formule ... e soluzione di problemi
- Generalizzazione
  - Esprime la generalità ï ad esempio regolarità numeriche
- Manipolazione simbolica
  - Come legarla a quelle precedenti?
  - Quale senso possiamo dare a questa attività?

Problema 2G

Consideriamo la tabella:

1

2 3 4

3 4 5 6 7

4 5 6 7 8 9 10

é é é é é é é

Cosa posso dire della somma dei termini di ciascuna riga?

Generalizzazione

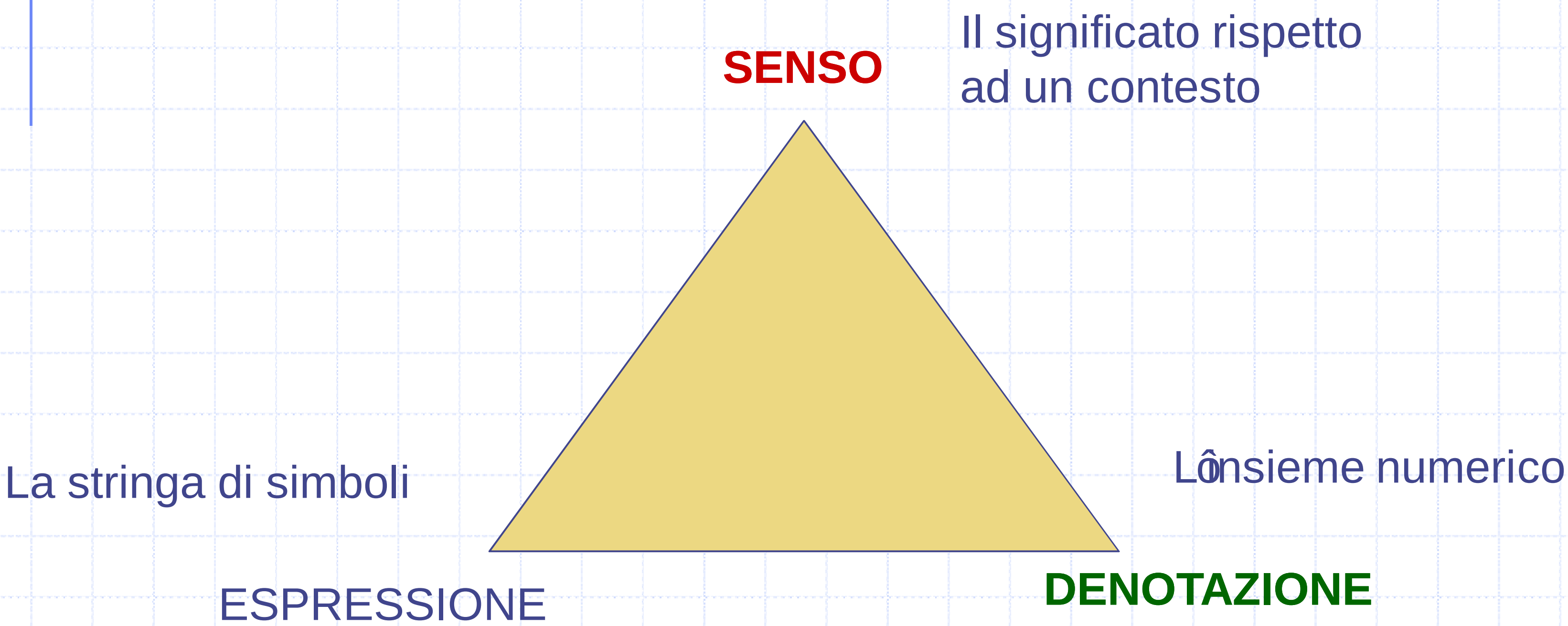
- Difficoltà di "parlare del generale"
- Centralità de
  parlare del ge
- Ruolo fondan
  colloquiale pe
  apparire di fo
- Uso specifico
  espressioni d

È una pratica altamente specializzata che richiede

- uso socializzato di segni
- un sistema di significati condivisi,

L'algebra ed il problema dei *segni*

- Una espressione sta al posto di é ?



Con le espressioni numeriche

Strategie di risoluzione e scritture simboliche

Esempio:

Un certo gioco costa 12 ú, io ho 8 ú quanto devo chiedere alla mamma?

Strategia di completamento può essere adeguata :

così come la scrittura: 8 + ? = 12

mentre lôintroduzione ôforzataôdella scrittura:

12 - 8 = 4

può creare una rottura

Da notare che la scrittura additiva è ñrelazionaleò mentre quella dove compare la sottrazione è operazionale.

Con le espressioni numeriche

Strategie di risoluzione e scritture simboliche

Esempio:

Un certo gioco costa 12 ... mamma?

Strategia di completame...

così come la scrittura: 8...

mentre l’introduzione “forzata” della scrittura:

12 - 8 = 4

può creare una rottura

Da notare che la scrittura additiva è “relazionale” mentre quella dove compare la sottrazione è operazionale.

Difficoltà : legare

Espressione - Denotazione - Senso

Interventi didattici po sibili

- Produzione d
- Lettura di scritture
- Confronto di scritture
- Negoziazione delle convenzi

Opportuno iniziare prestoé
ma in ogni caso non si può
aggirare lôostacolo

- Assegnare ñnomi appropriatiò a entità che entrano in gioco nel discorso (risolutivo, argomentativo, ...)
- Superare la concezione rigida di regole prive di un significato (regole e convenzioni)

Esempi per generare scritture numeriche

- Trovare un nome per il numero che ha come nome ñormaleò16 e che esprima il fatto che è un quadrato
- Trovare un nome per ñ16òche esprima il fatto che è differenza di due quadrati
- Scrivere il numero 5(3+2) come somma di un numero pari e di un numero dispari .

Esempi di confronto tra espressioni

- 15 Å4 +10 : 2 + 12 + 9 : 3
- (15 Å4) +10 : 2 + 12 + (9 : 3)
- 15 Å4 -10 : 2 + (12 + 9) : 3
- 15 Å4 - 10 : 2 + 12 + 9 : 3
- 15 Å4 +(10 : 2 + 12 +9 : 3)

Senza calcolare, confrontare le espressioni e cercare di capire se ce ne sono alcune che hanno lo stesso risultato

Marco

- Secondo me la prima e la seconda hanno lo stesso risultato perché visto che le moltiplicazioni e le divisioni hanno la precedenza si fanno per prime comunque
- Secondo me quelle più alte sono la prima e la seconda perché risultano uguali e la più bassa la quarta.

Giovanni

- Le espressioni non vengono uguali perché in alcune le parentesi sono messe in punti sbagliati.
- Secondo me quelle che avranno il risultato più alto sono la 1 - 2 - 5 e quella che avrà il minor risultato sarà la 3 perché alla fine devi dividere tutta la somma ottenuta.

Esempio

570 + 32 + 18 = z

posso dire senza eseguire l'addizione se z è pari? Se è divisibile per 4 ? Se è divisibile per 5?

Andrea

z è pari perché le tre cifre finiscono con numeri pari

z divisibile per 4

2 Å285 + 2Å16 + 2Å9

z = 570 + 32 + 18

Questa scrittura assomiglia a quella delle moltiplicazioni iniziali. Si può dire che da questa scrittura se ne trae unâltra:

2 Å310

Cioè da 285 + 16 + 9

È divisibile per 5 perché

570 + 32 + 18

50

5Å114

5 Å10

Oppure

570 + 32 + 18

5Å6s

5Å114

Espressioni letterali

- $4x + 2$ $\qquad$ $2(2x + 1)$
  - Due espressioni
  - Due sensi
  - Una denotazione
- $(x + 5)^2 = x$ $\qquad$ $x^2 + x + 1 = 0$
  - Stessa denotazione in R , ma non in C

Senso algebrico - Senso contestualizzato

- Senso algebrico

  $n(n + 1)$ $\qquad\qquad$ $n^2 + n$

  - Stessa denotazione, sensi diversi
- Senso contestualizzato

  $n(n + 1)$ → area di un rettangolo (geom)

  → prodotto di due interi consecutivi

  (aritmetica)

Problema

Ad un numero di 4 cifre si somma il numero che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre. Cosa si ottiene? Come generalizzare?

- Qualche verifica
- Passiamo alle lettere
  - Nominalizzare é ma come?

Nominalizzazione

- La difficoltà della ñmessa in formuleò
- È cruciale il processo di

Nominalizzazione

significa

assegnare un simbolo ad un numero

Di solito il processo è banalizzato o evitato, il testo del problema contiene già i nomi

Si creano stereotipi tipo:

Ciò che si cerca è ñxò

Esempio

- 2567 + 7652 = 10219 = 11 Åé . *Provo con i controlli* numerici

1 = n 2 = n +1 3 = n + 2 5 = n+4 *Provo con le lettere*

n(n+1)(n+2)(n+4) + (n+4)(n+2)(n+1)n

$(n^2 + n)(n^2 + 8n+8)$ é .

(Altri calcolié) *Non concludo nulla. Eô tutto sbagliato*

abcd + dcba = (a+d)(b+c)(c+b)(d+a) *Non riesco a partire*

a +d = migliaia

b + c = centinaia

c + b = decine

d + a = unità é

abcd + dcba = (a +d) 1000 + (b+c)100 + (c+b) 10 + (d+a) 1

(a+d) (1000+1) + (b+c) (100 + 10) =

Ho trovato che (a+d) è moltiplicato per un multiplo di 11 ...

Numeri e lettere

- Problema

Penso un numero dispari; aggiungo 5. Il numero che ottengo è pari? Eôdispari? Da cosa può dipendere?

Aritmetica

Penso al numero 127, aggiungo 5.

Il numero che ottengo è pari o dispari?

Algebra

Se x è un numero dispari il numero x+5 è pari? È dispari? Come faccio a saperlo?

La presenza di un numero → le lettere e espressioni.

Nomi diversi

Proprietà diverse

stesso elemento

Esempi per generare scritture con le lettere

- Se x è un numero intero come posso scrivere il suo precedente y? il suo successivo z?
- Come posso scrivere $\boldsymbol{x + y + z}$?
- Cosa posso dire di questôultimo numero?

Osservazione
Problemi di questo tipo devono essere preparati con un lavoro lungo ed accurato é si è osservato che la nominalizzazione è suggerita dal contesto problematico.

Assegnare un nome in algebra

- Come nominare i numeri pari e i dispari
  - Il problema dei designatori rigidi:

    2n e 2n +1 sono un esempio;

    come è n+1 se n è pari?
  - Come ci può aiutare un foglio elettronico?
    - Il problema diventa come riempire la colonna

      ...

Attività 1

- Costruisci in colonne diverse
  - la sequenza dei numeri naturali
  - una sequenza di numeri dispari (< 40)
  - una sequenza di numeri pari tra 15 e 55;
  - la successione dei quadrati dei primi 20 numeri naturali;
  - La successione delle radici dei primi 20 numeri naturali.

Lettere e linguaggio delle lettere

Processi legati allôuso delle lettere

- Generalizzazione
  - Esprime la generalità ï ad esempio regolarità numeriche
- Modellizzazione
  - Messa in formule ... e soluzione di problemi
- Manipolazione simbolica
  - Come legarla a quelle precedenti?
  - Quale senso possiamo dare a questa attività?

Manipolazione simbolica

Il significato della espressione

CALCOLARE

Lavoro di gruppo:intervista a Francesca

- Leggere la prima parte e segnare i punti interessanti.
- focalizare lâattenzione su:
  - 2-8
  - 30-49
  - 64-68
  - 74-94
  - 95-110

Algebra: espressioni numeriche ed espressioni letterali

I punti chiave:

- Equivalenza (uguaglianza) tra espressioni
- Le proprietà delle operazioni

Cosa cambia passando dai numeri alle lettere?

Il significato del segno " = "

- Identità, uguaglianza, equivalenza é
  =
  - Stessa numerosità card(A) = card(B)
  - Combinare due insiemi :

    Card(A) + Card (B) = Card

    3 + 5 = 8

Il senso operativo :
ñfare qualcosa é ò
è quello che resta

Il significato del segno " = "

- evidenza di questa concezione operativa:

Å difficoltà ad accettare o trattare scritture del tipo:

3 = 3 o 7 = 5+2

4+5 = 3+6

Å produzione di scritture del tipo *catene di uguaglianze* :

1036 + 217 = 1280 ï 425= 855

Quale significato dare al segno "=" tra due espressioni?

Espressioni algebriche

Espressioni numeriche equivalenti

Una definizione procedurale:

***espressioni numeriche* sono equivalenti se e solo se una volta calcolate si ottiene lo stesso risultato**

La definizione è operativa é   basta **calcolare** per conoscere la risposta.

Espressioni letterali equivalenti

Una definizione procedurale:
due espressioni letterali sono equivalenti se e solo se è sostituendo tutti i possibili numeri alle lettere, il risultato delle espressioni numeriche ottenute è lo stesso.

Questa definizione non è operativaé

Come stabilire se due espressioni letterali sono equivalenti?

La definizione non è operativa

- Il confronto è pensabile ma non attuabile: come controllare che due espressioni coincidono per ogni combinazione di sostituzioni possibile?
- È bene che gli allievi si rendano conto di questa complessità é per apprezzare la soluzione trovata dai matematici!

Confronto tra espressioni

- Sostituire numeri é tutte le sostituzioni possibili:

  lôidea di funzione

- Quando le espressioni contengono più di una variabile si tratta di pensare a tutte le possibili combinazioni:

  funzioni di più variabili

- Quando una variabile è pensata come fissa:

  Lôidea di parametro

Come stabilire l'equivalenza?

In modo coerente con le definizioni procedurali, ma in modo operativo é

Lo statuto delle proprietà delle operazioni

- Espressioni Numeriche:
  - Procedimenti “diversi” che danno lo stesso risultato
- Espressioni Letterali:
  - Equivale ssioni

Proprietà che definiscono una **relazione di equivalenza**

ñespressioni equivalentiò

Definizione relazionale

Dato un insieme di **proprietà**, espresse come relazioni di equivalenza, allora:

due espressioni sono equivalenti se e solo se è possibile trasformare lâuna nellâaltra utilizzando le proprietà date.

Espressioni Letterali

- Lôutilizzo delle proprietà diventa operativo: le proprietà diventano strumenti per trasformare espressioni é

Calcolare significa: trasformare unôespressione in unôaltra

equivalente

$$a \cdot (b + c) = \ ?$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Conseguenze immediate

Calcolo

Manipolazione simbolica diventa attività di: ***trasformazione di espressioni sostituendole con espressioni equivalenti, sulla base di proprietà***

Trasformare espressioni in espressioni equivalenti sulla base dei principi stabiliti

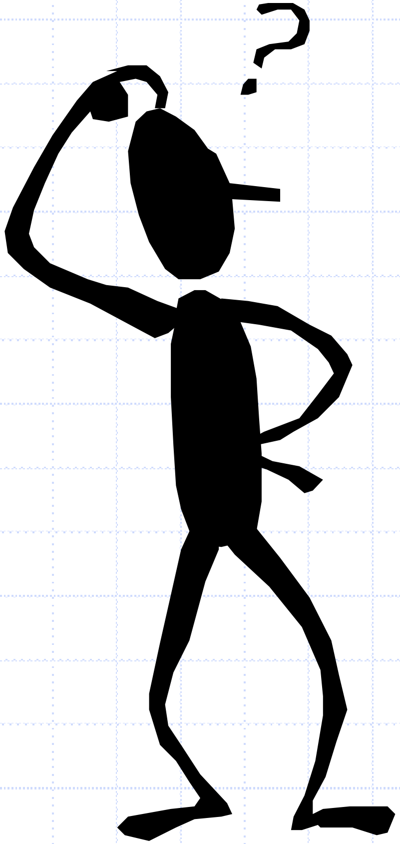
ĩespressioni equivalentiò

Definizione relazionale

Dato un insieme di **proprietà**, espresse come relazioni di equivalenza, allora:

due espressioni sono equivalenti se e solo se è possibile trasformare lâuna nellâaltra utilizzando le proprietà date.

LôAlgebra è una teoria?



Calcolare e dimostrare

Catena di espressioni equivalenti

Manipolazioni simboliche come ñsviluppareò e ñfattorizzareò possono essere interpretate come attività di dimostrazione nellôambito di una teoria

Dimostrazione in una teoria

Calcolare

Å Lôevoluzione del significato di calcolo

Å Le proprietà delle operazioni come strumenti per trasformare le espressioni mantenendo lôequivalenza

Eseguire operazioni

Rottura di significato

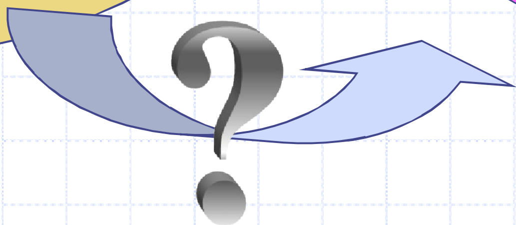
Trasformare unôespressione

L'algebra come strumento

- Manipolazioni simboliche quale il senso di tali trasformazioni?
  - Una relazione di equivalenza tra espressioni permette di :

A ⇔ B significa che é

Nel mondo dei Numeri
$3+5 = 4 + 4$



Nel mondo delle Lettere
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Attività coerenti con la costruzione del nuovo significato di calcolo

- Determinare se sue espressioni sono o meno equivalenti
- Trasformazioni óorientateö, ovvero posso trasformare una espressione in unâaltra equivalente che:
  - Abbia una struttura particolare?
  - Coincida con unêespressione data
  - é

A questo punto possiamo legarci alle attività di Generalizzazione e di Modellizzazione.

Equazioni (& Disequazioni)

- L'uguaglianza come relazione tra due espressioni ñequivalentiò

- Le equazioni come relazioni aperte.

Introduzione all'idea di equazione

Problema:

Pensare (e scrivere) due espressioni che contengano la lettera *a* che non siano equivalenti, ma che risultino uguali per qualche valore della lettera *a* .

Equazioni (& Disequazioni)

- L'uguaglianza come relazione tra due espressioni ñequivalentiò
- Le equazioni come relazioni di equivalenza aperte.
- Ritorna la prospettiva funzionale
- Due obiettivi distinti da non confondere :
  - capire cosa significa soluzione di unôequazione
  - apprendere metodi per la risoluzione di unôequazione

Un possibile percorso per le equazioni (& disequazioni)

- significato di soluzione come valore, tra quelli cercati ...
  - il riferimento al contesto problematico per introdurre lõidea di dominio delle soluzioni
- affinamento del metodo di ricerca per ñtentativi ed erroriò attraverso l'uso della calcolatrice, o del foglio elettronico é
  - Il lavoro diventa molto "costosoò
  - Ma una buona occasione per esperienze nel mondo dei numeri al di là degli interi é decimali, approssimazioni,

Un possibile percorso per le equazioni (& disequazioni)

- Esperienza vissuta dei limiti del metodo ñper tentativi ed erroriòé

- Eô possibile individuare un metodo, 'teoricoô?
  - Introduzione sistematica delle strategie/formule risolutive.