



3a Scuola Estiva per Insegnanti
UMI CIIM – AIRDM
Competenze in matematica e curriculum verticale



Promuovere competenze in matematica tramite l'uso delle tecnologie digitali

Mirko Maracci

Dipartimento di Matematica "F. Casorati"

Università degli studi di Pavia

mirko.maracci@unipv.it

27 agosto 2016

Di cosa parleremo

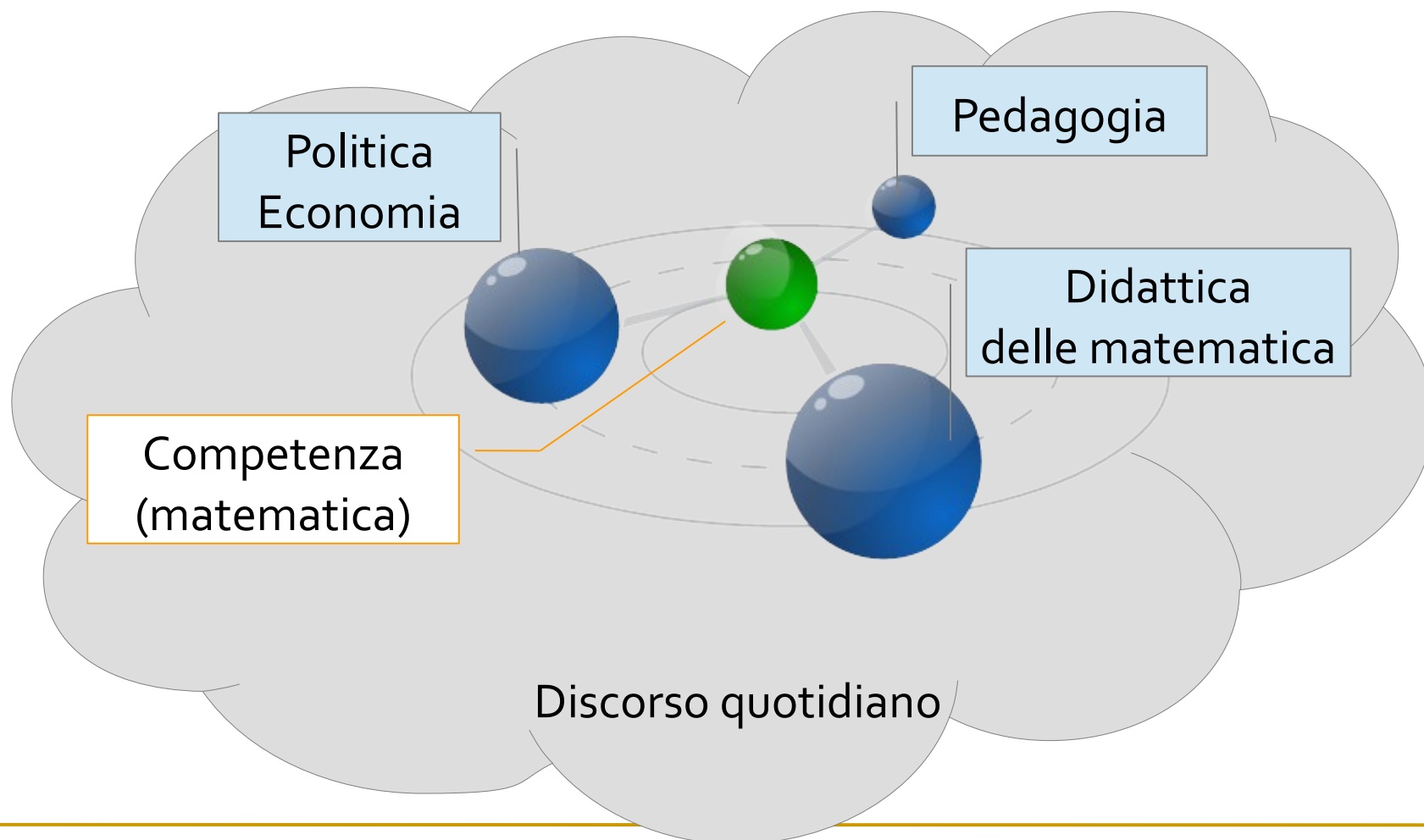
- La nozione di **competenza** – significato, evoluzione e articolazione – in ambito istituzionale, pedagogico e **in didattica della matematica**.
 - Tecnologie digitali: **AGD**
 - Esempi di **attività centrate sull'uso di AGD**
 - Discussione sul **ruolo che tali attività** possono svolgere nel **promuovere lo sviluppo di competenze in matematica**, e sulla loro **replicabilità in classe**.
-

La nozione di competenza nella sua accezione comune

- (in)competente *versus* competenza
 - Il termine (giudizio) **in/competente** è (spesso) riferito a un professionista nello svolgimento del proprio lavoro
 - Molti fattori in gioco:
 - complessità (percepita) del lavoro, esito dell'azione del professionista, reputazione...
 - **sistema di attese**
 - competente: spettante, che ha autorità o dovere
-

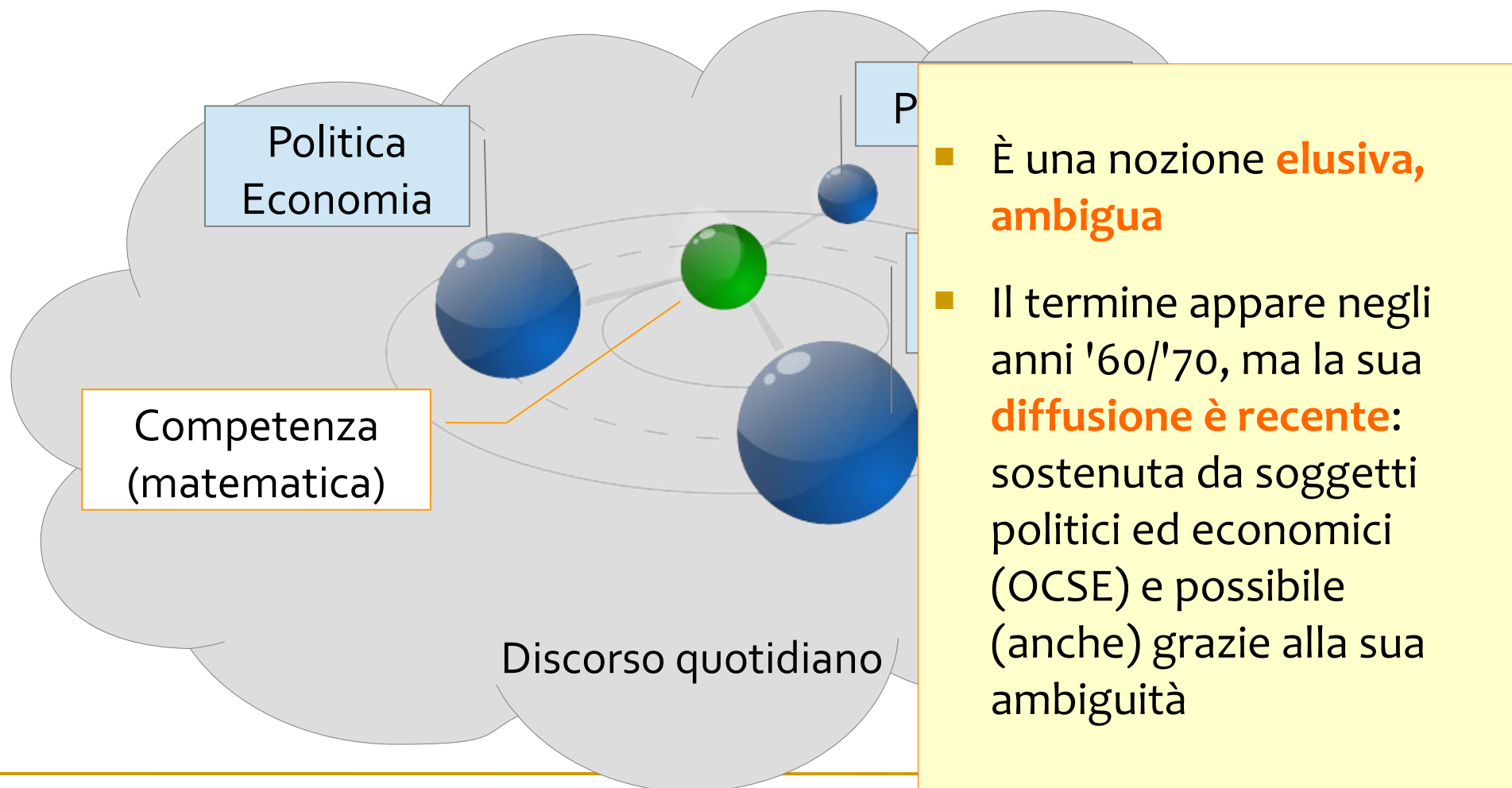
La nozione di competenza: un **boundary object**

- Si trova all' **intersezione di diversi ambiti**



La nozione di competenza: un **boundary object**

- Si trova all' **intersezione di diversi ambiti**



L'ambiguità della nozione di competenza

Mot-éponge: comme l'éponge absorbe peu à peu les substances qu'elle rencontre, *le mot compétence s'enrichit de tous les sens attribués par ceux qui l'emploient*. Pressée, une éponge se vide; de même exprimé à tout propos, le terme de compétence *ne restitue plus aucune signification*.

(Gilbert & Parlier, 1994).

Il termine è spesso *usato senza essere definito*

Le definizioni esplicite fanno ricorso a “*sinonimi*”: ability, capability, cognizance, effectuality, efficacy, efficiency, knowledge, mastery, proficiency, skill, and talent.

L'idea che si vuole veicolare è che “*learning mathematics is more than acquiring an array of facts and that doing mathematics is more than carrying out well-rehearsed procedures*”

(Kilpatrick, 2014)

La nozione di competenza in educazione

Il termine “competenza” appare negli anni '60/'70

La sua elaborazione ha subito l'influsso di diversi approcci teorici all'educazione (**performance** vs **competenza**)

Negli anni recenti è concettualizzata come la **capacità astratta** di un **individuo** di svolgere attività o **risolvere problemi**

La nozione di competenza in educazione

Il termine “competenza” appare negli anni Settanta

La sua elaborazione ha subito l'influenza di correnti di pensiero all'educazione (**performance** vs **competence**)

- From simple to **complex**
- From outside to **inside**
- From theoretical to **pragmatic**

(Marzano & Iannotta, 2015)

Negli anni recenti è concettualizzata come la **capacità astratta** di un **individuo** di svolgere attività o **risolvere problemi**

Competenza è la **capacità** di mettere in moto e coordinare le **risorse interne** possedute e quelle **esterne** disponibili per affrontare **positivamente** una **tipologia di situazioni sfidanti**

(Pellerrey, 2004).

- Cognitive
- Metacognitive
- Motivazionali
- Affettive

La nozione di competenza (in?) matematica

Competenza è la **capacità** di mettere in moto e coordinare le **risorse interne** possedute e quelle **esterne** disponibili per affrontare **positivamente** una **tipologia di situazioni sfidanti**

(Pellerey, 2004).

Si può parlare di “competenza matematica”? O in matematica? Cosa si deve intendere con tali espressioni? Cosa vuol dire “essere competente in matematica”?

La nozione di competenza (in?) matematica

Competenza è la **capacità** di mettere in moto e coordinare le **risorse interne** possedute e quelle **esterne** disponibili per affrontare **positivamente** una **tipologia di situazioni sfidanti**

(Pellerey, 2004)

Si può parlare di “competenza matematica”? Cosa si deve intendere?
Cosa vuol dire “essere competente in matematica”?

Situazioni che **coinvolgono la matematica**.
In cui la **matematica gioca qualche ruolo**

- Cognitive
- Metacognitive
- **Motivazionali**
- **Affettive**

Riferiti
specificamente alla
matematica

La nozione di competenza matematica (KOM)

Mathematical competence then means the ability to understand, judge, do and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role."

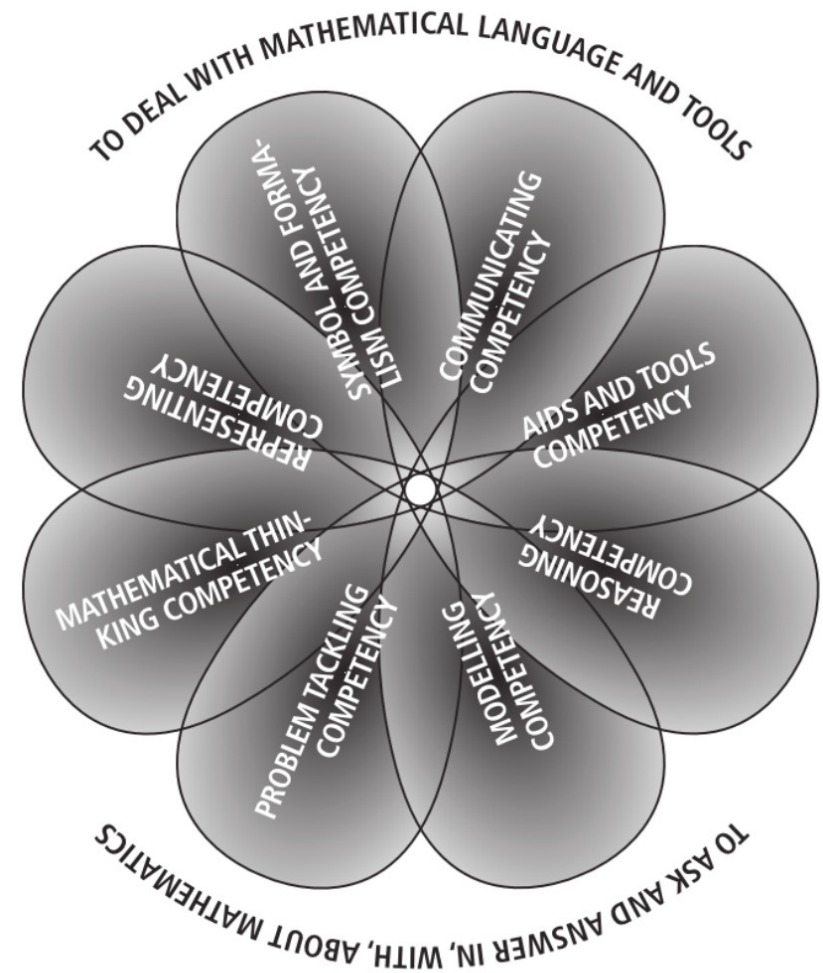
(Niss, 2003)

- Idea di competenza come ricerca di una **"visione unitaria"** sulla matematica
- Aspetti "essenziali" **non** risiedono nei **contenuti**
- Analisi delle componenti dell'**attività matematica**
- L'importanza delle **dimensioni soggettive** (metacognitive, volitive e affettive) resta **in ombra**

La nozione di competenza matematica (KOM)

8 componenti principali (K-competencies):

- Thinking mathematically
- **Posing and solving mathematical problems**
- Modelling mathematically
- **Reasoning mathematically**
- **Representing mathematical entities**
- Handling mathematical symbols and formalisms
- **Communicating in, with, and about mathematics**
- Making use of aids and tools



La nozione di competenza matematica (KOM)

- Thinking
 - **Posing problem**
 - Modell
 - **Reason**
 - **Repres**
 - Handling formal
 - **Comm**
 - **mather**
 - Making
- Dimensioni da tenere in considerazione quando si progettano attività intese a promuovere (valutare) lo sviluppo della competenza matematica.
 - L'attività matematica può essere descritta in termini di K-competencies **a tutti i livelli**?
 - Pensare in termini di K-competencies aiuta nella **progettazione di un curriculum** di matematica? Di **attività didattiche**?
 - È possibile descrivere l'attività matematica di uno **studente** in termini di K-competencies? E questa descrizione mi aiuta a **interpretare** l'attività dello studente? Le sue **difficoltà**? A progettare un intervento?
 - Qual è la relazione tra sviluppo di K-competenze e acquisizione di conoscenze?

TOOLS

TOOLS

TO ASK



Tecnologie e insegnamento della matematica

Contesti
fenomenologici
per l'attività
matematica

Indicazioni Nazionali per i Licei (2010)

Linee generali e competenze

Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono **contesti idonei** per **rappresentare e manipolare oggetti matematici**. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico.

Focus su:

Representational affordances:

modi di rappresentare oggetti matematici.

modi di manipolare le rappresentazioni

Perché il focus sulle rappresentazioni è importante?

L'attività matematica è MEDIATA dall'uso di rappresentazioni.

- **Inaccessibilità** degli oggetti matematici, che devono essere rappresentati.
- Le rappresentazioni funzionano da **strumenti di pensiero**: orientano i modi di pensare le possibili soluzioni di un problema di matematica.
- L'attività di **elaborazione, trasformazione e interpretazione di rappresentazioni** nel contesto della soluzione di problemi **contribuisce alla costruzione del significato degli oggetti matematici.**

Perché il focus sulle rappresentazioni è importante?

L'attività matematica è **MEDIATA** dall'uso di rappresentazioni.

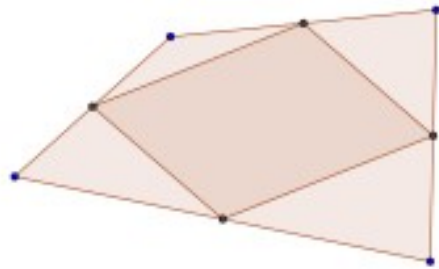
- **Inaccessibilità** degli oggetti matematici, che devono essere rappresentati.
- Le rappresentazioni funzionano da **strumenti di pensiero**: orientano i modi di pensare le possibili soluzioni di un problema di matematica.

- L'attività di **elaborazione delle rappresentazioni contribuisce alla formazione dei concetti matematici.**

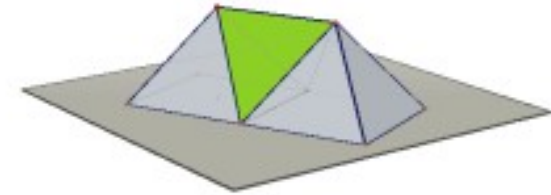
Ipotesi di natura psicologica (Vygotskij) su:

- linguaggio e rappresentazioni (esterne) come **psychological tools**
- Linguaggio, interazione sociale e **formazione dei concetti scientifici**

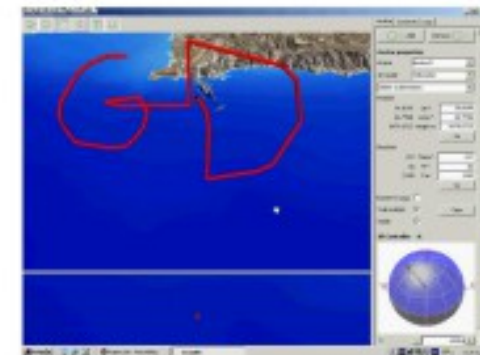
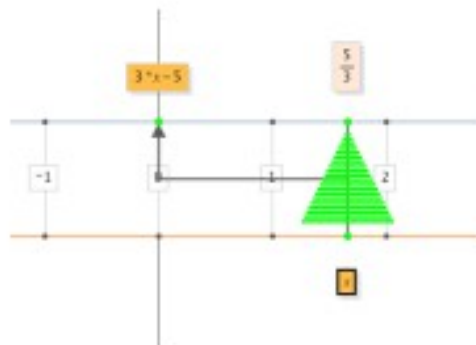
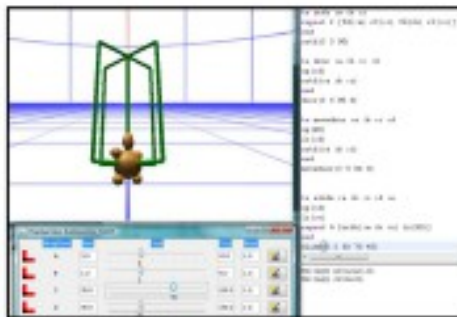
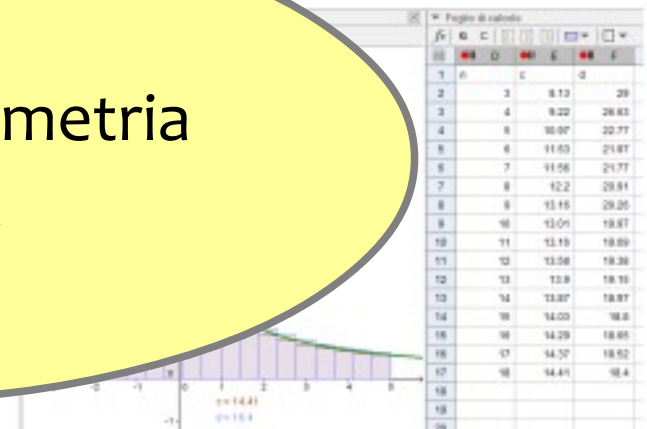
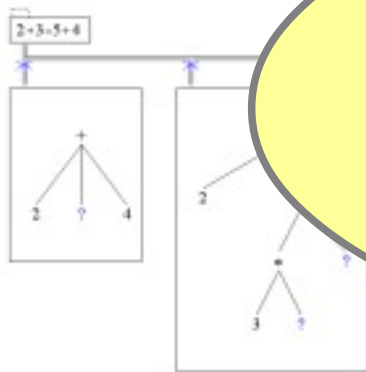
Rappresentazioni digitale



```
F1- Tools  F2- Algebra  F3- Calc  F4- Other  F5- Prisma  F6- Clean Up  
■ solve(x + y = 31, y)  
y = 31 - x  
■ x2 + y2 = 252 | y = 31 - x  
2 · x2 - 62 · x + 961 = 625
```



Focus su
Ambienti di Geometria
Dinamica
(AGD)



Ambienti di Geometria Dinamica (AGD)

Cosa è un Ambiente di Geometria Dinamica?

Esaminiamo un esempio:

Costruire un quadrato in Geogebra (ambiente “geometria” o “grafici” senza riferimento cartesiano) senza usare il comando “poligono regolare”.

- Quali caratteristiche ha il disegno realizzato?

Geometria (Primo biennio)

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali [...], sia mediante programmi informatici di geometria.

Ambienti di Geometria Dinamica (AGD)

Una costruzione in un AGD viene realizzata tramite una **sequenza di azioni organizzate secondo relazioni temporali, spaziali e logiche**. Tale sequenza non è “solo” realizzata ma è **esplicitata**, comunicata al sistema.

Tale sequenza realizza **segni grafici** sul monitor che intrattengono tra loro determinate **relazioni spaziali**.

Ambienti di Geometria Dinamica (AGD)

Noi possiamo **interpretare segni grafici e le relazioni spaziali** tra essi come rappresentazioni di **oggetti geometrici e relazioni geometriche**.

Una costruzione in un AGD viene realizzata tramite una **sequenza di azioni organizzate secondo relazioni temporali, spaziali e logiche**. Tale sequenza non è "solo" realizzata ma è **esplicitata**, comunicata al sistema.

Tale sequenza realizza **segni grafici** sul monitor che intrattengono tra loro determinate **relazioni spaziali**.

Ambienti di Geometria Dinamica (AGD)

Alcuni dei segni grafici prodotti (elementi della costruzione) possono essere **trascinati**, ma **non tutti**.

Il trascinamento modifica il sistema di segni grafici **preservando alcune relazioni spaziali**.

Ambienti di Geometria Dinamica (AGD)

Vengono **preservate le relazioni spaziali** tra gli elementi del disegno definite nella costruzione attraverso l'**uso dei comandi** dell' ADG

Vengono **preservate le relazioni spaziali** tra gli elementi del disegno che sono **conseguenza** di quelle definite attraverso l'uso dei comandi.

Il trascinamento modifica il sistema di segni grafici **preservando alcune relazioni spaziali**.

Ambienti di Geometria Dinamica (AGD)

Costruire un quadrato in Geogebra (ambiente "geometria" o "grafici" senza riferimento cartesiano) senza usare il comando "poligono regolare".

- **La consegna è stata eseguita correttamente?**



Ambienti di Geometria Dinamica (AGD)

Costruire un quadrato in Geogebra (ambiente "geometria" o "grafici" senza riferimento cartesiano) senza usare il comando "poligono regolare".

Criterio di validazione:

Una **COSTRUZIONE** in un AGD è corretta se **ogni disegno** ottenibile per trascinamento degli elementi base è **corretto**

↳ controllo percettivo

↳ ...

Criterio di validazione:

Una **COSTRUZIONE** in un AGD è corretta se le **relazioni spaziali** che corrispondono alle proprietà geometriche desiderate sono invariante rispetto al trascinamento degli elementi base

AGD come *micromondi*

è un **ambiente** che consente l'**esplorazione** di un particolare dominio di conoscenze, fornendo gli strumenti per tale esplorazione

- fornisce (consente all'utente di produrre) specifiche **rappresentazioni** degli oggetti e delle relazioni proprie del dominio di conoscenze in questione;
 - consente la **manipolazione** di queste rappresentazioni che corrispondono a operazioni **coerenti** con gli oggetti e le relazioni del dominio in questione;
 - è **interattivo** (e non inerte): ad ogni azione dell'utente corrisponde una retroazione, **coerente** con gli oggetti e le relazioni del dominio in questione.
-

AGD come *micromondi*

è un **ambiente** che consente l'**esplorazione** di un particolare dominio di conoscenze, fornendo gli strumenti per tale esplorazione

- **Expressive tools:** These tools offer the learner an expressive sub-system within which **mathematical knowledge may be explored.**
(Hoyles & Noss, 2003)

- corrispondono a operazioni **coerenti** con gli oggetti e le relazioni del dominio in questione;

- The orientation of learning tools was neither to make complex algorithms easy nor to make it serve to reduce the knowledge one needs [. . .] **It does not make solution the central feature**
(Yerushalmy, 2010)



Attività con AGD

- Eseguire costruzioni geometriche
 - Esplorare configurazioni geometriche alla ricerca di...
 - Produrre rappresentazioni "non convenzionali" (non di solo oggetti geometrici)
 - Esplorare nuove rappresentazioni
 - ...
-

Costruzioni in un AGD

Prendiamo familiarità con AGD (ambiente geometria di geogebra)

Costruire

- la circonferenza inscritta in un triangolo.
- la bisettrice di un angolo (senza usare il comando bisettrice).
- un trapezio.

Descrivere la costruzione.

Trascinare tutto quello che si può trascinare. La costruzione è stabile?

Costruzioni in un AGD

Prendiamo familiarità con AGD (ambiente geometria di geogebra)

Costruire

- la circonferenza inscritta in un triangolo.
- la bisettrice di un angolo (senza usare il compasso)
- un trapezio.

Descrivere la costruzione.

Trascinare tutto quello che si può trascinare. La costruzione è stabile?

Come sarebbe se?

Qualcosa di un po' più impegnativo...

Costruire

- Il luogo dei punti equidistanti da un punto e una retta dati
- Il luogo dei punti equidistanti da un punto e una circonferenza dati

Esplorazioni in un AGD

- Costruire un parallelogramma, sotto quali condizioni è possibile inscrivere in una circonferenza?
- Dati 5 punti nel piano A, B, C, D e P , chiamiamo P' il simmetrico di P rispetto a A , P'' il simmetrico di P' rispetto a B , P''' il simmetrico di P'' rispetto a C e P'''' il simmetrico di P''' rispetto a D . Sotto quali condizioni P e P'''' coincidono?
- Studia quale quadrilatero formano i punti medi dei lati di un quadrilatero.
- Studia quale quadrilatero formano le bisettrici degli angoli di un quadrilatero al variare di questo.

Costruzioni in un AGD 3D

Prendiamo familiarità con una AGD 3D: avviamo Geogebra 3D grapher, cancelliamo gli assi cartesiani.

- Costruire un punto
- Costruire una retta parallela al “piano di base” e passante per il punto
- Costruire un piano perpendicolare al piano di base.

Descrivere le costruzioni.

Scrivere una definizione di piani perpendicolari e confrontarla con la costruzione fatta.

Esplorazioni in un AGD 3D

- Dato un tetraedro qualunque è sempre possibile costruire una sfera a esso inscritta (circoscritta)?

In caso affermativo costruirla, altrimenti spiegare perché non è possibile facendo eventualmente riferimento all'uso di Geogebra

- Quali sono le possibili sezioni piane di un cubo? Quali poligoni è possibile ottenere? È possibile ottenere poligoni regolari?

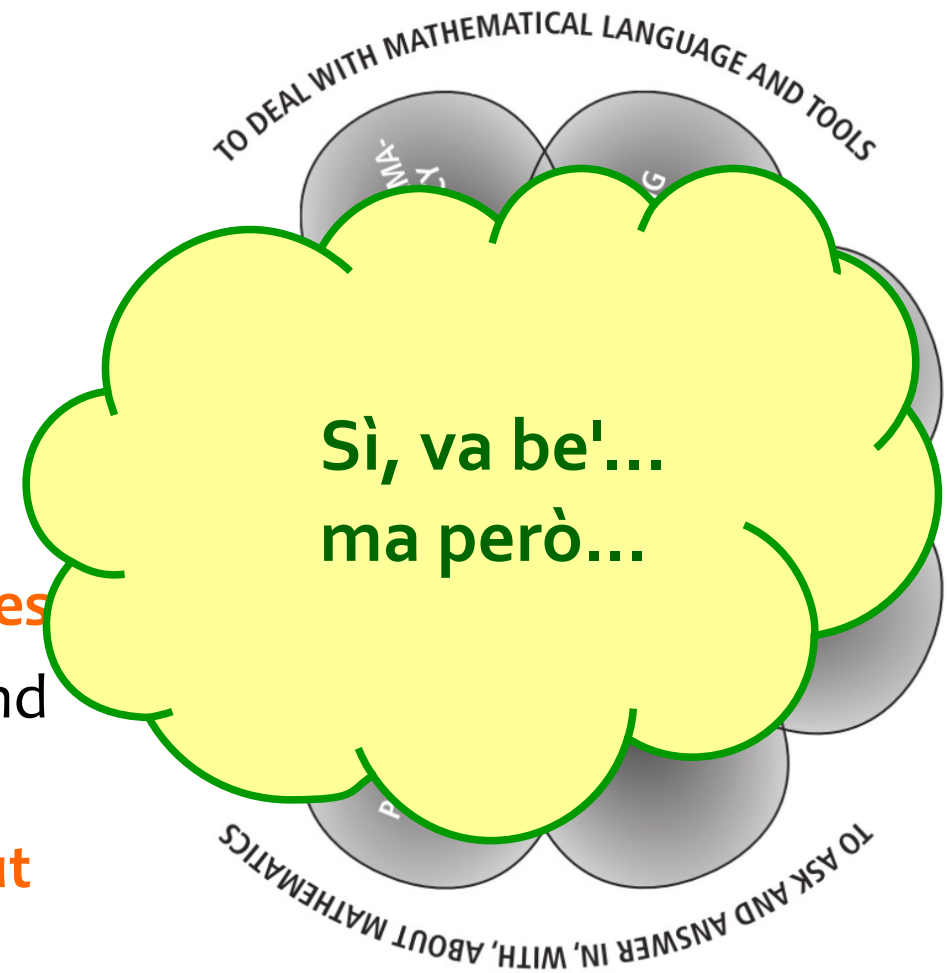
Formulare le proprie congetture prima di utilizzare Geogebra, verificarle poi con Geogebra e eventualmente formularne di nuove.



La nozione di competenza matematica (KOM)

8 componenti principali (K-competencies):

- Thinking mathematically
- **Posing and solving mathematical problems**
- Modelling mathematically
- **Reasoning mathematically**
- **Representing mathematical entities**
- Handling mathematical symbols and formalisms
- **Communicating in, with, and about mathematics**
- Making use of aids and tools



Posing and solving mathematical problem.

Sì, va be'... ma però...

Possiamo porre agli studenti “problemi aperti” da risolvere, esplorare configurazioni interessanti... ma con le tecnologie, di fatto, **semplifichiamo il problema...**



Posing and solving mathematical problem.

Sì, va be'... ma però...

Possiamo porre agli studenti “problemi aperti” da risolvere, esplorare configurazioni interessanti... ma con le tecnologie, di fatto, **semplifichiamo il problema...**

Davvero semplifichiamo il problema?

- A quale **problema** stiamo pensando? Cosa intendiamo per **semplificare**?
Es: disegnare un quadrato... **semplificare** o **dare senso**?
- Esaminiamo i **processi di pensiero attivati**: uso di argomenti variazionali, ricerca e analisi di invarianti, anticipazioni e conferme, formulazione e verifica di congetture, . . .

Sono significativi dal punto di vista della matematica e del suo apprendimento? Cosa contribuisce a rendere possibile l'attivazione di questi processi?

Reasoning mathematically.

Sì, va be'... ma però...

Gli studenti possono esplorare situazioni aperte produrre proprie congetture, ma poi la “verifica” o meno delle congetture è a carico del software. Non c'è bisogno per gli studenti di argomentare alcunché... tanto meno di dimostrare alcunché...



Reasoning mathematically.

Sì, va be'... ma però...

Gli studenti possono esplorare situazioni aperte produrre proprie congetture, ma poi la “verifica” o meno delle congetture è a carico del software. Non c'è bisogno per gli studenti di argomentare alcunché... tanto meno di dimostrare alcunché...

Perché si dimostra in matematica?

- Convincere, **spiegare perché**, **organizzare la conoscenza...**
- Riconoscimento della **presenza di diversi invarianti**. Interpretazione della **simultaneità degli invarianti** come esistenza di una **relazione condizionale tra enunciati** rappresentati dagli invarianti. Interpretazione degli invarianti indiretti come rappresentanti di enunciati conseguenza degli enunciati rappresentati come invarianti diretti.
- Significato di **costruzione geometrica**

De Villiers, Mariotti,
Baccaglini-Frank, Antonini

Representing mathematical entities.

Sì, va be'... ma però...

L'ambiente impone certi tipi di rappresentazione, e le rappresentazioni sono prodotte "automaticamente" dal software.

Qual è la relazione tra rappresentazione e oggetto rappresentato che il software consente di costruire?

- **Specificità delle rappresentazioni geometriche.**
- Relazione tra componente figurale e componente concettuale nell'apprendimento della geometria: **equilibri e disequilibri...**
- AGD offrono un contesto ricco per le esperienze visive e di manipolazione che possono contribuire a **ricomporre l'unità tra figurale e concettuale** e fornire un buon supporto allo sviluppo di immagini mentali ricche e flessibili

Fischbein, Mariotti

Communicating in, with, and about mathematics. Sì, va be'... ma però...

Non abbiamo specificamente parlato di comunicazione. Né di come l'uso di un AGD possa favorire lo sviluppo di questa abilità

Non è l'uso del software in sé... ma il contesto generale dell'attività in cui l'uso del software è inserito

Grazie
