Apprendere la matematica: gli studenti come ricercatori

Ferdinando Arzarello

Dipartimento di Matematica "G. Peano"

Università di Torino

3ª SCUOLA ESTIVA PER INSEGNANTI UMI CIIM AIRDM

"***Competenze in matematica e curriculum verticale***"

Bardonecchia, 26 agosto 2016

Gli obiettivi per l'educazione matematica dipendono da varie componenti:

a) dalle concezioni che si hanno della matematica e di che cosa significa comprenderla, in particolare a livello di studente;
b) dalle idee pedagogiche sui metodi opportuni perché tale comprensione avvenga di fatto come prodotto delle azioni di insegnamento/apprendimento.
c) …

Un quadro complesso
CURRICOLO
conoscenza
pratiche
Competenze
?
METODOLOGIA

Insegnare
Apprendere

COME?

(D)A CHI?

CHE COSA?

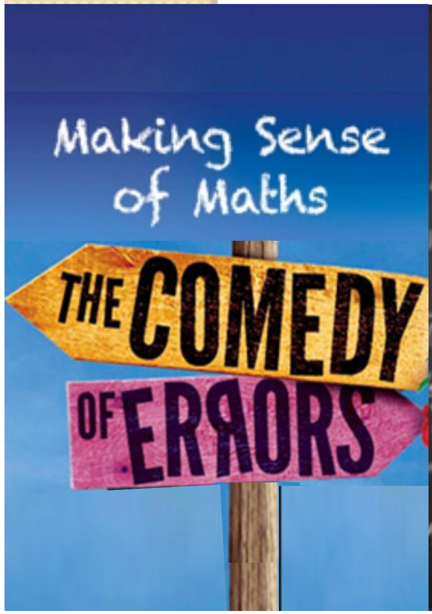
Imparare a pensare matematicamente significa:
(a) sviluppare un punto di vista matematico: valorizzare i processi di matematizzazione e astrazione e avere la predilezione per applicarli;
(b) sviluppare le **competenze** proprie degli strumenti del mestiere, e utilizzare questi strumenti con l'obiettivo di sviluppare questa comprensione "strutturale" dei fenomeni, cioè sviluppare **il senso per la matematica** (mathematical sense-making).

Schoenfeld, A. (2012). Problematizing the didactic triangle, *ZDM*.

Il senso per la matematica: Studenti, Insegnanti

1. Il senso degli studenti per la matematica.

Il guaio è che può risultare una grossa differenza tra quanto noi insegnanti intendiamo per "pensare matematicamente" e il senso di quanto trasmettiamo agli allievi: il loro senso per la matematica è il risultato di come interpretano le loro esperienze e pratiche in questo dominio fuori e dentro la scuola e questo può generare vere e proprie commedie degli errori in classe.



La dinamica reale/formale

UN SISTEMA FORMALE

(2)

IL/I SISTEMA/I FORMALE/I

ciclo

Nel pensiero matematico reale il ragionamento formale e quello informale sono profondamente intrecciati: un obiettivo dell'insegnamento dovrebbe essere di rendere operativo questo ciclo virtuoso nelle pratiche di classe.

UNA SITUAZIONE REALE

(4)

LA SITUAZIONE REALE

(1) Aspetti della sit.ne reale che sono rappresentati nel sist. f.le

(2) Trattamenti fatti in un sist. f.le/ Conversioni da un sist. a un altro

(3) Interpretazione dei risultati del/dei sist. f.li nella sit.ne reale

(4) Interpretazione/teorizzazione del fenomeno

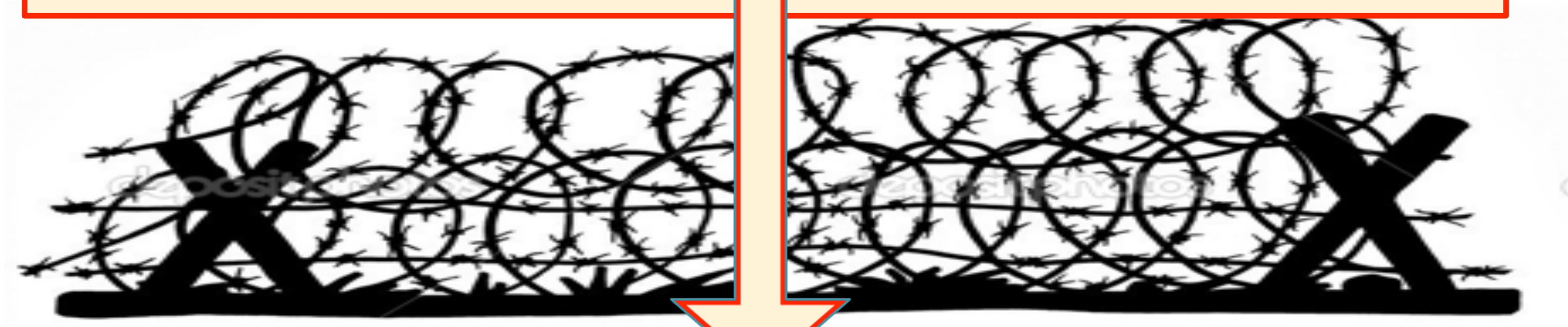
Si origina un grosso problema didattico e cognitivo quando il ciclo è interrotto: si produce quella che si può chiamare la “**sospensione di senso**” per gli enunciati matematici.

Il modello della sospensione del senso

IL SISTEMA FORMALE

(2)

IL SISTEMA FORMALE

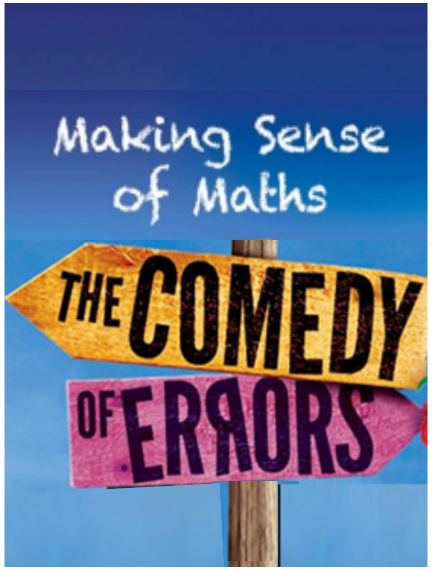


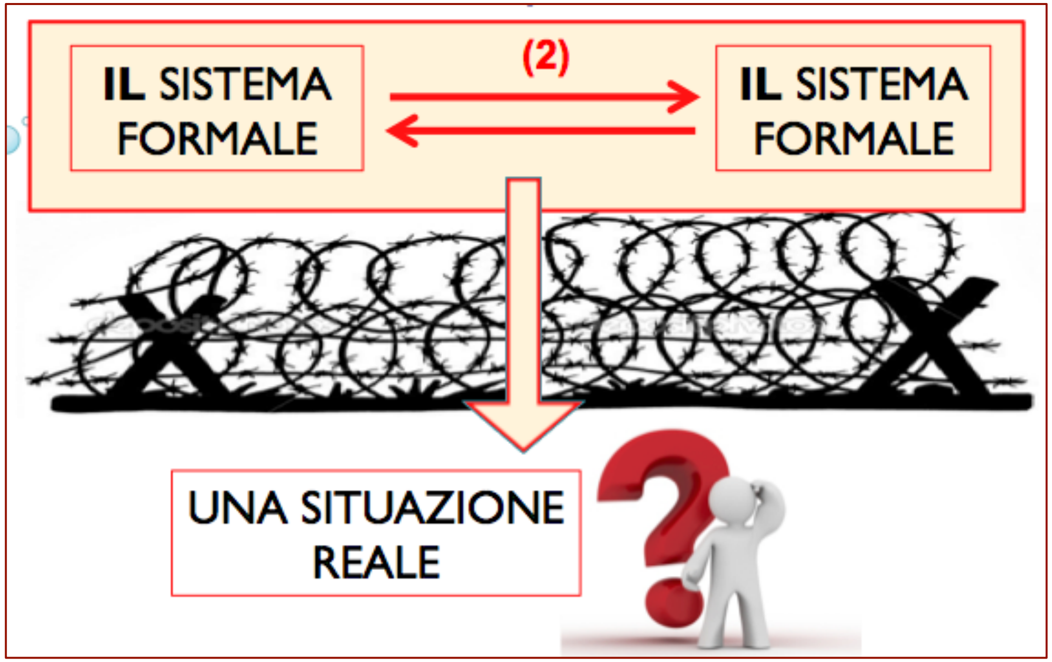
Il senso degli enunciati matematici

Spesso nelle pratiche di classe si hanno due mondi separati o addirittura un solo mondo.

La sospensione di senso può essere una delle radici principali dei molti errori degli studenti: può generare vere commedie degli errori nel modo in cui interpretano i (testi dei) problemi, gli enunciati e le regole della matematica.

Dare le definizioni corrette non sembra sufficiente.





2. Il senso degli insegnanti per la matematica

Molte ricerche, basandosi sui dati PISA e TIMSS; provano che nonostante l'enfasi che alcuni curricoli danno ai processi cognitivi di livello alto (ad es. ragionamento e Problem Solving), le credenze degli insegnanti sui metodi di insegnamento per studenti "medi" è all'origine delle limitate opportunità che offrono per tali processi nelle loro pratiche.

Silver, E. (2009). Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: what might we learn? ZDM Mathematics Education 41:827–832

Il senso degli insegnanti per la matematica

Questo nonostante molte ricerche dimostrino che l'apprendimento migliore avviene proprio in quelle classi in cui le pratiche sono basate su domande di livello cognitivo alto e non solo su un tipo di istruzione procedurale.

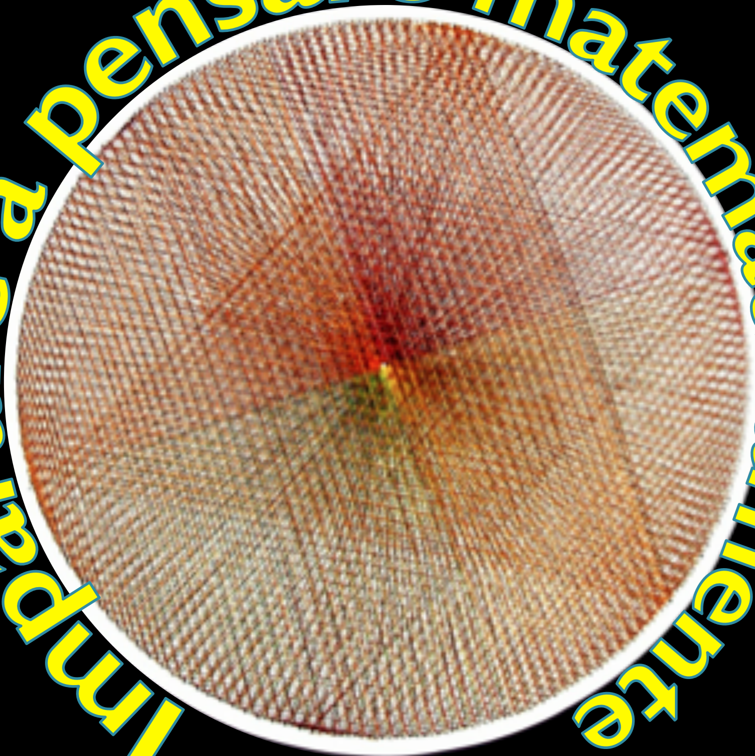
Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. Teachers College Record, 110(3), 608–645.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform

Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. Journal for Research in Mathematics Education, 39, 247–280.

Insegnare
Apprendere

COME?



Imparare a pensare matematicamente

(D)A
CHI?

CHE
COSA?

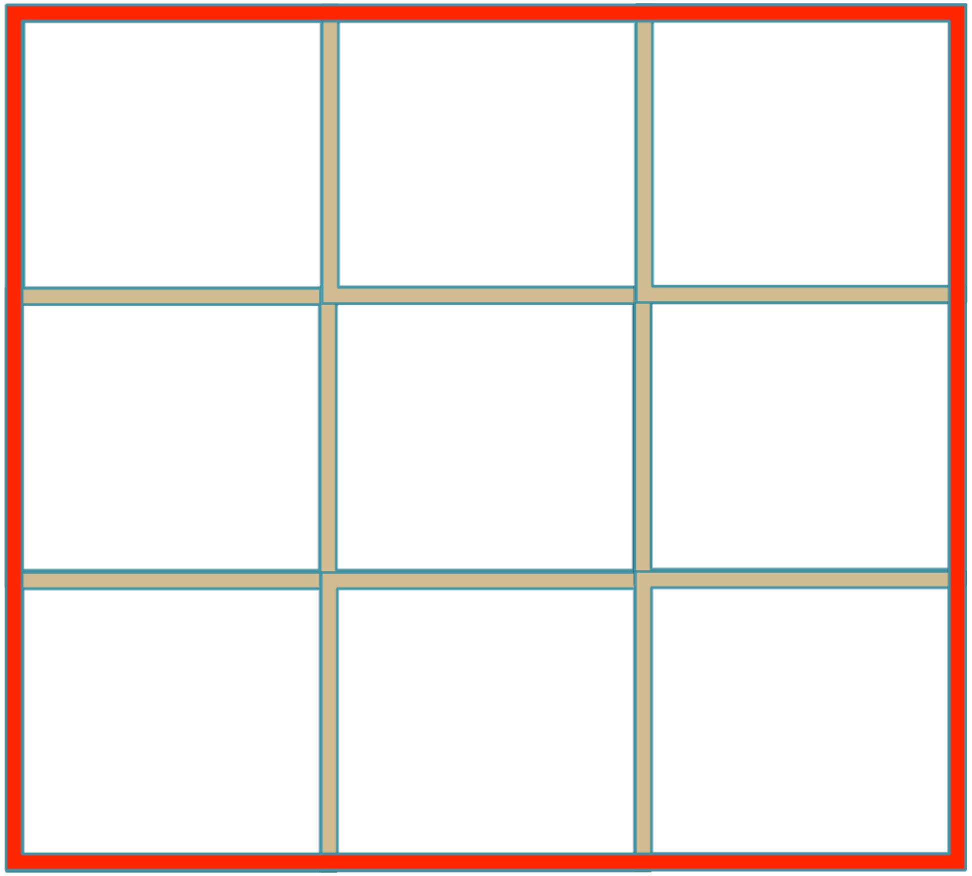
l'allievo
come ricercatore

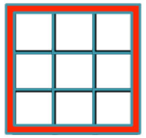
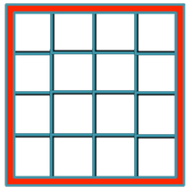
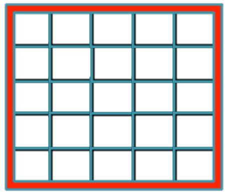
2. Il senso matematico delle cose : esempi

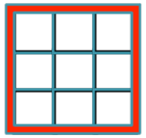
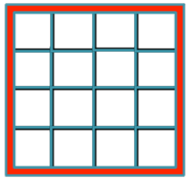
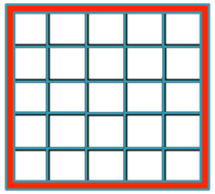
Brown, **S.I.** & **Walter**, **M.I.**, (2005). *The Art of Problem Posing*,, Lawrence Erlbaum publ.
Arcavi, **A.** & **Friedlander**, **A.** (in press),
Tasks and Competencies in the Teaching and Learning of Algebra, NCTM

2.Il pasticcere geometra

Modello schematico della torta e dei tagli

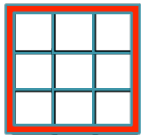
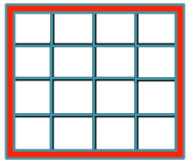
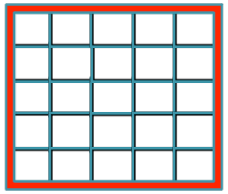


	taglia	n. 1-quadr.	n. 1-quadr. senza fr.	n. 1-quad fragole 1 lato	n. 1-quad fragole 2 lati	
	2x2					
	3x3					
	4x4					
	5x5					
	axa					

	taglia	n. 1-quadr.	n. 1-quadr. senza fr.	n. 1-quad fragole 1 lato	n. 1-quad fragole 2 lati	
	2x2	$4 = 2^2$	0	0	4	
	3x3	3^2	1	4=4x1	4	
	4x4	4^2	2^2	8=4x2	4	
	5x5	5^2	3^2	12=4x3	4	
	axa	a^2	$(a-2)^2$	$4(a-2)$	4	

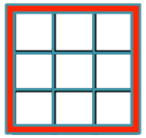
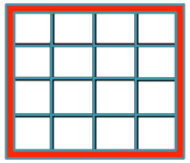
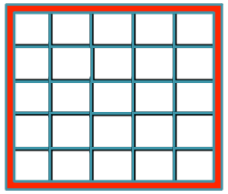
Passo 1a

Guarda con occhio matematico numeri e formule: che cosa osservi?

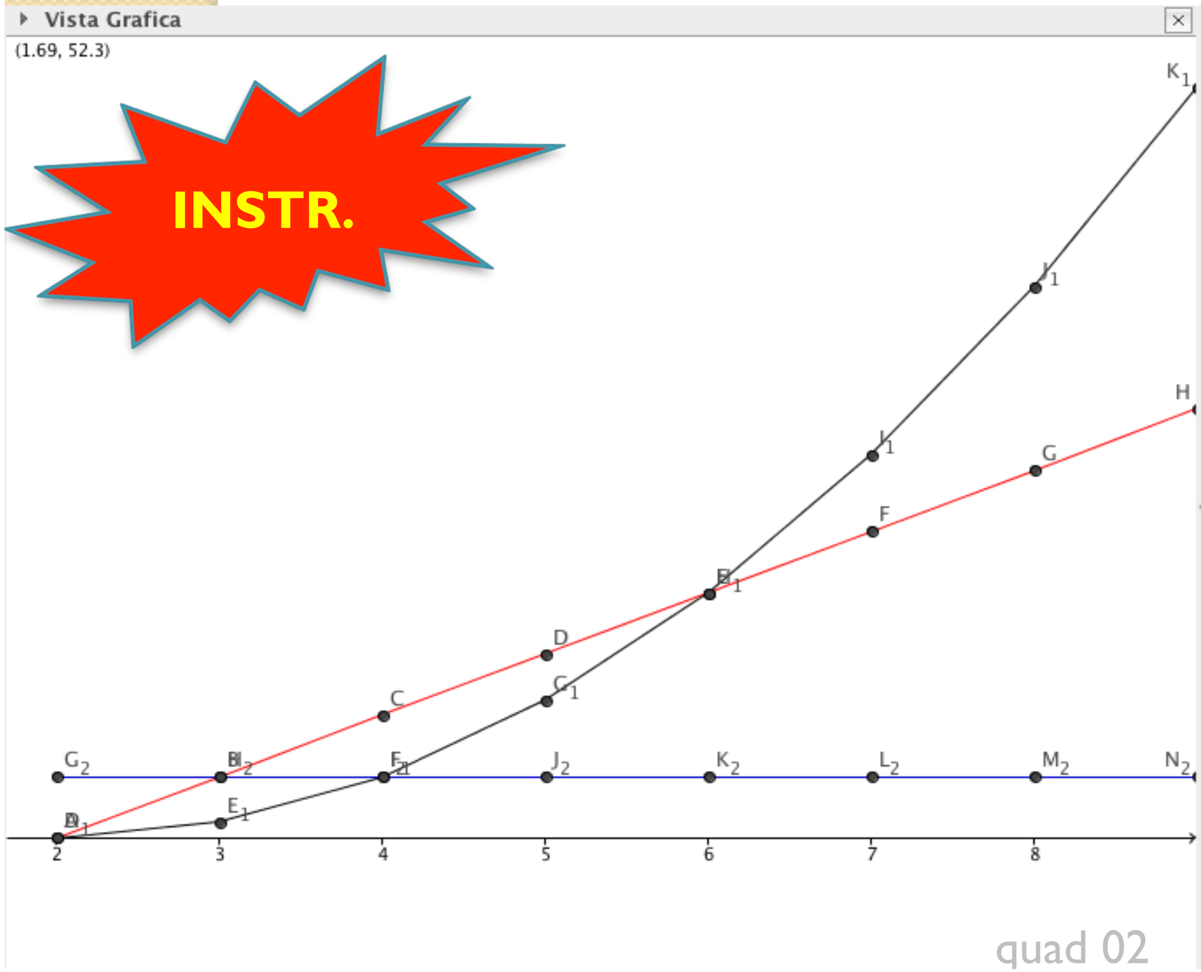
	2x2	$4 = 2^2$	0	0	4	
	3x3	3^2	1	4=4x1	4	
	4x4	4^2	2^2	8=4x2	4	
	5x5	5^2	3^2	12=4x3	4	
	axa	a^2	$(a-2)^2$	$4(a-2)$	4	

Passo 1b

Come puoi rappresentare i dati?

	2x2	$4 = 2^2$	0	0	4	
	3x3	3^2	1	4=4x1	4	
	4x4	4^2	2^2	8=4x2	4	
	5x5	5^2	3^2	12=4x3	4	
	axa	a^2	$(a-2)^2$	$4(a-2)$	4	

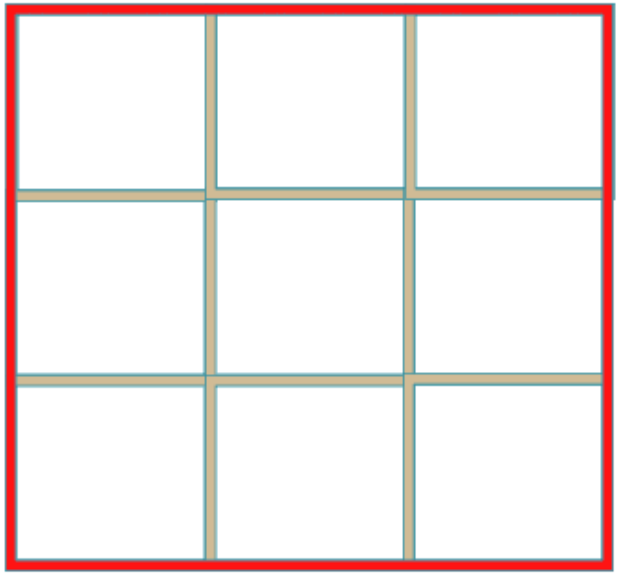
1b. Come puoi rappresentare i dati? Che cosa osservi ora?



Vista Foglio di calcolo

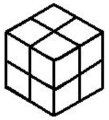
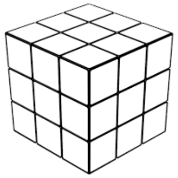
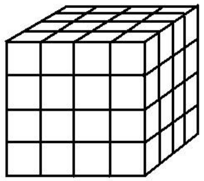
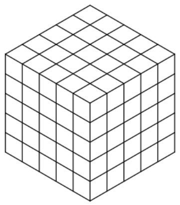
	B	C	D	E	F
1	0	2	0	2	4
2	4	3	1	3	4
3	8	4	4	4	4
4	12	5	9	5	4
5	16	6	16	6	4
6	20	7	25	7	4
7	24	8	36	8	4
8	28	9	49	9	4
9	32	10	64	10	4
10	36	11	81	11	4
11	40	12	100	12	4
12	44	13	121	13	4
13	48	14	144	14	4
14	52	15	169	15	4
15	56	16	196	16	4
16	60	17	225	17	4
17	64	18	256	18	4
18	68	19	289	19	4
19	72	20	324	20	4
20	76	21	361	21	4
21	80	22	400	22	4
22	84	23	441	23	4
23	88	24	484	24	4
24	92	25	529	25	4
25	96	26	576	26	4
26	100	27	625	27	4

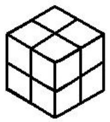
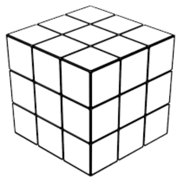
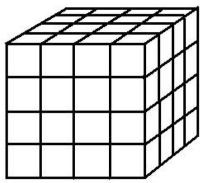
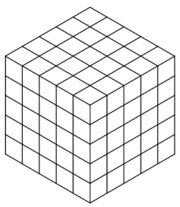
Passo 2
Come sarebbe se…?



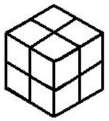
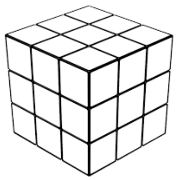
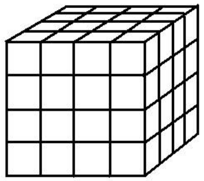
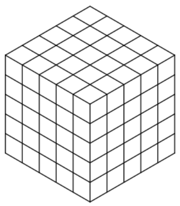
Pensa a una situazione simile (per es. a tre dimensioni): come cambiano le risposte alle domande 1a, 1b?

La storia

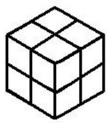
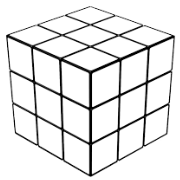
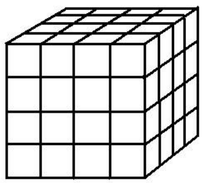
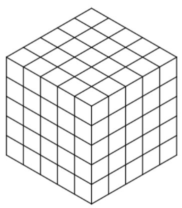
	taglia	n. 1-cubi	n. 1-cubi non glassati	n. 1-cubi glassati 1 faccia	n. 1-cubi glassati 2 facce	n. 1-cubi glassati 3 facce
	2x2x2					
	3x3x3					
	4x4x4					
	5x5x5					
a 1-cubi	axaxa					

	taglia	n. 1-cubi	n. 1-cubi non glassati	n. 1-cubi glassati 1 faccia	n. 1-cubi glassati 2 facce	n. 1-cubi glassati 3 facce
	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	8
	3x3x3	3^3	1	6=6x1	12=12x1	8
	4x4x4	4^3	2^3	24=6x4	24=12x2	8
	5x5x5	5^3	3^3	54=6x9	36=12x3	8
a 1-cubi	$axaxa$	a^3	$(a-2)^3$	$6(a-2)^2$	$12(a-2)$	8

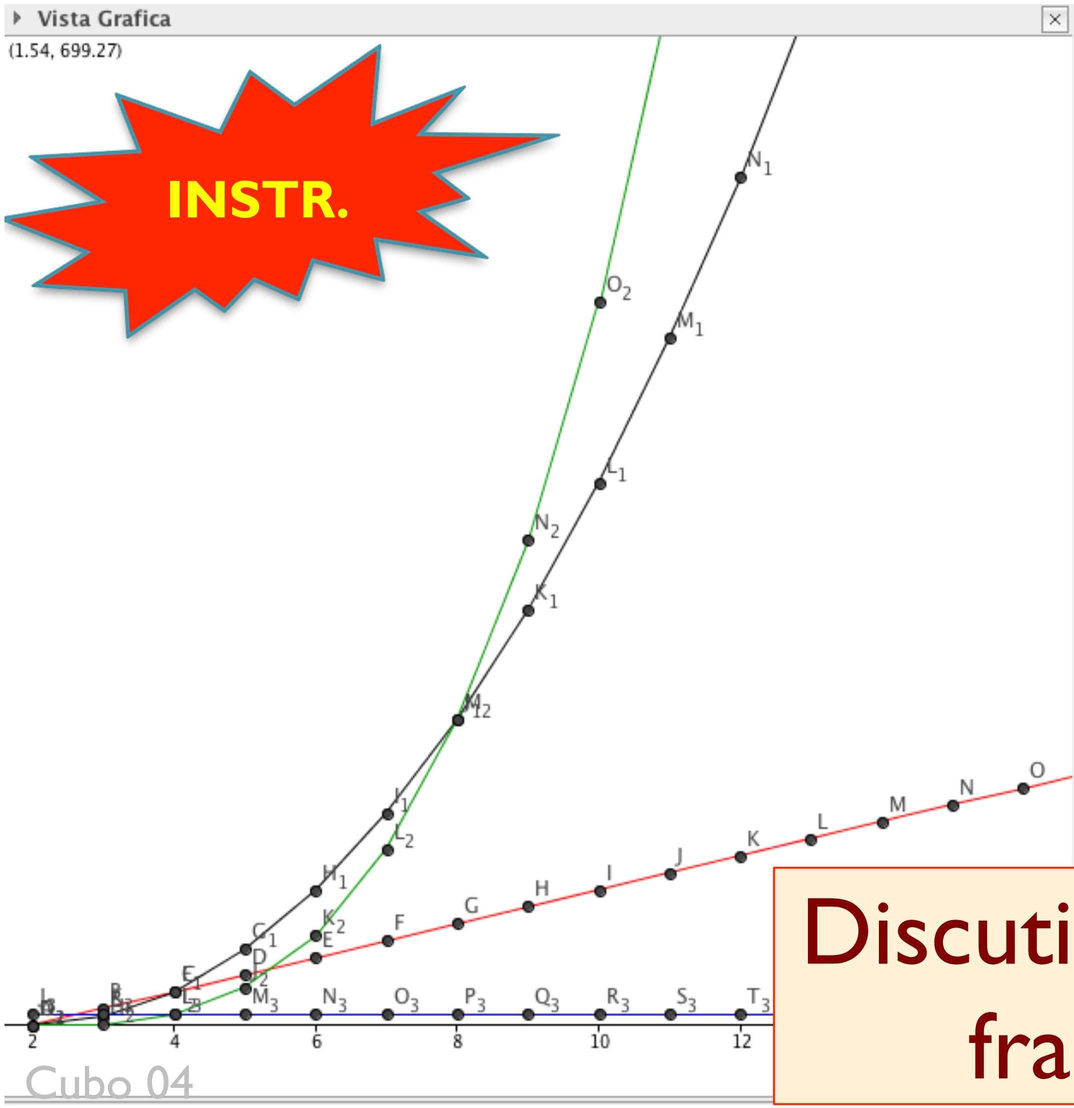
1a. Guarda con occhio matematico numeri e formule: che cosa osservi?

	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	8
	3x3x3	3^3	1	6=6x1	12=12x1	8
	4x4x4	4^3	2^3	24=6x4	24=12x2	8
	5x5x5	5^3	3^3	54=6x9	36=12x3	8
a 1-cubi	axaxa	a^3	$(a-2)^3$	$6(a-2)^2$	$12(a-2)$	8

1b. Come rappresentarli graficamente?

	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	8
	3x3x3	3^3	1	6=6x1	12=12x1	8
	4x4x4	4^3	2^3	24=6x4	24=12x2	8
	5x5x5	5^3	3^3	54=6x9	36=12x3	8
a 1-cubi	axaxa	a^3	$(a-2)^3$	$6(a-2)^2$	$12(a-2)$	8

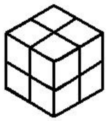
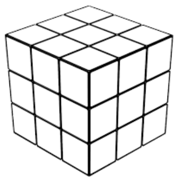
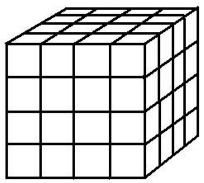
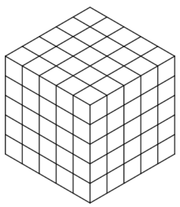
1b. Come rappresentarli graficamente? Che cosa osservi ora?



Vista Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E	F
1	2	0	2	0	2	0
2	3	12	3	6	3	1
3	4	24	4	24	4	8
4	5	36	5	54	5	27
5	6	48	6	96	6	64
6	7	60	7	150	7	125
7	8	72	8	216	8	216
8	9	84	9	294	9	343
9	10	96	10	384	10	512
10	11	108	11	486	11	729
11	12	120	12	600	12	1000
12	13	132	13	726	13	1331
13	14	144	14	864	14	1728
14	15	156	15	1014	15	2197
15	16	168	16	1176	16	2744
16	17	180	17	1350	17	3375
17	18	192	18	1536	18	4096
18	19	204	19	1734	19	4913
19	20	216	20	1944	20	5832
20	21	228	21	2166	21	6859
21	22	240	22	2400	22	8000
22	23	252	23	2646	23	9261

Discuti analogie e differenze fra le due situazioni

	taglia	n. 1-cubi	n. 1-cubi non glassati	n. 1-cubi glassati 1 faccia	n. 1-cubi glassati 2 facce	n. 1-cubi glassati 3 facce
	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	4
	3x3x3	3^3	2	9	12	4
	4x4x4	4^3	12	28	20	4
	5x5x5	5^3	36	57	28	4
a 1-cubi	axaxa	a^3	$(a-1)(a-2)^2$	$5a^2-16a+12$	$8a-12$	4

2.2 L'investigatore matematico

Passo 1

Osserva con occhio matematico

1	3	3
2	4	8
3	5	15
4	6	24
5	7	35

Osservazioni raccolte:

O1. Ci sono sempre due fattori, che riproducono la successione dei naturali partendo da 1 e da 3.

O2. In ogni uguaglianza i fattori differiscono di 2.

O3. I prodotti ottenuti (3, 8, 15, 24, 35) sono quasi quadrati perfetti: manca 1 per ottenerli.

O4. Anche le differenze tra i prodotti formano uno schema interessante:

8 - 3	5
15 - 8	7
24 - 15	9
35 - 24	11

O5. …

Passo 2
Come sarebbe se…?

Cosa succede se i fattori distano di 4?

1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

I risultati saranno ancora i precedenti di un quadrato perfetto?

Troviamo dei quadrati perfetti?

3. Il metodo della ricerca variata

Riassumiamo in uno schema quanto abbiamo fatto:

I. Una situazione: osservare (Oi), formulare domande (Dj), dare risposte (Rk)

II. Modificare una (o più) Oi negandola (quindi variando la situazione) → $(\sim Oi)_k$.

III. Nascono nuove osservazioni (Oi)*, ulteriori domande (Dj)*, e risposte (Rk)*.

Perché è così?

Che cosa capita se non è così?

Otteniamo così a partire da una situazione di partenza tante variazioni degli schemi seguenti:

Se (~ Oi) (Dj)*? → (Rk)*	Se (Oi) (Dj)? → (Rk)

La dinamica dello schema: dall'accettare la situazione data a una sua sfida con conseguenti indagini.

Il metodo della ricerca variata

Livello 0. Scegliere un punto di partenza

Livello 1. Fare l'elenco degli attributi (Oi); fare domande (Dj)?

Livello 2. Che cosa capita se non è così (~Oi)

Livello 3. Porre conseguenti questioni/ problemi (Dj)*?

Livello 4. Analizzare le (Dj)*

Livello 5. Metariflessione:

Se (~ Oi) allora (Dj)*? → (Rk)*

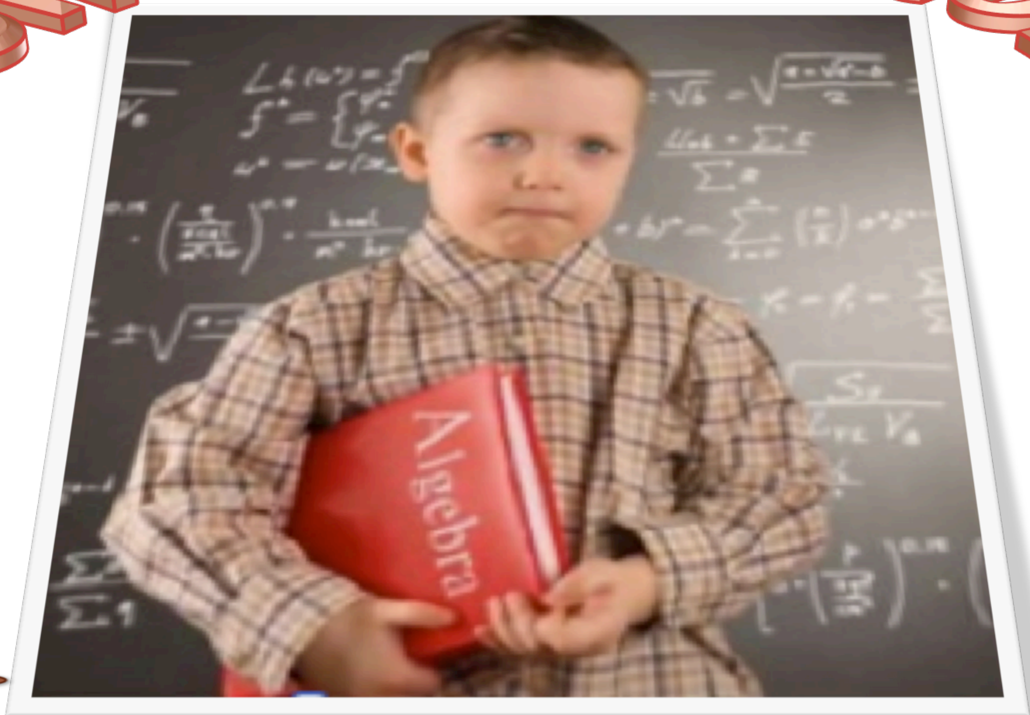
Se (Oi) allora (Dj)? → (Rk)

MRV ha conseguenze didattiche e cognitive importanti e si presta a un'analisi epistemologica proficua per le pratiche d'insegnamento.

Lo sviluppo di MRV in classe può servire:

- *in negativo*, come antidoto ai fini di "prevenire/scardinare una visione della matematica ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare".
- *in positivo*, come strumento trasversale che: sviluppa *un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare* e *applicare, ma riconosciuta* e *apprezzata come contesto per affrontare* e *porsi problemi significativi*, in cui sia supportata adeguatamente la **costruzione di competenze matematiche**.

L'allievo come ricercatore



investigatore matematico


competenze
L'allievo
come ricercatore
investigatore matematico
Algebra


competenze
L'allievo
come ricercatore
investigatore matematico

4. I principali aspetti epistemologici, cognitivi, didattici di MRV

4.1 MRV: variare per comprendere

4.2 Conseguenze didattiche

4.3 Macro-aree di competenze

MRV varia la situazione e favorisce così la comprensione

- Per capire meglio qualcosa consideriamola da più punti di vista e variamone le sue proprietà a una a una, "per vedere l'effetto che fa".

La teoria della variazione, dalla pedagogia cinese classica:

- **CONTRASTO**: *Per avere esperienza di qualcosa una persona deve fare esperienza di qualcosa di diverso per fare un confronto.*
- **GENERALIZZAZIONE**: *Per capire che cosa è 'tre' devo fare esperienza di una varietà di situazioni in cui 'tre' appare.*
- **SEPARAZIONE**: *Per fare esperienza di un certo aspetto di qualcosa e al fine di separare questo aspetto da altri aspetti, bisogna variarlo mentre gli altri aspetti non cambiano.*
- **FUSIONE**: *Se ci sono vari aspetti critici che chi apprende deve prendere in considerazione insieme, di essi deve fare esperienza simultaneamente.*

(Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M., 2004, p. 16)

MRV promuove il pensiero ipotetico

Le attività argomentative in cui si producono ipotesi o si generano condizionalità sono riconducibili a due modalità principali

[…]

La prima modalità è caratterizzata dalla produzione di *congetture interpretative* di ciò che si vede (percepisce), ad es. al fine di organizzarlo.

La seconda è caratterizzata dalla produzione di *congetture previsionali* (ad es. ipotesi su una situazione futura).

(Dalla Matematica per il Cittadino, 2001)

Si può intendere in generale l'attività argomentativa come un discorso:

- che permette al soggetto di tornare su ciò che si è fatto, visto (ecc.), producendo interpretazioni, spiegazioni, risposte a domande del tipo "perché è così?"

- che permette al soggetto di anticipare fatti, situazioni, ecc., producendo previsioni, discorsi ipotetici su mondi possibili, risposte a domande "come sarà?", "come potrebbe essere?"

Numeri e natura

Il primo esperimento scientifico moderno (1604)

1	1
3	4
5	9
7	16
9	25

DISCORSI

E

DIMOSTRAZIONI

MATEMATICHE,

intorno à due nuoue ſcienze

Attenenti alla

MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,

del Signor

GALILEO GALILEI LINCEO,

Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.

Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

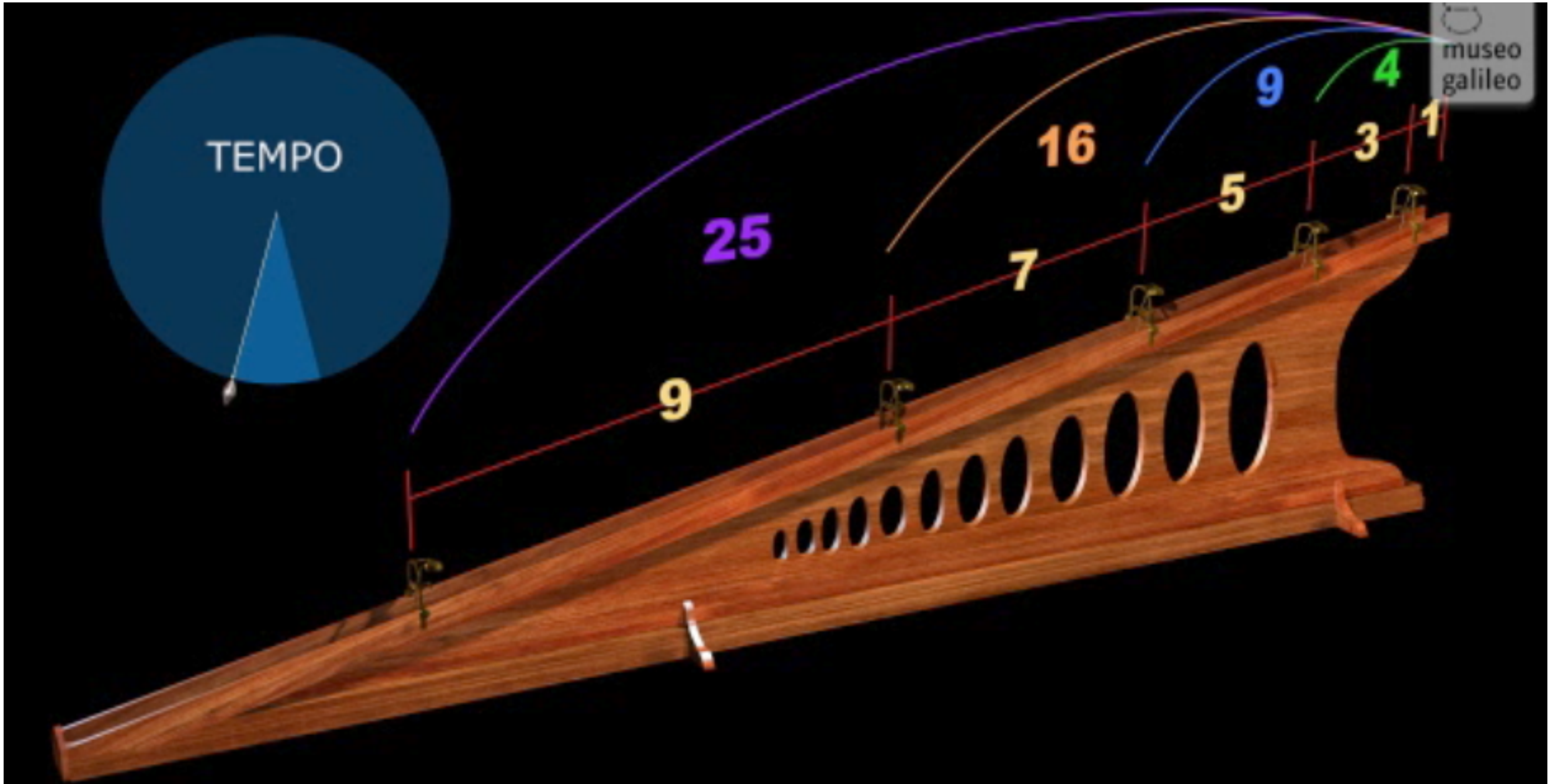
IN LEIDA,

Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

http://www.fmboschetto.it/didattica/DimostrazioniMatematiche.pdf

Sensate esperienze
e dimostrazioni matematiche

http://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html



Usando MRV si conclude che:

- alla base del piano inclinato il corpo ha sempre la stessa velocità indipendentemente dall'inclinazione e dalla lunghezza del piano.
- in altre parole, la velocità raggiunta alla base del piano inclinato dipende dalla quota alla quale il corpo si trova inizialmente.

Quindi anche in caduta libera avrà la stessa velocità.

Numeri e natura:

Πάντα ρει

I processi di cambiamento:
una **radice cognitiva** (D. Tall)
per la matematica e la scienza

Il correlativo cognitivo del **cambiamento** è l'attenzione a ciò che cambia e come cambia e a ciò che rimane invariante in una situazione.

Il correlativo matematico del cambiamento è l'attenzione non solo ai valori quantitativi ma anche e soprattutto alle loro **differenze** e al modo di rappresentarle e manipolarle per ragionarci.

→ **LE DIFFERENZE FINITE**:

a) Uno strumento potente che permette di preparare il calcolo differenziale fin dai primi anni.

b) Uno strumento facilmente implementabile con i software didattici.

Differenze: una misura del cambiamento (quadrati)

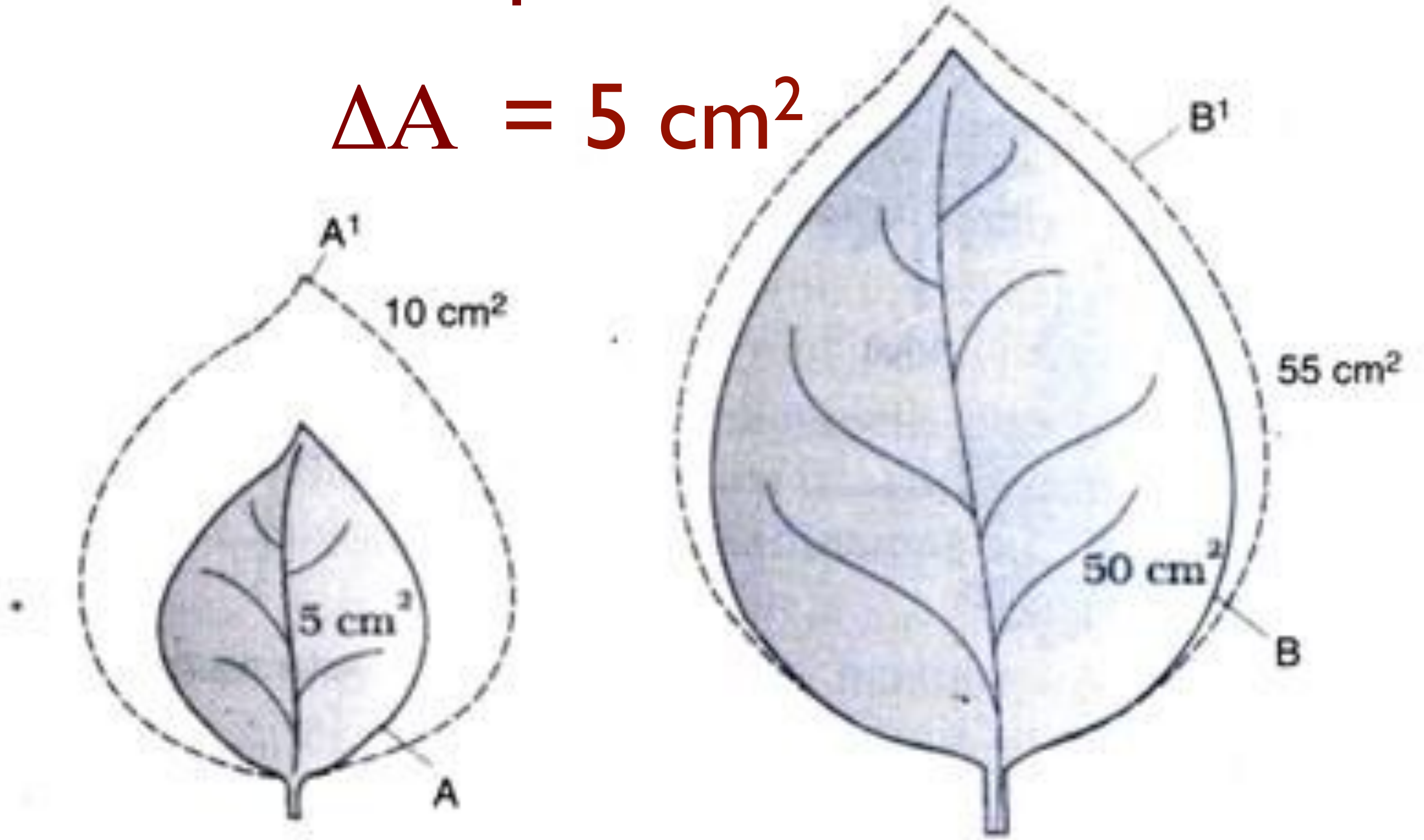
a	$4(a\text{-}2)$	a	a^2	a	4	ΔB	ΔD
A	B	C	D	E	F	G	H
2	0	2	0	2	4	4	1
3	4	3	1	3	4	4	3
4	8	4	4	4	4	4	5
5	12	5	9	5	4	4	7
6	16	6	16	6	4	4	9
7	20	7	25	7	4	4	11
8	24	8	36	8	4	4	13
9	28	9	49	9	4	4	15
10	32	10	64	10	4	4	17
11	36	11	81	11	4	4	19
12	40	12	100	12	4	4	21
13	44	13	121	13	4	4	23
14	48	14	144	14	4	4	25
15	52	15	169	15	4	4	27
16	56	16	196	16	4	4	29
17	60	17	225	17	4	4	31

Differenze: una misura del cambiamento (cubi)

A	B	C	D	E	F	G	H			K	L	M	N
a	$12(a\text{-}2)$	a	$6(a\text{-}2)^2$	a	$(a\text{-}2)^3$	a		Δ1B	Δ1D	Δ2D	Δ1F	Δ2F	Δ3F
2	0	2	0	2	0	2	8	12	6	12	1	6	6
3	12	3	6	3	1	3	8	12	18	12	7	12	6
4	24	4	24	4	8	4	8	12	30	12	19	18	6
5	36	5	54	5	27	5	8	12	42	12	37	24	6
6	48	6	96	6	64	6	8	12	54	12	61	30	6
7	60	7	150	7	125	7	8	12	66	12	91	36	6
8	72	8	216	8	216	8	8	12	78	12	127	42	6
9	84	9	294	9	343	9	8	12	90	12	169	48	6
10	96	10	384	10	512	10	8	12	102	12	217	54	6
11	108	11	486	11	729	11	8	12	114	12	271	60	6
12	120	12	600	12	1000	12	8	12	126	12	331	66	6
13	132	13	726	13	1331	13	8	12	138	12	397	72	6
14	144	14	864	14	1728	14	8	12	150	12	469	78	6
15	156	15	1014	15	2197	15	8	12	162	12	547	84	6
16	168	16	1176	16	2744	16	8	12	174	12	631	90	6
17	180	17	1350	17	3375	17	8	12	186	12	721	96	6
18	192	18	1536	18	4096	18	8	12	198	12	817	102	6
19	204	19	1734	19	4913	19	8	12	210	12	919	108	6
20	216	20	1944	20	5832	20	8	12	222	12	1027	114	6
21	228	21	2166	21	6859	21	8	12	234	12	1141	120	6
22	240	22	2400	22	8000	22	8	12	246	12	1261	126	6
23	252	23	2646	23	9261	23	8	12	258	12	1387	132	6
24	264	24	2904	24	10648	24	8	12	270	12	1519	138	6
25	276	25	3174	25	12167	25	8	12	282	12	1657	144	6
26	288	26	3456	26	13824	26	8	12	294	12	1801	150	
27	300	27	3750	27	15625	27	8	12	306		1951		

Un'idea più fine del cambiamento

$\Delta A = 5\ cm^2$

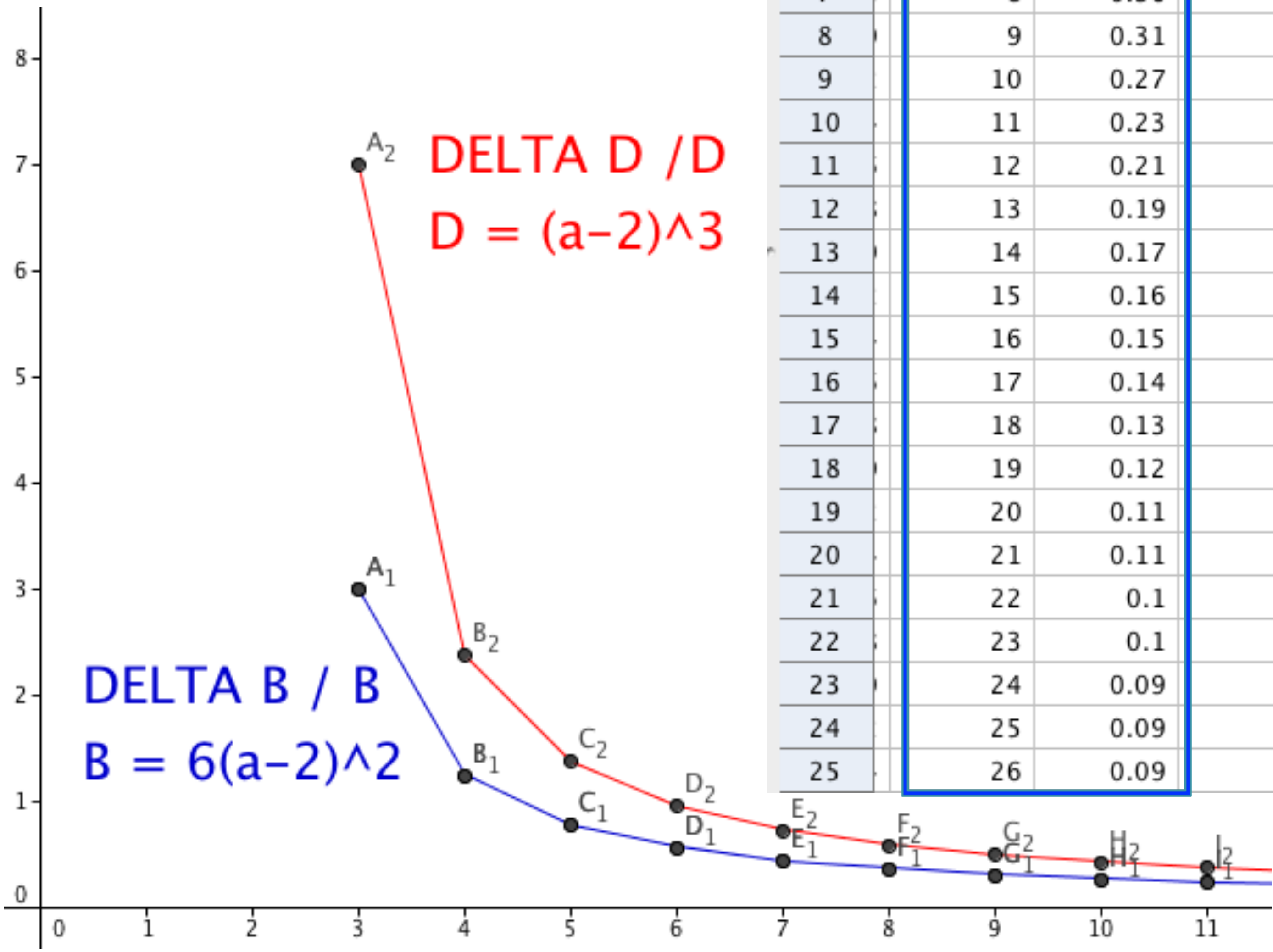


Il cambiamento relativo $\Delta_r A = \Delta A / A$

$\Delta_r = 5\ cm^2 / 5\ cm^2$
100%

$\Delta_r = 5\ cm^2 / 50\ cm^2$
10%

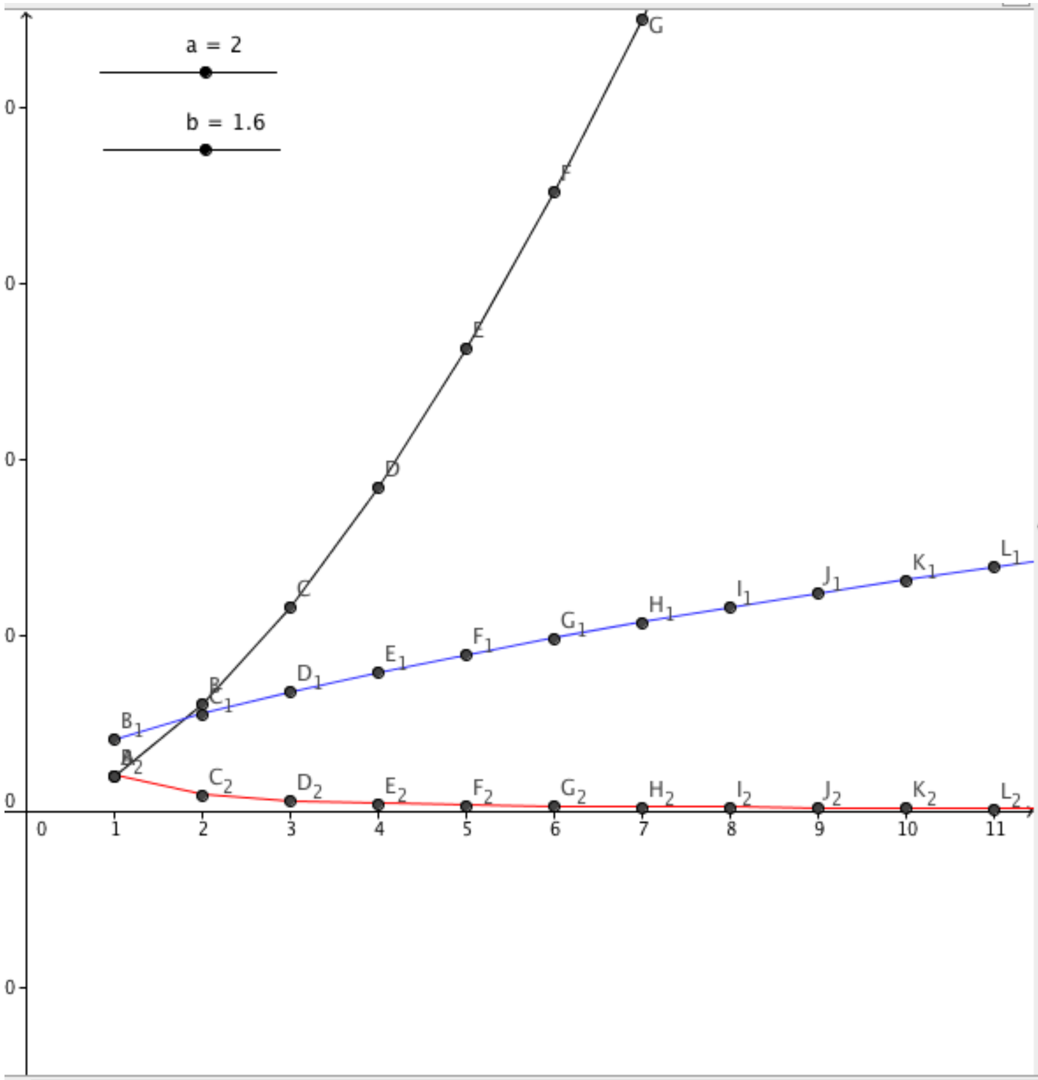
Cubi e differenze relative



	C	ΔB/B	I	J	ΔD/D	
1	2		2	1	2	
2	3	3	3	7	3	7
3	4	1.25	4	19	4	2.38
4	5	0.78	5	37	5	1.37
5	6	0.56	6	61	6	0.95
6	7	0.44	7	91	7	0.73
7	8	0.36	8	127	8	0.59
8	9	0.31	9	169	9	0.49
9	10	0.27	10	217	10	0.42
10	11	0.23	11	271	11	0.37
11	12	0.21	12	331	12	0.33
12	13	0.19	13	397	13	0.3
13	14	0.17	14	469	14	0.27
14	15	0.16	15	547	15	0.25
15	16	0.15	16	631	16	0.23
16	17	0.14	17	721	17	0.21
17	18	0.13	18	817	18	0.2
18	19	0.12	19	919	19	0.19
19	20	0.11	20	1027	20	0.18
20	21	0.11	21	1141	21	0.17
21	22	0.1	22	1261	22	0.16
22	23	0.1	23	1387	23	0.15
23	24	0.09	24	1519	24	0.14
24	25	0.09	25	1657	25	0.14
25	26	0.09	26	1801		

INSTR.

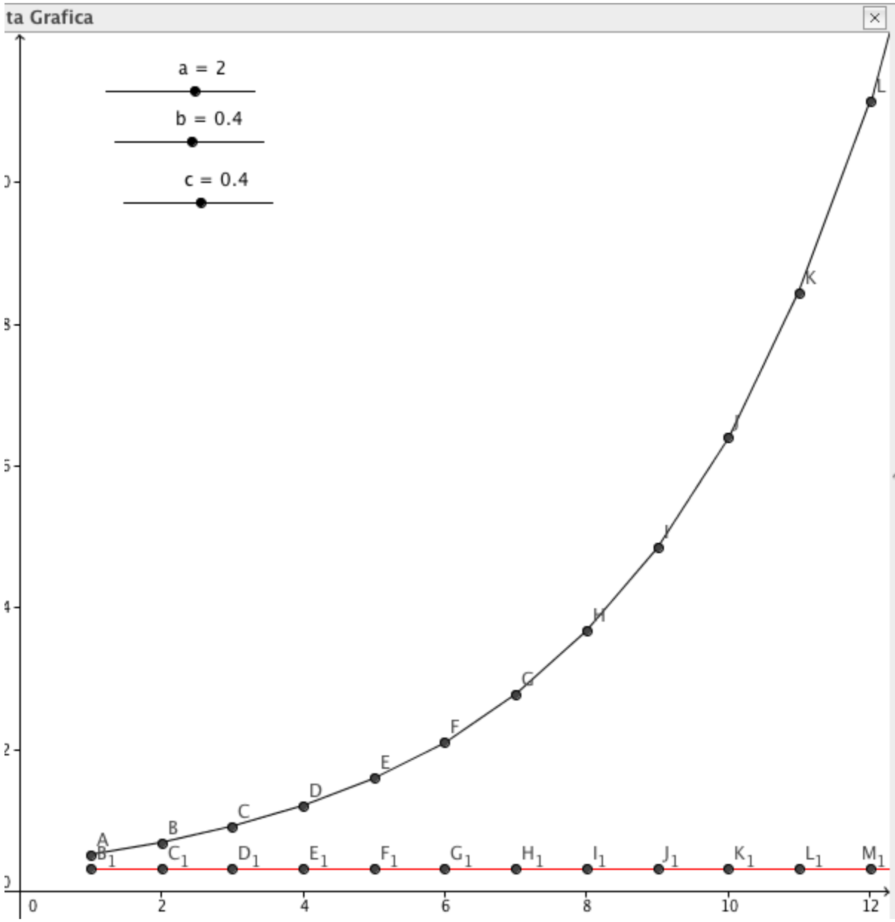
Diff relative: polinomi



	A	B	C	D	E	F
1	n	a*n^b	n	DELTA B	n	DELTA B /B
2	1	2	1	4.06	1	2.03
3	2	6.06	2	5.54	2	0.91
4	3	11.6	3	6.78	3	0.58
5	4	18.38	4	7.89	4	0.43
6	5	26.27	5	8.9	5	0.34
7	6	35.16	6	9.84	6	0.28
8	7	45	7	10.72	7	0.24
9	8	55.72	8	11.55	8	0.21
10	9	67.27	9	12.35	9	0.18
11	10	79.62	10	13.12	10	0.16
12	11	92.74	11	13.85	11	0.15
13	12	106.59	12	14.56	12	0.14
14	13	121.15	13	15.25	13	0.13
15	14	136.41	14	15.92	14	0.12
16	15	152.33	15	16.57	15	0.11
17	16	168.9	16	17.2	16	0.1
18	17	186.1	17	17.82	17	0.1
19	18	203.92	18	18.43	18	0.09
20	19	222.35	19	19.02	19	0.09
21	20	241.37	20	19.6	20	0.08
22	21	260.96	21	20.17	21	0.08
23	22	281.13	22	20.72	22	0.07
24	23	301.85	23	21.27	23	0.07
25	24	323.12	24	21.81	24	0.07
26	25	344.93	25		25	

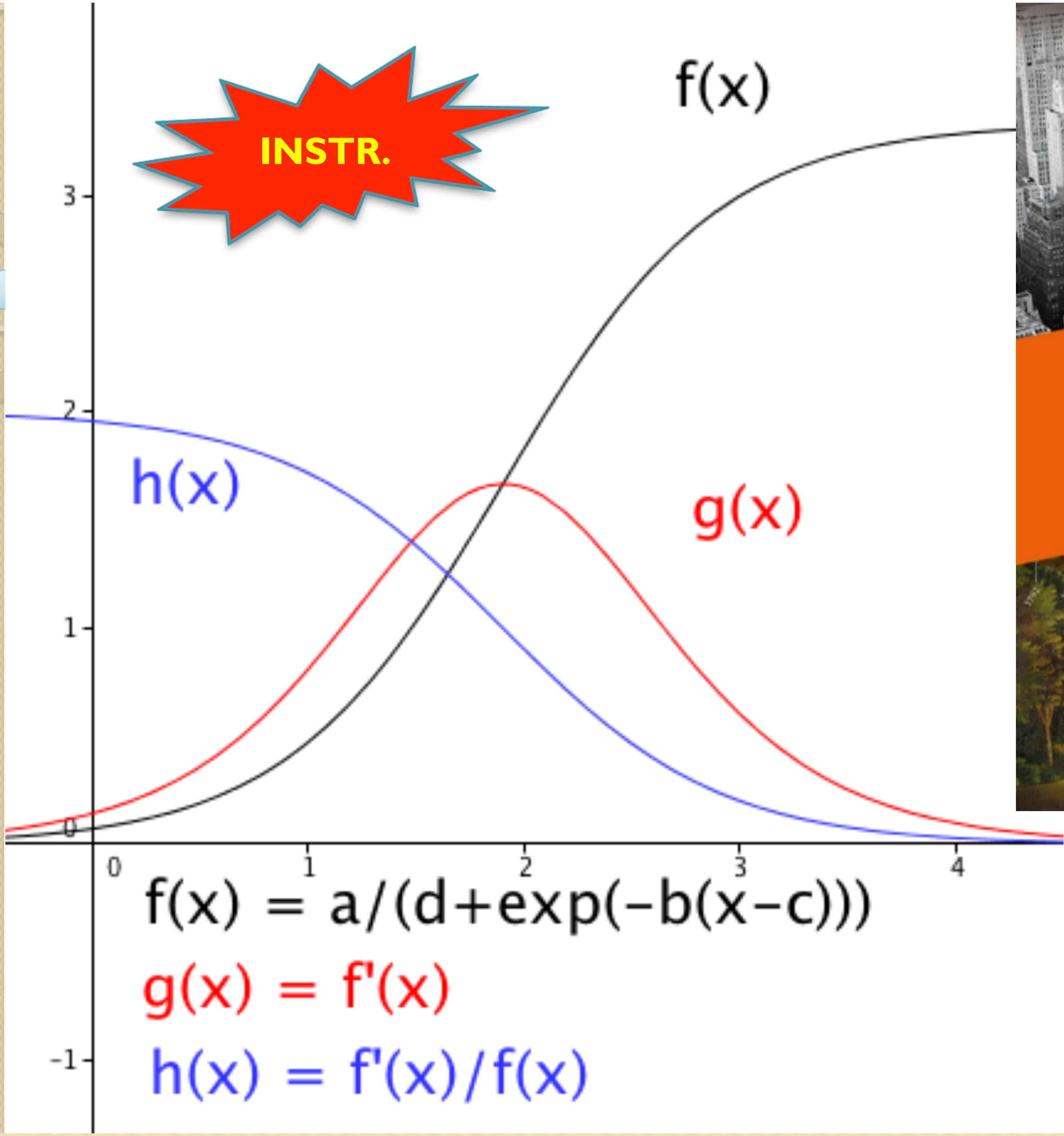
INSTR.

Diff relative: esponenziali



Vista Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a^n	a^(bn)	n	c*a^(b*n)	DELTA E	n	DELTA E/E
2	1	2	1.32	1	0.53	0.17	1	0.32
3	2	4	1.74	2	0.7	0.22	2	0.32
4	3	8	2.3	3	0.92	0.29	3	0.32
5	4	16	3.03	4	1.21	0.39	4	0.32
6	5	32	4	5	1.6	0.51	5	0.32
7	6	64	5.28	6	2.11	0.67	6	0.32
8	7	128	6.96	7	2.79	0.89	7	0.32
9	8	256	9.19	8	3.68	1.17	8	0.32
10	9	512	12.13	9	4.85	1.55	9	0.32
11	10	1024	16	10	6.4	2.04	10	0.32
12	11	2048	21.11	11	8.44	2.7	11	0.32
13	12	4096	27.86	12	11.14	3.56	12	0.32
14	13	8192	36.76	13	14.7	4.7	13	0.32
15	14	16384	48.5	14	19.4	6.2	14	0.32
16	15	32768	64	15	25.6	8.18	15	0.32
17	16	65536	84.45	16	33.78	10.79	16	0.32
18	17	131072	111.43	17	44.57	14.24	17	0.32
19	18	262144	147.03	18	58.81	18.79	18	0.32
20	19	524288	194.01	19	77.6	24.8	19	0.32
21	20	1048576	256	20	102.4	32.72	20	0.32
22	21	2097152	337.79	21	135.12	43.17	21	0.32
23	22	4194304	445.72	22	178.29	56.96	22	0.32
24	23	8388608	588.13	23	235.25	75.17	23	0.32
25	24	167772...	776.05	24	310.42	99.18	24	0.32
26	25	335544...	1024	25	409.6			



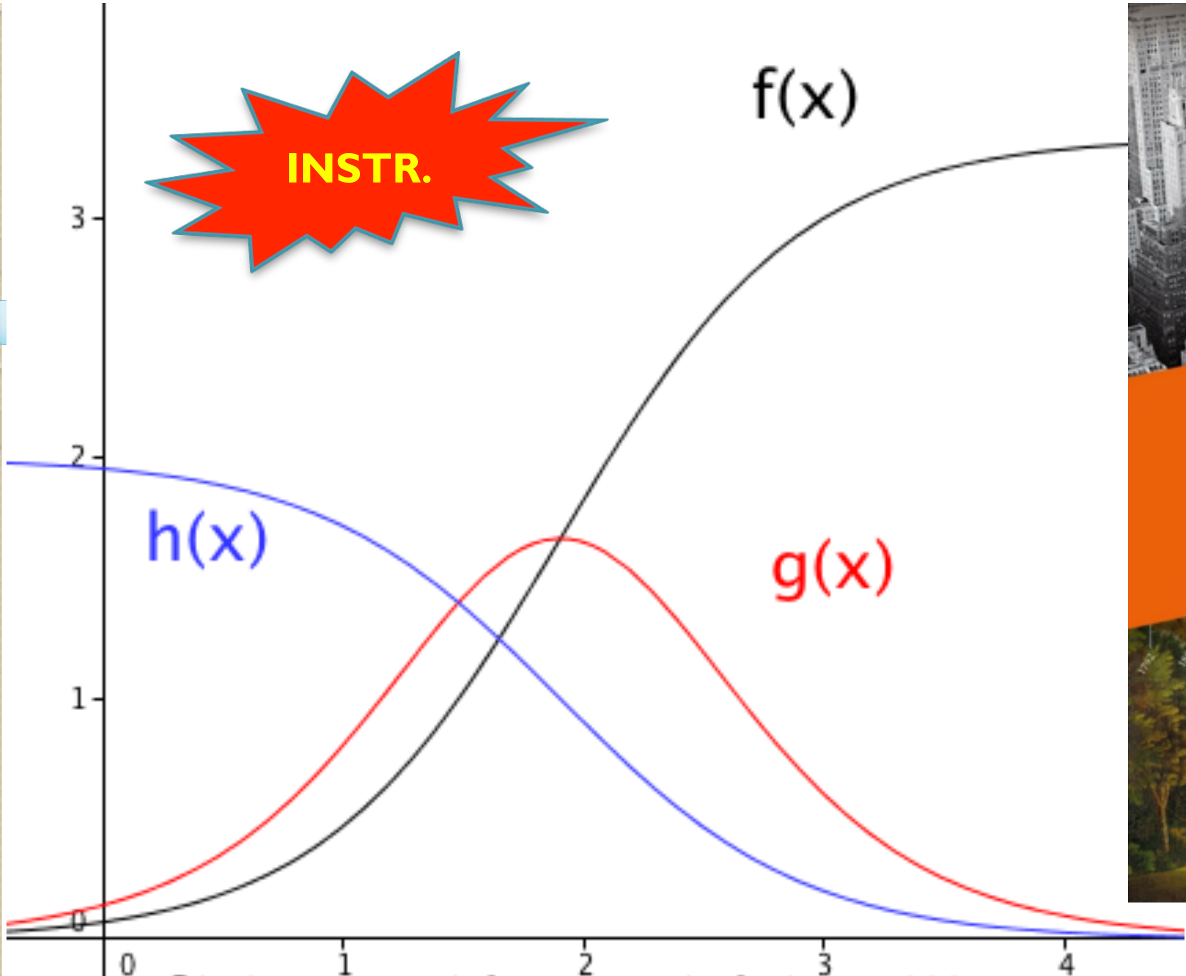
$$f(x) = a/(d+\exp(-b(x-c)))$$

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = f'(x)/f(x)$$

Verhulst 04

Fenomeni di crescita in biologia ed economia: ragionare sul cambiamento come educazione alla razionalità



$f(x) = a/(d+\exp(-b(x-c)))$

$g(x) = f'(x)$

$h(x) = f'(x)/f(x)$

Fenomeni di crescita in biologia ed economia: ragionare sul cambiamento come educazione alla razionalità

4. I principali aspetti epistemologici, cognitivi, didattici di MRV

4.1 MRV: variare per comprendere

4.2 Conseguenze didattiche

4.3 Macro-aree di competenze

L’insegnante promuove questo metodo “naturale” nelle sue pratiche didattiche.

Promuove così la transizione dal suo uso nella vita di tutti i giorni al contesto matematico.

Così facendo permette la costruzione di competenze matematiche, in cui le **conoscenze** si intrecciano con le **competenze argomentative** degli allievi in situazioni in cui sono coinvolti come **investigatori matematici** a **risolvere** e a **porsi dei problemi.**

MRV induce un atteggiamento aperto alla ricerca, in cui **l'allievo in quanto investigatore / ricercatore**:

- pone e si pone problemi;
- produce ipotesi, definizioni, argomentazioni;
- non è imbalsamato nel tipico schema chiuso: situazione data → risolvi/dimostra.

Questi obiettivi corrispondono a quanto scritto sia nei *Traguardi* (I ciclo) sia nel *Profilo educativo culturale e professionale dello studente* (Licei, Istituti Tecnici).

Traguardi per lo sviluppo di competenze

- …della scuola **primaria**:

*Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e **confrontandosi con il punto di vista degli altri**.*

- … della scuola **secondaria di primo grado**:

Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).

*Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e **controesempi adeguati** e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.*

Profilo educativo culturale e professionale dello studente

Area logico-argomentativa:

Saper sostenere una propria tesi e saper ascoltare e valutare criticamente le argomentazioni altrui.

Acquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico, ad identificare i problemi e a individuare possibili soluzioni.

Essere in grado di leggere e interpretare criticamente i contenuti delle diverse forme di comunicazione.

LINEE GENERALI E COMPETENZE

Lo studente avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico:

[…] processo di **matematizzazione** che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

[…]

Concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:
5) il concetto di **modello matematico** e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci).

4. I principali aspetti epistemologici, cognitivi, didattici di MRV

Macro-aree di competenze

CON ←→ Ps/p & ARG

CONOSCERE (CON)

RISOLVERE/PORSI PROBLEMI (Ps/p)

ARGOMENTARE (ARG)

MACRO-AREE DI COMPETENZE

- **CONOSCERE**: si riferisce a competenze riguardanti la conoscenza e l'uso delle nozioni matematiche, delle loro rappresentazioni semiotiche, delle loro proprietà, delle tecniche operative connesse, e delle relazioni tra le nozioni stesse.

MACRO-AREE DI COMPETENZE

RISOLVERE/PORSI PROBLEMI: si riferisce a competenze che riguardano: individuare ed esplicitare le informazioni necessarie per affrontare un problema; variare queste informazioni (per contrasto, generalizzazione, separazione, fusione di proprietà) in modo da generare problemi simili; costruire (o individuare) i ragionamenti risolutivi appropriati, con attenzione agli strumenti di rappresentazione ("registri") utilizzati, e rendere conto di essi; controllare tali ragionamenti e i risultati che ne conseguono e confrontarli in relazione alle situazioni problematiche considerate e in interazione coi pari.

Si veda anche Matematica per il cittadino 2001, Risolvere e porsi problemi

MACRO-AREE DI COMPETENZE

- **ARGOMENTARE**: si riferisce a competenze che riguardano: produrre ipotesi esplicative di proprietà o fenomeni in base alle proprie conoscenze e al contesto di riferimento; accertare la validità di una affermazione o di un procedimento o di un ragionamento in relazione alle proprie conoscenze e al contesto di riferimento, producendo o individuando ragioni di validità o di non validità; esporle (o sceglierne una esposizione) nelle forme richieste dalla natura dell'oggetto valutato e dal suo contesto di riferimento.

L'icona

CON ←→ Ps/p & ARG

vuole sottolineare due aspetti: dinamicità e interdipendenza.

C'è il rischio di una lettura in due tempi: prima CON e poi Ps/p & ARG.

In realtà un metodo in due tempi rischia di produrre una sospensione del senso matematico.

5. Conclusioni

Nella mia presentazione ho discusso i seguenti punti:

1. Il senso degli studenti per la matematica e il pericolo delle sospensioni di senso indotte da certe pratiche didattiche.

2. Il suggerimento del metodo MRV come metodo contro tale sospensione di senso, in quanto coinvolge gli studenti **ricercatori/investigatori matematici** come attori del processo, in cui si provocano/utilizzano processi cognitivi di livello opportuno.

3. MRV aiuta gli studenti a considerare un argomento da più punti di vista, quindi a comprenderlo in modo più profondo.

4. MRV come motore per generare argomentazioni sensate attraverso il P s/p e supportare la transizione da forme “naturali” di argomentazioni a forme più matematiche di ragionamento.

5. Con MRV le attività matematiche di **Risoluzione/Posizione di problemi** e le **Produzioni argomentative** si sviluppano intrecciandosi grazie a reciproci feed-back con le competenze strumentali (le **Conoscenze**).

6. Gli aspetti emotivi: il coinvolgimento degli allievi è alto per tutti.

Vantaggi educativi e cognitivi del MRV

Le variazioni sono generate dagli stessi studenti (con l'aiuto dell'insegnante: più accentuato all'inizio, si attenua progressivamente mentre il metodo diventa via via più familiare agli allievi): il loro controllo sui problemi da porre cresce generando una concezione più ampia di che cosa è un problema e un loro maggiorecoinv olgimento emotivo.

Ciò muta il loro senso per la matematica: in quanto ricercatori / investigatori matematici imparano a sviluppare il **senso matematico delle cose**, cioè a **pensare matematicamente**.

In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.

(G. Cantor, 1867)

Grazie!

Nelle cose nuove scoperte ho visto e sentito tanti modi per ragionare in tanti modi diversi ed alcuni simili, modi diversi raggiunti con la fantasia.