ATTI XIX CONGRESSO
DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Bologna, 12–17 settembre 2011

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna
Dipartimento di Matematica

Unione Matematica italiana

Ufficio di presidenza

Franco Brezzi, presidente
Graziano Gentili, vice-presidente
Giuseppe Anichini, segretario
Barbara Lazzari, amministratore tesoriere

Commissione scientifica

Marco Abate
Martino Bardi
Claudio Bernardi
Salvatore Coen
Vittorio Coti Zelati
Gianni Dal Maso
Francesco de Giovanni
Alessandro Figà-Talamanca
Livia Giacardi
Ermanno Lanconelli
Antonino Maugeri
Carlo Sbordone
Alessandro Verra
Gianluca Vinti
Aljoša Volčič

XIX Congresso dell'Unione Matematica italiana

Comitato scientifico

Franco Brezzi, presidente
Luigi Ambrosio
Bruno Franchi
Mario Pulvirenti
Alessandro Verra

Comitato organizzatore

Ermanno Lanconelli, presidente
Giovanni Dore, segretario
Enrico Obrecht, tesoriere
Simonetta Abenda
Giorgio Bolondi
Giulio Casciola
Salvatore Coen
Giovanni Cupini
Bruno D'Amore
Mirko Degli Esposti
Mauro Fabrizio
Angelo Favini
Massimo Ferri
Bruno Franchi
Laura Guidotti
Barbara Lazzari
Mirella Manaresi
Annamaria Montanari
Michele Mulazzani
Franco Nardini
Alberto Parmeggiani
Piero Plazzi
Tommaso Ruggeri
Fiorella Sgallari
Alberto Venni

Ringraziamenti

Abbiamo qui raccolto gli Atti del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana, che si è svolto presso l'Università di Bologna dal 12 al 17 settembre 2011.

Gli atti, così come il Congresso sono stati suddivisi in Conferenze generali, Comunicazioni di 30 minuti e Comunicazioni suddivise nelle 22 sezioni previste. Una parte significativa delle Conferenze generali e delle Comunicazioni di 30 minuti sono stati pubblicate sul Bollettino dell'Unione Matematica Italiana e qui ripubblicate. Per tutte le conferenze e le comunicazioni è qui riportata il sunto (già allegato al programma del Convegno).

L'Ufficio di Presidenza dell'UMI ringrazia il Comitato Organizzatore e il Comitato Scientifico del XIX Congresso dell'UMI, in particolare i rispettivi presidenti, il Prof. Lanconelli e il Prof. Brezzi, per l'impegno profuso, la perfetta riuscita scientifica e organizzativa.

Un grazie particolare a Giovanni Dore, che ha seguito con attenzione la predisposizione del programma e il cui lavoro è stato utilizzato anche per la preparazione di questi Atti.

L'Ufficio di Presidenza dell'UMI:

Ciro Ciliberto, presidente
Vittorio Coti Zelati, vice-presidente
Claudio Fontanari, segretario
Veronica Gavagna, tesoriere

Bologna, 20 Agosto 2015

Indice

Ringraziamenti iv

Saluti xxiii
Saluto Presidente Comitato Organizzatore, Prof. Ermanno Lanconelli xxiii
Discorso in occasione della scopertura della Lapide xxv

Parte 1. Conferenze Generali 1

Ferdinando Arzarello: Provare se, vedere che, sapere perché: la dimostrazione in classe 2
Sunto 2

Massimo Bertolini: Regolatori, funzioni L e punti razionali 4
Sunto 4
Intervento: Massimo Bertolini,
Regulators, L-Functions and Rational Points,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 191–204 4

Daniele Boffi: Metodo *Immersed Boundary* per l'interazione fluido-struttura: formulazione matematica e approssimazione numerica 19
Sunto 19
Intervento: Daniele Boffi,
The Immersed Boundary Method for Fluid-Structure Interactions: Mathematical Formulation and Numerical Approximation,
Bollettino U. M. I. (9) **V** (2012), 711–724 20

Filippo Bracci: Evoluzione olomorfa 35
Sunto 35
Intervento: Filippo Bracci,
Holomorphic Evolution: Metamorphosis of the Loewner Equations,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 137–165 36

Andrea Cianchi: Autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami e disuguaglianze isoperimetriche ed isocapacitarie 66
Sunto 66
Intervento: Andrea Cianchi,
Eigenfunctions of the Laplace-Beltrami Operator, and Isoperimetric and Isocapacitary Inequalities,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 167–190 67

Salvatore Coen: Matematici a Bologna dopo l'Annessione al Regno 92

Sunto 92
Intervento: Salvatore Coen,
Mathematicians in Bologna in the First Decades After Annexation to the Kingdom of Sardinia,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 837–855 92

Alessio Corti: Polinomi di Laurent estremali e varietà di Fano 112
Sunto 112

Boris Dubrovin: Comportamento critico delle soluzioni delle equazioni hamiltoniane alle derivate parziali 113
Sunto 113

Franco Flandoli: Interazione tra noise e singolarità nelle equazioni alle derivate parziali 114
Sunto 114
Intervento: Franco Flandoli,
Interazione tra noise e singolarità nelle equazioni alle derivate parziali,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 253–267 115

Giovanni Forni: Il flusso orociclico: un esempio di sistema dinamico parabolico 131
Sunto 131

Giovanni Jona-Lasinio: Fisica e matematica: due facce di un unico percorso 132
Sunto 132

Massimo Marinacci: Economia teorica e Analisi funzionale 133
Sunto 133

Stefano Meda: Alcuni aspetti dell'analisi su varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume 134
Sunto 134
Intervento: Stefano Meda,
Alcuni aspetti dell'analisi su varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume,
Bollettino U. M. I. (9) **IV** (2012), 631–654 135

Giuseppe Mingione: Aspetti non lineari della teoria di Calderón-Zygmund 160
Sunto 160
Intervento: Giuseppe Mingione,
La teoria di Calderón-Zygmund dal caso lineare a quello non lineare,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 269–297 160

Errico Presutti: Transizioni di fase, trasformazioni di scala e strutture spaziali 190
Sunto 190
Intervento: E. Presutti,
Microstructures and Phase Transitions,
Bollettino U. M. I. (9) **V** (2012), 655–688 190

Stefano Serra-Capizzano: Strutture, strutture nascoste e analisi spettrale nei metodi multigrid e nel precondizionamento 225
Sunto 225

Susanna Terracini: Le traiettorie paraboliche della meccanica celeste come transizioni di fase minimali 227
Sunto 227
Intervento: Susanna Terracini,
Le traiettorie paraboliche della meccanica celeste come transizioni di fase minimali,
Bollettino U. M. I. (9) **V** (2012), 689–710 227

Parte 2. Comunicazioni di 30 minuti 251

Francesco Bastianelli: Il Teorema di Noether sulla gonalità di curve piane per ipersuperficie 252
Sunto 252
Intervento: Francesco Bastianelli,
Noether's Theorem on Gonality of Plane Curves for Hypersurfaces,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 781–791 253

Elvise Berchio: Sulle soluzioni globali di alcune equazioni differenziali nonlineari del quarto ordine 265
Sunto 265
Intervento: Elvise Berchio,
A Note on Some Nonlinear Fourth Order Differential Equations,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 349–361 266

Francesco Bigolin: Caratterizzazioni di ipersuperfici regolari intrinseche nel gruppo di Heisenberg 280
Sunto 280
Intervento: Francesco Bigolin,
Caratterizzazioni di ipersuperfici regolari intrinseche nei gruppi di Heisenberg,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 685–692 281

Giuseppina D'Aguì: Molteplicità di soluzioni per problemi di Sturm-Liouville 290
Sunto 290
Intervento: Giuseppina D'aguì,
Molteplicity of Solutions for Sturm-Liouville Problems,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 725–734 291

Simone Diverio: Intorno all'iperbolicità delle intersezioni complete 302
Sunto 302
Intervento: Simone Diverio,
About the Hyperbolicity of Complete Intersections,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 579–590 303

Emanuele Dolera: Su una proprietà asintotica della distribuzione finale 316
Sunto 316

Intervento: Emanuele Dolera,
Su una proprietà asintotica della distribuzione finale,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 741–748 316

Carmelo Antonio Finocchiaro: La topologia degli ultrafiltri su spazi di domini di valutazione e sue applicazioni 325
Sunto 325

Carlotta Giannelli: B–splines gerarchiche: raffinamento locale e normalizzazione 326
Sunto 326
Intervento: Carlotta Giannelli, Bert Jüttler,
Local and Adaptive Refinement with Hierarchical B-splines,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 735–740 327

Erika Luciano: Fra tradizione e innovazione: l'Enciclopedia delle Matematiche elementari (1909-1949) 334
Sunto 334
Intervento: Erika Luciano,
Fra tradizione e innovazione: l'Enciclopedia delle Matematiche Elementari (1909-1949),
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 817–836 335

Marco Maggis: Dualità completa per misure di rischio dinamiche quasiconvesse su moduli di variabili aleatorie 356
Sunto 356
Intervento: Marco Maggis,
The Dynamics of Risk Beyond Convexity,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 441–457 357

Edoardo Mainini: Gradient flow di energie di interazione e applicazioni alla superconduttività 375
Sunto 375

Enrico Manfredi: Gruppo di nodi e link in spazi lenticolari 376
Sunto 376

Vincenzo Mantova: Approssimazioni di Artin-Whaples con grado limitato su varietà algebriche 378
Sunto 378
Intervento: Vincenzo Mantova,
Approssimazioni di Artin-Whaples con grado limitato su varietá algebriche,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 693–697 378

Luca Motto Ros: Quasi-ordini κ-Souslin 384
Sunto 384

Matteo Penegini: Sulle superfici di tipo generale con $p_g = q = 2$ 386
Sunto 386
Intervento: Matteo Penegini,
On the Classification of Surfaces of General Type with $p_g = q = 2$,

Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 549–563 387

Federico Poloni: Un nuovo algoritmo per un sistema di equazioni quadratiche nei *branching processes* 403
Sunto 403
Intervento: Federico Poloni,
An Algorithm for Solving Systems of Quadratic Equations in Branching Processes,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 481–486 404

Marina Popolizio: Approssimazione numerica di funzioni di matrice per equazioni differenziali frazionarie 411
Sunto 411
Intervento: Matina Popolizio,
Numerical Approximation of Matrix Functions for Fractional Differential Equations,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 793–815 412

Marco Prato: Un algoritmo di deconvoluzione per problemi di ricostruzione di immagini da Trasformata di Fourier 436
Sunto 436
Intervento: Marco Prato,
A Deconvolution Algorithm for Imaging Problems from Fourier Data,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 389–404 437

Fabio Pusateri: Risonanze ed esistenza globale per equazioni dispersive 454
Sunto 454
Intervento: Fabio Pusateri,
Space-Time Resonances and the Null Condition for Wave Equations,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 513–529 455

Simone Scacchi: Precondizionatori paralleli a blocchi per il sistema Bidominio dell'elettrocardiologia 473
Sunto 473
Intervento: S. Scacchi,
Scalable Block Preconditioners for the Parabolic-Elliptic Bidomain coupling,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 699–714 474

Antonio Segatti: Funzionali WED per gradient flow in spazi metrici 491
Sunto 491
Intervento: Antonio Segatti,
A Variational Approach to Gradient Flows in Metric Spaces,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 765–780 491

Alfonso Sorrentino: Proprietà simplettiche e variazionali di sistemi hamiltoniani convessi 508
Sunto 508
Intervento: Alfonso Sorrentino,
A Variational Approach to the Study of the Existence of Invariant Lagrangian Graphs,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 405–440 509

Luca Spada: Dualità geometriche per la logica di Łukasiewicz 546
Sunto 546
Intervento: Luca Spada,
Geometrical Dualities for Łukasiewicz Logic,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 749–763 547

Antonio Tortora: L'applicazione che ad ogni elemento di un gruppo associa la sua potenza n-esima 564
Sunto 564
Intervento: Antonio Tortora,
The Power Mapping as Endomorphism of a Group,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 379–387 564

Andrea Tosin: Un approccio multiscala alla dinamica delle folle mediante misure che evolvono nel tempo 575
Sunto 575
Intervento: Andrea Tosin,
Un approccio multiscala alla dinamica delle folle mediante misure che evolvono nel tempo,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 531–548 576

Maria Vallarino: Spazi di Hardy su gruppi a crescita esponenziale di volume 595
Sunto 595
Intervento: Maria Vallarino,
Spazi di Hardy su gruppi a crescita esponenziale di volume,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 673–684 596

Flavia Ventriglia: Un approccio unificante per operatori nonlineari di tipo Kantorovich 609
Sunto 609
Intervento: Flavia Ventriglia, Gianluca Vinti,
A Unified Approach for Nonlinear Kantorovich-Type Operators,
Bollettino U. M. I. (9) **VI** (2013), 715–724 610

Luigi Vezzoni: L'equazione di Calabi-Yau in Nilvarietà 621
Sunto 621

Parte 3. Conferenze a cura della CIIM 623

Anna Baccaglini-Frank: Micromondi e "Mathematical Habits of Mind" 624
Sunto 624

Claudio Bernardi: La dimostrazione nelle matematiche elementari: tipologie ed esempi 626
Sunto 626
Intervento: Claudio Bernardi,
La dimostrazione nelle matematiche elementari: tipologie ed esempi 626

Paolo Boero: I "comportamenti razionali" secondo Habermas in matematica e in altri ambiti culturali 632
Sunto 632

Francesca Morselli: Argomentare e dimostrare nella scuola secondaria di primo grado: teoria e pratica 634
Sunto 634

Parte 4. Comunicazioni 635

Sezione 1 Analisi non lineare e sistemi dinamici 636
Alberto Abbondandolo: Fenomeni di squeezing e non-squeezing nelle dimensioni intermedie 637
Pietro Baldi: Soluzioni periodiche di equazioni di Benjamin-Ono 638
Sara Barile: Sistemi ellittici di tipo Lane-Emden con peso in domini non limitati 639
Massimiliano Berti: Soluzioni quasi-periodiche di EDP Hamiltoniane 640
Luca Biasco: Soluzioni quasi-periodiche per l'equazione delle onde con derivate spaziali nella nonlinearità 641
Serena Dipierro: Concentrazione di soluzioni per un problema singolarmente perturbato con condizioni di Neumann in domini non regolari 642
Veronica Felli: Metodi di monotonia per la classificazione dell'andamento asintotico locale di soluzioni di equazioni ellittiche e paraboliche 643
Davide L. Ferrario: Coreografie multiple di n-corpi, simmetrie e costellazioni di satelliti 644
Alberto Ferrero: Esistenza e stabilità di soluzioni intere per equazioni ellittiche del secondo e del quart'ordine 645
Gabriella Pinzari: Riduzione simplettica nel problema degli N corpi 646
Alessandro Portaluri: Dinamica globale per un problema singolare con vincolo di simmetria diedrale 647
Michela Procesi: Forma normale e soluzioni quasi-periodiche per l'equazione di Schrödinger non lineare 648
Enrico Valdinoci: Transizioni di fase e superfici minime (non)locali 649

Sezione 2 Equazioni alle derivate parziali 650
Maria Emilia Amendola: Proprietà delle soluzioni di viscosità di alcune equazioni ellittiche 651
Alessia Ascanelli: Il problema di Cauchy per equazioni di p-evoluzione 652
Paolo Baroni: Risultati di tipo Calderón-Zygmund per equazioni paraboliche non lineari 653
Serena Boccia: Stime di tipo Schauder per soluzioni di sistemi parabolici di ordine alto 654
Marco Bramanti: Campi di Hörmander non regolari e disuguglianza di Poincaré 655
Raffaela Capitanelli: Problemi di rinforzo per strutture frattali 656
Pierluigi Colli: Sistemi di Cahn-Hilliard viscosi per modelli di diffusione di fase 657
Giovanni Cupini: Limitatezza locale di soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari 658
Marcello D'Abbicco: Alcuni risultati di Blow-up per Sistemi 2 per 2 659
Roberta D'Ambrosio: Risultati di immersione e compattezza in alcuni spazi di funzioni 660
Francesco Della Pietra: Problemi ellittici fortemente degeneri all'infinito 661

Giuseppina di Blasio: Disuguaglianze tipo Szegö-Weinberger per il primo autovalore dell'operatore di Hermite 662
Angelo Favini: Metodi perturbativi e problemi di identificazione per equazioni differenziali degeneri 663
Fausto Ferrari: Sulla regolarità delle soluzioni di problemi a due fasi per operatori parabolici 664
Roberto Guglielmi: Stabilizzazione di sistemi di equazioni iperboliche con condizioni al bordo miste mediante un unico feedback 665
Annunziata Loiudice: Comportamento asintotico delle soluzioni di problemi critici singolari su gruppi di Carnot 666
Sandra Lucente: Equazioni quasilineari di tipo onde in dominio esterno bidimensionale 667
Sara Monsurrò: Una stima a priori per operatori ellittici in spazi di Sobolev con peso su aperti non limitati 668
Marco Mughetti: Ipoellitticità e non Ipoellitticità per una somma di quadrati di campi complessi 669
Benedetta Noris: Soluzioni radiali positive di equazioni ellittiche supercritiche con condizioni al bordo di Neumann 670
Alessio Porretta: Sulla costruzione di funzioni p-armoniche in un cono 671
Enrico Priola: L'effetto regolarizzante per equazioni paraboliche completamente non lineari con coefficienti singolari 672
Giovanni Taglialatela: Propagazione dell'analiticità per le soluzioni di un sistema debolmente iperbolico non lineare 673
Cristina Tarsi: Casi limite nelle immersioni di Sobolev: immersioni in spazi di Zygmund e la disuguaglianza di Adams 674
Maria Carla Tesi: Un modello qualitativo elementare per la diffusione e l'aggregazione della β-amiloide nella malattia di Alzheimer 675
Bruno Volzone: Metodi di simmetrizzazione per operatori ellittici con Laplaciano frazionario 676
Gabriella Zecca: Sulla continuità di soluzioni di equazioni ellittiche degeneri nel piano 677

Sezione 3 Equazioni differenziali ordinarie 678
Irene Benedetti: Inclusioni differenziali semilineari senza ipotesi di compattezza 679
Gabriele Bonanno: Analisi Variazionale ed Applicazioni a Problemi Differenziali Non Lineari 680
Alessandro Calamai: Oscillazioni forzate per equazioni di moto vincolato con ritardo infinito e applicazioni al pendolo sferico 681
Pasquale Candito: Un nuovo approccio nello studio della molteplicità di soluzioni per un problema non lineare 682
Anna Capietto: Alcune osservazioni sul teorema di Mather e sugli insiemi di Aubry-Mather 683
Antonia Chinnì: Esistenza di tre soluzioni per un problema di Dirichlet ordinario con $p(x)$-Laplaciano 684
Maurizio Garrione: Risultati di esistenza e molteplicità per sistemi nonlineari piani in risonanza 685
Roberto Livrea: Esistenza e molteplicità di soluzioni periodiche per una classe di sistemi Hamiltoniani 686

Luisa Malaguti: Equazioni di evoluzione multivoche semilineari con argomenti ritardati contenuti nel termine nonlineare 687
Serena Matucci: Esistenza e sviluppo asintotico delle soluzioni decrescenti per sistemi di equazioni differenziali nonlineari del secondo ordine accoppiate 688
Giovanni Molica Bisci: Alcuni risultati di esistenza per certe classi di problemi variazionali 689
Franco Obersnel[1]: Soluzioni eterocline per l'equazione della curvatura prescritta 690
Pierpaolo Omari: Soluzioni periodiche dell'equazione della curvatura prescritta 691
Duccio Papini: Soluzioni periodiche di equazioni differenziali non-lineari con condizioni al bordo oblique 692
Pasquale F. Pizzimenti: Soluzioni positive per problemi differenziali non lineari 693
Paola Rubbioni: Inclusioni differenziali lineari con condizioni nonlocali in spazi di Banach 694
Angela Sciammetta: Su problemi di Neumann con p-Laplaciano 695
Marco Spadini: Oscillazioni forzate su una classe di varietà differenziabili definite implicitamente 696
Valentina Taddei: Inclusioni semilineari di evoluzione con regolarità debole: teoremi di esistenza e applicazioni 697
Elisabetta Tornatore: Esistenza e molteplicità di soluzioni per problemi differenziali non lineari con condizioni miste 698
Fabio Zanolin: Punti fissi per funzioni della corona circolare e applicazioni a sistemi piani non conservativi 699

Sezione 4 Calcolo delle variazioni, teoria del controllo e ottimizzazione 700
Fabio Bagagiolo: Su di un problema di visita ottima 701
Annalisa Baldi: Un approccio variazionale alle forme differenziali in gruppi di Carnot 702
Luigi D'Onofrio: Mappe di Sobolev Anisotrope 703
Roberta De Asmundis: Modelli matematici per l'apprendimento supervisionato con applicazione alla classificazione incrementale 704
Giuseppe Floridia: Controllabilità moltiplicativa approssimata di equazioni paraboliche degeneri con applicazioni alla climatologia 705
Nunzia Gavitone: La disuguaglianza isoperimetrica relativa nel piano: il caso anisotropo 706
Luca Lussardi: Sui limiti di perimetri non locali 707
Daniele Morbidelli: Disuguaglianza di Poincaré per famiglie s-involutive di campi vettoriali 708
Elvira Zappale: Riduzione di dimensione per funzionali supremali 709

Sezione 5 Analisi reale 710
Laura Angeloni: Su un nuovo concetto di variazione multidimensionale e alcuni risultati di convergenza 711
Giuseppina Barbieri: Il teorema di Dieudonné 712
Loredana Biacino: Densità del grafico di una funzione hölderiana 713
Ingrid Carbone: Successioni di punti uniformemente distribuiti in $[0, 1]$ aventi bassa discrepanza 714

Danilo Costarelli: Operatori Sampling-Kantorovich multidimensionali e applicazioni all'Image Processing 715
Margherita Fochi: Equazioni funzionali su dominio ristretto negli spazi normati 716
Maria Infusino: Discrepanza di successioni di Kakutani generalizzate 717
Ilaria Mantellini: Formule asintotiche per operatori di convoluzione alla Mellin 718
Calogero Vetro: Sulle condizioni contrattive di tipo integrale 719
Gianluca Vinti: Un approccio unificante per la convergenza di operatori lineari di tipo "sampling" 720
Paolo Vitolo: Misure su strutture non-booleane 721
Aljoša Volčič: Sul problema di Gruber riguardante la distribuzione uniforme sulla sfera 722
Hans Weber: Decomposizione di misure a valori in l-gruppi 723
Luca Zampogni: Risultati di convergenza per operatori lineari di tipo Kantorovich 724

Sezione 6 Analisi armonica e analisi funzionale 725
Nicola Arcozzi: Capacità d'insiemi: diadica e non 726
Andrea Carbonaro: Funzione di Bellman e stime lineari indipendenti dalla dimensione in un teorema di D. Bakry 727
Fabrizio Colombo: Un nuovo calcolo funzionale per n-uple di operatori non necessariamente commutanti 728
Fausto di Biase: Sulla ottimalità delle regioni di Stolz nel teorema di Fatou 729
Giacomo Gigante: Formule di quadratura e distribuzioni di punti su varietà compatte 730
Davide Guidetti: Determinazione del termine di sorgente in un'equazione parabolica astratta da un integrale nella variabile temporale della soluzione 731
M. Gabriella Kuhn: Rappresentazioni di gruppi iperbolici 732
Roberta Schiattarella: Composizione di mappe bi-Sobolev 733
Marianna Tavernise: Compattezza in spazi di funzioni F-seminormati 734
E. Terraneo: Limite per collisioni radenti per il modello di Kac inelastico 735
Veronica Umanità: Decoerenza per semigruppi positivi su $M_2(\mathbb{C})$ 736
Sara Volpi: Convergenza puntuale delle medie di Bochner-Riesz in spazi di Sobolev 737

Sezione 7 Calcolo delle probabilità e statistica matematica 738
Federico Bassetti: Vettori di misure aleatorie dipendenti per inferenza Bayesiana 739
Patrizia Berti: Misure martingala equivalenti finitamente additive 740
Alessandra Cretarola: Minimizzazione locale del rischio sotto l'approccio benchmark 741
Stefano Favaro: Sul concetto di σ-diversità per partizioni aleatorie scambiabili di tipo Ewens-Pitman 742
Alberto Lanconelli: Prodotto di Wick, convoluzione e somme di variabili aleatorie indipendenti 743
Antonio Lijoi: Inferenza bayesiana con misure di probabilità aleatorie dipendenti 744

Valentina Mameli: Una generalizzazione della distribuzione *skew-normal*: la *Beta skew-normal* 745
Domenico Marinucci: Il comportamento asintotico per gli "excursion sets" di autofunzioni Gaussiane del Laplaciano sulla sfera 746
Monica Musio: Un approccio geometrico alla sensitività locale bayesiana 747
Bernardo Nipoti: Una costruzione di vettori di hazard rate aleatori dipendenti 748
Barbara Pacchiarotti: Grandi deviazioni per ponti di processi Gaussiani condizionati 749
Andrea Pascucci: Equazioni di Kolmogorov nella valutazione di derivati finanziari di tipo Asiatico 750
Igor Prünster: Modelli mistura per *hazard rates*: alcuni risultati limite 751
Pietro Rigo: Successioni scambiabili guidate da una misura aleatoria assolutamente continua 752
Emanuela Rosazza Gianin: Misure di rischio di Haezendonck e quantili di Orlicz 753
Matteo Ruggiero: Processi di α-diversità e diffusioni Gaussiane inverse normalizzate 754
Carlo Sempi: Teorema di Sklar: una nuova dimostrazione 755
Giulio Trombetta: Curve di aggiustamento per responsi binari associati a processi stocastici 756

Sezione 8 Fisica matematica 757
Paolo Aschieri: Quantizzazione per deformazione e geometria differenziale Riemanniana noncommutativa 758
Sandra Carillo: Equazioni non lineari di evoluzione in spazi di Banach e trasformazioni di Bäcklund 759
Claudio Giberti: Stabilità per perturbazioni nei vetri di spin 760
Annalisa Marzuoli: Algoritmi quantistici per invarianti geometrici 761
Valter Moretti: Radiazione di Hawking ed effetto tunnel: un approccio basato sulla teoria algebrica dei campi 762
Chiara Pagani: Fibrati ed istantoni in geometria non-commutativa 763
Fabio Perroni: Orbifolds in Geometria ed in Fisica 764
Eugenio Regazzini: Proprietà asintotiche di soluzioni di equazioni cinetiche e teorema centrale del limite 765
Alessandro Tanzini: Quantizzazione del sistema di Hitchin e modelli di matrice generalizzati 766

Sezione 9 Modelli matematici e applicazioni 767
Gian Luigi Agnoli: Aspetto lagrangiano per alcuni problemi della biologia matematica 768
Carlo Banfi: Un'ipotesi alternativa per la conduzione del calore 769
Marzia Bisi: Modelli cinetici per l'analisi di economie di mercato 770
Margherita Carletti: Analisi di incertezza e sensitività per un modello stocastico di risposta immunitaria con memoria nell'uomo 771
Andrea Cerri: Un nuovo algoritmo sul calcolo della distanza di matching 2-dimensionale per il confronto di forme 772
Fernanda D'Ippoliti: Valutazione di opzioni Europee ed Americane con dividendi discreti in un modello a volatilità stocastica e salti 773

Giulia Deolmi: Studio di un problema inverso parabolico di convezione-diffusione-reazione 774
Michela Eleuteri: Il modello di Souza-Auricchio... si fa in tre! 775
Giulia Giantesio: Moto obliquo con un punto di ristagno per un fluido Newtoniano immerso in un campo elettromagnetico 776
Rosanna Manzo: Un modello continuo-discreto di reti di produzione 777
Filippo Notarnicola: Simulazione di un modello per la biodegradazione di inquinanti nel sottosuolo 778
Giovanni Pallotti: Modellistica di circolazione cardiovascolare 779
Matteo Pischiutta: Un modello matematico per il movimento di dune desertiche formate da una mistura di sabbie 780
Maria Alessandra Ragusa: Regolarità per i flussi di cristalli liquidi nematici 781

Sezione 10 Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie 782
Dimitri Breda: Discretizzazione numerica di famiglie di evoluzione per equazioni differenziali con ritardo non autonome 783
Angelamaria Cardone: Metodi Generali Lineari di tipo Nordsieck con stabilità quadratica 784
Raffaele D'Ambrosio: Metodi Generali Lineari altamente stabili e conservativi per la risoluzione numerica di Equazioni Differenziali Ordinarie 785
Nicoletta Del Buono: Localizzazione delle aree di crossing e di sliding in sistemi dinamici discontinui 786
Elena Esposito: Metodi Generali Lineari per Equazioni Differenziali Ordinarie del Secondo Ordine 787
Roberto Garrappa: Integratori di tipo esponenziale per problemi frazionari 788
Stefano Maset: Risoluzione numerica di problemi al contorno per equazioni differenziali funzionali neutrali 789

Sezione 11 Teoria dell'approssimazione 790
Vittoria Bruni: Alcune proprietà della trasformata wavelet discreta razionale e sue applicazioni 791
Mirella Cappelletti Montano: C_0-semigruppi associati ad una generalizzazione degli operatori di Kantorovich sull'ipercubo 792
Costanza Conti: Schemi di suddivisione stazionari e non-stazionari per la generazione di curve 793
Filomena Di Tommaso: Su una combinazione dell'operatore di Shepard con polinomi di interpolazione di Hermite 794
Francesca Pitolli: Uno schema numerico efficiente per la localizzazione di sorgenti neuroelettriche 795
Lucia Romani: Schemi di suddivisione interpolatori e loro strategie costruttive 796

Sezione 12 Algebra lineare numerica e ottimizzazione 797
Antonio Aricò: Un solutore veloce per sistemi lineari con struttura di displacement 798
Paola Boito: Proprietà di decadimento di funzioni di matrici: un'applicazione al calcolo di strutture elettroniche 799

Silvia Bonettini: Un metodo extragradiente per la ricostruzione di immagini mediante regolarizzazione con la funzione di Variazione Totale 800
Enrico Bozzo: Una relazione tra Singular Spectrum Analysis ed analisi di Fourier 801
Valentina De Simone: Precondizionatori paralleli multilivello per problemi di controllo ottimo 802
Gianna M. Del Corso: Riduzioni unitarie a forme compatte: una trattazione unificante 803
Marco Donatelli: Operatori di aggregazione per metodi multigrid 804
Claudio Estatico: Regolarizzazione nonlineare in spazi di Banach nella ricostruzione di immagini 805
Stefano Fanelli: Metodi di Tipo-Gradiente: un Approccio Unificato per la Scienza del Calcolo e l'Analisi Numerica 806
Ivan Gerace: Metodi di regolarizzazione per il problema della separazione cieca di componenti da fronte-retro di documenti 807
Bruno Iannazzo: Tecniche di shift per equazioni matriciali 808
Germana Landi: Metodi numerici per problemi di minimo vincolato nella ricostruzione di immagini 809
Jacopo Lanzoni: Crescita della norma e pseudospettri per discretizzazioni di tipo PML di sistemi aperti 810
Serena Morigi: Metodi di alternanza basati su sottospazi di Krylov per la ricostruzione di immagini 811
Vanni Noferini: L'applicazione del metodo di Ehrlich-Aberth a problemi polinomiali agli autovalori 812
Margherita Porcelli: Regole di aggiornamento del parametro di penalità nei metodi di ottimizzazione con modelli regolarizzati 813
Giuseppe Rodriguez: Identificazione di parametri nella inversione numerica della trasformata di Laplace con dati reali 814
Valeria Simoncini: Metodi avanzati di tipo proiettivo per la risoluzione dell'equazione algebrica di Lyapunov 815
Riccardo Zanella: Metodi di ottimizzazione vincolata per la ricostruzione di immagini su sistemi multicore 816

Sezione 13 Metodi numerici per le equazioni alle derivate parziali 817
Alessandra Aimi: Un metodo BEM energetico di tipo Galerkin per problemi di propagazione di onde 818
Francesca Bonizzoni: Equazioni dei momenti per la formulazione mista del problema dell'Hodge Laplacian con forzante stocastica 819
Sebastiano Boscarino: Metodi Impliciti-Espliciti (IMEX) Runge-Kutta per sistemi iperbolici con rilassamento diffusivo *stiff* 820
Elisabetta Carlini: Uno schema Semi-Lagrangiano per l'equazione AMSS 821
Nicola Cavallini: Approccio agli Elementi Finiti per l'Immersed Boundary Method 822
Alessio Fumagalli: Modelli ridotti per flussi in mezzi porosi fratturati con griglie di calcolo non conformi 823
Francesca Gardini: Conservazione della massa per l'approssimazione agli elementi finiti del problema di Stokes 824
Annamaria Mazzia: Metodi meshless di tipo radiale-tensoriale applicati alla risoluzione del problema di Poisson 825

Marco Restelli: Metodi semi-Lagrangiani agli elementi discontinui 826
Matteo Semplice: La produzione numerica di entropia: un indicatore d'errore per leggi di conservazione 827
Lorenzo Tamellini: Approssimazione polinomiale di EDP ellittiche con coefficienti stocastici 828
Francesca Tantardini: La proiezione L^2 nella discretizzazione dell'equazione del calore 829

Sezione 14 Algebra 830
Paolo Bravi: La classificazione delle varietà magnifiche 831
Giovanni Cerulli Irelli: Positività nelle algebre cluster 832
Vincenzo De Filippis: Identità con α-Derivazioni Generalizzate in Anelli Primi e Semiprimi 833
Alice Fabbri: Domini Vacanti 834
Carmela Ferrò: Funzioni di Hilbert e numeri di Betti di ideali lessicografici inversi nell'algebra esterna 835
Gabriele Fusacchia: Moduli iniettivi e star-operazioni 836
Maurizio Imbesi: Grafi con cappi e invarianti 837
Monica La Barbiera: Algebra simmetrica di ideali associati a grafi 838
Patrizia Longobardi: Su di un problema riguardante i gruppi ordinati 839
Mario Marietti: La congettura di Dyer-Lusztig 840
Alice Pavarin: Preantipodi per dual-quasi bialgebre 841
Giovanni Scudo: Derivazioni Generalizzate in Anelli Primi ed Algebre di Banach 842
Paola Lea Staglianò: s-Successioni e moduli monomiali 843
Maria Tota: Gruppi con sottogruppi non-normali risolubili 844

Sezione 15 Combinatorica 845
Arrigo Bonisoli: Disegni i cui blocchi sono grafi 846
Simona Bonvicini: Ricoprimenti di grafi cubici con matching di cardinalità fissata 847
Daniela Emma: Piani di traslazione associati a ovoidi A_6-invarianti della quadrica di Klein 848
Michel Lavrauw: Semicorpi di skew polynomial rings 849
Fiorenza Morini: Quasianelli planari circolari: aspetti geometrici e combinatorici 850
Fernanda Pambianco: Archi in piani proiettivi 851
Claudio Perelli Cippo: Involuzioni semplici che evitano certi motivi 852
Gloria Rinaldi: Problema di Oberwolfach: soluzioni con simmetria 853
Beatrice Ruini: L'indice cromatico H-automorfo di un grafo 854

Sezione 16 Topologia e geometria differenziale 855
Gennaro Amendola: Superfici di Dehn e 3-varietà chiuse 856
Gianluca Bande: Alcuni risultati sulle coppie di contatto metriche 857
Silvia Benvenuti: Branchfolds, varietà coniche razionali e il problema di Cheeger-Simons 858
Letizia Brunetti: Proiezioni di $g.f.f$-strutture indefinite 859
Angelo V. Caldarella: Sommersioni semi-Riemanniane e condizioni di Ossermann speciali su f-varietà 860

Giovanni Calvaruso: Solitoni di Ricci pseudo-Riemanniani 861
Andrei Catalioto: Funzioni H-chiuse, U-chiuse, minimal Hausdorff e minimal Urysohn 862
Alessia Cattabriga: Polinomio di Alexander di tangle 863
Nicola Ciccoli: Quantizzazione geometrica di strutture di Poisson omogenee non regolari 864
Paola Cristofori: Stime della complessità di Matveev di una 3-varietà: diagrammi di Heegaard generalizzati e grafi colorati 865
Barbara Di Fabio: Formule di Mayer-Vietoris per l'omologia persistente 866
Luigia Di Terlizzi: Una sottoclasse delle $\mathcal{K}$-varietà 867
Giulia Dileo: Varietà pseudohermitiane generalizzate 868
Roberto Frigerio: Rigidità per varietà senza curvatura negativa 869
Antonio Lotta: Metriche ammissibili su varietà di contatto 870
Stefano Montaldo: Sulla classificazione delle sottovarietà biarmoniche 871
Paola Piu: Strutture riemanniane Γ-simmetriche del gruppo di Heisenberg 872

Sezione 17 Geometria complessa 873
Daniele Angella: Scomposizione in coomologia per varietà quasi-complesse 874
Leandro Arosio: Aspetti geometrici della teoria di Loewner 875
Cinzia Bisi: Tori Quaternionici e loro Spazio di Moduli 876
Antonio J. Di Scala: Una dimostrazione breve del teorema di Karpelevich-Mostow 877
Andrea Iannuzzi: Iperbolicità dei fibrati in dischi puntati $SU(2)$-invarianti e di Stein sulla quadrica affine complessa 878
Costantino Medori: Quadriche CR con speciali proprietà di simmetria 879
Jasmin Raissy: Forme normali in dinamica olomorfa 880
Federico Alberto Rossi: Deformazioni di **D**-strutture ed esempi 881
Irene Sabadini: Teoremi di dualità per funzioni slice iperolomorfe 882
Alberto Saracco: Misure di Carleson e successioni uniformemente discrete in dominî fortemente pseudoconvessi 883
Caterina Stoppato: Nuovi sviluppi in serie per funzioni quaternioniche regolari 884
Adriano Tomassini: Strutture quasi-complesse su spazi omogenei e loro proprietà coomologiche 885

Sezione 18 Geometria algebrica 886
Fabrizio Andreatta: Sottovarietà localmente simmetriche nel luogo di Torelli 887
Cristina Bertone: Schemi di Hilbert e aperti di Borel 888
Michele Bolognesi: Categorie derivate e razionalità di fibrati in coniche 889
Maria Chiara Brambilla: Varietà delle secanti a varietà di Segre-Veronese 890
Alberto Calabri: Sulle curve piane contratte da trasformazioni di Cremona 891
Alberto Canonaco: Funtori di Fourier-Mukai: non unicità 892
Cinzia Casagrande: Un nuovo invariante delle varietà di Fano 893
Luca Chiantini: Metodi geometrici per lo studio della rappresentazione di tensori e polinomi 894
Ciro Ciliberto: Rigate ed iperbolicità 895
Pietro De Poi: Apolarità per curve sottocanoniche 896

Lorenzo Di Biagio: Luoghi base asintotici per varietà singolari 897
Roberta Di Gennaro: Liaison e Condizioni di Cohen-Macaulaycità 898
Daniele Faenzi: Teorema di Torelli per configurazioni di iperpiani 899
Claudio Fontanari: Un ricoprimento aperto affine di $\mathcal{M}_g$ per $g \leq 5$ 900
Marco Franciosi: Il teorema di Clifford per curve semistabili 901
Paola Frediani: Mappa di Prym e mappe gaussiane 902
Concettina Galati: Su famiglie di curve singolari su superfici K3 903
Alice Garbagnati: Automorfismi di superfici K3 904
Margherita Guida: Configurazioni di rette di $\mathbb{P}^n_K$: generatori e proprietà di Cohen-Macaulay 905
Valeria Ornella Marcucci: Sul genere di una curva in una varietà Jacobiana 906
Carla Novelli: Varietà proiettive che contengono uno spazio lineare con fibrato normale nef 907
Gianluca Occhetta: Fibrati vettoriali uniformi su varietà di Fano 908
Giorgio Ottaviani: Equazioni per tensori di rango limitato e varietà secanti 909
Rita Pardini: Curve su superfici irregolari 910
Roberto Pignatelli: Deformazioni di Burniat terziarie 911
Paolo Stellari: Funtori di Fourier-Mukai: esistenza 912
Elisa Tenni: Il Teorema di Clifford per curve Gorenstein 913
Sofia Tirabassi: Mappa tetracanonica di una varietà di dimensione di Albanese massima e di tipo generale 914
Francesca Vetro: Componenti Irriducibili di Spazi di Hurwitz 915

Sezione 19 Logica matematica 916
Alessandro Andretta: La complessità del Teorema di Densità di Lebesgue 917
Stefano Baratella: Proprietà di inviluppi nonstandard di C^*-algebre 918
Riccardo Camerlo: La teoria descrittiva del teorema di densità di Lebesgue 919
Giovanni Curi: Risultati di indipendenza in teoria costruttiva degli insiemi e dei tipi 920
Paola D'Aquino: Parti intere di campi reali chiusi 921
Mauro Di Nasso: Somme di insiemi di interi con densità positiva 922
Vincenzo Dimonte: Insiemi Icaro ed immersioni elementari 923
Anna Rita Ferraioli: Classificazione delle MV-algebre mediante fasci 924
Antongiulio Fornasiero: Espansioni dei reali che non definiscono i numeri naturali 925
Marco Forti: Insiemi equipotenti sono davvero *equinumerosi*? Aristotele-Euclide o Cantor-Zermelo? 926
Paolo Gentilini: Introduzione di una logica paraconsistente *costruttiva* e dei sistemi aritmetici su essa basati 927
Sonia L'Innocente: Algebre di Lie e Algebre Quantizzate: il ruolo dell'esponenziazione 928
Maria Emilia Maietti: Fondazione a più livelli per la matematica costruttiva 929
Ruggero Pagnan: Fibrazioni concrete 930
Giuseppe Rosolini: Quozienti, stack e iperdottrine 931
Carlo Toffalori: Reticoli generalizzati su anelli alla Dedekind locali 932

Sezione 20 Teoria dei numeri 933
Jung Kyu Canci: Buona riduzione per endomorfismi di $\mathbb{P}^1$ 934
Sara Checcoli: Campi di numeri algebrici con gradi locali limitati 935
Giovanni Coppola: Aspetti elementari del metodo della Dispersione e del Crivello Largo 936
Alessandro Languasco: Una formula esplicita per i numeri di Goldbach 937
Matteo Longo: Un criterio di irriducibilità per rappresentazioni di gruppi ed applicazioni aritmetiche 938
Raffaele Marcovecchio: Misure d'irrazionalità e di non-quadraticità di logaritmi di numeri razionali ed algebrici 939
Giuseppe Molteni: Congruenze soddisfatte dal numero di rappresentazioni di 2^k come somma di k potenze di due 940
Laura Paladino: Divisibilità locale-globale nei gruppi algebrici commutativi 941
Francesco Pappalardi: Sull'esponente del gruppo dei punti di una curva ellittica su un campo finito 942
Giulio Peruginelli: Punti quasi-interi su componenti lineari di curve a variabili separabili 943
Antonella Rossi: Un risultato condizionale sul problema di Goldbach-Linnik 944
Valentina Settimi: Norma L^2 di somme esponenziali su quadrati di primi 945
Francesco Veneziano: Punti interi quadratici su curve di genere 1 definite da una doppia equazione di Pell 946
Stefano Vigni: Risultati recenti sull'aritmetica dei punti di Darmon 947
Alessandro Zaccagnini: Correlazione fra gli zeri della funzione zeta e numeri primi negli intervalli corti 948

Sezione 21 Storia della matematica 949
Sandro Caparrini: Alle origini della fisica teorica: la corrispondenza fra T. Levi-Civita e A. Righi (1901-1920) 950
Cinzia Cerroni: Dai complessi agli ipercomplessi nella metà dell'ottocento 951
Luca Dell'Aglio: Teoria delle omografie e calcolo tensoriale 952
Veronica Gavagna: L'edizione critica degli *Elementorum compendia* di Francesco Maurolico 953
Livia Giacardi: Le lettere di Beltrami a Betti, Tardy e Gherardi 954
Iolanda Nagliati: Le prime ricerche algebriche di Enrico Betti 955
Nicla Palladino: La "costruzione" di una nazione: la corrispondenza politica e matematica durante l'unificazione dell'Italia 956
Clara Silvia Roero: Università di Torino, Risorgimento e Unità d'Italia: l'impegno dei matematici 957
Luciana Zuccheri: Sull'insegnamento dell'Analisi agli inizi del '900 958

Sezione 22 Didattica della matematica 959
Chiara Andrà: Tirare a caso nei test a risposta multipla: la peculiarità delle domande di matematica 960
Cristina Coppola: Invenzione e manipolazione di un linguaggio socialmente condiviso in classi di scuola primaria 961
Maria Flavia Mammana: Genesi e sviluppo di una ricerca didattica 962
Piera Manara: Sistemi polinomiali e basi di Gröbner: una sperimentazione

didattica 963
Alberto Marini: Materiale per approcci costruttivi alla matematica 964
Francesca Martignone: Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia Romagna 965
Michela Maschietto: Strumenti per la rappresentazione dei numeri: un'esperienza didattica con la 'pascalina' Zero+1 966
Luigi Menna: Problem solving: il ruolo del contesto del problema e degli strumenti da utilizzare 967
Tiziana Pacelli: Coordinamento semiotico: una proposta didattica 968
Michele Pertichino: Un modello per la formazione permanente degli insegnanti di matematica 969
George Santi: Integrare teorie in didattica della matematica: oggetti matematici, significato e rappresentazioni 970
Annarosa Serpe: Impreparati in matematica, fino a che punto? 971
Luigi Tomasi: La matematica nel riordino della Scuola secondaria di II grado: osservazioni didattiche 972
F. S. Tortoriello: Il programma Geologic: una sperimentazione didattica per la risoluzione di triangoli rettangoli 973
Giancarlo Travaglini: Sulla preparazione alla matematica universitaria 974

Indice analitico 975

Saluti

Saluto Presidente Comitato Organizzatore, Prof. Ermanno Lanconelli

Illustri Colleghi, Magnifico Rettore, graditi Ospiti, Signore e Signori,
ho l'onore e il piacere di porgere a tutti voi, a nome del Comitato Organizzatore, il più cordiale benvenuto a questa cerimonia inaugurale del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

Nell'Aprile del 1940, quindi più di settanta anni fa, i matematici italiani si erano già riuniti qui, a Bologna, per il secondo Congresso della loro Unione. Ma fu quella una edizione che non si svolse in un clima pienamente proficuo per una manifestazione scientifica. Spirava aria di guerra: una consistente parte d'Europa vi era già coinvolta, e di lì a poco vi sarebbe entrata anche l'Italia. La comunità matematica italiana risultava inoltre impoverita dal recente allontanamento dall'Università, a seguito delle leggi razziali, di vari, eminenti matematici.

Quello che si inaugura oggi è il primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana che si celebra a Bologna da allora.

Ma va subito ricordato che l'UMI, l'Unione Matematica Italiana, nata con lo scopo di seguire, promuovere e divulgare lo sviluppo delle Scienze Matematiche e delle loro applicazioni, è a Bologna che ha la propria sede istituzionale. La sua presenza nella nostra Università è stata quindi costante, ininterrotta, sin dal 1922, anno della sua fondazione ad opera di Salvatore Pincherle allora—lo era dal 1880 e lo fu sino al 1928—professore a Bologna. Fu Salvatore Pincherle, insieme con Cesare Arzelà, e Luigi Donati, ad attuare quella grande rinascita della matematica bolognese auspicata, e di fatto avviata da Luigi Cremona, all'indomani di quella unificazione italiana della quale si stanno celebrando, in questo 2011, i 150 anni.

E fu ancora Salvatore Pincherle, con la neonata Unione Matematica Italiana, ad organizzare, qui a Bologna, quel grande evento scientifico, che fu il Congresso Internazionale dei Matematici del 1928.

Quel Congresso segnò un grande successo organizzativo—vi parteciparono 1200 matematici di ogni parte del mondo—ma fu un successo anche politico: per la prima volta dopo la fine del primo conflitto mondiale, ad un Congresso internazionale prese parte una delegazione di matematici tedeschi, fino ad allora esclusi a seguito delle lacerazioni provocate dalla guerra.

Pincherle fece rivolgere l'invito a quei matematici direttamente dall'Università di Bologna *la più antica della cristianità*—sono parole testuali di Pincherle—*che gode da secoli di una fama indiscutibile e che per questo si è ritenuta autorizzata ad assumerne l'organizzazione* [del Congresso] *e di invitarvi gli scienziati del mondo intero, ribadendo così il valore universale della ricerca.*

Spinti da questi impegntivi precedenti, e ben consapevoli della responsabilità che ci stavamo assumendo nei confronti della comunità matematica nazionale, ci

siamo predisposti all'Organizzazione di questo Congresso, dopo che gli organi direttivi dell'UMI ce ne avevano affidato il compito. Compito gravoso, anche se da noi stessi auspicato, e in massima parte sostenuto con lucidità ed efficacia dal nostro collega, ed amico, *Giovanni Dore*. A lui devono andare i maggiori ringraziamenti per la messa in opera della complessa macchina organizzativa del Congresso.

Ringraziamenti doverosi vanno anche a quanti, nel comitato organizzatore, hanno lavorato con impegno e passione affinchè tutto potesse andare a buon fine.

Un ringraziamento particolare va poi ai diversi collaboratori del personale tecnico amministrativo del Dipartimento di Matematica, nonchè alla segreteria dell'UMI, per il grande e accurato lavoro svolto per il Congresso.

A nome del Comitato Organizzatore, devo poi esprimere la mia gratitudine alle istituzioni e alle associazioni che ci hanno elargito preziosi contributi finananziari:

- la Cassa di Risparmio di Bologna
- l'Azienda di Promozione Turistica, dell'Emilia Romagna
- la Facoltà di Scienze Matematiche,Fisiche e Naturali di Bologna
- il nostro Dipartimento di Matematica
- l'associazione MENSA Italia
- il Rotary Club, al quale dobbiamo anche la partecipazione di alcuni allievi di scuole secondrie superiori

Per le loro sponsorizzazioni, accompagnate a volte da supporti finanziari, ringraziamo

- Le aziende Adalta e MathWorks
- Le case editrici Aboca, Mc Grow Hill e Springer

Alla casa editrice Zanichelli desidero rivolgere un rigraziamento particolarmente sentito per la ristampa dell'opera di Salvatore Pincherle e Ugo Amaldi *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, offerta in omaggio a tutti i partecipanti al Congresso. La stessa casa editrice ha voluto inoltre offrirci, con ulteriore generosità, la stampa dell'opuscolo del programma.

Esprimo infine il nostro compiacimento per il Patrocinio concesso dalla Regione Emilia Romagna in considerazione dell'alto valore scientifico del nostro evento.

Al Congresso risultano iscritti 550 matematici provevineti da tutte le Università italiane, e da Centri di Ricerca. Fra questi molti giovani, o giovanissimi, la cui partecipazione abbiamo cercato di favorire indirizzandoli, per il loro soggiorno, presso le varie residenze universitarie riservateci dalla nostra Università.

Il programma scientifico prevede 17 Conferenze generali e circa 340 Comunicazioni distribuite in 22 diverse Sezioni. Di queste Comunicazioni 28 sono da trenta minuti, e sono riservate a giovani matematici di età non superiore ai 33 anni. In programma vi sono poi 4 Conferenze a cura della CIIM (la Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica), e 3 tavole rotonde su argomenti di particolare rilievo e attualità : *La valutazione della ricerca sientifica in Italia*, *Le nuove frontiere delle applicazioni della Mateamtica*, *La matematica e l'accesso all'Università*.

Al Comitato Scientifico del Congresso, ai Conferenzieri, a quanti presenteranno le comunicazioni, ai coordinatori delle sezioni e delle tavole rotonde, va ovviamente la nostra riconoscenza: a loro si dovrà la vera riuscita, scientifica e culturale, del Congresso.

Accanto a quello scientifico, il nostro programma prevede alcune iniziative sociali: un concerto d'organo, la proiezione del film "Proof - La prova", una cena

sociale, la presentazione di alcuni libri di cararattere matematico-divulgativo, che avverrà, con la presenza degli autori, presso una libreria cittatina.

Infine, due inziative, con le quali abbiamo voluto collegarci alle molteplici celebrazioni per i 150 anni dell'Unità d'Italia.

- La posa di una lapide in marmo, che verrà ufficialmente scoperta oggi pomeriggio, alle 15:15, nell'atrio del Dipartimento di Matematica, e che reca i nomi di quanti "Onorarono la Matematica a Bologna", a partire dal XV Secolo, sino al 1961, primo centenario dell'Unità.
- La pubblicazione di una monografia di carattere storico, su eminenti matematici che operarono a Bologna dal 1861 sino ai nostri giorni.

  La monografia, curata da Salvatore Coen e pubblicata da Birkhäuser, in una versione ancora in bozze, sarà consultabile durante il Congresso sui banchi ove alcune case editrici esporranno loro pubbliacazioni. Essa verrà offerta in omaggio, da parte del Comitato organizzatore, ai Conferenzieri generali, e ai membri della Commissione scientifica del Congresso. Per questa iniziativa ci siamo potuti avvalere di un contributo finanziario del nostro Magnifico Rettore, al quale dobbiamo, anche per questo, una viva riconoscenza.

E per concludere con i ringraziamenti doverosi, ne rivolgo uno, esplicito, all'Università di Bologna nel suo insieme, per averci messo a disposizione le sue strutture, in particolare questa splendida aula Magna, e quelle del nuovo complesso di via Belmeloro, ove si svolgeranno, da oggi pomeriggio, tutti i lavori.

Con l'auspicio che questa XIX edizione del Congresso dell'Uninone Matematica Italiana venga ricordata per il suo elevato livello scientifico, e per aver saputo fruttuosamente stimolare la ricerca Matematica nei suoi molteplici settori, porgo a tutti i convenuti i migliori auguri di buon lavoro, e un buon soggiorno nella nostra bella città.

Discorso in occasione della scopertura della Lapide

Quella che scopriamo qui, oggi, è una lapide in marmo recante il nome di 34 insigni matematici che operarono a Bologna, nel periodo compreso fra la seconda metà del 1400 e il 1961, I centenario dell'Unità d'Italia.

Una parte di questi nomi, da Luca Pacioli a Cesare Arzelà, è formata da quelli che si trovavano dipinti sulla cornice del soffitto della vecchia aula Pincherle, nel vecchio Istituto Matematico di Largo Trombetti.

Quelli successivi, da Pincherle a Beniamno Segre, sono quelli di tutti gli ordinari di discipline matematiche della nostra Università, che terminarono il loro servizio entro il 1961.

Si tratta di studiosi e scienziati che hanno fatto la Storia della Matematica, conferendo grande prestigio alla nostra Università.

Li abbiamo voluti ricordare, fissandone i nomi sul marmo, non per un atto di vana gloria, nella illusione di poter noi brillare del riflesso della loro grandezza, ma per rinsaldare le nostre radici, per indicare ai giovani di oggi, e di domani, esempi luminosi di uomini che hanno dedicato la vita allo studio e alla ricerca, esempi di uomini che possano spronarci nel nostro quotidiano lavoro di studiosi, insegnanti e ricercatori.

La lapide è stata realizzata, totalmente, col contributo finanziario di una sessantina di noi, membri di questo Dipartimento, e del Dipartimento di Matematica per

le Scienze Economiche e Sociali, alcuni già collocati a riposo, ed altri del personale della nostra Biblioteca.

Vari sono stati i colleghi che hannno contribuito fattivamente, colloro lavoro, alla realizzazione di quest'opera, e desidero ringraziarli pubblicamente:

Anzitutto, Salvatore Coen e Sandro Graffi, per la loro indispensabile consulenza storica.

E poi: Giovanni Cupini, Simonetta Abenda e Paolo Albano.

Un ringraziamento particolarmente sentito rivolgo poi alla dott.ssa Serena Marchionni, della nostra Biblioteca, che ha ritrovato, nell'archivio dell'Università i nomi, da tempo non più visibili, che figuravano sulla volta della vecchia aula Pincherle.

Infine, desidero personalmente rigraziare il Signor Giuseppe Barone, dell'ufficio tecnico della nostra Unversità: col suo lavoro prezioso ha consentito la concreta realizzazione dell'opera.

NOMI PER LA LAPIDE. Nell'Aula Pincherle della vecchia sede di via Belmeloro dell'Istituto di Matematica, fino al 1967, tutto intorno al margine basso del soffitto, erano dipinte cornici recanti i nomi dei matematici di prestigio legati allo Studio bolognese fino al 1912. A seguito di ristrutturazioni queste targhe non sono più visibili.

La nuova lapide riprenderebbe i nomi antichi e ne aggiungerebbe di nuovi.

I nomi incisi erano i seguenti

Domenico M. Novara, 1483–1504 — Scipione Dal Ferro, 1496–1526 — Luca Pacioli, 1501–1502 — Girolamo Cardano, 1562–1571 — Ludovico Ferrari, 1564–1566 — Rafael Bombelli, 1550–1572 — Gio. Antonio Magini, 1588–1617 — Pietro Ant. Cataldi, 1583–1626 — Bonaventura Cavalieri, 1629–1648 — Pietro Mengoli, 1648–1686 — Gian Domenico Cassini, 1650–1713 — Domenico Guglielmini, 1689–1710 — Eustachio Manfredi, 1699–1739 — Gabriele Manfredi, 1710–1762 — Francesco M. Zanotti, 1718–1778 — Eustachio Zanotti, 1738–1782 — Gaetana Agnesi, 1750–1799 — Vincenzo Riccati, 1739–1769 — Sebastiano Canterzani, 1760–1819 — G. Battista Magistrini, 1804–1841 — Domenico Chelini, 1851–1864 — Luigi Cremona, 1860–1867 — Eugenio Beltrami, 1862–1873 — Cesare Arzelà, 1880–1912.

I nomi da aggiungere sono:

Salvatore Pincherle (1881–1931) — Federigo Enriques (1894–1921) — Leonida Tonelli (1919–1930) — Pietro Burgatti (1908–1938) — Ettore Bortolotti (1919–1936) — Enrico Bompiani (1923–1927) — Beppo Levi (1928–1938; 1944–1950) — Giuseppe Vitali (1930–1932) — Beniamino Segre (1931–1938; 1944–1950) – Luigi Fantappiè (1932–1939)

Parte 1

Conferenze Generali

Ferdinando Arzarello: Provare se, vedere che, sapere perché: la dimostrazione in classe

Ferdinando Arzarello
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
email: ferdinando.arzarello@unito.it

Sunto

L'acquisizione progressiva da parte degli allievi delle forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare, giustificare, definire, argomentare, generalizzare, dimostrare*...) è un obiettivo fondamentale nell'insegnamento della matematica, diversamente modulato secondo il livello scolare e variamente intrecciato con i contenuti. I quadri di riferimento delle rilevazioni degli apprendimenti (PISA, TIMSS, INVALSI), e molti studi internazionali dimostrano che si tratta di un tema cruciale per l'insegnamento odierno della disciplina; anche le recenti "Indicazioni nazionali" danno esplicito rilievo alla dimostrazione. Molte ricerche rilevano inoltre l'opportunità di ricorrere alle nuove tecnologie per supportare gli allievi nel delicato passaggio al pensiero formale. Il problema concreto per gli insegnanti, in particolare quelli di matematica, è: "come ottenere l'acquisizione di queste competenze da parte degli allievi nella scuola di oggi?"

Il mio intervento ha l'obiettivo di mostrare quali strumenti e quali metodi la ricerca didattica offra per rispondere a questa domanda. Lo farò con esempi concreti, riguardanti differenti livelli scolari e tratti da sperimentazioni condotte in scuole italiane e straniere in occasione di diversi progetti nazionali e internazionali, cui hanno partecipato gruppi di ricerca italiani (tra cui quello di Torino, da me diretto) e stranieri. Essi definiranno una "cassetta degli attrezzi" che potrà auspicabilmente essere di una qualche utilità agli insegnanti per rispondere almeno in parte alla domanda posta, ben consapevole del vecchio adagio secondo il quale non esiste alcuna "via regia" alla matematica.

Mi concentrerò pertanto sui seguenti temi:

- Un'analisi epistemologica della dimostrazione in classe.
- Un'analisi dei processi che portano alla dimostrazione in classe: aspetti cognitivi e metacognitivi; in particolare disamina dei prerequisiti contrattuali e (insieme) di atteggiamento degli allievi riguardanti la necessità di validare le affermazioni matematiche.
- Una conseguente scansione didattica delle attività che possono portare alla dimostrazione come prodotto di processi in classe, compresa l'attenzione agli intrecci possibili delle competenze matematiche con quelle linguistiche.
- Nuove tecnologie e dimostrazione: un connubio produttivo?

Seguendo la classificazione di uno studio ICMI del 1997, gli esempi proposti saranno di tre diverse categorie: economizzatori di pensiero; demolitori di illusioni; energizzanti per la pratica.

Massimo Bertolini: Regolatori, funzioni L e punti razionali

Massimo Bertolini
Dipartimento di Matematica, Università di Milano
email: massimo.bertolini@unimi.it

Sunto

I valori delle funzioni L associate a varietà algebriche nei punti interi sono oggetto di congetture dovute a Deligne, Beilinson, Bloch-Kato e altri. Un caso particolare di queste congetture è la celebrata congettura di Birch e Swinnerton-Dyer, che collega i punti razionali di una curva ellittica al comportamento analitico nel punto 1 della funzione L della curva stessa. Questa conferenza si propone di discutere alcuni risultati recenti sulle summenzionate congetture e loro applicazioni al problema dello studio dei punti razionali delle curve ellittiche.

Intervento: Massimo Bertolini,
Regulators, L-Functions and Rational Points,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 191–204**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 191-204

Regulators, *L*-Functions and Rational Points (*)

MASSIMO BERTOLINI

Abstract. – *This article is a revised version of the text of the plenary conference I gave at the XIX Congress of "Unione Matematica Italiana", held in Bologna in September 2011. It discusses the arithmetic significance of the values at integers of the complex and p-adic L-functions associated to Dirichlet characters and to elliptic curves.*

Introduction

Values at integer points of L-functions attached to algebraic varieties, and their relations to arithmetic invariants, have received much attention over the last decades. Several authors, including Beilinson, Bloch, Deligne, and Kato, have formulated a comprehensive conjectural theory; see for example [Ki] for an up-to-date description and bibliography. Moreover, results have been obtained for the L-functions associated to certain automorphic representations, some of which are described here.

Recently, fragments of a p-adic analogue of this theory, in which complex L-functions are replaced by p-adic L-functions, have emerged; e.g., [Co], [MTT], [So], [Co-dS], [PR2], [Ka], [Br]. Furthermore, the theory of Euler systems [Ko], [Ru], [Ka], [Colz] has introduced powerful new tools for establishing connections between values of L-functions and arithmetic invariants.

Our exposition focuses mostly on the case elliptic curves, and provides an introduction to the ongoing research projects [BD1], [BD2], [BD3]. Modularity of elliptic curves gives rise to a mature theory of their complex and p-adic L-functions. Moreover, the Euler system of Heegner points and Kato's Euler system of étale regulators of modular units become available in this case, leading to the best known results on the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture.

Along the way, we point out the remarkable parallelism between the setting of elliptic curves and the setting of Dirichlet L-functions, in which are rooted many classical questions of number theory.

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 15 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

1. – Dirichlet L-functions

Let $N \geq 3$ be an integer, and let $\chi : (\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^{\times} \longrightarrow \boldsymbol{C}^{\times}$ be a primitive Dirichlet character of conductor N. The Dirichlet L-function $L(\chi, s)$ associated to χ (viewed as a function on $\boldsymbol{Z}$ in the usual way) is defined by the infinite series

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}. \tag{1}$$

Assuming that χ is different from the trivial character, the series (1) converges to an analytic function on the complex half plane $\Re(s) > 0$. Furthermore, $L(\chi, s)$ is represented by the infinite Euler product (taken over the rational primes)

$$L(\chi, s) = \prod_{p} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \qquad \Re(s) > 1, \tag{2}$$

reflecting the unique factorization principle. It is known that $L(\chi, s)$ admits an analytic continuation to the whole complex plane, and satisfies a functional equation relating $L(\chi, s)$ to $L(\bar{\chi}, 1 - s)$, where $\bar{\chi} = \chi^{-1}$ is the complex conjugate of χ.

In the following discussion, assume that the non-trivial character χ is *even*, i.e., $\chi(-1) = 1$. In this case, the functional equation becomes

$$\Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) L(\chi, s) = \frac{\tau(\chi)}{2} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s} L(\bar{\chi}, 1 - s), \tag{3}$$

where $\Gamma(s)$ is the Γ-function, and $\tau(\chi)$ denotes the Gauss sum $\sum_{k=1}^{N} \chi(k) \zeta_N^k$, with $\zeta_N := e^{2\pi i/N}$. (See for example Chapter 4 of [Wa1].)

Let $n \geq 1$ be an integer. If n is even, equations (2) and (3) imply that $L(\chi, 1 - n)$ is non-zero. On the other hand, $L(\chi, s)$ has a simple zero at $1 - n$ if n is odd (the case $n = 1$, in which the non-vanishing of $L(\chi, 1)$ does not follow directly from (2), is discussed below). For n even, the points $s = n, 1 - n$ are *critical* for $L(\chi, s)$ in the sense of Deligne [De]. This phenomenon is reflected in the following explicit formulae, expressing $L(\chi, 1 - n)$ in terms of certain algebraic numbers $B_{n,\chi}$ called *generalized Bernoulli numbers*. They are defined by the equation

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\chi(k) x e^{kx}}{e^{Nx} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{x^n}{n!} .$$

Then, for all $n \geq 1$, a direct calculation shows

$$L(\chi, 1 - n) = -\frac{B_{n,\chi}}{n} . \tag{4}$$

REMARK 1.1. – Formula (4) also holds when χ is odd, i.e., $\chi(-1) = -1$. In this case, the critical points are obtained when n is odd.

We now turn to the description of the *non-critical* value $L(\chi, 1)$. First, we observe that $L(\chi, 1)$ is non-zero. (This fact follows from the presence of a simple pole at $s = 1$ in the Dedekind zeta function of a number field, and can be used to prove Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions.) A manipulation of infinite series establishes the formula

$$L(\chi, 1) = -\frac{\tau(\chi)}{N} \sum_{k=1}^{N} \bar{\chi}(k) \log|1 - \zeta_N^k|. \tag{5}$$

The expression $\sum \bar{\chi}(k) \log|1 - \zeta_N^k|$ appearing in the right hand side of (5) is an example of a (complex) *regulator*. Regulators make their appearance in the description of values of L-functions at integers, as will be discussed more thoroughly in later examples.

The algebraic integers $1 - \zeta_N^k$ are (closely related to) so-called *cyclotomic units* in $\boldsymbol{Q}(\zeta_N)$ ([Wa1], Chapters 4 and 8). Cyclotomic units provide an avenue to establish relations between the values $L(\chi, 1)$ and arithmetic invariants of cyclotomic fields, such as their class groups (see for example § 4 of [Ru]).

More generally, we remark that it is possible to describe the non-critical values $L(\chi, 1 + 2k)$ for $k \geq 1$ in terms of cyclotomic elements, constructed by Beilinson, Bloch and Soulé, arising in the odd K-groups of the ring of integers of $\boldsymbol{Q}(\zeta_N)$. See the discussion in [So].

2. – p-adic Dirichlet L-functions

As in Section 1, assume that χ is a non-trivial even character of conductor N. We now focus on p-adic analogues of the L-functions $L(\chi, s)$. Let $p \geq 3$ be a rational prime, and let $\boldsymbol{Q}_p$ be the field of p-adic numbers. The p-adic absolute value $|\ |_p$ on $\boldsymbol{Q}_p$, normalised by the condition $|p|_p = p^{-1}$, extends in a unique way to the algebraic closure $\bar{\boldsymbol{Q}}_p$. The completion $\boldsymbol{C}_p$ of $\bar{\boldsymbol{Q}}_p$ should be viewed as the p-adic analogue of the field $\boldsymbol{C}$ of complex numbers.

Fix from now on embeddings of $\bar{\boldsymbol{Q}}$ into $\boldsymbol{C}$ and $\boldsymbol{C}_p$. They allow to identify an algebraic number both with a complex number and with an element of $\boldsymbol{C}_p$. Denote by $\boldsymbol{Z}_p$ the ring of p-adic integers. Every $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p^\times$ can be written uniquely as

$$\alpha = \omega(\alpha)\langle\alpha\rangle, \tag{6}$$

where $\langle\alpha\rangle$ belongs to $1 + p\boldsymbol{Z}_p$ and $\omega(\alpha)$ is a $(p-1)-st$ root of 1 in $\boldsymbol{Q}_p$. Occasionally ω – called the Teichmüller character – will be viewed as a complex Dirichlet character $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^\times \longrightarrow \boldsymbol{C}^\times$ via our fixed embeddings.

The *p-adic L-function* $L_p(\chi, s)$ (see [Wa1], [La]) is the (non-zero) $\boldsymbol{C}_p$-valued p-adic analytic function on $\boldsymbol{Z}_p$ satisfying the *interpolation* property

$$L_p(\chi, 1 - n) = -(1 - \chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\frac{B_{n,\chi\omega^{-n}}}{n} \tag{7}$$

for all integers $n \geq 1$. The reader should note the close analogy between equations (4) and (7), one difference being the presence of the Euler factor $(1 - \chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})$ – the reciprocal of the Euler factor at p in $L(\chi\omega^{-n}, 1-n)$ – in the p-adic formula. In particular, when $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ (hence n is even), (4) and (7) imply that

$$L_p(\chi, 1-n) = -(1 - \chi(p)p^{n-1})\,\frac{B_{n,\chi}}{n} = (1 - \chi(p)p^{n-1})L(\chi, 1-n). \tag{8}$$

Equation (8) determines $L_p(\chi, s)$ uniquely, since the set of integers $1-n$ with $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ is dense in $\boldsymbol{Z}_p$.

REMARK 2.1. – It is not known whether $L_p(\chi, s)$ satisfies a functional equation similar to (3); see the comments in [Wa2].

The value of $L_p(\chi, s)$ at the point $s = 1$, which lies outside the range of classical interpolation (7), can be described in terms of a *p-adic regulator* on cyclotomic units. Thus the situation is analogous to the complex setting described in equation (5). Let $\log_p : \boldsymbol{C}_p^\times \longrightarrow \boldsymbol{C}_p$ be the branch of the p-adic logarithm satisfying $\log_p(p) = 0$. Then

$$L_p(\chi, 1) = -\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{\tau(\chi)}{N}\sum_{k=1}^{N} \bar{\chi}(k)\log_p(1 - \zeta_N^k). \tag{9}$$

It is a deep fact that $L_p(\chi, 1)$ is non-zero. It follows from the non-vanishing of the p-adic regulator for cyclotomic fields. (An open problem – Leopoldt's conjecture – states that the p-adic regulator attached to *any* number field is non-zero.) For generalizations of equation (9) to other values of $L_p(\chi, s)$ at integers outside the range of classical interpolation, we refer the reader to [So] and [Co].

We conclude our brief discussion of the properties of $L_p(\chi, s)$ by recalling its interpretation in terms of p-adic measures. This language is helpful in relating p-adic L-functions to objects of arithmetical interest. It is also convenient for stressing the analogy between the p-adic L-functions attached to Dirichlet characters and to elliptic curves.

Assume for simplicity that $p \nmid N$, and write $\boldsymbol{Z}_{N,p}^\times$ for the inverse limit of the groups $(\boldsymbol{Z}/Np^n\boldsymbol{Z})^\times$ of units modulo Np^n with respect to the natural projections. Thus

$$\boldsymbol{Z}_{N,p}^\times = (\boldsymbol{Z}/Np\boldsymbol{Z})^\times \times (1 + p\boldsymbol{Z}_p).$$

A *p-adic measure* on $\boldsymbol{Z}_{N,p}^\times$ is a $\boldsymbol{C}_p$-valued bounded functional on the space $\mathrm{Cont}(\boldsymbol{Z}_{N,p}^\times, \boldsymbol{C}_p)$ of continuous functions from $\boldsymbol{Z}_{N,p}^\times$ to $\boldsymbol{C}_p$. The Bernoulli numbers can be used to define a measure $\mu_{B,c}$, depending on the choice of an integer c coprime to Np. One has the following description of $L_p(\chi, s)$ as the *p-adic Mellin*

transform of $\mu_{B,c}$:

$$L_p(\chi, s) = -(1 - \chi(c)\langle c\rangle^{1-s})^{-1} \int_{\boldsymbol{Z}_{N,p}^{\times}} \chi\omega^{-1}(t)\langle t\rangle^{-s} d\mu_{B,c}. \tag{10}$$

Generalizing the notation appearing in equation (6) somewhat, here $\langle t\rangle$ denotes the projection from $\boldsymbol{Z}_{N,p}^{\times}$ to $1 + p\boldsymbol{Z}_p$, and $\chi\omega^{-1}$ is viewed as a function on $\boldsymbol{Z}_{N,p}^{\times}$ in the natural way. Moreover, c is chosen so that $\chi(c)\langle c\rangle^{1-s} \not\equiv 1$. (See [Wa1], Chapter 12 and [La], Chapter 4.)

REMARK 2.2. – It follows from (10) that the values $L_p(\chi, 1-n)$, defining $L_p(\chi, s)$ in equation (7), can be obtained by integrating the continuous characters $t \mapsto \langle t\rangle^{n-1}$ against the measure $\chi\omega^{-1}(t)d\mu_{B,c}$ associated to χ. Another way of characterizing $L_p(\chi, s)$ amounts to setting $s = 0$ in equation (10), and integrating characters ψ of p-power conductor against the same measure. The latter point of view, based on "twisting" by the finite order characters ψ, will be adopted in the definition of the p-adic L-function $L_p(E, s)$ associated to an elliptic curve E. In this case, there is only one critical point for the complex L-function $L(E, s)$, that is, the central critical point $s = 1$. In order to define $L_p(E, s)$ by p-adic interpolation of special values of complex L-functions, one resorts to interpolating the values at 1 of the twisted L-functions $L(E, \psi, s)$.

REMARK 2.3. – An alternate description of $L_p(\chi, s)$ is obtained by integrating the characters of infinite order $\psi\langle t\rangle^{-1}$ (with ψ as in the previous remark) against the measure $\chi\omega^{-1}(t)d\mu_{B,c}$. In view of (9) (suitably generalized), the above description amounts to the p-adic interpolation of p-adic regulators associated to cyclotomic units. This point of view ties in with Iwasawa's theorem, in which logarithmic derivatives are used to relate the measure $\mu_{B,c}$ to the quotient module of local units by cyclotomic units. Iwasawa's theorem is a crucial ingredient in the proof of the cyclotomic Main Conjecture of Iwasawa theory explained in [Ru].

3. – L-functions of elliptic curves

Let E be an elliptic curve over $\boldsymbol{Q}$ of conductor N, defined by a minimal Weierstrass equation (cf. Chapter VIII of [Sil])

$$y^2 + \alpha_1 xy + \alpha_3 y = x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_6, \qquad \alpha_i \in \boldsymbol{Z}. \tag{11}$$

The complex L-function of E is defined by the Euler product

$$L(E, s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + \delta_p p^{1-2s})^{-1}. \tag{12}$$

Here $a_p = p - n_p$, where n_p denotes the number of solutions of (11) modulo p, and $\delta_p = 0$, resp. 1 if $p \mid N$, resp. $p \nmid N$. The infinite product (12) converges for $\Re(s) > 3/2$, by the Hasse bound $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$. Write $L(E,s)$ as a Dirichlet series

$$L(E,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

where the coefficients $a_n \in \boldsymbol{Z}$ are given inductively in terms of the a_p defined above. Let $\mathcal{H}$ denote the complex upper half plane $\{z \in \boldsymbol{C} : \Im(z) > 0\}$. The *modularity theorem* [Wi1], [TW], [BCDT] shows that

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \qquad z \in \mathcal{H} \tag{13}$$

is the Fourier expansion of a newform on $\Gamma_0(N)$ (the Hecke congruence group of matrices in $\mathbf{SL}_2(\boldsymbol{Z})$ which are upper triangular modulo N). Conversely, writing $z = x + iy$ with $x, y \in \boldsymbol{R}$, $L(E,s)$ can be described as the Mellin transform of $f(z)$ as

$$L(E,s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} f(iy) y^{s-1} dy. \tag{14}$$

Equation (14) implies that $L(E,s)$ can be analytically continued to the whole complex plane, and satisfies a functional equation relating $L(E,s)$ to $L(E,2-s)$. More precisely, setting $\Lambda(E,s) := L(E,s) N^{s/2} (2\pi)^{-s} \Gamma(s)$, one has

$$\Lambda(E,s) = w_E \Lambda(E, 2-s), \qquad w_E = \pm 1. \tag{15}$$

Note that the sign w_E of the functional equation is equal to $+1$, resp. -1 if $L(E,s)$ vanishes to even, resp. odd order at $s = 1$. It turns out that $s = 1$ – the center of symmetry for the functional equation – is the only critical point for $L(E,s)$. Let $\omega_E = dx/(2y + \alpha_1 x + \alpha_3)$ be the invariant differential associated to (11), and denote by Λ_E the lattice of periods attached to ω_E. Define the real period $\Omega_E^+ \in \boldsymbol{R}_{>0}$ by setting $\Lambda_E \cap \boldsymbol{R} = \boldsymbol{Z}\Omega_E^+$. Likewise, define the imaginary period $\Omega_E^- \in i\boldsymbol{R}_{>0}$ by $\Lambda_E \cap i\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Z}\Omega_E^-$. From equation (14), one obtains [Man] the existence of a rational number C_E satisfying

$$\frac{L(E,1)}{\Omega_E^+} = C_E. \tag{16}$$

Equation (16) should be regarded as the analogue, in the setting of elliptic curves, of equation (4). More generally, let χ be a Dirichlet character, and denote by

$$L(E,\chi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$$

the L-series of E twisted by χ. Then

$$\frac{L(E,\chi,1)}{\Omega_E^{\chi(-1)}} = C_{E,\chi}, \tag{17}$$

for an algebraic constant $C_{E,\chi}$.

Equation (16) shows that C_E is non-zero precisely when $L(E,1)$ is non-zero. In this case, the celebrated *Birch and Swinnerton-Dyer conjecture* (cf. for example [Wi2] and [Ber] for details and references) relates C_E to the arithmetic invariants of E, such as the order of its Shafarevich-Tate group. A large part of this prediction has now been settled, thanks to the work of Gross-Zagier [GZ], Kolyvagin [Ko] and Skinner-Urban [SU].

In general, $L(E,s)$ can vanish at $s=1$. In this case, the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture states that that the order of vanishing of $L(E,s)$ at $s=1$ – the so-called *analytic rank* of E – is equal to the rank of the group $E(\boldsymbol{Q})$ of rational points of E. Furthermore, it gives an exact formula for the leading coefficient in the Taylor expansion of $L(E,s)$ at $s=1$, in terms of arithmetic invariants of E.

Assume now that the functional equation (15) has sign $w_E=-1$, so that $L(E,s)$ vanishes to odd order at $s=1$. The Gross-Zagier formula [GZ] yields

$$\frac{L'(E,1)}{\Omega_E^+} = C'_E \cdot h_{\boldsymbol{C}}(P), \tag{18}$$

where C'_E is a non-zero rational constant, P is a so-called *Heegner point* in $E(\boldsymbol{Q})$, and $h_{\boldsymbol{C}}(P)$ denotes the Néron-Tate height of P. Since the Néron-Tate height vanishes precisely on torsion points, it follows that $L(E,s)$ has a simple zero at $s=1$ if and only if P has infinite order.

Combining (18) with the results of Kolyvagin [Ko] yields a large part of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for elliptic curves of analytic rank one.

The point P belongs to a system of algebraic points (Heegner points) on E, whose properties are analogous to those of the system of cyclotomic units (appearing in equations (5) and (9)). Both systems of elements are related to values of L-functions, and give rise to Euler systems in the sense of Kolyvagin (loc. cit.). The theory of Euler systems can be used to prove relations between these elements and the arithmetic invariants of cyclotomic fields and of elliptic curves.

REMARK 3.1. – The definition of P stems from the theory of complex multiplication and the modularity of E. It depends on the choice of an auxiliary imaginary quadratic field $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{-D})$. It is more natural to state the Gross-Zagier formula as the equality

$$\frac{L'(E,1)}{\Omega_E^+} \cdot \frac{L(E,\chi_D,1)}{\Omega_E^-} = C'_{E,D} \cdot h_{\boldsymbol{C}}(P), \tag{19}$$

where $C'_{E,D}$ is an explicit non-zero rational constant, and χ_D denotes the quadratic Dirichlet character associated to K. Formula (18) follows from (19) in view of (17).

We now turn to the description of the non-critical value $L(E,2)$. Note that $L(E,2)$ is always non-zero, since $s=2$ lies within the range of convergence of the infinite product (12).

Let $Y = Y_1(N)$ be the open modular curve over $\boldsymbol{Q}$, whose complex points are identified with the Riemann surface $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}$. Let $X = X_1(N)$ be the complete curve obtained by compactifying $Y_1(N)$ with a finite set of cusps. (See for example [GZ] for details on modular curves.)

Let $u, v \in \boldsymbol{C}(X)$ be modular units, i.e, rational functions on $X/\boldsymbol{C}$ whose divisor is concentrated on the set of cusps, and let η denote an anti-holomorphic 1-form on X. The value of the *complex regulator* of u, v on η is given by

$$\mathrm{reg}_{\boldsymbol{C}}\{u,v\}(\eta) = \int_{X(\boldsymbol{C})} \log|u|^2 \mathrm{dlog}\, v \wedge \eta. \tag{20}$$

It can be checked that the expression (20) depends only on the class of η in the de Rham cohomology of X, and defines a map on the second K-group $K_2(\boldsymbol{C}(X))$ generated by Steinberg symbols of rational functions (see the discussion in [CodS] and [Bes2]).

One has the following formula of Beilinson [Bei] for $L(E,2)$; see also prior work of Bloch [Bl] in the case of elliptic curves with complex multiplication. In this note we follow the treatment given in [BD1], where an entirely explicit expression is obtained.

Let η_f^{ah} denote the anti-holomorphic 1-form

$$\eta_f^{\mathrm{ah}} = \frac{2\pi i \bar{f}(z) d\bar{z}}{\int_{X(\boldsymbol{C})} |f(z)|^2 dxdy}, \tag{21}$$

where $f(z)$ is the modular form attached to E. Then

$$\frac{L(E,2)}{\Omega_E^-} \cdot \frac{L(E,\chi,1)}{\Omega_E^+} = C_{E,\chi} \cdot \mathrm{reg}_{\boldsymbol{C}}\{u_\chi, v_\chi\}(\eta_f^{\mathrm{ah}}). \tag{22}$$

Here χ is a suitable even Dirichlet character of modulus divisible by N, and u_χ, v_χ are modular units depending on χ, whose precise definition is provided in [BD1]. Furthermore, $C_{E,\chi}$ is a non-zero explicit algebraic constant. Equation (22) follows from an application of Rankin's method.

The article [Bei] also proved in a similar vein more general results describing the values of $L(E,s)$ at non critical integers ≥ 2 in terms of the motivic cohomology of modular curves.

REMARK 3.2. – Note the similarity between equations (19) and (22). It depends on the fact that both equations describe a special value of a Rankin L-function. The former equation involves the L-function of the convolution of f with a weight one theta-series attached to K. The latter, the L-function of the convolution of f with the weight 2 Eisenstein series $\mathrm{dlog}(v_\chi)$.

4. – *p*-adic *L*-functions of elliptic curves

We begin by reviewing the definition of the *Mazur-Swinnerton-Dyer p-adic L-function* attached to E (see [MSD], [MTT]).

Fix a prime $p \geq 3$ of good ordinary reduction for E, i.e., $p \nmid Na_p$. Let $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p^\times$ be the unit root of $x^2 - a_p x + p$. The periods of the holomorphic 1-form

$$\omega_f := 2\pi i f(z) dz$$

give rise to a p-adic measure μ_E on $\boldsymbol{Z}_p^\times$, characterized by the following interpolation formulae:

$$\int_{\boldsymbol{Z}_p^\times} \mu_E = (1-\alpha^{-1})^2 \frac{L(E,1)}{\Omega_E^+}, \tag{23}$$

$$\int_{\boldsymbol{Z}_p^\times} \psi(t)\mu_E = \frac{\tau(\psi)}{\alpha^n} \frac{L(E,\bar{\psi},1)}{\Omega_E^{\psi(-1)}}, \qquad \text{for } \psi : (\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z})^\times \longrightarrow \boldsymbol{C}^\times \text{ primitive.} \tag{24}$$

Define $L_p(E,s)$ to be the *p-adic Mellin transform* of the measure μ_E:

$$L_p(E,s) = \int_{\boldsymbol{Z}_p^\times} \langle t \rangle^{s-1} d\mu_E. \tag{25}$$

This definition should be compared with equation (10). By combining (23) and (25), one obtains directly

$$L_p(E,1) = (1-\alpha^{-1})^2 \frac{L(E,1)}{\Omega_E^+}, \tag{26}$$

which should be viewed as the analogue of equation (8) in the context of elliptic curves. The p-adic L-function $L_p(E,s)$ satisfies the functional equation

$$L_p(E,s) = w_E \langle N \rangle^{1-s} L_p(E, 2-s), \tag{27}$$

where the sign $w_E = \pm 1$ is the same as in (15).

Given a Dirichlet character χ, definition (25) can be generalized slightly in order to define a p-adic L-function $L_p(E,\chi,s)$ associated to E and χ interpolating the special values $L(E,\chi\psi,1)$, with ψ as above.

REMARK 4.1. – An alternate approach to the definition of the Mazur-Swinnerton-Dyer p-adic L-function $L_p(E,s)$ [Kit] consists in the p-adic interpolation of the critical values $L(f_k,j), 1 \leq j \leq k-1$ associated to the Hida family of modular forms $\boldsymbol{f} = (f_k)$ passing through f in weight 2. This yields a two-variable p-adic L-function $L_p(\boldsymbol{f},k,s)$ – called the *Mazur-Kitagawa p-adic L-function* – whose restriction to the line $k=2$ coincides with $L_p(E,s)$. (Cf. also Remark 2.2.)

Assume that the sign w_E of the functional equation (27) is -1, so that $L_p(E,s)$ and $L(E,s)$ vanish to odd order at $s=1$. The following p-adic analogue of the Gross-Zagier formula (18) was established by Perrin-Riou [PR1]. Let $h_p(P)$ denote the cyclotomic p-adic height of the Heegner point $P \in E(\boldsymbol{Q})$. Then

$$L'_p(E,1) = C'_{E,p} \cdot h_p(P), \tag{28}$$

where $C'_{E,p}$ is a non-zero rational constant, equal to the product of the constant C'_E appearing in equation (18) and of an Euler factor at p.

REMARK 4.2. – 1) It is expected that the cyclotomic p-adic height is always non-degenerate, and hence that $h_p(P)$ is non-zero precisely when P has infinite order. Assuming this, one deduces by comparing equations (18) and (28) that $L(E,s)$ has a simple zero at $s=1$ if and only if $L_p(E,s)$ has a simple zero at $s=1$.

2) Similarly to the complex case, equation (28) is deduced from a p-adic analogue of equation (19), involving a product of two Mazur-Swinnerton-Dyer p-adic L-functions. This product is identified with a Rankin p-adic L-function, attached to the convolution of f with a weight one theta-series.

We now turn to the description of the value of $L_p(E,s)$ at the point $s=2$, lying outside the range of classical interpolation for $L_p(E,s)$.

Following [Co-dS] and [Bes2], Coleman's theory of p-adic integration allows to define a p-adic counterpart $\mathrm{reg}_p\{u,v\}(\eta) \in \boldsymbol{C}_p$ of the complex regulator, where $u,v \in \boldsymbol{C}_p(X)$ are modular units, and η is a class in the de Rham cohomology group $H^1_{\mathrm{dR}}(X/\boldsymbol{C}_p)$.

The p-adic analogue of the anti-homomorphic class η_f^{ah} of equation (21) is defined to be the unique class η_f^{ur} in the "unit root subspace" of $H^1_{\mathrm{dR}}(X/\boldsymbol{C}_p)$ satisfying:

1. η_f^{ur} belongs to the f-isotypic part of $H^1_{\mathrm{dR}}(X/\boldsymbol{C}_p)$,
2. $\varphi(\eta_f^{\mathrm{ur}}) = \alpha\eta_f^{\mathrm{ur}}$, where φ denotes the Frobenius operator acting on $H^1_{\mathrm{dR}}(X/\boldsymbol{C}_p)$, and $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p^\times$ is the p-adic unit appearing in equation (23),
3. η_f^{ur} lifts the image of η_f^{ah} in $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ (cf. [BD1] for details).

The following *p-adic Beilinson formula*, proved in [BD1], is the analogue of equation (22) in the current context:

$$L_p(E,2)\cdot L_p(E,\chi,1) = C_{E,\chi,p}\cdot \mathrm{reg}_p\{u_\chi, v_\chi\}(\eta_f^{\mathrm{ur}}). \tag{29}$$

Here $C_{E,\chi,p}$ is a non-zero algebraic constant, which differs from $C_{E,\chi}$ by an Euler factor at p. The modular units u_χ and v_χ, depending on the choice of an even Dirichlet character χ, are the same as those appearing in (22). By a slight generalization of (26), $L_p(E,\chi,1)$ is equal to $L(E,\chi,1)/\Omega_E^+$, up to an non-zero algebraic constant. The functional equation (27) implies that (29) can also be written with $L_p(E,0)$ replacing $L_p(E,2)$. A judicious choice of χ ensures the non-vanishing of $L_p(E,\chi,1)$. In this case, equation (29) yields that the non-vanishing of $L_p(E,2)$ is equivalent to the non-vanishing of the p-adic regulator.

A special case of (29) is obtained by Brunault [Br], as a consequence of *Kato's reciprocity law* (see Remark 4.3). Moreover, prior work of Coleman-de Shalit [Co-dS] focused on the special case of elliptic curves with complex multiplication. The article [BD1] presents an alternate approach to (29) which by-passes Kato's reciprocity law. It is based on the direct evaluation of a Rankin p-adic L-function associated to the convolution of the Hida family $\boldsymbol{f} = (f_k)$ interpolating f with the Eisenstein series $\mathrm{dlog}(v_\chi)$, and on the factorization of this p-adic L-function as a product of two Mazur-Kitagawa p-adic L-functions. The work [BD2] uses [BD1] in order to obtain a new proof of Kato's reciprocity law. It is worth stressing the similarity of this approach with the description of $L_p(\chi,s)$ in terms of values at points outside the range of classical interpolation given in Remark 2.3.

Furthermore, [BD1] describes in a similar vein the values $L_p(E,n)$ at integer points ≥ 2 in terms of the motivic cohomology of the modular curve X. These values were studied previously by Gealy [Ge], by invoking Kato's reciprocity law.

REMARK 4.3. – The work of Kato [Ka], [Colz] relates $L_p(E,s)$ to the structure of the p-primary Selmer group of E over $\boldsymbol{Q}_\infty := \boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty})$, viewed as a module over the Galois group $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}_\infty/\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Z}_p^\times$. Combined with recent work of Skinner-Urban [SU], it establishes the cyclotomic Main Conjecture of Iwasawa theory for the elliptic curve E. Let $V_p(E)$ denote the p-adic Galois representation of E. Kato's approach is based on the study of cohomology classes

$$\kappa_\chi(1) \in H^1(\boldsymbol{Q}_\infty, V_p(E)(1)) \tag{30}$$

arising from étale regulators of modular units attached to characters χ of p-power conductor. The comparison functor between étale and de Rham cohomology relates the restriction at p of the étale regulator to the p-adic regulator [Bes1]. By Tate twisting the classes (30), one obtains a system of classes

$$\kappa_\chi \in H^1(\boldsymbol{Q}_\infty, V_p(E)). \tag{31}$$

Kato's reciprocity law describes $L(E,\chi,1)$ in terms of the singular part of κ_χ at p. In view of the interpolation formulae (24) and (25), this yields a cohomological description of $L_p(E,s)$ – a key step towards the proof of the cyclotomic Main Conjecture for E.

REMARK 4.4. – When χ is the trivial character, the class κ_χ of equation (31) arises from the restriction of a class κ in $H^1(\boldsymbol{Q}, V_p(E))$. Assume that $L(E,1)=0$. Kato's reciprocity law implies that the image κ_p of κ in $H^1(\boldsymbol{Q}_p, V_p(E))$ is crystalline, and hence belongs to the "finite subspace" $H^1_f(\boldsymbol{Q}_p, V_p(E))$. Perrin-Riou [PR2] conjectures that κ_p is non-zero if and only if $L'(E,1)$ is non-zero, and predicts a precise relation between the logarithm of κ_p and the formal group logarithm of a global point in $E(\boldsymbol{Q})$. The goal of [BD3] is to obtain a proof of Perrin-Riou's conjecture, by combining the approach to Kato's Euler system developed in [BD1] and [BD2] with the results of [BDP1] and [DR]. This proof establishes a p-adic relation between Kato's Euler system and the Euler system of Heegner points.

REFERENCES

[Bei] A. A. BEILINSON *Higher regulators of modular curves*, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), 1-34, Contemp. Math., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[BCDT] C. BREUIL - B. CONRAD - F. DIAMOND - R. TAYLOR, *On the modularity of elliptic curves over $\boldsymbol{Q}$: wild 3-adic exercises*, J. Amer. Math. Soc., **14**, no. 4 (2001), 843-939.

[BD1] M. BERTOLINI - H. DARMON, *Kato's Euler system and rational points on elliptic curves I: A p-adic Beilinson formula*, Israel Journal of Math., to appear.

[BD2] M. BERTOLINI - H. DARMON, *Kato's Euler system and rational points on elliptic curves II: The explicit reciprocity law*, in preparation.

[BD3] M. BERTOLINI - H. DARMON, *Kato's Euler system and rational points on elliptic curves III: The conjecture of Perrin-Riou*, in preparation.

[BDP1] M. BERTOLINI - H. DARMON - K. PRASANNA, *Generalised Heegner cycles and p-adic Rankin L-series*, Duke Math. J., to appear.

[Ber] M. BERTOLINI, *Report on the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, Milan J. Math., **78**, no. 1 (2010), 153-178.

[Bes1] A. BESSER, *Syntomic regulators and p-adic integration. I. Rigid syntomic regulators*, Proceedings of the Conference on p-adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations (Jerusalem, 1998) Israel J. Math., **120**, part B (2000), 291-334.

[Bes2] A. BESSER, *Syntomic regulators and p-adic integration. II. K_2 of curves*, Proceedings of the Conference on p-adic Aspects of the Theory of Automorphic Representations (Jerusalem, 1998). Israel J. Math., **120**, part B (2000), 335-359.

[Bl] S. J. BLOCH, *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*, CRM Monograph Series, 11. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. x+97 pp.

[Br] F. BRUNAULT, *Régulateurs p-adiques explicites pour le K_2 des courbes elliptiques*, Actes de la Conférence "Fonctions L et Arithmétique", 29-57, Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., Lab. Math. Besançon, Besançon, 2010.

[Co] R. F. COLEMAN, *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math., **69**, no. 2 (1982), 171-208.

[Co-dS] R. F. COLEMAN - E. DE SHALIT, *p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions*, Inventiones Math., **93** (1988), 239-266.

[Colz] P. COLMEZ, *La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique*, (French) Astérisque No. 294 (2004), ix, 251-319.

[De] P. DELIGNE, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 313-346, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[DR] H. DARMON - V. ROTGER, *Diagonal cycles and Euler systems I: A p-adic Gross-Zagier formula*, submitted.

[Ge] M. GEALY, *On the Tamagawa number conjecture for motives attached to modular forms*, PhD Thesis, California Institute of Technology, 2006.

[GZ] B. H. GROSS - D. B. ZAGIER, *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math., **84**, no. 2 (1986), 225-320.

[Ka] K. KATO, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III*, Astérisque No. 295 (2004), ix, 117-290.

[Ki] M. KIM, *Classical motives and motivic L-functions*, Autour des motifs-École d'été Franco-Asiatique de Géométrie Algébrique et de Théorie des Nombres/ Asian-French Summer School on Algebraic Geometry and Number Theory. Volume I, 1-25, Panor. Synthèses, 29, Soc. Math. France, Paris, 2009.

[Kit] K. KITAGAWA, *On standard p-adic L-functions of families of elliptic cusp forms*, in p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991), 81-110, Contemp. Math., **165**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Ko] V. A. KOLYVAGIN, *Euler systems*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 435-483, Progr. Math., **87**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[La] S. LANG, *Cyclotomic fields I and II*. Combined second edition. With an appendix by Karl Rubin. Graduate Texts in Mathematics, **121**. Springer-Verlag, New York, 1990, xviii+433.

[Man] JU. I. MANIN, *Parabolic points and zeta functions of modular curves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **36** (1972), 19-66.

[MSD] B. MAZUR - P. SWINNERTON-DYER, *Arithmetic of Weil curves*, Invent. Math., **25** (1974), 1-61.

[MTT] B. MAZUR - J. TATE - J. TEITELBAUM, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math., **84**, no. 1 (1986), 1-48.

[PR1] B. PERRIN-RIOU, *Points de Heegner et dérivées de fonctions L p-adiques*, Invent. Math., **89**, no. 3 (1987), 455-510.

[PR2] B. PERRIN-RIOU, *Fonctions L p-adiques d'une courbe elliptique et points rationnels*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **43**, no. 4 (1993), 945-995.

[Ru] K. C. RUBIN, *The main conjecture*, Appendix to [La].

[Sil] J. H. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer, Dordrecht, 2009. xx+513 pp.

[So] C. SOULÉ, *Éléments cyclotomiques en K-théorie*, Journées arithmétiques de Besançon, Astérisque No. 147-148 (1987), 225-257.

[SU] C. Skinner - E. Urban, *The Iwasawa Main Conjecture for* GL_2, preprint.

[TW] R. Taylor - A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (2), **141**, no. 3 (1995), 553-572.

[Wa1] L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **83**. Springer-Verlag, New York, 1997. xiv+487 pp.

[Wa2] L. C. Washington, *Euler factors for p-adic L-functions*, Mathematika, **25**, no. 1 (1978), 68-75.

[Wi1] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2), **141**, no. 3 (1995), 443-551.

[Wi2] A. Wiles, *The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, on the Clay Mathematics Institute web site: http://www.claymath.org/millennium/

Università degli Studi di Milano, Dip.to di Matematica,
Via Saldini 50, 20133 Milano
E-mail: massimo.bertolini@unimi.it

Received December 24, 2011 and in revised form March 26, 2012

Daniele Boffi: Metodo *Immersed Boundary* per l'interazione fluido-struttura: formulazione matematica e approssimazione numerica

Daniele Boffi
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia
email: daniele.boffi@unipv.it

Sunto

Il metodo *Immersed Boundary* (IB) è stato introdotto da Peskin negli anni '70 per la modellizzazione e l'approssimazione numerica di problemi relativi al flusso sanguigno nel muscolo cardiaco. Nello studio di problemi di interazione fluido-struttura, il modello matematico generalmente prevede la risoluzione di equazioni distinte nel fluido e nel solido in movimento, accoppiate mediante opportune condizioni di raccordo. Uno degli aspetti più delicati per l'approssimazione numerica riguarda l'evoluzione della griglia computazionale che deve adattarsi allo spostamento dei domìni coinvolti.

La peculiarità del metodo IB consiste nel fatto che la presenza del solido, immerso nel fluido, si manifesta tramite un termine di carico aggiuntivo nelle equazioni di Navier–Stokes descriventi l'evoluzione del fluido. Ciò fa sì che la risoluzione del fluido avvenga tramite una mesh costante nel tempo; il termine noto relativo al solido viene calcolato utilizzando una descrizione del solido nella sua configurazione di riferimento.

Il metodo IB, nella sua versione originale, fa uso di una discretizzazione spaziale alle differenze finite. Recentemente, abbiamo introdotto una variante del metodo che utilizza schemi ad elementi finiti in spazio. Dal momento che il termine sorgente derivante dal corpo immerso contiene una funzione delta di Dirac concentrata sul dominio della struttura, il metodo delle differenze finite comporta una discretizzazione della massa che introduce una diffusione artificiale. Il metodo degli elementi finiti, grazie all'utilizzo di un'opportuna formulazione variazionale, permette il trattamento della delta di Dirac in maniera naturale.

Si mostrano risultati numerici in due e tre dimensioni che confermano le buone potenzialità del metodo e risultati teorici di stabilità discreta. Si discute inoltre la scelta degli spazi di elementi finiti per l'approssimazione delle equazioni di Navier–Stokes che devono assicurare buone proprietà di conservazione della massa. Si mostrano infine promettenti confronti e paragoni con il metodo cosiddetto del *fictitious domain*.

Questa ricerca, svolta in collaborazione con Lucia Gastaldi, è basata anche sul contributo di Luca Heltai, Nicola Cavallini e Francesca Gardini.

Maggiori informazioni e riferimenti bibliografici sono disponibili in rete all'indirizzo `http://www-dimat.unipv.it/boffi/IBM`.

Intervento: Daniele Boffi,
The Immersed Boundary Method for Fluid-Structure Interactions:
Mathematical Formulation and Numerical Approximation,
***Bollettino U. M. I. (9)* V (2012), 711–724**

Bollettino U. M. I.
(9) **V** (2012), 711-724

The Immersed Boundary Method for Fluid-Structure Interactions: Mathematical Formulation and Numerical Approximation (*)

DANIELE BOFFI

Abstract. – *The Immersed Boundary Method (IBM) has been introduced by Peskin in the 70's in order to model and approximate fluid-structure interaction problems related to the blood flow in the heart. The original scheme makes use of finite differences for the discretization of the Navier-Stokes equations. Recently, a finite element formulation has been introduced which has the advantage of handling the presence of the solid (modeled via a Dirac delta function) in a more natural way. In this paper we review the finite element formulation of the IBM focusing, in particular, on the choice of the finite element spaces in order to guarantee a suitable mass conservation. Moreover, we present some links with the* fictitious domain *method.*

1. – Introduction

In the 70's Peskin introduced the Immersed Boundary Method (IBM) for the modeling and the approximation of fluid-structure interactions arising from biological problems [33, 34].

When studying fluid-structure interactions, a mathematical model is usually based on distinct equations in the fluid and in the moving solid, which are related through appropriate transmission conditions. One of the most intriguing aspects of any numerical implementation concerns the movement of the computational grids which have to adapt to the evolution of the system.

In view of their numerical approximations, basically all models for the description of fluid-structure interactions can be classified in two families: people refer to *partitioned* schemes when two different solvers are used for the discretization of the fluid and the solid; on the other hand, when fluid and solid are solved simultaneously with a unique solver, a scheme is termed *monolithic*. Moreover, the interaction between the fluid and the structure can be modeled

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 14 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana

using *weakly* or *strongly* coupled approaches. Weakly coupled approaches always lead to partitioned schemes, while strongly coupled approaches can be solved with both partitioned and monolithic strategies. We refer the interested reader to the wide literature on this subject and, in particular to [32, 31, 30, 20] and to the references therein.

Another important issue is related to the effects of the fluid as a so-called *added mass* to the structure interface. In particular, if the solid density is larger than the fluid density, then the added mass effect is negligible and partitioned schemes usually converge in few iterations. On the other hand, when the fluid and solid densities are comparable, then the method may fail to converge. In particular, a simplified one dimensional model for an Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) scheme has been proved to be unconditionally unstable in this context [17]. In order to circumvent these difficulties, several strategies have been proposed, in particular based on implicit algorithms which are solved iteratively via domain decomposition or algebraic splitting strategies [29, 19, 1, 3, 2]. Other techniques involve discretizations based on operator splitting strategies [27].

The peculiarity of the IBM consists in the fact that the presence of the solid, immersed in the fluid, is modeled via an additional source term to the Navier-Stokes equations describing the fluid evolution. This allows for a fluid resolution on a fixed mesh; moreover, another important feature is that the source term referring to the immersed body is defined by making use of a description of the solid in its reference configuration.

The original version of the IBM makes use of finite differences for the resolution of the Navier-Stokes equations [33, 35, 34]. Since the source term arising from the presence of the solid contains a Dirac delta function concentrated along the solid domain, the finite difference scheme requires a suitable treatment of the delta function, which is one of the major sources of troubles in the IBM. Indeed, a too strong regularization of the delta function gives rise to a severe dissipation.

On the other hand, the finite element method makes use of a variational formulation which allows for a natural treatment of the Dirac delta function. A finite element version of the IBM has been successfully introduced in a series of papers, where several aspects have been considered, ranging from the modeling, to the numerical stability, and to mass conservation of the presented method [11, 13, 12, 14, 28, 8, 7]. The aim of the present paper is twofold: on one side, we review the existing results in a unified framework, with a particular emphasis on the mass conservation property which, to the author's opinion, is one of the most attractive features of the finite element IBM in comparison with the original finite difference version; on the other side, we present a link between the IBM and the fictitious domain approach (see, for instance, [24, 22, 23, 21]) which proves promising for future investigations.

2. – The immersed boundary method

In this section we describe the IBM following the results in [14, 8]. In particular, we shall present in a unified settings the situations when the fluid is two- or three-dimensional and the solid is of codimension zero or one with respect to the fluid.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be a domain in two or three space dimensions ($d = 2, 3$) and let $\boldsymbol{x}$ denote the Eulerian variable in Ω. In general, the domain Ω represents the space occupied by the fluid and the solid. The fluid velocity and pressure are denoted as usual by $\boldsymbol{u}$ and p, and are functions of $\boldsymbol{x}$ and of the time t.

We denote the solid domain at the time t by $\mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^m$ ($m = d, d-1$) and the reference solid domain by $\mathcal{B}$. The mapping representing the solid position is denoted by $\boldsymbol{X}$, more precisely

$$\boldsymbol{X}(\cdot, t) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_t$$

The Lagrangian variable on $\mathcal{B}$ is denoted by s and the deformation gradient is

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial s}.$$

A fundamental relationship between $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{X}$ is given by the physical condition that the solid moves at the same velocity as the fluid, that is

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(s, t), \quad \text{with } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(s, t).$$

When there are no external forces, the conservation of momenta states

$$\rho \dot{\boldsymbol{u}} = \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{in } \Omega,$$

where ρ is the density and $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor, which can be defined as follows:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_f & \text{in } \Omega \setminus \mathcal{B}_t \\ \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}_s & \text{in } \mathcal{B}_t, \end{cases}$$

taking into account the extra stress $\boldsymbol{\sigma}_s$ originated by the elastic component of the stresses (we are assuming the material to be viscoelastic). Moreover, we are considering an incompressible fluid, so that in $\Omega \setminus \mathcal{B}_t$ we have

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbb{I} + \mu(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T).$$

Since in general the fluid and solid densities can be different, we consider the following definition:

$$\rho = \begin{cases} \rho_f & \text{in } \Omega \setminus \mathcal{B}_t \\ \rho_s & \text{in } \mathcal{B}_t. \end{cases}$$

In order to write the variational formulation for our model, we need some additional notation.

Let the excess Lagrangian mass density be defined as

$$\delta\rho = \begin{cases} \rho_s - \rho_f & \text{if } m = d \text{ (codimension zero)} \\ t_s(\rho_s - \rho_f) & \text{if } m = d-1 \text{ (codimension one)}, \end{cases}$$

where t_s is the thickness of the structure. Actually, in the codimension-one case, mathematically the structure has no thickness; the rescaled density defined above takes into account the (small) physical thickness.

We shall make use, moreover, of the Piola–Kirchhoff tensor $\mathbb{P}$ which takes into account the change of variables

$$\mathbb{P}(s,t) = |\mathbb{F}(s,t)|\boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{X}(s,t),t)\mathbb{F}^{-T}(s,t)$$

so that

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma}_s \boldsymbol{n}\, da = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbb{P}\boldsymbol{N}\, dA \qquad \forall \mathcal{P}_t.$$

The rescaled Piola–Kirchhoff tensor is

$$\tilde{\mathbb{P}} = \begin{cases} \mathbb{P} & \text{if } m = d \text{ (codimension zero)} \\ t_s\mathbb{P} & \text{if } m = d-1 \text{ (codimension one)}. \end{cases}$$

With these definitions, the variational formulation for the IBM reads as follows: given $\boldsymbol{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^d$ and $\boldsymbol{X}_0 \in W^{1,\infty}(\mathcal{B})$ such that $\boldsymbol{X}_0(\mathcal{B}) \subset \Omega$, find $\boldsymbol{u}(t) \in H_0^1(\Omega)^d$, $p(t) \in L_0^2(\Omega)$, and $\boldsymbol{X}(t) \in W^{1,\infty}(\mathcal{B})$ for all t such that

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho_f \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) & \\ \qquad -(\operatorname{div}\boldsymbol{v}, p(t)) = \langle \boldsymbol{d}(t),\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle & \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d \\ (\operatorname{div}\boldsymbol{u}(t), q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ \langle \boldsymbol{d}(t),\boldsymbol{v}\rangle = -\delta\rho \displaystyle\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial t^2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(s,t))\, ds & \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d \\ \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle = -\displaystyle\int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{F}(s,t)) : \nabla_s \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(s,t))\, ds & \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(s,t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(s,t),t) & \forall s \in \mathcal{B} \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{X}(s,0) = \boldsymbol{X}_0(s) & \forall s \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

In the previous equation we used the short notation $\nabla_{sym}\boldsymbol{u} = \nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T$ and

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \mu(\nabla_{sym}\boldsymbol{u}, \nabla_{sym}\boldsymbol{v})$$
$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \frac{\rho_f}{2}\left((\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})\right).$$

We refer the interested reader to [8] where it has been proved that (1) makes sense; in particular the source terms $\boldsymbol{d}$ and $\boldsymbol{f}$ are distributions belonging to H^{-1}.

REMARK 1. – Equation (1) shows one of the most important features of the finite element IBM. The source term $\boldsymbol{f}$ representing the effect of the solid to the fluid can be written in a natural way in the framework of the variational formulation. In the original formulation, this term consisted of a Dirac delta function which needed to be approximated; in many situations this approximation was the cause of artificial diffusion.

3. – Numerical approximation

3.1 – *Space semi-discretization*

Let us consider discrete subspaces $V_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ and $Q_h \subset L_0^2$ which satisfy the inf-sup condition [16]. The reference configuration $\mathcal{B}$ of the structure is subdivided into segments, triangles, or tetrahedrons. Let's denote by S_h the discrete space obtained by a piecewise linear approximation of the structure according to this subdivision. The set of edges (or faces) of the mesh of the body is denoted by $\mathcal{E}_h$ and $\boldsymbol{s}_i$ denotes a vertex ($i = 1,\dots,M$). We denote by $[\![\cdot]\!]$ the jump, and in particular we shall make use of the following term

$$[\![\tilde{\mathbb{P}}_h]\!] = \tilde{\mathbb{P}}_h^+\boldsymbol{N}^+ + \tilde{\mathbb{P}}_h^-\boldsymbol{N}^-,$$

where $\tilde{\mathbb{P}}_h = \tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{F}_h)$ is piecewise constant, since $\mathbb{F}_h = \nabla_s\boldsymbol{X}_h$ is the gradient of a linear function. Then, the space semi-discretization of problem (1) reads: given $\boldsymbol{u}_{h0} \in V_h$ and $\boldsymbol{X}_{h0} \in S_h$, find $\boldsymbol{u}_h(t) \in V_h$, $p_h(t) \in Q_h$, and $\boldsymbol{X}_h(t) \in S_h$ for all t such that

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho_f \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}_h(t),\boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}_h(t),\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_h(t),\boldsymbol{u}_h(t),\boldsymbol{v}) & \\ \qquad -(\mathrm{div}\boldsymbol{v}, p_h(t)) = \langle \boldsymbol{d}_h(t),\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{f}_h(t),\boldsymbol{v}\rangle & \forall \boldsymbol{v} \in V_h \\ (\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_h(t), q) = 0 & \forall q \in Q_h \\ \langle \boldsymbol{d}_h(t),\boldsymbol{v}\rangle = -\delta\rho \displaystyle\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial^2\boldsymbol{X}_h}{\partial t^2}(t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}_h(t))\,ds & \forall \boldsymbol{v} \in V_h \\ \langle \boldsymbol{f}_h(t),\boldsymbol{v}\rangle = -\displaystyle\sum_{e\in\mathcal{E}_h}\int_e [\![\tilde{\mathbb{P}}_h]\!](t)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}_h(t))\,dA & \forall \boldsymbol{v} \in V_h \\ \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_{h0}(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{X}_{hi}}{\partial t}(t) = \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{X}_{hi}(t),t) & \forall i = 1,\dots,M \\ \boldsymbol{X}_{hi}(0) = \boldsymbol{X}_{h0}(\boldsymbol{s}_i) & \forall i = 1,\dots,M. \end{cases}$$

3.2 – *Full discretization*

In order to write a full discrete scheme, we need to approximate the time derivative in the Navier–Stokes equation and to discretize the second time derivative in the definition of the source term $\boldsymbol{d}_h$ arising from the excess Lagrangian mass density. For the sake of the stability properties (better CFL condition), an implicit scheme would be desirable (see, in this context, [13]). We are working in the direction of using a multigrid strategy (in particular, we are considering a full approximation scheme, see [15]) in order to make it possible the solution of our problem with a fully implicit approach [9]. Here we present a semi-implicit approach which has been successfully applied in [8], where a stability analysis has been performed.

Let us denote by Δt the time step and let us mark with the superscript n functions evaluated at time $t_n = n\Delta t$. The solution is performed in several steps. In the first one, the source term $\boldsymbol{f}$ is evaluated as follows:

$$\langle \boldsymbol{f}_h^{n+1}, \boldsymbol{v} \rangle = -\sum_{e \in \mathcal{E}_h} [\![\tilde{\mathbb{P}}_h]\!]^n \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}_h^n(s,t))\, dA \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V_h.$$

Then the Navier-Stokes equations are solved: find $\boldsymbol{u}_h^{n+1} \in V_h$ and $p_h^{n+1} \in Q_h$ such that

$$\begin{aligned}
&\rho_f \left(\frac{\boldsymbol{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}_h^n}{\Delta t}, \boldsymbol{v} \right) + b(\boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{v}) - (\mathrm{div}\boldsymbol{v}, p_h^{n+1}) = \\
&\quad -\delta\rho \int_{\mathcal{B}} \frac{\boldsymbol{u}_h^{n+1}(\boldsymbol{X}_h^n(s)) - \boldsymbol{u}_h^n(\boldsymbol{X}_h^{n-1}(s))}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}_h^n(s))\, ds + \langle \boldsymbol{f}_h^{n+1}, \boldsymbol{v} \rangle \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V_h \\
&(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_h^{n+1}, q) = 0 \qquad \forall q \in Q_h,
\end{aligned}$$

where the excess Lagrangian mass density has been approximated by taking into account the equation linking the structure and the fluid velocity, so that the second derivative of $\boldsymbol{X}$ has become the first derivative of $\boldsymbol{u}$.

Finally, the structure is moved according to the velocity of the fluid:

$$\frac{\boldsymbol{X}_{hi}^{n+1} - \boldsymbol{X}_{hi}^n}{\Delta t} = \boldsymbol{u}_h^{n+1}(\boldsymbol{X}_{hi}^n) \quad \forall i = 1, \ldots, M.$$

For the reader's convenience, we report in Table 1 the results of the stability analysis performed in [8], where it can be appreciated that for any configuration there exists a stable choice of Δt. This results should be compared to [17], where it is shown that explicit schemes cannot be stable in the framework of ALE discretizations.

TABLE 1. – CFL condition: h_x is the fluid meshsize and h_s is the solid one

space dim.	solid dim.	CFL condition
2	1	$L^n \Delta t \leq C h_x h_s$
2	2	$L^n \Delta t \leq C h_x$
3	2	$L^n \Delta t \leq C h_x^2$
3	3	$L^n \Delta t \leq C h_x^2 / h_s$

TABLE 2. – Area loss (%): scheme $Q_2 - P_1$, $\Delta t = 0.01$, $T = 1$.

M	16	32	64	128	256	512	1024
$N = 4$	$\boxed{36.468}$	35.944	37.166	37.988	38.413	38.635	38.753
$N = 8$	15.951	$\boxed{14.090}$	13.057	12.809	12.809	12.843	12.867
$N = 16$	20.182	9.015	$\boxed{7.255}$	7.011	7.105	7.191	7.246
$N = 32$	45.293	9.763	2.788	$\boxed{2.308}$	2.303	2.325	2.351

4. – Conservation of mass

There is a very easy test to check the mass conservation of our scheme. Let us consider the domain $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ and let $\boldsymbol{X}_0$ be a circle of radius R centered at $(1/2, 1/2)$:

$$\boldsymbol{X}_0(s) = \begin{pmatrix} R\cos(s/R) + 0.5 \\ R\sin(s/R) + 0.5 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 2\pi R]$$

Due to the elastic properties of the structure, the circle exerts a normal force pointing towards the center and, since the fluid is incompressible, the fluid does not move and the effect of the force is a jump in the pressure between the interior (high pressure) and the exterior (low pressure). In particular, the area of the domain surrounded by $\boldsymbol{X}$ remains constant.

In a particular configuration, Table 2 shows the area loss with respect to the fluid mesh (N refers to the number of subdivisions of a side of Ω when a uniform mesh of squares is used) and the number M of points used in order to approximate the elastic structure

It is apparent that, when the fluid mesh is refined, more and more points are required in the structure in order to preserve the same mass (see, for instance the first column, where, as N increases, the area loss gets worse with the same number of points $N = 16$). On the other hand, after a threshold, there is no advantage in adding points to the structure if the fluid mesh is not refined: the values corresponding to this threshold are marked with a frame box in the table.

It roughly corresponds to the situation when two solid points are contained in each fluid element.

When such threshold is reached, the quality of mass conservation is driven by the scheme used for the fluid resolution. More precisely, we need to check how the divergence free condition is preserved at discrete level. This is a well known issue which has been the object of a wide literature. In particular, the divergence free condition is imposed at discrete level in a weak sense:

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\boldsymbol{u}_h q_h \, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall q_h \in Q_h. \tag{3}$$

It follows that if the discrete spaces satisfy the inclusion

$$\mathrm{div} V_h \subset Q_h \tag{4}$$

then the divergence free condition is imposed *exactly*, that is $\mathrm{div}\boldsymbol{u}_h = 0$. Unfortunately, there are few choices of spaces V_h and Q_h that satisfy at the same time the inf-sup condition and the inclusion (4); moreover, the most popular of such choices, namely the $P_{k+1} - P_k$ scheme (see [38]) is subjected to severe limitations on the admissible triangulations.

In general a *discontinuous* pressure approximation enjoys more local mass conservation properties: if Q_h contains piecewise constant functions, in particular, equation (3) implies that $\mathrm{div}\boldsymbol{u}_h$ has zero mean value elementwise. In [7] we discussed how to modify some *continuous* pressure schemes in order to enjoy the same property.

Let us consider the Hood-Taylor (HT) family in two and three dimensions [39], and the Bercovier–Pironneau (BP) element in two dimensions [4]. The lowest order HT element in 2D and the BP element are sketched in Figure 1.

Since these elements are based on continuous pressure spaces, in general they do not achieve local conservation of mass. An interesting way of improving the mass conservation for such elements consists in adding an internal degree of

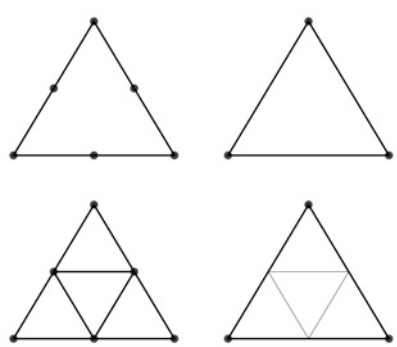


Fig. 1. – Lowest order HT (top) and BP (bottom).

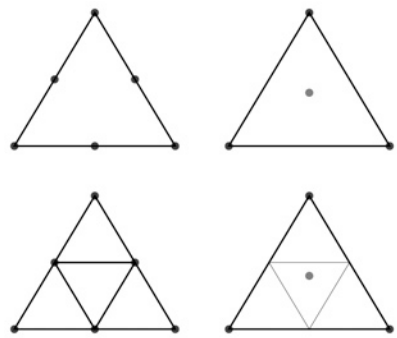


Fig. 2. – Augmented elements: lowest order HT (top) and BP (bottom).

freedom in each element to the pressures. The modified scheme, for a sample of elements, is presented in Figure 2.

Given a triangulation $\mathcal{T}_h$ of the domain Ω, the formal definition of the augmented spaces is given as follows. The *augmented HT* family is defined in two dimensions ($k \geq 1$) as

$$V_h = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2 : \boldsymbol{v}|_K \in P_{k+1}(K)^2 \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q = q_k + q_0,\ q_k \in C(\Omega),\ q_k|_K \in P_k(K),\ q_0|_K \in P_0 \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

and in three dimensions ($k \geq 2$) as

$$V_h = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3 : \boldsymbol{v}|_K \in P_{k+1}(K)^3 \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q = q_k + q_0,\ q_k \in C(\Omega),\ q_k|_K \in P_k(K),\ q_0|_K \in P_0 \ \forall K \in \mathcal{T}_h\};$$

the *augmented BP* element is defined in two dimensions as

$$V_h = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2 : \boldsymbol{v}|_K \in P_1(K)^2 \ \forall K \in \mathcal{T}_{h/2}\}$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q = q_1 + q_0,\ q_1 \in C(\Omega),\ q_1|_K \in P_1(K),\ q_0|_K \in P_0 \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

The idea of adding piecewise constant pressure in order to enhance the mass conservation is not new; we refer in particular to [26, 25, 41, 18, 40, 36, 37]. In [7] we presented a unified proof of stability for a wide class of elements which is based on the stability analysis of [5, 6].

We refer to [7] for several numerical experiments in which the significant improvement of the augmented spaces over the original ones can be appreciated. Here we report in Figure 3 the improvement in the area loss when applied to the model problem described at the beginning of this section.

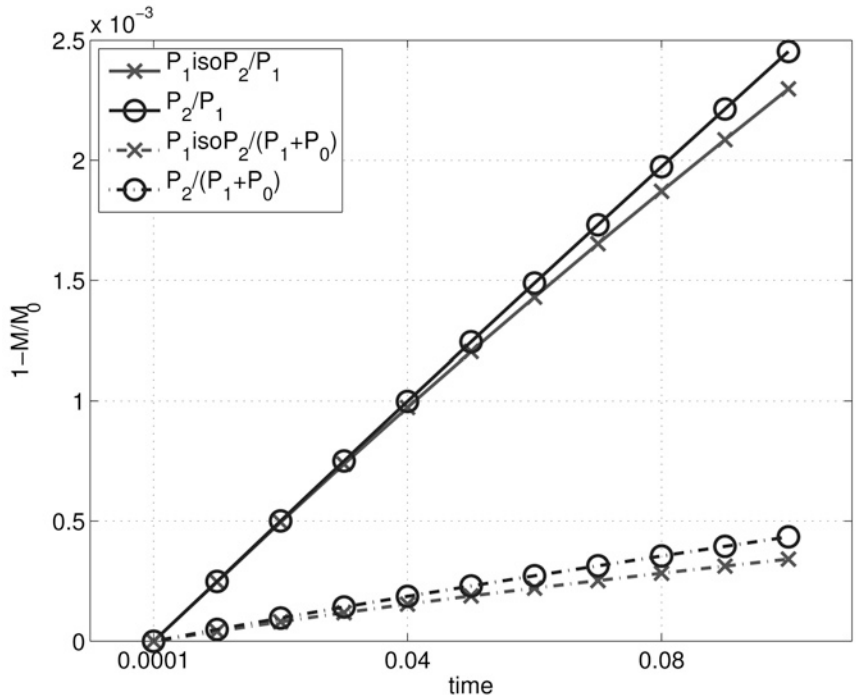


Fig. 3. – Area loss comparison between standard elements and augmented ones.

5. – Immersed boundary method and fictitious domain

The topic presented in this section represents some new ideas which look promising for the analysis and the implementation of a suitable modification of the method presented so far.

The motivation for the present study comes from the analogies that the IBM shares, in a sense to be made more precise, with the fictitious domain approach (see, for instance, [24, 22]). In particular, we shall introduce a formulation of the IBM which has the same structure as the so called fictitious domain method with *distributed Lagrangian multiplier* (see [23, 21]).

We start with a slight modification of the problem presented in equation (1). We observe that the equation that drives the movement of the structure can be written in a variational form in the following way:

$$\left\langle \mu, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(\cdot,t),t) - \frac{\partial \boldsymbol{X}(\cdot,t)}{\partial t} \right\rangle = 0 \quad \forall \mu \in (H^1(\mathcal{B})^d)^*.$$

Hence, it turns out that our problem can be restated as follows: find $\boldsymbol{u}(t) \in H_0^1(\Omega)^d$, $p(t) \in L_0^2(\Omega)$, $\boldsymbol{X}(t) \in H^1(\mathcal{B})^d$, and $\lambda \in \Lambda = (H^1(\mathcal{B})^d)^*$ such that

$$
(5) \qquad \begin{cases}
\rho \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + a(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) - (\operatorname{div} \boldsymbol{v}, p(t)) & \\
\quad = -\delta\rho \displaystyle\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial t^2} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(s,t))\, ds - \langle \lambda, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}(\cdot,t)) \rangle & \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d \\
(\operatorname{div} \boldsymbol{u}(t), q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \\
\displaystyle\int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{F}(s,t)) : \nabla_s \boldsymbol{v}_s\, ds - \langle \lambda, \boldsymbol{v}_s \rangle = 0 & \forall \boldsymbol{v}_s \in H^1(\mathcal{B})^d \\
\left\langle \mu, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(\cdot,t),t) - \dfrac{\partial \boldsymbol{X}(\cdot,t)}{\partial t} \right\rangle = 0 & \forall \mu \in \Lambda \\
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\
\boldsymbol{X}(s,0) = \boldsymbol{X}_0(s) & \forall s \in \mathcal{B}.
\end{cases}
$$

The analogies between (5) and the fictitious domain approach with distributed Lagrangian multiplier can be appreciated with the following example which will be deeper analyzed in [10]. Let us consider a simple one dimensional transmission problem: consider a real interval $\Omega = (a, b)$ (which represents the union of the fluid and solid domain) and a subinterval $\Omega_s = (c, d)$ (representing the solid), with $a < c < d < b$. Let ν be a piecewise smooth function (representing a viscosity) which can only jump across the interfaces c and d:

$$
\nu = \begin{cases} \nu_f & \text{in } \Omega_f = \Omega \setminus \Omega_s \\ \nu_s & \text{in } \Omega_s. \end{cases}
$$

We are looking for u such that

$$
\begin{cases} -\nu u'' = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

In the framework of the fictitious domain approach with distributed Lagrangian multiplier, our problem can be restated as follows: find $U \in V = H_0^1(\Omega)$, $U_s \in V_s = H^1(\Omega_s)$, and $\lambda \in \Lambda = (H^1(\Omega_s))^*$ such that

$$
(6) \qquad \begin{cases}
\displaystyle\int_{\Omega} \tilde{\nu} U' v'\, dx + \langle \lambda, v|_{\Omega_s} \rangle = \int_{\Omega} F v\, dx & \forall v \in V \\
\displaystyle\int_{\Omega_s} (\nu_s - \tilde{\nu}) U_s' v_s'\, dx - \langle \lambda, v_s \rangle = \int_{\Omega_s} (f_s - F) v_s\, dx & \forall v_s \in V_s \\
\langle \mu, U|_{\Omega_s} - U_s \rangle = 0 & \forall \mu \in \Lambda,
\end{cases}
$$

where F and $\tilde{\nu}$, restricted to Ω_s coincide with f and ν_s, respectively.

In [10] we show that problem (6) is uniquely solvable and is equivalent in a suitable sense to the original transmission problem. It will be also shown how to approximate problem (6) with appropriate finite elements on a mesh which does not fit with the interface. Hopefully, this will be a good starting point in order to test and analyze the finite element approximation of the modified IBM (5).

REFERENCES

[1] S. Badia - F. Nobile - C. Vergara, *Fluid-structure partitioned procedures based on Robin transmission conditions*, J. Comput. Phys., **227** (14) (2008), 7027-7051.

[2] S. Badia - A. Quaini - A. Quarteroni, *Modular vs. non-modular preconditioners for fluid-structure systems with large added-mass effect*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **197** (49-50) (2008), 4216-4232.

[3] S. Badia - A. Quaini - A. Quarteroni, *Splitting methods based on algebraic factorization for fluid-structure interaction*, SIAM J. Sci. Comput., **30** (4) (2008), 1778-1805.

[4] M. Bercovier - O. Pironneau, *Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in the primitive variables*, Numer. Math., **33** (2) (1979), 211-224.

[5] D. Boffi, *Stability of higher order triangular Hood-Taylor methods for the stationary Stokes equations*, Math. Models Methods Appl. Sci., **4** (2) (1994), 223-235.

[6] D. Boffi, *Three-dimensional finite element methods for the Stokes problem*, SIAM J. Numer. Anal., **34** (2) (1997), 664-670.

[7] D. Boffi - N. Cavallini - F. Gardini - L. Gastaldi, *Local mass conservation of Stokes finite elements*, To appear in J. Sci. Comput. (2011).

[8] D. Boffi - N. Cavallini - L. Gastaldi, *Finite element approach to immersed boundary method with different fluid and solid densities*, To appear in Math. Models Methods Appl. Sci. (2011).

[9] D. Boffi - N. Cavallini - L. Gastaldi - L. T. Zikatanov, In preparation.

[10] D. Boffi - L. Gastaldi, In preparation.

[11] D. Boffi - L. Gastaldi, *A finite element approach for the immersed boundary method*, Comput. & Structures, **81** (8-11) (2003), 491-501. In honor of Klaus-Jürgen Bathe.

[12] D. Boffi - L. Gastaldi - L. Heltai, *Numerical stability of the finite element immersed boundary method*, Math. Models Methods Appl. Sci., **17** (10) (2007), 1479-1505.

[13] D. Boffi - L. Gastaldi - L. Heltai, *On the CFL condition for the finite element immersed boundary method*, Comput. 85 (11-14) (2007), 775-783.

[14] D. Boffi - L. Gastaldi - L. Heltai - Charles S. Peskin, *On the hyper-elastic formulation of the immersed boundary method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **197** (25-28) (2008), 2210-2231.

[15] A. Brandt - E. O. Livne, *Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics*, volume 67 of Classics in applied mathematics, SIAM, Philadelphia, 2011.

[16] F. Brezzi - M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[17] P. Causin - J. F. Gerbeau - F. Nobile, *Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **194**, (42-44) (2005), 4506-4527.

[18] D. Chapelle - K.-J. Bathe, *The inf-sup test*, Comput. & Structures, **47** (4-5) (1993), 537-545.

[19] S. Deparis - M. A. Fernández - L. Formaggia, *Acceleration of a fixed point algorithm for fluid-structure interaction using transpiration conditions*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., **37** (4) (2003), 601-616.

[20] L. Formaggia - A. Quarteroni - A. Veneziani, editors, *Cardiovascular mathematics*, volume 1, of MS&A. Modeling, Simulation and Applications, Springer-Verlag Italia, Milan, 2009. Modeling and simulation of the circulatory system.

[21] V. Girault - R. Glowinski - T. W. Pan, *A fictitious-domain method with distributed multiplier for the Stokes problem*, In Applied nonlinear analysis, pages 159-174. Kluwer/Plenum, New York, 1999.

[22] R. Glowinski - T.-W. Pan - J. Périaux, *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **111** (3-4) (1994), 283-303.

[23] R. Glowinski - T. W. Pan - J. Périaux, *Distributed Lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **151** (1-2) (1998), 181-194. Symposium on Advances in Computational Mechanics, Vol. 3 (Austin, TX, 1997).

[24] R. Glowinski - J. Périaux - T.-W. Pan, *Fictitious domain method for the Dirichlet problem and its generalization to some flow problems*, In Finite elements in fluids, Part I, II (Barcelona, 1993), pages 347-368, Centro Internac. Métodos Numér. Ing., (Barcelona,1993).

[25] P. M. Gresho - R. L. Lee - S. T. Chan - J. M. Leone, *A new finite element for Boussinesq fluids*. In Pro. Third Int. Conf. on Finite Elements in Flow Problems, pages 204-215. Wiley, New York, 1980.

[26] D. F. Griffiths, *The effect of pressure approximation on finite element calculations of compressible flows*. In Numerical Methods for Fluid Dynamics, pages 359-374. Academic Press, Morton, K. W. and Baines, M. J. edition, 1982.

[27] G. Guidoboni - R. Glowinski - N. Cavallini - S. Canic, *Stable loosely-coupled-type algorithm for fluid-structure interaction in blood flow*, J. Comput. Phys., **228** (18) (2009), 6916-6937.

[28] L. Heltai, *On the Stability of the Finite Element Immersed Boundary Method*, Comput. & Structures, **86** (7-8) (2008), 598-617.

[29] P. Le Tallec - J. Mouro, *Fluid structure interaction with large structural displacements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **190** (24-25) (2001), 3039-3067.

[30] H. G. Matthies - R. Niekamp - J. Steindorf, *Algorithms for strong coupling procedures*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **195**, (17-18) (2006), 2028-2049.

[31] H. G. Matthies - J. Steindorf, *Partitioned strong coupling algorithms for fluidstructure interaction*, Comput. Struct., **81** (2003), 1277-1286.

[32] Henri J.-P. Morand - Roger Ohayon, *Interactions fluides-structures*, volume 23 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1992.

[33] C. S. Peskin, *Numerical analysis of blood flow in the heart*, J. Computational Phys., **25**, (3) (1977), 220-252.

[34] C. S. Peskin, *The immersed boundary method*, Acta Numer., **11** (2002), 479-517.

[35] C. S. Peskin - D. M. McQueen, *A three-dimensional computational method for blood flow in the heart. I. Immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid*, J. Comput. Phys., **81** (2) (1989), 372-405.

[36] R. Pierre, *Local mass conservation and C^0-discretizations of the Stokes problem*, Houston J. Math., **20** (1) (1994), 115-127.

[37] J. Qin - S. Zhang, *Stability of the finite elements* $9/(4c+1)$ *and* $9/5c$ *for stationary Stokes equations*, Comput. 84 (1-2) (2005), 70-77.

[38] L. R. Scott - M. Vogelius, *Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., **19** (1) (1985), 111-143.
[39] C. Taylor - P. Hood, *A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique*, Internat. J. Comput. 1 (1) (1973), 73-100.
[40] R. W. Thatcher, *Locally mass-conserving Taylor-Hood elements for two- and three-dimensional flow*, Internat. J. Numer. Methods Fluids, **11** (3) (1990), 341-353.
[41] D. M. Tidd - R. W. Thatcher - A. Kaye, *The free surface flow of Newtonian and non-Newtonian fluids trapped by surface tension*, Internat. J. Numer. Methods Fluids, 8 (9) (1988), 1011-1027.

Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università degli Studi di Pavia
E-mail: daniele.boffi@unipv.it

Received December 15, 2011 and in revised form February 14, 2012

Filippo Bracci: Evoluzione olomorfa

Filippo Bracci
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"
email: fbracci@mat.uniroma2.it

Sunto

Negli anni 20 del secolo scorso Charles Loewner introdusse la famosa teoria che reca oggi il suo nome. Molti matematici, tra cui Goluzin, Kufarev, Pommerenke, hanno poi lavorato a tale teoria, che è stata alla base per la dimostrazione di molti risultati estremali per la teoria geometrica delle funzioni tra cui la dimostrazione di de Branges della famosa congettura di Bieberbach. Più recentemente, nel 2000, Oded Schramm ha genialmente unito la teoria di Loewner alla teoria dei processi stocastici conformalmente invarianti, definendo le cosidette SLE (stochastic Loewner equation o Schramm-Loewner equation), che sono state oggetto di studio, tra gli altri, di W. Werner e S. Smirnov.

La teoria classica di Loewner consiste nello studio di tre oggetti: le famiglie di evoluzione, che sono famiglie biparametriche di mappe olomorfe del disco in sé che soddisfano alcune condizioni di tipo semigruppo e una qualche regolarità nei parametri; le catene di Loewner, che sono famiglie ad un parametro di funzioni univalenti del disco con immagini crescenti e una qualche regolarità nel parametro; i campi di Herglotz, che sono campi di vettori olomorfi semicompleti dipendenti in modo misurabile da un parametro soddisfacenti una qualche regolarità nel parametri. I tre oggetti sono legati da due equazioni differenziali, una ordinaria, detta di Loewner, una alle derivate parziali, detta di Loewner-Kufarev e da una equazione funzionale.

Lo scopo di questa conferenza è di presentare una teoria di Loewner generale, introdotto dall'oratore assieme a M. D. Contreras e S. Díaz-Madrigal, e che vale in massima generalità per varietà complete iperboliche, utilizzando un punto di vista totalmente nuovo, in cui la teoria di Loewner viene presentata come evoluzione della teoria classica dei sistemi dinamici (dalla dinamica locale di germi, alla dinamica di mappe olomorfe di un dominio in sé alla teoria semigruppi).

Bibliografia

[1] F. Bracci, M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, *Evolution Families and the Loewner Equation I: the unit disc*, in stampa su J. Reine Angew. Math., ArXiv 0807.1594.

[2] F. Bracci, M.D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, *Evolution Families and the Loewner Equation II: complex hyperbolic manifolds*, Math. Ann. **344** (2009) 947-962.

[3] K. Loewner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. **89** (1923) 103–121.

[4] O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math. **118** (2000) 221–288.

Intervento: Filippo Bracci,
Holomorphic Evolution: Metamorphosis of the Loewner Equations,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 137–165**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 137-165

Holomorphic Evolution: Metamorphosis of the Loewner Equations (*)

FILIPPO BRACCI

1. – Introduction

The theory developed by Ch. Loewner [36] in 1923, and nowadays bearing his name, has been extended and used in the past decades to solve many different problems in the area of complex analysis. Just to name a few instances, the Loewner theory is one of the main tool in the de Branges' proof of the Bieberbach conjecture, and it has been recently successfully exploited in connection with stochastic equations to study scaling limits of various probabilistic and physical models (giving rise to the so called SLEs of Oded Schramm).

The original idea of Loewner was to represent a family of domains obtained by removing from the complex plane a Jordan arc by means of a family (nowadays known as a *Loewner chain*) of univalent functions defined on the unit disc and satisfying a suitable differential equation. Such a machinery was later studied and extended to other types of simply connected domains by Kufarev in 1943 and Pommerenke in 1965 ([29], [42], and see also [43, Chapter 6]).

The classical Loewner partial differential equation in the unit disc $\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ is given by

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -\frac{\partial f_t(z)}{\partial z} G(z,t).$$

where $f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ is a family of univalent mappings depending on the parameter $t \geq 0$, $f_t(0) = 0$, $f_t'(0) = e^t$, and $G(w,t) = -w\dfrac{1+k(t)w}{1-k(t)w}$ for some continuous function $k : [0,+\infty) \to \partial\mathbb{D}$. The vector field $G(w,t)$ is a so-called *Herglotz vector field*.

The classical *radial Loewner equation* is the following associated non-autonomous ordinary differential equation

$$\begin{cases} \dot{w} = G(w,t) & \text{for almost every } t \in [s,\infty) \\ w(s) = z. \end{cases}$$

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 13 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

The solutions $t \mapsto \varphi_{s,t}(z)$ of such a differential equation possess certain "semigroup-type" properties, and the family $(\varphi_{s,t})$ is called an *evolution family* of the unit disc.

The relations among the three objects, that is, Loewner's chains, evolution families and Herglotz vector fields, is the core of Loewner's theory and its extensions and generalizations.

The aim of this note is to provide an updated account of the extensions and generalizations of the original Loewner theory, with a particular view toward the geometrical and dynamical aspects of the above equations and their invariant forms. We will start by presenting quite in detail the original work of Loewner, and the extension by Pommerenke, Kufarev and Schramm in the unit disc. Next, we will describe infinitesimal generators of semigroups of holomorphic self-maps on complex manifolds, with the target of presenting a very general and natural definition of Herglotz vector fields and evolution families, as discovered by the author and M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal in [10], [11]. In this new framework, the accent is put on the evolution families considered as families of holomorphic self-maps resembling semigroups. Hence, on the one side they are objects that can be iterated, creating a "dynamical system", and on the other side they are generated by non-autonomous vector fields which are semicomplete for almost all times. In this optic, Loewner chains are essentially viewed as "intertwining mappings" which conjugated the dynamical behavior of an evolution family on a complex manifold with the geometry of an "abstract basin of attraction" which we call the *Loewner range*. The construction of Loewner chains, taken by the work of the author with L. Arosio, H. Hamada, G. Kohr [5], is categorial and provides the "PDE Loewner equation" in its full generality.

Some results are presented with a sketch of the proof, and some efforts are made to relate various branches of the theory to a single unified source (for instance the reverse equation used from Schramm is presented here starting from the Loewner classical equation). However, many applications of Loewner theory and other areas of related researches are not discussed here. For further material, we refer the reader to the survey paper [2], the books [24] (for basic one dimensional and the higher dimensional theory) and [33] (for SLEs), and the recent paper [14, 15] (for the multi-connected cases).

These notes are the revised version of the text of the plenary talk the author gave at XIX Congress of the Unione Matematica Italiana held in Bologna, 12-17 September 2011. The author wants to sincerely thank the organizers for both the invitation to give the talk and the possibility of writing these notes. Also, the author warmly thanks Pavel Gumenyuk for several comments which improved this paper.

2. – The classical Loewner equation

We define the "class $\mathcal{S}$" as the set of all univalent (*i.e.* holomorphic and injective) function $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ such that $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Namely,

$$\mathcal{S} := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ is univalent, } f(0) = 0, f'(0) = 1\}.$$

By the Riemann mapping theorem, given a simply connected domain $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, there exists a univalent and surjective mapping $g : \mathbb{D} \to D$, called a *Riemann map*. Up to translation we can assume that $0 \in D$. With this assumption, one can show that there exists a *unique* Riemann map $g_D : \mathbb{D} \to D$ such that $g_D(0) = 0$ and $\lambda := g'_D(0) > 0$. In particular, if we dilate D by $1/\lambda$, the unique Riemann map $g : \mathbb{D} \to \frac{1}{\lambda} D$ such that $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$, belongs to the class $\mathcal{S}$.

DEFINITION 2.1. – *A* slit map $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *is a univalent mapping such that* $f(0) = 0$ *and the complement of* $f(\mathbb{D})$ *in* $\mathbb{C}$ *is a Jordan arc* Γ, i.e., *there exists a continuous injective curve* $\gamma : [0, T) \to \mathbb{C}$ *such that* $\lim_{t \to T} |\gamma(t)| = \infty$, $\Gamma := \gamma([0, T))$ *and* $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

One can prove that slit maps are dense (with respect to the topology of uniform convergence on compacta) in the class $\mathcal{S}$. Therefore, if one can prove certain bounds on slit maps, they propagate to all the class $\mathcal{S}$.

Now we are going to discuss the so-called "parametric representation of slit maps" due to Ch. Loewner.

Let $\gamma : [0, T) \to \mathbb{C}$ be a Jordan arc such that $\lim_{t \to T} |\gamma(t)| = \infty$, $\Gamma := \gamma([0, T))$. Assume, up to translation, that $0 \notin \Gamma$. Let $\Gamma_t := \gamma([t, T))$, for $t \in [0, T)$. Then $D_t := \mathbb{C} \setminus \Gamma_t$ is a family of simply connected domains with the property that $D_s \subset D_t$ for $s < t$.

Let $f_t : \mathbb{D} \to D_t$ be the Riemann map such that $f_t(0) = 0, f'_t(0) > 0$. Then we can expand f_t and obtain

$$f_t(z) = \beta(t)[z + b_2(t)z^2 + b_3(t)z^3 + \dots].$$

By the geometry of D_t's, one can show that $t \mapsto \beta(t), b_j(t)$ are continuous for all $j \geq 2$. Moreover, consider the map $z \mapsto \varphi_{s,t}(z) := f_t^{-1} \circ f_s(z)$ $(s < t)$. Then $\varphi_{s,t} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ is holomorphic, injective, $\varphi_{s,t}(0) = 0$ and it is not the identity map. By the Schwarz' Lemma it follows then $\varphi'_{s,t}(0) < 1$. Hence, $t \mapsto \beta(t)$ is strictly increasing.

It can be also proved that $\lim_{t \to T} \beta(t) = +\infty$. Indeed, if this is not the case, then thanks to the so-called "distortion theorems" for the class $\mathcal{S}$, one would find a

converging (in the topology of uniform convergence on compacta) subsequence of $\{f_t\}$ which would converge to a biholomorphism from $\mathbb{D}$ to $\mathbb{C}$.

Therefore, we can re-parameterize the Jordan arc γ by define $\sigma(s) := \beta^{-1}(e^s)$ and $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ as $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\sigma(s))$. With this new parametrization we have

$$f_t(z) = e^t \left[z + \sum_{j \geq 2} b_j(t) z^j \right].$$

DEFINITION 2.2. – *A family (f_t) of univalent mappings $f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ is called a* classical Loewner chain *if*

1) $f_t(0) = 0, f_t'(0) = e^t$ *for all* $t \geq 0$ *and*

2) $f_s(\mathbb{D}) \subset f_t(\mathbb{D})$ *for all* $0 \leq s \leq t$.

Now we can state Loewner's original result:

THEOREM 2.3 (Loewner). – *Let (f_t) be a classical Loewner chain of slit maps. Let $\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $0 \leq s \leq t$. Then there exists $k : [0, +\infty) \to \partial\mathbb{D}$ a continuous function such that for all $t \in [0, +\infty)$ and $z \in \mathbb{D}$*

$$\frac{\partial \varphi_{s,t}(z)}{\partial t} = -\varphi_{s,t}(z) \frac{1 + k(t)\varphi_{s,t}(z)}{1 - k(t)\varphi_{s,t}(z)}. \tag{2.1}$$

Moreover, $\lim_{t \to \infty} e^t \varphi_{s,t}(z) = f_s(z)$ *uniformly on compacta.*

SKETCH OF THE PROOF. – The map $\varphi_{s,t} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ is univalent, $\varphi_{s,t}(0) = 0$, $\varphi_{s,t}'(0) = e^{s-t}$. Note also that

$$\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u} \quad 0 \leq s \leq u \leq t.$$

Also, by Carathéodory's extendability result (see, *e.g.* [43]), the map $\varphi_{s,t}$ is continuous up to $\partial\mathbb{D}$ for all $0 \leq s \leq t$.

The function $\mathbb{D} \setminus \{0\} \ni z \mapsto g_{s,t}(z) := \dfrac{\varphi_{s,t}(z)}{z}$ extends holomorphic in $\mathbb{D}$ by defining $g_{s,t}(0) = \varphi_{s,t}'(0) = e^{s-t}$ and $g_{s,t}(z) \neq 0$ for all $z \in \mathbb{D}$ because $\varphi_{s,t}$ is injective and it is equal to zero at $z = 0$. Hence, since $\mathbb{D}$ is simply connected, it is possible to define the logarithm $\phi_{s,t}(z) := \log g_{s,t}(z)$, choosing the branch of log such that $\log e^{s-t} = s - t$.

Now, the image of $\mathbb{D}$ under $\varphi_{s,t}$ is $\mathbb{D} \setminus \Gamma_{s,t}$, where $\Gamma_{s,t}$ is a Jordan arc contained in $\mathbb{D}$ and starting from a boundary point. Therefore, there exists an arc $A_{s,t} \subset \partial\mathbb{D}$ such that $\varphi_{s,t}(\partial\mathbb{D} \setminus A_{s,t}) \subset \partial\mathbb{D}$, hence $\mathrm{Re}\, \phi_{s,t}(\partial\mathbb{D} \setminus A_{s,t}) = 0$. Also, $\mathrm{Re}\, \phi_{s,t}(z) < 0$ for all $z \in \mathbb{D}$. We apply then the Poisson formula and obtain

$$\phi_{s,t}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{A_{s,t}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \mathrm{Re}\, \phi_{s,t}(e^{i\theta}) d\theta.$$

By the mean value theorem, there exist $\theta', \theta'' \in \mathbb{R}$ such that $e^{i\theta'}, e^{i\theta''} \in A_{s,t}$ and

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{s,t}(\varphi_{m,s}(z)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{A_{s,t}} \frac{e^{i\theta}+\varphi_{m,s}(z)}{e^{i\theta}-\varphi_{m,s}(z)}\,\mathrm{Re}\,\dot{\phi}_{s,t}(\varphi_{m,s}(e^{i\theta}))d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{A_{s,t}} \mathrm{Re}\,\dot{\phi}_{s,t}(\varphi_{m,s}(e^{i\theta}))d\theta\left[\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta'}+\varphi_{m,s}(z)}{e^{i\theta'}-\varphi_{m,s}(z)}\right)+i\,\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\theta''}+\varphi_{m,s}(z)}{e^{i\theta''}-\varphi_{m,s}(z)}\right)\right].\end{aligned}$$

But

$$\frac{1}{2\pi}\int_{A_{s,t}} \mathrm{Re}\,\dot{\phi}_{s,t}(\varphi_{m,s}(e^{i\theta}))d\theta = \mathrm{Re}\,\dot{\phi}_{s,t}(\varphi_{m,s}(0)) = \mathrm{Re}\,\dot{\phi}_{s,t}(0) = s-t.$$

Therefore

$$\dot{\phi}_{s,t}(\varphi_{m,s}(z)) = (s-t)\left[\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta'}+\varphi_{m,s}(z)}{e^{i\theta'}-\varphi_{m,s}(z)}\right)+i\,\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\theta''}+\varphi_{m,s}(z)}{e^{i\theta''}-\varphi_{m,s}(z)}\right)\right]. \tag{2.2}$$

Now, $\varphi_{s,t}(\varphi_{m,s}(z)) = \varphi_{m,t}(z)$ for $0 \le m \le s \le t$, hence

$$\dot{\phi}_{s,t}(\varphi_{m,s}(z)) = \log\left(\frac{\varphi_{s,t}(\varphi_{m,s}(z))}{\varphi_{m,s}(z)}\right) = \log\frac{\varphi_{m,t}(z)}{\varphi_{m,s}(z)}.$$

It can be proved that, as $t \to s$, the arc $A_{s,t}$ shrinks to a point $\lambda(s) \in \partial\mathbb{D}$ which represents the preimage of the tip of the arc $\Gamma_{s,t}$ under $\varphi_{s,t}$. From this, and from (2.2) we obtain

$$\begin{aligned}\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\log\frac{\varphi_{m,t}(z)}{\varphi_{m,s}(z)} &= -\lim_{t\to s}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta'}+\varphi_{m,s}(z)}{e^{i\theta'}-\varphi_{m,s}(z)}\right)+i\,\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\theta''}+\varphi_{m,s}(z)}{e^{i\theta''}-\varphi_{m,s}(z)}\right)\right] \\ &= -\frac{\lambda(s)-\varphi_{m,t}(z)}{\lambda(s)+\varphi_{m,t}(z)}.\end{aligned}$$

Unwrapping the left hand side, we obtain (2.1) with $k(t) := 1/\lambda(t)$. The rest of the statement is technical and we omit it (see, *e.g.* [18]). □

In the proof of Loewner's equation we defined a family $(\varphi_{s,t})$ of univalent self-mappings of the unit discs having certain semigroup properties. Abstracting those properties we give the following

DEFINITION 2.4. – *A family* $(\varphi_{s,t})$ *with* $0 \le s \le t < +\infty$ *of univalent self-maps of the unit disc* $\mathbb{D}$ *is a* classical evolution family *if*

(1) $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}$ *for all* $0 \le s \le u \le t$,
(2) $\varphi_{s,t}(0) = 0, \varphi'_{s,t}(0) = e^{s-t}$.

Given a classical Loewner chain (f_t), it is possible to define a classical evolution family $(\varphi_{s,t})$ by means of the formula

$$f_t \circ \varphi_{s,t} = f_s. \tag{2.3}$$

Since $\varphi_{s,t} = f_t^{-1} \circ f_s$, it is clear that such an evolution family is uniquely determined. However, the converse is not so immediate. We will discuss later (see Theorem 7.3) of the uniqueness of Loewner chains associated to a given evolution family on complete hyperbolic manifolds, and the reader can easily check that in the classical case the uniqueness follows as a result of the normalization chosen in the definition of classical Loewner chains.

Equation (2.1) can be re-written in the following way. Let $k : [0, +\infty) \to \partial\mathbb{D}$ be continuous and let

$$p(z,t) := \frac{1 + k(t)z}{1 - k(t)z}.$$

Then $\mathsf{Re}\, p(z,t) \geq 0$ for all $z \in \mathbb{D}$ and $t \in [0, +\infty)$. Let

$$G(z,t) = -zp(z,t).$$

Loewner's equation (2.1) reads as

$$\frac{\partial \varphi_{s,t}(z)}{\partial t} = G(\varphi_{s,t}(z), t). \tag{2.4}$$

The equation (2.1) (or the more general equation (2.4)) are known as *radial Loewner equations*.

Looking abstractly to the properties of G, we give the following definition

DEFINITION 2.5. – *A* classical Herglotz vector field $G(z,t) = -zp(z,t)$ *is a non-autonomous vector field such that*

(1) $[0, +\infty) \ni t \mapsto p(z,t)$ *is measurable for all* $z \in \mathbb{D}$,
(2) $z \mapsto p(z,t)$ *is holomorphic for all* $t \in [0, +\infty)$
(3) $\mathsf{Re}\, p(z,t) \geq 0$ *for almost all* $t \in [0, +\infty)$,
(4) $p(0,t) = 1$ *for all* $t \in [0, +\infty)$.

Differentiating (2.3) and taking into account (2.4) we obtain the following PDE:

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -\frac{\partial f_t(z)}{\partial z} G(z,t). \tag{2.5}$$

Ch. Pommerenke [43, 42] showed that (2.3), (2.4) and (2.5) hold in the context of classical Loewner chains, classical evolution families and classical Herglotz vector fields, and not only for slit maps. We will discuss later of a more general version of these results.

2.1 – *The Bieberbach conjecture*

The Bieberbach conjecture states the following. Let $f \in \mathcal{S}$. Expand $f(z) = z + \sum_{j \geq 2} a_m z^m$. Then

$$|a_m| \leq m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

The Bieberbach conjecture has been positively solved by L. de Branges [17], who proved the so called Milin's conjecture (which implies the Bieberbach conjecture) using special functions and Loewner's equation (a simplified proof is given by C. FitzGerald and Ch. Pommerenke [20]).

The case $m = 2$ is a consequence of the so called "area theorem" (see, *e.g.*, [18]). The case $m = 3$ was proved by Loewner himself, using his equation (2.5). We give here a brief sketch of his idea. We start with

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = z \frac{\partial f_t(z)}{\partial z} p(z,t). \tag{2.6}$$

Now, we expand

$$p(z,t) = 1 + p_1(t)z + p_2(t)z^2 + \dots,$$

and also, we write

$$f_t(z) = e^t z + a_2(t)z^2 + \dots.$$

Substituting in (2.6) and equating coefficients with the same degree in z, we obtain for almost all $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt} a_m(t) = \sum_{k=1}^{m-1} k a_k(t) p_{m-k}(t) + m a_m(t).$$

Now, multiplying both sides by e^{-mt} and integrating, one obtains an expression for a_m which involves the terms p_k. By the distortion theorems for $p(z,t)$, it follows that $|p_k(t)| \leq 2$ for all k. From here (after some algebraic manipulations which are working well only for $m = 2, 3$), we obtain the estimates.

2.2 – *Slit mappings and the Loewner differential equation*

Given a continuous function $k : [0, +\infty) \to \partial\mathbb{D}$, one can consider the PDE

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = z \frac{\partial f_t(z)}{\partial z} \frac{1 + k(t)z}{1 - k(t)z}, \tag{2.7}$$

with $z \in \mathbb{D}$. The function k is called the *driving term* of the equation.

Loewner's theorem 2.3 shows that any evolution family of slit mappings satisfies (2.7) with a continuous driving term. The converse is not true: P. P. Kufarev [31] showed that the solutions to (2.7) with continuous driving term are not slit mappings in general.

The question is then which are the relations between the properties of the driving term k in (2.7) and the family generated by the solutions. It is known that if the evolution derives from a slit which is real analytic, then k is real analytic. A proof of this fact can be found in [19], where C. Earle and A. Epstein proved also that if the slit is of class C^m then the driving term is at least of class C^{m-1}.

In [38], D. Marshall and S. Rohde proved that if the slit in $\mathbb{C}$ is a "quasiarc" (namely it is the image of $[0,\infty)$ under a quasiconformal homeomorphism of $\mathbb{C}$) then the driving term is Lipschitz continuous with exponent $1/2$. And conversely, there exists a constant $C>0$ such that if $|k(t)-k(s)|<C|t-s|^{1/2}$ for all $s,t\in[0,+\infty)$ then $\mathbb{C}\setminus f_t(\mathbb{D})$ is a quasiarc for all t. In Kufarev's example, the driving term k is Lipschitz continuous with exponent $3\sqrt{2}$, thus $C\leq 3\sqrt{2}$. J. Lind [37] has proved that the best constant C is 4. However, W. Kager, B. Nienhuis, L. P. Kadanoff [27] showed that there exist examples of slit evolutions for which the associated driving terms have arbitrary big norm. In [41], D. Prokhorov and A. Vasil'ev extended such results to the case of evolutions of so-called "chordal type" (see below) when the slit is an arc tangent to the boundary, proved that in such a case the driving term is $1/3$-Lipschitz.

3. – Kufarev-Loewner chordal equation

In 1946 P. P. Kufarev [30] (developed later by Kufarev himself, Sobolev and Sporysheva [32]) proposed an equation of evolution in the upper half-plane $\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} z>0\}$ analogous to the one proposed by Loewner in the unit disc. Note that $\mathbb{H}$ and $\mathbb{D}$ are conformally equivalent by means of the Cayley transform

$$\mathbb{D}\ni z\mapsto i\,\frac{1+z}{1-z}\in\mathbb{H}.$$

However, Kufarev's equation is not just a transliteration from $\mathbb{D}$ to $\mathbb{H}$ by means of the Cayley transform of Loewner's evolution equation. Kufarev in fact considered a different equation, where the base point of the evolution is at ∞. This process is connected to physical problems in hydrodynamics.

In order to introduce Kufarev's equation properly, let us fix some notations. Let γ be a Jordan arc in the upper half-plane $\mathbb{H}$ with starting point $\gamma(0)=0$. Then, there exists a unique Riemann map $f_t:\mathbb{H}\to\mathbb{H}\setminus\gamma[0,t]$ normalized such that

$$f_t(z)=z+\frac{c(t)}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Up to a re-parametrization of the curve γ, one can assume that $c(t) = -2t$. Such a normalization is sometimes called the *hydrodynamics normalization*. Under this normalization, one can show that f_t satisfies the following differential equation. For all $t \geq 0$ and for all $z \in \mathbb{H}$

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = \frac{-2}{f_t(z) - k(t)}, \qquad f_0(z) = z, \tag{3.1}$$

where $k : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ is a continuous function. Conversely, starting with a continuous function $k : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, one can consider the non-autonomous holomorphic vector field

$$P(w, t) := \frac{-2}{w - k(t)},$$

and the associated initial value problem for each $z \in \mathbb{H}$:

$$\frac{dw}{dt} = P(w(t), t), \qquad w(0) = z.$$

Let $t \mapsto w^z(t)$ denote the only solution of the previous system, and let $f_t(z) := w^z(t)$. Then $f_t : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ is univalent. This equation is nowadays known as the *chordal Loewner differential equation* and the function k is its driving term. The name "chordal" is due to the picture that the images of the solutions of the associated characteristic equation draw when taking the time-limit: something like the half-plane erased a chord joining two boundary points.

Moving back to the unit disc by means of the Cayley transform, it is easy to see that the chordal Kufarev-Loewner equation takes the form

$$\frac{dz}{dt} = (1 - z)^2 p(z, t), \qquad z(0) = z, \tag{3.2}$$

where $\mathsf{Re}\, p(z, t) \geq 0$ for all $t \geq 0$ and $z \in \mathbb{D}$.

We will show later on that both the classical Loewner equation and its radial generalizations and the Kufarev equation are just particular cases of a more general picture.

D. Marshall kindly told me in a private conversation that the classical Loewner equation and the Kufarev one are equivalent in the sense that can be obtained one from the other by means of a suitable construction.

4. – Reversing evolution and SLE's

The original Loewner equation (and the generalized Pommerenke's and Kufarev's equations) deals with families of univalent mappings from $\mathbb{D}$ to increasing families of simply connected domains. In the applications it is sometimes useful to consider a reverse evolution. Namely, let $(D_t)_{t \geq 0}$ be a family of

simply connected domains contained in the unit disc $\mathbb{D}$ and such that $D_t \subseteq D_s$ for all $0 \le s \le t$. We also assume that $D_0 = \mathbb{D}$.

A typical example is given by considering a Jordan arc $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ such that $\gamma(0) \in \partial\mathbb{D}$ and $\gamma((0, \infty)) \subset \mathbb{D}$. In such a case $D_t = \mathbb{D} \setminus \gamma([0, t])$. If $0 \in D_t$ for all t, one can consider a chain of univalent mappings $f_t : \mathbb{D} \to D_t$ normalized so that $f_t(0) = 0$ and $f_t'(0) > 0$. This is a sort of "reverse classical Loewner evolution".

Similarly, one can consider a "reverse chordal Kufarev-Loewner evolution", taking the upper half-plane model $\mathbb{H}$ and removing a growing Jordan arc $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{H}$ such that $\gamma(0) = 0$, considering the chain given by $f_t : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \setminus \gamma([0, t])$ with the hydrodynamics normalization.

In this section we restrict ourselves to the case of the "reverse classical Loewner evolution". However, one can show the same procedure works for all generalizations of the classical Loewner equation (see also [16]).

For $t \ge 0$, let $f_t : \mathbb{D} \to D_t$ be a Riemann mapping normalized such that $f_t(0) = 0$ and $f_t'(0) > 0$. Assume that $D_t := f_t(\mathbb{D})$ be such that $D_t \subset D_s$ for $0 \le s \le t$ and $f_0 = \mathsf{id}$. Moreover, $\mathbb{D} \setminus D_t$ is a Jordan arc $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ such that $\gamma(0) \in \partial\mathbb{D}$ and $\gamma((0, \infty)) \subset \mathbb{D}$.

Let $\beta(t) := f_t'(0)$. By Schwarz' lemma, $\beta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ is a decreasing function, $\beta(0) = 1$. Let

$$A := \lim_{t \to \infty} \beta(t).$$

Then $0 \le A < 1$. Let $\sigma(s) := \beta^{-1}(e^{-s})$, for $s \in [0, -\ln A)$. We re-parameterize the Jordan arc as $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(\sigma(s))$, for $s \in [0, -\ln A)$. With such a parametrization we have $f_t(0) = 0, f_t'(0) = e^{-t}$ for $t \in [0, -\ln A)$.

Fix $T \in (0, -\ln A)$, and, for $t \in [0, T]$, let $\phi_t(z) := f_{T-t}(z)$. By definition, $\phi_s(\mathbb{D}) \subset \phi_t(\mathbb{D})$ for all $0 \le s \le t \le T$ and $\phi_T = \mathsf{id}$. Also, $\phi_t(0) = 0, \phi_t'(0) = e^{t-T}$.

The family (φ_t) is a "classical Loewner chain" as defined in Section 2, except that $t \in [0, T]$ instead of taking values in $[0, +\infty)$. In any case, we can define the associated "evolution family" $\varphi_{s,t} := f_t^{-1} \circ f_s$. It is easy to check that such a family satisfies the requirement of Definition 2.4, taking $0 \le s \le t \le T$.

Then Theorem 2.3 applies and there exists $k_T : [0, T) \to \partial\mathbb{D}$ a continuous function such that for all $t \in [0, T)$ and $z \in \mathbb{D}$ equation (2.1) holds with k_T replacing k.

Then the family $(\phi_t)_{t \in [0,T]}$ satisfies (2.5), *i.e.*

$$\frac{\partial \phi_t(z)}{\partial t} = \phi_t'(z) z \frac{1 + k_T(t) z}{1 - k_T(t) z}.$$

Now, taking into account that $\phi_t = f_{T-t}$, from the previous equation we obtain

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -\frac{\partial f_t(z)}{\partial z} z \frac{1 + k_T(T-t) z}{1 - k_T(T-t) z}, \quad t \in [0, T).$$

This yields that $k_T(T - t) = k_{T'}(T' - t)$ for all $t \le \min\{T, T'\}$. Thus, setting

$k(t) := k_T(T-t)$ whenever $t \in [0,T)$, we find

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -\frac{\partial f_t(z)}{\partial z} z \frac{1+k(t)z}{1-k(t)z}, \quad t \in [0, -\ln A). \tag{4.1}$$

Note that (4.1) differs from (2.5) by a sign. Now, let

$$g_t := f_t^{-1} : D_t \to \mathbb{D}.$$

Since $z = f_t(g_t(z))$ for all $z \in f_t(\mathbb{D}) = D_t$, differentiating in t and taking into account (4.1), we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f_t}{\partial t}(g_t(z)) + \frac{\partial f_t}{\partial z}(g_t(z))\,\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial f_t}{\partial z}(g_t(z)) z \frac{1+k(t)g_t(z)}{1-k(t)g_t(z)} + \frac{\partial f_t}{\partial z}(g_t(z))\,\frac{\partial g_t(z)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Since f_t is univalent, we get

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = z \frac{1+k(t)g_t(z)}{1-k(t)g_t(z)} \tag{4.2}$$

for all $t \in [0, -\ln A)$ and $z \in D_t$.

Note that, given $z \in \mathbb{D}$, (4.2) holds for all $t \in [0, -\ln A)$ if $z \notin \tilde{\gamma}([0, -\ln A))$. If $z = \tilde{\gamma}(t_0)$ then (4.2) holds for all $t \in [0, t_0)$.

Putting together the previous considerations we have

THEOREM 4.1 (Reverse classical radial Loewner evolution). – *Let $\gamma : [0,M) \to \mathbb{C}$ be a Jordan arc such that $\gamma(0) \in \partial\mathbb{D}$ and $\gamma((0,M)) \subset \mathbb{D}$. Let $f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, for $t \in [0,M)$, be a family of Riemann mappings such that $\mathbb{D} \setminus f_t(\mathbb{D}) = \gamma((0,t])$, $f_t(0) = 0$ and $f_t'(0) = e^{-t}$. Let $g_t := f_t^{-1}$. Then there exists a continuous function $k : [0,M) \to \partial\mathbb{D}$ such that*

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = z\,\frac{1+k(t)g_t(z)}{1-k(t)g_t(z)}$$

for all $z \in \mathbb{D}$ and either for all $t \in [0,M)$ if $z \notin \gamma([0,M))$, or for all $t \in [0,t_0)$ if $z = \gamma(t_0)$.

A similar argument as before applies to the Kufarev-Loewner chordal equation. In particular, we obtain the reverse evolution from (3.1). That is

THEOREM 4.2 (Reverse classical chordal Kufarev-Loewner evolution). – *Let $\gamma : [0,M) \to \mathbb{C}$ be a Jordan arc such that $\gamma(0) = 0$ and $\gamma((0,M)) \subset \mathbb{H}$. Let $f_t : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, for $t \in [0,M)$, be a family of Riemann mappings such that $\mathbb{H} \setminus f_t(\mathbb{H}) = \gamma((0,t])$, $f_t(z) = z - \dfrac{2t}{z} + O\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$. Let $g_t := f_t^{-1}$. Then there exists a*

continuous function $k : [0, M) \to \mathbb{R}$ *such that*

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - k(t)},$$

for all $z \in \mathbb{H}$ *and either for all* $t \in [0, M)$ *if* $z \notin \gamma([0, M))$*, or for all* $t \in [0, t_0)$ *if* $z = \gamma(t_0)$.

4.1 – *The Schramm-Loewner equation*

In 1999 Oded Schramm [S] had the wonderful idea of replacing the driving term of the classical Loewner equation for single-slit maps with a weighted Brownian motion, inventing the nowadays well known stochastic-Loewner equations, or Schramm-Loewner's equations. In particular, the *(chordal) stochastic Loewner evolution* with parameter $k \geq 0$ (SLE_k) starting at a point $x \in \mathbb{R}$ is the random family of univalent maps (g_t) obtained from the reverse classical chordal Kufarev-Loewner equation replacing the driving term $k(t)$ with $\sqrt{k}B_t$, where B_t is a standard one dimensional Brownian motion such that $\sqrt{k}B_0 = x$. That is

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{k}B_t}, \qquad g_0(z) = z.$$

Similarly, one can define a radial stochastic Loewner evolution starting from the reverse classical radial Loewner equation replacing the driving term $k(t)$ with $e^{-i\sqrt{k}B_t}$, *i.e.*

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = z\frac{1 + e^{-i\sqrt{k}B_t} g_t(z)}{1 - e^{-i\sqrt{k}B_t} g_t(z)}, \qquad g_0(z) = z.$$

The SLE_k depends on the choice of the Brownian motion and it comes in several flavours depending on the type of Brownian motion exploited. For example, it might start at a fixed point or start at a uniformly distributed point, or might have a built in drift and so on. The parameter k controls the rate of diffusion of the Brownian motion and the behaviour of the SLE_k critically depends on the value of k.

The SLE_2 corresponds to the loop-erased random walk and the uniform spanning tree. The $\mathrm{SLE}_{8/3}$ is conjectured to be the scaling limit of self-avoiding random walks. The SLE_3 is conjectured to be the limit of interfaces for the Ising model, while the SLE_4 corresponds to the harmonic explorer and the Gaussian free field. The SLE_6 was used by Lawler, Schramm and Werner in 2001 [LSW1], [LSW2] to prove the conjecture of Mandelbrot (1982) that the boundary of planar Brownian motion has fractal dimension 4/3. Moreover, Smirnov [Sm] proved that SLE_6 is the scaling limit of critical site percolation on the triangular lattice.

This result follows from his celebrated proof of Cardy's formula. We refer the reader to the very beautiful book of G. Lawler [33] for more details.

5. – Semigroups and infinitesimal generators

Looking at the classical radial Loewner equation (2.1) and the classical chordal Kufarev-Loewner equation (3.2), one notices that there is a similitude between the two. Indeed, we can write both the equation in the form

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t} = G(z,t),$$

with

$$G(z,t) = (\tau - z)(1 - \overline{\tau} z)p(z,t),$$

where $\tau = 0, 1$ and $\mathsf{Re}\, p(z,t) > 0$ for all $z \in \mathbb{D}$ and $t \geq 0$.

The reason for the previous formula is not at all by chance, but it reflects a very important feature of "Herglotz vector fields". In order to give a rough idea of what we are aiming, consider the case $\tau = 0$ (the radial case). Fix $t = t_0 \in [0, +\infty)$. Consider the holomorphic vector field $H(z) := G(z, t_0)$. Let $h(z) := |z|^2$. Then,

$$dh_z(H(z)) = 2\,\mathsf{Re}\,\langle H(z), z\rangle = -|z|^2\,\mathsf{Re}\, p(z,t_0) \leq 0, \quad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{5.1}$$

This Lyapunov type inequality has a deep geometrical meaning. Indeed, (5.1) tells that H points toward the center of the level sets of h, which are concentric circles centered at 0. For each $z_0 \in \mathbb{D}$, consider then the Cauchy problem

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} = H(w(t)), \\ w(0) = z_0 \end{cases} \tag{5.2}$$

and let $w^{z_0} : [0, \delta) \to \mathbb{D}$ be the maximal solution (such a solution can propagate also in the "past", but we just consider the "future" time). Since H points inward with respect to all circles centered at 0, the flow $t \mapsto w^{z_0}(t)$ cannot escape from the circle $h(z) = h(z_0)$. Therefore, the flow is defined for all future times, namely, $\delta = +\infty$. This holds for all $z_0 \in \mathbb{D}$.

Hence, the Herglotz vector field $G(z, t_0)$ has the feature to be $\mathbb{R}^+$-semicomplete for all fixed t_0.

Let H be a $\mathbb{R}^+$-semicomplete holomorphic vector field on $\mathbb{D}$ and let $[0, +\infty) \ni \mapsto w^z(t) \in \mathbb{D}$ be the solution of (5.2). By the holomorphic flow-box theorem, the map

$$[0, +\infty) \times \mathbb{D} \mapsto \phi_t(z) := w^z(t) \in \mathbb{D}$$

is real analytic, and for all fixed t, the map $z \mapsto \phi_t(z)$ is holomorphic. By definition $\phi_0 = \mathsf{id}$ and by the uniqueness of solutions of (5.2),

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t \quad \forall s, t \geq 0.$$

In other words, (ϕ_t) is a continuous morphism of semigroups between $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +)$ endowed with the Euclidean topology and the semigroup of holomorphic self-maps of the unit disc $(\mathsf{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}), \circ)$ endowed with the topology of uniform convergence on compacta.

Recall that a holomorphic vector field H on a complex manifold M is a section of the holomorphic tangent bundle TM. In case M is a domain in $\mathbb{C}^n$ (for instance the unit disc in $\mathbb{C}$), then $TM \simeq M \times \mathbb{C}^n$ and thus we can interpret H as a holomorphic function from M to $\mathbb{C}^n$. With this in mind, we give the following definition:

Definition 5.1. – *Let M be a complex manifold. A holomorphic vector field $H : M \to TM$ is an* infinitesimal generator *if for each $z_0 \in M$, its flow starting from z_0 is defined for all $t \geq 0$.*

Also, we define:

Definition 5.2. – *Let M be a complex manifold. A* continuous semigroup of holomorphic self-maps of M, *$(\phi_t)_{t \geq 0}$, is a continuous morphism of semigroups between $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +)$ endowed with the Euclidean topology and the semigroup of holomorphic self-maps of M endowed with the topology of uniform convergence on compacta.*

It can be shown that if (ϕ_t) is a semigroup, then for each $t \geq 0$, the map $z \mapsto \phi_t(z)$ is univalent.

Let M be a complex manifold. By the holomorphic flow-box theorem, for an infinitesimal generator H on M there exists a unique continuous semigroups $(\phi_t)_{t \geq 0}$ of holomorphic self-maps of M such that

$$\frac{\partial \phi_t(z)}{\partial t} = H(\phi_t(z)). \tag{5.3}$$

Conversely, given a continuous semigroup of holomorphic self-maps of M, there exists a unique infinitesimal generator H on M such that (5.3) holds ([8], see also *e.g.*, [1], [46]).

Much has been done in the theory of semigroups, see [46] for a very good recent account. Here we content ourselves to examine the theory we need for our aim.

As we saw before, a classical Herglotz vector field $G(z, t)$ (as defined in Definition 2.5) has the property that for all $t \geq 0$, the holomorphic vector field

$z \mapsto G(z,t)$ is an infinitesimal generator, and one might suspect that this is the right choice for a workable definition of a general Herglotz vector field. Therefore, it is fundamental to characterize which holomorphic vector fields are infinitesimal generators.

The previous argument with the function h, gives a basic rough idea of the way one can characterize infinitesimal generators. Before going ahead, we need to recall some few facts about the so-called "invariant distances". We refer the reader to [28] and [1] for details.

Let $\omega : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}^+$ denote the Poincaré distance on $\mathbb{D}$. Recall that

$$\omega(z,w) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |T_z(w)|}{1 - |T_z(w)|},$$

where $T_z(w) = \dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}$. Essentially by a re-interpretation of the Schwarz lemma, the Poincaré distance has the property of being shrunk by holomorphic self-maps of the unit disc, namely, if $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ is holomorphic, then

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z,w) \quad \forall z, w \in \mathbb{D}.$$

Moreover, there is equality for some $z \neq w$—and hence for all—if and only if f is an automorphism of $\mathbb{D}$. The Poincaré distance is of class C^∞ outside the diagonal. Take a semigroup (ϕ_t) of holomorphic self-maps of $\mathbb{D}$ generated by the infinitesimal generator H. Then, for $z \neq w$, the function

$$t \mapsto \omega(\phi_t(z), \phi_t(w)) \tag{5.4}$$

is differentiable (because $\phi_t(z) \neq \phi_t(w)$ for all $t \geq 0$ being the map injective) and decreasing, since

$$\begin{aligned} \omega(\phi_t(z), \phi_t(w)) &= \omega(\phi_{t-\varepsilon+\varepsilon}(z), \phi_{t-\varepsilon+\varepsilon}(w)) \\ &= \omega(\phi_\varepsilon(\phi_{t-\varepsilon}(z)), \phi_\varepsilon(\phi_{t-\varepsilon}(w))) \leq \omega(\phi_{t-\varepsilon}(z), \phi_{t-\varepsilon}(w)). \end{aligned}$$

Differentiating in t at $t = 0$ we obtain thus

$$d\omega_{(z,w)} \cdot (H(z), H(w)) \leq 0, \quad \forall z, w \in \mathbb{D}, z \neq w. \tag{5.5}$$

Note that if $\phi_t(0) = 0$ for all $t \geq 0$, then $H(0) = 0$ and the previous equation for $w = 0$ is equivalent to $dh_z(H(z)) \leq 0$ (where, as before, $h(z) = |z|^2$), that is,

$$\mathsf{Re}\, \langle H(z), z \rangle \leq 0. \tag{5.6}$$

However, being $H(0) = 0$, it follows that $H(z) = -zp(z)$ for some holomorphic function $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, and (5.6) implies that $p : \mathbb{D} \to \{w \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, w \geq 0\}$.

Condition (5.5) is also necessary to ensure that H is an infinitesimal generator (see [9]). The geometric reason of such is that such equation means that Poincaré discs are shrunk by the flow of H, hence the flow starting at any given point of $\mathbb{D}$ cannot reach the boundary in a finite time. Analytically, (5.5) translates saying that

the function (5.4) (where $t \mapsto \phi_t(z)$ denotes here the flow starting at z) is decreasing in time, and therefore the vector field H is semicomplete. In fact, starting from (5.5) one can derive useful equivalent analytical characterizations of infinitesimal generators in the unit disc—historically, such characterizations have been derived directly without using formula (5.5), which was discovered in [9].

THEOREM 5.3 (Characterization of infinitesimal generators in the unit disc). – *Let $H : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ be holomorphic. Then the following are equivalent:*

(1) *H is an infinitesimal generator,*

(2) *([9]) $d\omega_{(z,w)} \cdot (H(z), H(w)) \leq 0, \quad \forall z, w \in \mathbb{D}, z \neq w,$*

(3) *([3]) there exist $a \in \mathbb{C}$ and $q : \mathbb{D} \to \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, w \geq 0\}$ holomorphic such that for all $z \in \mathbb{D}$*

$$H(z) = a - \overline{a}z^2 - zq(z),$$

(4) *(Berkson-Porta's formula [8]) there exist $\tau \in \overline{\mathbb{D}}$ and $p : \mathbb{D} \to \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, w \geq 0\}$ holomorphic such that for all $z \in \mathbb{D}$*

$$H(z) = (\tau - z)(1 - \overline{\tau}z)p(z).$$

SKETCH OF THE PROOF. – We already saw the equivalence between (1) and (2). Now, if $H(0) = 0$ the previous discussion shows that $H(z) = -zp(z)$ for some holomorphic function $p : \mathbb{D} \to \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, w \geq 0\}$. Hence (3) and (4) holds with $a = \tau = 0$ and they are equivalent to (1) and (2) in such a case.

Now, using the infinitesimal Poincaré metric, given by $ds^2 = \dfrac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}$, and the shrinking properties of holomorphic self-maps of the unit disc and arguing similarly as above (see also [1, Thm. 1.4.14]), one can show that H is an infinitesimal generator if and only if

$$\mathrm{Re}\,[2\overline{z}H(z) + (1 - |z|^2)H'(z)] \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

As a consequence, the set of infinitesimal generators is a real cone with vertex 0. Now, given $a \in \mathbb{C}$, a direct computation shows that the holomorphic vector field $\mathbb{D} \ni z \mapsto g_a(z) = a - \overline{a}z^2$ is a generator of a group of automorphisms of $\mathbb{D}$. Namely, both g_a and $-g_a$ are infinitesimal generator. Therefore, a holomorphic vector field H is an infinitesimal generator if and only if $H - g_a$ is an infinitesimal generator for all $a \in \mathbb{C}$. Hence, setting $a := H(0)$, it follows that a holomorphic vector field H is an infinitesimal generator if and only if

$$\mathrm{Re}\,\langle H(z) - g_a(z), z\rangle \leq 0.$$

This implies that (3) is equivalent to (1) and (2). The equivalence with (4) in case $\tau \neq 0$ relies on dynamical properties of the semigroups which we are not going to discuss in here, and therefore it is omitted. □

REMARK 5.4. – Berkson-Porta's formula (4) relates the infinitesimal generator H with the dynamical properties of the associated semigroup (ϕ_t). In particular, the point τ is (except in the case of a group of rotation) the attractive fixed point of the semigroup, *i.e.*, $\phi_t(z) \to \tau$ as $t \to \infty$ for all $z \in \mathbb{D}$.

5.1 – *Higher dimension*

In higher dimension one can replace the Poincaré distance with the Kobayashi distance. First, we recall the definition of Kobayashi distance (see [28] for details and properties). Let M be a complex manifold and let $z, w \in M$. A *chain of analytic discs* between z and w is a finite family of holomorphic mappings $f_j : \mathbb{D} \to M$, $j = 1, \dots, m$ and points $t_j \in (0,1)$ such that

$$f_1(0) = z, f_1(t_1) = f_2(0), \dots, f_{m-1}(t_{m-1}) = f_m(0), f_m(t_m) = w.$$

We denote by $\mathcal{C}_{z,w}$ the set of all chains of analytic discs joining z to w. Let $L \in \mathcal{C}_{z,w}$. The *length of* L, denoted by $\ell(L)$ is given by

$$\ell(L) := \sum_{j=1}^{m} \omega(0, t_j) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \log \frac{1+t_j}{1-t_j}.$$

We define the *Kobayashi (pseudo)distance* $k_M(z,w)$ as follows:

$$k_M(z,w) := \inf_{L \in \mathcal{C}_{z,w}} \ell(L).$$

If M is connected, then $k_M(z,w) < +\infty$ for all $z, w \in M$. Moreover, by construction, it satisfies the triangular inequality. However, it might be that $k_M(z,w) = 0$ even if $z \neq w$ (a simple example is represented by $M = \mathbb{C}$, where $k_{\mathbb{C}} \equiv 0$). In the unit disc, $k_{\mathbb{D}} \equiv \omega$.

DEFINITION 5.5. – *A complex manifold M is said to be* (Kobayashi) hyperbolic *if $k_M(z,w) > 0$ for all $z, w \in M$ such that $z \neq w$. Moreover, M is said* complete hyperbolic *if k_M is complete.*

Important examples of complete hyperbolic manifolds are given by bounded convex domains in $\mathbb{C}^n$.

The main property of the Kobayashi distance is the following: let M, N be two complex manifolds and let $f : M \to N$ be holomorphic. Then for all $z, w \in M$ it holds

$$k_N(f(z), f(w)) \leq k_M(z,w).$$

It can be proved that if M is complete hyperbolic, then k_M is Lipschitz continuous (see [6]). If M is a bounded strongly convex domain in $\mathbb{C}^n$ with smooth

boundary, L. Lempert (see, *e.g.* [28]) proved that the Kobayashi distance is of class C^∞ outside the diagonal. In any case, even if k_m is not smooth, one can consider the differential dk_M as the Dini-derivative of k_m, which coincides with the usual differential at almost every point in $M \times M$.

The following characterization of infinitesimal generators is proved for strongly convex domains in [9], and in general in [6]:

THEOREM 5.6. – *Let M be a complete hyperbolic complex manifold and let H be an holomorphic vector field on M. Then the following are equivalent.*

(1) *H is an infinitesimal generator,*
(2) *For all $z, w \in M$ with $z \neq w$ it holds*

$$(dk_M)_{(z,w)} \cdot (H(z), H(w)) \leq 0.$$

6. – Ld-Herglotz vector fields and Evolution families

In the previous section we saw that the classical Herglotz vector fields which appear in the Loewner equation have the property to be infinitesimal generators for all fixed times. We will exploit such a fact to define a general family of Herglotz vector fields. As a matter of notation, if M is a complex manifold, we let $\|\cdot\|$ be a Hermitian metric on TM and d_M the corresponding integrated distance.

DEFINITION 6.1. – *Let M be a complex manifold. A* weak holomorphic vector field of order $d \geq 1$ *on M is a mapping $G : M \times \mathbb{R}^+ \to TM$ with the following properties:*

(i) *The mapping $G(z, \cdot)$ is measurable on $\mathbb{R}^+$ for all $z \in M$.*
(ii) *The mapping $G(\cdot, t)$ is a holomorphic vector field on M for all $t \in \mathbb{R}^+$.*
(iii) *For any compact set $K \subset M$ and all $T > 0$, there exists a function $C_{K,T} \in L^d([0, T], \mathbb{R}^+)$ such that*

$$\|G(z, t)\| \leq C_{K,T}(t), \quad z \in K, \text{ a.e. } t \in [0, T].$$

A *Herglotz vector field of order $d \geq 1$* is a weak holomorphic vector field $G(z, t)$ of order d with the property that $M \ni z \mapsto G(z, t)$ is an infinitesimal generator for almost all $t \in [0, +\infty)$.

REMARK 6.2. – If M is complete hyperbolic, then a weak holomorphic vector field $G(z, t)$ of order d if a Herglotz vector field of order d if and only if

$$(dk_M)_{(z,w)} \cdot (G(z, t), G(w, t)) \leq 0, \quad z, w \in M, z \neq w, \quad \text{a.e. } t \geq 0. \tag{6.1}$$

This is proved in [9] for strongly convex domains, and in [6] for the general case.

Using the so-called distortion theorem for holomorphic mappings $p : \mathbb{D} \to \{w \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, w > 0\}$ and the Berkson-Porta formula in Theorem 5.3, it can be proved that a classical Herglotz vector field as in the sense of Definition 2.5 or given as in the Kufarev-Loewner equation (3.2), is a Herglotz vector field of order ∞ in the unit disc in the sense of the previous definition.

Herglotz vector fields in the unit disc can be decomposed by means of Herglotz functions (and this the reason for the name). We begin with the following definition:

DEFINITION 6.3. – *Let $d \in [1, +\infty]$. A* Herglotz function of order d *is a function $p : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ with the following properties:*

(1) *For all $z \in \mathbb{D}$, the function $[0, +\infty) \ni t \mapsto p(z, t) \in \mathbb{C}$ belongs to $L^d_{loc}([0, +\infty), \mathbb{C})$;*

(2) *For all $t \in [0, +\infty)$, the function $\mathbb{D} \ni z \mapsto p(z, t) \in \mathbb{C}$ is holomorphic;*

(3) *For all $z \in \mathbb{D}$ and for all $t \in [0, +\infty)$, we have $\mathsf{Re}\, p(z, t) \geq 0$.*

Then we have the following result which, using the Berkson-Porta formula, gives a general form of the classical Herglotz vector fields:

THEOREM 6.4 [10]. – *Let $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ be a measurable function and let $p : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ be a Herglotz function of order $d \in [1, +\infty)$. Then the map $G_{\tau,p} : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ given by*

$$G_{\tau,p}(z, t) = (z - \tau(t))(\overline{\tau(t)}z - 1)p(z, t),$$

for all $z \in \mathbb{D}$ and for all $t \in [0, +\infty)$, is a Herglotz vector field of order d on the unit disc.

Conversely, if $G : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ is a Herglotz vector field of order $d \in [1, +\infty)$ on the unit disc, then there exist a measurable function $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ and a Herglotz function $p : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ of order d such that $G(z, t) = G_{\tau,p}(z, t)$ for almost every $t \in [0, +\infty)$ and all $z \in \mathbb{D}$.

Moreover, if $\tilde{\tau} : [0, +\infty) \to \overline{\mathbb{D}}$ is another measurable function and $\tilde{p} : \mathbb{D} \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ is another Herglotz function of order d such that $G = G_{\tilde{\tau},\tilde{p}}$ for almost every $t \in [0, +\infty)$ then $p(z, t) = \tilde{p}(z, t)$ for almost every $t \in [0, +\infty)$ and all $z \in \mathbb{D}$ and $\tau(t) = \tilde{\tau}(t)$ for almost all $t \in [0, +\infty)$ such that $G(\cdot, t) \not\equiv 0$.

We also give a generalization of the concept of evolution families:

DEFINITION 6.5. – *Let M be a complex manifold. A family $(\varphi_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ of holomorphic self-mappings of M is an* evolution family of order $d \geq 1$ *(or L^d-evolution family) if it satisfies the* evolution property

$$\varphi_{s,s} = \mathsf{id}, \quad \varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}, \quad 0 \leq s \leq u \leq t, \tag{6.2}$$

and if for any $T > 0$ and for any compact set $K \subset\subset M$ there exists a function $c_{T,K} \in L^d([0,T], \mathbb{R}^+)$ such that

$$d_M(\varphi_{s,t}(z), \varphi_{s,u}(z)) \leq \int_u^t c_{T,K}(\xi) d\xi, \quad z \in K,\ 0 \leq s \leq u \leq t \leq T. \tag{6.3}$$

REMARK 6.6. – The Schwarz lemma and distortion estimates imply that a classical evolution family in the sense of Definition 2.4 is an evolution family of order ∞ in $\mathbb{D}$.

A classical evolution family in the sense of Definition 2.4 is, by its very definition, constituted by univalent maps, while this is not required *a priori* in the general definition of evolution family given in Definition 6.5. However, it is always a case that an evolution family is made of univalent functions, as the following proposition (cf. [5, Prop. 2.3]) shows:

PROPOSITION 6.7. – *Let $d \in [1, +\infty]$. Let $(\varphi_{s,t})$ be an L^d-evolution family for some $d \geq 1$. Then for all $0 \leq s \leq t$ the map $M \ni z \mapsto \varphi_{s,t}(z)$ is univalent.*

PROOF. – We proceed by contradiction. Suppose there exists $0 < s < t$ and $z \neq w$ in M such that $\varphi_{s,t}(z) = \varphi_{s,t}(w)$. Set $r := \inf\{u \in [s,t] : \varphi_{s,u}(z) = \varphi_{s,u}(w)\}$. By Lemma [11, Lemma 2], $\lim_{u \to s+} \varphi_{s,u} = \mathsf{id}$ uniformly on compacta, we have $r > s$. If $u \in (s,r)$,

$$\varphi_{u,r}(\varphi_{s,u}(z)) = \varphi_{u,r}(\varphi_{s,u}(w)),$$

and since $\varphi_{s,u}(z) \neq \varphi_{s,u}(w)$, the mappings $\varphi_{u,r}$, $u \in (s,r)$, are not univalent on a fixed relatively compact subset of M. But again by [11, Lemma 2], $\lim_{u \to r-} \varphi_{u,r} = \mathsf{id}$ uniformly on compacta, which is a contradiction since the identity mapping is univalent. □

REMARK 6.8. – If (ϕ_t) is a continuous semigroup of holomorphic self-maps of a complex manifold M, one can define an evolution family $(\varphi_{s,t})$ by setting

$$\varphi_{s,t} := \phi_{t-s}, \quad s \leq t.$$

It is not too difficult to check that $(\varphi_{s,t})$ is a L^∞-evolution family in the sense of the above Definition 6.5.

The classical Loewner and Kufarev-Loewner equations can be generalized as follows:

THEOREM 6.9. – *Let M be a complete hyperbolic complex manifold. Then for any Herglotz vector field G of order $d \in [1, +\infty]$ there exists a unique L^d-evo-*

lution family $(\varphi_{s,t})$ *over* M *such that for all* $z \in M$

$$\frac{\partial \varphi_{s,t}}{\partial t}(z) = G(\varphi_{s,t}(z), t) \quad \text{a.e. } t \in [s, +\infty). \tag{6.4}$$

Conversely for any L^d*-evolution family* $(\varphi_{s,t})$ *over* M *there exists a Herglotz vector field* G *of order* d *such that* (6.4) is satisfied. Moreover, if H is another weak holomorphic vector field which satisfies (6.4) *then* $G(z,t) = H(z,t)$ *for all* $z \in M$ *and almost every* $t \in \mathbb{R}^+$.

Equation (6.4) is the bridge between the Ld-Herglotz vector fields and L^d-evolution families. The result has been proved in [10] for the case $M = \mathbb{D}$ the unit disc in $\mathbb{C}^n$. In [10] it has been proved to hold for any complete hyperbolic complex manifold M with Kobayashi distance of class C^1 outside the diagonal, but the construction given there only allowed to start with evolution families of order $d = +\infty$. Next, in [26] the case of L^d-evolution families has been proved for the case $M = \mathbb{B}^n$ the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Finally, in [6], L. Arosio and the author proved Theorem 6.9 in complete generality.

The previous equation, especially in the case of the unit ball of $\mathbb{C}^n$ and for the case $d = +\infty$, with evolution families fixing the origin and having some particular first jets at the origin has been studied by many authors, we cite here J.A. Pfaltzgraff [39], [40], T. Poreda [44], I. Graham, H. Hamada, G. Kohr [22], I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr [23] (see also [25]).

The strong relation between semigroups and evolution families on the one side and Herglotz vector fields and infinitesimal generators on the other side, is very much reflected by the so-called "product formula" in convex domains of S. Reich and D. Shoikhet [45] (see also [46]), generalized on complete hyperbolic manifold in [6]. Such a formula can be rephrased as follows: let $G(z,t)$ be a Herglotz vector field on a complete hyperbolic complex manifold M. For almost all $t \geq 0$, the holomorphic vector field $M \ni z \mapsto G(z,t)$ is an infinitesimal generator. Let (ϕ_r^t) be the associated semigroups of holomorphic self-maps of M. Let $(\varphi_{s,t})$ be the evolution family associated to $G(z,t)$. Then, uniformly on compacta of M it holds

$$\phi_t^r = \lim_{m\to\infty} \varphi_{t,t+\frac{r}{m}}^{\circ m} = \lim_{m\to\infty} \underbrace{(\varphi_{t,t+\frac{r}{m}} \circ \ldots \circ \varphi_{t,t+\frac{r}{m}})}_{m}.$$

Using such a formula for the case of the unit disc $\mathbb{D}$, in [12] it has been proved the following result which gives a description of semigroups-type evolution families:

THEOREM 6.10. – *Let* $G(z,t)$ *be a* L^d*-Herglotz vector field in* $\mathbb{D}$ *and let* $(\varphi_{s,t})$ *be the associated* L^d*-evolution family. The following are equivalent:*

(1) *there exists a function* $g \in L^d_{loc}([0,+\infty), \mathbb{C})$ *and an infinitesimal generator* H *such that* $G(z,t) = g(t)H(z)$ *for all* $z \in \mathbb{D}$ *and almost all* $t \geq 0$,

(2) $\varphi_{s,t} \circ \varphi_{u,v} = \varphi_{u,v} \circ \varphi_{s,t}$ *for all* $0 \leq s \leq t$ *and* $0 \leq u \leq v$.

7. – Abstract Loewner chains

In order to end up the picture started with the classical Loewner theory, we should put in the frame also the Loewner chains.

In the unit disc $\mathbb{D}$, the general theory of Loewner chains has been settled by M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal and P. Gumenyuk [13], who showed that to each L^d-evolution family (φ_t) is associated an (essentially unique) "Ld-Loewner chain" (f_t) of univalent maps $f_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ such that $f_s = f_t \circ \varphi_{s,t}$ for all $0 \le s \le t$. Their proof relies on a limiting process similar (although technically more complicated) to the classical case.

From this point of view, if $D \subset \mathbb{C}^n$ is a bounded domain, apparently, it seems natural to define a Loewner chain as a family of univalent mappings $f_t : D \to \mathbb{C}^n$. In fact, in case $D = \mathbb{B}^n$ the unit ball, much effort has been done to show that, given an evolution family $(\varphi_{s,t})$ on $\mathbb{B}^n$ such that $\varphi_{s,t}(0) = 0$ and $d(\varphi_{s,t})_0$ has a special form, then there exists an associated Loewner chain. We cite here the contributions of J.A. Pfaltzgraff [39], [40], T. Poreda [44], I. Graham, H. Hamada, G. Kohr [22], I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr [23], L. Arosio [4], M. Voda [48]. In the last two mentioned papers, resonances phenomena among the eigenvalues of $d(\varphi_{s,t})_0$ are taken into account. However, the (very natural) fact that resonances enter into the game, gives a clue that possibly, Loewner chains with range in $\mathbb{C}^n$ might not always exist. Not to talk about evolution families on a complex manifold: in such a case, what is the appropriated target domain for Loewner chains?

The previous question, which leads to a very general theory, has been answer in [5]. Interesting and surprisingly enough, regularity conditions – which were basic in the classical theory for assuming the limiting process to converge – do not play any role. In order to explain our results, we give some definition:

DEFINITION 7.1. – *Let M be a complex manifold. An* algebraic evolution family *is a family $(\varphi_{s,t})_{0\le s\le t}$ of univalent self-mappings of M satisfying the evolution property* (6.2).

A L^d-evolution family is an algebraic evolution family because all elements of a L^d-evolution family are injective as we showed before.

DEFINITION 7.2. – *Let M, N be two complex manifolds of the same dimension. A family $(f_t)_{t\ge 0}$ of holomorphic mappings $f_t : M \to N$ is a* subordination chain *if for each $0 \le s \le t$ there exists a holomorphic mapping $v_{s,t} : M \to M$ such that $f_s = f_t \circ v_{s,t}$. A subordination chain (f_t) and an algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ are* associated *if*

$$f_s = f_t \circ \varphi_{s,t}, \quad 0 \le s \le t.$$

An *algebraic Loewner chain* is a subordination chain such that each mapping $f_t : M \to N$ is univalent. The *range* of an algebraic Loewner chain is defined as

$$\mathsf{rg}\,(f_t) := \bigcup_{t\geq 0} f_t(M).$$

Note that an algebraic Loewner chain (f_t) has the property that

$$f_s(M) \subset f_t(M), \quad 0 \leq s \leq t.$$

We have the following result which relates algebraic evolution families with algebraic Loewner chains, whose proof is essentially based on abstract categorial analysis:

THEOREM 7.3 [5]. – *Let M be a complex manifold. Then any algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ on M admits an associated algebraic Loewner chain $(f_t\colon M \to N)$. Moreover if $(g_t\colon M \to Q)$ is a subordination chain associated with $(\varphi_{s,t})$ then there exist a holomorphic mapping $\Lambda\colon \mathsf{rg}\,(f_t) \to Q$ such that*

$$g_t = \Lambda \circ f_t, \quad \forall t \geq 0.$$

The mapping Λ is univalent if and only if (g_t) is an algebraic Loewner chain, and in that case $\mathsf{rg}\,(g_t) = \Lambda(\mathsf{rg}\,(f_t))$.

PROOF. – We define an equivalence relation on the product $M \times \mathbb{R}^+$:

$$(x,s) \sim (y,t) \quad \text{iff} \quad \varphi_{s,u}(x) = \varphi_{t,u}(y) \text{ for } u \text{ large enough.}$$

and we let $N := (M \times \mathbb{R}^+)/_\sim$. Let $\pi\colon M \times \mathbb{R}^+ \to N$ be the projection on the quotient, and let $i_t\colon M \to M \times \mathbb{R}^+$ be the injection $i_t(x) = (x,t)$. Define a family of mappings $(f_t\colon M \to N)$ as

$$f_t := \pi \circ i_t, \quad t \geq 0.$$

Each mapping f_t is injective and by construction

$$f_s = f_t \circ \varphi_{s,t}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Thus we have $f_s(M) \subset f_t(M)$ for $0 \leq s \leq t$ and $N = \bigcup_{t\geq 0} f_t(M)$.

Endow the product $M \times \mathbb{R}^+$ with the product topology, considering on $\mathbb{R}^+$ the discrete topology. Endow N with the quotient topology. Each mapping f_t is continuous and open, hence it is an homeomorphism onto its image and we define a complex structure on N by considering the M-valued charts $(f_t^{-1}, f_t(M))$ for all $t \geq 0$.

If $(g_t\colon M \to Q)$ is a subordination chain associated with $(\varphi_{s,t})$, then the map $\Psi\colon M \times \mathbb{R}^+ \to Q$

$$(z,t) \mapsto g_t(z)$$

is compatible with the equivalence relation $\sim$, thus it passes to the quotient defining a holomorphic mapping $\Lambda: N \to Q$ such that

$$g_t = \Lambda \circ f_t, \quad t \geq 0.$$

□

The previous theorem shows that the range $\mathsf{rg}(f_t)$ of an algebraic Loewner chain (f_t) is uniquely defined up to biholomorphisms. In particular, given an algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ one can define its *Loewner range* $\mathsf{Lr}(\varphi_{s,t})$ as the class of biholomorphism of the range of any associated algebraic Loewner chain.

As one can suspect, the L^d regularity of an algebraic evolution family passes to the associated algebraic Loewner chain. This is the right definition:

DEFINITION 7.4. – *Let $d \in [1, +\infty]$. Let M, N be two complex manifolds of the same dimension. Let d_N be the distance induced by a Hermitian metric on N. An algebraic Loewner chain $(f_t: M \to N)$ is a Ld-*Loewner chain *(for $d \in [1, +\infty]$) if for any compact set $K \subset\subset M$ and any $T > 0$ there exists a $k_{K,T} \in L^d([0, T], \mathbb{R}^+)$ such that*

$$d_N(f_s(z), f_t(z)) \leq \int_s^t k_{K,T}(\xi) d\xi \tag{7.1}$$

for all $z \in K$ and for all $0 \leq s \leq t \leq T$.

The L^d-regularity passes from evolution family to Loewner chains and back:

THEOREM 7.5 [5]. – *Let M be a complete hyperbolic manifold with a given Hermitian metric and $d \in [1, +\infty]$. Let $\varphi_{s,t}$ be an algebraic evolution family on M and let $(f_t: M \to N)$ be an associated algebraic Loewner chain. Then $(\varphi_{s,t})$ is a L^d-evolution family on M if and only if (f_t) is a Ld-Loewner chain.*

As one can imagine, once the general Loewner equation is established and Loewner chains have been well defined, even the Loewner-Kufarev PDE can be generalized. We state here a result in this sense from [5]:

THEOREM 7.6. – *Let M be a complete hyperbolic complex manifold, and let N be a complex manifold of the same dimension. Let $G: M \times \mathbb{R}^+ \to TM$ be a Herglotz vector field of order $d \in [1, +\infty]$ associated with the L^d-evolution family $(\varphi_{s,t})$. Then a family of univalent mappings $(f_t: M \to N)$ is an Ld-Loewner chain associated with $(\varphi_{s,t})$ if and only if it is locally absolutely continuous on $\mathbb{R}^+$ locally uniformly with respect to $z \in M$ and solves the Loewner-Kufarev PDE*

$$\frac{\partial f_s}{\partial s}(z) = -(df_s)_z G(z, s), \quad a.e.\ s \geq 0, z \in M.$$

7.1 – *The Loewner range*

As we saw before, given a L^d-evolution family (or just an algebraic evolution family) on a complex manifold, it is well defined the Loewner range $\mathsf{Lr}(\varphi_{s,t})$ as the class of biholomorphism of the range of any associated Loewner chain.

Note that if a manifold N is in the Loewner range of an evolution family $(\varphi_{s,t})$ on a complex manifold M, *i.e.*, the biholomorphic class of N coincides with $\mathsf{Lr}(\varphi_{s,t})$, then there exists a Loewner chain (f_t) associated to $(\varphi_{s,t})$ such that $\bigcup_{t\geq 0} f_t(M) = N$.

One can ask if it is possible to know the Loewner range in case M is a given manifold. For instance, if M is the unit disc $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, the results of [13] imply that the Loewner range of any evolution family of the unit disc is a domain in $\mathbb{C}$ (possibly $\mathbb{C}$ itself as in the classical case). We first start with the following simple remark:

REMARK 7.7. – If M is simply connected (and non compact) then the Loewner range of any algebraic evolution family of M is simply connected (and non compact). Indeed, if $f_t : M \to N$ is an associated algebraic Loewner chain, then the Loewner range is biholomorphic to the union of $f_t(M)$ which is an increasing sequence of simply connected domains.

In particular, if $M = \mathbb{D}$ the unit disc, then the Loewner range of any evolution family on $\mathbb{D}$ is a simply connected non compact Riemann surface, thus, by the uniformization theorem, the Loewner range is either the unit disc $\mathbb{D}$ or $\mathbb{C}$.

In higher dimension the situation is however different: there exists an algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ on $\mathbb{B}^3$ which does not admit any associated algebraic Loewner chain with range in $\mathbb{C}^3$ (see [4, Section 9.4]). The example is however not regular, and in fact it is not known whether there exists a L^d-evolution family on $\mathbb{B}^n$ whose Loewner range does not contain any open domain of $\mathbb{C}^n$.

One can somehow try to understand the biholomorphic type of the Loewner range of an evolution family $(\varphi_{s,t})$ by looking at the dynamics of the family itself. Philosophically this makes sense if one consider the equation $f_t \circ \varphi_{s,t} = f_s$ as a sort of "bi-parametric linearization". The idea is the following: let $\varphi : M \to M$ be a univalent map. If there exists a univalent map $\sigma : M \to N$, called "intertwining map", such that $\sigma \circ \varphi = \Phi \circ \sigma$, where $\Phi : N \to N$ is an automorphism, one says that σ *linearizes* the map φ. The automorphism Φ is generally very simple, but the image $\sigma(M)$ in N might have a complicated geometry, which reflects the dynamics of φ.

Starting from this considerations, it is natural to give some answers based on the asymptotic behavior of the Kobayashi pseudometric under the corresponding evolution family.

DEFINITION 7.8. – *Let M be a complex manifold. The Kobayashi pseudometric $\kappa_M : TM \to \mathbb{R}^+$ is defined by*

$$\kappa_M(z;v) := \inf\left\{ r > 0 : \exists g : \mathbb{D} \to M \text{ holomorphic } : g(0) = z, g'(0) = \frac{1}{r}v \right\}.$$

The Kobayashi pseudometric has the remarkable property of being contracted by holomorphic maps, and its integrated distance is exactly the Kobayashi pseudodistance. We refer the reader to [1] and [28] for details.

DEFINITION 7.9. – *Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family on a complex manifold M. For $v \in T_zM$ and $s \geq 0$ we define*

$$\beta_z^s(v) := \lim_{t\to\infty} \kappa_M(\varphi_{s,t}(z); (d\varphi_{s,t})_z(v)). \tag{7.2}$$

Since the Kobayashi pseudometric is contracted by holomorphic mappings the limit in (7.2) is well defined.

The function β is the bridge between the dynamics of an algebraic evolution family $(\varphi_{s,t})$ and the geometry of its Loewner range. Indeed, in [5] it is proved that, if N is a representative of the Loewner range of $(\varphi_{s,t})$ and $(f_t : M \to N)$ is an associated algebraic Loewner chain, then for all $z \in M$ and $v \in T_zM$ it follows

$$f_s^* \kappa_N(z;v) = \beta_z^s(v).$$

REMARK 7.10. – Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family in the unit disc $\mathbb{D}$. The previous formula allows to determine the Loewner range: if $\beta_z^s(v) = 0$ for some $s > 0, z \in \mathbb{D}$ (v can be taken to be 1), then the Loewner range is $\mathbb{C}$, otherwise it is $\mathbb{D}$.

Such a result can be generalized to a complex manifold M. Let $\mathsf{aut}(M)$ denote the group of holomorphic automorphisms of a complex manifold M. Using a result by J. E. Fornss and N. Sibony [21], in [5] it is shown that the previous formula implies

THEOREM 7.11. – *Let M be a complete hyperbolic complex manifold and assume that $M/\mathsf{aut}(M)$ is compact. Let $(\varphi_{s,t})$ be an algebraic evolution family on M. Then*

(1) *If there exists $z \in M$, $s \geq 0$ such that $\beta_z^s(v) \neq 0$ for all $v \in T_zM$ with $v \neq 0$ then $\mathsf{Lr}(\varphi_{s,t})$ is biholomorphic to M.*

(2) *If there exists $z \in M$, $s \geq 0$ such that $\dim_{\mathbb{C}}\{v \in T_zM : \beta_z^s(v) = 0\} = 1$ then $\mathsf{Lr}(\varphi_{s,t})$ is a fiber bundle with fiber $\mathbb{C}$ over a closed complex submanifold of M.*

In particular one can apply the previous result to $M = \mathbb{B}^n$ (or even to the polydiscs in $\mathbb{C}^n$) and obtaining that any algebraic evolution family on the unit ball

$\mathbb{B}^n$ such that for some $z \in \mathbb{B}^n$, $s \geq 0$ it follows that $\dim_{\mathbb{C}}\{v \in \mathbb{C}^n : \beta_z^s(v) = 0\} \leq 1$, has an open domain in $\mathbb{C}^n$ contained in its Loewner range.

Finally, we note that the Loewner range of an evolution family is strictly related to the so called "abstract basin of attraction" of a family of random maps, as studied in hyperbolic dynamics. We refer the reader to [7] for more about this.

REFERENCES

[1] M. Abate, *Iteration Theory of Holomorphic Maps on Taut Manifolds*, Mediterranean Press, Rende, Cosenza, 1989.

[2] M. Abate - F. Bracci - M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal, *The evolution of Loewner's differential equations* Newsletter European Math. Soc. **78** (December 2010), 31-38.

[3] D. Aharonov - S. Reich - D. Shoikhet, *Flow invariance conditions for holomorphic mappings in Banach spaces*. Math. Proc. R. Ir. Acad. **99A**, no. 1 (1999), 93-104.

[4] L. Arosio, *Resonances in Loewner equations*, Adv. Math. **227** (2011), 1413-1435.

[5] L. Arosio - F. Bracci - H. Hamada - G. Kohr, *Loewner's theory on complex manifolds*, J. Anal. Math., to appear.

[6] L. Arosio - F. Bracci, *Infinitesimal generators and the Loewner equation on complete hyperbolic manifolds*, Anal. Math. Phys., **1**, 4 (2011), 337-350.

[7] L. Arosio, *Basins of attraction in Loewner equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., to appear.

[8] E. Berkson - H. Porta, *Semigroups of holomorphic functions and composition operators,* Michigan Math. J. **25** (1978), 101-115.

[9] F. Bracci - M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal, *Pluripotential theory, semigroups and boundary behavior of infinitesimal generators in strongly convex domains*, J. Eur. Math. Soc. **12** (2010), 23-53.

[10] F. Bracci - M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal, *Evolution Families and the Loewner Equation I: the unit disc*, J. Reine Angew Math. (Crelle's Journal), **672**, (2012), 1-37.

[11] F. Bracci - M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal, *Evolution Families and the Loewner Equation II: complex hyperbolic manifolds*, Math. Ann. **344** (2009), 947-962.

[12] F. Bracci - M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal, *Semigroups versus evolution families in the Loewner theory*. J. Anal. Math, **115**, 1, (2011), 273-292.

[13] M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal - P. Gumenyuk, *Loewner chains in the unit disc*, Rev. Mat. Iberoamericana, **26**, 3 (2010), 975-1012.

[14] M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal - P. Gumenyuk, *Loewner Theory in annulus I: evolution families and differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[15] M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal - P. Gumenyuk, *Loewner theory in annulus II: Loewner chains* Anal. Math. Phys., **1**, 4, (2011), 351-385.

[16] M. D. Contreras - S. Díaz-Madrigal - P. Gumenyuk, *Local duality in Loewner equations*, in preparation.

[17] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. **154** (1985), 137-152.

[18] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York, 1983.

[19] C. Earle - A. Epstein, *Quasiconformal variation of slit domains*. Proc. Amer. math. Soc. **129** (2001), 3363-3372.

[20] C. H. FitzGerald - Ch. Pommerenke, *The de Branges theorem on univalent functions*. Trans. Amer. Math. Soc. **290**, no. 2 (1985), 683-690.
[21] J. E. Fornæss - N. Sibony, *Increasing sequences of complex manifolds*. Math. Ann. **255** (1981), 351-360.
[22] I. Graham - H. Hamada - G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math., **54** (2002), 324-351.
[23] I. Graham - H. Hamada - G. Kohr - M. Kohr, *Asymptotically spirallike mappings in several complex variables*, J. Anal. Math., **105** (2008), 267-302.
[24] I. Graham - G. Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.
[25] I. Graham - G. Kohr - J. A. Pfaltzgraff, *The general solution of the Loewner differential equation on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Contemporary Math. (AMS), **382** (2005), 191-203.
[26] H. Hamada - G. Kohr - J. R. Muir, *Extension of* L^d*-Loewner chains to higher dimensions*. Preprint, 2011.
[27] W. Kager - B. Nienhuis - L. P. Kadanoff, *Exact solutions for Loewner evolutions*. J. Statist. Phys. **115**, 3-4 (2004), 805-822.
[28] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998
[29] P. P. Kufarev, *On one-parameter families of analytic functions,* (in Russian) Mat. Sb. **13** (1943), 87-118.
[30] P. P. Kufarev, *On integrals of a very simple differential equation with movable polar singularity in the right hand side* (in Russian) Tomsk. Gos. Univ. Uchen. Zap. no. 1 (1946), 35-48.
[31] P. P. Kufarev, *A remark on the integrals of the Loewner eqaution*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **57** (1947), 655-656 (in Russian).
[32] P. P. Kufarev - V. V. Sobolev - L. V. Sporysheva, *A certain method of investigation of extremal problems for functions that are univalent in the half-plane*, Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat. **200** (1968), 142-164.
[33] G. F. Lawler, *Conformally invariant processes in the plane*, Mathematical surveyes and monograph, vol. 114, Amer. Math. Soc. (2005).
[34] G. F. Lawler - O. Schramm - W. Werner, *Values of Brownian intersection exponents. I. Half-plane exponents*, Acta Math. **187** (2001), 237-273.
[35] G. F. Lawler - O. Schramm - W. Werner, *Values of Brownian intersection exponents. II. Plane exponents,* Acta Math. **187** (2001), 275-308.
[36] K. Loewner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. **89** (1923), 103-121.
[37] J. R. Lind, *A sharp condition for the Loewner equation to generate slits*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **30**, 1 (2005), 143-158.
[38] D. E. Marshall - S. Rohde, *The Loewner differential equation and slit mappings*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), 763-778.
[39] J. A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., **210** (1974), 55-68.
[40] J. A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Acad. Scie. Fenn. Ser. A I Math., **1** (1975), 13-25.
[41] D. Prokhorov - A. Vasil'ev, *Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation*, in Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics (Birkhuser Verlag, 2009), 455-463.
[42] Ch. Pommerenke, *Über dis subordination analytischer funktionen*, J. Reine Angew Math. **218** (1965), 159-173.
[43] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[44] T. Poreda, *On generalized differential equations in Banach spaces*, Dissertationes Mathematicae, **310** (1991), 1-50.
[45] S. Reich - D. Shoikhet, *Metric domains, holomorphic mappings and nonlinear semigroups*, Abstr. Appl. Anal. **3**, no. 1-2 (1998), 203-228.
[46] S. Reich - D. Shoikhet, *Nonlinear Semigroups, Fixed Points, and Geometry of Domains in Banach Spaces*, Imperial College Press, London, 2005.
[47] O. Schramm, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math. **118** (2000), 221-288.
[48] M. Voda, *Solution of a Loewner chain equation in several variables*, J. Math. Anal. Appl. **375**, no. 1 (2011), 58-74.

Dipartimento Di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"
Via Della Ricerca Scientifica 1, 00133, Roma, Italy
E-mail:fbracci@mat.uniroma2.it

Received December 13, 2011 and in revised form February 14, 2012

Andrea Cianchi: Autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami e disuguaglianze isoperimetriche ed isocapacitarie

Andrea Cianchi
Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze
email: cianchi@unifi.it

Sunto

Stime per autovalori e autofunzioni di operatori differenziali di tipo ellittico sono classiche in vari campi della matematica, dalla teoria delle equazioni alle derivate parziali, alla fisica matematica, all'analisi armonica, alla geometria differenziale. In questa esposizione sarà presentato un approccio alle stime per autofunzioni basato sull'uso di disuguaglianze isocapacitarie e di certe funzioni ad esse collegate, che in letteratura si dicono isocapacitarie. Tra i vari ambiti in cui questo approccio si dimostra efficace, rientrano problemi agli autovalori del tipo

$$\Delta_M u + \lambda u = 0 \qquad \text{su } M, \tag{1}$$

dove M è una varietà Riemanniana completa e Δ_M indica l'operatore di Laplace-Beltrami su M.

Saranno prese in considerazione maggiorazioni per le autofunzioni u di (1) della forma

$$\|u\|_{L^q(M)} \leq C\|u\|_{L^2(M)}\,, \tag{2}$$

dove $p \in (2, \infty]$, e C è una costante indipendente da u. Tali maggiorazioni sono ben note quando M è compatta. Raffinamenti con precisazioni sulla costante C sono stati dimostrati in anni recenti, per esempio in [H.F.Smith & C.D.Sogge, Acta Math., 198 (2007)] e [C.D.Sogge & S.Zelditch, Duke Math. J., 114 (2002)].

Quando M non è compatta, disuguaglianze del tipo (2) non sono in generale vere. Si daranno condizioni ottimali su una varietà non necessariamente compatta M, di volume finito, formulate in termini della sua funzione isocapacitaria, affinché valga una stima della forma (2). Parallelamente, si discuteranno criteri basati sulla più standard funzione isoperimetrica di M. Si mostrerà come l'uso di disuguaglianze isocapacitarie sia più appropriato in generale, portando a risultati applicabili in situazioni in cui tecniche basate su disuguaglianze isoperimetriche falliscono. È questo il caso in cui la varietà M presenta configurazioni geometriche molto complicate.

Si accennerà infine all'impiego di questi strumenti nello studio di un'altro problema nell'analisi spettrale: la caratterizzazione delle varietà M non compatte su cui lo spettro dell'operatore di Laplace-Beltrami è discreto.

I risultati sono oggetto dei lavori [A. C. & V. G. Maz'ya, Amer. J. Math., in corso di stampa], [A. Cianchi & V. G. Maz'ya, J. Diff. Geom., in corso di stampa].

Intervento: Andrea Cianchi,
Eigenfunctions of the Laplace-Beltrami Operator, and Isoperimetric and Isocapacitary Inequalities,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 167–190**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 167-190

Eigenfunctions of the Laplace-Beltrami Operator, and Isoperimetric and Isocapacitary Inequalities (*)

ANDREA CIANCHI

1. – Introduction

This is a slightly expanded version of a talk that I delivered in the occasion of the XIX Congress of the Italian Mathematical Society held in Bologna in September 2011. I wish to thank the Scientific Committee and the Organizing Committee of the Congress for their kind invitation, of which I am sincerely honored.

We shall discuss some methods of geometric nature in the study of qualitative and quantitative aspects of eigenvalue problems for the Laplace operator, and some of its generalizations. Among various issues of relevance on this topic, two questions will be focused. On the one hand, information on the spectrum of the Laplacian, and, in particular, on its discreteness, will be provided. On the other hand, criteria for the regularity of eigenfunctions, and specifically their integrability and boundedness, will be illustrated. The results to be presented are the fruits of a collaboration with V. G. Maz'ya.

A prototypal instance of the problems at hand concerns the Laplace operator in a bounded open subset Ω of $\mathbb{R}^n$ coupled with (homogenous) Dirichlet boundary conditions. The Dirichlet Laplacian on Ω, denoted by Δ_Ω^D, is the semi-definite self-adjoint operator in the Hilbert space $L^2(M)$ associated with the closed bilinear form

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \tag{1.1}$$

which is defined for u and v in the Sobolev space $W_0^{1,2}(\Omega)$.

The spectrum of the operator Δ_Ω^D is discrete, namely its continuous spectrum is empty, and all the eigenvalues have finite multiplicity. This is a classics in spectral theory – see e.g. [RS].

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 14 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

In a PDE's setting, the eigenvalue problem for the Laplacian under Dirichlet boundary conditions takes the form

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Recall that a function $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ is an eigenfunction of problem (1.2) associated with the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R}$ if

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \tag{1.3}$$

for every test function $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Standard regularity results ensure that any eigenfunction u of problem (1.2) is bounded in Ω. Moreover, a sharp estimate is known for any $L^q(\Omega)$ norm of u in terms of its $L^2(\Omega)$ norm. A result of [PR] and [Chi] tells us that, if $q \in (2, \infty]$, then

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C(n, q, \lambda) \|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.4}$$

for every eigenfunction u of (1.2) associated with the eigenvalue λ, where

$$C(n, q, \lambda) = n\omega_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{(q-2)n}{4q}} \frac{\left(\int_0^{j_{\frac{n}{2}-1}} r^{n-1+q-\frac{qn}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r)^q dr \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^{j_{\frac{n}{2}-1}} r J_{\frac{n}{2}-1}(r)^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}}\,,$$

$j_{\frac{n}{2}-1}$ is the first positive zero of the Bessel function $J_{\frac{n}{2}-1}$, and $\omega_n = \pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, the Lebesgue measure of the unit ball in $\mathbb{R}^n$. Moreover, equality holds in (1.4) if and only if Ω is a ball, and λ is the smallest Dirichlet eigenvalue in Ω.

A key tool in the proof of inequality (1.4) is the standard isoperimetric inequality in $\mathbb{R}^n$ due to De Giorgi [D], which, loosely speaking, amounts to saying that the ball minimizes perimeter among all sets in $\mathbb{R}^n$ of given measure. More precisely, on denoting by $|E|$ the Lebesgue measure of a set E in $\mathbb{R}^n$, and by $P(E)$ its perimeter (in the sense of geometric measure theory [Ma7, Zi]), the isoperimetric inequality in $\mathbb{R}^n$ asserts that

$$n\omega_n^{1/n} |E|^{1/n'} \le P(E) \tag{1.5}$$

for every measurable set E in $\mathbb{R}^n$ having finite measure.

Variants in this basic setting lead to different conclusions, whose proofs require other tools. This is the case, for instance, when eigenvalue problems for the Laplacian under Neumann boundary conditions are considered.

The Neumann Laplacian in an open set Ω of finite measure in $\mathbb{R}^n$, denoted by Δ_Ω^N, is the semi-definite self-adjoint operator in the Hilbert space $L^2(M)$ associated with the same closed bilinear form $a(u,v)$ as in (1.1), but now defined for u and v in the whole Sobolev space $W^{1,2}(\Omega)$.

The Neumann counterpart of (1.2) is problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

An eigenfunction u of the Laplacian under homogeneous Neumann boundary conditions is a solution to (1.6) for some $\lambda \in \mathbb{R}$. This amounts to requiring that $u \in W^{1,2}(\Omega)$, and fulfills the equality

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \tag{1.7}$$

for every test function $v \in W^{1,2}(\Omega)$.

Unlike that of Δ_Ω^D, the spectrum of Δ_Ω^N need not be discrete if Ω is irregular. Moreover, the (possible) eigenfunctions u of (1.6) may not belong to $L^q(\Omega)$ for $q > 2$.

Thus, the question arises of minimal regularity conditions on Ω for the spectrum of Δ_Ω^N to be discrete, or for an estimate of the form

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.8}$$

to hold for some $q \in (2,\infty]$, for some constant $C = C(\Omega, q, \lambda)$, and for any eigenfunction u of (1.6) associated with the eigenvalue λ.

One purpose of this exposition to point out how these issues can be addressed on making use of a variant of the isoperimetric inequality (1.5), called the relative isoperimetric inequality in Ω, where subsets E of Ω are considered, and the $(n-1)$-dimensional Hausdorff measure of just the inner part of the boundary of E comes into play. An inequality involving a suitable capacity – the condeser capacity – of subsets of Ω, instead of their perimeter, will be shown to be even more effective in dealing with very iregular domains.

In fact, our discussion will be carried out in a broader framework, where the open set Ω is possibly replaced with a more general noncompact n-dimensional Riemannian manifold M. Accordingly, the Laplace-Beltrami operator on M will be taken into account.

The analysis of spectral problems for the Laplace-Beltrami operator on Riemannian manifolds is a very classical issue. We do not even attempt to provide an exhaustive bibliography on this matter; let us just mention the reference monographs [Cha, BGM], and the papers [Bou, Br, BD, Che, CGY, DS, Do1, Do2, Es, Ga, Gr2, HSS, JMS, Na, SS, So, SZ, Ya]. Most contributions to this topic regard compact manifolds.

Our main focus will be instead on the case when

$$M \text{ need not be compact,}$$

and

$$\mathcal{H}^n(M) < \infty\,,$$

an assumption which will be kept in force throughout. Here, $\mathcal{H}^n$ denotes the n-dimensional Hausdorff measure on M, namely the volume measure associated with the Riemannian metric on M. We shall also assume that M is connected.

Minimal conditions on the geomerty of the manifold M for the discreteness of the spectrum of the Laplace-Beltrami operator, and for $L^q(M)$ or $L^\infty(M)$ estimates for eigenfunctions will be presented.

Information on the regularity of the geometry of M will be retained either through the isocapacitary function ν_M, or the isoperimetric function I_M of M. They are the largest functions of the measure of subsets of M which can be estimated by the capacity, or by the perimeter of the relevant subsets, respectively. Loosely speaking, the asymptotic behavior of ν_M and I_M at 0 accounts for the regularity of the geometry of the noncompact manifold M: decreasing this regularity causes $\nu_M(s)$ and $I_M(s)$ to decay faster to 0 as s goes to 0. The inequalities associated with ν_M and I_M are called the isocapacitary inequality and the isoperimetric inequality on M, respectively.

Let us mention that the isoperimetric function of open sets in $\mathbb{R}^n$ was introduced in [Ma1], and employed in the study of Sobolev inequalities [Ma1], and in a priori estimates for solutions to elliptic boundary value problems [Ma2, Ma6]. Isocapacitary functions were introduced and used in [Ma1, Ma3, Ma4, Ma5, Ma7] in the characterization of Euclidean Sobolev embeddings. Later investigations and applications of the isoperimetric function, as well as extensions to the case of Riemannian manifolds, can be found e.g. in [CGL, Ga, Gr1, Gr2, GP, Kl].

Both the conditions in terms of ν_M, and those in terms of I_M, that will be imposed for the spectrum to be discrete, or for the validity of eigenfunction estimates are sharp in the class of manifolds M with prescribed asymptotic behavior of ν_M and I_M at 0. Each one of these two approaches has its own advantages. The isoperimetric function I_M has an apparent geometric nature, and it is usually easier to investigate. Although the isocapacitary function can be less simple to be analyzed, its use is in a sense more appropriate, since it not only implies the results involving I_M, but also applies in situations where the latter does not. Typically, this is the case when manifolds with complicated geometric configurations are taken into account.

The results outlined in the present note are the object of the papers [CM2] and [CM3], to which we refer for a more detailed exposition and for proofs. Let us mention that methods relying upon the use of isoperimetric and isocapacitary

functions have also been successfully applied to deal with existence [ACMM] and regularity [CM1, CM4] of solutions to Neumann boundary value problems in irregular domains and with irregular data.

2. – Perimeter and capacity

Let E be a measurable subset of M. Its perimeter $P(E)$ can be defined as

$$P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E)\,,$$

where $\mathcal{H}^{n-1}$ stands for the $(n-1)$-dimensional Hausdorff measure on M induced by its Riemannian metric. Recall that $\partial^* E$ agrees with the topological boundary ∂E of E when E is sufficiently regular, for instance an n-dimensional Riemannian submanifold (with boundary) of M. In the special case when M is an open subset Ω of $\mathbb{R}^n$, and $E \subset \Omega$, we have that $P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap \Omega)$.

The isoperimetric function $I_M : [0, \mathcal{H}^n(M)/2] \to [0, \infty]$ of M is defined as

$$I_M(s) = \inf\{P(E) : s \le \mathcal{H}^n(E) \le \mathcal{H}^n(M)/2\} \qquad \text{for } s \in [0, \mathcal{H}^n(M)/2]\,. \tag{2.1}$$

The isoperimetric inequality

$$I_M(\mathcal{H}^n(E)) \le P(E) \qquad \text{if } 0 < \mathcal{H}^n(E) \le \mathcal{H}^n(M)/2\,, \tag{2.2}$$

is a straightforward consequence of definition (2.1). The function I_M is explicitly known only for manifolds in special classes [BC, CF, CGL, GP, MHH, Kl, MJ, Pi, Ri], including Euclidean balls and spheres [BuZa, Ci2, Ma7]. Qualitative and quantitative information on I_M is however available under fairly general assumptions – see e.g. [BuZa, Ci1, HK, KM, La, Ma7]. In particular, the fact that M is connected ensures that

$$I_M(s) > 0 \qquad \text{for } s \in (0, \mathcal{H}^n(M)/2]. \tag{2.3}$$

The asymptotic behavior of I_M at 0 depends on the regularity of the geometry of M. For instance, if M is compact, or if it is an open set in $\mathbb{R}^n$ with Lipschitz boundary, then

$$I_M(s) \approx s^{1/n'} \qquad \text{near } 0. \tag{2.4}$$

Here, and in what follows, the notation

$$f \approx g \qquad \text{near } 0 \tag{2.5}$$

for functions $f, g : (0, \infty) \to [0, \infty)$ means that there exist positive constants c_1, c_2 and s_0 such that

$$c_1 g(c_1 s) \le f(s) \le c_2 g(c_2 s) \qquad \text{if } s \in (0, s_0). \tag{2.6}$$

The notion of capacity is related to that of the Sobolev space $W^{1,2}(M)$. The latter is defined as

$$W^{1,2}(M) = \{u \in L^2(M) : \quad u \text{ is weakly differentiable on } M \text{ and } |\nabla u| \in L^2(M)\}\,.$$

Here, ∇u denotes the gradient of u on M, and $|\nabla u|$ is its length in the Riemannian metric of M. We adopt the notation $W_0^{1,2}(M)$ for the closure in $W^{1,2}(M)$ of the set of smooth compactly supported functions on M.

The standard capacity of a set $E \subset M$ can be defined as

$$C(E) = \inf\left\{\int_M |\nabla u|^2\,dx : u \in W_0^{1,2}(M), u \geq 1 \text{ in some open neighbourhood of } E\right\}. \tag{2.7}$$

A property is said to hold quasi everywhere in M, briefly q.e., if it is fulfilled outside a set of capacity zero.

Each function $u \in W^{1,2}(M)$ has a precise representative $\widetilde{u}$ which is quasi continuous, in the sense that for every $\varepsilon > 0$, there exists a set $A \subset M$, with $C(A) < \varepsilon$, such that the restriction of $\widetilde{u}$ to $M \setminus A$ is continuous. The function $\widetilde{u}$ is unique, up to subsets of capacity zero. In what follows, we assume that any function $u \in W^{1,2}(M)$ is precisely represented. A standard result in the theory of capacity ensures that, for every set $E \subset M$,

$$C(E) = \inf\left\{\int_M |\nabla u|^2\,dx : u \in W_0^{1,2}(M), u \geq 1 \text{ q.e. in } E\right\} \tag{2.8}$$

(see e.g. [MZ, Corollary 2.25]).

A variant of the capacity $C(E)$, of use in our applications, is the condenser capacity $C(E,G)$ of the sets $E \subset G \subset M$, which is defined as

$$C(E,G) = \inf\left\{\int_M |\nabla u|^2\,dx : u \in W^{1,2}(M),\ u \geq 1 \text{ q.e. in } E \text{ and } u \leq 0 \text{ q.e. in } M \setminus G\right\}. \tag{2.9}$$

Accordingly, the isocapacitary function $v_M : [0, \mathcal{H}^n(M)/2] \to [0,\infty]$ of M is given by

$$\begin{aligned} v_M(s) = \inf\big\{C(E,G) : E \text{ and } G \text{ are measurable subsets of } M \text{ such that} \\ E \subset G \subset M \text{ and } s \leq \mathcal{H}^n(E) \leq \mathcal{H}^n(G) \leq \mathcal{H}^n(M)/2\big\} \\ \text{for } s \in [0, \mathcal{H}^n(M)/2]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

The ensuing isocapacitary inequality reads

$$v_M(\mathcal{H}^n(E)) \leq C(E,G) \qquad \text{if } 0 < \mathcal{H}^{n-1}(E) \leq \mathcal{H}^n(M)/2\,. \tag{2.11}$$

The function v_M is clearly non-decreasing. The functions v_M and I_M are related by the inequality

$$v_M(s) \geq \frac{1}{\int_s^{\mathcal{H}^n(M)/2} \frac{dr}{I_M(r)^2}} \qquad \text{for } s \in (0, \mathcal{H}^n(M)/2). \tag{2.12}$$

Let us notice that a reverse inequality in (2.12) does not hold in general, even up to a multiplicative constant.

Combining (2.3) and (2.12) tells us that

$$v_M(s) > 0 \qquad \text{for } s \in [0, \mathcal{H}^n(M)/2]. \tag{2.13}$$

When M is compact, or when it is an open set in $\mathbb{R}^n$ with Lipschitz boundary, one can exploit equations (2.4) and (2.12) to show that

$$v_M(s) \approx \begin{cases} s^{\frac{n-2}{n}} & \text{if } n \geq 3, \\ \left(\log \dfrac{1}{s}\right)^{-1} & \text{if } n = 2, \end{cases} \tag{2.14}$$

near 0.

3. – Discreteness of the spectrum

Given any n-dimensional Riemannian manifold M as in Section 1, we denote by Δ_M the semi-definite self-adjoint Laplace operator in the Hilbert space $L^2(M)$ associated with the closed bilinear form

$$a(u, v) = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\mathcal{H}^n(x),$$

defined for u and v in the Sobolev space $W^{1,2}(M)$. Here, $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ stands for the scalar product induced by the Riemannian metric on M.

This definition of Δ_M includes various special instances. For example, if the space $C_0^\infty(M)$ of smooth compactly supported functions on M is dense in $W^{1,2}(M)$, the operator Δ_M agrees with the Friedrichs extension of the classical Laplacian, regarded as an unbounded operator on $L^2(M)$ with domain $C_0^\infty(M)$. This is certainly the case when M is complete [Ro, St], and, in particular, if M is compact. When M is an open subset Ω of $\mathbb{R}^n$, the operator Δ_Ω agrees with the Neumann Laplacian Δ_Ω^N on Ω.

In the present section we deal with the problem of the discreteness of the spectrum of Δ_M. This property is well known when M is compact, or when M is an open subset of $\mathbb{R}^n$ with finite measure and sufficiently regular boundary. However, the spectrum of Δ_M may be not discrete in general.

Special situations, which are not included in this standard frameworks, have been considered in the literature by ad hoc methods. For instance, conditions for the discreteness of the spectrum of the Laplacian on noncompact complete manifolds with a peculiar structure are the object of [Ba, Bro, DL, Es, Kl1, Kl2].

A necessary and sufficient condition on a Riemannian manifold M for the spectrum of Δ_M to be discrete can be given in terms of its isocapacitary function ν_M.

THEOREM 3.1 (Manifolds with a discrete spectrum). – *The spectrum of Δ_M is discrete if and only if*

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{\nu_M(s)} = 0\,. \tag{3.1}$$

Theorem 3.1, combined with inequality (2.12), yields a sufficient condition for the discreteness of the spectrum of Δ_M in terms of the isoperimetric function I_M of M.

COROLLARY 3.2 (Discreteness of the spectrum via I_M). – *Assume that*

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{I_M(s)} = 0\,. \tag{3.2}$$

Then the spectrum of Δ_M is discrete.

Let us point out that conditions (3.1) and (3.2), as well as any other criterium involving ν_M or I_M that will exhibited in what follows, are invariant under replacements of ν_M or I_M with functions which are equivalent near 0 in the sense of (2.5).

Observe that in particular, the classical result on the discreteness of the spectrum of the Laplacian on any compact Riemannian manifold M can be recovered either via Theorem 3.1, or via Corollary 3.2, owing to (2.4), or (2.14), respectively.

Although not necessary for a single manifold M, assumption (3.2) is essentially minimal for the spectrum of Δ_M to be discrete in classes of manifolds M with prescribed isoperimetric function I_M. To be more specific, consider any non-decreasing function $I : [0,\infty) \to [0,\infty)$, vanishing only at 0, and such that

$$\frac{I(s)}{s^{\frac{n-1}{n}}} \approx \text{ a non-decreasing function near } 0. \tag{3.3}$$

Then, there exists an n-dimensional Riemannian manifold of revolution M fulfilling

$$I_M(s) \approx I(s) \qquad \text{near } 0, \tag{3.4}$$

[CM3, Proposition 4.3]. Note that assumption (3.3) is required in the light of the fact that (2.4) holds for any compact manifold M, and that $I_M(s)$ cannot decay more slowly to 0 as $s \to 0$ in the noncompact case. Now, if I is such that $\limsup_{s\to 0} \frac{s}{I(s)} > 0$, then

$$\limsup_{s\to 0} \frac{s}{I_M(s)} > 0 \tag{3.5}$$

as well. Owing to Proposition 5.1, Section 5 below, condition (3.5) for the relevant manifold of revolution M is equivalent to

$$\limsup_{s\to 0} \frac{s}{\nu_M(s)} > 0,$$

and, by Theorem 3.1, the latter implies that the spectrum of Δ_M is not discrete.

A key step, of possible independent interest, in the derivation of Theorem 3.1 is the next theorem, showing the equivalence of condition (3.1) to the compactness of the embedding

$$W^{1,2}(M) \to L^2(M). \tag{3.6}$$

THEOREM 3.3. – *Embedding* (3.6) *is compact if and only if* (3.1) *holds.*

Indeed, a standard result in the theory of positive-definite self-adjoint operators in Hilbert spaces (see e.g. [BS, Chapter 10, Section 1, Theorem 5]) ensures that the discreteness of the spectrum of the operator $-\Delta_M + \mathrm{Id}$, and hence of $-\Delta_M$, on M is equivalent to the compactness of embedding (3.6).

4. – Eigenfunction estimates

We are concerned here with estimates for eigenfunctions of the Laplacian on the manifold M, namely functions $u \in W^{1,2}(M)$ fulfilling

$$\int_M \langle \nabla u\,, \nabla v\rangle \, d\mathcal{H}^n(x) = \lambda \int_M u\, v \, d\mathcal{H}^n(x) \tag{4.1}$$

for some $\lambda \in \mathbb{R}$, and for every test function $v \in W^{1,2}(M)$.

Note that, if M is a complete Riemannian manifold, then (4.1) is equivalent to the weak formulation of the equation

$$\Delta u + \lambda u = 0 \qquad \text{on } M, \tag{4.2}$$

where Δ denotes the Laplace-Beltrami operator on M, called Laplacian in what follows, for simplicity. In the case where M is an open subset Ω of $\mathbb{R}^n$, equation

(4.1) agrees with (1.7), and hence solutions to (4.1) are eigenfunctions of the Neumann problem (1.6).

When M is compact, one easily infers, via local regularity results for elliptic equations, that any eigenfunction u of the Laplacian belongs to $L^\infty(M)$. Explicit bounds, with sharp dependence on the eigenvalue λ, are also available [SS, SZ], and require sophisticated tools from differential geometry and harmonic analysis. If the compactness assumption is dropped, then the membership of u to $W^{1,2}(M)$ only (trivially) implies that $u \in L^2(M)$. Higher integrability of eigenfunctions is not guaranteed anymore. Our aim is to exhibit minimal assumptions on M ensuring $L^q(M)$ bounds for all $q<\infty$, or even $L^\infty(M)$ bounds for eigenfunctions of the Laplacian on M. The results to be presented can be easily extended to linear uniformly elliptic differential operators, in divergence form, with merely measurable coefficients on M. Let us emphasize, however, that they provide nontrivial new information even for the Neumann Laplacian on open subsets of $\mathbb{R}^n$.

4.1 – L^q *estimates for eigenfunctions*

An optimal condition on the decay of v_M at 0 ensuring $L^q(M)$ estimates for eigenfunctions of the Laplacian on M for $q \in (2,\infty)$ is contained in the following theorem. Interestingly enough, such a condition is independent of q.

THEOREM 4.1 (L^q bounds for eigenfunctions via v_M). – *Assume that*

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{v_M(s)} = 0\,. \tag{4.3}$$

Then for any $q \in (2,\infty)$ and for any eigenvalue λ, there exists a constant $C = C(v_M, q, \lambda)$ such that

$$\|u\|_{L^q(M)} \le C\|u\|_{L^2(M)} \tag{4.4}$$

for every eigenfunction u of the Laplacian on M associated with λ.

An estimate for the constant C in inequality (4.4) can also be provided.

PROPOSITION 4.2. – *Define the function $\Theta : (0, \mathcal{H}^n(M)/2] \to [0,\infty)$ as*

$$\Theta(s) = \sup_{r\in(0,s)} \frac{r}{v_M(r)} \qquad \text{for } s \in (0, \mathcal{H}^n(M)/2].$$

Then inequality (4.4) *holds with*

$$C(v_M, q, \lambda) = \frac{C_1}{\left(\Theta^{-1}(C_2/\lambda)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}}\,,$$

where $C_1 = C_1(q, \mathcal{H}^n(M))$ *and* $C_2 = C_2(q, \mathcal{H}^n(M))$ *are suitable constants, and* Θ^{-1} *is the generalized left-continuous inverse of* Θ.

EXAMPLE 4.3. – Assume that $n \geq 3$, and there exists $\beta \in [(n-2)/n, 1)$ such that the manifold M fulfils $v_M(s) \geq Cs^\beta$ for some positive constant C and for $s \in [0, \mathcal{H}^n(M)/2]$. Then (4.3) holds, and, by Proposition 4.2, for every $q \in (2, \infty)$ there exists an constant $C = C(q, \mathcal{H}^n(M))$ such that

$$\|u\|_{L^q(M)} \leq C\lambda^{\frac{q-2}{2q(1-\beta)}}\|u\|_{L^2(M)}$$

for every eigenfunction u of the Laplacian on M associated with the eigenvalue λ.

Let us note that, by Theorem 3.3, condition (4.3) turns out to be equivalent to the compactness of the embedding $W^{1,2}(M) \to L^2(M)$. Hence, in particular, the variational characterization of the eigenvalues of the Laplacian on M entails that they certainly exist under (4.3). Observe that condition (4.3) is also equivalent to the discreteness of the spectrum of Δ_M on M provided by Theorem 3.1.

The next result shows that assumption (4.3) is essentially minimal in Theorem 4.1, in the sense that $L^q(M)$ regularity of eigenfunctions may fail under the mere assumption that

$$v_M(s) \approx s \qquad \text{near } 0.$$

THEOREM 4.4 (Sharpness of condition (4.3)). – *For any* $n \geq 2$ *and* $q \in (2, \infty]$, *there exists an* n*-dimensional Riemannian manifold* M *such that*

$$v_M(s) \approx s \qquad \textit{near } 0, \tag{4.5}$$

and the Laplacian on M *has an eigenfunction* $u \notin L^q(M)$.

The manifold mentioned in Theorem 4.4 is a manifold of revolution from a family described in Subsection 5.1 below.

The following criterion for $L^q(M)$ bounds of eigenfunctions in terms of the isoperimetric function I_M can be obtained from Theorem 4.1 and inequality (2.12).

THEOREM 4.5 (L^q bounds for eigenfunctions via I_M). – *Assume that*

$$\lim_{s \to 0} \frac{s}{I_M(s)} = 0\,. \tag{4.6}$$

Then for any $q \in (2, \infty)$ *and any eigenvalue* λ, *there exists a constant* $C = C(I_M, q, \lambda)$ *such that*

$$\|u\|_{L^q(M)} \leq C\|u\|_{L^2(M)} \tag{4.7}$$

for every eigenfunction u *of the Laplacian on* M *associated with* λ.

An analogue of Theorem 4.4 on the minimality of assumption (4.6) in Theorem 4.5 is contained in the the next result, showing that, for every $q > 2$, eigenfunctions which do not belong to $L^q(M)$ may actually exist when

$$I_M(s) \approx s \qquad \text{near } 0.$$

THEOREM 4.6 (Sharpness of condition (4.6)). – *For any $n \geq 2$ and $q \in (2, \infty]$, there exists an n-dimensional Riemannian manifold M such that*

$$I_M(s) \approx s \qquad \textit{near } 0, \tag{4.8}$$

and the Laplacian on M has an eigenfunction $u \notin L^q(M)$.

4.2 – *Boundedness of eigenfunctions*

The boundedness of eigenfunctions cannot be established via the criterion of Theorem 4.1. This is instead the object of the following result, where a slight strengthening of assumption (4.3) is shown to yield $L^\infty(M)$ estimates for eigenfunctions of the Laplacian on M.

THEOREM 4.7 (Boundedness of eigenfunctions via v_M). – *Assume that*

$$\int_0 \frac{ds}{v_M(s)} < \infty\,. \tag{4.9}$$

Then, for any eigenvalue λ, there exists a constant $C = C(v_M, \lambda)$ such that

$$\|u\|_{L^\infty(M)} \leq C\|u\|_{L^2(M)} \tag{4.10}$$

for every eigenfunction u of the Laplacian on M associated with λ.

Information on the constant C appearing in (4.10) is available.

PROPOSITION 4.8. – *Assume that* (4.9) *is in force. Define the function $\Xi : (0, \mathcal{H}^n(M)/2] \to [0, \infty)$ as*

$$\Xi(s) = \int_0^s \frac{dr}{v_M(r)} \qquad \textit{for } s \in (0, \mathcal{H}^n(M)/2].$$

Then inequality (4.10) *holds with*

$$C(v_M, \lambda) = \frac{C_1}{\left(\Xi^{-1}(C_2/\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}}\,,$$

where C_1 and C_2 are suitable absolute constants, and Ξ^{-1} is the generalized left-continuous inverse of Ξ.

EXAMPLE 4.9. – Assume that $n \geq 3$, and there exists $\beta \in [(n-2)/n, 1)$ such that the manifold M fulfils $v_M(s) \geq Cs^\beta$ for some positive constant C and for $s \in [0, \mathcal{H}^n(M)/2]$. Then (4.9) holds, and, by Proposition 4.8, there exists an absolute constant C such that

$$\|u\|_{L^\infty(M)} \leq C\lambda^{\frac{1}{2(1-\beta)}}\|u\|_{L^2(M)}$$

for every eigenfunction u of the Laplacian on M associated with the eigenvalue λ.

Condition (4.9) in Theorem 4.7 is essentially sharp for the boundedness of eigenfunctions of the Laplacian on M. In particular, it cannot be relaxed to (4.3), although the latter ensures $L^q(M)$ estimates for every $q < \infty$. Indeed, under some mild qualification, Theorem 4.10 below asserts that given (up to equivalence) any isocapacitary function fulfilling (4.3) but not (4.9), there exists a manifold M with the prescribed isocapacitary function on which the Laplacian has an unbounded eigenfunction.

A precise statement of this result involves the notion of function of class Δ_2. Recall that a non-decreasing function $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ is said to belong to the class Δ_2 near 0 if there exist constants c and s_0 such that

$$f(2s) \leq cf(s) \qquad \text{if } 0 < s \leq s_0. \tag{4.11}$$

THEOREM 4.10 (Sharpness of condition (4.9)). – *Let v be a non-decreasing function, vanishing only at 0, such that*

$$\lim_{s \to 0} \frac{s}{v(s)} = 0\,,$$

but

$$\int_0 \frac{ds}{v(s)} = \infty\,.$$

Assume in addition that $v \in \Delta_2$ near 0, and that either $n \geq 3$ and

$$\frac{v(s)}{s^{\frac{n-2}{n}}} \approx \text{ a non-decreasing function near } 0, \tag{4.12}$$

or $n = 2$ and there exists $\alpha > 0$ such that

$$\frac{v(s)}{s^\alpha} \approx \text{ a non-decreasing function near } 0. \tag{4.13}$$

Then, there exists an n-dimensional Riemannian manifold M fulfilling

$$v_M(s) \approx v(s) \qquad \text{near } 0, \tag{4.14}$$

and such that the Laplacian on M has an unbounded eigenfunction.

Assumption (4.12) or (4.13) in Theorem 4.10 is explained by the behavior (2.14) of ν_M when M is compact, and the fact that $\nu_M(s)$ cannot decay more slowly to 0 as $s \to 0$ in general. The assumption that $\nu \in \Delta_2$ near 0 is due to technical reasons.

A condition on I_M, parallel to (4.9), ensuring the boundedness of eigenfunctions of the Laplacian on M follows from Theorem 4.7 and inequality (2.12).

THEOREM 4.11 (Boundedness of eigenfunctions via I_M). – *Assume that*

$$\int_0 \frac{s}{I_M(s)^2}\, ds < \infty\,. \tag{4.15}$$

Then, for any eigenvalue λ, there exists a constant $C = C(I_M, \lambda)$ such that

$$\|u\|_{L^\infty(M)} \le C\|u\|_{L^2(M)} \tag{4.16}$$

for every eigenfunction u of the Laplacian on M associated with λ.

Our last result tell us that the gap between condition (4.15), ensuring $L^\infty(M)$ bounds for eigenfunctions, and condition (4.6), yielding $L^q(M)$ bounds for any $q < \infty$, cannot be essentially filled.

THEOREM 4.12 (Sharpness of condition (4.15)). – *Let I be a non-decreasing function, vanishing only at 0, such that*

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{I(s)} = 0\,,$$

but

$$\int_0 \frac{s}{I(s)^2}\, ds = \infty\,.$$

Assume in addition that

$$\frac{I(s)}{s^{\frac{n-1}{n}}} \;\approx\; \textit{a non-decreasing function near } 0. \tag{4.17}$$

Then, there exists an n-dimensional Riemannian manifold M fulfilling

$$I_M(s) \approx I(s) \qquad \textit{near } 0,$$

and such that the Laplacian on M has an unbounded eigenfunction.

Observe that assumption (4.17) agrees with (3.3), on which we commented in Section 3.

5. – Applications

We conclude with applications of the results of the preceding sections to two classes of Riemannian manifolds. The former consists of Riemannian manifolds of revolution, the latter of a family of surfaces in $\mathbb{R}^3$, each one containing a sequence of clustering submanifolds. The analysis of the surfaces from such a family will demonstrate the advantage in the use of isocapacitary inequalities, instead of the more standard isoperimetric inequalities, in the problems under consideration.

5.1 – *Manifolds of revolution*

Let $L \in (0, \infty]$, and let $\varphi : [0, L) \to [0, \infty)$ be a function in $C^1([0, L))$, such that

$$\varphi(r) > 0 \quad \text{for } r \in (0, L), \tag{5.1}$$

$$\varphi(0) = 0\,, \qquad \text{and} \qquad \varphi'(0) = 1\,. \tag{5.2}$$

Here, φ' denotes the derivative of φ. Given $n \geq 2$, we call n-dimensional manifold of revolution M associated with φ the ball in $\mathbb{R}^n$ given, in polar coordinates, by $\{(r, \omega) : r \in [0, L), \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ and endowed with the Riemannian metric

$$ds^2 = dr^2 + \varphi(r)^2 d\omega^2\,, \tag{5.3}$$

where $d\omega^2$ stands for the standard metric on the $(n-1)$-dimensional sphere $\mathbb{S}^{n-1}$. Owing to our assumptions on φ, the metric (5.3) is of class $C^1(M)$.

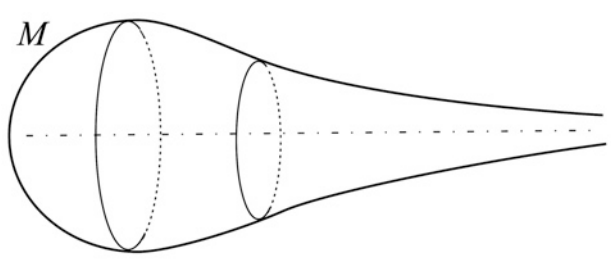


Fig. 1. – A manifold of revolution.

Under an additional convexity assumption near infinity, for the manifolds of this family conditions (4.3) and (4.6), and conditions (4.9) and (4.15) turn out to coincide, and can be formulated in terms of φ.

PROPOSITION 5.1. – *Let $L \in (0, \infty]$ and let $\varphi : [0, L) \to [0, \infty)$ be a function in $C^1([0, L))$ fulfilling* (5.1) *and* (5.2) *and such that:*

(i) $\lim_{r\to L} \varphi(r) = 0$;

(ii) *there exists* $L_0 \in (0, L)$ *such that* φ *is decreasing and convex in* (L_0, L);

(iii) $\int_0^L \varphi(\rho)^{n-1}\, d\rho < \infty$.

Then the metric of the n-dimensional manifold of revolution M built upon φ *is of class* $C^1(M)$, *and* $\mathcal{H}^n(M) < \infty$. *Moreover:*

(i) *Conditions* (4.3), (4.6), *and*

$$\lim_{r\to L} \left(\int_R^r \frac{d\rho}{\varphi(\rho)^{n-1}} \right) \left(\int_r^L \varphi(\rho)^{n-1} d\rho \right) = 0$$

are equivalent. Here, R is any number in $(0, L)$.

(ii) *Conditions* (4.9), (4.15), *and*

$$\int^L \left(\frac{1}{\varphi(r)^{n-1}} \int_r^L \varphi(\rho)^{n-1} d\rho \right) dr < \infty$$

are equivalent.

A characterization of those manifolds of revolution on which the spectrum of Δ_M is discrete follows from Theorem 3.1 and Proposition 5.1.

PROPOSITION 5.2. – *Let L and* φ *be as in the statement of Theorem* 5.1. *Let M be the n-dimensional manifold of revolution built upon* φ. *Then the spectrum of* Δ_M *is discrete if and only if*

$$\lim_{r\to L} \left(\int_R^r \frac{d\rho}{\varphi(\rho)^{n-1}} \right) \left(\int_r^L \varphi(\rho)^{n-1} d\rho \right) = 0$$

for any $R \in (0, L)$.

Estimates for eigenfunctions of the Laplacian on manifolds of revolution M are the content of the next result.

PROPOSITION 5.3. – *Let L and* φ *be as in the statement of Theorem* 5.1. *Let M be the n-dimensional manifold of revolution built upon* φ.

(i) *Assume that*

$$\lim_{r\to L} \left(\int_R^r \frac{d\rho}{\varphi(\rho)^{n-1}} \right) \left(\int_r^L \varphi(\rho)^{n-1} d\rho \right) = 0$$

for any $R \in (0, L)$. Then for every $q \in (2, \infty)$ and every eigenvalue λ of the Laplacian on M, there exists a constant $C = C(\varphi, q, \lambda)$ such that

$$\|u\|_{L^q(M)} \leq C\|u\|_{L^2(M)}$$

for every eigenfunction u associated with λ.

(ii) *Assume that*

$$\int^L \left(\frac{1}{\varphi(r)^{n-1}} \int_r^L \varphi(\rho)^{n-1} d\rho \right) dr < \infty.$$

Then for every eigenvalue λ of the Laplacian on M there exists a constant $C = C(\varphi, \lambda)$ such that

$$\|u\|_{L^\infty(M)} \leq C\|u\|_{L^2(M)}$$

for every eigenfunction u associated with λ.

Propositions 5.2 and 5.3 tell us that, as far as manifolds of revolution are concerned, methods based on the use of the isoperimetric function and of the isocapacitary function lead to equivalent results on the discreteness of the spectrum of Δ_M and eigenfunction estimates.

Let us specialize the results of Propositions 5.2 and 5.3 to the one-parameter family of manifolds of revolution M whose profile $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfies

$$\varphi(r) = e^{-r^\alpha} \qquad \text{for large } r. \tag{5.4}$$

One can show that

$$I_M(s) \approx s\big(\log(1/s)\big)^{1-1/\alpha} \qquad \text{near } 0, \tag{5.5}$$

and

$$\nu_M(s) \approx \left(\int_s^{\mathcal{H}^n(M)/2} \frac{dr}{I_M(r)^2} \right)^{-1} \approx s\big(\log(1/s)\big)^{2-2/\alpha} \qquad \text{near } 0. \tag{5.6}$$

An application of Proposition 5.2 ensures that the spectrum of Δ_M is discrete if and only if

$$\alpha > 1. \tag{5.7}$$

Owing to Part (i) of Proposition 5.3, under (5.7) all eigenfunctions of the Laplacian on M belong to $L^q(M)$. Moreover, by (5.6) and Proposition 4.2, there exist constants $C_1 = C_1(q)$ and $C_2 = C_2(q)$ such that

$$\|u\|_{L^q(M)} \leq C_1 e^{C_2 \lambda^{\frac{\alpha}{2\alpha-2}}} \|u\|_{L^2(M)}$$

for every eigenfunction u of the Laplacian associated with the eigenvalue λ.

On the other hand, Part (ii) of Proposition 5.3 tells us that the relevant eigenfunctions are bounded under the more stringent assumption that

$$\alpha > 2. \tag{5.8}$$

In particular, owing to (5.6) and Proposition 4.8,

$$\|u\|_{L^\infty(M)} \leq C_1 e^{C_2 \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-2}}} \|u\|_{L^2(M)}$$

for some absolute constants C_1 and C_2 and for every eigenfunction u associated with λ.

5.2 – *A family of manifolds with clustering submanifolds*

Here, we are concerned with a class of noncompact surfaces M in $\mathbb{R}^3$, which are reminiscent of a planar domain appearing in an example of [CH]. The relevant surfaces contain a sequence of mushroom-shaped submanifolds $\{N^k\}$ clustering at some point, which does not belong to the surface (Figure 2).

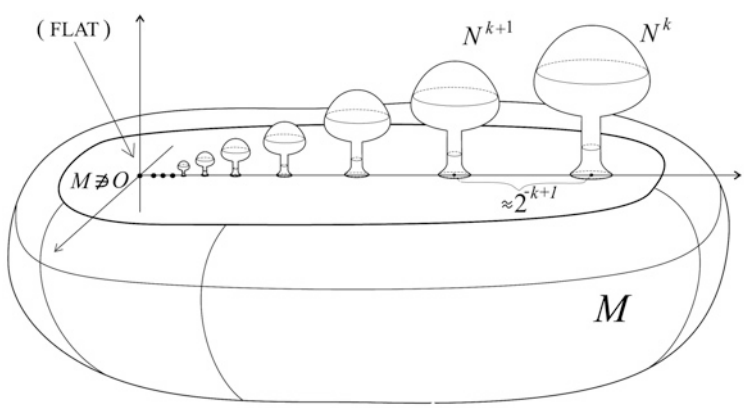


Fig. 2. – A manifold with a family of clustering submanifolds.

Let us emphasize that the submanifolds $\{N^k\}$ are not scalings of each other. Roughly speaking, the diameter of the head and the length of the neck of N^k decay to 0 as 2^{-k} when $k \to \infty$, whereas the width of the neck of N^k decays to 0 as $\sigma(2^{-k})$, where σ is a function such that

$$\lim_{s \to 0} \frac{\sigma(s)}{s} = 0. \tag{5.9}$$

The isoperimetric and isocapacitary functions of M depend on the behavior of σ at 0 in a way described in the next proposition. Roughly speaking, a faster

decay to 0 of the function $\sigma(s)$ as $s \to 0$ results in a faster decay to 0 of $I_M(s)$ and $v_M(s)$, and hence in a surface M with a more irregular geometry.

PROPOSITION 5.4. – *Let M be the surface described above. Assume that $\sigma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is an increasing function of class Δ_2 near 0, such that*

$$\frac{s^{\beta+1}}{\sigma(s)} \quad \textit{is non-increasing} \tag{5.10}$$

for some $\beta > 0$.

(i) *If*

$$\frac{s^2}{\sigma(s)} \quad \textit{is non-decreasing},$$

then

$$I_M(s) \approx \sigma(s^{1/2}) \qquad \textit{near } 0. \tag{5.11}$$

(ii) *If*

$$\frac{s^3}{\sigma(s)} \quad \textit{is non-decreasing},$$

then

$$v_M(s) \approx \sigma(s^{1/2})s^{-\frac{1}{2}} \qquad \textit{near } 0. \tag{5.12}$$

The operator Δ_M for the surfaces of this family can be described as follows.

PROPOSITION 5.5. – *Let M be the surface described above, with σ satisfying* (5.9). *Then*

$$\overline{C_0^\infty(M)} = W^{1,2}(M).$$

Hence, the operator Δ_M agrees with the Friedrichs extension of the Laplacian on M.

The next proposition relies upon the criterion for the discreteness of the spectrum of Δ_M in terms of the isocapacitary function of M given in Theorem 3.1.

PROPOSITION 5.6. – *Let M be the surface described above. Assume that $\sigma \in \Delta_2$ and fulfills* (5.10), *and that the function $\dfrac{s^3}{\sigma(s)}$ is monotonic. Then the spectrum of Δ_M (which, by Proposition* 5.5, *agrees with the Friedrichs extension of the Laplacian on M) is discrete if only if*

$$\lim_{s\to 0} \frac{s^3}{\sigma(s)} = 0\,. \tag{5.13}$$

Owing to equation (5.12), one can derive the following conditions for bounds of eigenfunctions of problem (4.1) via Theorems 4.1 and 4.7, whose criteria involve the isocapacitary function ν_M.

PROPOSITION 5.7. – *Let M be the surface described above with $\sigma \in \Delta_2$.*

(i) *Assume that*

$$\lim_{s\to 0} \frac{s^3}{\sigma(s)} = 0\,. \tag{5.14}$$

Then any eigenfunction of the Laplacian on M belongs to $L^q(M)$ for any $q<\infty$.

(ii) *Assume that*

$$\int_0 \frac{s^2}{\sigma(s)}\, ds < \infty\,. \tag{5.15}$$

Then any eigenfunction of the Laplacian on M is bounded.

Note that assumptions (5.14) and (5.15) are weaker than parallel assumptions which follow from an application of Theorems 4.5 and 4.11, and equation (5.11), and read

$$\lim_{s\to 0} \frac{s^2}{\sigma(s)} = 0\,, \tag{5.16}$$

and

$$\int_0 \frac{s^3}{\sigma(s)^2}\, ds < \infty\,, \tag{5.17}$$

respectively. For instance, if $b > 1$ and

$$\sigma(s) = s^b \qquad \text{for } s > 0,$$

then (5.14) and (5.15) amount to $b<3$, whereas (5.16) and (5.17) are equivalent to the more stringent condition that $b<2$. This shows that the use of ν_M can actually yield the discreteness of the spectrum of the Laplacian, and regularity of eigenfunctions, for manifolds where the criteria involving I_M do not apply.

Since, by (5.12), $\nu_M(s) \approx s^{\frac{b-1}{2}}$, from Examples 4.3 and 4.9 we deduce that there exists a constant $C = C(q)$ such that

$$\|u\|_{L^q(M)} \le C\lambda^{\frac{q-2}{q(3-b)}}\|u\|_{L^2(M)}$$

for every $q \in (2,\infty]$ and for any eigenfunction u of the Laplacian associated with the eigenvalue λ. Observe that the existence of such eigenfunction follows from condition (4.3), as explained in the comments following Theorem 4.1.

REFERENCES

[ACMM] A. Alvino - A. Cianchi - V. G. Maz'ya - A. Mercaldo, *Well-posed elliptic Neumann problems involving irregular data and domains*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **27** (2010), 1017-1054.

[Ba] A. Baider, *Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra*, J. Diff. Geom. **14** (1979), 41-57.

[BGM] M. Berger - P. Gauduchon - E. Mazet, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lecture notes in Mathematics 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[BC] I. Benjamini - J. Cao, *A new isoperimetric theorem for surfaces of variable curvature*, Duke Math. J. **85** (1996), 359-396.

[BS] M. S. Birman - M. Z. Solomjak, *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.

[Bou] J. Bourgain, *Geodesic restrictions and L^p-estimates for eigenfunctions of Riemannian surfaces*, Amer. Math. Soc. Tranl. **226** (2009), 27-25.

[Bro] B. Brooks, *On the spectrum of non-compact manifolds with finite volume*, Math. Zeit. **9** (1984), 425-432.

[Br] B. Brooks, *The bottom of the spectrum of a Riemannian covering*, J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 101-114.

[BuZa] Yu. D. Burago - V. A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[BD] V. I. Burenkov - E. B. Davies, *Spectral stability of the Neumann Laplacian*, J. Diff. Eq. **186** (2002), 485-508.

[Cha] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1984.

[CF] I. Chavel - E. A. Feldman, *Modified isoperimetric constants, and large time heat diffusion in Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **64** (1991), 473-499.

[Che] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigevalue of the Laplacian*, in Problems in analysis, 195-199, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[Chi] G. Chiti, *A reverse Hölder inequality for the eigenfunctions of linear second order elliptic operators*, Zeit. Angew. Math. Phys. (ZAMP) **33** (1982), 143-148.

[CGY] F. Chung - A. Grigor'yan - S.-T. Yau, *Higher eigenvalues and isoperimetric inequalities on Riemannian manifolds and graphs*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 969-1026.

[Ci1] A. Cianchi, *On relative isoperimetric inequalities in the plane*, Boll. Un. Mat. Ital. **3-B** (1989), 289-326.

[Ci2] A. Cianchi, *A sharp form of Poincaré type inequalities on balls and spheres*, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) **40** (1989), 558-569.

[Ci3] A. Cianchi, *Moser-Trudinger inequalities without boundary conditions and isoperimetric problems*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 669-705.

[CM1] A. Cianchi - V. G. Maz'ya, *Neumann problems and isocapacitary inequalities*, J. Math. Pures Appl. **89** (2008), 71-105.

[CM2] A. Cianchi - V. G. Maz'ya, *On the discreteness of the spectrum of the Laplacian on complete Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **87** (2011), 469-491.

[CM3] A. Cianchi - V. G. Maz'ya, *Bounds for eigenfunctions of the Laplacian on noncompact Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., to appear.

[CM4] A. Cianchi - V. G. Maz'ya, *Boundedness of solutions to the Schrödinger equation under Neumann boundary conditions*, J. Math. Pures Appl. **98** (2012), 654-688.

[CGL] T. COULHON - A. GRIGOR'YAN - D. LEVIN, *On isoperimetric profiles of product spaces*, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), 85-120.

[CH] R. COURANT - D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Springer, Berlin, 1937.

[DS] E. B. DAVIES - B. SIMON, *Spectral properties of the Neumann Laplacian of horns*, Geom. Funct. Anal. **2** (1992), 105-117.

[D] E. DE GIORGI, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, (Italian) Atti Accad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I **5** (1958) 33-44.

[Do1] H. DONNELLY, *Bounds for eigenfunctions of the Laplacian on compact Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **187** (2001), 247-261.

[Do2] H. DONNELLY, *Eigenvalue estimates for certain noncompact manifolds*, Michigan Math. J. **31** (1984), 349-357.

[DL] H. DONNELLY - P. LI, *Pure point spectrum and negative curvature for noncompact manifolds*, Duke Math. J. **46** (1979), 497-503.

[Es] J. F. ESCOBAR, *On the spectrum of the Laplacian on complete Riemannian manifolds*, Comm. Part. Diff. Equat. **11** (1986), 63-85.

[Ga] S. GALLOT, *Inégalités isopérimétriques et analitiques sur les variétés riemanniennes*, Asterisque **163** (1988), 31-91.

[Gr1] A. GRIGOR'YAN, *On the existence of positive fundamental solutions of the Laplace equation on Riemannian manifolds*, Mat. Sbornik **128** (1985), 354-363 (Russian); English translation: Math. USSR Sb. **56** (1987), 349-358.

[Gr2] A. GRIGOR'YAN, *Isoperimetric inequalities and capacities on Riemannian manifolds*, in The Maz'ya anniversary collection, Vol. 1 (Rostock, 1998), 139-153, Oper. Theory Adv. Appl., **109**, Birkhuser, Basel, 1999.

[GP] R. GRIMALDI - P. PANSU, *Calibrations and isoperimetric profiles*, Amer. J. Math. **129** (2007), 315-350.

[HK] P. HAIASZ - P. KOSKELA, *Isoperimetric inequalites and imbedding theorems in irregular domains*, J. London Math. Soc. **58** (1998), 425-450.

[He] E. HEBEY, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, American Math. Soc., Providence, 1999.

[HSS] R. HEMPEL - L. SECO - B. SIMON, *The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains*, J. Funct. Anal. **102** (1991), 448-483.

[HHN] M. HOFFMANN-OSTENHOF - T. HOFFMANN-OSTENHOF - N. NADIRASHVILI, *On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces*, Ann. Global Anal. Geom. **17** (1999), 43-48.

[JMS] V. JAKSIC - S. MOLCHANOV - B. SIMON, *Eigenvalue asymptotics of the Neumann Laplacian of regions and manifolds with cusps*, J. Funct. Anal. **106** (1992), 59-79.

[KM] T. KILPELÄINEN - J. MALÝ, *Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries*, Z. Anal. Anwendungen **19** (2000), 369-380.

[Kl1] R. KLEINE, *Discreteness conditions for the Laplacian on complete noncompact Riemannian manifolds*, Math. Zeit. **198** (1988), 127-141.

[Kl2] R. KLEINE, *Warped products with discrete spectra*, Results Math. **15** (1989), 81-103.

[Kl] B. KLEINER, *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. **108** (1992), 37-47.

[La] D. A. LABUTIN, *Embedding of Sobolev spaces on Hölder domains*, Proc.

Steklov Inst. Math. **227** (1999), 163-172 (Russian); English translation: Trudy Mat. Inst. **227** (1999), 170-179.

[LP] P.-L. LIONS - F. PACELLA, *Isoperimetric inequalities for convex cones*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 477-485.

[MZ] J. MALÝ - W. P. ZIEMER, *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1997.

[Ma1] V. G. MAZ'YA, *Classes of regions and imbedding theorems for function spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **133** (1960), 527-530 (Russian); English translation: Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 882-885.

[Ma2] V. G. MAZ'YA, *Some estimates of solutions of second-order elliptic equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **137** (1961), 1057-1059 (Russian); English translation: Soviet Math. Dokl. **2** (1961), 413-415.

[Ma3] V. G. MAZ'YA, *On p-conductivity and theorems on embedding certain functional spaces into a C-space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **140** (1961), 299-302 (Russian).

[Ma4] V. G. MAZ'YA, *On the solvability of the Neumann problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **147** (1962), 294-296 (Russian).

[Ma5] V. G. MAZ'YA, *The Neumann problem in regions with nonregular boundaries*, Sibirsk. Mat. Ž. **9** (1968), 1322-1350 (Russian).

[Ma6] V. G. MAZ'YA, *On weak solutions of the Dirichlet and Neumann problems*, Trusdy Moskov. Mat. Obšč. **20** (1969), 137-172 (Russian); English translation: Trans. Moscow Math. Soc. **20** (1969), 135-172.

[Ma7] V. G. MAZ'YA, *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*, Springer, Heidelberg, 2011.

[MHH] F. MORGAN - H. HOWARDS - M. HUTCHINGS, *The isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 4889-4909.

[MJ] F. MORGAN - D. L. JOHNSON, *Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 1017-1041.

[Na] N. NADIRASHVILI, *Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere*, J. Diff. Geom. **61** (2002), 335-340.

[PR] L. E. PAYNE - M. E. RAYNER, *An isoperimetric inequality for the first eigenfunction in the fixed membrane problem*, Z. Angew. Math. Phys. **23** (1972), 13-15.

[Pi] CH. PITTET, *The isoperimetric profile of homogeneous Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **54** (2000), 255-302.

[RS] M. REED - B. SIMON, *Analysis of Operators IV*, Academic Press, New York, 1972.

[Ri] M. RITORÉ, *Constant geodesic curvature curves and isoperimetric domains in rotationally symmetric surfaces*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), 1093-1138.

[Ro] W. RÖLKE, *Uber den Laplace-Operator auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit diskontinuierlichen Gruppen*, Math. Nachr. **21** (1960), 132-149.

[Sa] L. SALOFF-COSTE, *Sobolev inequalities in familiar and unfamiliar settings*, in Sobolev spaces in mathematics, Vol I, Sobolev type inequalities, V.G.Maz'ya editor, Springer, 2009.

[SS] H. F. SMITH - C. D. SOGGE, *On the L^p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary*, Acta Math. **198** (2007), 107-153.

[So] C. D. SOGGE, *Lectures on eigenfunctions of the Laplacian*, Topics in mathematical analysis, 337-360, Ser. Anal. Appl. Comput., 3, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.

[SZ] C. D. Sogge - S. Zelditch, *Riemannian manifolds with maximal eigenfunction growth*, Duke Math. J. **114** (2002), 387-437.

[St] R. S. Strichartz, *Analysis of the Laplacian on complete Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **52** (1983), 48-79.

[Ya] S. T. Yau, *Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact manifold*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 8 (1975), 487-507.

[Zi] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.

Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze
Piazza Ghiberti 27, 50122 Firenze, Italy
E-mail: cianchi@unifi.it

Received December 24, 2011 and in revised form March 24, 2012

Salvatore Coen: Matematici a Bologna dopo l'Annessione al Regno

Salvatore Coen
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: coen@dm.unibo.it

Sunto

Dopo l'annessione della Legazione delle Romagne al Regno di Sardegna, furono nominati molti nuovi professori nell'Università di Bologna. La composizione del corpo docente in breve subì profondi cambiamenti insieme con un notevole ringiovanimento. L'attività di insegnamento e di ricerca cercò di battere nuove strade nel tentativo di risollevare gli studi ad alti livelli internazionali.

Il risorgimento politico si tradusse in un risorgimento scientifico.

Esamineremo brevemente la situazione della ricerca e dell'insegnamento della Matematica all'Università di Bologna seguita a queste vicissitudini, particolarmente nei primi decenni. Si trattò di tempi piuttosto travagliati che comunque portarono ad un periodo d'oro della matematica nell'università bolognese esteso dagli ultimi lustri del diciannovesimo secolo ai primi decenni del ventesimo. La grave battuta d'arresto del 1938 costringerà Bologna, ancora una volta, a battere nuove vie di ricerca nel campo della matematica.

Intervento: Salvatore Coen,
Mathematicians in Bologna in the First Decades After Annexation to the Kingdom of Sardinia,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 837–855**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 837-855

Mathematicians in Bologna in the First Decades After Annexation to the Kingdom of Sardinia (*)

SALVATORE COEN

Abstract. – *With the creation of the Italian Kingdom, a new era in mathematical research and teaching in Bologna began, and certainly marked a positive advance with respect to the situation in the preceding decades. As is natural, however, the progress was slow, and passed through many very different stages. We will focus here on this progress in the first decades after 1860.*

The plebiscite of 11-12 March 1860, under the leadership of Luigi Carlo Farini, voted with an overwhelming majority in favor of annexing the *Regie Provincie dell'Emilia* (*Royal Provinces of Emilia*) of which Farini was the "governor", consisting of the former *Legazioni pontificie* (*Pontifical Legations*) (Bologna, Ferrara, Ravenna and Forlì) and the former duchies of Modena and Reggio, and of Parma and Piacenza, to the Kingdom of Sardinia. On 8 March, Farini himself, with a decree law, had established the chairs of Geodetics, Higher Geometry and Applied Mechanics for the Facoltà Matematica (*Mathematics Faculty*) of the University of Bologna. Obviously, this decision had been made in perfect agreement with the central authorities of Turin; the fact, however, of issuing this decree only a few days prior to annexation gives the impression that, even at the local level, it was desirable to emphasize the fundamental importance of the University, and especially its scientific studies, in relation to political power.

On the day of March 17, 1861 when Victor Emmanuel II, King of Sardinia, was proclaimed King of Italy, the Kingdom of Italy was founded. Bologna, of course, belonged to the new state. With the creation of the Italian state, mathematical research and instruction entered a new period of progress, with respect to the situation in the decades immediately preceding the event. As is natural, however, this progress was slow and had to go through numerous, widely differing stages.

(*) General conference held on September 21, 2011 in the Aula Magna of the University of Bologna on the occasion of the opening session of the XIX Congress of the Unione Matematica Italiana.

In this paper we will illustrate, above all, a possible timeline relative to study and mathematical research as it took place in Bologna in the first century after Italian unity, motivating it with the profound changes that mathematical activity underwent in Bologna during the century. We will then focus more sharply on the initial period, i.e. the twenty years between 1860 and 1880 which, up to this time, have not received much scholarly attention. The topic is very vast indeed; in this paper we will attempt to present as concise an outline as possible.

Three periods can be distinguished rather precisely, starting with the establishment of the Italian Kingdom and ending in the Sixties of the 20th century. The first period, roughly from 1860 to 1880, was one in which the University strove with some difficulty to achieve an authentic resurgence of mathematical studies in Bologna, with ups and downs that we shall describe hereafter in the search for a stability of university instruction and mathematical research it never fully attained. We need only recall that until 1881 the University of Bologna was unable to award the *Laurea (the degree)* in mathematics and could go no farther than a three-year diploma (licenza), mainly due to the lack of professors.

The second period was certainly the golden age, and started, in our opinion, around 1880/ 1881 to end abruptly in 1938. That year, Mario Burgatti, Luigi Fantappiè, Beppo Levi and Beniamino Segre were tenured professors in the Science Department in Bologna. Burgatti died in May; the department provided soon after to replace him by calling in Dario Graffi, operational from the following November. In September, with the *leggi razziali (racial laws)*, applied with great zeal, Beppo Levi and Beniamino Segre were expelled. Luigi Fantappiè was already abroad and there he stayed. The *Facoltà di Ingegneria* (*Faculty of Engineering*), in turn and also because of the anti-Semitic laws, would lose scientific personalities at the level of Giulio Supino and Emanuele Foà. For several months the *Facoltà di Scienze (Faculty of Sciences*) could not count on the presence of a single professor of mathematics.

This fracture would mark the start of a third stage on the scientific plane, clearly different from those that had preceded it; we can consider this period, roughly, to be between 1939 and 1960. In the Sixties of the 20th century, with the reform of studies for the degree in mathematics and with the advent of mass access to the university, the situation changed again, throughout the country and also in Bologna. This was the period in which construction got underway on the building intended to house the Salvatore Pincherle Mathematics Institute and the Luigi Cremona Institute of Geometry, symbolically destined, in this way, to indicate a new role of mathematical activity at the university.

As we already said, in this paper we will examine the first two stages only. The second is certainly the more exciting one because it marked a solid, continuous rise, but it is the first period, not nearly as well known, which will occupy us here more extensively.

First period.

First of all, we have to sketch an outline of the situation in Bologna during the decades preceding annexation, with a few, brief episodes that will illustrate its significance on teaching and on the teachers. Liberal, patriotic ideals had found fertile terrain among the students of the University and also among some professors, as evidenced by the participation of both students and faculty in the uprisings of 1830-31 and later in 1848-49. After the uprising of '31 it would be the famous Austrian foreign minister Klemens Wenzel von Metternich (1773–1859) to recommend the temporary closure of the university; later it was decided (cf. [Simeoni]) that "*the students should continue their studies in the individual cities of residence under teachers chosen by the bishops and approved by the Sacred Congregation. In Bologna, although the tenured professors remained, the courses of the department were to be held in separate locations*" ([1]). This latter decision had the effect of undermining the very concept of university, of communion, of "universitas" between students and professors. The order was revoked and reapplied several times also after the riots of 1848-49. With regard to the students we can recall that during the riots of '48 and '49, the students of Bologna formed a mobile unit that fought alongside the university battalion. Bologna's participation in the Roman Republic was significant; that of Quirico Filopanti was particularly noteworthy, also from the historical standpoint.

A significant episode concerned the professors. In 1835 Ottaviano Fabrizio Mossotti (1791-1863) crossed the ocean, leaving his position of professor in Buenos Aires to take that of professor of Astronomy at the University of Bologna. For political reasons, when he arrived in Italy the position was denied him. We feel that this was a loss that Bologna would have to pay very dearly for. He then obtained a position at the Académie Ionienne in Corfù and, finally, in 1841, moved to the University of Pisa, where he laid the foundations for the extraordinary development of mathematics and physics that would make the University of Pisa a leading player in the decades that followed.

There were other scientists of authoritative stature in Bologna, however, like Francesco Orioli (1783-1856) who taught Physics at the University of Bologna from 1815 to 1831. In 1831 Orioli would be Minister of Education in the "government of the united provinces". Orioli would also hold an academic position in Corfù. His was actually a very eclectic personality. He was competent in a number of highly different fields such as medicine, chemistry, archeology (particularly Etruscology), politics, ... and is considered to be one of the great tea-

([1]) *Gli studi dovevano essere fatti nelle singole città sotto maestri scelti dai vescovi ed approvati dalla S. Congregazione. A Bologna, pur restando i professori ordinari, i corsi delle facoltà dovevano aver luogo in sedi separate.*

chers of Silvestro Gherardi (1802- 1879) physicist and historian of science. From 1831 to 1850, he was professor of physics at the University of Bologna. In 1849 he was temporary minister of the Roman Republic. From 1857 to 1861 he was professor of physics at the University of Torino, then director of the Technical Institute of Bologna and later of Florence (1867-1879). The study of hydraulics had a large following in Bologna through the centuries. We can indicate Giuseppe Venturoli (1768-1846) in this connection, well known for his treatise on "*Elementi di Meccanica ed Idraulica*" (Elements of Mechanics and Hydraulics).

Despite the presence of scientific personalities of a certain interest, and studies in hydraulics and astronomy, however, research and also teaching of mathematics in the last decades prior to the annexation of Bologna to the Kingdom of Sardinia was certainly very limited. A profound change of mentality would be necessary in research and instruction.

The chairs established by Farini were assigned, respectively, to Luigi Cremona Geometria Superiore (Higher Geometry), Matteo Fiorini Geodesia (Geodesy) while it was Quirico Filopanti (whose birth name was Giuseppe Barilli) who obtained the chair of Meccanica Applicata (Applied Mechanics).

These appointments were part of a group decided by Terenzio Mamiani della Rovere (1799–1885), who was the Minister of Education of the Kingdom of Sardinia at the time. They were prompted not only by scientific criteria, but also by political criteria: all the new professors professed patriotic sentiments and some, like Cremona and Quirico Filopanti, had participated personally, even fighting among the armed forces in the wars for Italy; many of them would meet again in the Masonic lodges of Bologna. The majority were young men, seldom over thirty. It is important to note that they were scholars who had shown excellent promise but as yet had not produced much, though later, in Bologna, they would take their place as scholars of the first order in the national or international field. Among them, for example, were Giosuè Carducci (1835-1907) appointed to the chair of Italian Eloquence (in 1906 he won the Nobel Prize for Literature), Bertrando Spaventa (1817- 1883) to that of History of Philosophies, Giovanni Capellini (1833-1922) to Geology, Francesco Magni (1828-1887) to Theoretical and Practical Optics and Directorship of the Ophthalmology Clinic of the University of Bologna, Giovanni Battista Gandino (1827-1905) to Latin Literature. With the arrival of the "Piemontesi" ("Piedmonters") as these new professors were then called, the University of Bologna was destined to undergo some profound changes.

The inaugural lecture by Luigi Cremona, given in November 1860 aroused considerable interest at the time, not only in Italy. Cremona briefly described the difficult condition of mathematical studies in Italy, the "backwardness of the educational programs" (retrivi ordinamenti scolastici), the efforts of a few to raise Italian studies to the level of the more advanced countries in Europe. It was an impassioned, profoundly inspired oration, in the almost incredible period that Italy was experiencing at that time. He concluded with the statement that if the

"*doppia tirannide dello sgherro austriaco e del livido gesuita" (dual tyranny of the Austrian brigand and the livid Jesuit*) could have been an excuse of laxness or laziness in the past, the freedom attained obliged us to work hard and maintain vigilance. The newly unified country of Italy had one capital only: Rome "with one king only, Vittorio Emanuele, and one and only one great hero, Garibaldi". The central point for us here, however, was his outline of the studies of geometry and projective geometry that students would undertake with his guidance, in which he stressed that "*these marvelous, purely geometrical methods have never been taught in our universities*". The program for the course of Higher Geometry in 1860-61 was as follows: "*Projective properties of geometrical forms. Duality and homography. Applications to the theory of lines and of surfaces of the second order*", (for which he recommended referring also to the "Traité de Géometrie Supérieure" by Chasles). Frankly, this is a rather elementary program that could dampen the enthusiasm deriving from reading his stirring inaugural lecture. Actually – and this is one of the outstanding early merits of Cremona – we have to take account of the fact that in Bologna – and not only in Bologna – before his arrival, geometry was only taught at a rather elementary level in the courses of introduction to calculus. Knowing this, we can better understand Beppo Levi's remark in a little-remembered commemoration speech ([Levi]) given in Bologna in 1930, "*It is to Cremona himself that we owe the fact that projective geometry has been able to descend from the level of "higher geometry" to the apparently more humble level of a preparatory subject.*" ([2]). This alone would be no small merit for Cremona. As regards research, at the time of his appointment, Cremona had already published a dozen works especially dedicated to projective geometry in the five preceding years, largely on space curves. One of the first and most important works during his tenure at Bologna is his "*Introduzione...*"(Introduction...) [Cremona, 1862] all of 130 pages long, systematically expounding results and notions on these curves found in Italy and abroad in those years. It would be translated into German by Curtze with other works by Cremona, and published in 1865. Among his more valued writings during his tenure at Bologna we have to remember "*Sulle trasformazioni geometriche..*" (*On Geometrical Transformations* ...) [Cremona, 1863-65] in two notes. His extensive and systematic study in these works on birational transformations and their invariant properties is the reason why these transformations have been known since then, and not only in Italy, as *Cremonian transformations*. A natural outgrowth of the two above-mentioned publications was the later publication "*Preliminari* ..." (*Preliminaries*...) [Cremona, 1866],

([2]) *È al Cremona stesso che dobbiamo se la geometria proiettiva ha potuto discendere dal grado di "geometria superiore" a quello apparentemente più umile di materia propedeutica.*

where he set himself the difficult task of generalizing the previous results on three-dimensional space. he writes in the preface: "*The first concept was that of demonstrating synthetically the most essential propositions of higher geometry that pertain to the theory of surfaces of any order, and are expounded analytically or only mentioned in passing in the works of Salmon, Cayley, Steiner, Clebsch,...*" This work and the following one would also be translated by Curtze.

The publication which brings Cremona international recognition, however, is his *Mémoire de Géometrie ...* " [Cremona, 1868]. Participating in the international competition of the Royal Academy of Science of Berlin, announced in 1864, Cremona demonstrated the results postulated in Jacob Steiner's publication *Uber die flächer dritten Grades* in 1856 and then went farther with his own original results. This publication won him the first prize, ex-aequo with Sturm. It is interesting to note that this success immediately earned him (September 1866) an appointment as an officer of the Ordine dei Santi Maurizio e Lazzaro (Order of Saints Maurice and Lazarus, a very old order of chivalry) to see "*an Italian celebrated also in the battles and victories of science*" ([3]). It is generally acknowledged that the best period in Cremona's research was the time spent in Bologna, although it lasted only a few years. By 1866, Cremona had already left Bologna for the Istituto Tecnico Superiore di Milano (now Politecnico di Milano).

In the meantime, in October 1862, Eugenio Beltrami was appointed extraordinary professor ([4]) of Complementary Algebra.

At the time of his appointment Beltrami had published a fifty-page article and two lesser works, but had not earned a degree of any kind. This was enough, however, for Francesco Brioschi, who knew him well, to sponsor his appointment to Bologna. In 1863 Beltrami had already left Bologna for Pisa; formally, this was not a transfer but a promotion to full professor of Geodesy at the University of Pisa. In place of Beltrami, the then extraordinary professor at Cagliari, Pietro Boschi, was appointed extraordinary professor of Complementary Algebra as well as Analytical Geometry ([5]). Boschi (born in 1833) would die in Bologna in 1887; during his uninterrupted stay in Bologna he did not produce a great deal, but held many courses in different areas of geometry, to the great satisfaction of the students and faculty; he had been a student of Brioschi, and had already been warmly recommended for Bologna by both Brioschi and Cremona as early as 1861. Beltrami would remain in Pisa for three years. There his friend Enrico Betti taught Higher Analysis and Geometry; we should also recall the three long

([3]) *Il nome italiano celebrato anche nelle battaglie e nelle vittorie della scienza.*

([4]) The position of "professore straordinario» was not stable and was generally given before that of "professore ordinario»; the latter position gave stability and a salary considerably higher.

([5]) *Straordinario di Algebra Complementare con l'incarico eziandio della Geometria Analitica.*

visits that Riemann made to Italy between 1862-66, with extended stays in Pisa. Beltrami would return to Bologna as professor of Rational Mechanics in October 1866, a few months after Riemann's death.

Beltrami would remain in Bologna until 1873 when he decided to accept the chair of Mechanics in Rome. The works written by Beltrami while at Bologna are among the most important of his scientific career. In Bologna he wrote his famous "*Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*" (*Essay on the interpretation of non-Euclidean Geometry*) [Beltrami, 1869-1] and "*La teoria fondamentale..*" (*Fundamental theory..*) [Beltrami, 1869-2].

Getting back to the Mathematics Faculty, for the academic year 1862-63 Bologna's faculty could boast Luigi Cremona, Eugenio Beltrami, Domenico Chelini (appointed much earlier, in 1851). The three professors were good friends and held one another in great personal as well as scientific esteem. To this group, we can also add Matteo Fiorini (1827-1901), the illustrious cartographer and historian of cartography, Lorenzo Respighi (1824-1889), the famous astronomer, greatly esteemed also by Schiaparelli and Quirico Filopanti (1812-1894), a highly original personality who, from his chair of Applied Mechanics, taught applied hydraulics, a course conceived for students of engineering. One could think of a sort of miracle: in less than three years, from a situation of grave weakness, mathematics at Bologna became the leading school on the peninsula and this was largely thanks to a political action that was a complete success.

But it was not to be. The period between the second and third wars of Italian independence was a difficult time and there were clear signs of this at Bologna, for example, in Cremona's inability to accept conditions there. His dissatisfaction is obvious in his letters, where he complains bitterly and expresses harshly negative opinions about the situation. I quote here briefly from a letter written in February 1861 to Enrico Betti "*The degradation (with respect to mathematical studies) into which this university has fallen, for many reasons, is such that I see my work as almost futile, in spite of the excellent quality of the students. Moreover, the miserable conditions and gothic regulations of the library do not make it possible for me to study as I used to do in Pavia and Milan.*" ([6]).

Years later, in 1868, Beltrami echoes him (cf. [Brigaglia, Di Sieno, 2010], from the archive of the Mazzini Institute of Genoa) writing to Cremona "*I see an inept rector and a large number of ignorant or unhappy professors (not to sugar-coat it). The few valid ones include several who stink a bit of republican. This is bad, I*

([6]) *L'abiezione in cui è caduta per tante cause, questa università (rispetto agli studi matematici) è tale che io vedo l'opera mia quasi inutile, malgrado l'ottimo buon valore dei giovani. Di più le misere condizioni e i gotici regolamenti della biblioteca non mi consentono quegli studi, di cui m'ero abituato a Pavia ed a Milano.* The translation is taken from [Brigaglia, Di Sieno].

admit; but let's be honest, between a republican professor and an ass, which do you consider to be the more dangerous teacher?" ([7])

The enthusiasm for the reunification of almost the entire peninsula was accompanied for some by the disappointment of seeing that Italy was not developing the way they would have wanted, in addition to the disappointment of those who had not wanted a reunified Italy in the first place.

What was going on? Full professors were required to swear allegiance to the king and his dynasty. Domenico Chelini and Lorenzo Respighi were not prepared to take such an oath, on account of their allegiance to the Pope. Nor was Filopanti, for his republic ideas. It seemed, in 1860, that a practical solution had been found, as follows. Mamiani interpreted the oath as an obligation only of full professors; he was therefore willing to "demote" (if that is the right word) the full professors to the position of extraordinary professors with full salary but without the oath, and settled the matter that way. In 1864, when the Education Minister was Giuseppe Natoli, from Messina, under Prime Minister Lamarmora, his interpretation of the obligation to swear allegiance became more restrictive and consequently Chelini, Respighi and Filopanti, were fired for their coherence. It should be noted that only four of the full professors refused to swear allegiance at Bologna and that the fourth, the zoologist and mineralogist Bianconi, was also on the Mathematics Faculty. At the insistence of his students, Filopanti, was offered the position of "lecturer" in 1866, but in 1868 his political beliefs prompted him to leave this position as well. In a much-belated display of remorse, both Filopanti and Respighi were appointed "honorary professors" in 1878; the other two expelled professors died at about the same time in 1878. We should also note that Filopanti had already been appointed professor of Mechanics and Hydraulics in 1848, and dismissed following his particularly active participation in the Roman Republic in 1849.

After the appointment of Beltrami in 1862 and until 1873, there were no other appointments aside from that of Boschi. Thus, after 1864, the teaching staff was reduced and both instruction and research suffered greatly. Beltrami's return in 1866 was offset by the absence of Cremona, who would go to teach at the Higher Technical Institute of Milan. He formally maintained his position in Bologna, however, so that the university could not dispose of his chair.

In October 1873 Beltrami moved to Rome; in his place, Cesare Razzaboni was brought in from Rome. In 1874 Razzaboni was called back to Rome to direct the Institute of Hydraulics at the local School of Application for Engineers.

([7]) *Vedo un rettore inetto, ed un gran numero di professori ignoranti o tristi* (*non doriamo le pillole). Nel piccolo numero dei valenti ce ne sono alcuni che puzzano un po' di repubblica. È un male, lo confesso; ma, siamo sinceri, fra un professore repubblicano e un professore asino quale reputi più pernicioso all'insegnamento*?"

At this point a curious and forgotten episode may be of some interest, also because of its unusual aspects.

On 29 August 1874, the city council of Bologna, writes to the Rector that it had been "*informed by the press of the transfer of Razzaboni to Rome; if this should be confirmed, you should at least bring Beltrami back*" ([8]).

The Rector replies on 2 September thanking the council for having expressed "*the disapproval of the entire city in seeing the University reduced to little more than a railroad station where the Professors are sent for their trial period, then called to another university at the first opportunity, not for reasons of study, but to follow particular ideals and undermine the foundations of this ancient school.*" "*As regards Beltrami it is unthinkable*" ([9]). He expresses the hope that others can be called and can "*help lessen the gravity of the loss of the excellent Razzaboni*" ([10]).

The council, encouraged by the letter, then writes to the Prime Minister Marco Minghetti (1818-1886), who was from Bologna, expressing the same preoccupation.

The interim minister Gerolamo Cantelli replies on 21 September 1874 that the "*call to the School of Application in Rome (of Razzaboni) is nothing more than the confirmation of a project that has long been in the offing and was almost impossible to deny*" ([11]). At the same time, he would do whatever he could to appoint another full professor of Rational Mechanics.

And so, in December of that same year Ferdinando Paolo Ruffini (1823-1908) was transferred from the Chair of Differential and Integral Calculus of Modena to that of Rational Mechanics in Bologna. He would produce about fifty publications on various subjects, with a prevalence of works of geometry, mechanics and history. He was the first director of the *Scuola di Magistero (School of Education),* and would be chairman of the Faculty of Sciences and the only mathematician to be Rector of the University of Bologna after annexation.

After noting that the "practical course for engineers," while it can be shown to be useful for the training of agronomists, is certainly not able to prepare good

([8]) *di essere stata informata dalla stampa del trasferimento di Razzaboni a Roma; se questo dovesse essere confermato, almeno si provveda a far tornare Beltrami.*

([9]) *disapprovazione dell'intera città nel vedere l'Università nostra ridotta quasi ad essere una stazione ferroviaria ove i Professori si mandano a fare le loro prove, per richiamarli in altra università alla prima occasione non già per l'opportunità degli studi, ma per seguire particolari propositi, e minare le fondamenta di questo antico studio.... In quanto al Beltrami non vi è da pensarvi.*

([10]) *far sentire meno grave la perdita dell'egregio Razzaboni.*

([11]) *richiamo presso la Scuola d' Applicazione di Roma (di Razzaboni) non è quindi che il conferimento di un disegno già da tempo formato ed era quasi impossibile farne a meno.*

engineers, we come, after various and exhausting events, to 1877, with the establishment of the *Scuola di Applicazione per Ingegneri* (*School of Application for Engineers*), supported by a local consortium of which the municipality, province and other local agencies are members. This was probably the most appropriate answer to the hemorrhage of scholars migrating to the School in Rome, and immediately encountered the hostility of everyone in Rome. It is perhaps indicative that it was not until 1897 that the School was allowed to add the title of "Royal" to its name. Cesare Razzaboni came back to Bologna from January 1, 1877, to occupy the chair of Infinitesimal Calculus and was appointed to provide for establishing the new school. In November of that year, 1877, the School was officially established and Razzaboni, having transferred to the chair of Hydraulics, was its director.

Cesare Razzaboni (1827-1893) had graduated with a degree in theoretical engineering as well as mathematics and physics from the University of Modena after attending the Scuola dei Cadetti Matematici Pionieri (a Modenese university institute to prepare students in engineering and architecture). His scientific production concentrated on problems of theoretical hydraulics and, especially in his later life, also experimental hydraulics.

The establishment of the School of Application of Bologna led to the creation of new chairs.

In August 1877 Luigi Donati (1846-1932), former full professor of Physics at the Higher Technical Institute of Milan was appointed extraordinary professor of Technical Physics at the School of Application of Bologna. In 1879 he would also become extraordinary professor of Mathematical Physics at the of Sciences. Donati, self-taught prior to his university studies, won the Lavagna prize and graduated from the Scuola di Magistero at the Normal School of Pisa, where he was then assistant to Riccardo Felici (1819-1902). He produced about fifty publications on elasticity (with important contributions to the Menabrea Theorem), on Electromagnetism, and on vectorial fields, which he was one of the first to teach in Italy. He was an excellent teacher and wrote, among others, "*Appunti didattici sulla teoria della relatività" (relatività ristretta) ("Notes on teaching the theory of relativity" (special relativity*)) in 1922.

Another call, in August 1877, was to Pietro Riccardi (1828-1898) a professor of Practical Geometry at the School of Application. Riccardi, who was originally from Modena, had taught Theoretical and Practical Geodesics and later Analytical Geometry at Modena. He had graduated from that University after attending the Scuola dei Matematici Pionieri. He published a great deal on various subjects and also practiced the engineering profession for many years in Modena. He is mainly remembered today for his activity as a historian of mathematics. Perhaps his most famous work is the "*Biblioteca matematica italiana dalle origini della stampa sino ai primi anni del secolo XIX*" (*Italian mathematical library from the origins of printing to the 19th century*) in two

volumes, completed later by various appendices, corrections and additions, as well as his "*Cenni sulla storia della geodesia in Italia dalle prime epoche fin oltre alla metà del secolo XIX*" (Brief overview of the History of Geodesy in Italy from the early epochs until the mid-19th century), which he wrote while he was at the University of Bologna.

We cannot go more deeply into the details of the events at the School of Application though they could be of interest to us, not only for the positions of the traditional mathematics course, but also for those of Geodesy and Hydraulics.

Our focus here, however, is the Faculty of Sciences which continued to be a sort of railroad station. In 1875 the young Sardinian Francesco Flores d'Arcais (1830-1890) was called from the chair of Infinitesimal Calculus in Cagliari to replace Razzaboni, but the following year he would return to Cagliari in a sort of exchange with Antonio Fais (1841-1925) also from Cagliari. Fais was appointed extraordinary professor of Algebra and Analytical Geometry at Bologna and assigned the chair of Graphic Statics. He would then pass to Infinitesimal Calculus, but three years after his appointment he went back to Cagliari. While at Bologna he wrote interesting works on classical analysis and arguments of differential geometry.

The report of Rector Luigi Calori for the academic year 1876-77 was devoted, to a large extent, to the difficult situation of Mathematics at Bologna, where it was evidently the weak point of the whole university.

Riccardo de Paolis was called to the chair of Algebra and Geometry in 1878 (he had been assistant, before then, in Rome), but in 1880 he would be appointed by competition to the chair of Higher Geometry in Pavia.

So in 1880 Bologna was in a difficult position again after the simultaneous transfers of Fais and De Paolis.

We can try to summarize this period 1860-80 with a few considerations. It starts with a period of influence (one might jokingly call it a "colonization") on the part of Pavia which brought the mathematicians Cremona, Beltrami and Boschi, all trained at Pavia, to Bologna. Later there was a period of intense exchanges with Cagliari and finally a sort of "Modenese colonization" (Ruffini, Razzaboni, Riccardi) of the School of Application in Bologna. The contribution of locally trained mathematicians was almost nil.

Evidently, for pure mathematicians Bologna was not a choice posting, although it was at Bologna that Cremona wrote his best works, and Beltrami also has a very active period there scientifically, much more so than at Pisa. We have to add, however, as further proof of what we have said that when the chair of Higher Analysis became free in 1877, and in 1878 that of Mathematical Physics (the only applicant, Bruno Padelletti having withdrawn after being appointed Visiting Professor of Rational Mechanics in Palermo), not a single candidate applied.

For several years, Bologna had been considered with some regard, but that all came to an end. The feeling almost of offense experienced by the city after

Razzaboni's transfer was justified. In the long run, the finest mathematicians who passed through Bologna all ended up, around 1874, at the School of Application in Rome, without forgetting that Chelini and Respighi were also in Rome, though in different situations.

One might ask how it was that so many scholars highly sensitive to their civic and institutional duties could show so little interest in the local institutions. Naturally, then as now, personal ambition played a part. There may be another reason, however. In the early years we examined, these appointments were generally made by order of the ministry, without competition and without calls. In this way, the professors felt a duty to respond more to the national interest, represented by the ministry, rather than the local interests. If this interpretation should be correct, the ministers would have to take the blame for the many transfers from Bologna. Effectively, a careful reading of the records proves it, at least in some cases. When Cremona was "ordered" to Milan, the minister Domenico Berti wrote that Higher Geometry at Bologna was no longer a required course, while "*In the Royal Higher Technical Institute of Milan, destined to prepare the finest engineers and strongest mathematicians, the needs of the students reflect the contribution of that teaching provided by a top professor like Cremona*" ([12]).

When Beltrami was transferred to Roma, the minister at the time, Antonio Scialoja, wrote on 20 October 1873 "*The Ministry hesitated for some time, greatly regretting the need to remove such a fine man from your University. But then it felt it could provide a valid replacement for the chair left vacant by Beltrami. Effectively, Professor Cesare Razzaboni...*" ([13]) Perhaps that is also why when Razzaboni was transferred only a year later, Bologna felt cheated.

What is even more important, we have to add, is that in all those years Bologna did not manage to award a degree in mathematics to a single student, because it was unable to hold the fourth year courses.

Quite frequently in Cremona's letters, alongside his criticisms of certain colleagues, we read praises for his young students. At least two names of students in the period we are examining stand out. I refer to Eugenio Bertini and Gregorio Ricci Curbastro. Bertini had the good luck to be able to follow the last lesson of Higher Geometry held by Cremona who wrote of him in May

([12]) *Nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano destinato a preparare valenti ingegneri e robusti matematici, le esigenze degli studenti riecchieggono l'aggiunta di quell'insegnamento impartito da un uomo valente quale è il Cremona.*

([13]) *Il Ministero rimase a dir vero alcun tempo dubbioso, assai spiacendosi di togliere a codesta Università un così chiaro uomo. Se non che ha poi creduto di poter provvedere tale partito, essendosi presentata l'opportunità di provvedere contemporaneamente e nel modo più convenevole alla cattedra che avrebbe costì lasciata vacante il Beltrami. Di fatti il prof. cav. Cesare Razzaboni...*"

1866 in a letter to Chelini "*he kept up with everything*" ([14]) ([Enea, Gatto]); that same June, Bertini enrolled as a volunteer and fought in a Garibaldi corps near Trento; in November he passed the examination of Higher Geometry with Cremona, Beltrami and Domenico Piani on the examining committee, with a grade of 30 out of 30 and distinguished honors. He would then go to Pisa to finish the last year. Gregorio Ricci was admitted to the second year, in view of the studies he had already completed at the university in Rome. He studied at Bologna for two years and after passing the third year was admitted to the Normal School of Pisa. I should note here that many young mathematics students at Bologna interrupted their studies in Bologna to continue at the Normal School of Pisa. Mario Pieri, for one, attended at Bologna for just one year in the academic year 1880-81, then entered the second year at Pisa. Later, another example is that of Giuseppe Vitali, who switched to the Normal School in 1897 after two years in Bologna; it seems that this custom was actually encouraged by the professors at Bologna.

Second period.

Let us return now to the general situation at the Faculty of Sciences. We have seen that in 1880 Fais and De Paolis left Bologna at the same time. While Mathematical Physics was able to continue with the possible aid of the professors of the School of Application, geometry risked having only a single chair, Pietro Boschi, burdened with excessive teaching obligations. Analysis was in even worse shape. We should recall that Weierstrass had been at Berlin since 1857 and that these were the most intense years of his great school, but it is extremely difficult to find any trace of his methods at Bologna.

This time, however, there is a positive turn of events when that very same year, 1880, Cesare Arzelà (1847-1912) was called to Bologna followed, a few months later, by Salvatore Pincherle (1853-1936). Arzelà had graduated from Pisa in 1869 as a student of the Normal School. For some time he had taught in secondary schools, won a scholarship for advanced training abroad which he decided to forgo, and been appointed to Palermo to the chair of Algebra. At Bologna he would teach Infinitesimal Calculus and would remain there until his death in 1912. This excellent teacher had among his students Leonida Tonelli, Filippo Sibirani (1880-1957) and others. One of his most important works was the paper *Sulla serie di funzioni* ([Arzelà] "On series of functions") published in 1899. He is well known for his works aiming to prove the Dirichlet Principle by a direct method.

([14]) *ha tenuto dietro a tutto.*

Finally, from the academic year 1881- 82 Bologna was able to complete the four-year curriculum of studies for a degree in Mathematics. For years, Arzelà would hold the course in Higher Analysis and Pincherle that of Higher Geometry.

In 1888 Bologna was the site of a Universal Exposition and celebrations of the eighth centennial of the University. The mathematicians seem to have been kept rather out of sight during the celebration, but on that occasion the Faculty of Sciences, evidently at the prompting of the mathematicians, awarded several degrees "honoris causa" to such luminaries as Arthur Cayley, Charles Hermite, Felix Klein, Leopold Kronecker, Gosta Mittag-Leffler, Nathaniel Pringsheim, Lord Kelvin and Karl Weierstrass.

That same year, 1888, Domenico Montesano (1863-1930), one of Cremona's students, was called by competition to the chair of Projective and Descriptive Geometry (Geometria Proiettiva e descrittiva con disegno), to which he came from Rome; Montesano would be transferred early in December 1893 after winning a competition for the chair of Geometry in Naples and did not have time to leave tangible signs. In 1894 a very young Federigo Enriques (1871-1946) was appointed to the chair; he was appointed extraordinary professor from 1896. The appointment was not without some problems considering that another illustrious geometrician, Mario Pieri (1860-1913), who had also studied briefly at Bologna was interested in the same position (cf. [Marchisotto, Smith], ch. 1.15, *The Bologna affair*). Enriques who produced what were perhaps his most interesting works on geometry, had other interests ranging far beyond geometry. For example, in April 1911 Enriques was the organizer and Chairman of the International Congress of Philosophy, held in Bologna. Enriques marked a profound change in research and teaching in Bologna. We cannot go more into detail on this important personality, however considerable information about him can be found in the volume mentioned previously [Coen]) ([15]).

For mathematical physics we have to remember the call to Pietro Burgatti (1868-1938), from Messina, in 1908; he had worked in Rome under the guidance of Eugenio Beltrami and Valentino Cerruti. Burgatti was an acclaimed mathe-

([15]) In the volume [Coen] the scientific personalities of the following mathematicians who worked in Bologna are especially illustrated: Ugo Amaldi, Eugenio Beltrami, Enrico Bompiani, Roberto Bonola, Pietro Burgatti, Lamberto Cattabriga, Gianfranco Cimmino, Luigi Cremona, Federigo Enriques, Dario Graffi, Beppo Levi, Salvatore Pincherle, Bruno Pini, Beniamino Segre, Leonida Tonelli, Tullio Viola, Giuseppe Vitali, Giulio Vivanti (alphabetical order). The contributors are Nicola Arcozzi, Maria Teresa Borgato, Umberto Bottazzini, Aldo Brigaglia, Ciro Ciliberto, Salvatore Coen, Simonetta Di Sieno, Mauro Fabrizio, Paolo Freguglia, Paola Gario, Livia Giacardi, Sandro Graffi, Angelo Guerraggio, Michel Guillemot, Ermanno Lanconelli, Gabriele Lolli, Erika Luciano, Francesco Mainardi, Pietro Nastasi, Gianno Pagnini, Clara Silvia Roero, Enrico Rogora, Irene Sabbadini, Emma Salent del Colombo, Edoardo Sernesi, Daniel C. Struppa, Rossana Tazzioli, Sergio Venturini (alphabetical order).

matical physicist who also worked in the field of astronomy. If Arzelà at Bologna represented what we can now call Real Analysis, Pincherle represented Complex Analysis. Like Arzelà he was a graduate of the Normal School, with a degree in Mathematical Physics from Pisa with Enrico Betti, and had taught in the secondary schools of Pavia collaborating, at that time, with Casorati; he had won a position for advanced training in Berlin under Weierstrass in the academic year 1878-79, and was then appointed extraordinary professor at Palermo. He would be called to Bologna in December 1880 as Professor of Algebra and Analytic Geometry. In 1912, on Arzelà's death, he would transfer to Infinitesimal Calculus. Already by 1900 he had already published 105 works. At the end of his career, between articles, books, etc. his scientific publications totaled around 270.

The time he spent in Berlin had a great influence on him; he published the re-elaborated text of the course of introduction to the theory of analytic functions held in Berlin by Weierstrass. He studied the development of analytic functions in series of particular functions and thus encountered delicate new problems of convergence, which he solved by original methods of unquestionable interest and novelty. In 1897-98 he introduced the notion of *adjoint operator* of a given linear operator on some vector spaces of analytic functions. His studies were noticed by A. Hurwitz who, at the second conference of the Zurich congress devoted to the development of the theory of analytic functions, mentions Volterra's line functions and observes how Pincherle, Levi Civita and Bourlet were also moving on this line of thought which studied the "functions of functions" ([16]).

Pincherle's studies then led him to a systematic study of the theory of distributive operations and their applications to analysis, which he discusses in his book [Amaldi, Pincherle], written with his student Ugo Amaldi. These works reveal that he can be considered a precursor of the theory of complex linear operators. He then studied a number of other problems, such as problems of iteration. From the Twenties, while continuing his scientific activity, he devoted considerable time to resolving problems of an organizational and political nature in local, national and international research. It was Pincherle who founded the UMI and was its first president; he was the founder and first director of the UMI bulletin and the Mathematics Institute of Bologna. None of these efforts was easy. In 1924 at the International Congress of Mathematicians in Toronto, where they were discussing the possibility of readmission of mathematicians from Germany,

([16]) *Von mathematisch-physikalischen Vorstellungen ausgehend gelangt Herr Volterra dazu, Funktionen von Linien zu untersuchen, d.h. solche Abhängigkeistgesetze, welcher jeder Linie im Raume einen bestimmten komplexen Zahlenwert zuordnen. Eine ähnliche Ideenbildung liegt neueren Untersuchungen von Pincherle, Levi-Civita und Bourlet zu Grunde. Hier werden solche Gesetze betrachtet, die aus einer beliebig angenommenen Funktion eine neue Funktion entstehen lassen. Man hat es, in einem höheren Simme des Wortes, mit Funktionen von Funktionen zu thun.* ([Hurwitz], p. 106)

Austria, Bulgaria and Hungary to the IMU (International Mathematical Union) congresses, which he attended as speaker at one of the general conferences, he took a position favorable to readmission and in 1926 was appointed to organize the international congress at Bologna in 1928. Pincherle is the only Italian thus far to have been president of the IMU. Aside from the difficult problems of organization, he also faced serious political problems in view of the reluctance of several German mathematicians to participate in the Congress, where they continued to feel ostracized, and of the obstinacy of others who were effectively against their readmission. Aided by his colleague at Bologna, Umberto Puppini (1884-1946) scholar of hydraulics, Director of the School of Application, Pincherle managed to keep a firm hold on the situation and resolved the problem by having all the participants in the Congress invited by the University of Bologna. Other problems concerned relations between the UMI and the CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche). The scientific committee of the UMI was also the mathematical committee of the CNR. It was decided that this committee should be independent of the UMI and thus it was possible to proceed with the organization of the Congress, without obstacles, but also without any support from the CNR. The congress at which Pincherle had been called to president had as vice presidents, among others, Hadamard and Hilbert, and was a great success from the scientific and organizational standpoint, as proven by the volumes then published; there were 76 German and 51 French mathematicians, with a total of more than 1,100 participants.

In the meantime, in 1923, to be exact, Federigo Enriques, had gone to teach in Rome replaced, at the request of Castelnuovo, by Enrico Bompiani (1889-1975), then at the Politecnico di Milano; Bompiani would stay in Bologna only four years, however, until November 1927, producing about thirty publications in that time. From 1931 he would be replaced by a young (28) Beniamino Segre (1903-1977), called to the chair of Higher Geometry. On the death of Arzelà in 1912, we immediately see new courses, which Leonida Tonelli was asked to teach (1885-1946) as, after the World War I and his call to Parma, he would be in Bologna in 1922 with the chair of Higher Analysis. Tonelli would leave Bologna for Pisa from the academic year 1930-31, replaced in Bologna by Giuseppe Vitali (1875-1932) above all through the intercession of Beppo Levi (1875-1961) who, in the meantime, in 1928, had been called to the chair of "Elements of the Theory of Functions". Vitali died in 1932 and was replaced that same academic year 1932-33 by Luigi Fantappiè (1901-1956) who would only teach briefly in Bologna, however, on account of his prolonged stays abroad.

At the time of the call to Bologna, Beppo Levi was at the peak of his career. He had already achieved important results in Mathematical Analysis with a well-known work on the principle of Dirichlet (1906), in Algebraic Geometry with his results regarding the singularity of algebraic surfaces, in number theory, as well as in Mathematical Logic. The closure of the Faculty of Chemistry at Parma, of

which he was chairman, forced him to move. At Bologna, he taught differential equations, mathematical logic and, for the first time, he studied problems of the theory of one and several complex variables. He also wrote his well-known treatise of Mathematical Analysis while at Bologna. Giuseppe Vitali came to Bologna when he had already been stricken by hemiplegia and had only two years of work ahead of him. In those years, however, he was very active, with studies in differential geometry in Hilbert spaces, and extended his research to questions of the physical character and structure of matter; his treatise on the theory of the functions of real variables was not finished and would later be completed by Giovanni Sansone (1888-1979).

Leonida Tonelli had received his scientific training at Bologna; before being called to teach there he had been professor at the universities of Cagliari and Parma and had experienced considerable hardship during the war. While at Bologna his main research was on the Calculus of Variations. When he left Bologna he had produced about ninety publications, including his important treatise on *Trigonometric Series* (Zanichelli, 1928). Though very young, Beniamino Segre came to Bologna having already published more than forty works and, while at Bologna, he wrote another fifty or so. These were mostly studies of Algebraic Geometry but he also studied Differential Geometry and showed an interest in the Theory of Functions of Several Complex Variables. Among his students he was considered to be very strict. It seems that the application of the racial laws was a hard blow for him, also from the psychological standpoint.

Reflecting on this second period, we could say that there had been another "colonization", this time successful, by Pisa. Effectively Donati and Flores d'Arcais first, and later Arzelà, Pincherle and Enriques all came from the Normal School. The fact that most of the then young professors - Arzelà, Pincherle and Burgatti – came to Bologna with the idea of staying there, was also a fundamental fact. It would give particular stability to studies there and would prompt the professors to seek out the best colleagues. It was in this period that many excellent researchers got their training, and would go on to raise the quality of other schools. We are thinking of Giulio Vivanti (1859-1949), Carlo Severini (1872-1931), Roberto Bonola (1874-1911), Ugo Amaldi (1875-1927), Oscar Chisini (1889-1967), Antonio Mambriani (1898-1989), Tullio Viola (1904-1985), Silvio Cinquini (1906–1998). Actually, there were very few full professors of mathematics left of those who had trained at Bologna, like Ettore Bortolotti (1866-1947), who contributed so much to the knowledge of the History of Mathematics at Bologna, particularly with his studies of the Renaissance period, or like Leonida Tonelli.

Numerous publications deal with mathematics at the University of Bologna. As a general indication we will limit ourselves to mentioning the well-known book by Ettore Bortolotti [Bortolotti] and the more recent [Coen].

Acknowledgements. We would like to thank the Historical Archive of the University of Bologna and the Municipal Historical Archives of Bologna and their personnel for having enabled us, with their competence and kindness, to examine documents from which to draw the data outlined here and in some cases never published before.

REFERENCES

[Amaldi, Pincherle], UGO AMALDI, SALVATORE PINCHERLE, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, Zanichelli, pp. 490, 1901 (ristampato dall'Editore Zanichelli, 2011).

[Arzelà], CESARE ARZELÀ, *Sulle serie di funzioni*, in Mem. Accad. d. scienze di Bologna, s. 5, VIII (1899), parte I, 131-186, 1899.

[Beltrami, 1869-1], EUGENIO BELTRAMI, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giornale di Matematiche, 6, 285-315, 1869.

[Beltrami, 1869-2], EUGENIO BELTRAMI, *La teoria fondamentale degli spazi a curvatura costante*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, (2), 232-255, 1869.

[Bortolotti], ETTORE BORTOLOTTI, *La Storia della Matematica nella Università di Bologna*, Nicola Zanichelli editore, pp. 226, 1947.

[Brigaglia, Di Sieno, 2012], ALDO BRIGAGLIA, SIMONETTA DI SIENO, *Luigi Cremona's years in Bologna. From Research to social Commitment*, in [Coen], pp. 72-104, 2012.

[Brigaglia, Di Sieno, 2010], ALDO BRIGAGLIA, SIMONETTA DI SIENO, *L'opera politica di Luigi Cremona attraverso la sua corrispondenza*, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie I, Vol. VIII, 137-179, 2010.

[Coen], SALVATORE COEN (Ed.), *Mathematicians in Bologna* 1861-1960, Birkhäuser, pp. 553, 2012.

[Cremona, 1862], LUIGI CREMONA, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, tomo XII, I^{a} serie, 305-436, 1862.

[Cremona, 1863-65], LUIGI CREMONA, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, Nota* I, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, tomo II, II serie, pp. 621-630, 1863= Giornale di Matematiche, Vol. I, (1863), pp. 305-311. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, Nota* II, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, tomo V, II serie, pp. 3-35, 1865 = Giornale di Matematiche, Vol. III, (1865), 269-280, 363-376.

[Cremona, 1866], LUIGI CREMONA, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, tomo VI, II serie, 29-78, 1866.

[Cremona, 1868], LUIGI CREMONA, *Mémoire de Géometrie pure sur les surfaces du troisième ordre,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 68, 1-133, 1868.

[Enea, Gatto], MARIA ROSARIA ENEA, ROMANO GATTO (editors), *Le carte di Domenico Chelini dell'Archivio generale delle scuole pie e la corrispondenza Chelini-Cremona* (1863-1878), Mimesis, 2009.

[Gatto], ROMANO GATTO, 1996, *Lettere di Cremona a Betti*, in: Menghini M. (ed.), *Per l'Archivio della corrispondenza dei Matematici italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona* (1830-1903), vol. III, Quaderni P.RI.ST.EM Università Bocconi, Palermo, 7-90, 1996.

[Hurwitz], A. HURWITZ, *Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit*. Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11 August 1897, Leipzig Druck und Verlag Von B. G. Teubner, 91-112, 1898.

[Levi], B. LEVI, *Luigi Cremona*, Commemorazione tenuta per designazione delle Autorità Accademiche dal Prof. Beppo Levi nell'Istituto Matematico "Salvatore Pincherle", nella ricorrenza del primo centenario della nascita, pp. 9, 1931-IX.

[Marchisotto-Smith], ELENA ANNE MARCHISOTTO, JAMES T. SMITH, *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Birkhäuser, pp. 494, 2007.

[Riccardi], PIETRO RICCARDI, *Biblioteca Matematica Italiana dalle origini della stampa sino ai primi anni del secolo XIX*, Società Tipografica Modenese, 1893.

[Simeoni], LUIGI SIMEONI, *Storia dell'Università di Bologna*, N. Zanichelli Editore, two volumes, pp. 304 + 327, 1940 (ristampa anastatica Arnoldo Forni, editore).

Salvatore Coen, Università di Bologna, Dipartimento di Matematica
Piazza Porta San Donato 5, I 40126 Bologna
e-mail: salvatore.coen@unibo.it

Received December 1, 2013 and in revised form December 28, 2013

Alessio Corti: Polinomi di Laurent estremali e varietà di Fano

Alessio Corti
Department of Mathematics, Imperial College London
email: a.corti@imperial.ac.uk

Sunto

La conferenza è un'introduzione al mio lavoro in corso con T. Coates, S. Galkin, V. Golyshev, A. Kasprzyk.

La teoria di Hodge associa a un polinomio di Laurent f un'operatore differenziale L_f, detto operatore di Picard-Fuchs; f si dice estremale se l'operatore L_f ha minima ramificazione. Dopo una rapida introduzione alla teoria descrivo l'esempio dei polinomi di Minkowski.

Spiego brevemente come la coomologia quantica associa a una varietà di Fano X un'operatore differenziale Q_X, che congetturo essere di minima ramificazione.

Il polinomio di Laurent f è duale della varietà di Fano X se $L_f = Q_X$. Discuterò quanto sappiamo in dimensione 3, e traccerò un programma di classificazione delle 4-varietà di Fano basato sulla classificazione delle L_f di polinomi di Minkowski in 4 variabili.

Boris Dubrovin: Comportamento critico delle soluzioni delle equazioni hamiltoniane alle derivate parziali

Boris Dubrovin
S.I.S.S.A., Trieste
email: dubrovin@sissa.it

Sunto

Le soluzioni che soddisfano le equazioni di evoluzione alle derivate parziali con i dati iniziali "slow varying" in assenza degli effetti dissipativi subiscono una specie di "transizione di fase" dal comportamento regolare a quello oscillatorio. La struttura asintotica delle soluzioni all'interno della zona oscillatoria è stata studiata sia dai fisici, come A. Gurevich e L. Pitaevskii, sia dai matematici, come S. Novikov, P. Lax et al. Invece per stabilire le "matching rules" tra la zona regolare e quella oscillatoria bisogna descrivere la soluzione generica nel punto di transizione. Nella nostra analisi di questo problema applicheremo tecniche dalla teoria delle matrici random nonché dalla teoria delle stringhe.

Franco Flandoli: Interazione tra noise e singolarità nelle equazioni alle derivate parziali

Franco Flandoli
Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Pisa
email: flandoli@dma.unipi.it

Sunto

È ben noto che l'aggiunta di rumore migliora le proprietà di buona posizione delle equazioni differenziali ordinarie della forma $dX_t = b(X_t)\,dt + dW_t$, con teoremi di esistenza unicità e proprietà di flusso stocastico continuo anche solo per $b \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p > d$, e addirittura con un flusso di diffeomorfismi se b è hölderiano.

Lo studio di analoghe questioni per equazioni alle derivate parziali è molto più difficile. Negli ultimi anni sono stati ottenuti risultati di unicità per alcune PDE perturbate da rumore, in situazioni in cui l'equazione deterministica manca di unicità. L'esempio in cui la teoria è più completa è l'equazione del trasporto lineare

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot Du = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0$$

dove, in ipotesi su b deboli come quelle citate sopra, ci sono esempi di non unicità ed esempi di singolarità che nascono da dati iniziali regolari. Con opportune perturbazioni stocastiche questa equazione diventa ben posta nella classe delle soluzioni deboli di tipo $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ (sotto opportune ipotesi sulla divergenza di b). Se inoltre u_0 è $C^1(\mathbb{R}^d)$ e b è hölderiano, allora la soluzione è $C^1(\mathbb{R}^d)$, ovvero non si sviluppano singolarità, sempre sotto l'effetto del rumore.

Mentre si possono elencare alcuni altri risultati di unicità dovuti alla presenza del rumore per equazioni diverse da quelle del trasporto lineare, meno chiaro è l'effetto del rumore sulla nascita di singolarità. Nel caso delle equazioni lineari del trasporto e di continuità, esso ha un effetto regolarizzante (cioè previene l'insorgenza di certe singolarità), ma già per l'equazione di Burgers questo non è più vero. Sembra invece esserci spazio per risultati positivi per le equazioni di Eulero in dimensione 2 e per le equazioni di Vlasov-Poisson. In entrambi i casi, se ci si limita alle soluzioni distribuzionali concentrate in un numero finito di punti (che sono suscettibili di uno studio lagrangiano particolarmente semplice), si ottengono dei miglioramenti rispetto ai risultati ed i controesempi della teoria deterministica, in particolare il collasso di particelle che accade per particolari configurazioni non può più avvenire.

Intervento: Franco Flandoli,
Interazione tra noise e singolarità nelle equazioni alle derivate parziali,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 253–267**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 253-267

Interazione tra noise e singolarità nelle equazioni alle derivate parziali

FRANCO FLANDOLI

XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Bologna, Settembre 2011

Abstract. – *Viene discussa la possibilità che la presenza di rumore nelle PDE impedisca l'insorgere di singolarità. I risultati principali riguardano equazioni del trasporto lineari ed includono una discussione del prolungamento dopo una singolarità ed il limite per il noise che tende a zero. Il caso non lineare è più complesso ed ampiamente aperto.*

1. – Introduzione

Come è noto, ci sono moltissimi esempi rilevanti di equazioni alle derivate parziali (PDE) in cui si sviluppano singolarità in tempo finito. Partendo da dati iniziali regolari, le soluzioni diventano ad esempio discontinue o illimitate, ad un certo istante. In alcuni casi molto importanti – ad esempio per le equazioni di Eulero – pur non avendo esempi di singolarità, si sospetta per lo meno che esse possano accadere.

Un po' tutti i sistemi reali sono soggetti a perturbazioni. Spesso queste non possono essere descritte in modo preciso e deterministico, ad esempio come variabili legate da ulteriori equazioni, per cui può aver senso considerarle come causali. Questa è una delle origini dell'interesse per le equazioni alle derivate parziali stocastiche (SPDE), ovvero PDE perturbate da termini di tipo rumore bianco. Negli ultimi decenni lo studio delle SPDE ha raggiunto un elevato grado di sviluppo e si può dire, molto vagamente, che la maggior parte delle teorie di base riguardanti le PDE sia stata opportunamente generalizzata al caso stocastico. A titolo di esempio si vedano le monografie [6], [22].

Lo studio descritto in questa nota tenta di capire che effetto può avere un noise sullo sviluppo delle singolarità di una PDE. A priori si potrebbe pensare che la presenza di perturbazioni casuali renda ancor più irregolare il comportamento delle soluzioni favorendo l'insorgenza di singolarità. Forse in alcuni esempi questo può anche succedere, ma qui vogliamo discutere la possibilità che accada il contrario, cioè che *il noise riesca a prevenire le singolarità*.

Alcuni esempi di singolarità sono molto robusti – ad esempio il collasso di una sfera secondo il moto per curvatura media. In questi casi è naturale pensare che il noise non abbia effetti rilevanti. Un problema che non sembra essere ancora stato studiato è ad esempio l'effetto di un noise sui flussi di Ricci, ma alcune analisi intuitive non lasciano molte speranze che il noise modifichi in positivo l'evoluzione quando questa è destinata a sviluppare una singolarità. Detto altrimenti, è difficile immaginare che un meccanismo di tipo rumore possa essere sostituito alle operazioni di chirurgia necessarie per rimuovere le singolarità e prolungare la dinamica, [21].

Ci sono invece altri esempi in cui lo sviluppo di una singolarità potrebbe richiedere un elevato grado di organizzazione, oltretutto persistente – ad esempio l'intensificazione di un tubo di vorticità in un fluido. Non è assurdo immaginare che un noise possa frammentare un tale processo ed impedire che si porti a compimento.

Un secondo problema estremamente interessante poi è quello del *prolungamento dopo la singolarità*. Quando nasce una singolarità la soluzione diventa meno regolare e, se questa entra in modo non-lineare nei coefficienti della PDE, i coefficienti diventano di conseguenza meno regolari. La PDE diventa più complessa matematicamente, perché ha coefficienti meno regolari e deve essere risolta in una classe di soluzioni meno regolari. Possono allora nascere problemi di non unicità. Riassumendo: dopo una singolarità non è infrequente che si verifichi un fenomeno di non unicità, o potenziale non unicità. Quando questo accade, le SPDE possono essere particolarmente interessanti per la seguente doppia ragione. Da un lato, può accadere che esse non soffrano degli stessi problemi di non unicità della corrispondente PDE. Dall'altro, facendo tendere il noise a zero, può accadere che vengano identificate particolari soluzioni della PDE deterministica, soluzioni che sono in un certo senso più rilevanti in quanto robuste rispetto a perturbazioni causali. Il limite per il noise che tende a zero potrebbe diventare un principio di selezione, nei casi di non unicità che seguono l'insorgenza di singolarità.

Lo scopo di questa nota è di capire alcuni di questi problemi nel caso della PDE più semplice possibile, pur di sapore fluidodinamico: l'equazione del trasporto lineare, non viscosa. Inizialmente mostreremo esempi di trasporto lineare in cui il noise previene le singolarità. Poi vedremo esempi in cui il noise restituisce l'unicità ed esempi di selezione tramite noise che tende a zero. Al termine della nota faremo alcuni commenti su alcuni casi non lineari, come le equazioni di Burgers, Hamilton-Jacobi, Eulero 2D e Vlasov-Poisson 1D.

Alcuni elementi sono riportati nel libro [13], si veda anche [14], e sono stati ottenuti in collaborazione con molti coautori, tra i quali Massimiliano Gubinelli ed Enrico Priola.

2. – Trasporto lineare

Esaminiamo la PDE

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + b(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x)$$

nell'incognita $u : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Il campo (detto *drift*) $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è assegnato, misurabile e verrà preso con poca regolarità.

Nel caso classico in cui $b \in C\big([0,T]; Lip(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)\big)$, la PDE è ben posta in $C^1(\mathbb{R}^d)$, o anche in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il profilo iniziale $u_0(x)$ viene trasportato:

$$u(t, \varphi_t(x)) = u_0(x)$$

dal flusso $\varphi_t(x)$ delle caratteristiche, soluzione dell'equazione

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = b(t, \varphi_t(x)), \qquad \varphi_0(x) = x.$$

Quando però b è meno regolare, possono insorgere problemi di non unicità e di nascita di singolarità. La singolarità tipica è la nascita di una discontinuità, a partire da dati iniziali regolari.

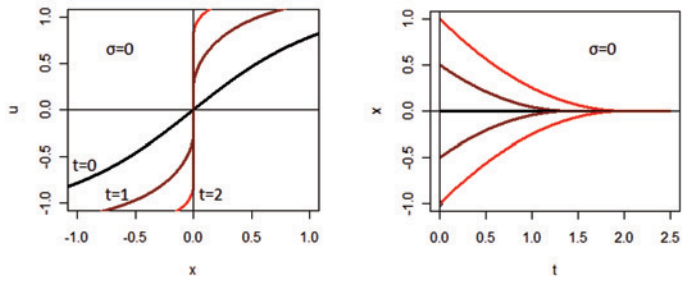
Vediamo un esempio:

$$d = 1, \qquad b(x) = -2sign(x)\sqrt{|x|}.$$

Prendiamo per fissare le idee

$$u_0(x) = \arctan(x).$$

La soluzione, unica, dell'equazione del trasporto diventa discontinua immediatamente. Le seguenti due figure mostrano il profilo $x \mapsto u(t,x)$ a tre diversi istanti di tempo ($t = 0, 1, 2$) e le relative caratteristiche che coalescono.



Non è difficile simulare numericamente – risolvendo numericamente l'equazione delle caratteristiche stocastiche a partire da numerosi dati iniziali diversi, relativamente alla stessa realizzazione del rumore e trasportando il profilo

iniziale lungo le caratteristiche – la seguente variante stocastica della PDE precedente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u + \sigma \nabla u \circ \frac{dW}{dt} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0.$$

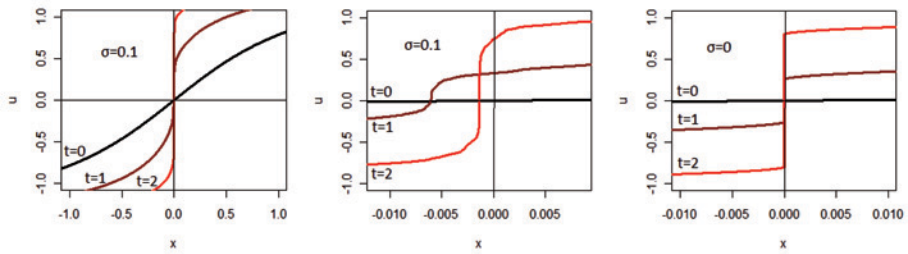
In questo modello viene aggiunto un noise di tipo trasporto (e in forma di Stratonovich, si veda [16] per una trattazione del calcolo stocastico necessario): si sostituisce $b(t,x)$ con $b(t,x) + \sigma \dfrac{dW(t)}{dt}$. L'equazione delle caratteristiche diventa l'equazione stocastica

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dW_t, \qquad X_0 = x.$$

Per non stravolgere l'aspetto delle soluzioni, e per restare vicino all'idea che i sistemi hanno sì delle perturbazioni ma piccole, abbiamo preso

$$\sigma = 0.1.$$

Ecco come appaiono i profili $x \mapsto u(t,x)$ ai tre diversi istanti $t = 0, 1, 2$. La prima figura mostra la soluzione stocastica nella scala originaria sull'asse delle x. La seconda figura mostra uno zoom della soluzione stocastica nelle vicinanze di $x = 0$, zoom operato tramite cambio di scala (solamente) sull'asse delle x. La terza figura, a titolo di confronto, mostra la stessa simulazione, con lo stesso zoom, senza noise ($\sigma = 0$).



L'effetto di questo noise è quello di una traslazione aleatoria. La discontinuità è sparita. Inoltre, come si può osservare da altre semplici figure qui non riportate, la derivata numerica nella zona ripida è elevata (circa 310) ma non "infinita" (la partizione sull'asse delle x in questa simulazione è tale che potevano venire valori della derivata numerica pari a decine di migliaia).

REMARK 2.1. – Di solito si pensa che il noise produca profili altamente oscillanti. Nel tempo sì, ma non necessariamente nello spazio. Dipende dal tipo di noise, da come questo entra nell'equazione. Qui il noise entra come termine di

trasporto quindi rappresenta un contributo ulteriore al trasporto provocato dal campo b, una sorta di traslazione spaziale aleatoria. Come si vede dalle simulazioni, questo tipo di noise non corruga marcatamente il profilo.

Se osserviamo numericamente le curve caratteristiche del caso stocastico possiamo riconoscere che esse non collassano. Alcune figure si trovano nel lavoro [14].

2.1 – *Risultati rigorosi (drift di classe Hölder)*

Sia (Ω, F, P) uno spazio probabilizzato, $(F_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione, $(W_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano d-dimensionale su $\big(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P\big)$. Il seguente risultato è contenuto nel lavoro [11]:

THEOREM 2. – *Se* $b \in C\Big([0,T]; C_b^\alpha\Big(\mathbb{R}^d\Big)\Big)$, *allora l'equazione differenziale stocastica*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma dW_t, \qquad X_0 = x \tag{1}$$

genera un flusso stocastico di diffeomorfismi $\varphi_t(x,\omega)$, *con derivate* α'*-Hölder continue per ogni* $\alpha' < \alpha$.

Questo significa – eliminando alcune specifiche, per brevità – che esiste una funzione misurabile $(\omega, t, x) \mapsto \varphi_t(x,\omega)$ da $\Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tale che:

1. per ogni x, $(\omega, t) \mapsto \varphi_t(x,\omega)$ è una soluzione dell'equazione (1);
2. per ogni t e quasi ogni ω, l'applicazione $(x) \mapsto \varphi_t(x,\omega)$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^d$ con derivate α'-Hölder continue per ogni $\alpha' < \alpha$.

Tramite questo risultato e con la stessa dimostrazione del teorema dell'Appendice A di [11] si ha:

THEOREM 3. – *Se* $u_0 \in C^1\big(\mathbb{R}^d\big)$ *allora* $u(t,x) = u_0\big(\varphi_t^{-1}(x)\big)$ *è* $C^1\big(\mathbb{R}^d\big)$ *ed è l'unica soluzione forte dell'equazione*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u + \sigma \nabla u \circ \frac{dW}{dt} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0.$$

Per la definizione di soluzione di questa SPDE rimandiamo al lavoro [11].

Quindi questo tipo di perturbazione casuale impedisce l'insorgenza della singolarità, nel senso della discontinuità. Naturalmente, è pur vero che se il dato iniziale fosse C^∞, la soluzione dell'equazione stocastica non sarebbe necessariamente C^∞. Quindi non stiamo affermando che il noise elimina ogni forma di singolarità ma almeno qualche forma.

2.2 – *Il flusso*

Il punto cruciale del risultato precedente è l'esistenza e la regolarità del flusso associato all'equazione

$$X_t = \int_0^t b(s, X_s)ds + \sigma W_t, \qquad X_0 = x \tag{2}$$

quando b è solo hölderiano: $b \in C\big([0,T]; C_b^\alpha(\mathbb{R}^d)\big)$.

La ragione di questo risultato è simile a quella dell'esistenza del cosiddetto "local time", secondo l'approccio di Tanaka (si veda [23]). Vale infatti, per la formula di Itô,

$$\int_0^t b(s, X_s)ds = U(t, X_t) - U(0, x) - \int_0^t \nabla U(s, X_s)\sigma dW_s$$

dove $U(t, x)$ risolve

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta U + (b \cdot \nabla)U = -b.$$

Il fatto cruciale è che U e ∇U sono più regolari di b: addirittura $\nabla U \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Quindi abbiamo sostituito il termine $\int_0^t b(s, X_s)ds$ dell'equazione (2) con termini più regolari, a coefficienti almeno lipschitziani. Questa è la ragione su cui poggia l'esistenza del flusso stocastico. Enfatizziamo questo fatto col seguente concetto.

2.3 – *Misura di occupazione e funzioni non-regolari*

La misura di occupazione di un processo X su $[0, t]$ è la misura di Borel finita aleatoria μ_t definita da

$$\mu_t(f) = \int_0^t f(X_s)ds, \qquad f \in C_b\Big(\mathbb{R}^d\Big).$$

Per $d > 1$, se X è soluzione dell'equazione (1), essa è singolare rispetto alla misura di Lebesgue (mentre per $d = 1$ è assolutamente continua e la sua densità è il local time). Tuttavia, è sufficientemente "diffusa" da regolarizzare funzioni non-regolari:

$$\mu_t(f) = U(t, X_t) - U(0, x) - \int_0^t \nabla U(s, X_s)\sigma dW_s$$

dove U è soluzione di

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta U + (b \cdot \nabla)U = -f.$$

La misura di occupazione di funzioni deterministiche regolari può concentrarsi invece nei punti singolari di f. Questa proprietà di "diffusione" della misura di occupazione è forse la ragione profonda dei teoremi discussi sopra.

2.4 – *Generalizzazione a drift ancor meno regolari*

L'equazione stocastica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma dW_t, \qquad X_0 = x$$

sotto l'ipotesi

$$b \in L^q\big(0, T; L^p\big(\mathbb{R}^d\big)\big) \qquad \text{per qualche } p, q \geq 2 \text{ tale che } \frac{d}{p} + \frac{2}{q} < 1$$

- ha soluzione forte unica [15]
- genera un flusso stocastico di omeomorfismi hölderiani [9], C^α per ogni $\alpha < 1$

Cosa possiamo dire dell'equazione del trasporto stocastica? In un lavoro in fase di redazione [10] si mostra ad esempio che, se div$b \in L^1_{loc}$ (che serve per dare senso debole alla SPDE), e se $u_0 \in C^1\big(\mathbb{R}^d\big)$, allora $u(t, x) = u_0\big(\varphi_t^{-1}(x)\big)$ è $C^\alpha\big(\mathbb{R}^d\big)$ per ogni $\alpha < 1$ ed è una soluzione della SPDE.

Quindi anche in questo caso non insorgono discontinuità nella soluzione, partendo da dati iniziali regolari. La regolarità $u(t, \cdot) \in C^1\big(\mathbb{R}^d\big)$ però è un problema aperto. Risolto almeno in un caso particolare di drift discontinui [2]:

THEOREM 4. – *Se $b \in BV$ e $[b']^+ \in L^\infty$ oppure $[b']^- \in L^\infty$, allora $\varphi_t(x)$ (e quindi $u(t, \cdot)$) è $C^{1,\alpha}$ per ogni $\alpha < 1/2$.*

3. – Prolungamento dopo la singolarità. Osservazioni concettuali

Nel caso di PDE nonlineari, i coefficienti dipendono dalla soluzione e quindi diventano anch'essi irregolari quando insorge una singolarità. Da quel momento si deve risolvere un'equazione a coefficienti irregolari, in una classe di soluzioni irregolari. Questo può provocare problemi di non-unicità.

Per le equazioni del trasporto lineari, in cui il drift è dato, non avviene questo degrado spontaneo della regolarità dei coefficienti, che quindi va imposto a priori se vogliamo studiare cosa può accadere dopo una singolarità.

Il problema è quindi: che succede all'equazione del trasporto se consideriamo coefficienti irregolari e studiamo soluzioni deboli? Ci sono esempi di non-unicità. Un esempio semplice si ha nel caso

$$d = 1, \qquad b(x) = +2\,sign\,(x)\sqrt{|x|}.$$

Si vedano grafici e dettagli analitici delle soluzioni in [13].

Il nostro obiettivo è duplice:

- mostrare che il noise restituisce l'unicità
- capire che accade quando il noise tende a zero.

3.1 – *Unicità prodotta dal noise*

Il seguente risultato, basato sulle proprietà di flusso descritte in precedenza, è dimostrato nel lavoro [11]:

THEOREM 5. – *Se* $b \in C\big([0,T]; C_b^\alpha(\mathbb{R}^d)\big)$ *e* $\operatorname{div} b \in L^p\big([0,T]\times\mathbb{R}^d\big)$ *per qualche* $p > 2 \wedge d$, *allora esiste un'unica soluzione debole di classe* L^∞ *dell'equazione del trasporto stocastica.*

Parte dell'interesse di questo risultato risiede nel confronto con la teoria deterministica dell'unicità di soluzioni L^∞: se $b \in L^1\big(0,T; W^{1,1}(\mathbb{R}^d)\big)$, $\operatorname{div} b \in L^1\big(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^d)\big)$, c'è unicità di soluzioni $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, [8]; ed il caso $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ è stato generalizzato a $BV(\mathbb{R}^d)$ da [1] con diversi ampliamenti della teoria.

Come abbiamo detto, la dimostrazione del teorema 5 è basata sull'esistenza del flusso regolare (ma non solo!), per cui è radicalmente diversa da quelle delle teorie deterministiche ora citate. Sono state poi trovate altre strade completamente diverse per dimostrare l'unicità della SPDE del trasporto con drift non regolare. Il seguente risultato [4] è basato sul concetto di soluzione di rinormalizzazione, quindi è più simile in spirito alla teoria deterministica sopra citata e necessita delle stesse ipotesi per poter effettuare la rinormalizzazione ($b \in BV(\mathbb{R}^d)$) ma, grazie alla presenza del noise, permette di rilassare la limitatezza spaziale $\operatorname{div} b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ imposta nella teoria deterministica:

THEOREM 6. – *Se* $b \in BV(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{div} b \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *allora c'è unicità in* L^∞ *per la SPDE.*

Una seconda dimostrazione completamente diversa e prettamente stocastica è stata trovata da [19] ed è basata sullo sviluppo in caos di Wiener delle soluzioni; il risultato è, per certi versi, il più generale trovato fino ad ora:

THEOREM 7. – *Se* $b \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *per qualche* $p > 2 \vee d$ *e* $\operatorname{div} b \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *per qualche* $p > 2 \vee \dfrac{d}{2}$, *allora c'è unicità in* L^∞ *per la SPDE.*

3.2 – *Limite per il noise che tende a zero*

Mentre i risultati delle sezioni precedenti valgono in dimensione qualsiasi e sono relativi a classi di equazioni, l'unico risultato noto sul problema fondamentale del limite per il noise che tende a zero, per PDE (in condizioni di non unicità per la PDE limite) è relativo ad un esempio specifico uni-dimensionale, [3], basato sul lavoro [5] relativo alle equazioni ordinarie uni-dimensionali. Citiamo però anche il lavoro [18] che analizza il limite per il noise che tende a zero per leggi di conservazione scalari; lì c'è non unicità delle soluzioni non entropiche che complica lo studio ma l'unicità della soluzione entropica diventa l'arma fondamentale con cui identificare il limite. Il lavoro [18] caratterizza con molta precisione il difficile ed anomalo comportamento di grandi deviazioni in presenza di non unicità del problema limite.

Si consideri l'esempio di non-unicità già enunciato sopra, $b(x) = + 2\,sign(x)\sqrt{|x|}$, con la condizione iniziale

$$u_0 = 1_{\{x>0\}}.$$

Si consideri anche la regolarizzazione viscosa della PDE di trasporto:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + b \cdot \nabla u_\varepsilon = \varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon, \qquad u_\varepsilon|_{t=0} = u_0$$

Si può dimostrare [3] che, per $\varepsilon \to 0$,

$$u_\varepsilon \to u^* = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x > t^2 \\ 1/2 & \text{per} \quad -t^2 \le x \le t^2 \\ 0 & \text{per} \quad x < -t^2 \end{cases}$$

Il valore 1/2 non è molto naturale, se si pensa all'idea di trasporto delle condizioni iniziali. Più naturale è aspettarsi che il trasporto di u_0 possa avvenire in due modi diversi a seconda di ciò che accade in $x = 0$ per tempi molto piccoli.

THEOREM 8. – *Se u^ε è la soluzione forte unica di*

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + b \cdot \nabla u^\varepsilon + \varepsilon \nabla u^\varepsilon \circ \frac{dW}{dt} = 0, \qquad u^\varepsilon|_{t=0} = u_0$$

allora la sua legge P^ε converge debolmente a:

$$P^\varepsilon \rightharpoonup P = \frac{1}{2}\delta_{u^{(+)}} + \frac{1}{2}\delta_{u^{(-)}}$$

dove

$$u^{(-)}(x,t) = 1_{\{x>-t^2\}}, \qquad u^{(+)}(x,t) = 1_{\{x\ge t^2\}}.$$

3.3 – *Caso lineare, problemi aperti*

Concludiamo sottolineando che, relativamente all'equazione del trasporto lineare, il problema maggiormente aperto è quello del limite per noise che tende a zero. Collegato a questo, il problema del prolungamento dopo una singolarità deve essere capito meglio, eventualmente con riferimento anche all'equazione di continuità che, pur essendo simile a quella del trasporto per molti versi, ha però delle singolarità di natura particolare.

In vista dei problemi non lineari sarebbe poi decisivo sviluppare metodi per studiare il problema lineare con drift b aleatorio (in quanto deve poi essere funzione della soluzione u che è aleatoria), ma questo al momento è completamente aperto. Tutte le tecniche illustrate sopra smettono di funzionare se b è aleatorio.

4. – Commenti su casi non lineari

Mentre il quadro, relativo a singolarità e unicità sotto perturbazioni stocastiche, inizia a comporsi nel caso delle equazioni lineari del trasporto, le conoscenze nel caso nonlineare sono estremamente frammentarie. L'approccio più immediato, che consisterebbe nel ricondurre alcune questioni al caso lineare o sue iterazioni, "congelando" il drift, non è praticabile perché non siamo in grado di studiare il caso lineare con b aleatorio, che è il caso in cui ci si trova quando b dipende dalla soluzione. Serve uno studio diretto del problema nonlineare.

Alcuni primi risultati stanno emergendo per leggi di conservazione scalare come le equazioni di Burgers, per semplici equazioni di tipo Hamilton-Jacobi, per particolari soluzioni delle equazioni di Eulero in due dimensioni e di Vlasov-Poisson in una dimensione. Alcuni sono risultati positivi ma altri negativi.

Una prima osservazione di carattere generale è che per molte delle equazioni ora citate un noise della forma $\sigma \nabla u \circ \dfrac{dW}{dt}$ come quello usato sopra *non può* produrre alcun cambiamento nelle proprietà qualitative delle soluzioni, in termini di emergenza di singolarità o non unicità. Infatti, se indichiamo con u una soluzione del problema deterministico, la funzione $v(t,x) = u(t, x - \sigma W_t)$ è soluzione del problema stocastico e viceversa. Questo si può verificare immediatamente, ad esempio, per le equazioni di Burgers; infatti, permettendoci per semplicità di svolgere un calcolo un po' formale, dall'equazione $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ ricaviamo (il calcolo di Stratonovich gode delle stesse regole formali del calcolo tradizionale)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \circ \frac{dW}{dt} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \circ \frac{dW}{dt}$$

da cui $\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma\frac{\partial v}{\partial x} \circ \frac{dW}{dt} = 0$. Quindi se u sviluppa una singolarità, lo stesso accade a v, e così via.

Di conseguenza, per i modelli fisici che hanno questo tipo di invarianza per traslazioni spaziali (Burgers, Eulero, Vlasov, forme particolari di Hamilton-Jacobi), è necessario mettere in gioco perturbazioni stocastiche più complesse, con una maggior struttura spaziale, non semplici traslazioni aleatorie rigide di tutto lo spazio simultaneamente; il rumore deve essere in grado di perturbare localmente la dinamica in maniera disordinata spazialmente, come se agisse in modo quasi indipendente in punti diversi dello spazio. Le perturbazioni giuste – anche alla luce dei primi risultati positivi illustrati sotto – potrebbero essere del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \nabla u \circ \frac{dW^k}{dt}$$

con opportuna struttura della funzione di covarianza

$$Q(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x)\sigma_k(y).$$

4.1 – *Le equazioni di Burgers*

Purtroppo, anche dopo aver capito che il rumore giusto potrebbe essere questo, resta il fatto che le equazioni di Burgers non modificano il loro comportamento, dal caso deterministico a quello stocastico: anche con queste perturbazioni è possibile fare esempi di non unicità – nella classe delle soluzioni deboli e non necessariamente entropiche – e di singolarità, shock; si vedano [13] e più precisamente [14].

4.2 – *Equazioni di Hamilton-Jacobi*

Al momento, per queste equazioni, sono stati trovati solo esempi negativi, cioè esempi in cui, come per Burgers, non si vede alcun miglioramento con l'aggiunta di un rumore. Ma in effetti questi esempi sono troppo simili a Burgers e per di più utilizzano di nuovo una forma di invarianza spaziale, per cui l'argomento necessita di maggior studio. Esaminiamo un esempio particolare, l'equazione:

$$du(t,x) + H(Du(t,x))dt + \sigma Du(t,x) \circ dW_t = 0$$
$$u|_{t=0} = u_0$$

Come nel caso lineare o per Burgers, si possono introdurre delle caratteristiche stocastiche

$$\begin{aligned} dx_t &= D_pH(p_t)dt + \sigma dW_t \\ dp_t &= 0 \end{aligned}$$

che, in questo caso particolare, si risolvono esplicitamente:

$$p_t = p_0 = Du_0(x_0)$$

$$x_t = x_0 + t \cdot D_pH(Du_0(x_0)) + \sigma W_t.$$

Di conseguenza, se partiamo da due diverse condizioni iniziali $x_0' \neq x_0''$, per le corrispondenti soluzioni vale

$$x_t' - x_t'' = x_0' - x_0'' + t \cdot \left[D_pH(Du_0(x_0')) - D_pH(Du_0(x_0''))\right]$$

e questa differenza può essere uguale a zero, ad esempio per $d = 1$, $H(p) = p^2$, $x_0' > x_0''$, $Du_0(x_0') < Du_0(x_0'')$. Il rumore ($\sigma \neq 0$) non ha impedito questo shock, già presente nel caso deterministico ($\sigma = 0$). Non c'è differenza tra i due casi.

Per altre classi di equazioni di Hamilton-Jacobi e per rumori più complessi il problema è aperto. Il modello stocastico che si può provare a considerare è della forma

$$du(t,x) + H(Du(t,x))dt + \sum_k \sigma_k(x) \cdot Du(t,x) \circ dW_t^k = 0$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

considerato ad esempio nel lavoro [17]. Le sue caratteristiche hanno la forma

$$\begin{aligned} dx_t &= D_pH(p_t)dt + \sum_k \sigma_k(x_t) \circ dB_t^k \\ dp_t &= -\sum_k p_t \cdot D\sigma_k(x_t) \circ dB_t^k. \end{aligned}$$

La domanda, per capire l'eventuale insorgenza o meno di shock e l'effetto del rumore, è: l'applicazione

$$x_0 \longmapsto x_t$$

può essere un diffeomorfismo (aleatorio) di $\mathbb{R}^d$, grazie al noise, in casi in cui non lo è per $\sigma_k \equiv 0$?

4.3 – *Equazioni di Eulero 2D e di Vlasov-Poisson 1D*

Queste equazioni hanno alcuni caratteri simili, come è illustrato nel libro [20]. Per entrambe è stato possibile mostrare un miglioramento della teoria nel caso in

cui agisca un rumore del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \nabla u \circ \frac{dW^k}{dt}$ con opportune ipotesi di non-degenerazione locale: detta $Q(x,y)$ la funzione di covarianza introdotta sopra, si richiede

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q(x_i, x_j) v_i v_j > 0$$

se gli x_i sono diversi ed i v_i sono non nulli. Illustriamo brevemente i risultati, che si possono consultare in dettaglio nei lavori [12], [7].

Per le equazioni di Eulero 2D scritte per il campo di vorticità $\xi(t,x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \cdot \nabla \xi + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \nabla \xi \circ \frac{dW^k}{dt}$$

(u è la velocità) si può studiare l'evoluzione di un campo di vorticità distribuzionale concentrato in un numero finito di punti, tramite un'opportuna dinamica hamiltoniana di dimensione finita – il moto dei punti di vorticità. Questa dinamica non è ben posta per tutte le condizioni iniziali: ci sono esempi espliciti di configurazioni iniziali di punti di vorticità che, evolvendo secondo questa dinamica, in tempo finito collassano in uno stesso punto, facendo perdere di significato alle equazioni di evoluzione. Si tratta quindi di un fenomeno di singolarità, anche se di tipo molto particolare rispetto a quelli esaminati sopra nel caso lineare. L'aggiunta di una perturbazione stocastica del tipo più complesso, descritta sopra, fa sì che per ogni configurazione iniziale dei vortici la dinamica sia definita globalmente nel tempo, in modo univoco, senza collasso dei vortici.

Per le equazioni di Vlasov-Poisson 1D, la soluzione $f(t,x,v)$ ha il significato fisico di densità di carica elettrica e le equazioni hanno la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E(t,x) \frac{\partial f}{\partial v} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(x) \frac{\partial f}{\partial v} \circ \frac{dW^k}{dt}$$

dove il campo $E(t,x)$ è legato linearmente ad f. Anche per questa equazione si può studiare il caso in cui la carica sia concentrata in un numero finito di punti. Di nuovo, questa soluzione distribuzionale della PDE si può studiare tramite un sistema di equazioni differenziali ordinarie, il moto delle cariche elettriche concentrate. Si possono poi fare vari esempi di configurazioni iniziali di carica che collassa in tempo finito, incluso il caso di una carica distribuita con continuità nello spazio (ma concentrata in velocità), caso che però non è ancora coperto da risultati stocastici. Limitatamente al caso di un numero finito di cariche concentrate, analogamente alle equazioni di Eulero, si riesce a dimostrare che con l'aggiunta di una perturbazione stocastica del tipo detto sopra le cariche non possono più collassare. Tecnicamente il problema è anche più difficile del caso

delle equazioni di Eulero, in quanto il rumore qui viene messo solamente nel termine di velocità e quindi è necessario mostrare che il suo effetto si propaga anche al termine spaziale.

REFERENCES

[1] L. Ambrosio, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math. **158** (2004), 227-260.

[2] S. Attanasio, *Stochastic flows of diffeomorphisms for one-dimensional SDE with discontinuous drift*, Electron. Commun. Probab. **15** (2010), 213-226.

[3] S. Attanasio - F. Flandoli, *Zero-noise solutions of linear transport equations without uniqueness: an example*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **347**, no. 13-14 (2009), 753-756.

[4] S. Attanasio - F. Flandoli, *Renormalized solutions for stochastic transport equations and the regularization by bilinear multiplicative noise*, Comm. P.D.E. **36**, n. 8 (2011), 1455-1474.

[5] R. Bafico - P. Baldi, *Small random perturbations of Peano phenomena*, Stochastics, **6**, no. 3-4 (1981/82), 279-292.

[6] G. Da Prato - J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.

[7] F. Delarue - F. Flandoli - D. Vincenzi, *Noise prevents collapse of Vlasov Poisson point charges*, to appear on Comm. Pure Appl. Math.

[8] R. J. Di Perna - P. L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511-547.

[9] E. Fedrizzi - F. Flandoli, *Hölder flow and differentiability for SDEs with nonregular drift*, to appear on Stoch. Anal. Appl.

[10] E. Fedrizzi - F. Flandoli, *Noise Prevents Singularities in Linear Transport Equations*, to appear on J. Funct. Anal.

[11] F. Flandoli - M. Gubinelli - E. Priola, *Well posedness of the transport equation by stochastic perturbation*, Invent. Math. **180** (2010), 1-53.

[12] F. Flandoli - M. Gubinelli - E. Priola, *Full well-posedness of point vortex dynamics corresponding to stochastic 2D Euler equations*, Stoch. Proc. Appl. **121**, no. 7 (2011), 1445-1463.

[13] F. Flandoli, *Random Perturbation of PDEs and Fluid Dynamic Models*, LNM 2015, Springer 2011.

[14] F. Flandoli, *The interaction between noise and transport mechanisms in PDEs*, Milan J. Math. **79**, no. 2 (2011), 543-560.

[15] N. V. Krylov - M. Röckner, *Strong solutions of stochastic equations with singular time dependent drift*, Probab. Theory Related Fields, **131** (2005), 154-196.

[16] H. Kunita, *Stochastic di erential equations and stochastic flows of diffeomorphisms*, Ecole d' et e de probabilit es de Saint-Flour, XL-2010, Lecture Notes in Math. 2015, Springer, Berlin, 2011.

[17] P.-L. Lions - P. E. Souganidis, *Uniqueness of weak solutions of fully nonlinear stochastic partial differential equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331**, no. 10 (2000), 783-790.

[18] M. Mariani, *Large deviations principles for stochastic scalar conservation laws*, Probab. Theory Related Fields, **147**, no. 3-4 (2010), 607-648.

[19] M. Maurelli, *Wiener chaos and uniqueness for stochastic transport equation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **349**, no. 11-12 (2011), 669-672.

[20] A. J. Majda - A. L. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[21] J. W. Morgan - F. T.-H. Fong, *Ricci flow and geometrization of 3-manifolds*, University Lecture Series, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
[22] C. Prévôt - M. Röckner, *A concise course on stochastic partial differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, 1905, Springer, Berlin, 2007.
[23] D. Revuz - M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Pisa
Via F. Buonarroti 1/c, 56127 Pisa
E-mail: flandoli@dma.unipi.it

Received December 10, 2011 and accepted January 30, 2012

Giovanni Forni: Il flusso orociclico: un esempio di sistema dinamico parabolico

Giovanni Forni
Department of Mathematics, University of Maryland
email: gforni@math.umd.edu

Sunto

I sistemi dinamici differenziabili si possono classificare in modo approssimativo in tre classi secondo la velocità di divergenza di orbite (infinitesimalmente) vicine: nei sistemi iperbolici (o almeno parzialmente iperbolici), più studiati e meglio compresi, orbite distinte si allontano in generale a velocità esponenziale; la dinamica è allora fortemente caotica; un esempio fondamentale di sistema iperbolico è dato dal flusso geodetico sul fibrato tangente unitario di una varietà Riemanniana compatta di curvatura negativa. All'estremo opposto, si situano i 'moti regolari' che appaiono nella teoria Kolmogorov-Arnold-Moser; in questo caso le orbite non divergono affatto o 'molto lentamente'. Un sistema di questo tipo può essere chiamato 'ellittico'. Un esempio fondamentale di sistema ellittico è il flusso o la mappa di traslazione su un toro.

Un sistema dinamico è approssimativamente classificato come *parabolico* in tutti i casi in cui le orbite divergono a velocità polinomiale. Il flusso orociclico stabile/instabile sul fibrato tangente unitario di una superficie è il sistema dinamico definito dal trasporto di ogni vettore tangente unitario lungo la curva stabile/instabile del flusso geodetico con velocità unitaria. Le proiezioni delle orbite dei flussi orociclici sulla superficie sono orocicli nel senso ordinario. I flussi orociclici sono esempi classici di flussi parabolici. Le caratteristiche più salienti della dinamica parabolica sono l'unicità ergodica, la proprietà di entropia nulla, la proprietà di mescolamento con decadimento polinomiale delle correlazioni.

Nella prima parte di questa conferenza ci proponiamo di descrivere alcuni fra i principali esempi fin qui studiati di flussi parabolici e di motivare il loro interesse in applicazioni a problemi di meccanica, geometria e teoria dei numeri. Questi esempi includono i biliardi poligonali, i flussi nilpotenti, e i flussi orociclici. Nella seconda parte ci concentreremo sul flusso orociclico (nel caso di una superficie iperbolica compatta) e descriveremo alcuni aspetti della dinamica con particolare attenzione ai risultati recenti. Questo esame ci permetterà di mettere a confronto certe proprietà della dinamica parabolica con le proprietà corrispondenti della dinamica iperbolica e ellittica. Il nostro esame si concentrerà in particolare sulla teoria dell'equazione coomologica e sul comportamento asintotico delle medie ergodiche. In particolare, risponderemo a una questione posta da Yakov Sinai: il flusso orociclico soddisfa il teorema del limite centrale?

Giovanni Jona-Lasinio: Fisica e matematica: due facce di un unico percorso

Giovanni Jona-Lasinio
Dipartimento di Fisica, Sapienza Università di Roma
email: gianni.jona@roma1.infn.it

Sunto

La matematica è il linguaggio della fisica e, dalla rivoluzione scientifica del '600, l'evoluzione dell'una non è comprensibile senza far riferimento all'altra.

Nel presentare all'inizio del nuovo millennio la dimostrazione della congettura di Poincaré, Perelman afferma di essersi ispirato tra l'altro al "Gruppo di Rinormalizzazione", un insieme di idee introdotte e ampiamente utilizzate dai fisici nella seconda metà del '900 in contesti molto lontani dalla geometria.

Nel mio intervento cercherò di illustrare questa affermazione che testimonia ancora una volta il profondo legame tra le due discipline.

Massimo Marinacci: Economia teorica e Analisi funzionale

Massimo Marinacci
Dipartmento di Scienze delle Decisioni, Università Bocconi, Milano
email: massimo.marinacci@unibocconi.it

Sunto

All'interno dell'Economia teorica, la Teoria delle decisioni modella le scelte degli agenti economici (quali individui, famiglie, imprese e governi), sia dal punto di vista descrittivo studiando come tali scelte vengono effettivamente fatte, sia da quello normativo proponendo come esse dovrebbero essere compiute in modo razionale.

Sin dai suoi inizi intorno al 1870, l'Economia teorica ha posto le scelte degli agenti come suo fondamento, su cui costruire lo studio delle loro interazioni di mercato (Equilibrio economico generale) e strategiche (Teoria dei giochi), che sono il fine ultimo dell'analisi economica. A differenza dello psicologo, l'economista teorico non è interessato al comportamento umano di per sé, ma quale base per modellare l'interazione economica tra agenti (l'Individualismo metodologico è il fondamento epistemologico di tale approccio).

La Teoria delle decisioni studia il comportamento individuale in modo formale tramite modelli matematici basati su assiomi comportamentali, cioè su assunzioni sulle scelte degli agenti economici (per esempio, che esse siano transitive). Dagli assiomi comportamentali si derivano, tramite teoremi di rappresentazione, funzioni obiettivo che guidano le decisioni degli agenti nei loro problemi di ottimo (per esempio, la massimizzazione del profitto per le imprese).

Dopo i fondamentali contributi di John von Neumann degli anni quaranta, la modellizzazione matematica del comportamento individuale si basa su idee e metodi dell'Analisi Funzionale, in particolare sui metodi di dualità. La relazione presenterà alcuni di tali metodi, che negli ultimi venti anni hanno svolto un ruolo importante in Teoria delle decisioni e, più in generale, in Economia teorica.

Stefano Meda: Alcuni aspetti dell'analisi su varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume

Stefano Meda[1]
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano–Bicocca
email: stefano.meda@unimib.it

Sunto

Negli ultimi tre decenni l'analisi su varietà Riemanniane ha conosciuto un notevole sviluppo, che ha dato luogo a una vasta produzione scientifica. I risultati ottenuti e le tecniche utilizzate dipendono, in larga misura, dalle proprietà analitico-geometriche di volta in volta assunte sulla varietà.

In questa conferenza discuterò alcuni risultati riguardanti l'analisi su una classe di varietà riemanniane M a crescita esponenziale di volume comprendente gli spazi iperbolici e le loro più immediate generalizzazioni, cioè gli spazi di Damek–Ricci e gli spazi simmetrici di tipo non compatto, nonché, ad esempio, le varietà di Cartan–Hadamard con curvatura negativa.

La maggior parte dei risultati di cui farò menzione hanno per oggetto l'operatore di Laplace–Beltrami $\mathcal{L}$ su M e illustrano il fatto che proprietà geometriche delle varietà considerate influenzano in modo marcato le proprietà analitiche di $\mathcal{L}$, le quali, in molti casi, risultano significativamente differenti dalle corrispondenti proprietà del classico operatore di Laplace Δ sullo spazio euclideo. Tale diversità di comportamento è sovente conseguenza più o meno diretta della non uniforme ellitticità di $\mathcal{L}$ (all'infinito).

La prima parte della conferenza sarà dedicata alla discussione delle ipotesi geometriche che assumerò su M e all'esposizione di qualche esempio/risultato elementare.

Nella seconda parte concentrerò l'attenzione sull'estensione alla classe di varietà considerata di alcuni aspetti della classica teoria degli integrali singolari. In particolare definirò due spazi funzionali che svolgono, nel contesto considerato, le funzioni del classico spazio di Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ e del suo duale $BMO(\mathbb{R}^n)$, ne discuterò le principali proprietà e ne illustrerò l'utilità nell'analisi di alcuni operatori naturalmente associati a $\mathcal{L}$, quali le trasformate di Riesz e i moltiplicatori spettrali.

Parte dei risultati che esporrò in questa conferenza è contenuta in recenti lavori in collaborazione con Giancarlo Mauceri e Maria Vallarino.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2009 "Analisi Armonica"

Intervento: Stefano Meda,
Alcuni aspetti dell'analisi su varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume,
***Bollettino U. M. I. (9)* IV (2012), 631–654**

Bollettino U. M. I.
(9) **IV** (2012), 631-654

Alcuni aspetti dell'analisi su varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume(*)

STEFANO MEDA

Dedicato alla memoria di Guido

Questo articolo contiene una versione leggermente estesa della conferenza da me tenuta a Bologna in occasione del XIX Convegno UMI. Desidero ringraziare il Comitato scientifico per l'invito, che mi offre l'opportunità di illustrare una linea di ricerca che ho perseguito in anni recenti con Andrea Carbonaro (Birmingham), Giancarlo Mauceri (Genova), Peter Sjögren (Göteborg) e Maria Vallarino (Politecnico di Torino).

Tale linea di ricerca si propone di elaborare una teoria di integrali singolari nel contesto di alcuni spazi metrici di misura privi della proprietà di raddoppio delle sfere. Esempi significativi sono le varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume (ad esempio il piano iperbolico) e lo spazio euclideo dotato della misura gaussiana.

I risultati ottenuti sono in parte già pubblicati [CMM1, CMM2, MMV1, MMV2, MMV3, MMV4, MV], in parte in fase di rifinitura. La conferenza di oggi non toccherà gli aspetti della teoria concernenti l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck (vd. [MM, MMS1, MMS2, GMMST1, GMMST2]), alla cui elaborazione ha dato un significativo contributo anche P. Sjögren, e si concentrerà sugli sviluppi inerenti le varietà, elaborati in collaborazione con Carbonaro, Mauceri e Vallarino. L'esposizione è articolata come segue:

Introduzione

I Operatore di Laplace–Beltrami
II Diffusione del calore
III Integrali singolari e spazi di Hardy
IIIa su $\mathbb{R}$
IIIb su varietà.

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 16 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

1. – Introduzione

1.1 – *Le trasformate di Riesz*

Vi sono numerosi problemi la cui formulazione e/o soluzione coinvolge operatori appartenenti a una classe nota come classe degli *operatori integrali singolari*. In questa introduzione mi limiterò all'importante esempio classico delle trasformate di Riesz in $\mathbb{R}^n$, prototipi di integrali singolari che intervengono in numerosi problemi, tra i quali quello della regolarità delle soluzioni di equazioni ellittiche. Supponiamo, ad esempio, che u sia una soluzione distribuzionale dell'equazione di Poisson

$$-\Delta u = f, \tag{1.1}$$

dove f è un dato in $L^p(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto. Evidentemente Δu appartiene a $L^p(\mathbb{R}^n)$; è naturale chiedersi se tutte le derivate seconde (nel senso delle distribuzioni) di u appartengono a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Formalmente

$$u = (-\Delta)^{-1} f,$$

cosicché

$$\begin{aligned} \partial^2_{ij} u &= \partial^2_{ij}(-\Delta)^{-1} f \\ &= \partial_i(-\Delta)^{-1/2}\partial_j(-\Delta)^{-1/2} f. \end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che le derivate parziali commutano con le potenze di $(-\Delta)$, perché la trasformata di Fourier diagonalizza simultaneamente tutti gli operatori che commutano con le traslazioni. Posto

$$\mathscr{R}_i := \partial_i(-\Delta)^{-1/2} \qquad i = 1, \dots, n,$$

possiamo scrivere

$$\partial^2_{ij} u = \mathscr{R}_i \mathscr{R}_j f.$$

Conviene anche introdurre la trasformata di Riesz vettoriale

$$\mathscr{R} = (\mathscr{R}_1, \dots, \mathscr{R}_n).$$

TEOREMA 1.1. – *Valgono le affermazioni seguenti:*

(i) *per ogni p in $(1, \infty)$ la trasformata di Riesz $\mathscr{R}_j$ è limitata su $L^p(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$;*

(ii) *la trasformata di Riesz $\mathscr{R}_j$ è illimitata da $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$;*

(iii) *$\mathscr{R}_j$ è di tipo debole $(1,1)$, cioè esiste una costante C tale che*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\mathscr{R}_j f(x)\right| > \alpha\right\}\right| \le C\,\frac{\|f\|_1}{\alpha} \qquad \forall \alpha > 0\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Questo risultato classico (vd., ad es., [St2]) implica che se $1 < p < \infty$ e u risolve (1.1), allora tutte le derivate seconde di u appartengono a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Il risultato è *falso* se $p = 1$.

Come noto la condizione (iii) del teorema precedente è una stima sostitutiva della stima L^1-L^1, utile per l'interpolazione.

La definizione di trasformata di Riesz sopra illustrata non giustifica la terminologia "integrale singolare" che nella letteratura si associa comunemente a $\mathscr{R}$. Tuttavia, utilizzando la trasformata di Fourier è possibile dimostrare che $\mathscr{R}$ è l'operatore di convoluzione con nucleo la distribuzione valor principale associata alla funzione $y/|y|^{n+1}$. In altre parole, per ogni f in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\mathscr{R}f(x) = c_n \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

dove c_n è una costante che dipende unicamente dalla dimensione n. Evidentemente $y \mapsto y/|y|^{n+1}$ è non integrabile sia in un intorno di 0, sia all'infinito, fatto che giustifica la terminologia adottata. Nel caso $n = 1$ la trasformata di Riesz assume la forma particolarmente semplice

$$\mathscr{R}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y;$$

$\mathscr{R}$ viene allora comunemente denominata *trasformata di Hilbert* e denotata con il simbolo $\mathscr{H}$. Essa è l'archetipo degli integrali singolari e interviene, tra gli altri, nel problema della convergenza in norma delle serie di Fourier in dimensione uno (vd. [So, Cap. I]). Un celebre risultato asserisce infatti che la convergenza in norma $L^p(\mathbb{T})$ delle serie di Fourier di funzioni in $L^p(\mathbb{T})$ equivale alla limitatezza in $L^p(\mathbb{R}^n)$ della trasformata di Hilbert.

Un calcolo esplicito mostra che

$$\mathscr{H}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = \log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}.$$

Osserviamo che

$$\mathscr{H}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \asymp \frac{1}{x}$$

per $|x| \to \infty$ e quindi $\mathscr{H}\mathbf{1}_{[-1,1]}$ non è integrabile all'infinito. La funzione presenta anche singolarità logaritmiche nei punti ± 1, che ovviamente non pregiudicano l'integrabilità locale della funzione.

1.2 – *L'approccio classico alla limitatezza di integrali singolari*

La dimostrazione della limitatezza di $\mathscr{R}_j$ su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per p in $(1, 2)$ (vd. Teorema 1.1 (i)) segue lo schema seguente:

• si dimostra che $\mathscr{R}_j$ è limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$, utilizzando il Teorema di Plancherel e il fatto che la trasformata di Fourier del nucleo di $\mathscr{R}_j$ è limitata;

• si dimostra che $\mathscr{R}$ soddisfa la stima debole $(1,1)$ che appare nella parte (iii) del Teorema 1.1;

• si interpola tra le due stime precedenti utilizzando il Teorema di Marcinkiewicz [BL, Theorem 1.3.1].

La dimostrazione della stima debole $(1,1)$ è piuttosto tecnica (vd., ad es., [St2]) e fa uso di due ingredienti fondamentali:

1. la *proprietà di raddoppio* delle sfere

$$\sup_B \frac{\mu(2B)}{\mu(B)} < \infty, \tag{1.2}$$

dove l'estremo superiore è fatto rispetto a tutte le sfere di $\mathbb{R}^n$ e $2B$ denota la sfera concentrica a B di raggio doppio;

2. la *decomposizione di Calderón–Zygmund* di funzioni integrabili.

Notiamo che in $\mathbb{R}^n$ il quoziente $\mu(2B)/\mu(B)$ è una costante dimensionale che non dipende da B. Avremo modo di considerare la proprietà di raddoppio in ambiti non euclidei privi di dilatazioni, in cui il quoziente precedente dipende dal centro e dal raggio di B.

Desideriamo porre l'accento sul fatto che le varietà riemanniane a crescita esponenziale di volume, ambito al quale siamo particolarmente interessati, non posseggono la proprietà di raddoppio, per esse non esiste analogo della decomposizione di Calderón-Zygmund e la stima debole $(1,1)$ per gli operatori di nostro interesse è falsa, oppure impossibile da ottenere con le tecniche attualmente a disposizione. È perciò auspicabile sviluppare un approccio alternativo a quello descritto per ottenere la limitatezza L^p degli integrali singolari.

1.3 – *Collocazione storica*

Desidero concludere l'introduzione con una breve descrizione dello sviluppo degli integrali singolari, con lo scopo di collocare in prospettiva storica le nostre ricerche. In estrema sintesi, si possono osservare le *quattro fasi* seguenti:

1. *fase pioneristica*; 1920', trasformata di Hilbert;

2. *fase classica*; 1950'-1980', sviluppo e consolidamento della teoria degli integrali singolari in $\mathbb{R}^n$;

3. *spazi di tipo omogeneo*; 1970'-1990', sviluppo della teoria degli integrali singolari in spazi (quasi-)metrici di misura in cui vale la proprietà di raddoppio delle sfere;

4. *spazi non di tipo omogeneo*; 1980'–, sviluppo della teoria degli integrali singolari in alcuni spazi metrici di misura in cui non vale la proprietà di raddoppio delle sfere.

Senza alcuna pretesa di completezza, elencherò alcuni tra i molti contributi che ritengo significativi.

Nella fase (1) ricordo quelli di Kolmogorov e di M. Riesz [Ko, R], che dimostrano, rispettivamente, il tipo debole $(1,1)$ di $\mathscr{H}$ e la limitatezza in $L^p(\mathbb{T})$ dell'analogo periodico di $\mathscr{H}$.

La fase (2) è segnata dai fondamentali lavori di Calderón e Zygmund [CZ1, CZ2] e di Hörmander [Ho1], nonché dai numerosi contributi di E.M. Stein e della sua scuola (si vedano [F, FeS, St2] e i lavori ivi citati), dal risultato di G. David e J.-L. Journé [DJ] e dalla limitatezza L^2 dell'integrale di Cauchy [CMM].

Nella fase (3) si sviluppa lo studio di integrali singolari in una pluralità di contesti – varietà riemanniane compatte, gruppi nilpotenti, curve in $\mathbb{R}^n$ e in gruppi nilpotenti, grafi di funzioni lipschitziane, aperti con bordo lipschitziano – e ha luogo la sistematizzazione della teoria nell'ambito degli spazi omogenei nel senso di Coifman-Weiss [CW1, CW2, Chr]. Tra i contributi più significativi di questa fase ricordiamo [KnS, FS]. È in questo periodo che nasce lo studio di integrali singolari associati a operatori, in particolare funzioni di laplaciani in vari contesti. Particolarmente significativi i contributi di Stein [St1] e M. Cowling [Co] sul calcolo funzionale di generatori infinitesimi di semigruppi simmetrici di diffusione e di L. De Michele e Mauceri [DeMM] sul calcolo di tipo Hörmander per il sublaplaciano sul gruppo di Heisenberg. Quest'ultimo risultato ha generato una schiera di estensioni e generalizzazioni, che non si è ancora esaurita.

Infine, durante la fase (4) si è sviluppato lo studio di integrali singolari in contesti in cui la proprietà di raddoppio fallisce. Questo complesso capitolo della ricerca sugli integrali singolari si suddivide, a sua volta, in due sottocapitoli; il primo, in cui la proprietà di raddoppio fallisce per sfere di raggio "piccolo", e il secondo, nel quale per ogni $R > 0$ le sfere di raggio al più R possiedono la proprietà di raddoppio, ma le costanti di raddoppio non sono limitate al crescere di R.

Il primo dei sottocapitoli cui abbiamo fatto cenno qui sopra si sviluppa in relazione al classico *problema di Painlevé*, che richiede, assegnato un aperto Ω di $\mathbb{C}$, di caratterizzare i sottoinsiemi E di Ω che godono della proprietà seguente: ogni funzione olomorfa e limitata in $\Omega \setminus E$ si estende a una funzione olomorfa e limitata su tutto Ω. Tale proprietà risulta legata alla limitatezza di integrali singolari in $\mathbb{C}$ noti come trasformata di Cauchy. Tra i contributi più significativi di questa fase vi sono [NTV, To].

Il secondo dei sottocapitoli contiene gli sviluppi riguardanti gli integrali singolari su spazi omogenei e gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume (vd., ad es., [HeS] per il caso di una interessante classe di gruppi solubili, [CS, A1, A2, AJ, I1, I2, I3, CGM1, MV] per l'analisi su spazi simmetrici di tipo non compatto).

La linea di ricerca che illustrerò si inserisce in questo secondo sottocapitolo ed è parte di un più ampio progetto di ricerca che si propone di studiare proprietà dell'operatore di Laplace–Beltrami e di operatori ad esso collegati su varietà a crescita esponenziale di volume. Di questa classe fanno parte gli spazi simmetrici di tipo non compatto, ad esempio il piano iperbolico, gli spazi di Damek-Ricci, che sono esempi di varietà armoniche non simmetriche definite in tempi recenti da E. Damek e F. Ricci, e i gruppi semisemplici non compatti di centro finito muniti di una metrica riemanniana invariante. Esiste una vasta letteratura che studia le proprietà dei loro operatori di Laplace-Beltrami, utilizzando metodi molto potenti, disponibili grazie alla ricca struttura algebrica e geometrica di questi spazi. Si veda, ad esempio, il ruolo cruciale della struttura degli spazi simmetrici di tipo non compatto nelle dimostrazioni della stima debole $(1,1)$ delle trasformate di Riesz [Str, A1]. È naturale chiedersi fino a che punto queste proprietà dipendono dalla poderosa struttura di questi spazi.

Uno degli obiettivi che ci poniamo è di individuare quali tra queste proprietà continuano a valere per varietà di crescita esponenziale di volume. Si tratta di un progetto stimolante, fonte di numerose sorprese (vd., ad esempio, il Teorema 4.13 e il commento che ad esso fa seguito). In questa conferenza illustreremo alcuni recenti risultati inerenti l'analisi dell'operatore di Laplace-Beltrami su varietà riemanniane connesse, non compatte, complete, con volume infinito, eventualmente soddisfacenti ulteriori ipotesi che specificheremo di volta in volta.

2. – L'operatore di Laplace–Beltrami

Nel 1867, Eugenio Beltrami [Bel] introdusse l'operatore di Laplace per una metrica riemanniana, oggi noto come operatore di Laplace-Beltrami.

DEFINIZIONE 2.1. – *Sia M una varietà riemanniana. L'operatore di* Laplace-Beltrami $\mathscr{L}_0$ *su M è definito sullo spazio $\mathscr{D}(M)$ delle funzioni lisce a supporto compatto da*

$$\mathscr{L}_0 f := -\operatorname{div}\nabla f \qquad \forall f \in \mathscr{D}(M),$$

dove ∇ indica il gradiente riemanniano su M e div *l'operatore divergenza.*

Una delle ragioni per cui $\mathscr{L}_0$ è importante è che un diffeomorfismo di M è un'isometria se e solo se preserva l'operatore di Laplace-Beltrami [H1, Proposition 2.4, p. 246]. L'operatore di Laplace–Beltrami è naturalmente associato alla forma quadratica Q su $\mathscr{D}(M)$, definita da

$$Q(f) = \int_M |\operatorname{grad} f|^2 \, \mathrm{d}\mu,$$

ed è ellittico: la sua espressione nella carta locale (ξ, U) è

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_0 f(\xi^{-1}x) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\overline{g}(\xi^{-1}x)}} \sum_j \partial_j \Big(\sum_i (g^{i,j} \circ \xi^{-1}) \sqrt{(\overline{g} \circ \xi^{-1})}\ \partial_i (f \circ \xi^{-1}) \Big)(x) \\
&= -\sum_{i,j} g^{i,j}\big(\xi^{-1}x\big)\ \partial^2_{ji}(f \circ \xi^{-1})(x) + \text{termini del primo ordine}
\end{aligned}$$

per ogni x in $\xi(U)$. Qui $g^{i,j}$ denotano i coefficienti della matrice inversa di $[g_{i,j}]$, che descrive la metrica riemanniana nella carta (ξ, U), e $\overline{g}$ denota $\det[g_{i,j}]$.

Poiché la metrica riemanniana g è liscia per ipotesi, l'operatore $\mathscr{L}_0$ in coordinate locali ha coefficienti lisci. In aggiunta, il noto Teorema di Gaffney [Gr1] assicura che $\mathscr{L}_0$, definito su $\mathscr{D}(M)$, è essenzialmente autoaggiunto in $L^2(M)$, cioè esso ammette un'unica estensione autoaggiunta $\mathscr{L}$. Osserviamo che $\mathscr{L}$ possiede ottime proprietà locali, che ne rendono l'analisi su un aperto limitato di M con bordo liscio ben compresa. Tuttavia va osservato che il nostro interesse è verso proprietà globali di $\mathscr{L}$ e che la geometria all'infinito di M ha un'influenza decisiva su di esse, come vedremo in seguito e come ampiamente dimostrato in letteratura.

Invitandovi a non prendere troppo alla lettera il parallelo che cerco di stabilire, dirò che l'analisi che intendiamo intraprendere ha qualche aspetto in comune con l'analisi di un operatore ellittico su un dominio limitato dotato di bordo, che risulta uniformemente ellittico in ogni sottodominio liscio e compatto del dominio originale, ma che non è globalmente uniformemente ellittico. In questo caso la forma del bordo e la sua "accessibilità" dal dominio influenzano significativamente le proprietà dell'operatore. In modo simile, la relativa grandezza dell'infinito della varietà, misurato, ad esempio, mediante la crescita delle sfere geodetiche al tendere all'infinito del raggio, o mediante l'esistenza di "fini" (ends) relativamente sottili, influenzano le proprietà di $\mathscr{L}$ in modo decisivo. Questo tipo di analisi è ancora in fase di rapida evoluzione e i problemi aperti sono numerosissimi.

3. – Diffusione del calore su M

L'operatore di Laplace–Beltrami è stato ed è oggetto di numerosissimi studi e molte sono le questioni di interesse che lo riguardano. Ho scelto di discutere brevemente una di queste, la diffusione del calore su varietà riemanniane, perché è funzionale a ciò che segue. Essa consiste nel determinare una funzione $u : M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ che risolva il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \mathscr{L} u(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in M \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in M. \end{cases} \tag{3.1}$$

Qui f è il dato e il significato del simbolo di uguaglianza che compare nella condizione iniziale dipende dallo spazio funzionale in cui si intende impostare il problema. Poiché, come già detto, $\mathscr{L}$ è autoaggiunto, è naturale trattare (3.1) come un problema evolutivo in $L^2(M)$. È noto che per ogni f in $L^2(M)$, l'unica soluzione di (3.1) è data da

$$u(x,t) = \int_M h_t(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall x \in M\ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

La soluzione è così espressa mediante un *operatore integrale* con nucleo $h_t(x,y)$ agente sul dato f: la famiglia di funzioni $\{h_t\}_{t>0}$ viene comunemente detta *nucleo del calore* associato a $\mathscr{L}$. È noto che la funzione $(x,y,t) \mapsto h_t(x,y)$ è, nelle nostre ipotesi, liscia nelle tre variabili in $M \times M \times \mathbb{R}^+$. Negli ultimi decenni lo studio del nucleo del calore associato a operatori di Laplace-Beltrami (e non solo) ha prodotto una quantità enorme di contributi (vd. [Gri] e i lavori ivi citati) che, lungi dall'aver esaurito la loro spinta propulsiva, continuano a stimolare ulteriori ricerche. Per ragioni di brevità mi limiterò qui a descrivere un risultato relativamente recente, che sarà importante nel seguito.

Nel caso in cui $M = \mathbb{R}^n$ vi è un'espressione esplicita per h_t, data dalla seguente formula di Gauss-Weierstrass

$$h_t(x,y) = (4\pi t)^{-n/2}\,\mathrm{e}^{-|x-y|^2/(4t)} \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n\ \forall t > 0.$$

L'espressione diviene più suggestiva se si introduce la misura (di Lebesgue) della sfera con centro x e raggio $\sqrt{t}$. Denoteremo con $B(x,\sqrt{t})$ tale sfera e con $|B(x,\sqrt{t})|$ la sua misura. Allora

$$h_t(x,y) = \frac{c_n}{|B(x,\sqrt{t})|}\,\mathrm{e}^{-|x-y|^2/(4t)},$$

dove c_n è una costante, che dipende solo dalla dimensione n. Su una varietà generica M non vi è alcuna speranza di trovare formule esplicite per il nucleo del calore; è allora naturale ricercare stime puntuali di h_t.

Diremo che M possiede la **proprietà di Li-Yau** se esistono costanti positive c, C tali che

$$\frac{c}{\mu\big(B(x,\sqrt{t})\big)}\,\mathrm{e}^{-Cd(x,y)^2/t} \le h_t(x,y) \le \frac{C}{\mu\big(B(x,\sqrt{t})\big)}\,\mathrm{e}^{-cd(x,y)^2/t} \tag{3.2}$$

per ogni x, y in M e per ogni t in $\mathbb{R}^+$. In altre parole M possiede la proprietà di Li-Yau se il suo nucleo del calore ha, *mutatis mutandis*, la stessa forma del nucleo di Gauss-Weierstrass. Qui e nel seguito μ denota la misura riemanniana di M. Li e Yau hanno dimostrato che le varietà con curvatura di Ricci non negativa possiedono la proprietà di Li-Yau [LY].

Il **problema** di caratterizzare le varietà riemanniane M che possiedono la proprietà di Li-Yau ha appassionato numerosi matematici ed è stato risolto indipendentemente da A. Grigor'yan e L. Saloff-Coste (vd. [SC] e la bibliografia ivi contenuta). L'enunciato del loro risultato richiede le due definizioni seguenti.

DEFINIZIONE 3.1. – *Diciamo che M ha la* **proprietà di raddoppio** *se esiste una costante D tale che*

$$\mu(2B) \leq D\,\mu(B) \tag{3.3}$$

per ogni sfera geodetica B. Qui $2B$ denota la sfera con lo stesso centro di B e raggio doppio.

DEFINIZIONE 3.2. – *Diciamo che M ha la* **proprietà di Poincaré scalata** *se esiste una costante P tale che*

$$\int_B |f - f_B|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq P\, r_B^2 \int_B |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}\mu \tag{3.4}$$

per ogni sfera geodetica B. Qui f_B denota la media di f su B e r_B è il raggio di B.

TEOREMA 3.3 (Grigor'yan-Saloff-Coste). – *Sia M una varietà riemanniana connessa, non compatta e completa. Sono equivalenti:*

(i) *M possiede le proprietà di raddoppio e di Poincaré scalata;*
(ii) *M possiede la proprietà di Li-Yau.*

Il risultato di Grigor'yan e Saloff-Coste ricorda quelli di Aronson [Ar] degli anni 60' nei quali l'Autore stabiliva stime gaussiane per il nucleo del calore associato a operatori uniformemente ellittici su $\mathbb{R}^n$. Di fatto, è più che un analogia: alcuni casi particolari delle stime di Aronson si ottengono dal risultato di Grigor'yan e Saloff-Coste dotando $\mathbb{R}^n$ di una metrica riemanniana naturalmente associata ai coefficienti della parte del secondo ordine dell'operatore ellittico che si sta esaminando.

Un esempio di varietà riemanniana che non gode della proprietà di Li-Yau è il prodotto connesso M di due copie di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, che denoteremo anche con $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$, realizzato connettendo in maniera liscia con un "cilindroide" due copie di $\mathbb{R}^n$, ciascuna privata della sfera di centro 0 e raggio 1. La metrica su M coincide con quella di $\mathbb{R}^n$ su ciascuna delle copie di $\mathbb{R}^n$ privata della sfera $B(0,1)$ e viene definita sul "cilindroide" in modo che la metrica risultante su M sia globalmente liscia. Mostriamo che su M la proprietà di Poincaré scalata non vale (conseguentemente M non gode della proprietà di Li-Yau per il Teorema di Grigor'yan-Saloff-Coste). Siano x un punto del cilindroide, $R > 0$ e f una funzione definita su M, con supporto contenuto in $\overline{B}(x,R)$, che assume valore -1 nei punti di $B(x,R)$

che giacciono nella copia "inferiore" e $+1$ in quelli che giacciono nella copia "superiore" di $\mathbb{R}^n$. Evidentemente ∇f è supportato sul cilindroide e $\|\nabla f\|_2$ non dipende da R se R è sufficientemente grande. Ne deriva che il secondo membro di (3.4) cresce come R^2 al tendere di R a $+\infty$. Scegliendo in modo opportuno i valori di f sul cilindroide, possiamo supporre che $f_B = 0$. Il primo membro di (3.4) cresce allora come R^n al crescere di R, il che è assurdo, poiché stiamo assumendo $n \geq 3$.

Quello che abbiamo ora descritto è un esempio di come il *comportamento all'infinito della varietà possa influenzare alcune proprietà dell'operatore di Laplace–Beltrami.*

4. – Integrali singolari in $\mathbb{R}$

In questa sezione descriveremo un approccio alla limitatezza della trasformata di Hilbert, e più generalmente degli integrali singolari in $\mathbb{R}^n$, alternativo a quello descritto in precedenza che era basato sulla stima debole $(1,1)$. Ricordiamo la definizione di trasformata di Hilbert:

$$\mathscr{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} \, \mathrm{d}y \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

per ogni funzione f liscia e a supporto compatto. Denotata con $\mathscr{F}$ la trasformata di Fourier, un classico argomento mostra che

$$\mathscr{F}\big(\mathscr{H}f\big)(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \mathscr{F}f(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Il Teorema di Plancherel permette allora di concludere che

$$\|\mathscr{H}f\|_2 = \|f\|_2.$$

4.1 – *Un approccio "moderno" alla limitatezza di $\mathscr{H}$*

Ci proponiamo di trovare uno spazio di Banach X, contenuto in $L^1(\mathbb{R})$, con le proprietà seguenti:

(i) ogni operatore lineare $\mathscr{T}$ limitato da X a $L^1(\mathbb{R})$ e da $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$ è anche limitato da $L^p(\mathbb{R})$ a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni p in $(1,2)$;

(ii) la trasformata di Hilbert è limitata da X a $L^1(\mathbb{R})$.

Ci riferiremo alla proprietà (i) dicendo, in modo leggermente impreciso, che "X interpola con $L^2(\mathbb{R})$". È importante notare che le proprietà (i) e (ii) sono in conflitto: la prima è tanto più facilmente vera quanto più grande è X, la seconda, al contrario, è facilmente falsa se X è grande.

4.2 – *Idea per X*

L'idea per costruire uno spazio X con le proprietà sopra indicate proviene dalla Fisica II. Consideriamo una carica positiva puntiforme q nello spazio (ad esempio collocata nel punto O). In un punto P a distanza r da O, il potenziale $V(P)$, supposto nullo all'infinito, è dato da

$$V(P) = c\,\frac{q}{r}, \tag{4.1}$$

dove r indica la distanza $|P - O|$ e c una costante di proporzionalità. Se invece di una singola carica si considera un dipolo elettrico, formato da due cariche q e $-q$ poste a distanza a tra loro, il potenziale V da esse generato (supposto nullo all'infinito) soddisfa

$$V(P) \leq c\,\frac{qa}{r^2}. \tag{4.2}$$

Se r è grande rispetto ad a, allora $V(P) \leq C/r^2$. Dunque il fatto che il corpo abbia carica complessiva nulla determina una significativa riduzione del potenziale generato a grande distanza dal corpo stesso.

Con intento puramente analogico determiniamo l'azione della trasformata di Hilbert sulla funzione indicatrice $\mathbf{1}_{[0,1]}$ dell'intervallo $[0,1]$ e sulla funzione $\mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}$. Un semplice calcolo mostra che

$$\mathscr{H}(q\mathbf{1}_{[0,1]})(r) \sim \frac{q}{r} \qquad \text{e} \qquad \mathscr{H}\big[q(\mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]})\big](r) \sim \frac{q}{r^2} \tag{4.3}$$

per r sufficientemente grande. Si può assimilare $\mathbf{1}_{[0,1]}$ a una carica puntiforme e $\mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}$ a un dipolo elettrico. La trasformata di Hilbert agisce su queste funzioni in modo simile al potenziale elettrico. In particolare, il fatto che l'integrale di $\mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}$ sia nullo comporta un maggiore decadimento della sua trasformata di Hilbert all'infinito. La condizione di avere integrale nullo viene detta di **cancellazione**. Vedremo in seguito che l'individuazione di altre condizioni di cancellazione sarà il punto focale della ricerca che abbiamo condotto.

4.3 – *Atomi di Coifman–Weiss su M*

In questa sottosezione descriveremo la formalizzazione secondo Coifman–Weiss [CW2] dell'idea esposta nella sottosezione precedente. Poiché la costruzione si applica senza variazioni a un ambito molto più generale di quello euclideo, abbiamo ritenuto conveniente trattare direttamente il caso di una varietà riemanniana M (o, più generalmente, di uno spazio metrico di misura).

DEFINIZIONE 4.1. – *La classe di Coifman-Weiss $\mathscr{A}_0$ su M è definita da*

$$\mathscr{A}_0 = \bigcup_B \mathscr{A}_0(B),$$

dove $\mathscr{A}_0(B)$ indica lo spazio delle funzioni a in $L^2(B)$ tali che

(i) *il supporto di a è contenuto nella sfera B;*
(ii) *vale la proprietà di* **cancellazione***: $\int_M a \, \mathrm{d}\mu = 0$;*
(iii) *vale la proprietà di* **taglia***: $\|a\|_2 \leq \mu(B)^{-1/2}$.*

La classe $\mathscr{A}_0(B)$ può essere pittoricamente raffigurata nel modo seguente: detto V_0 il sottospazio unidimensionale di $L^2(B)$ costituito dalle funzioni costanti su B, il suo ortogonale $V_0^\perp$ in $L^2(B)$ è costituito dalle funzioni di $L^2(B)$ a media nulla, cioè da quelle che soddisfano la condizione di cancellazione della definizione precedente, e $\mathscr{A}_0(B)$ è la sfera di raggio $\mu(B)^{-1/2}$ in $V_0^\perp$.

Le funzioni in $\mathscr{A}_0$ si dicono *atomi di Coifman–Weiss*.

DEFINIZIONE 4.2. – *Lo spazio di Coifman-Weiss $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ su M è lo spazio vettoriale delle funzioni f di $L^1(M)$ che ammettono una rappresentazione della forma*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, a_j, \tag{4.4}$$

dove a_j è un atomo di Coifman-Weiss e $\{c_j\}$ una successione di costanti in ℓ^1, cioè tali che $\sum_j |c_j| < \infty$. Lo spazio $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ è di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{H^1_{\mathscr{A}_0}(M)} := \inf\Big\{ \sum_j |c_j| : f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, a_j \Big\},$$

l'estremo inferiore essendo calcolato su tutte le rappresentazioni di f della forma (4.4).

La definizione di spazio di Coifman-Weiss stabilisce quali distribuzioni "integrabili" di cariche siano ammissibili. Si tratta di una definizione sorprendentemente fine: ad esempio, è possibile mostrare che una funzione f a supporto compatto in $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ possiede un'extra-integrabilità logaritmica, una proprietà che riguarda la massa di f e che è difficile immaginare dalla definizione. Questa proprietà, tra l'altro, implica che $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ *non contiene* tutti i corpi in $L^1(\mathbb{R})$ con carica nulla.

È un fatto classico che lo spazio di Coifman–Weiss gode delle proprietà auspicate per X.

TEOREMA 4.3. – *Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) *lo spazio di Coifman–Weiss* $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ *interpola con* $L^2(\mathbb{R})$*;*
(ii) *la trasformata di Hilbert è limitata da* $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ *a* $L^1(\mathbb{R})$*.*

4.4 – *Integrali singolari su M e* $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$

In questa sottosezione ci proponiamo di stabilire se lo spazio di Coifman-Weiss possa rivestire il ruolo di spazio X anche in relazione a stime di operatori integrali singolari su varietà. Alquanto sorprendentemente, la risposta a questo quesito è negativa anche nel caso di alcune varietà che godono della proprietà di raddoppio.

Per ragioni di spazio non definirò la classe di operatori studiate nei nostri lavori (vd. [MMV2, MMV4]) e limiterò l'esposizione a due esempi paradigmatici: la trasformata di Riesz e le potenze immaginarie di $\mathscr{L}$. Poiché $\mathscr{L}$ è autoaggiunto, esiste un'unica risoluzione spettrale dell'identità $\{\mathscr{P}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ tale che

$$\mathscr{L}f = \int_b^\infty \lambda \, \mathrm{d}\mathscr{P}_\lambda f \tag{4.5}$$

per ogni f nel dominio di $\mathscr{L}$. Assegnata una funzione limitata m sullo spettro $\mathrm{spec}(\mathscr{L})$ di $\mathscr{L}$ (che è un sottoinsieme di $[0,\infty)$, poiché $\mathscr{L}$ è non negativo), possiamo definire l'operatore

$$m(\mathscr{L})f := \int_{\mathrm{spec}(\mathscr{L})} m(\lambda)\,\mathrm{d}\mathscr{P}_\lambda f \qquad \forall f \in L^2(M).$$

L'operatore $m(\mathscr{L})$ viene comunemente detto **operatore moltiplicatore** associato al **moltiplicatore spettrale** m. Per il teorema spettrale

$$|||m(\mathscr{L})|||_2 \le \|m\|_\infty,$$

dove $|||m(\mathscr{L})|||_2$ indica la norma operatoriale di $m(\mathscr{L})$ su $L^2(M)$. In particolare, se il minimo b di $\mathrm{spec}(\mathscr{L})$ è positivo, allora l'operatore $\mathscr{L}^{-z}$ è limitato su $L^2(M)$ per tutti i numeri complessi z tali che $\mathrm{Re}z \ge 0$. Possiamo definire $m(\mathscr{L})$ anche per funzioni m non necessariamente limitate, ma $m(\mathscr{L})$ è in generale definito solo su un sottospazio di $L^2(M)$.

L'operatore formalmente definito da $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ si chiama **trasformata di Riesz** (del primo ordine) su M e gli operatori della forma $\mathscr{L}^{iu}$, con u reale e non nullo, prendono il nome di **potenze immaginarie** di $\mathscr{L}$.

Denotiamo con $L^p(M;\mathfrak{X}(M))$ lo spazio delle sezioni L^p del fibrato tangente $\mathfrak{X}(M)$ di M, cioè lo spazio dei campi vettoriali $\mathscr{X}$ tali che la funzione scalare $g(\mathscr{X},\mathscr{X})$ appartiene a $L^p(M)$. È un fatto ben noto e semplice da dimostrare che la

trasformata di Riesz $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ è limitata da $L^2(M)$ allo spazio $L^2(M;\mathfrak{X}(M))$. Lo studio della trasformata di Riesz su varietà è stato propugnato da R. S. Strichartz [Str]. Per alcuni interessanti risultati recenti si vedano [ACDH, AMR, CD] e i riferimenti bibliografici ivi contenuti.

Una delle ragioni per scegliere $\mathscr{L}^{iu}$ quale prototipo di operatore integrale singolare risiede nel fatto che esso riveste un ruolo di primaria importanza nel calcolo funzionale di $\mathscr{L}$, dato che molte funzioni di $\mathscr{L}$ possono venire ricostruite a partire da $\mathscr{L}^{iu}$ mediante una formula di subordinazione basata sulla trasformata di Mellin [Co, St1].

Gli operatori $\mathscr{L}^{iu}$ e $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ sono detti singolari poiché i loro nuclei di Schwartz presentano una singolarità critica in ogni punto della diagonale di $M\times M$. Nei casi che esamineremo tali nuclei, che indicheremo genericamente con $k(x,y)$, sono anche singolari all'infinito, cioè per ogni x fissato la "distribuzione" $y\mapsto k(x,y)$ risulta non integrabile all'infinito.

Il seguente risultato mostra che lo spazio di Coifman–Weiss $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ non è adatto a rivestire il ruolo di spazio X nemmeno nel caso di (alcune) varietà che soddisfano la proprietà di raddoppio. Come la dimostrazione metterà in luce, la geometria all'infinito di $\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$ rende i punti della copia "inferiore" di $\mathbb{R}^n$ poco visibili da punti "all'infinito" situati sulla copia "superiore". Ciò comporta che l'azione della trasformata di Riesz su certi atomi di Coifman-Weiss non produce un effetto di cancellazione paragonabile a quello prodotto dalla trasformata di Hilbert in $\mathbb{R}$, e la loro immagine risulta non integrabile all'infinito.

TEOREMA 4.4. – *L'operatore* $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ *è illimitato da* $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n)$ *a* $L^1(\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n)$.

PROOF. – Denotiamo con M il prodotto connesso $\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n$. La proprietà isoperimentrica di M [Cha, Thm V.2.1., p. 131] implica l'esistenza di una constante positiva C tale che

$$\|\nabla\mathscr{L}^{-1/2}f\|_1\geq C\,\|\mathscr{L}^{-1/2}f\|_{n/(n-1)}.$$

Se $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ fosse limitato da $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ a $L^1(M)$, dovrebbe essere vera la stima

$$\|f\|_{H^1_{\mathscr{A}_0}(M)}\geq C\,\|\mathscr{L}^{-1/2}f\|_{n/(n-1)}\qquad\forall f\in H^1_{\mathscr{A}_0}(M).$$

In particolare, tenuto conto del fatto che $\|a\|_1\leq 1$ in virtù della condizione di taglia soddisfatta dagli atomi, dovremmo avere che

$$\sup_{a\in\mathscr{A}_0}\|\mathscr{L}^{-1/2}a\|_{n/(n-1)}<\infty.$$

Scegliamo a con supporto in $B(p,R)$, dove p è un punto del "cilindroide" di M, R è un numero positivo sufficientemente grande. Supponiamo che a valga -1 su una

copia di $\mathbb{R}^n$ e $+1$ sull'altra e che i valori di a sul "cilindroide" siano scelti in modo tale che l'integrale di a su M sia nullo. Allora a è un multiplo di un atomo di Coifman-Weiss. Indicato con k il nucleo di Schwartz di $\mathscr{L}^{-1/2}$, abbiamo

$$\mathscr{L}^{-1/2}a(x) = \int_M k(x,y)\, a(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \tag{4.6}$$

per ogni x distante da $B(p,R)$. Siano x un punto sulla copia di $\mathbb{R}^n$ dove a vale $+1$, molto distante dal cilindroide. Siano poi y e $\widetilde{y}$ due punti della sfera $B(p,R)$, rispettivamente sulla stessa copia di $\mathbb{R}^n$ dove si trova x e sull'altra. È possibile mostrare che

$$k(x,y) \gg k(x,\widetilde{y});$$

alcune stime delicate mostrano che esiste una costante positiva c tale che per R abbastanza grande

$$\int_B k(x,y)\, a(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \geq c \int_{B_+} k(x,y)\, \mathrm{d}\mu(y),$$

dove abbiamo indicato con B_+ la parte della sfera B che giace nella copia di $\mathbb{R}^n$ dove giace x. Altre stime delicate mostrano che la funzione $x \mapsto \int_{B_+} k(x,\widetilde{y})\, \mathrm{d}\mu(y)$ non appartiene a $L^{n/(n-1)}(M)$. Quindi $\mathscr{L}^{-1/2}a$ non appartiene a $L^{n/(n-1)}(M)$.

4.5 – *Nuovi atomi* $\mathscr{A}_h \subset \mathscr{A}_0$

Che fare, dunque? La prima delle nostre idee è di definire (vd. [MMV4]) una classe di atomi $\mathscr{A}_h$, che chiameremo *atomi speciali*, contenuta in $\mathscr{A}_0$. Gli atomi speciali differiscono da quelli di Coifman–Weiss nella condizione di cancellazione, che è molto più forte.

Una funzione H su una varietà riemanniana M si dice $\mathscr{L}$**-armonica** in una sfera B se $\mathscr{L}H = 0$ in B.

DEFINIZIONE 4.5. – *La classe $\mathscr{A}_h$ su M è definita come*

$$\mathscr{A}_h = \bigcup_B \mathscr{A}_h(B),$$

dove $\mathscr{A}_h(B)$ indica lo spazio vettoriale delle funzioni a in $L^2(B)$ tali che

(i) *il supporto di a è contenuto in B;*

(ii) *vale la proprietà di* **cancellazione:** $\int_M a\, H\, \mathrm{d}\mu = 0$ *per ogni funzione H in $L^2(B)$ armonica in B;*

(iii) *vale proprietà di* **taglia:** $\|a\|_2 \leq \mu(B)^{-1/2}$.

La classe $\mathscr{A}_h(B)$ può essere pittoricamente raffigurata nel modo seguente: in $L^2(B)$ si consideri il sottospazio *infinito dimensionale* V_h costituito dalle funzioni armoniche. Il suo ortogonale $V_h^\perp$ in $L^2(B)$ è costituito dalle funzioni di $L^2(B)$ ortogonali alle funzioni armoniche, cioè da quelle che soddisfano la condizione di cancellazione della definizione precedente e $\mathscr{A}_h(B)$ è la sfera di raggio $\mu(B)^{-1/2}$ in $V_0^\perp$.

Lo spazio $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ è definito a partire da $\mathscr{A}_h$ esattamente come $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ a partire da $\mathscr{A}_0$.

Evidentemente $H^1_{\mathscr{A}_h}(M) \subseteq H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$. Sorprendentemente, come dimostrato in un recente lavoro in fase di rifinitura, ci sono casi, ad esempio $M = \mathbb{R}^n$, in cui $H^1_{\mathscr{A}_h}(M) = H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$.

4.6 – *Se vale raddoppio*

TEOREMA 4.6. – *Supponiamo che M soddisfi la proprietà di raddoppio* (3.3). *Valgono le affermazioni seguenti:*

(i) *se il nucleo del calore soddisfa la seguente stima diagonale*

$$h_t(x,x) \le \frac{C}{\mu\big(B(x,\sqrt{t})\big)} \qquad \forall x \in M \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.7}$$

allora

(*a*) $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ interpola con $L^2(M)$;

(*b*) gli operatori $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ e $\mathscr{L}^{iu}$, $u \in \mathbb{R}$, sono limitati rispettivamente da $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ a $L^1(M;\mathfrak{X})$ e da $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ a $L^1(M)$;

(ii) *se M possiede la proprietà di Poincaré scalata* (3.4), *allora* $H^1_{\mathscr{A}_0}(M) = H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$.

La dimostrazione del teorema precedente è piuttosto tecnica e apparirà in un futuro lavoro; essa fa uso del Teorema di De Giorgi sull'hölderianità delle soluzioni di equazioni ellittiche. Osserviamo (vd. [Gr1]) che se M possiede la disuguaglianza di Poincaré scalata, allora il nucleo del calore di M soddisfa la stima diagonale (4.7), e quindi, *a fortiori*, $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ interpola con $L^2(M)$ e gli operatori $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ e $\mathscr{L}^{iu}$, $u \in \mathbb{R}$, sono limitati rispettivamente da $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ a $L^1(M;\mathfrak{X})$ e da $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ a $L^1(M)$.

Un caso interessante in cui vale (i) ma non (ii) è quello della varietà $\mathbb{R}^n \# \mathbb{R}^n$ considerata in precedenza.

4.7 – *Se non vale raddoppio*

Nel caso in cui la varietà riemanniana M non possegga la proprietà di raddoppio non ci sono, senza ulteriori ipotesi su M, risultati in letteratura sulla limitatezza di $\mathscr{L}^{iu}$ e/o $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ da spazi di tipo Hardy a $L^1(M)$.

Nel seguito assumeremo che M sia una varietà riemanniana completa, connessa e non compatta che soddisfa le ipotesi seguenti:

(i) la **curvatura di Ricci** di M è limitata dal basso;
(ii) M ha **raggio di iniettività** positivo.

Se M soddisfa le condizioni (i)-(ii), diciamo che M ha **geometria limitata**. Ricordiamo che in letteratura esistono varie nozioni di varietà riemanniane a geometria limitata. Molti autori utilizzano questa terminologia per indicare che vale (ii) qui sopra e che alcune (tutte) le derivate covarianti del tensore di Riemann sono uniformemente limitate in senso opportuno. Nel caso in cui vale (ii) e c'è controllo uniforme su N derivate covarianti del tensore di Riemann, diciamo che M ha N-geometria limitata quando N è finito, e C^∞-geometria limitata quando $N = \infty$.

La nostra nozione di geometria limitata ha importanti conseguenze geometriche. Infatti, (i)-(ii) implicano che:

• M ha **crescita al più esponenziale**, cioè esistono costanti non negative C, α, γ tali che

$$\boldsymbol{\mu}(B) \leq C\, r_B^\alpha\, \mathrm{e}^{\gamma r_B} \qquad \forall B : r_B \geq 1; \tag{4.8}$$

• non ci sono eccessive concentrazioni o rarefazioni di massa, cioè

$$\inf_{r_B=1} \mu(B) > 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{r_B=1} \mu(B) < \infty,$$

dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutte le sfere geodetiche di raggio 1 di M;

• valgono le proprietà di raddoppio e di Poincaré scalata per sfere di raggio, diciamo, al più 1, con constanti uniformemente controllate.

Discutiamo brevemente la nozione di geometria limitata sopra introdotta, fornendo per cominciare le definizioni precise di raggio di iniettività e di curvatura di Ricci.

Ricordiamo che, dato p in M, la mappa esponenziale Exp_p in p è un diffeomorfismo tra una sfera di centro 0 e raggio r in M_p (lo spazio tangente a M in p) e un intorno di p in M. Ci sono esempi in cui Exp_p è un diffemorfismo globale tra M_p e M: tra gli altri $\mathbb{R}^n$ dotato della metrica euclidea e il piano iperbolico.

DEFINIZIONE 4.7. – *Il massimo r per cui* Exp_p *è un diffeomorfismo tra la sfera di centro O e raggio r in M_p e un intorno di p in M viene denotato $i_p(M)$ e chiamato raggio di iniettività in p. Il* **raggio di iniettività** *di M è definito come segue*

$$i(M) := \inf\{i_p(M) : p \in M\}.$$

Osserviamo che $i(M) = \infty$ nei casi in cui $M = \mathbb{R}^n$ oppure M è il piano iperbolico, e che $i(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) = \pi$ (un cilindro in $\mathbb{R}^3$). Una superficie M isometricamente immersa in $\mathbb{R}^3$ con una "fine" molto sottile avrà $i(M) = 0$.

DEFINIZIONE 4.8. – *Siano u un vettore nello spazio tangente M_p a M in p, normalizzato dalla condizione $g(u,u) = 1$, e $u, e_1, \dots, e_{n-1}$ una base ortonormale di M_p. Poniamo*

$$\rho_p(u) := \sum_{j=1}^{n} K(u, \mathrm{e}_j),$$

dove $K(u, e_j)$ indica la curvatura sezionale del piano in M_p generato dai vettori u ed e_j. È possibile dimostrare che $\rho_p(u)$ non dipende dai vettori $e_1, \dots, e_{n-1}$ scelti per completare la base ortonormale di M_p; $\rho_p(u)$ si chiama **curvatura sezionale** *di M in p nella direzione u.*

La condizione che M abbia curvatura di Ricci limitata dal basso si traduce nell'esistenza di una costante $\kappa \geq 0$ tale che

$$\rho_p(u) \geq -\kappa^2 \qquad \forall u \in M_p \ \forall p \in M.$$

Osserviamo che la classe di varietà a geometria limitata comprende sia lo spazio euclideo, sia il piano iperbolico. Non è verosimile che esista una teoria unificata degli integrali singolari che si adatti a entrambe queste varietà. Riteniamo utile a questo punto formulare un'ipotesi aggiuntiva.

DEFINIZIONE 4.9. – *La* **costante di Cheeger** *$h(M)$ di una varietà M è definita [Che] nel modo seguente*

$$h(M) := \inf \frac{\sigma(\partial A)}{\mu(A)},$$

dove l'estremo inferiore è calcolato rispetto a tutti gli aperti limitati A con bordo ∂A costituito da un'ipersuperficie liscia di M, e σ denota la misura superficiale su ∂A indotta dalla misura riemannianan μ.

È noto che la condizione $h(M) > 0$ equivale al fatto che M possiede una proprietà isoperimetrica di tipo Cheeger, e cioè che esistono costanti positive κ_0 e C tali che per ogni aperto limitato A contenuto un M

$$\mu\big(A_\kappa\big) \geq C\,\kappa\,\mu(A) \qquad \forall \kappa \in (0, \kappa_0]. \tag{4.9}$$

dove $A_\kappa = \big\{x \in A : \rho(x, A^c) \leq \kappa\big\}$. In termini un poco imprecisi, M possiede la proprietà isoperimetrica di Cheeger se una frazione fissa del volume di ogni aperto è concentrata vicino alla sua frontiera.

È possibile mostrare che se $h(M) > 0$, allora M ha crescita esponenziale di volume, cioè esistono costanti positive C e γ' tali che

$$\mu(B) \geq C\, e^{\gamma' r_B} \qquad \forall B : r_B \geq 1. \tag{4.10}$$

Il seguente risultato mette in relazione la costante di Cheeger di una varietà riemanniana con proprietà spettrali del suo operatore di Laplace-Beltrami.

TEOREMA 4.10 (Carbonaro-Mauceri-Meda [CMM1]). – *Sia M una varietà con geometria limitata. Sono equivalenti:*

(i) $h(M) > 0$;
(ii) *il minimo b dello spettro $L^2(M)$ di $\mathscr{L}$ è strettamente positivo.*

Il numero b si chiama **lacuna spettrale** di $\mathscr{L}$. Riassumendo, nel seguito supporremo che M soddisfi le ipotesi seguenti:

(i) la **curvatura di Ricci** di M è **limitata dal basso**;
(ii) M ha **raggio di iniettività positivo**;
(iii) M ha lacuna spettrale.

Nonostante lo spazio $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ sia piuttosto piccolo, non riusciamo a controllare $\mathscr{L}^{iu}a$ e $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}a$ all'infinito quando a è un atomo in $\mathscr{A}_h$ e il supporto di a è contenuto in una sfera di raggio "grande". Ciò è ragionevole se pensiamo che le ipotesi formulate assicurano, a parte la crescita esponenziale di volume, solo un controllo locale della geometria della varietà. Per uscire dall'*empasse* è necessaria una nuova idea.

La nostra seconda idea è che si possa ulteriormente ridurre l'insieme delle "configurazioni ammissibili di cariche". Naturalmente, una tale riduzione comporta una maggiore difficoltà nell'interpolare lo spazio risultante con L^2.

4.8 – *Una versione locale di $\mathscr{A}_0$ e di $\mathscr{A}_h$*

Fissato un parametro di scala $R > 0$, denotiamo con $\mathscr{B}_R$ la collezione delle sfere in M di raggio al più R.

DEFINIZIONE 4.11. – *Le classi $\mathscr{A}_0^R$ e $\mathscr{A}_h^R$ su M sono definite come segue*

$$\mathscr{A}_0^R := \bigcup_{B\in\mathscr{B}_R} \mathscr{A}_0^R(B) \qquad \text{e} \qquad \mathscr{A}_h^R := \bigcup_{B\in\mathscr{B}_R} \mathscr{A}_h^R(B).$$

Gli spazi di Hardy corrispondenti $H^1_{\mathscr{A}_0^R}(M)$ e $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$ sono poi definiti a partire dalle classi di atomi $\mathscr{A}_0^R$ e $\mathscr{A}_h^R$ esattamente come gli spazi di Hardy $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ e $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ sono definiti a partire da $\mathscr{A}_0$ e $\mathscr{A}_h$.

È possibile mostrare che $H^1_{\mathscr{A}_0}(\mathbb{R})$ e $H^1_{\mathscr{A}_h}(\mathbb{R})$ **non interpolano** con $L^2(\mathbb{R})$ e che, quindi, sono troppo piccoli per poter svolgere in $\mathbb{R}$ il ruolo di spazio X (vd. Sezione 4.2). Invece, gli spazi $H^1_{\mathscr{A}_0}(M)$ e $H^1_{\mathscr{A}_h}(M)$ sono adatti all'analisi sulla classe di varietà a crescita esponenziale che abbiamo introdotto in precedenza.

TEOREMA 4.12 [Mauceri-Meda-Vallarino [MMV2, MMV3]). – *Sia M una varietà riemanniana a geometria limitata con lacuna spettrale. Per ogni $R > 0$ valgono le affermazioni seguenti:*

(i) $H^1_{\mathscr{A}_0^R}(M)$ *interpola con* $L^2(M)$*;*

(ii) $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$ *interpola con* $L^2(M)$*;*

(iii) $\mathscr{L}^{iu}$ *e* $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ *sono limitati, rispettivamente, da* $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$ *a* $L^1(M)$ *e da* $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$ *a* $L^1(M;\mathfrak{X})$.

Il risultato precedente è nuovo e migliora sotto vari aspetti i risultati contenuti in [MMV2, MMV3]. Il lavoro che lo conterrà è in fase di rifinitura. Le seguenti osservazioni forniscono informazioni complementari e consentono di collocare meglio il ruolo di $H^1_{\mathscr{A}_h^R}(M)$:

• gli operatori $\mathscr{L}^{iu}$, $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $\nabla\mathscr{L}^{-1/2}$ non sono in generale limitati, rispettivamente, da $H^1_{\mathscr{A}_0^R}(M)$ a $L^1(M)$ e da $H^1_{\mathscr{A}_0^R}(M)$ a $L^1(M;\mathfrak{X})$ (non lo sono, ad esempio, se M è il piano iperbolico);

• la parte (i) del teorema dipende in modo cruciale dalla proprietà isoperimetrica e dalla proprietà di raddoppio locale;

• la parte (ii) dipende da stime del propagatore delle onde associato a $\mathscr{L}$.

Concluderò menzionando alcuni esempi che mi paiono significativi di varietà cui il teorema precedente si applica:

• M gruppo di Lie semisemplice, non compatto, con centro finito (ad esempio $SL(2,\mathbb{R})$), dotato di una qualunque metrica riemanniana invariante. Le traslazioni sono isometrie e quindi M ha geometria limitata. Essendo M un gruppo non amenabile, esso ha lacuna spettrale.

• M spazio simmetrico di tipo non compatto ($M = G/K$, dove G è un gruppo semisemplice come al punto precedente e K è un suo sottogruppo compatto massimale) dotato della metrica di Killing. Questa classe comprende gli spazi iperbolici.

• Supponiamo che $0<a<b<2a$ e dotiamo il semipiano superiore $S = \{x+iy : y>0\}$ della metrica

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\,\frac{b^{-2}y + a^{-2}}{y+1}\,(dx^2 + dy^2).$$

Osserviamo che essa si comporta come

$$\frac{1}{(by)^2}\,(dx^2+dy^2)$$

quando y è grande e come

$$\frac{1}{(ay)^2}\,(dx^2+dy^2).$$

quando y è piccolo. La varietà M può essere pensata come il risultato di un incollamento liscio tra due piani iperbolici con curvature $-b^2$ e $-a^2$. Un semplice calcolo mostra che la curvatura K di M soddisfa la stima

$$-b^2 \le K \le -a^2,$$

e quindi M è una varietà di Cartan-Hadamard con curvatura *pinched*. È possibile mostrare che M ha lacuna spettrale.

Di fatto, tutte le varietà di Cartan-Hadamard che hanno curvatura *pinched* soddisfano le ipotesi del teorema precedente. Il motivo per cui ho scelto di trattare proprio questa varietà risiede nel fatto che alcuni operatori classici dell'analisi armonica presentano su M un comportamento inatteso. Consideramo, ad esempio, il naturale operatore massimale di Hardy–Littlewood $\mathscr{M}$, definito per ogni funzione f localmente integrabile da

$$\mathscr{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f|\,\mathrm{d}\mu \qquad \forall x \in M.$$

TEOREMA 4.13 (J. O. Strömberg [Str]). – *Sia M la varietà descritta sopra. Allora $\mathscr{M}$ è limitato su $L^p(M)$ per ogni $p > b/a$ ed è illimitato se $p < b/a$.*

Questo risultato contrasta fortemente con il corrispondente risultato euclideo e con quello, identico ma ottenuto con metodi del tutto differenti, di Strömberg su spazi simmetrici non compatti, che asserisce che $\mathscr{M}$ è limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni p in $[1,\infty)$. In relazione a queste considerazioni si veda la parte finale dell'Introduzione.

REFERENCES

[A1] J.-PH. ANKER, *Sharp estimates for some functions of the Laplacian on noncompact symmetric spaces*, Duke Math. J., **65** (1992), 257-297.

[A2] J.-PH. ANKER, *L_p Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type*, Ann. of Math., **132** (1990), 597-628.

[AJ] J.-PH. ANKER - L. JI, *Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces I*, Geom. Funct. Anal., **9** (1999), 1035-1091.

[Ar] D. G. Aronson, *Non-negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Scuola Normale Sup., **22** (1968), 607-694.

[ACDH] P. Auscher - T. Coulhon - X. T. Duong - S. Hofmann, *Riesz transforms on manifolds and heat kernel regularity*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **37** (2004), 911-957.

[AMR] P. Auscher - A. Mcintosh - E. Russ, *Hardy spaces of differential forms on Riemannian manifolds*, J. Geom. Anal., **18** (2008), 192-248.

[Bel] E. Beltrami, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*, Ann. Mat. Pura Appl., **1** (1867), 329-366.

[BL] J. Bergh - J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. **223**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976.

[CZ1] A. Calderón - A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., **88** (1952), 85-139.

[CZ2] A. Calderón - A. Zygmund, *On singular integrals*, Amer. J. Math., **78** (1956), 289-309.

[CMM1] A. Carbonaro - G. Mauceri - S. Meda, *H^1, BMO and singular integrals for certain metric measure spaces*, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. **VIII** (2009), 543-582.

[CMM2] A. Carbonaro - G. Mauceri - S. Meda, *H^1 and BMO for certain locally doubling metric measure spaces of finite measure*, Colloq. Math., **118** (2010), 13-41.

[Cha] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives.*, vol. 145 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Che] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*. In: *Problems in Analysis* (Ed. R. C. Gunning). A Symposium in honor of Salomon Bochner (Princeton 1969), pp. 195-199. Princeton: Princeton University Press 1970.

[Chr] M. Christ, *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Coll. Math., **61** (1990), 601-628.

[CS] J.-L. Clerc - E. M. Stein, *L^p multipliers for noncompact symmetric spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **71** (1974), 3911-3912.

[CMM] R. R. Coifman - A. McIntosh - Y. Meyer, *L'integrale de Cauchy definit un operateur borne sur L2 pour les courbes lipschitziennes*, Ann. of Math., **116** (1982), 361-387.

[CW1] R. R. Coifman - G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Mathematics, **242**, Springer 1971.

[CW2] R. R. Coifman - G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., **83** (1977), 569-645.

[CD] T. Coulhon - X. T. Duong, *Riesz transforms for* $1 \leq p \leq 2$, Trans. Amer. Math. Soc., **351** (1999), 1151-1169.

[Co] M. G. Cowling, *Harmonic analysis on semigroups*, Ann. of Math., **117** (1983), 267-283.

[CGM1] M. Cowling - S. Giulini - S. Meda, *$L^p - L^q$ estimates for functions of the Laplace-Beltrami operator on noncompact symmetric spaces. I*, Duke Math. J., **72** (1983), 109-150.

[DJ] G. David - J.-L. Journé, *A Boundedness Criterion for Generalized Calderon-Zygmund Operators*, Ann. of Math., **120**, (1984), 371-397.

[DeMM] L. DE MICHELE - G. MAUCERI, *L^p multipliers on the Heisenberg group*, Mich. Math. J., **26** (1979), 361-371.

[F] C. FEFFERMAN, *Characterizations of bounded mean oscillation*, Bull. Amer. Math. Soc., **77** (1971), 587-588.

[FeS] C. FEFFERMAN - E. M. STEIN, *H^p spaces of several variables*, Acta Math., **179** (1972), 137-193.

[FS] G. B. FOLLAND - E. M. STEIN, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Mathematical Notes, **28**, Princeton University Press and Tokyo University Press, Princeton, 1982.

[GMMST1] J. GARCÍA-CUERVA - G. MAUCERI - S. MEDA - P. SJÖGREN - J. L. TORREA, *Functional Calculus for the Ornstein-Uhlenbeck Operator*, J. Funct. Anal., **183**, no. 2 (2001), 413-450.

[GMMST2] J. GARCÍA-CUERVA - G. MAUCERI - S. MEDA - P. SJÖGREN - J. L. TORREA, *Maximal operators for the Ornstein-Uhlenbeck semigroup*, J. London Math. Soc., **67** (2003), 219-234.

[Gri] A. GRY'GORYAN, *Estimates of heat kernels on Riemannian manifolds, in Spectral Theory and Geometry*, ICMS Instructional Conference Edinburgh 1988, eds B. Davies and Y. Safarov, London Mathematical Society Lecture Note Series, **273**, Cambridge University Press, 1999.

[Gr1] A. GRIGOR'YAN, *Estimates of heat kernels on Riemannian manifolds, in Spectral Theory and Geometry*, ICMS Instructional Conference Edinburgh 1988, eds B. Davies and Y. Safarov, London Mathematical Society Lecture Note Series, **273**, Cambridge University Press, 1999.

[HeS] W. HEBISCH - T. STEGER, *Multipliers and singular integrals on exponential growth groups*, Math. Z., **245**, no. 1 (2003), 37-61.

[H1] S. HELGASON, *Groups and Geometric Analysis*. Academic Press, New York, 1984.

[Ho1] L. HÖRMANDER, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math., **104** (1960), 93-140.

[I1] A .D. IONESCU, *Fourier integral operators on noncompact symmetric spaces of real rank one*, J. Funct. Anal., **174** (2000), 274-300.

[I2] A. D. IONESCU, *Singular integrals on symmetric spaces of real rank one*, Duke Math. J., **114** (2002), 101-122.

[I3] A. D. IONESCU, *Singular integrals on symmetric spaces, II*, Trans. Amer. Math. Soc., **355** (2003), 3359-3378.

[Ko] A. N. KOLMOGOROV, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fund. Math., **7** (1925) 23-28.

[KnS] A. W. KNAPP - E. M. STEIN, *Intertwining operators on semisimple Lie groups*, Ann. of Math., **93** (1971), 489-578.

[LY] P. LI - S. T. YAU, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math., **156** (1986), 153-201.

[MM] G. MAUCERI - S. MEDA, *A BMO space for the Ornstein–Uhlenbeck operator*, J. Funct. Anal., **252** (2007), 278-313.

[MMS1] G. MAUCERI - S. MEDA - P. SJÖGREN, *Endpoint estimates for first-order Riesz transforms associated to the Ornstein-Uhlenbeck operator*, Rev. Mat. Iberoam., **28**, no. 1 (2012), 77-91.

[MMS2] G. MAUCERI - S. MEDA - P. SJÖGREN, *A maximal function characterisation of the Hardy space for the Gauss measure*, apparirà su Proc. Amer. Math. Soc.

[MMV1] G. MAUCERI - S. MEDA - M. VALLARINO, *Estimates for functions of the Laplacian on manifolds with bounded geometry*, Math. Res. Lett., **16** (2009), 861-879.

[MMV2] G. Mauceri - S. Meda - M. Vallarino, *Hardy type spaces on certain noncompact manifolds and applications*, J. London Math. Soc., **84** (2011), 243-268.

[MMV3] G. Mauceri - S. Meda - M. Vallarino, *Hardy spaces on noncompact symmetric spaces and applications*, preprint, 2010.

[MMV4] G. Mauceri - S. Meda - M. Vallarino, *Atomic decomposition of Hardy type spaces on certain noncompact manifolds*, J. Geom. Anal.

[MSV] S. Meda - P. Sjögren - M. Vallarino, *On the H^1-L^1 boundedness of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 2921-2931.

[MV] S. Meda - M. Vallarino, *Weak type estimates for multiplier operators on noncompact symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **362** (2010), 2993-3026.

[NTV] F. Nazarov - S. Treil - A. Volberg, *The Tb-theorem on non-homogeneous spaces*, Acta Math., **190**, no. 2 (2003), 151-239.

[R] M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Zeit., **27** (1927), 218-244.

[SC] L. Saloff-Coste, *Aspects of Sobolev-type inequalities*, London Mathematical Society Lecture Note Series **289**, Cambridge University Press, 2002.

[So] P. M. Soardi, *Serie di Fourier in più variabili*, Quaderno dell'Uniome Matematica Italiana, **26**, Pitagora Ed., Bologna 2004.

[St1] E. M. Stein, *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood–Paley Theory*, Annals of Math. Studies, No. **63**, Princeton N. J., 1970.

[St2] E. M. Stein, *Harmonic Analysis. Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton Math. Series No. **43**, Princeton N. J., 1993.

[Str] J.-O. Strömberg, *Weak type L^1 estimates for maximal functions on noncompact symmetric spaces*, Ann. of Math., **114** (1981), 115-126.

[To] X. Tolsa, *BMO, H^1, and Calderón-Zygmund operators for non doubling measures*, Math. Ann., **319** (2001), 89-149.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi Milano-Bicocca
Via Cozzi 53, 20125 Milano
E-mail: stefano.meda@unimib.it

Received December 18, 2011 and in revised form January 19, 2012

Giuseppe Mingione: Aspetti non lineari della teoria di Calderón-Zygmund

Giuseppe Mingione
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: giuseppe.mingione@unipr.it

Sunto

La teoria di Calderón-Zygmund, nel caso classico, permette di dedurre in modo ottimale le proprietà di integrabilità e differenziabilità delle soluzioni di equazioni ellittiche e paraboliche lineari in termini della regolarità dei dati assegnati a priori. Presenterò una serie di risultati che concorrono a formare un analogo non lineare della teoria lineare classica.

Intervento: Giuseppe Mingione,
La teoria di Calderón-Zygmund dal caso lineare a quello non lineare,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 269–297**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 269-297

La teoria di Calderón-Zygmund dal caso lineare a quello non lineare

GIUSEPPE MINGIONE

Sommario. – *La teoria di Calderón-Zygmund per equazioni ellittiche e paraboliche lineari ammette un analogo non lineare che si è andato man mano delineando sempre più chiaramente negli ultimi anni. Di seguito si discutono alcuni risultati validi in questo ambito.*

1. – Divagazione preliminare

Questo testo riprende gli argomenti che ho trattato nella mia conferenza generale all'ultimo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi a Bologna lo scorso Settembre 2011. Approfitto quindi di questa occasione per tentare un'operazione per me nuova (!), quella di scrivere finalmente un lavoro in italiano. Non che questo si leghi ad una delle gentili richieste degli organizzatori e degli editori del BUMI, ma ho pensato che dopo varie memorie scritte in inglese fosse l'ora di esprimersi almeno una volta anche in italiano. Se ne scrivono sempre meno di lavori in italiano ed è giusto così, per ovvie esigenze di comunicazione; il prezzo che però si paga è quello ovvio: per quanto riguarda la Matematica il linguaggio non si evolve e rigenera secondo i normali ritmi dettati dai cambiamenti della vita quotidiana, diventando statico e via via inattuale, obsoleto. Uno dei sintomi più classici di questo processo è per esempio il prevalere, nelle normali discussioni professionali tra matematici italiani, di un linguaggio ibrido la cui struttura grammaticale di base è quella dell'italiano, ma sulla quale vanno man mano innestandosi, in maniera piuttosto disordinata, vari inglesismi spesso forzati quali ad esempio la coniugazione italiana di verbi stranieri o l'italianizzazione di termini anglofoni. La mancanza di terminologia legata anch'essa alla sempre più rada pratica della scrittura scientifica in italiano, porta all'improvvisazione linguistica, alla traduzione distratta, e, infine, alla mancanza di compiutezza estetica quando non addirittura di correttezza grammaticale. Non si può avere tutto d'altra parte, ma ogni tanto qualche lavoro in italiano non sarebbe male scriverlo, così, per aggiornare la lingua ma anche forse per "mantenersi in allenamento".

ll resto dell'articolo, distaccandosi anche nella presentazione dall'usuale modo di scrivere lavori di rassegna – ne ho già scritti altri su questi argomenti – segue

invece abbastanza fedelmente l'ordine e la selezione degli argomenti presentati al Congresso UMI, senza tentare espansioni o contrazioni, ma attenendosi all'esposizione originale degli argomenti e ad una usanza ormai dimenticata, che vede il testo scritto come "trascrizione della conferenza". Il resto del lavoro sarà scritto in prima persona plurale.

2. – Il periodo classico

Nell'ambito delle equazioni alle derivate parziali la teoria di Calderón-Zygmund classica risponde a domande come "Data un'equazione ellittica o parabolica *lineare*, è possibile determinare in modo ottimale l'integrabilità delle soluzioni in funzione di quella del dato?". Per fissare le idee, è opportuno considerare un problema modello, che ben funge da paradigma per quelli, più generali, che verranno considerati di seguito. Consideriamo allora la classica equazione di Poisson

$$-\triangle u = \mu\,, \tag{2.1}$$

in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$. Nel caso più generale in cui risultati significativi sono disponibili si può considerare il caso in cui μ rappresenti una misura, mentre per semplicità qui ci limiteremo a considerare il caso in cui $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e a descrivere come si ottengono stime *a priori*. Il caso in cui μ sia una misura può poi essere facilmente trattato tramite usuali procedimenti di approssimazione – si veda ad esempio la Sezione 5 più in basso. Torniamo allora all'equazione modello (2.1). La teoria classica di Calderón-Zygmund afferma la validità della stima *a priori*

$$\|D^2u\|_{L^q} \lesssim \|\mu\|_{L^q} \qquad \text{se } 1<q<\infty\,. \tag{2.2}$$

Quindi, nel caso generale abbiamo

$$\mu \in L^q \Longrightarrow D^2u \in L^q \qquad \text{se } 1<q<\infty\,. \tag{2.3}$$

La precedente implicazione smette di valere nei casi limite $q = 1, \infty$. Inoltre, osserviamo che la (2.3) è dimensionalmente corretta e ottimale: stiamo ottenendo sull'Hessiano la stessa informazione che abbiamo sul Laplaciano, che è la somma delle derivate seconde pure. Diamo allora un'occhiata a possibili strategie dimostrative della (2.2). L'approccio classico fa uso delle formule classiche di rappresentazione. Più precisamente, si usa la rappresentazione via nucleo di convoluzione

$$u(x) = \int G(x,y)\,d\mu(y) \tag{2.4}$$

dove $G(\,\cdot\,)$ è la funzione di Green

$$G(x-y) \approx \begin{cases} |x-y|^{2-n} & \text{se} \quad n \geq 3 \\ \log\,|x-y| & \text{se} \quad n = 2\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

Si osservi – per un attimo limitiamoci al caso $n \geq 3$ – che il nucleo $|x|^{2-n}$ è localmente integrabile; quindi osserviamo subito che eventuali formule di maggiorazione per la u, in termini del dato μ, si possono ottenere usando questo fatto, e semplici maggiorazioni quantitative sul nucleo di convoluzione. In altre parole, possiamo limitarci a studiare quanto è grande $G(\,\cdot\,)$ e su questo punto torneremo più tardi, nella Sezione 6.

Adesso, differenziando la (2.4) due volte sotto il segno di integrale, si arriva alla nuova formula di rappresentazione

$$D^2u(x) \approx \int K(x-y)\,d\mu(y) \tag{2.6}$$

dove stavolta $|K(x)| \lesssim |x|^{-n}$ è un nucleo non localmente integrabile. L'analisi della trasformazione naturalmente indotta dalla (2.6) diventa quindi più delicata, e si richiede un procedimento più raffinato: non bastando le sue proprietà di crescita si userà il fatto che il nucleo $K(\,\cdot\,)$ soddisfa comunque delle proprietà di cancellazione che verranno esplicitate mediante un opportuno procedimento di microlocalizzazione. In altre parole, il motto sembra essere: "Quando le proprietà di crescita non bastano, si cerchino quelle di cancellazione". Questo tipo di approccio è oggi un paradigma nella moderna analisi non lineare: ove si presenti una situazione dove si osserva una "crescita critica" che non consente di ottenere risultati basandosi solo sull'analisi di quanto le quantità in gioco "sono grandi", si passa a ottenere risultati scovando la presenza di opportune cancellazioni, che poi si rivelano immancabilmente l'ingrediente fondamentale. Si osservano fenomeni del genere nella teoria delle mappe armoniche, nell'integrabilità per compensazione dei determinanti, nell'analisi di problemi invarianti per trasformazioni conformi – raccomandiamo a questo proposito di dare un'occhiata al recente lavoro di Rivière [77]. Quella che stiamo osservando in questo caso sembra essere una delle prime – se non proprio la prima in assoluto – circostanza in cui tale punto di vista viene seguito in modo esplicito.

Veniamo adesso ai dettagli: la (2.6) spinge appunto a considerare la trasformazione integrale

$$CZ(\mu)(x) := \int K(x-y)\,d\mu(y)\,,$$

definita inizialmente su funzioni lisce a supporto compatto. Si osserva ora che il nucleo $K(\,\cdot\,)$ soddisfa le seguenti proprietà:

$$\|K\|_{L^2} + \|\hat{K}\|_{L^\infty} \leq B\,, \tag{2.7}$$

dove $\hat{K}$ è la trasformata di Fourier di $K(\,\cdot\,)$. Questo, e il classico teorema di Plancherel, permettono di dedurre la limitatezza di $CZ(\,\cdot\,)$ su L^2

$$\|CZ(\mu)\|_{L^2} \lesssim \|\mu\|_{L^2}\,. \tag{2.8}$$

Adesso, ecco *le cancellazioni*: vale la condizione (detta di Hörmander)

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y)-K(x)|\,dx \leq B \qquad \text{per ogni } \ y\in\mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

che è verificata per una certa costante finita B. Usando (2.7)-(2.9), e poi usando argomenti di interpolazione e dualità usuali, si può adesso dimostrare che

$$\|CZ(\mu)\|_{L^q} \lesssim \|\mu\|_{L^q} \qquad \text{se } 1<q<\infty \tag{2.10}$$

e che in ultima analisi vale la (2.2). L'approccio appena descritto è stato originariamente introdotto e seguito nei classici lavori [20, 21], dove la condizione di cancellazione (2.9) veniva data in una forma meno generale, più adatta al nucleo considerato in (2.6). Il caso $q=1$ rimane fuori, poiché in generale la (2.2) non vale. Quello che in realtà vale è più debole ma non è meno importante e infatti viene usato come base per i procedimenti interpolativi che poi portano alla (2.10); per questo abbiamo bisogno di introdurre gli spazi di Marcinkiewicz (spazi di Lebesgue deboli).

DEFINIZIONE 2.1. – *Sia $t\geq 1$ e $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un insieme misurabile; una funzione misurabile $w:\Omega\to\mathbb{R}^k$ appartiene a $\mathcal{M}^t(\Omega,\mathbb{R}^k)\equiv\mathcal{M}^t(\Omega)$ se e solo se*

$$\sup_{\lambda\geq 0}\lambda^t|\{x\in\Omega \ : \ |w|>\lambda\}| =: \|w\|^t_{\mathcal{M}^t(\Omega)}<\infty\,. \tag{2.11}$$

Questi spazi sono particolarmente adatti a studiare situazioni limite, ed in particolare i problemi che coinvolgono potenziali Newtoniani, come quelli che stiamo analizzando qui e come quelli che intervengono nell'analisi dei problemi con dato misura. Per esempio, si ha

$$\frac{1}{|x|^{n/t}}\in\mathcal{M}^t(B(0,1))\setminus L^t(B(0,1))$$

per ogni $t\geq 1$. In generale si ottiene

$$L^t\subsetneq\mathcal{M}^t\subsetneq L^{t-\varepsilon} \qquad \text{per ogni } \varepsilon>0\,. \tag{2.12}$$

per quanto riguarda la prima inclusione in (2.12), e per la motivazione stessa della definizione in (2.11), basta osservare che

$$|\{|w|>\lambda\}| = \int_{\{|w|>\lambda\}} dx \leq \int_{\{|w|>\lambda\}} \frac{|w|^t}{\lambda^t}\,dx \leq \frac{\|w\|^t_{L^t}}{\lambda^t}$$

cosicché $\|w\|_{\mathcal{M}^t}\leq\|w\|_{L^t}$. Abbiamo allora che il caso limite della (2.10) è dato da

$$\|CZ(\mu)\|_{\mathcal{M}^1}\lesssim\|\mu\|_{L^1} \tag{2.13}$$

e, in ultima analisi,

$$\|D^2u\|_{\mathcal{M}^1} \lesssim \|\mu\|_{L^1} .$$

In realtà, come già accennato sopra, la dimostrazione della (2.10) si ottiene proprio impiegando la (2.8) in combinazione con la (2.13): usando la classica interpolazione di Marcinkiewicz si ottiene la validità della (2.10) per $1<q<2$. Infine, usando la dualità – ricordiamo che il problema è lineare – si ottiene la (2.10) anche per $2<q<\infty$.

Concludendo, sembra chiaro che l'approccio descritto sopra si basa su un programma che dipende fortemente dalla linearità del problema considerato, e addirittura dalla sua forma esplicita. Riassumendo, abbiamo il seguente:

PROGRAMMA CZ1 (Classico dopo Calderòn & Zygmund)

- Si usa la struttura dell'equazione per ottenere una formula di rappresentazione integrale.
- Si studia l'operatore integrale indotto da tale formula di rappresentazione analizzando le proprietà di cancellazione del nucleo per ottenere la (2.13).
- Si usa infine l'interpolazione e la dualità per ottenere la (2.10) dalla combinazione di (2.8) e (2.13).

2.1 – *Un approccio più generale*

La ricetta descritta nella sezione precedente propone un piatto un po' pesante: prima l'uso di una formula di rappresentazione usata per abbandonare l'equazione di partenza, poi l'analisi di una trasformazione integrale e delle cancellazioni del suo nucleo e, infine, l'uso di teoremi di interpolazione e di metodi di dualità. Sarebbe quindi auspicabile avere una dimostrazione più legata alla teoria delle equazioni alle derivate parziali, che utilizzasse magari strumenti circoscritti all'ambito della teoria stessa. Questo alleggerimento è infatti possibile e iniziamo qui a descrivere un percorso *di destrutturazione del Programma CZ1* che porterà alla fine ad una dimostrazione essenzialmente elementare dei principali risultati, anche per equazioni non lineari, che non fa uso esplicito degli strumenti di Analisi Armonica presenti nel Programma CZ1. Di questi si conserverà però, e inevitabilmente, lo spirito. Questo percorso troverà la sua conclusione nel Programma CZ4 descritto più in basso nella Sezione 4.1.

Il primo tentativo in questa direzione risale al lavoro di Campanato e Stampacchia [22]. In ultima analisi, i primi due punti del Programma CZ1 vengono saltati, e si usa soltanto la dualità e un più efficace risultato di interpolazione ottenuto in [81, 82]. Descriveremo questo procedimento per un problema leggermente differente, ma che presenta, per quello che ci interessa, le stesse caratteristiche di quello affrontato nella sezione precedente. Più precisamente

consideriamo l'equazione

$$\triangle u = \operatorname{div} F \tag{2.14}$$

per le soluzioni della quale vogliamo stabilire una maggiorazione dimensionalmente ottimale del tipo

$$\|Du\|_{L^q} \lesssim \|F\|_{L^q} \qquad \text{quando } 1<q<\infty\,. \tag{2.15}$$

Lo schema della sezione precedente si può ancora seguire, come si diceva, semplicemente sostituendo μ con $\operatorname{div} F$ in (2.4), derivando *una sola volta* sotto al segno di integrale e poi integrando per parti per avere un operatore integrale, del tipo $CZ(\,\cdot\,)$, che agisce su F e non su $\operatorname{div} F$. Qui prendiamo però un'altra strada, considerando l'operatore, palesemente lineare, definito da

$$T\colon F \mapsto Du \qquad \text{dove } u \text{ e la soluzione di (2.14)}\,.$$

L'operatore viene definito in realtà specificando un aperto di riferimento sufficientemente regolare, eventualmente prendendo anche $\mathbb{R}^n$, e un dato al bordo, in questo caso prendiamo quello nullo per fissare le idee. Moltiplicando la (2.14) e integrando per parti si ottiene facilmente la stima

$$\|T(F)\|_{L^2} \lesssim \|F\|_{L^2}\,. \tag{2.16}$$

In generale, la stima $\|T(F)\|_{L^\infty} \lesssim \|F\|_{L^\infty}$ non vale: si ottiene invece

$$\|T(F)\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|F\|_{L^\infty} \tag{2.17}$$

dove BMO è uno spazio funzionale che descriveremo qualche riga più in basso. Adesso il punto è che BMO è uno spazio *opportunamente vicino a* L^∞ *da consentire di interpolare* (2.16) *e* (2.17) *come se fosse proprio* L^∞, alla fine ottenendo

$$\|T(F)\|_{L^q} \lesssim \|F\|_{L^q} \qquad \text{quando } 2 \le q<\infty\,.$$

Quest'ultima maggiorazione non è nient'altro che quella nella (2.14) per $2 \le q<\infty$; il caso $1<q<2$ viene infine ottenuto per dualità grazie ancora una volta alla linearità del problema. Come si diceva prima, il teorema di interpolazione rilevante nella fattispecie è stato ottenuto da Stampacchia in [81, 82], mentre l'armamentario di stime integrali che permette di ottenere (2.17) è essenzialmente frutto dell'approccio di Campanato alla regolarità. Per una buona introduzione a questi argomenti ci sentiamo di raccomandare la lettura dell'eccellente trattato di Giusti [38].

L'approccio appena descritto permette allora di saltare i primi due punti del precedente Programma CZ1, trattenendo soltanto il terzo. In particolare, l'uso delle cancellazioni sembra essere evitato. In realtà non è cosi: come spesso capita, quando si pensa di essersi sbarazzati di uno strumento molto influente e ingombrante, esso, o il suo fantasma, riappare altrove. In questo caso, un accurato uso di proprietà di cancellazione si nasconde proprio nell'unico punto che non

abbiamo specificato qui, lo spazio BMO, e nel suo uso nell'ambito della teoria dell'interpolazione. È quindi venuto il momento di dare, di tale spazio, la definizione precisa. Di seguito denotiamo con

$$B(x,R) := \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, |x-y| < R\}$$

la palla aperta di $\mathbb{R}^n$ di centro x e raggio $R > 0$ e con

$$(v)_{B(x,R)} := \fint_{B(x,R)} v(y)\,dy$$

la media integrale di una funzione integrabile v su $B(x,R)$. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ la funzione $v \in L^1(\Omega)$ appartiene a BMO(Ω) se e solo se

$$[v]_{\mathrm{BMO}} := \sup_{B(x,R)\cap\Omega, R>0} \fint_{B(x,R)\cap\Omega} |v(y) - (v)_{B(x,R)}|\,dy < \infty\,. \tag{2.18}$$

Questo spazio funzionale è stato introdotto da John & Nirenberg [48], che ne hanno descritto alcune importanti proprietà, tra le quali, quella che più ci interessa qui, è quella di integrabilità limite di tipo esponenziale

$$\int_\Omega \exp(c|v|)\,dx < \infty \tag{2.19}$$

dove c è una costante che dipende da n e, ovviamente, dalla seminorma $[v]_{\mathrm{BMO}}$. Dalla (2.19) seguono tra l'altro le inclusioni (strette)

$$L^\infty \subset \mathrm{BMO} \subset L^q \qquad \text{per ogni } q < \infty\,.$$

La (2.18) dà in qualche modo conto del fatto che BMO è uno spazio sufficientemente vicino a L^∞ da comportarsi, dal punto vista dell'interpolazione, come L^∞, motivando l'affermazione fatta qualche rigo più in alto. L'informazione fondamentale che differenzia BMO da L^∞ è allora proprio contenuta nella finitezza di $[v]_{\mathrm{BMO}}$, che, a sua volta, riferisce del fatto che le oscillazioni di v sono in qualche modo controllate, in modo integrale, a ogni scala. Questa informazione si ricombina opportunamente con gli argomenti di interpolazione sviluppati in [81, 82], dando un risultato che contiene un'informazione analoga a quella del terzo punto del programma classico (CZ1), costituendone in ultima analisi la controparte nel presente contesto. Ad essere pignoli anche il secondo punto del Programma CZ1 ammette un analogo, questa volta locale: la formula di rappresentazione viene sostituita localmente dalle stime *a priori* per equazioni omogenee, che mostrano, "localmente", un'omogeneità simile a quella delle formule di rappresentazione usuali. Possiamo allora sintetizzare con il seguente

PROGRAMMA CZ2 (di Campanato e Stampacchia)

- Si usa la linearità dell'equazione, ma non la sua forma esplicita, per definire un operatore lineare, che però stavolta non è di tipo convoluzione.
- Le formule di rappresentazione vengono sostituite da opportune stime di regolarità per soluzioni locali di equazioni omogenee [22]; queste permettono di ottenere alcune proprietà rilevanti dell'operatore su "spazi limite".
- Si usano infine l'interpolazione nella forma introdotta in [81, 82] e la dualità, direttamente sull'operatore.

2.2 – *Potenziali frazionari*

Ritorniamo brevemente ad un discorso accennato poco dopo la (2.6) e più precisamente torniamo adesso a considerare la (2.4), che vogliamo stavolta differenziare al più una volta. L'analisi del nucleo e delle sue derivate porta a dare la seguente

DEFINIZIONE 2.2. – *Sia $\beta \in (0, n]$; l'operatore*

$$I_\beta(\mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\beta}} \ ,$$

definito per qualsiasi misura di Borel μ, si chiama potenziale di Riesz di μ di ordine β.

Quando $n \geq 3$ dalla (2.4) discendono le seguenti *limitazioni puntuali*

$$|u(x)| \lesssim |I_2(\mu)(x)| \qquad \text{e} \qquad |Du(x)| \lesssim I_1(|\mu|)(x)\,, \tag{2.20}$$

con la seconda delle due che rimane in realtà valida anche quando $n = 2$. Le maggiorazioni precedenti permettono di ricondurre il problema dell'integrabilità della soluzione e del suo gradiente a quello del relativo potenziale di Riesz. Infatti, il comportamento di quest'ultimo è noto in vari spazi funzionali [3]. Per esempio si ha

$$I_\beta \colon L^q \to L^{\frac{nq}{n-\beta q}}\,, \qquad q > 1\,, \qquad \beta q < n \tag{2.21}$$

da cui, tramite la seconda disuguaglianza in (2.20), si ottiene

$$\|Du\|_{L^{\frac{nq}{n-q}}} \lesssim \|\mu\|_{L^q}\,, \qquad q > 1\,, \qquad q < n\,.$$

Inoltre, grazie ad un caso limite della (2.21) in cui intervengono gli spazi di Marcinkiewicz, vale pure

$$\|Du\|_{\mathcal{M}^{\frac{n}{n-1}}} \lesssim \|\mu\|_{L^1}$$

con una stima analoga, ottenuta per approssimazione, nel caso in cui μ sia in generale una misura.

3. – Il caso non lineare e la sua problematicità

La linearità dell'equazione di Poisson (2.1) permette una varietà di approcci al problema della risolubilità, e poi della regolarità, ma prima di tutto alla definizione stessa di soluzione: formule di rappresentazione, metodo di energia (Calcolo delle Variazioni o metodi di monotonia), approcci per dualità, metodo di Perron (principio di massimo e approcci tipo viscosità). Si tratta, in altre parole "dell'equazione perfetta" (come per esempio ama ripetere Luis Caffarelli). Tali approcci trovano estensione più o meno diretta al caso di equazioni ellittiche lineari generali, permettendo anche un certo grado di irregolarità sui coefficienti che eventualmente si volessero considerare. La situazione cambia nel caso non lineare, che si presenta invece in modo assai più problematico, come vedremo tra pochissimo. Andiamo allora per gradi e consideriamo di seguito equazioni del tipo

$$-\operatorname{div} a(Du) = H \tag{3.1}$$

dove *il dato* $H \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è una distribuzione sulla quale faremo via via delle ipotesi opportune. Il campo vettoriale $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e verifica le ipotesi di crescita ed ellitticità seguenti

$$\begin{cases} |a(z)| + (s^2 + |z|^2)^{1/2}|\partial a(z)| \le L(s^2 + |z|^2)^{(p-1)/2} \\ \nu(s^2 + |z|^2)^{(p-2)/2}|\lambda|^2 \le \langle \partial a(z)\lambda, \lambda\rangle \ , \end{cases} \tag{3.2}$$

per ogni scelta di $z, \lambda \in \mathbb{R}^n$, dove $s \ge 0$ e $0 < \nu \le L$ sono *parametri strutturali prefissati*. In generale assumeremo $p > 1$, mentre in alcune situazioni, e più che altro per agevolare la presentazione e limitarci alle idee essenziali, tratteremo il caso sopraquadratico $p \ge 2$. L'equazione (3.1) verrà considerata in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ per $n \ge 2$. Vale la pena osservare preliminarmente che alcuni dei risultati che verranno riportati in seguito rimangono validi sotto ipotesi meno generali di quelle in (3.2), che però d'altra parte riescono a coprire tutti i principali casi modello. Le ipotesi (3.2) sono in ogni caso considerate usuali a partire dalle ricerche iniziali di Ladyzhenskaya & Ural'tseva [65] che le hanno assunte e studiate in modo sistematico. Il principale caso che qui abbiamo in mente, su cui le (3.2) *sono in realtà modellate*, è dato dall'equazione

$$-\operatorname{div}((s^2 + |Du|^2)^{(p-2)/2}Du) = H\,.$$

Nel caso $s = 0$ l'equazione precedente diventa degenere e coinvolge l'importante caso del p-Laplaciano

$$-\triangle_p u = -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = H$$

che poi, quando $H = 0$, diventa a sua volta l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale variazionale

$$v \mapsto \int_\Omega |Dv|^p \, dx \, . \tag{3.3}$$

A questo punto la classica definizione distribuzionale è

DEFINIZIONE 3.1. – *Una funzione* $u \in W^{1,1}(\Omega)$ *è una soluzione distribuzionale di* (3.1) *se e solo se* $a(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e soddisfa*

$$\int_\Omega \langle a(Du), D\varphi \rangle \, dx = \langle H, \varphi \rangle \qquad \text{per ogni } \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \, . \tag{3.4}$$

Si osservi immediatamente che la condizione $a(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}$ serve ad assicurare che il membro a destra dell'equazione nella (3.4) risulti finito. Dalle (3.2) segue in particolare che l'integrabilità $u \in W^{1,p-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ assicura che $a(Du) \in L^1_{\mathrm{loc}}$.

La prima osservazione fondamentale che a questo punto bisogna fare è che le soluzioni considerate nella precedente definizione non devono necessariamente appartenere allo spazio di definizione naturale $W^{1,p}(\Omega)$ fissato dalle (3.2) – su cui per esempio il funzionale in (3.3) risulta finito – ma possono esibire un minor grado di integrabilità. Soluzioni che non appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$ effettivamente esistono e vengono chiamate, per ovvi motivi, *soluzioni molto deboli*. La loro presenza è intimamente legata a varie questioni abbastanza profonde sulla natura delle equazioni qui considerate, ma non è questo il luogo per dare una panoramica, anche incompleta, dei problemi che da esse scaturiscono. Rimandiamo per esempio a [10, 24] per una larga discussione sull'argomento. Qui ci limitiamo soltanto a ricordare che le soluzioni molto deboli possono esistere accanto a quelle usuali a "energia finita" (cioè quelle che appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$) e che le soluzioni distribuzionali non sono in generale uniche già quando H è "semplicemente" una misura (si veda per esempio [79]). A questo proposito, visto che di problemi con dati misura ci occuperemo anche in seguito, è utile anticipare che *non si conosce una classe funzionale in cui risolvere in modo unico il problema dell'esistenza di soluzioni per problemi con dato misura*. Essendo in questa sede interessati a stime di regolarità e quindi in ultima analisi a presentare stime *a priori* per le soluzioni, non toccheremo qui questa problematica per la quale rimandiamo di nuovo a [10, 24]. Ci limitiamo quindi a riassumere la situazione, toccando i punti più significativi per quello che qui ci riguarda, come segue

- da un lato è possibile avere una teoria dell'esistenza quando il dato H appartiene al duale di $W^{1,p}$. In questo caso è anche possibile, nella formula-

zione debole (3.4), usare funzioni test φ che sono proporzionali alla soluzione stessa, $\varphi \equiv u$, e ottenere così agevolmente *stime di energia* (disuguaglianze di Caccioppoli) che sono di solito il primo passo nei successivi procedimenti di regolarizzazione delle soluzioni. In questo caso i teoremi di esistenza disponibili forniscono soluzioni di classe $W^{1,p}$ che sono quindi *soluzioni a energia finita*

- dall'altro lato il quadro precedente si dualizza completamente nel caso in cui H non appartenga al duale di $W^{1,p}$. Non è possibile adesso usare funzioni test $\varphi \equiv u$ in (3.4), e in questo caso si opera di solito usando funzioni test φ ottenute proiettando la soluzione u su opportuni spazi di funzioni più regolari, dipendenti da H, in modo da soddisfare la dualità $\langle H, \varphi \rangle$. Una volta ottenute le relative stime *a priori* è possibile poi ottenere teoremi di esistenza tramite procedimenti di approssimazione (si veda per esempio il caso in H è una misura trattato nella Sezione 5). Concludendo, in questo caso le soluzioni ottenute non sono sempre di classe $W^{1,p}$, sono quindi *soluzioni molto deboli*, e non a caso vengono talora chiamate *soluzioni ad energia infinita*. Va qui osservato che trovare opportune proiezioni di u su spazi più regolari, e in ultima analisi costruire adeguate funzioni test per la (3.4), è in generale cosa tutt'altro che agevole. Ad esempio, quando H è una misura si possono usare semplici troncamenti di u (si proietta cioè u su L^∞ come in [11, 12]); nel caso in cui H si presenti in forma di divergenza, si devono operare scelte più delicate. In questo caso si usano proprietà fini della decomposizione di Hodge ([43, 46]) oppure troncamenti sull'operatore massimale del gradiente ([67, 53]). Per questo rimandiamo anche alla Sezione 4.2 più in basso.

Il precedente quadro porta quindi a sdoppiare la trattazione seguente in due situazioni distinte. La prima si ha quando H appartiene al duale di $W^{1,p}$; in questo caso si procede poi nella dimostrazione della regolarità più alta delle soluzioni. Nella seconda, in cui il quadro teorico generale attualmente disponibile appare ancora incompleto, la regolarià massimale delle soluzioni è al più quella $W^{1,p}$. La dimostrazione di questo fatto è spesso l'obiettivo finale in molte situazioni (si veda di nuovo la Sezione 4.2 più in basso). Nel resto del lavoro gli argomenti saranno appunto presentati seguendo questa dicotomia.

OSSERVAZIONE 3.1. – Le precedenti definizioni di soluzione, insieme a tutte le considerazioni fatte, continuano a valere mutatis mutandis nel caso dei sistemi, quando cioè $u: \Omega \to \mathbb{R}^N$ con $N > 1$ e $a: \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}^{N\times n}$. Esse si estendono inoltre al caso parabolico, che tuttavia di seguito verrà trattato solo nel caso di usuali soluzioni a energia finita; si veda la Sezione 4.1.

4. – Il caso sopraduale

In questa sezione trattiamo equazioni (e sistemi) del tipo in (3.1) quando H appartiene al duale di $W^{1,p}(\Omega)$. Specificatamente possiamo assumere che $H = -\operatorname{div} G$ con G che è un campo vettoriale appartenente a $L^{p/(p-1)}$, ricordando sempre che stiamo supponendo che $p > 1$. Operando inoltre un cambiamento di variabile possiamo riscrivere H nella forma $H = -\operatorname{div}(|F|^{p-2}F)$ per qualche $F \in L^p$ in modo da garantire una più agevole e concisa esposizione dei risultati; considereremo allora equazioni della forma

$$\operatorname{div} a(Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F), \qquad F \in L^p \tag{4.1}$$

dove il campo vettoriale $a(\cdot)$ verifica le ipotesi descritte nella (3.2). Il primo risultato di tipo Calderón-Zygmund per equazioni non lineari degeneri si deve a Tadeusz Iwaniec ed è il

TEOREMA 4.1 ([42]). – *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ una soluzione distribuzionale dell'equazione*

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F)$$

in $\mathbb{R}^n$, con $p > 1$; vale allora

$$F \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow Du \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \qquad \text{per ogni } q \geq p\,. \tag{4.2}$$

Il precedente teorema si generalizza, essenzialmente con le stesse tecniche, al caso di equazioni generali del tipo (4.1), definite su aperti generali del tipo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (si veda per esempio [1, 54]). Vale infatti il seguente

TEOREMA 4.2. – *Nelle ipotesi* (3.2) *con $p > 1$, sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una soluzione distribuzionale dell'equazione* (4.1) *in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora vale*

$$F \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow Du \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n) \qquad \text{per ogni } q \geq p\,. \tag{4.3}$$

Inoltre, esiste una costante c dipendente solo da n, p, ν, L e q tale che per ogni palla $B_R \subseteq \Omega$ di raggio $R > 0$ vale la stima locale

$$\left(\fint_{B_{R/2}} |Du|^q\,dx\right)^{1/q} \leq c\left(\fint_{B_R} (|Du| + s)^p\,dx\right)^{1/p} + c\left(\fint_{B_R} |F|^q\,dx\right)^{1/q}. \tag{4.4}$$

Il caso vettoriale è stato invece trattato da DiBenedetto & Manfredi, che, estendendo le tecniche di Iwaniec, riescono anche a coprire il caso limite della regolarità BMO.

TEOREMA 4.3 ([26]). – *Sia* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ *una soluzione distribuzionale del sistema*

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F)$$

in $\mathbb{R}^n$, *con* $p > 1$ *e* $N \geq 1$; *vale allora la* (4.2) *e inoltre*

$$F \in BMO(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{N\times n}) \Longrightarrow Du \in BMO(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{N\times n}).$$

Vale la pena rimarcare che il precedente risultato non rimane valido quando si considerano sistemi generali del tipo in (4.1); infatti, anche nel caso maggiormente favorevole in cui $F = 0$, essi ammettono in generale soluzioni illimitate, come dimostrato recentemente da Šverák & Yan in [84]. Risultati intermedi, ed essenzialmente ottimali, sono stati ottenuti in [56, 57]. La possibilità di dimostrare il precedente teorema si lega in ultima analisi alla struttura molto particolare del sistema in questione: il campo vettoriale $a(z) := |z|^{p-2}z$ è di forma diagonale, e si può fattorizzare come un Laplaciano moltiplicato per un coefficiente che dipende in modo non lineare (polinomiale) e degenere dal modulo del gradiente. Una struttura di questo tipo, spesso chiamata di tipo Uhlenbeck, è essenzialmente l'unica nota che permette di ricavare risultati di regolarità per sistemi che vadano oltre quelli di cosiddetta "regolarità parziale", ed è stata identificata per la prima volta nel lavoro fondamentale [87]. Per ulteriori informazioni circa la regolarità per sistemi si rimanda al classico trattato di Giaquinta [37] e al più recente lavoro di rassegna [73].

Veniamo adesso a descrivere la tecnica originale di Iwaniec, che si può sintetizzare nel seguente

PROGRAMMA CZ3 (di Tadeusz Iwaniec [42])

- Si usa un confronto locale con soluzioni dell'equazione omogenea $\operatorname{div}(|Dv|^{p-2}Dv) = 0$, usando le stime di regolarità locale $C^{1,\alpha}$ per v per ottenere un *surrogato locale* della formula di rappresentazione globale (2.4) valida nel caso lineare
- Si usano operatori massimali (di tipo sharp) per globalizzare le stime ottenute nel passo precedente, e si ottiene una stima puntuale per l'operatore massimale di Du in termini di quello di F; si arriva quindi ad un *surrogato globale* della formula di rappresentazione lineare che usa gli operatori massimali
- Le proprietà di limitatezza degli operatori massimali (teoremi di Hardy & Littlewood e di Fefferman & Stein) permettono poi di concludere con le stime integrali desiderate

Si nota in altre parole che il Programma CZ1 della precedente sezione viene abbandonato e si utilizzano dei surrogati non lineari degli strumenti lineari di Analisi Armonica in esso utilizzati. In particolare, gli integrali singolari vengono

abbandonati e vengono rimpiazzati dall'operatore massimale sharp di Fefferman-Stein, che permette, in un certo senso, di codificare la stessa informazione apportata dagli integrali singolari. Si nota ancora una certa continuità con il Programma CZ2 in quanto vengono di nuovo impiegate stime locali per equazioni omogenee, qui usate però non nel contesto dell'interpolazione ma in quello di una tecnica di confronto più diretta e locale.

4.1 – *Il caso parabolico*

Nel caso di equazioni paraboliche generali del tipo

$$u_t - \operatorname{div} a(Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F)\,, \qquad F \in L^p \tag{4.5}$$

definite in un dominio cilindrico del tipo $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, la validità di risultati come il Teorema 4.1 è rimasta una questione aperta fino al lavoro [2], in cui è stato finalmente ottenuto un analogo essenzialmente ottimale dei risultati originali di Iwaniec e DiBenedetto & Manfredi.

TEOREMA 4.4 ([2]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con*

$$p > \frac{2n}{n+2}\,, \tag{4.6}$$

sia $u \in L^p(0,T,W^{1,p}(\Omega))$ *una soluzione debole dell'equazione* (4.5), *dove* Ω *è un dominio di* $\mathbb{R}^n$. *Allora vale*

$$F \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega_T,\mathbb{R}^n) \Longrightarrow Du \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega_T,\mathbb{R}^n) \qquad \textit{per ogni } q \geq p\,. \tag{4.7}$$

Inoltre il risultato (4.7) *continua a valere per soluzioni* $u \in L^p(0,T,W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^N))$, $N \geq 1$, *del sistema del* p*-Laplaciano parabolico*

$$u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \operatorname{div}(|F|^{p-2}F)\,.$$

Osserviamo subito che la limitazione inferiore su p descritta in (4.6) è necessaria. Infatti, già nel caso della singola equazione $u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0$, esistono soluzioni addirittura non appartenenti a L^q per ogni q quando $p \leq 2n/(n+2)$; per una discussione del problema si rimanda a [25].

La tecnica dimostrativa introdotta per ottenere il risultato precedente consente generalizzazioni in numerose direzioni: si possono trattare ad esempio equazioni con coefficienti di tipo *VMO* (rispetto alla variabile spaziale) e sistemi generali quando si introduca un'opportuna restrizione sull'esponente q – si guardi anche a [34, 78]. Il Teorema 4.4 si estende anche a problemi con ostacolo: in questo caso l'integrabilità del gradiente delle soluzioni è la stessa di quella del gradiente dell'ostacolo [13] e questo risultato risulta nuovo già nel caso ellittico.

Veniamo adesso a descrivere brevemente le difficoltà aggiuntive, rispetto a quelle tipiche del caso ellittico, che si presentano quando si affronta quello parabolico. Sarà la buona occasione per introdurre il concetto, fondamentale, di *geometria intrinseca*, dovuto a Emmanuele DiBenedetto (si veda [25] per una descrizione generale). Il problema principale si lega al fatto che, già nel caso omogeneo

$$u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0\,,$$

l'equazione considerata è priva di un riscalamento universale. In altra parole, moltiplicando la soluzione per una costante non si ottiene una soluzione della stessa equazione. A sua volta, questo fatto si riflette nella mancanza di stime locali di tipo omogeneo per le soluzioni: al contrario, queste presentano un difetto di omogeneità che è *esattamente quello dell'equazione*. Infine, essendo l'omogenità delle stime locali un ingrediente essenziale nel Programma CZ3, si è immediatamente costretti a cercare approcci completamente diversi. Il modo di ovviare a questo inconveniente è allora quello di ottenere stime locali omogenee su cilindri particolari, che dipendono dalla soluzioni stessa, secondo il succitato concetto di *geometria intrinseca*. Più precisamente si considerano cilindri della forma

$$Q_r^\lambda(x_0,t_0) \equiv B_r(x_0) \times (t_0 - \lambda^{2-p}r^2, t_0 + \lambda^{2-p}r^2)\,,$$

dove $\lambda > 0$ si lega alla soluzione tramite una relazione del tipo $|Du| \approx \lambda$ da verificarsi *sullo stesso cilindro* $Q_r^\lambda(x_0,t_0)$. Una tale condizione in realtà si realizza di solito usando relazioni integrali, come per esempio

$$\fint_{Q_r^\lambda(x_0,t_0)} |Du|^p \approx \lambda^p\,. \tag{4.8}$$

Il vantaggio di tale scelta è abbastanza ovvio una volta che ci si riesca a convincere della validità, o meglio, dell'implementabilità del seguente ragionamento euristico: siccome $|Du| \approx \lambda$ su $Q_r^\lambda(x_0,t_0)$ allora abbiamo anche

$$u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) \approx u_t - \lambda^{p-2}\triangle u$$

cosicchè, effettuando il cambio di variabile $v(x,t) := u(x_0 + rx, t_0 + \lambda^{2-p}r^2t)$ abbiamo quindi che v risolve l'equazione del calore

$$v_t - \triangle v = 0 \qquad \text{in} \qquad B(0,1) \times (-1,1)$$

e come tale soddisfa delle stime di regolarità favorevoli, di tipo omogeneo. Malgrado la sua evidente naturalezza, realizzare in termini rigorosi una tale argomentazione è tutt'altro che agevole e il processo richiede il superamento di vari punti assai delicati, prima di tutto quello di verificare, durante gli opportuni procedimenti di iterazione, che condizioni del tipo (4.8) vengano verificate "ad ogni scala" (cioè quando i cilindri degenerano ad un punto). Di fatto il metodo

della geometria intrinseca conduce ad ottenere stime omogenee per le soluzioni; per esempio, è possibile dimostrare (si veda [25, 61]) che, per una opportuna costante c dipendente solo da n e p, vale

$$c\left(\fint_{Q_r^\lambda(x_0,t_0)} |Du|^{p-1}\,dx\,dt\right)^{1/(p-1)} \le \lambda \Rightarrow |Du(x_0,t_0)| \le \lambda\,.$$

Alla radice del metodo proposto in [2] si trova allora una decomposizione di tipo Calderón-Zygmund degli insiemi di livello del gradiente Du, operata cambiando il tipo di cilindri usati a seconda del livello considerato. In sintesi, abbiamo il

PROGRAMMA CZ4 (introdotto in [2])

- Considerato l'insieme di livello $|\{|Du| > \lambda\}|$, se ne effettua una decomposizione in cilindri intrinseci del tipo Q_r^λ usando un argomento di tipo "tempo di uscita" su una quantità che coinvolge sia Du che F, che vengono però *pesati in modo diverso*, usando un parametro di peso M. In altre parole, i risultanti cilindri sono tali che in ognuno di essi si verifica $|Du| \approx \lambda$ e $|F| \lesssim \lambda/M$ con $M \ge 1$.
- Si usa un confronto locale con soluzioni dell'equazione omogenea associata $v_t - \operatorname{div}(|Dv|^{p-2}Dv) = 0$ sui cilindri del tipo Q_r^λ determinati nel passo precedente onde trasferire informazione da Dv a Du, tenendo conto di quella disponibile per F. Le stime locali di tipo $C^{0,1}$ si utilizzano di nuovo per ottenere un *surrogato locale* della formula di rappresentazione valida nel caso lineare.
- Si conclude usando il lemma di ricoprimento di Vitali, integrando sugli insiemi di livello di Du e F e infine scegliendo M opportunamente grande per operare dei necessari riassorbimenti nelle disuguaglianze.

In questo caso si evita l'uso di ogni strumento di Analisi Armonica; in realtà, gli argomenti di ricoprimento utilizzati sono gli stessi alla base della dimostrazione delle formule di limitazione valide sia per integrali singolari che per operatori massimali: essi vengono applicati adesso direttamente all'equazione, permettendo di usare cilindri la cui forma cambia al variare dell'insieme di livello considerato. Inoltre, l'uso delle cosiddette "good-λ inequality", tipiche dei contesti in cui vengono impiegati operatori massimali, viene rimpiazzato localmente con la decomposizione simultanea a due livelli di Du e F tramite il parametro M.

I metodi introdotti in [2] permettono di dare una dimostrazione più elementare di tutti i risultati ellittici precedentemente esposti. Inoltre, si può ottenere

- Una dimostrazione della stima *a priori* $\|Du\|_{L^q} \lesssim \|F\|_{L^q}$ quando $q > 1$ per soluzioni di $\triangle u = \operatorname{div} F$, che usa soltanto *il lemma di ricoprimento di Vitali e il principio della media per funzioni armoniche*.

- Una dimostrazione dei Teoremi 4.1-4.3 che utilizza soltanto la teoria della regolarità per equazioni ellittiche ma non strumenti di Analisi Armonica quali, ad esempio, gli operatori massimali.
- Una dimostrazione diretta e alternativa del teorema originale di Calderón & Zygmund che non fa uso dei classici teoremi di interpolazione e neanche della classica decomposizione di Calderón-Zygmund, come fatto vedere in [88].
- Dimostrazioni di maggiore integrabilità fino al bordo per sistemi ellittici e parabolici in domini con bordo fortemente irregolare [15].

OSSERVAZIONE 4.1 (Equazioni totalmente non lineari). – Un caso non lineare importante, che non ricade in quello delle equazioni quasilineari in forma divergenza trattate sopra, è quello delle equazioni totalmente non lineari del tipo

$$F(D^2u) = \mu\,. \tag{4.9}$$

Una teoria di tipo Calderòn-Zygmund per tali problemi è dovuta a Caffarelli [18, 17], e permette di ottenere implicazioni del tipo

$$\mu \in L^q \Longrightarrow D^2u \in L^q \qquad \text{per ogni } q \geq n\,.$$

La limitazione dal basso su q è sostanzialmente ottimale (si veda [35]) ed risulta essere legata all'applicabilità del principio di Aleksandrof-Bakelman-Pucci. Osserviamo che le equazioni del tipo in (4.9) sono ovviamente più generali di quelle quasilineari, ma non coprono il caso degenere in quanto l'ipotesi di ellitticità considerata è del tipo

$$F(A+B) - F(A) \geq \nu|A|^2 \qquad \text{per ogni scelta di } A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con } B \geq 0$$

dove $\nu > 0$, e in questo senso, una volta adottato l'approccio delle soluzioni di viscosità – necessario poiché non è possibile dare a tali equazioni una formulazione debole di sapore distribuzionale – si possono effettuare opportuni procedimenti di linearizzazione via i cosiddetti operatori estremali di Pucci. Le idee esposte da Caffarelli in [18], ancora basate sull'uso degli operatori massimali, sono poi state trasportate da Caffarelli & Peral [19] nel contesto quasilineare degenere dove hanno dato luogo a dimostrazioni alternative ed estensioni dei Teoremi 4.1-4.3 (si veda per esempio [1, 16]).

4.2 – *Stime sotto l'esponente naturale e un primo caso sottoduale*

In questa sezione cominciamo a interessarci a qualche caso in cui il dato H dell'equazione (3.1) non appartiene al duale di $W^{1,p}$, e riportiamo anche qualche importante problema aperto la cui natura sembra legata a parecchie e svariate questioni rilevanti nell'Analisi moderna. Cominciamo a osservare che il confronto tra il risultato del Teorema 4.1 e la stima (2.15) valida per l'equazione $\triangle u = \operatorname{div} F$

porta a congetturare che il Teorema 4.1 continui a valere anche nel caso $q > p - 1$. Questo risultato è stato congetturato in [46] ed ha connessioni con questioni importanti come la stima della costante ottimale della norma della trasformata di Beurling-Ahlfors [44]. Una congettura legata a questo problema, e ancora riportata in [46, Conjecture 1], afferma che se $u \in W^{1,q}$ è una soluzione molto debole di $\triangle_p u = 0$ con $q > p - 1$, allora essa appartiene anche a $W^{1,p}$, ed è quindi *una usuale soluzione debole ad energia finita*. Fino ad oggi, l'unico progresso che si conosce in questa direzione è contenuto nei lavori di Iwaniec & Sbordone [46] e Lewis [67], e afferma l'esistenza di una quantità positiva ε, dipendente solo dai parametri strutturali n, p, ν, L, *ma altrimenti indipendente dall'equazione e dalla soluzione considerata*, tale che se

$$\operatorname{div} a(Du) = 0 \qquad u \in W^{1,q} \qquad q > p - \varepsilon$$

allora in realtà vale anche $u \in W^{1,p}$; si veda pure un risultato analogo, valido per mappe quasiconformi, ottenuto da T. Iwaniec in [43]. L'analogo parabolico di questo risultato è stato successivamente stabilito da Kinnunnen & Lewis in [53]. Tale questione si lega naturalmente alla risolubilità del problema di Dirichlet quando il dato non è sufficientemente regolare. A questo proposito riportiamo il seguente risultato dovuto a Iwaniec & Sbordone.

TEOREMA 4.5 ([46]). – *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto sufficientemente regolare e $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale soddisfacente le* (3.2). *Allora esiste un numero $\varepsilon > 0$, dipendente solo da n, p, ν, L, tale che il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \operatorname{div} a(Du) = \operatorname{div} (|F|^{p-2}F) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette una soluzione $u \in W^{1,q}_0(\Omega)$ quando $F \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $q \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Inoltre, per una costante c dipendente solo da n, p, ν, L, vale la stima globale

$$\int_\Omega |Du|^q \, dx \le c \int_\Omega |F|^q \, dx \, .$$

La dimostrazione fornita in [46] è molto interessante, e riposa su una profonda proprietà di stabilità per perturbazione non lineare della classica decomposizione di Hodge. Una proprietà, questa, che trova applicazioni in contesti molto diversi (si veda per esempio [45, 47]).

I risultati disponibili nel caso di equazioni generali del tipo (4.1) e che riguardano un dato che non appartiene al duale di $W^{1,p}$ finiscono essenzialmente qui. Molto di più si può dire invece del caso in cui il dato H nell'equazione (3.1) non sia in forma di divergenza. Un caso del genere è quello delle equazioni con dato misura, che andiamo adesso a trattare e a cui dedichiamo la prossima sezione.

5. – Equazioni con dato misura

Le equazioni con un dato misura μ (che da ora in poi prenderemo di Borel e con massa finita) sono un esempio importante di situazione in cui si può costruire una teoria delle soluzioni molto deboli essenzialmente completa dal punto di vista delle stime *a priori*, anche se, come accennato in precedenza, il problema di trovare una classe funzionale in cui risolvere in modo unico problemi di Dirichlet del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(Du) = \mu & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

rimane tutt'ora aperto. Non ci occuperemo in questa sede del problema dell'unicità in quanto siamo essenzialmente interessati a stime *a priori*, ma ci limitiamo a ricordare che di seguito tratteremo solo le cosiddette soluzioni di tipo SOLA (Soluzioni Ottenute da Limiti di Approssimazioni). Implicitamente definite nel fondamentale lavoro di Boccardo & Gallouët in [11], esse sono quelle soluzioni che si possono ottenere come limiti di problemi approssimanti del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(Du_k) = \mu_k & \text{in } \Omega \\ u_k = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

dove per comodità assumiamo che Ω sia un aperto limitato e Lipschitziano. Più precisamente, si definiscono le funzioni $\mu_k \in C^\infty$ (si noti che possiamo sempre assumere, a meno di prolungamenti banali, che la misura μ iniziale sia definita su tutto $\mathbb{R}^n$) come le convoluzioni di μ con opportuni nuclei di convoluzione lisci ϕ_k, e poi si risolve il problema (5.2), trovando, grazie agli usuali metodi di monotonia [66], una soluzione $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Infine, come fatto vedere in [11, 12], si può dimostrare l'esistenza di una funzione $u \in W_0^{1,p-1}(\Omega)$ tale che $u_k \to u$ in $W_0^{1,p-1}(\Omega)$; tale convergenza forte permette di passare al limite nelle equazioni approssimanti e u si rivela essere poi una soluzione, in generale molto debole, del problema (5.1). Da ora in poi noi ci occuperemo solo di queste soluzioni, la cui unicità non è in generale nota se non in situazioni particolari. Un primo caso è quello in cui $\mu \in L^1(\Omega)$. Un secondo caso, forse più interessante, è quando la misura μ si concentra in un punto, più precisamente $\mu = \delta$, dove δ è una delta di Dirac. Consideriamo infatti il problema

$$\begin{cases} -\triangle_p u = \delta & \text{in } B(0,1) \\ u = 0 & \text{on } \partial B(0,1)\,, \end{cases} \tag{5.3}$$

con δ che si concentra nell'origine. Usando in modo opportuno il principio di massimo e i risultati contenuti in [80] e in [49] si può allora dimostrare che la

cosiddetta "soluzione fondamentale" (funzione di Green non lineare)

$$G_p(x) := c\begin{cases} \left(|x|^{\frac{p-n}{p-1}} - 1\right) & \text{se} \quad 1<p \neq n \\ \log|x| & \text{se} \quad p = n \end{cases} \tag{5.4}$$

è l'unica SOLA del problema (5.3), per una opportuna costante c dipendente solo da n e p. Si noti come nel caso $p = 2$ la precedente funzione $G_p(\,\cdot\,)$ coincida con quella definita in (2.5). Questo fatto è molto rilevante per quanto andiamo a trattare poiché permette di controllare l'ottimalità dei risultati che andremo a presentare per le SOLA confrontandoli con la regolarità esibita da $G_p(\,\cdot\,)$.

Le fondamenta di una teoria di tipo Calderón-Zygmund per i problemi quasilineari con dato misura sono state essenzialmente gettate da Boccardo & Gallouët in [11, 12], che hanno trattato il caso della *regolarità base*, cioè dell'integrabilità del gradiente. I risultati contenuti in [11, 12] sono stati poi successivamente estesi in varie direzioni e il teorema seguente incorpora ad esempio alcuni dei risultati ottenuti in [9, 31, 36, 39].

TEOREMA 5.1 (Regolarità base per dati misura). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $2 \leq p \leq n$, *ogni SOLA* $u \in W^{1,p-1}_0(\Omega)$ *del problema* (5.1) *è tale che*

$$|Du|^{p-1} \in \mathcal{M}^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)\,.$$

L'ottimalità del risultato del precedente Teorema 5.1 segue dall'analisi della soluzione fondamentale $G_p(\,\cdot\,)$, ma tuttavia riguarda soltanto la sommabilità del gradiente delle soluzioni. D'altra parte l'operatore considerato nel problema è del secondo ordine e sarebbe auspicabile ottenere qualche risultato di maggiore regolarità, come per esempio la differenziabilità del gradiente. Classici controesempi mostrano che in generale $\triangle u \in L^1$ non implica $Du \in W^{1,1}$, ma, come visto nel caso lineare, quando $\triangle u \in L^q$ con $q > 1$ abbiamo $Du \in W^{1,q}$. Pare quindi esserci una distanza da colmare tra questa circostanza e il fatto che nel caso dei dati misura il Teorema 5.1 possa fornire l'unico dato di regolarità disponibile per equazioni non lineari. Infatti, quando si passa da $\triangle u \in L^q$ a $\triangle u \in L^1$, qualcosa, e anzi, molto, rimane e per descrivere i risultati disponibili dobbiamo richiamare la definizione di spazio di Sobolev frazionario.

DEFINIZIONE 5.1. – *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme aperto e* $k \geq 1$, $\sigma \in (0,1)$, $q \in [1,\infty)$*; lo spazio di Sobolev frazionario* $W^{\sigma,q}(A,\mathbb{R}^k)$ *si definisce come il sottinsieme delle funzioni* $w \in L^q(A,\mathbb{R}^k)$ *tali che la seguente norma di Gagliardo risulta finita*

$$\|w\|_{W^{\sigma,q}(A)} := \left(\int_A |w|^q\,dx\right)^{1/q} + \left(\int_A\int_A \frac{|w(x)-w(y)|^q}{|x-y|^{n+\sigma q}}\,dx\,dy\right)^{1/q}.$$

Gli spazi di Sobolev frazionari giocano un ruolo molto importante nell'Analisi contemporanea e per una panoramica si veda ad esempio [30]; essi sono stati recentemente usati da Kristensen e dall'autore per stabilire stime sulla dimensione di Hausdorff dell'insieme singolare delle soluzioni di problemi vettoriali [56, 57, 73].

Il prossimo risultato stabilisce che, malgrado non si possa dimostrare che $Du \in W^{1,1}$ (quando $p = 2$), si può ancora ottenere ogni derivata frazionaria del gradiente prima di quella di ordine uno.

TEOREMA 5.2 (Regolarità superiore per dati misura [70]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $2 \le p \le n$, *ogni SOLA* $u \in W_0^{1,p-1}(\Omega)$ *del problema* (5.1) *soddisfa*

$$Du \in W_{\mathrm{loc}}^{\frac{1-\varepsilon}{p-1},p-1}(\Omega, \mathbb{R}^n) \qquad \textit{per ogni} \quad \varepsilon > 0\,. \tag{5.5}$$

In particolare, quando $p = 2$ *si ha*

$$Du \in W_{\mathrm{loc}}^{1-\varepsilon,1}(\Omega, \mathbb{R}^n) \qquad \textit{per ogni} \quad \varepsilon > 0\,.$$

L'ottimalità della (5.5) segue ancora dall'analisi della soluzione fondamentale $G_p(\,\cdot\,)$, che esibisce appunto la regolarità descritta in (5.5). Il modo più rapido di osservare questo fatto viene dall'uso delle proprietà di immersione degli spazi frazionari:

$$W_{\mathrm{loc}}^{\sigma,q} \hookrightarrow L_{\mathrm{loc}}^{nq/(n-\sigma q)} \qquad \text{quando } \sigma q < n$$

per le quali rimandiamo a [6]. Se allora la (5.5) valesse per $\varepsilon = 0$ avremmo anche che $|Du|^{p-1} \in L_{\mathrm{loc}}^{n/(n-1)}$, che invece non vale per la funzione di Green $G_p(\,\cdot\,)$ descritta in (5.4).

Osserviamo infine che il caso $p \le n$ è stato considerato per ridurci al caso in cui il dato (in questo caso la misura μ) non appartenesse al duale di $W_0^{1,p}$; per il caso $p > n$ si rimanda a [70] e per quello in cui $p < 2$ a [74].

6. – "Torniamo ai classici" - Stime puntuali

In quest'ultima parte ci occupiamo di un'estensione più radicale della classica teoria di Calderón-Zygmund lineare; faremo vedere come le stime puntuali (2.20), apparentemente legate alla specifica struttura lineare dell'equazione di Poisson, ammettano in realtà una controparte non lineare naturale valida per equazioni del tipo

$$-\operatorname{div} a(Du) = \mu\,. \tag{6.1}$$

Per semplicità, anche in questa sezione ci limiteremo a considerare il caso $p \ge 2$. Ancora per comodità di esposizione considereremo il caso di stime *a priori*, cioè

valide per soluzioni a priori supposte più regolari – C^0, C^1 ecc. – ma che non dipendono in modo quantitativo da tale regolarità. Tutto questo non è restrittivo poiché, come noto, i risultati per soluzioni generali seguono tramite gli usuali procedimenti di approssimazione con soluzioni più regolari.

Prima di cominciare, siccome in quanto segue considereremo anche problemi su domini limitati, ci serve un'opportuna versione localizzata dei potenziali di Riesz. Considereremo quindi i potenziali troncati

$$\boldsymbol{I}_\beta^\mu(x,R) := \int_0^R \frac{\mu(B(x,\rho))}{\rho^{n-\beta}}\,\frac{d\rho}{\rho}\,,$$

osservando che $\boldsymbol{I}_\beta^\mu(x,R) \lesssim I_\beta(\mu)(x)$ quando μ è una misura non negativa. Si vede facilmente, con un semplice argomento di riscalamento, che quando $p > 2$ le stime (2.20) non possono essere vere. Consideriamo infatti una soluzione non nulla di $-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \mu$, ponendo $\tilde{u} = c^{1/(p-1)}u$ e $\tilde{\mu} = c\mu$ con $c > 0$, si ottiene $-\operatorname{div}(|D\tilde{u}|^{p-2}D\tilde{u}) = \tilde{\mu}$; se allora la prima delle (2.20) fosse vera, avremmo, applicandola a $\tilde{u}$, che $u(x) \le c^{(p-2)/(p-1)} I_1(\mu)(x)$ da cui, passando $c \to 0$, avremmo ancora $u \equiv 0$. Nel caso non lineare entra allora in gioco un altro tipo di potenziale, che incorpora l'informazione sull'esponente di riscalamento del problema, cioè $1/(p-1)$, e che diventa come tale un potenziale non lineare.

DEFINIZIONE 6.1. – *Sia μ una misura di Borel definita su $\mathbb{R}^n$; il potenziale di Wolff $\boldsymbol{W}_{\beta,p}^\mu$ si definisce come*

$$\boldsymbol{W}_{\beta,p}^\mu(x,R) := \int_0^R \left(\frac{|\mu|(B(x,\rho))}{\rho^{n-\beta p}}\right)^{1/(p-1)} \frac{d\rho}{\rho}\,, \qquad \beta \in (0, n/p]$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < R \le \infty$.

I potenziali di Wolff sono stati per la prima volta studiati nel fondamentale lavoro di Havin & Maz'ya [40] e successivamente in [5] e [41]. Nel caso $p = 2$ essi coincidono ovviamente con i potenziali di Riesz, mentre nel caso $p > 2 - 1/n$ (e quindi quello che ci interessa poiché qui ci siamo limitati al caso $p \ge 2$) la crescita dei potenziali di Wolff può essere descritta puntualmente tramite i potenziali di Riesz:

$$\boldsymbol{W}_{\beta,p}^\mu(x,\infty) \lesssim I_\beta\big\{[I_\beta(|\mu|)]^{1/(p-1)}\big\}(x) =: \boldsymbol{V}_{\beta,p}(|\mu|)(x)\,.$$

Questo fatto di base è stato dimostrato in [40] e infatti la quantità $\boldsymbol{V}_{\beta,p}$ definisce un altro potenziale non lineare che viene usualmente chiamato in letteratura potenziale di Havin-Maz'ya (si veda [23]).

Kilpeläinen & Malý [51, 52] sono stati i primi a dimostrare la possibilità di estendere la prima stima in (2.20) a soluzioni di equazioni non lineari possibilmente degeneri.

TEOREMA 6.1. – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $2 \le p \le n$, *sia* $u \in C^0(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ *una soluzione debole dell'equazione* (6.1), *dove* μ *è una misura di Borel di massa finita. Esiste una costante* $c \equiv c(n,p,\nu,L) > 0$ *tale che per ogni palla* $B(x,R) \subseteq \Omega$ *vale la stima puntuale*

$$|u(x)| \le c\boldsymbol{W}^{\mu}_{1,p}(x,R) + c \fint_{B(x,R)} (|u| + Rs)\, dy\,. \tag{6.2}$$

Per vari approcci al precedente risultato si veda [51, 52, 86, 55, 32]. Si noti inoltre come per $p = 2$ risulti $\boldsymbol{W}^{\mu}_{1,p} \equiv \boldsymbol{I}_2^{|\mu|}$ e quindi la prima stima nella (2.20), per problemi definiti in $\mathbb{R}^n$ e per soluzioni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segua dalla (6.2) passando $R \to \infty$. La stima (6.2) risulta di fondamentale importanza in varie questioni che riguardano la regolarità fine delle soluzioni di equazioni quasilineari: gli stessi Kilpeläinen & Malý l'hanno usata per dimostrare la necessità del criterio di Wiener per equazioni generali (la sua sufficienza era stata dimostrata da Maz'ya molti anni prima in [69]); ulteriori applicazioni si trovano per esempio nei lavori di Phuc & Verbitsky [75, 76]. Si noti come il Teorema 6.1, data la nonlinearità del contesto, sia completamente non banale già nel caso $p = 2$.

La questione delle stime potenziali per il gradiente è stata affrontata per la prima volta in [72], dove è stato trattato il caso $p = 2$ descritto nel

TEOREMA 6.2 ([72]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $p = 2$, *sia* $u \in C^1(\Omega)$ *una soluzione distribuzionale dell'equazione* (6.1), *dove* μ *è una misura di Borel di massa finita. Allora esiste una costante* c *dipendente solo da* n, ν, L *tale che la stima puntuale*

$$|D_\xi u(x)| \le c\boldsymbol{I}_1^{|\mu|}(x,R) + c \fint_{B(x,R)} |D_\xi u|\, dy$$

vale per ogni scelta della componente del gradiente $\xi \in \{1,\dots,n\}$ *e per ogni palla* $B(x,R) \subseteq \Omega$.

L'estensione del precedente risultato a contesti degeneri si è realizzata attraverso diversi passi successivi. Ad una prima occhiata, si potrebbe pensare che i potenziali di Wolff giochino un ruolo decisivo anche per quanto riguarda le stime gradiente. In effetti il primo risultato per equazioni degeneri ($p > 2$) è stato ottenuto in [32] dove è stata dimostrata la seguente disuguaglianza puntuale

$$|Du(x)| \lesssim \boldsymbol{W}^{\mu}_{1/p,p}(x,R) + \fint_{B(x,R)} (|Du| + s)\, dy \tag{6.3}$$

valida per ogni palla $B(x,R) \subseteq \Omega$. Ancora una volta, quando $p = 2$, la precedente stima costituisce una versione locale della stima gradiente lineare che appare in (2.20) e si ricollega a quella del Teorema 6.2. Inoltre, quando $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ allora

la seconda stima in (2.20) segue dalla (6.3) per $p = 2$ (mandando $R \to \infty$). La stima (6.3) si rivela ottimale in molte situazioni, come per esempio nel caso fondamentale in cui μ è una misura di Dirac che si concentra in un punto x_0. In questo caso, prendendo $x \neq x_0$ in (6.3) abbiamo che primo e secondo membro si equivalgono (si veda [32, Remark 6.2]). Ciononostante, la stima (6.3) non è ancora quanto di meglio si possa fare e, come vedremo tra poche righe, piuttosto inaspettatamente anche nel caso degenere i potenziali lineari di Riesz tornano a giocare un ruolo fondamentale.

Esaminiamo quindi l'equazione

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \mu \tag{6.4}$$

da un altro punto di vista, osservando come questa si possa ovviamente leggere come un'equazione non lineare nel gradiente, ma anche come *un'equazione lineare nel campo vettoriale non lineare del gradiente* $|Du|^{p-2}Du$. Decomponiamola allora nel sistema

$$-\operatorname{div} v = \mu\,, \qquad v = |Du|^{p-2}Du\,. \tag{6.5}$$

Adesso, è noto che la prima equazione nella riga precedente si può risolvere usando potenziali di tipo Riesz; tuttavia, la risolubilità non è univoca [14], in altre parole, non abbiamo la sicurezza che la soluzione trovata sia della forma richiesta nella (6.5). Immaginiamo per un attimo che la (6.5) sia vera, allora invertendo formalmente $\operatorname{div} v = \mu$ via potenziali di Riesz possiamo immaginare la validità di una stima del tipo $|v| = |Du|^{p-1} \lesssim I_1(\mu)(x)$. Questo ragionamento euristico è assai coraggioso, poiché usa implicitamente ragionamenti che, benché dimensionalmente corretti, fanno perno su risultati che sono in generale falsi. Tuttavia le cose si ricombinano per il meglio e l'aspetto dimensionale risulta prevalere; piuttosto sorprendentemente vale infatti il

TEOREMA 6.3 ([63, 64]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con* $p \geq 2$, *sia* $u \in C^1(\Omega)$ *una soluzione distribuzionale dell'equazione* (6.1), *dove* μ *è una misura di Borel di massa finita definita su* Ω. *Allora esiste una costante* c, *dipendente solo da* n, p, ν, L, *tale che la stima puntuale*

$$|Du(x)|^{p-1} \leq c\boldsymbol{I}_1^{|\mu|}(x,R) + c\left(\fint_{B(x,R)} (|Du| + s)\,dy\right)^{p-1}$$

vale per ogni palla $B(x,R) \subseteq \Omega$.

Si ottiene quindi il

COROLLARIO 6.1. – *Sia* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *una soluzione distribuzionale dell'equazione* (6.4) *dove* μ *è una misura di Borel di massa finita definita su* $\mathbb{R}^n$.

Allora la seguente stima puntuale vale per una costante dipendente solo da n e p, e per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$|Du(x)|^{p-1} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d|\mu|(y)}{|x-y|^{n-1}} \, .$$

Osserviamo che la stima del Teorema 6.3 estende quella in (6.3) poiché si ha

$$\boldsymbol{I}_1^{|\mu|}(x,R) \lesssim \left[\boldsymbol{W}^{\mu}_{1/p,p}(x,2R)\right]^{p-1} \qquad \text{quando } p \geq 2 \, .$$

Il fatto sorprendente, nel Teorema 6.3 e nel Corollario 6.1, è che la stima puntuale gradiente è adesso costruita con un *potenziale lineare* che, come tale, non dipende da p. In altre parole, dal punto di vista delle stime gradiente non si rilevano differenze tra il Laplaciano e il p-Laplaciano. Se vogliamo, dato il carattere degenere del p-Laplaciano, è ancora più sorprendente rilevare che tale analogia di comportamento si estende fino alla regolarità di classe C^1, come descritto nel seguente

TEOREMA 6.4 ([63, 64]). – *Nelle ipotesi* (3.2) *con $p \geq 2$, sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una soluzione distribuzionale dell'equazione* (6.1), *dove μ è una misura di Borel di massa finita definita su Ω. Se*

$$\lim_{R \to 0} \boldsymbol{I}_1^{|\mu|}(x,R) = 0 \quad \textit{uniformemente rispetto a } x, \ \textit{localmente in } \Omega \, ,$$

allora il gradiente Du della soluzione è continuo in Ω.

Il Teorema 6.3 ammette svariate applicazioni ed anche una versione per equazioni a coefficienti misurabili per la quale rimandiamo a [71] (si veda anche [74, Theorem 6.1] e [28]) ed estensioni a casi intermedi [58, 59]. Esso implica e migliora tutti i risultati noti di regolarità del gradiente per l'equazione modello (6.4) in spazi invarianti per riordinamento. Inoltre, alcuni casi limite di difficile raggiungibilità con le tecniche note, possono essere ottenuti adesso come corollario insieme ai risultati già acquisiti.

Le stime del gradiente via potenziali riportate in questa sezione ammettono un analogo parabolico, per il quale rimandiamo a [60, 61, 62, 29, 7, 8]. Per il caso sottoquadratico $2 - 1/n < p \leq 2$ rimandiamo invece a [33].

Ringraziamenti. – Le ricerche dell'autore sono realizzate con il supporto dell'ERC grant 207573 "Vectorial problems". Sentiti ringraziamenti vanno a Serena Nono per il suo particolare contribuito alla buona riuscita della conferenza generale tenuta al Congresso UMI. Ulteriori ringraziamenti vanno ad Agnese Di Castro e Giampiero Palatucci per le osservazioni su una versione preliminare del lavoro.

REFERENCES

[1] E. Acerbi - G. Mingione, *Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacean system*. J. Reine Ang. Math. (Crelles J.), **584** (2005), 117-148.

[2] E. Acerbi - G. Mingione, *Gradient estimates for a class of parabolic systems*. Duke Math. J. **136** (2007), 285-320.

[3] D. R. Adams, *A note on Riesz potentials*. Duke Math. J. **42** (1975), 765-778.

[4] D. R. Adams - L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 314. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[5] D. R. Adams - N. G. Meyers, *Thinnes and Wiener criteria for nonlinear potentials*. Indiana Univ. Math. J. **22** (1972/73), 169-197.

[6] R. A. Adams - J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces. Second edition.* Pure and Appl. Math. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[7] P. Baroni - J. Habermann, *Calderón-Zygmund estimates for parabolic measure data problems*. J. Diff. Equ. **252** (2012), 412-447.

[8] P. Baroni - J. Habermann, *New gradient estimates for parabolic equations*. Houston J. Math., in stampa.

[9] P. Bénilan - L. Boccardo - T. Gallouët - R. Gariepy - M. Pierre - J. L. Vázquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV), **22** (1995), 241-273.

[10] L. Boccardo, *Problemi differenziali ellittici e parabolici con dati misure*. Boll. UMI A (VII), **11** (1997), 439-461.

[11] L. Boccardo - T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*. J. Funct. Anal. **87** (1989), 149-169.

[12] L. Boccardo - T. Gallouët, *Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures*. Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), 641-655.

[13] V. Bögelein - F. Duzaar - G. Mingione, *Degenerate problems with irregular obstacles*. J. Reine Angew. Math. (Crelles J.), **650** (2011), 107-160.

[14] J. Bourgain - H. Brezis, *On the equation* $\operatorname{div} Y = f$ *application to control of phases*. J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 393-426.

[15] S. S. Byun - L. Wang, *Gradient estimates for elliptic systems in non-smooth domains*. Math. Ann. **341** (2008), 629-650.

[16] S. S. Byun - L. Wang - S. Zhou, *Nonlinear elliptic equations with* BMO *coefficients in Reifenberg domains*. J. Funct. Anal. **250** (2007), 167-196.

[17] L. Caffarelli, *Elliptic second order equations*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **58** (1988), 253-284.

[18] L. Caffarelli, *Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations*. Ann. of Math. (II), **130** (1989), 189-213.

[19] L. Caffarelli - I. Peral, *On $W^{1,p}$ estimates for elliptic equations in divergence form*. Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), 1-21.

[20] A. P. Calderón - A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*. Acta Math. **88** (1952), 85-139.

[21] A. P. Calderón - A. Zygmund, *On singular integrals*. Amer. J. Math. **78** (1956), 289-309.

[22] S. Campanato - G. Stampacchia, *Sulle maggiorazioni in L^p nella teoria delle equazioni ellittiche*. Boll. UMI (III), **20** (1965), 393-399.

[23] A. Cianchi, *Nonlinear potentials, local solutions to elliptic equations and rearrangements*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (V), **10** (2011), 335-361.

[24] G. Dal Maso - F. Murat - L. Orsina - A. Prignet, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV), **28** (1999), 741-808.

[25] E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993.
[26] E. DiBenedetto - J. J. Manfredi, *On the higher integrability of the gradient of weak solutions of certain degenerate elliptic systems*. Amer. J. Math. **115** (1993), 1107-1134.
[27] A. Di Castro, *Anisotropic elliptic problems with natural growth terms*. Manuscripta Math. **135** (2011), 521-543.
[28] A. Di Castro - G. Palatucci, *Measure data problems, lower order terms and interpolation effects*. Ann. Mat. Pura Appl. (IV) DOI: 10.1007/s10231-012-0277-7.
[29] A. Di Castro - G. Palatucci, *Nonlinear parabolic problems with lower order terms and related integral estimates*. Nonlinear Anal. **75** (2012), 4177-4197.
[30] E. Di Nezza - G. Palatucci - E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*. Bull. Sci. math., in stampa.
[31] G. Dolzmann - N. Hungerbühler - S. Müller, *Uniqueness and maximal regularity for nonlinear elliptic systems of n-Laplace type with measure valued right hand side*. J. Reine Angew. Math. (Crelles J.), **520** (2000), 1-35.
[32] F. Duzaar - G. Mingione, *Gradient estimates via non-linear potentials*. Amer. J. Math. **133** (2011), 1093-1149.
[33] F. Duzaar - G. Mingione, *Gradient estimates via linear and nonlinear potentials*. J. Funct. Anal. **259** (2010), 2961-2998.
[34] F. Duzaar - G. Mingione - K. Steffen, *Parabolic systems with polynomial growth and regularity*. Mem. Amer. Math. Soc. **214**, no. 1005 (2011), 128.
[35] L. Escauriaza, *$W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully nonlinear equations*. Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 413-423.
[36] M. Fuchs - J. Reuling, *Non-linear elliptic systems involving measure data*. Rend. Mat. Appl. (7), **15** (1995), 311-319.
[37] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* Annals of Mathematics Studies, 105. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
[38] E. Giusti, *Direct methods in the calculus of variations.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.
[39] L. Greco - T. Iwaniec - C. Sbordone, *Inverting the p-harmonic operator*. Manuscripta Math. **92** (1997), 249-258.
[40] M. Havin - V. G. Maz'ya, *A nonlinear potential theory*. Russ. Math. Surveys, **27** (1972), 71-148.
[41] L. I. Hedberg - T. Wolff, *Thin sets in nonlinear potential theory*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **33** (1983), 161-187.
[42] T. Iwaniec, *Projections onto gradient fields and L^p-estimates for degenerated elliptic operators*. Studia Math. **75** (1983), 293-312.
[43] T. Iwaniec, *p-harmonic tensors and quasiregular mappings*. Ann. Math. (II), **136** (1992), 589-624.
[44] T. Iwaniec, *Nonlinear Cauchy-Riemann operators in $\mathbb{R}^n$*. Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 1961-1995.
[45] T. Iwaniec - C. Sbordone, *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses*. Arch. Ration. Mech. Anal. **119** (1992), 129-143.
[46] T. Iwaniec - C. Sbordone, *Weak minima of variational integrals*. J. Reine Angew. Math. (Crelle J.), **454** (1994), 143-161.
[47] T. Iwaniec - C. Sbordone, *Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients*. J. Anal. Math. **74** (1998), 183-212.
[48] F. John - L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*. Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415-426.

[49] S. Kichenassamy - L. Verón, *Singular solutions to the p-Laplace equation*. Math. Ann. **275** (1986), 599-615.
[50] T. Kilpeläinen - T. Kuusi - A. Tuhola-Kujanpää, *Superharmonic functions are locally renormalized solutions*. Ann. Inst. H. Poincarè, Anal. Non Lin., **28** (2011), 775-795.
[51] T. Kilpeläinen - J. Malý, *Degenerate elliptic equations with measure data and nonlinear potentials*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV), **19** (1992), 591-613.
[52] T. Kilpeläinen - J. Malý, *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations*. Acta Math. **172** (1994), 137-161.
[53] J. Kinnunen - J. L. Lewis, *Very weak solutions of parabolic systems of p-Laplacian type*. Ark. Mat. **40** (2002), 105-132.
[54] J. Kinnunen - S. Zhou, *A local estimate for nonlinear equations with discontinuous coefficients*. Comm. Partial Differential Equations, **24** (1999), 2043-2068.
[55] R. Korte - T. Kuusi, *A note on the Wolff potential estimate for solutions to elliptic equations involving measures*. Adv. Calc. Var. **3** (2010), 99-113.
[56] J. Kristensen - G. Mingione, *The singular set of minima of integral functionals*. Arch. Ration. Mech. Anal. **180** (2006), 331-398.
[57] J. Kristensen - G. Mingione, *Boundary regularity in variational problems*. Arch. Ration. Mech. Anal. **198** (2010), 369-455.
[58] T. Kuusi - G. Mingione, *Universal potential estimates*. J. Funct. Anal. **262** (2012), 4205-4269.
[59] T. Kuusi - G. Mingione, *Endpoint and intermediate potential estimates for nonlinear equations*. Boll. UMI (IX), **4** (2011), 149-157.
[60] T. Kuusi - G. Mingione, *Nonlinear potential estimates in parabolic problems*. Rendiconti Lincei, Matematica e Applicazioni, **22** (2011), 161-174.
[61] T. Kuusi - G. Mingione, *The Wolff gradient bound for degenerate parabolic equations*. J. Europ. Math. Soc., in stampa.
[62] T. Kuusi - G. Mingione, *Gradient regularity for nonlinear parabolic equations*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (V), in stampa.
[63] T. Kuusi - G. Mingione, *Linear potentials in nonlinear potential theory*. Arch. Rat. Mech. Anal. **207** (2013), 215-246.
[64] T. Kuusi - G. Mingione, *A surprising linear type estimate for nonlinear elliptic equations*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **349** (2011), 889-892.
[65] O. A. Ladyzhenskaya - N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations.* Academic Press, New York-London 1968.
[66] J. Leray - J.-L. Lions, *Quelques résulatats de Vi\v sik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder*. Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 97-107.
[67] J. L. Lewis, *On very weak solutions of certain elliptic systems*. Comm. Partial Differential Equations, **18** (1993), 1515-1537.
[68] P. Lindqvist, *On the definition and properties of p-superharmonic functions*. J. Reine Angew. Math. (Crelles J.), **365** (1986), 67-79.
[69] V. Maz'ya, *The continuity at a boundary point of the solutions of quasi-linear elliptic equations. (Russian)*, Vestnik Leningrad. Univ. **25** (1970), 42-55.
[70] G. Mingione, *The Calderón-Zygmund theory for elliptic problems with measure data*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (V), **6** (2007), 195-261.
[71] G. Mingione, *Gradient estimates below the duality exponent*. Math. Ann. **346** (2010), 571-627.
[72] G. Mingione, *Gradient potential estimates*. J. Europ. Math. Soc. **13** (2011), 459-486.

[73] G. Mingione, *Regularity of minima: an invitation to the Dark Side of the Calculus of Variations*. Applications of Mathematics, **51** (2006), 355-425.
[74] G. Mingione, *Nonlinear measure data problems*. Milan J. Math. **79** (2011), 429-496.
[75] N. C. Phuc - I. E. Verbitsky, *Quasilinear and Hessian equations of Lane-Emden type*. Ann. of Math. (II), **168** (2008), 859-914.
[76] N. C. Phuc - I. E. Verbitsky, *Singular quasilinear and Hessian equations and inequalities*. J. Funct. Anal. **256** (2009), 1875-1906.
[77] T. Rivière, *The role of conservation laws in the analysis of conformally invariant problems*. In Topics in modern regularity theory (G. Mingione ed.). Sc. Normale Superiore 2012.
[78] C. Scheven, *Non-linear Calderón-Zygmund theory for parabolic systems with subquadratic growth*. J. Evol. Equ. **10** (2010), 597-622.
[79] J. Serrin, *Pathological solutions of elliptic differential equations*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (III), **18** (1964), 385-387.
[80] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*. Acta Math. **111** (1964), 247-302.
[81] G. Stampacchia, *The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (III), **19** (1965), 443-462.
[82] G. Stampacchia, *$\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$-spaces and interpolation*. Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 293-306.
[83] E. M. Stein - G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton Math. Ser., 32. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1971.
[84] V. Šverák - X. Yan, *Non-Lipschitz minimizers of smooth uniformly convex functionals*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **99/24** (2002), 15269-15276.
[85] G. Talenti, *Elliptic equations and rearrangements*. Ann Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV), **3** (1976), 697-717.
[86] N. S. Trudinger - X. J. Wang, *On the weak continuity of elliptic operators and applications to potential theory*. Amer. J. Math. **124** (2002), 369-410.
[87] K. Uhlenbeck, *Regularity for a class of nonlinear elliptic systems*. Acta Math. **138** (1977), 219-240.
[88] F. Yao, *A new approach to L^p estimates for Calderón-Zygmund type singular integrals*. Arch. Math. (Basel), **92** (2009), 137-146.

Dipartimento di Matematica, Università di Parma
Viale G. P. Usberti 53/a, Campus, 43100 Parma, Italy
E-mail: giuseppe.mingione@unipr.it.

Received January 14, 2012 and accepted March 3, 2012

Errico Presutti: Transizioni di fase, trasformazioni di scala e strutture spaziali

Errico Presutti
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"
email: presutti@mat.uniroma2.it

Sunto

In particolari condizioni esterne una medesima sostanza può apparire in fasi diverse, per esempio raffreddandolo un gas può trasformarsi in liquido e con un ulteriore abbassamento della temperatura diventare solido: la sostanza è la stessa ma appare in forme drasticamente diverse. La spiegazione del fenomeno nell'ambito di una trattazione matematicamente rigorosa è stato ed è uno degli obiettivi principali della meccanica statistica.

Tratterò una forma speciale di transizioni di fase, descritte da "un parametro d'ordine" che nei casi che considero è la densità di massa ρ. La transizione di fase si manifesta allora con l'esistenza di un "intervallo proibito" (ρ', ρ''). Se confiniamo in una regione Λ una massa $\rho|\Lambda|$, $\rho \in (\rho', \rho'')$, vedremo il fluido "separarsi": in un sottoinsieme di Λ avrà una densità ρ', nel complemento una densità ρ'', in modo che la densità totale sia quella assegnata, cioè ρ.

Per quali forze inter-molecolari si ha questa separazione di fasi? e in quali forme geometriche avviene? cosa accade all'interfaccia? Sono tutte domande naturali con ovvie, importanti implicazioni sia di natura applicativa che teorica e di fondamento e a cui la meccanica statistica ha saputo dare risposte, ancorché solo parziali.

La matematica coinvolta in questi studi è altrettanto interessante. Questioni di probabilità e statistica appaiono in modo naturale, ma un ruolo fondamentale ha anche il calcolo delle variazioni con la teoria geometrica della misura e le PDE come cercherò di sottolineare durante la conferenza che penso di organizzare nel modo seguente.

Inizierò trattando il caso di transizioni di fase a temperatura zero. Parlerò poi di misure di Gibbs accennando alla teoria di van der Waals per poi passare alla versione proposta da Kac. Questo porterà all'introduzione di trasformazioni di scala, a potenziali di Kac multi-scala e alla possibilità di formazione di strutture spaziali complesse.

Intervento: E. Presutti,
Microstructures and Phase Transitions,
***Bollettino U. M. I. (9)* V (2012), 655–688**

Bollettino U. M. I.
(9) **V** (2012), 655-688

Microstructures and Phase Transitions (*)

E. Presutti

Abstract. – *This is a short survey on some recent developments in the theory of phase transitions and microstructures in a mathematically rigorous context. The issue is discussed at the microscopic, mesoscopic and macroscopic levels recalling the most used mathematical techniques, mainly from probability theory and variational calculus.*

1. – Introduction

I have been working in the last years on some problems related to phase transitions and microstructures and I will try in these notes to give an idea of the state of the art in this field at least from my very personal perspective.

Maybe the best way to introduce the issues is by discussing some simple examples. The "microstructures" mentioned in the title refer to phenomena where the competition between forces acting on very different scales gives rise to "fast oscillations", microstructures. The following example is borrowed from lectures by Stefan Müller on elasticity, it explains the issue very nicely. The problem is to minimize the functional

$$F(u) = \int_0^1 \left\{ \left(\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 1 \right)^2 + u^2 \right\} dx \tag{1.1}$$

$F(u)$ describes a competition between $\dfrac{du}{dx}$ which wants to be equal to ± 1 and u^2 which instead wants $u = 0$. The two requests are obviously incompatible but a good compromise can be reached because the two "act on very different scales", the integral of u^2 is on "scale 1" the derivative instead depends on the "infinitesimal variations" of u. This can be exploited by taking functions u which are always close to 0 but have derivative equal to ± 1, as for instance a function u which oscillates between $-\varepsilon$ and $+\varepsilon$ with slopes ± 1. The inf of $F(u)$ on such functions is 0 (by letting $\varepsilon \to 0$), thus F has infimum equal to 0 and no minimum.

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 17 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

The infimum is described by minimizing sequences as those introduced above which are examples of microstructures, in this case the oscillations do not have a definite scale as they become infinitely fast (as $\varepsilon \to 0$).

The other main issue in these lectures is about phase transitions. This is one of the most significant achievements of modern science which settles an old philosophical dispute: gas, liquid and solid are only accidental attributes of matter, a same substance (same atoms and molecules) may appear in the solid liquid or vapor phase by changing the external conditions; you may change dress but you are still the same person.

I will restrict to a very special class of phase transitions, technically "phase transitions of first order with order parameter the [mass] density". This simply means that there is a "forbidden interval" of densities, say (ρ', ρ''), so that if we put a mass $\rho|\Lambda|$ of fluid in the region Λ ($|\Lambda|$ the volume of Λ) with $\rho \in (\rho', \rho'')$, ("canonical constraint"), then the fluid separates into a part with density ρ' and another one with density ρ''. It does not exist an equilibrium state with homogeneous density ρ. (ρ' and ρ'' play the role of the slopes ± 1 in the Müller example). Thus if we "move in Λ" we go from one phase (with density ρ') to another phase (with density ρ''), hence we see a "phase transition".

How fragmented are the phases? In most cases, due to surface tension, the fragmentation is minimal (compatibly with the canonical constraint of a given mass), with many results on the optimal shape of the interface, the so called Wulff shape problems. However there are cases where other forces than surface tension enter into play and it may then happen that the interface "disintegrates" into very many small pieces, this is the microstructures regime.

The existence of a forbidden interval is related to a lack of convexity (at least in all the cases that we shall consider here). Let us examine a simple example which, as before, involves a functional, the Ginzburg-Landau functional. Let Λ be a torus in $\mathbb{R}^d$, u a non negative, smooth function on Λ and

$$F^{\mathrm{gl}}_{\Lambda}(u) = \int_{\Lambda} \{W(u(r)) + |\nabla u(r)|^2\} dr \tag{1.2}$$

$F^{\mathrm{gl}}_{\Lambda}(u)$, the Ginzburg-Landau functional, is interpreted as the free energy of the density profile u. We suppose W a double well, more precisely that W is smooth and that there is an interval (ρ', ρ'') where the convexification W^{**} of W is strictly smaller than W, while elsewhere they are equal to each other. As we shall see (ρ', ρ'') is the forbidden interval in a phase transition.

By thermodynamic principles the equilibrium free energy density is obtained by minimizing the free energy functional in regions so large that surface effects are negligible. We thus postulate that the free energy density $\Phi(\rho)$ when the

mass density is $\rho \in \mathbb{R}_+$ is

$$\Phi(\rho) = \liminf_{|\Lambda|\to\infty} \Phi_\Lambda(\rho), \quad \Phi_\Lambda(\rho) = \inf\left\{ \frac{F^{\mathrm{gl}}_\Lambda(u)}{|\Lambda|} \;\middle|\; \int_\Lambda u = \rho|\Lambda| \right\} \tag{1.3}$$

The free energy $f_\Lambda(s)$ of a homogeneous density profile with density s is

$$f_\Lambda(s) = F^{\mathrm{gl}}_\Lambda(s\mathbf{1}_\Lambda) = |\Lambda| W(s)$$

which is not a convex function of s. If in (1.3) $\rho \in (\rho', \rho'')$ the phase transition picture suggests that the true free energy density is $W(\rho')p + W(\rho'')(1-p)$, p such that $\rho = p\rho' + (1-p)\rho''$, because the parts of the fluid with density ρ' and ρ'' carry a free energy density equal to $W(\rho')$ and respectively $W(\rho'')$, and their volume fractions are p and $1-p$ (as imposed by the mass constraint). Since $W^{**}(\rho) = W(\rho')p + W(\rho'')(1-p)$, consistency of the above requires that:

THEOREM. – $\Phi(\rho) = W^{**}(\rho)$.

PROOF. – See for instance [7], here we just give a sketch.

Lower bound: $F^{\mathrm{gl}}_\Lambda(u) \geq \int_\Lambda W^{**}(u) \geq |\Lambda| W^*(\rho)$. where ρ: $\int_\Lambda u = \rho|\Lambda|$ (to derive the first inequality the gradient term in (1.2) has been dropped and W bounded from below by W^{**}; the last inequality follows from the Jensen inequality as W^{**} is convex).

Upper bound. If $\rho \notin (\rho', \rho'')$ take $u = \rho\mathbf{1}_\Lambda$. If instead $\rho = p\rho' + (1-p)\rho''$, $p \in (0,1)$, construct a minimizing sequence by taking a regularization (with the required mass $\rho|\Lambda|$) of the function $\rho'\mathbf{1}_{\Lambda'} + \rho''\mathbf{1}_{\Lambda''}$ where Λ' is (for instance) a rectangle in Λ and Λ'' its complement (such that $|\Lambda'|/|\Lambda| = p$). □

This suggests that the appearance of a forbidden density interval is caused by the "homogeneous profiles free energy density" developing a concavity, so that free energy decreases by fragmentation. While this is exactly what we have seen in the above example, much less clear is how it translates in atomistic models of fluids. I will try to do that starting in the next section from the analysis of phase transitions at 0 temperature, where the theory is supported by mathematical proofs.

From Section 3 on we study positive temperatures. I will first recall the definition of Gibbs measures (which are postulated to be the equilibrium states in the statistical mechanics theory) and then see what phase transitions should look like in such a context, the conditional tense because a mathematical proof is still lacking and is, in my view, among the most important open problems in statistical mechanics.

A deep insight on phase transitions came from the van der Waals theory of the liquid-vapor transition, and many of its ideas are still actual today. The

van der Waals theory, outlined in Section 3, does not fit into the Gibbs formalism and in the 60's there have been works to derive it from statistical mechanics models. Kac introduced his famous Kac potentials and the analysis was then extended by Lebowitz and Penrose with coarse graining and renormalization group ideas. All that is sketched in Section 4 where it is shown that non local versions of the Ginzburg-Landau functional describe (approximately) the Gibbs measures after coarse graining. This is an important step as it establishes a bridge with continuum theories and opens the way to the use of variational techniques.

In this way the van der Waals theory has been derived from statistical mechanics, but the derivation involves a scaling limit where the range of the interparticles interaction diverges while its strength vanishes (keeping fixed the interaction energy per particle). By taking first the thermodynamic limit (i.e. the domain where the system is confined invades the whole space) and then the above scaling limit, it was proved that the equation of state of the fluid is like in the van der Waals theory. However such an equation of state does not refer to any particle system, it is only the limit of equations of state of particle models and it is not clear whether it is of van der Waals type even before the limit. This has been proved for some special versions of Kac potentials as discussed in Section 5. Variants of the model and conjectures on their behavior are presented in Section 6. In Section 7 we shall briefly discuss interfaces, their optimal shape (the Wulff problem) and the case of microstructures when the interface breaks into many small pieces.

2. – Zero Temperature

We shall consider a system of point particles in $\mathbb{R}^d$, restricting to $d = 2$ because it is significantly simpler than $d = 3$ and yet rich of interesting features. Our analysis will be in the framework of classical mechanics neglecting all quantum effects: they are indeed very relevant at low temperatures and hence we are far from realistic in this section which deals with systems at 0 temperature. Reason is twofold, this is an introductory chapter to phase transitions at higher temperatures and, secondly, we want to keep the analysis as simple as possible.

As mentioned our systems are made of identical point particles which interact pairwise via a potential repulsive at the origin and with an attractive tail at large distances, the prototype is the Lennard-Jones potential

$$V(R) = aR^{-12} - bR^{-6}, \quad a, b > 0 \tag{2.1}$$

so that the energy of the particles configuration $q = (q_1, \dots, q_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $q_i \in \mathbb{R}^d$,

is

$$H(q) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V(|q_i - q_j|) \tag{2.2}$$

$H(q)$ is invariant under permutations of q, i.e. it does not depend on the labels of the particles which are considered as undistinguishable.

The positive divergence of V at the origin ensures stability of matter (i.e. the energy per particle is bounded from below). If on the contrary the interaction was negative and bounded away from zero in a neighborhood of the origin then by putting all the particles of q in that set we would get $H(q) \leq -c|q|^2$ so that the energy per particle $H(q)/|q|$ would diverge to $-\infty$ and matter would not be stable. The attractive tail of the Lennard-Jones potential is instead responsible for the occurrence of a phase transition, as we shall see.

The basic axiom of equilibrium statistical mechanics at 0 temperature is that the equilibrium states are "ground states" namely configurations which minimize the energy (velocities are thus set equal to 0 and particles configurations will be described only by the positions of the particles). Our aim in this section is to prove that the ground state energy density, defined next, has a phase transition in the sense discussed in the introduction.

DEFINITION. – The ground state energy $e(\rho)$. *Let Λ be a torus in $\mathbb{R}^d$ (eventually $d = 2$), $|\Lambda|$ its volume, $\mathcal{X}_\Lambda$ the space of configurations q with all particles in Λ and $\mathcal{X}_{\Lambda,n}$ the subset of $q \in \mathcal{X}_\Lambda$ such that $|q| = n$, $|q|$ the number of particles in q. Set*

$$e\left(\frac{n}{|\Lambda|}; \Lambda\right) = \inf_{q\in\mathcal{X}_{\Lambda,n}} \frac{H(q)}{|\Lambda|} \tag{2.3}$$

and, for any $\rho > 0$ and any increasing sequence of tori Λ,

$$e(\rho) := \liminf_{\Lambda\to\mathbb{R}^d; n/|\Lambda|\to\rho} e\left(\frac{n}{|\Lambda|}; \Lambda\right) \tag{2.4}$$

THEOREM. – *$e(\rho)$ is a continuous, convex function of $\rho \in \mathbb{R}_+$ and the liminf in* (2.4) *is actually a limit.*

The proof of the theorem is omitted, see [46] for the proof of an analogous statement at positive temperatures.

Equilibrium states are minimizers of the energy (at given density and in a given region Λ) and, for what said in the introduction, a phase transition should correspond to minimizers of $e(\rho; \Lambda)$ which are not spatially "homogeneous". It is not obvious what "homogeneous" means for a particles configuration, in general the notion requires the use of "coarse graining" with a transition to a continuum

description. In the particular case of zero temperature we can make the ansatz that the relevant homogeneous configurations are lattice configurations; moreover, supposing that lattice ground states want to maximize the number of nearest neighbors (n.n.) of a site, and recalling that we are in $d = 2$ dimensions, we restrict to triangular lattice configurations, denoted by $\mathbb{T}_R$, R the lattice mesh.

Define

$$e_T(\rho) := \lim_{\Lambda\to\mathbb{R}^d} \frac{H(\mathbb{T}_{R(\rho)} \cap \Lambda)}{|\Lambda|}, \quad R(\rho) := \lim_{\Lambda\to\mathbb{R}^d} \frac{|\mathbb{T}_{R(\rho)} \cap \Lambda|}{|\Lambda|} = \rho \tag{2.5}$$

THEOREM. – *There are a' and b' both strictly positive so that*

$$e_T(\rho) = a'\rho^7 - b'\rho^4 \tag{2.6}$$

PROOF. – It is readily seen from (2.5) that, supposing $0 \in \mathbb{T}_R$,

$$e_T(\rho) = \frac{\rho}{2} \sum_{x\in\mathbb{T}_{R(\rho)}} V(|x|) \tag{2.7}$$

In fact the r.h.s. is the product of the density ρ times the energy per particle, i.e. $1/2$ the interaction energy of the particle at the origin with all the others. The factor $1/2$, also present in (2.2) is to avoid counting twice a same pair of particles.

To compute the r.h.s. of (2.7) we use a scaling argument:

$$\sum_{x\in\mathbb{T}_R} V(|x|) = \frac{aR^{-12}}{2} \sum_{x\in\mathbb{T}_1} |x|^{-12} - \frac{bR^{-6}}{2} \sum_{x\in\mathbb{T}_1} |x|^{-6} \tag{2.8}$$

hence (2.6) after observing that $R(\rho) = c'\rho^{-1/2}$, $c' > 0$. □

$e_T(\rho)$ is not convex, its graph and the graph of its convexification $e_T^{**}(\rho)$ are as in Figure 1.

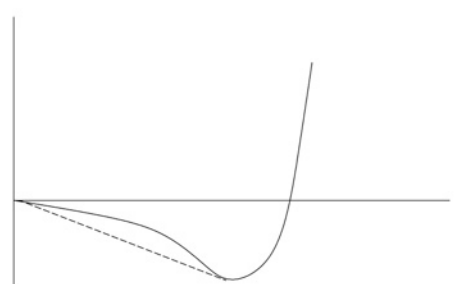


Fig. 1. – $e_T(\rho)$ and $e_T^{**}(\rho)$ (dashed line) differ in $(0, \rho_c)$.

In the interval $(0, \rho_c)$ (where $e_T^{**}(\rho) < e_T(\rho)$)

$$e_T^{**}(\rho) = e_T(\rho_c)\frac{\rho}{\rho_c} < e_T(\rho) \tag{2.9}$$

ρ_c is the point where $e_T(\rho)$ and $e_T^{**}(\rho)$ are equal and have the same derivative:

$$\frac{e_T(\rho_c)}{\rho_c} = e_T'(\rho_c) \tag{2.10}$$

Since $e(\rho)$ (defined in (2.4)) is convex and $e(\rho) \le e_T(\rho)$ then $e(\rho) \le e_T^{**}(\rho)$, so that by (2.9) $e_T(\rho) > e(\rho)$ in $(0, \rho_c)$ which proves that $\mathbb{T}_R(\rho)$ is not a ground state when $\rho \in (0, \rho_c)$. Let $\Delta = \Delta(\Lambda, \rho)$ be a cube such that $|\Delta|/|\Lambda| = \rho/\rho_c$, then by (2.9)

$$e_T^{**}(\rho) = \lim_{|\Lambda|\to\infty} \frac{H\big(\mathbb{T}_{R(\rho_c)} \cap \Delta(\Lambda, \rho)\big)}{|\Lambda|}, \quad \rho \in (0, \rho_c) \tag{2.11}$$

where $\Delta = \Delta(\Lambda, \rho)$ is a cube such that $|\Delta|/|\Lambda| = \rho/\rho_c$. Namely $e_T^{**}(\rho)$ can be approximated in a large box Λ by putting a triangular lattice configuration with mesh $R(\rho_c)$ in a fraction $\frac{\rho}{\rho_c}|\Lambda|$ of the box and nothing else in the complement. To prove (2.11) we observe that the error in energy goes like the surface, i.e. as $|\Lambda|^{(d-1)/d}$, and since in (2.11) we divide by $|\Lambda|$, the error goes like $|\Lambda|^{-1/d}$ and thus vanishes in the limit.

The above would prove that the system has a phase transition if we knew that $e_T^{**}(\rho)$ is indeed equal to the ground state energy $e(\rho)$. In principle the true ground state energy could be attained at completely different configurations than the triangular ones considered so far. That this is not the case has been proved by Theil, [49], as we are going to discuss. Theil studies the energy per particle rather than the energy per volume:

$$E := \liminf_{n\to\infty} E_n, \quad E_n := \inf_{q:|q|=n} \frac{H(q)}{|q|} \tag{2.12}$$

and he has proved that:

THEOREM 2.1. – *For a class of potentials (of Lennard-Jones type)* $E = \frac{e_T(\rho_c)}{\rho_c}$, ρ_c *as in* (2.10).

REMARK. – By (2.10) the inf of $\frac{e_T(\rho)}{\rho}$ is attained at ρ_c so that $E = \inf\left\{\frac{e_T(\rho)}{\rho}\right\}$.

COROLLARY. – $e(\rho) = e_T^{**}(\rho)$, $\rho \in (0, \rho_c)$, so that $e(\rho)$ is the limit as $|\Lambda| \to \infty$ of energies of triangular lattice configurations with density ρ_c in suitable subsets of Λ as in the r.h.s. of (2.11).

PROOF. – We have already seen (after (2.10)) that $e(\rho) \leq e_T^{**}(\rho)$. Suppose by contradiction that there is $\rho' \in (0, \rho_c)$ such that

$$e(\rho') < e_T^{**}(\rho') = e_T(\rho_c)\frac{\rho'}{\rho_c}$$

Then $E' = \dfrac{e(\rho')}{\rho'} < E$ while by Theil's theorem $E' \geq E$ because if $q^{(i)}$ is a minimizing sequence for (2.4) then

$$\lim_{i\to\infty} \frac{H(q^{(i)})}{|q^{(i)}|} = E'$$

□

A physical interpretation of the above is as follows. Suppose we have a region Λ which contains exactly a subset of the triangular configuration with density $\rho > \rho_c$. To decrease the density we may dilate Λ by pulling outwards its boundaries. The triangular lattice in Λ then stretches uniformly to a larger mesh. However when we are past the critical density ρ_c the triangular configuration becomes unstable and eventually it "breaks" by shrinking to a triangular configuration with the smaller mesh $R(\rho_c)$ and a fraction of Λ is left empty.

Earlier results, [45], [27], refer to more special interactions; a more recent paper, [50], studies the optimal shape, Wulff shape, of the crystal with a finite number of particles, see also the notes by G. Friesecke available at

http://www.acmac.uoc.gr//CKM2011/talks/Friesecke.pdf

3. – Gibbs measures and the van der Waals theory

The idea behind the theory of equilibrium states at positive temperatures is that energy levels higher than the ground state energy may be favored by the larger number of configurations where they are attained. Following Boltzmann, volumes in phase space are related to thermodynamic entropy which leads to the well known competition between energy and entropy with the minimization of the free energy $f = e - Ts$. All these ideas are contained in the Gibbs formula on which modern equilibrium statistical mechanics is based, as the main postulate of the theory is that the equilibrium states are described by Gibbs measures.

DEFINITION. – *The canonical Gibbs measure for a system of N particles in the torus Λ is the probability on Λ^N defined by the formula*

$$\mu_{\Lambda,\beta,N}(dq) = Z_{\Lambda,\beta,N}^{-1} e^{-\beta H(q)} \mathbf{1}_{q\in\Lambda^N} \frac{dq}{N!}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \tag{3.1}$$

where $dq = dq_1 \cdots dq_N$ is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^N$ and $Z_{\Lambda,\beta,N}$, the canonical

partition function, is the normalizing factor; k is the Boltzmann constant and (by an abuse of language) β is the inverse temperature.

The $N!$ in (3.1) is redundant as it simplifies with the one in $Z_{\Lambda,\beta,N}$. It is added to remind that particles are identical so that the $N!$ configurations which differ from each other by a permutation of the labels are counted only once. The $N!$ becomes important when identifying the thermodynamic potentials which is the content of the second postulate in the theory:

DEFINITION. – *The thermodynamic free energy density $f_\beta(\rho)$ is identified to*

$$f_\beta(\rho) = -\lim_{\Lambda\to\mathbb{R}^d, N/|\Lambda|\to\rho} \frac{1}{\beta|\Lambda|}\log Z_{\Lambda,\beta,N} \tag{3.2}$$

where $Z_{\Lambda,\beta,N} = \int_{\Lambda^N} e^{-\beta H(q)}\frac{dq}{N!}$.

(3.2) establishes a bridge between intermolecular forces and thermodynamic potentials which is by now well established and accepted. It is a theorem (among the most significant in statistical mechanics) that the thermodynamic potentials defined in this way do satisfy the thermodynamic principles, see for instance the Ruelle's basic book, [46].

It readily follows from (3.1) that if $T\to 0$ (hence $\beta\to\infty$) the Gibbs measure in the limit is supported by configurations with minimal energy, hence:

CONJECTURE. – If $d\geq 2$ then for all β large enough there is a "forbidden interval" $(\rho'_\beta,\rho''_\beta)$ with $(\rho'_\beta,\rho''_\beta)\to(0,\rho_c)$ as $\beta\to\infty$, ρ_c as in Theorem 2.1.

Of course the conjecture remains empty till we specify the meaning of a forbidden interval of densities. The definition involves a coarse graining and it is given next.

Let $\pi^{(\ell)}$, $\ell>0$, be a partition of $\mathbb{R}^d$ into cubes of side ℓ. We then associate to a configuration q the function

$$\rho^{(\ell)}(r;q) = \frac{|q\cap C_r^{(\ell)}|}{\ell^d} \tag{3.3}$$

where $|q\cap C_r^{(\ell)}|$ is the number of particles of the configuration q which are in the cube of the partition $\pi^{(\ell)}$ which contains the point r, this cube denoted by $C_r^{(\ell)}$. $\rho^{(\ell)}(r;q)$ is evidently constant on the cubes of $\pi^{(\ell)}$ and is therefore "$\pi^{(\ell)}$-measurable". It is the local density in the configuration q measured with mesh ℓ.

$(\rho'_\beta,\rho''_\beta)$ is called a forbidden interval if for any $\rho\in(\rho'_\beta,\rho''_\beta)$ the following happens. For any $\varepsilon>0$ there is ℓ_ε and for any $\ell>\ell_\varepsilon$ the following picture holds whenever Λ is large enough. Let N be the integer part of $\rho|\Lambda|$ and $\mu\equiv\mu_{\Lambda,\beta,N}$. Then there is a "nice set" $G\subset\mathcal{X}_{\Lambda,N}$, $\mu[G]>1-\varepsilon$, so that if $q\in G$ then $\rho^{(\ell)}(r;q)$,

$r \in \Lambda$, has either values in $[\rho'_\beta - \varepsilon, \rho'_\beta + \varepsilon]$ or $[\rho''_\beta - \varepsilon, \rho''_\beta + \varepsilon]$ except for r in a set which has Lebesgue measure $\leq \varepsilon|\Lambda|$.

In $d = 1$ there is no phase transition for a large class of systems (see for instance [43] for a proof in the Ising system). It is also known that in all dimensions forbidden intervals must be away from 0 ($\rho'_\beta > 0$), see for instance [46], but there is no proof that for Lennard-Jones or Lennard-Jones type of potentials that a forbidden interval actually esists. This is in my view one of the most important open problems in statistical mechanics.

There are however proofs of existence of forbidden intervals for the lattice gas (if particles are constrained to be on a lattice with at most one particle per site) and for more general lattice spin systems (in particular for the the Ising model) the key words being Peierls estimates and Pirogov-Sinai theory, see for instance [47], [51] and [39].

By integrating $\mu = \mu_{\Lambda,\beta,N}$ in (3.1) over the region

$$\bigcup_{E \in dE} \{q \in \mathcal{X}_{\Lambda,N} : H(q) = E\}$$

we obtain the probability $\mu(dE)$ of having energy values in the interval dE. Under some regularity properties on H this measure has a density:

$$\mu(dE) = Z^{-1} e^{-\beta E} D(E) dE \tag{3.4}$$

$D(E)dE$ is the Lebesgue volume of phase space where the energy is dE. Boltzmann's famous formula states that the thermodynamic entropy $S(E)$ is equal to

$$S(E) = k \log D(E) \tag{3.5}$$

(3.4) then reads as:

$$\mu(dE) = Z^{-1} e^{-\beta(E - TS(E))} dE = Z^{-1} e^{-\beta|\Lambda|(e - Ts(E))} |\Lambda| de \tag{3.6}$$

$e = E/|\Lambda|$ $s(E) = S(E)/|\Lambda|$ the energy and entropy densities. We are thus reduced to the analysis of the free energy $e - Ts(E)$ and due to the presence of the large factor $|\Lambda|$ the relevant part of the measure will be concentrated around its minimizers. In particular this suggests that

$$\lim_{|\Lambda| \to \infty} \frac{\log Z_{\Lambda,\beta,N}}{|\Lambda|} = \sup_e \{-\beta(e - Ts(E))\} \tag{3.7}$$

(3.7) is indeed theorem (valid for a large class of interactions, see [46]) known as "equivalence of ensemble" (here the equivalence is between "the microcanonical and canonical ensembles"). By the second postulate which relates the l.h.s. of (3.7) to the free energy density, see (3.2), (3.7) shows that entropy and free energy are related via a Legendre transform in agreement with the laws of thermodynamics.

Thus the second postulate which identifies the free energy is equivalent to the Boltzmann formula for the entropy. While theoretically important this representation of the Gibbs measure has little practical consequences, the major difficulty is to handle surfaces of constant energy, which enter in the computation of the entropy $S(E)$, a task which has so far eluded all attempts due to the complexity of the interactions among all the particles.

The problem drastically simplifies if we change hamiltonians. Let us start from mean field.

3.1 – *The mean field theory*

In mean field the Lennard-Jones interaction is replaced by a constant potential where the constant depends on the region where the system is confined:

$$V(q_i, q_j) = -\frac{J}{|\Lambda|},\ J > 0; \quad H(q) = -\frac{J}{2|\Lambda|}|q|\big(|q| - 1\big) \tag{3.8}$$

Since the energy depends only on the particle numbers the sets of phase space with constant energy are the same as those with given number of particles and thus easy to compute. Before doing that a few remarks on (3.8).

To explain the prefactor $|\Lambda|$ observe that the interaction of a particle with all the others is $-J(N-1)/|\Lambda| \approx -J\rho$ and thus bounded as desired. With (3.8) we are considering only the contribution of the long, slowly varying attractive tail of the interaction, which justifies neglecting the actual position of the particles so that each one interacts almost equally with any other one.

The mean field partition function is:

$$Z^{\mathrm{mf}}_{\Lambda,\beta,N} = e^{\beta JN(N-1)/(2|\Lambda|)}\,\frac{|\Lambda|^N}{N!} \tag{3.9}$$

Hence, after using the Stirling formula for $N!$, we get from (3.2) and (3.9)

$$f^{\mathrm{mf}}_{\beta}(\rho) = -\frac{J}{2}\,\rho^2 + \frac{\rho}{\beta}\Big(\log\rho - 1\Big) \tag{3.10}$$

which is physically a nonsense ! In fact $f^{\mathrm{mf}}_{\beta}(\rho)$ is not a convex function of ρ, as it should in a theory compatible with thermodynamic principles, and moreover it is not even possible to convexify it, as $\inf f^{\mathrm{mf}}_{\beta}(\rho)/\rho = -\infty$: matter is unstable if the energy per particle is unbounded from below, the entropy term $\rho\log\rho$ cannot contrast the $-\rho^2$ energy as $\rho \to \infty$.

The origin of the problem goes back to the initial assumption (3.8) where the energy keeps only the attractive part of the Lennard-Jones interaction and drops the short range repulsive part, which is in fact essential to ensure stability. A way to take it into account in a simple way (but not so simple in the end) is to

suppose that particles are not points but small hard spheres (of radius R) which cannot overlap with each other. Then (3.9) is replaced by

$$Z^{\mathrm{mf,R}}_{\Lambda,\beta,N} = e^{\beta JN(N-1)/(2|\Lambda|)} \int_{\Lambda^N} \Big\{ \prod_{i\neq j} \mathbf{1}_{|q_i-q_j|>2R} \Big\} \frac{dq}{N!} \tag{3.11}$$

The problems we had in (3.10) are now absent because the density is bounded but the analysis of the integral in (3.11) is far from trivial.

3.2 – *The van der Waals theory.*

Van der Waal proposed a theory for the liquid-vapor transition which is mean field with an approximation to (3.11), thus it is based on the following two assumptions:

- *Energy.* The energy $H(q)$, $q \in \mathcal{X}_\Lambda$, is only a function of the number of particles $|q|$ in q and of the volume $|\Lambda|$, in particular $H(q) = -J\dfrac{|q|^2}{2|\Lambda|}$, $J > 0$
- *Phase space volumes.* The Lebesgue phase space volume of a system with N particles is $(|\Lambda| - Na)^N$, $a > 0$.

Van der Waals explains the parameter a as the volume "occupied" by a particle, thus if there are N particles the volume they occupy is Na, hence $Na < |\Lambda|$. The volume "left free" is $|\Lambda| - Na$ and the second assumption argues that the system behaves as if each particle is free to move (independently of the others) in the free volume. $(|\Lambda| - Na)^N$ is a crude approximation of the integral in (3.11) (yet it is correct in $d = 1$ dimensions). It has the advantage of providing an explicit expression to the entropy which is

$$S(\rho) = k \log \Big\{ \frac{1}{N!} (|\Lambda| - Na)^N \Big\}, \quad \rho = \frac{N}{|\Lambda|} \tag{3.12}$$

Writing $E - TS = |\Lambda| f(\rho)$ and using the Stirling formula we get in the limit $|\Lambda| \to \infty$

$$f(\rho) = -\frac{J}{2}\rho^2 - \frac{1}{\beta}\Big(-\rho(\log\rho - 1) + \rho \log(1 - \rho a)\Big) \tag{3.13}$$

which like in (3.10) is not convex but instead is stable, i.e. it has a well defined convexified, as we are going to discuss.

In thermodynamics the chemical potential λ is defined as $\lambda = \dfrac{df(\rho)}{d\rho}$ and by the second principle of thermodynamics it should be a non decreasing function of ρ. Instead its graph is as in Figure 2.

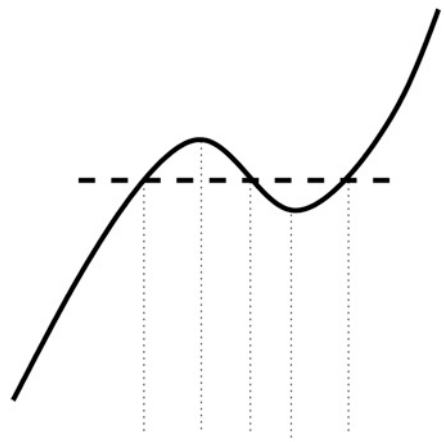


Fig. 2. – λ as a function of ρ.

As a remedy Maxwell proposed to modify this graph by cutting along the dashed line so that the parts above and below the dashed line have the same area. This is the famous "Maxwell equal area rule" which is equivalent to replace $f(\rho)$ by $f^{**}(\rho)$, the convexification of $f(\rho)$.

With the van der Waals plus thre Maxwell equal area rule theory we have recovered what found at 0 temperature with the energy replaced by the free energy. There are however three main drawbacks in the theory:

- The interaction between two particles depends on the region Λ where the system is and moreover it vanishes as $|\Lambda| \to \infty$.
- The phase space volume in the second van der Waals assumption is only an approximation, the correct expression is the one in (3.11)
- The Maxwell equal area rule is an ad hoc prescription, it should instead be derived from within the theory, as in the zero temperature case

4. – Kac potentials and free energy functionals

The problem of deriving the van der Waals theory in a statistical mechanics framework was solved in the 60's with the works of Kac, Uhlenbeck and Hemmer, [29], [30], [31], followed by those of Lebowitz and Penrose, [35], and Gates and Penrose, [17], [18], [19], see also the more recent [32].

A very short summary of these results is presented here, in a form useful for the sequel but not always historically accurate. With this in mind we may say that Kac basic idea is to relax the mean field assumption to a local condition. Write the

hamiltonian in the form $H(q) = \int e(r;q)dr$ thus interpreting $e(r;q)$ as the energy density at r when the particles configuration is q.

• *Local mean field.* Kac shifts the assumption from the total energy H to the local energy density $e(r;q)$ by assuming that the latter depends only on the "local particles density $\rho(r;q)$" at r (which will be defined next). By an abuse of notation we write $e(\rho(r;q))$ for $e(r;q)$.

• *Local particles density.* A choice (others, more convenient, will be discussed later on) is

$$\rho(r;q) := \frac{|q \cap B_{\gamma^{-1}}(r)|}{|B_{\gamma^{-1}}(r)|} \tag{4.1}$$

$B_{\gamma^{-1}}(r)$ the ball of radius γ^{-1} and center r; $|B_{\gamma^{-1}}(r)| = \gamma^{-d}|B_1|$ its volume ($|B_1|$ the volume of the unit ball). Observe that if we replace $B_{\gamma^{-1}}(r)$ by Λ we are back to mean field.

• *The hamiltonian $H_\gamma(q)$.* Being the integral of the energy density is:

$$H_\gamma(q) = \int e\big(\rho(r,q)\big)dr \tag{4.2}$$

By taking the Kac scaling parameter γ small the system looks like mean field and since mean field has a phase transition we may hope to prove in this way that there is a phase transition as well for the system with $\gamma > 0$ sufficiently small, or in the limit $\gamma \to 0$.

• *Choice of the energy density.* Kac choice is $e(\rho) = -\dfrac{\rho^2}{2} - \lambda\rho$ (we are here including the chemical potential in the energy). The energy per particle $e(\rho)/\rho$ is in this way unbounded from below, same problem as in the van der Waals theory which Kac solves in the same way:

• *Hard cores.* To ensure stability, the phase space is restricted to configurations q such that for all pairs q_i, q_j of particles in q, $|q_i - q_j| > 2R$, $R > 0$ the "hard core radius". We may as well say that we have added a pair interaction which is $= \infty$ if $|q_i - q_j| \le 2R$ and $= 0$ otherwise. A system of particles with such an interaction is called the "gas of hard spheres".

Before proceeding with the theory it is convenient to generalize the definition of the local particle density $\rho(r;q)$ as

$$\rho(r;q) = J_\gamma * q(r) := \sum_{q_i \in q} J_\gamma(r, q_i), \quad r \in \mathbb{R}^d \tag{4.3}$$

(4.1) is a particular case of (4.3) with $J_\gamma(r,r') = \dfrac{\mathbf{1}_{|r-r'|\le\gamma^{-1}}}{|B_{\gamma^{-1}}(r)|}$. It is in fact convenient

to have $J_\gamma(r, r')$ smooth rather than discontinuous as in (4.1). We keep however the same scaling dependence on γ and set

$$J_\gamma(r, r') = \gamma^d J(\gamma r, \gamma r') \tag{4.4}$$

where $J(r, r')$ is a symmetric, translation invariant ($J(r, r') = J(0, r' - r)$) smooth probability kernel which vanishes when $|r - r'| \geq 1$. Observe that by definition

$$\int J_\gamma(r, r')dr' = \int J(r, r')dr' = 1 \tag{4.5}$$

so that the sum in (4.3) is the empirical density of q around a point r, weighted with the probability kernel J_γ (which therefore involves the particles of q which are in a ball of radius γ^{-1} and center r).

Reduction to pair interactions. The definition of the model is now complete. It can however be reformulated in the more familiar context of pair interactions. We get in fact from (4.2)

$$H_\gamma(q) = -\frac{1}{2}\sum_{i \neq j} V_\gamma(q_i, q_j) - \lambda'|q| \tag{4.6}$$

where $\lambda' = \lambda + \sum_{q_i} V_\gamma(q_i, q_i)$ and

$$V_\gamma(q_i, q_j) = \int J_\gamma(r, q_i) J_\gamma(r, q_j) dr = (J_\gamma * J_\gamma)(q_i, q_j) \tag{4.7}$$

Thus $V_\gamma = J_\gamma * J_\gamma$, the convolution of J_γ with itself: it then follows that the interactions V_γ in the theory we have presented are positive operators (while in the original Kac formulation they could be arbitrary). Observe that the the interaction range is $2\gamma^{-1}$ and that $\lambda' \to \lambda$ as $\gamma \to 0$.

The Lebowitz-Penrose approach to Kac potentials uses ideas from renormalization group. The basic step of renormalization group is to coarse grain the Gibbs measure with a given hamiltonian on some scale and find the corresponding effective hamiltonian. This defines a map from hamiltonians to hamiltonians and its iterations define the renormalization group. The scheme is the following.

- Introduce a family of partitions $\pi^{(\ell)}$ of $\mathbb{R}^d$ into cubes of side $\ell = 2^k$, $C_r^{(\ell)}$ being the element of the partition containing a point $r \in \mathbb{R}^d$. The partitions are chosen so that each one refines the next one, in the sense that each cube in $\pi^{(2\ell)}$ is union of cubes of $\pi^{(\ell)}$.
- Given ℓ denote by N_r, $r \in \mathbb{R}^d$, a non negative integer valued function measurable on $\pi^{(\ell)}$, i.e. constant on each cube of $\pi^{(\ell)}$.
- The effective hamiltonian $H_{\text{eff}}^{(\ell)}$ on the scale ℓ is (modulo an additive con-

stant) $H_{\text{eff}} = -\beta^{-1}\log\mu(\{N_r\})$, $\mu(\{N_r\})$ the Gibbs probability that in each $C_r^{(\ell)}$ there are N_r particles.

The computation of $H_{\text{eff}}^{(\ell)}$ is usually very hard, but it becomes easy for Kac potentials, at least on scales $1 \ll \ell \ll \gamma^{-1}$. By the smoothness of J_γ the Kac energy is quite insensitive to variations of the positions of the particles inside a cube $C_r^{(\ell)}$ (as J_γ varies in the cube at most by $c\gamma\ell$) and to a first approximation we can replace q by $\rho^{(\ell)}(r) = \ell^{-d}|q \cap C_r^{(\ell)}|$ in the convolution $J_\gamma * q$. Indeed, for any configuration $q \in \mathcal{X}_\Lambda$ satisfying the hard core condition,

$$\left|H_\gamma(q) - \int e\big(J_\gamma * \rho^{(\ell)}(r)\big)dr\right| \le c(\ell\gamma)\,|\Lambda| \tag{4.8}$$

where $\rho^{(\ell)}(r) \equiv \rho^{(\ell)}(r,q) = \dfrac{|q \cap C_r^{(\ell)}|}{\ell^d} = \dfrac{N_r}{\ell^d}$ is the particles density in the cube $C_r^{(\ell)}$.

The energy $\int e\big(J_\gamma * \rho^{(\ell)}(r)\big)dr$ is not yet the effective hamiltonian because we still have to integrate over all the configurations yielding the assigned occupation numbers $\{N_r\}$: the effective hamiltonian has also an entropy contribution (the log of the above phase space volume). This would be easy to compute if particles were points, it is instead pretty hard because of the hard core constraint (an issue overcome in the van der Waals theory by ad hoc assumptions on the entropy). It is not hard to prove that we make a "small error" if we assume factorization, namely if we take the entropy, i.e. the log of the volume of phase space of configurations in $\{N_r\}$, as the sum of the entropies in each cube, which, modulo a minus sign, is

$$f_C^{\text{hc}}\Big(\frac{N}{|C|}\Big) = -\frac{1}{\beta|C|}\log\left\{\int_{C^N} \mathbf{1}_{|q_i-q_j|>2R}\,\frac{dq}{N!}\right\} \tag{4.9}$$

(Factorization increases the entropy, as we disregard the hard core constraint among particles of different cubes; a lower bound is obtained by restricting particles in each cube to be away from the boundaries of the cube by R, for such integrals the factorization is correct and the error in restricting to such volumes will become negligible in the limit).

Even with the simplification (4.9) the computation of the integral remains difficult for the presence of the hard cores constraints $\mathbf{1}_{|q_i-q_j|>2R}$. From general results in statistical mechanics it follows that there is a convex function $f^{\text{hc}}(\rho)$ (the free energy of the hard cores gas) so that

$$\lim_{|\Lambda|\to\infty}\lim_{N/|\Lambda|\to\rho} f_\Lambda^{\text{hc}}\Big(\frac{N}{|\Lambda|}\Big) = f^{\text{hc}}(\rho) \tag{4.10}$$

In the next section we shall describe in more details what is known about f^{hc}, which is not much. There are in the literature several formulas for $f^{\text{hc}}(\rho)$ elaborated via numerical simulations and heuristic considerations, [48], [26], [28],

we refer to [32] for their analysis. We state below some properties which we are going to use (which strictly speaking should be regarded as conjectures).

- $f^{\mathrm{hc}}(\rho)$ is a continuous convex function in $(0, \rho_c)$, $\rho_c > 0$
- $f^{\mathrm{hc}}(\rho)$ is asymptotic to $-\rho(\log\rho - 1)$ as $\rho \to 0$ together with its first and second derivatives
- $f^{\mathrm{hc}}(\rho) \to +\infty$ as $\rho \to \rho_c$ and its second derivative is strictly positive in a neighborhood of ρ_c

Neglecting the error in (4.8) and replacing $f_C^{\mathrm{hc}}\left(\dfrac{N}{|C|}\right)$ by its limit we then have

$$\mu(\{N_r\}) \approx Z^{-1} e^{-\beta F_\gamma(\rho)}, \quad \rho(r) = \frac{N_r}{|C^{(\ell)}|} \tag{4.11}$$

where the free energy functional $F_\gamma(\rho)$ is

$$F_\gamma(\rho) = \int \Big\{ e\big(J_\gamma * \rho(r)\big) + \frac{1}{\beta} f^{\mathrm{hc}}(\rho(r)) \Big\} dr \tag{4.12}$$

By scaling $r \to \gamma r$ we get, calling $\rho^*(r) = \rho(\gamma^{-1} r)$ and $F = F_1$,

$$F_\gamma(\rho) = \gamma^{-d} F(\rho^*) \tag{4.13}$$

which replaced in (4.11) shows that for small γ the Gibbs measures should concentrate around the minimizers of F, the conditional tense because (4.11) is only an approximation.

However the above arguments can be made rigorous even though in a weaker sense:

THEOREM 4.1. – *Let $\{\Lambda\}$ be an increasing sequence of tori in $\mathbb{R}^d$. Let $s \in (0, \rho_c)$,*

$$f_{\gamma,\beta}(s) = \lim_{|\Lambda|\to\infty,\, N/|\Lambda|\to s} \frac{1}{\beta|\Lambda|} \log Z_{\gamma,\Lambda,\beta,N} \tag{4.14}$$

the free energy density (notation are explained after the theorem). Then

$$\lim_{\gamma\to 0} f_{\gamma,\beta}(s) = \lim_{|\Lambda|\to\infty,\, N/|\Lambda|\to s} \frac{1}{|\Lambda|} \inf \Big\{ F_{\Lambda,\beta}(\rho) \mid \rho : \int_\Lambda \rho = N \Big\} \tag{4.15}$$

In the above theorem $Z_{\gamma,\Lambda,\beta,N}$ is the canonical partition function defined in (3.2) with $H = H_\gamma$ as in (4.2), $e(\rho) = -\dfrac{\rho^2}{2} - \lambda\rho$ and there is a hard core repulsion among particles; (the existence of the limit (4.14) is true in general); $F_{\Lambda,\beta}$ is the corresponding functional defined in (4.13) on $L^\infty(\Lambda; \mathbb{R}_+)$ (with the convolution defined in the torus Λ). The proof of the theorem is omitted.

THEOREM 4.2. – *In the same context as in Theorem* 4.1, *the limit in* (4.15) *is equal to* $\phi^{**}(s)$, *i.e. the convexification of*

$$\phi(s) = -\frac{\alpha s^2}{2} - \lambda s + \frac{1}{\beta} f^{\mathrm{hc}}(s) \tag{4.16}$$

PROOF. – We need to prove that

$$\lim_{|\Lambda|\to\infty} \frac{1}{\beta|\Lambda|} \inf \Big\{ F_{\Lambda,\beta}(\rho) \mid \rho : \int_\Lambda \rho = s|\Lambda| \Big\} = \phi^*(s) \tag{4.17}$$

The proof of (4.17) is obtained by rewriting first $F_{\Lambda,\beta}$ in a more convenient way, see (4.20) below; exploiting this we will then show that $\phi^{**}(s)$ is a lower bound for the liminf of the l.h.s. of (4.17) and complete the proof by exhibiting a recovering sequence which realizes the bound $\phi^{**}(s)$.

Recall that $F_{\Lambda,\beta}$ is defined on $L^\infty(\Lambda;\mathbb{R}_+)$ with periodic conditions, meaning that $J*\rho$ is computed by repeating periodically ρ on the whole $\mathbb{R}^d$: this is what we mean when we say that we take Λ to be a torus in $\mathbb{R}^d$. We then have

$$\int_\Lambda (J*\rho(r))^2 dr = \int_\Lambda\int_\Lambda V(r',r'')\rho(r')\rho(r'')dr'dr'' \tag{4.18}$$

$V(r',r'') = (J*J)(r',r'') = \int_{\mathbb{R}^d} J(r,r')J(r,r'')dr$. Thus

$$-\frac{1}{2}\int_\Lambda (J*\rho(r))^2 dr = -\frac{1}{2}\int_\Lambda \rho(r)^2 dr + \frac{1}{4}\int_\Lambda\int_\Lambda V(r,r')\{\rho(r)-\rho(r')\}^2 drdr' \tag{4.19}$$

hence

$$F_{\Lambda,\beta}(\rho) = \int_\Lambda \phi(\rho(r))dr + \frac{1}{4}\iint V(r,r')\{\rho(r)-\rho(r')\}^2 drdr' \tag{4.20}$$

In this form the functional looks very much like the Ginzburg-Landau functional of (1.2) with the gradient term replaced by the non local expression in (4.20) and indeed the proof is now a repetition of the one sketched in the introduction for the minimization of the Ginzburg-Landau functional.

Lower bound. We shall prove that

$$\liminf_{|\Lambda|\to\infty} \frac{1}{\beta|\Lambda|} \inf \big\{ F_{\Lambda,\beta}(\rho) \mid \rho : \int_\Lambda \rho = s|\Lambda| \big\} \geq \phi^*(s) \tag{4.21}$$

Define $F^*_{\Lambda,\beta}$ by replacing ϕ by ϕ^{**} in (4.20). By definition $\phi \geq \phi^{**}$ so that

$F_{\Lambda,\beta} \geq F^*_{\Lambda,\beta}$. Since $V(r,r') \geq 0$,

$$F^*_{\Lambda,\beta}(\rho) \geq \int_\Lambda \phi^{**}(\rho(r))dr \geq |\Lambda|\phi^{**}\Big(\frac{1}{|\Lambda|}\int_\Lambda \rho(r)dr\Big) \tag{4.22}$$

having used Jensen in the last inequality (as ϕ^{**} is convex by definition). The lower bound (4.21) is then proved.

Recovering sequences. If s is such that $\phi^{**}(s) = \phi(s)$, for each Λ we take $\rho(r) \equiv s$ and for such ρ, $F_\Lambda(\rho) = \phi^{**}(s)$. Suppose next that $\phi^{**}(s) < \phi(s)$, there are then $s' < s < s''$ so that

$$\phi^{**}(s) = p\phi(s') + (1-p)\phi(s''), \quad p \in (0,1) \tag{4.23}$$

Let Λ' a coordinate rectangle in Λ with $|\Lambda'| = p|\Lambda$. Define $u_\Lambda(r) = \rho'$ in Λ' and $= \rho''$ elsewhere in Λ, so that $\int u_\Lambda = s|\Lambda|$. The last term in (4.20) is bounded proportionally to L^{d-1} (L the length of the side of the cube Λ) hence

$$\lim_{|\Lambda|\to\infty} \frac{F_\Lambda(u_\Lambda)}{|\Lambda|} = p\phi(\rho') + (1-p)\phi(\rho'') = \phi^{**}(s) \tag{4.24}$$

which shows that u_Λ is indeed a recovering sequence. □

Phase transitions. By a continuity argument, $\phi(s)$ is concave in any given interval strictly contained in $(0,\rho_c)$ once β is large enough, so that there are indeed forbidden density intervals and Theorem 4.1 together with Theorem 4.2 show that the particle system has a phase transition at least in the limit $\gamma \to 0$. We shall come back later on the meaning of such a statement.

A function which satisfies the same properties as $f^{\rm hc}(\rho)$ is the van der Waals free energy $\rho(\log\rho - 1) - \rho(\log(1-\rho/\rho_c)$, see (3.13): with such a replacement we have obtained the van der Waals phase transition without using the Maxwell equal area rule, as the limit free energy is $\phi^{**}(s)$.

The functional $F_{\Lambda,\beta}(\rho)$ hides the existence of microstructures. The replacement in (4.10) of the finite volume free energy $f^{\rm hc}_C\Big(\frac{N}{|C|}\Big)$ by its thermodynamic limit $f^{\rm hc}(\rho)$ turns out to be [partially] incorrect when the hard spheres gas undergoes a phase transition (as it is believed to occur in $d=3$, see Section 6). Indeed if there is a phase transition then a density ρ in the forbidden interval is realized by a non homogeneous profile which alternates regions with density ρ_1 and with density ρ_2. The grains of such fragmentation are believed to be "slightly" smaller than γ^{-1} and in such a case the typical configurations will have in the cubes C (whose side is $\ll \gamma^{-1}$) one of the above two densities. The predictions of the functional will however be correct on scales larger than γ^{-1}. In conclusion if when studying the functional we read a density value ρ inside the

forbidden interval we should always remember that it is in fact describing a hidden finer structure with oscillations between the two extremal values ρ_1 and ρ_2, such microstructures are also called in the literature "mushy regions".

5. – The LMP model

The weak point in the theory of the previous section is that phase transitions are proved only in the limit $\gamma \to 0$. The graph of the free energy density $f_{\gamma,\beta}$ (see Theorem 4.1) has (for β large enough) a linear segment, but the statement is proved only in the limit $\gamma \to 0$. When $\gamma > 0$, no matter how small it is, $f_{\gamma,\beta}$ may very well be a strictly convex function.

On the other hand J_γ and hence the hamiltonian H_γ have no well defined limit as $\gamma \to 0$ so that we cannot attribute the phase transition observed in the limit to any statistical mechanics particles model.

All that is not a mathematical subtlety, for instance we know that in $d = 1$ there is no phase transition, while in the Kac theory phase transitions occur independently of the dimensions, hence also in $d = 1$.

It seems that we are back to the same problem we had with the mean field and van der Waals theories, but already at the times when the Kac and the Lebowitz-Penrose papers appeared the feeling was that much more could in fact be done with Kac potentials. The two main technical obstacles are:

- The basic step in the theory is to reduce to variational problems with free energy functionals, which requires a proof that the effective hamiltonians are well approximated by such functionals. Their difference however grows as $|\Lambda|$ multiplied by a small factor vanishing with γ. Thus if γ is kept fixed as we want, the approximation becomes useless when studying the Gibbs measure in large volumes.
- There is a poor control of the hard cores interaction. Even without the Kac potential we do not know how the hard spheres gas behaves. It may very well be that the hard spheres gas alone has a phase transition without the help of Kac potentials, as shown in $d = 3$ by numerical computations.

Let us start from the second point, namely the poor knowledge of the hard spheres system. As we shall discuss later this is not totally true, we have in fact a very good control of the hard spheres gas for small densities (i.e. when the typical inter-particles distance is much larger than the hard core radius). In this case the entropy of the hard spheres is to leading orders the same as in the ideal gas.

One may then hope to be lucky so that the relevant densities which appear in the analysis are in the hard core low density regime, but unfortunately this does not seem likely. The attractive Kac interaction in fact goes like $-\rho^2$ and it thus

wants ρ to grow to infinity; this can only be contrasted by the hard cores interaction which however in the above small density regime where it is close to the ideal gas has a free energy which grows only as $\rho \log \rho$. The argument then indicates that the hard core interaction can control the Kac energy only away from the ideal gas approximation.

To overcome the impasse, LMP (Lebowitz, Mazel and Presutti), [34] and [43], have proposed to change the Kac energy density $-\rho^2/2$ into

$$e(\rho) := -\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4!} - \lambda\rho, \quad H_\gamma = \int e\big(J_\gamma * q(r)\big)\big)dr \tag{5.1}$$

$e(\rho)$ is now stable, i.e. $e(\rho)/\rho$ is bounded from below, and with such a choice of the energy density there is no longer need to have a hard core interaction as well. The LMP model is indeed defined by the hamiltonian (5.1) with <u>no hard-cores added</u>. It should be said that

- the LMP analysis applies as well to other regularizing terms than ρ^4, (5.1) is just an example;
- the double well structure of $e(\rho)$ is misleading because $\rho \geq 0$: a double well will appear when adding (actually subtracting) the entropy.

The very first step of course is to check that also the LMP model has a phase transition in the limit $\gamma \to 0$. The coarse-graining estimates are mainly unchanged (actually simpler in the part regarding the entropy as here we have point particles) and Theorem 4.1 extends to the LMP model with $F_{\gamma,\beta,\Lambda}$ replaced by a new non local functional $F^{\mathrm{LMP}}_{\gamma,\beta,\Lambda}$ which has the scaling property (4.13), namely $F^{\mathrm{LMP}}_{\gamma,\beta,\Lambda}(\rho) = \gamma^{-d} F^{\mathrm{LMP}}_{\beta,\Lambda^*}(\rho^*)$, $\Lambda^* = \gamma\Lambda$ and $\rho^*(r) = \rho(\gamma^{-1}r)$, with $F^{\mathrm{LMP}}_{\beta,\Lambda}$ given by

$$F^{\mathrm{LMP}}_{\beta,\Lambda}(u) = \int_\Lambda \left\{ e\big(J * u(r)\big) - \frac{1}{\beta} s(u(r)) \right\} dr, \quad s(u) = -u(\log u - 1) \tag{5.2}$$

$s(u)$ the entropy of the ideal gas.

Minimizers of $F^{\mathrm{LMP}}_{\beta,\Lambda}$ are constant functions, as in the Ginzburg-Landau functional:

LEMMA 5.1. – *Let Λ be a torus in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, then*

$$\inf_{u \in L^\infty(\Lambda, \mathbb{R}_+)} F^{\mathrm{LMP}}_{\beta,\Lambda}(u) = |\Lambda| \inf_{\rho \geq 0} \left\{ e(\rho) - \frac{1}{\beta} s(\rho) \right\} \tag{5.3}$$

PROOF. – We rewrite $F^{\mathrm{LMP}}_{\beta,\Lambda}$ as

$$F^{\mathrm{LMP}}_{\beta,\Lambda}(u) = \int_\Lambda \left(\left\{ e(J * u) - \frac{1}{\beta} s(J * u) \right\} + \left\{ \frac{1}{\beta} s(J * u) - \frac{1}{\beta} s(u) \right\} \right)$$

We have $\int_\Lambda s(u) = \int_\Lambda J * s(u)$ and, by convexity ($-s$ is convex),

$$\frac{1}{\beta} s(J * u) - \frac{1}{\beta} J * s(u) \geq 0$$

so that

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{LMP}}_{\beta,\Lambda}(u) \geq & \int_\Lambda \left\{ e(J * u) - \frac{1}{\beta} s(J * u) \right\} \\ \geq & |\Lambda| \inf_{\rho \geq 0} \phi_\beta(\rho), \quad \phi_\beta(\rho) := e(\rho) - \frac{1}{\beta} s(\rho) \end{aligned} \tag{5.4}$$

□

The same ideas are used to prove the analogue of Theorem 4.2 (details omitted):

THEOREM 5.1. – *Let $\phi^{**}_\beta(s)$ be the convexification of $\phi_\beta(s)$, the latter defined in* (5.4), *then*

$$\lim_{|\Lambda| \to \infty} \frac{1}{\beta |\Lambda|} \inf \left\{ F^{\mathrm{LMP}}_\Lambda(\rho) \mid \rho : \int_\Lambda \rho = s|\Lambda| \right\} = \phi^{**}_\beta(s) \tag{5.5}$$

By a direct computation $\phi_{\beta,\lambda}$ (here the dependence on λ is made explicit) has the following properties:

- $\phi_{\beta,\lambda}(\cdot)$ is convex for $\beta \leq \beta_c = (3/2)^{3/2}$
- for $\beta > \beta_c$ there are $\rho_{-,\beta} < \rho_{+,\beta}$ so that $\phi_{\beta,\lambda}(s) > \phi^{**}_{\beta,\lambda}(s)$ in $(\rho_{-,\beta}, \rho_{+,\beta})$ while $\phi_{\beta,\lambda}(s) = \phi^{**}_{\beta,\lambda}(s)$ elsewhere
- for any $\beta > \beta_c$ there is $\lambda(\beta)$ so that the minimum of $\phi_{\beta,\lambda(\beta)}$ is attained at $\phi_{\beta,\lambda(\beta)}(\rho_{-,\beta}) = \phi_{\beta,\lambda(\beta)}(\rho_{+,\beta})$

The critical points of $\phi_{\beta,\lambda}(\rho)$ are the solutions of the mean field equation

$$\frac{d}{d\rho} \{ e_\lambda(\rho) + \frac{1}{\beta} \rho(\log \rho - 1) \} = 0, \quad \rho = \exp\{ -\beta e'_\lambda(\rho) \} =: K_{\beta,\lambda}(\rho) \tag{5.6}$$

which for $\beta > \beta_c$ and $\lambda = \lambda(\beta)$ looks as in Figure 3.

Let us go back to the problems raised in the beginning of this section where we have outlined the two main difficulties to realize the Kac program for phase transitions at fixed γ. The second one, which concerns the hard core interaction, has already been overcome by adopting the LMP model where hard spheres are replaced by point particles (stability being ensured by having changed the energy density).

The other main difficulty refers to the fact that the true effective hamiltonian differs from the functional by a term which grows as $|\Lambda|$ multiplied by a small factor $\varepsilon(\gamma)$ vanishing with γ. If γ is kept fixed, as we want, the error

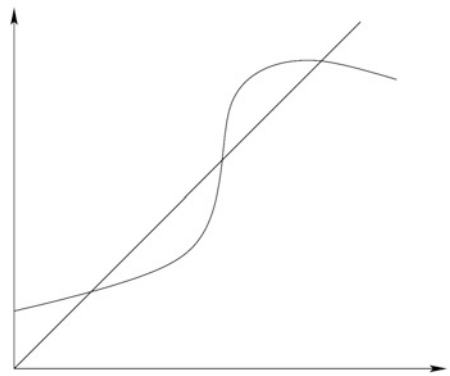


Fig. 3. – Graph of $K_{\beta,\lambda(\beta)}(\rho)$ with $\beta > \beta_c$.

explodes in the thermodynamic limit and Gibbs measure and free energy functional indeed give very different pictures for the relevant density profiles.

The conclusion is that we should not be so ambitious to pretend that the Gibbs measure is really well described by the functional: this may be true on large but not too large domains namely such that $\varepsilon(\gamma)|\Lambda|$ is small. On much larger scales the error between effective hamiltonian and functional becomes important.

Indeed the functional does not take into account fluctuations: rarely yet with finite frequency there are large deviations from the optimal behavior predicted by the functional. Such fluctuations have a macroscopic importance as the forbidden density interval turns out to depend on γ.

The typical configurations of a pure phase with density ρ have empirical local density close to ρ except in "small islands" where there are significant deviations from ρ and to prove phase transitions we need to control the probability of such deviations. To do that we use coarse graining but only in the region where such deviations occur. In this way the error grows only with the volume of this region (times the small factor $\varepsilon(\gamma)$). The excess free energy of the functional on the profiles describing excursions from the minimizers is large: the key point is to prove that it is proportional to the volume (of the region where the deviations occur) and so large to kill the error done in the coarse graining. This is just a rough sketch, many problems are hidden both technical and theoretical, and here I just refer to [34] and [43],

THEOREM 5.2. – *In the LMP model in dimensions $d \geq 2$ there is $\beta^* > \beta_c$ so that given any $\beta \in (\beta_c, \beta^*)$ for any $\gamma > 0$ small enough there is a "forbidden interval" $(\rho_{-;\beta,\gamma}, \rho_{+;\beta,\gamma})$. $\rho_{\pm;\beta,\gamma} \to \rho_{\pm;\beta}$ as $\gamma \to 0$.*

There are two senses in which the interval $(\rho_{-;\beta,\gamma}, \rho_{+;\beta,\gamma})$ is forbidden. There is a "thermodynamics sense" which simply means that the graph of the free energy density $f_{\beta,\gamma}(\rho)$ has a straight segment in $[\rho_{-;\beta,\gamma}, \rho_{+;\beta,\gamma}]$. The interval $(\rho_{-;\beta,\gamma}, \rho_{+;\beta,\gamma})$ is forbidden also in the sense outlined in the introduction and specified in Section 3, however a proof of the latter statement is not explicit in the literature (which states the existence of more than one DLR measures).

6. – LMP plus hard cores

While the Kac original hamiltonian (i.e. an attractive pair potential scaled with γ plus hard cores), may be regarded as a plausible schematization of the Lennard-Jones interaction, the LMP hamiltonian is certainly further away from a realistic model of interacting molecules. The LMP energy density $e(\cdot)$ should rather be seen as an effective energy due to the long tail of the interaction so that it is less sensitive to the actual position of the particles and depends only on their empirical density. The decreasing small density behavior ($\approx -\rho^2$) reflects the long range attractiveness of the interaction while repulsive forces take over at smaller distances where the density is higher ($\approx \rho^4$).

Energies at very large densities however become very sensitive to the actual position of the particles and the LMP approximation in terms of their empirical density is certainly quite rough. To improve the LMP model we can add a hard core interaction which then dominates the energy when the density grows towards the maximal, "close packing" density.

In the LMP plus hard cores model there are two terms which fight against the growth of the density, one is the ρ^4 term present in the LMP energy, the other one is the hard core interaction. By adjusting the parameters we may well separate the two effects so that the hard core interaction is "very weak" in the density regime where the LMP phase transition appears and enters into play only later when the density is much larger.

In this section we shall discuss the phase diagram of the LMP plus hard cores model, none of the properties which will be stated have been actually proved so that this section should be regarded as merely conjectural, but research is going on and hopefully something will appear in the future.

Let us start with the pure hard spheres gas, the LMP energy will be added later on. As mentioned already several times, very little is known analytically on the hard spheres gas. The only results refer to low densities (i.e. when the typical interparticle distance is much larger than the hard core radius R: $\rho R^d \ll 1$). Asymptotically as $\rho \to 0$, the entropy $s^{\mathrm{hc}}(\rho)$ behaves as

$$s^{\mathrm{hc}}(\rho) \approx s^{\mathrm{ideal}}(\rho) = -\rho\Big(\log \rho - 1\Big) \tag{6.1}$$

$s^{\mathrm{ideal}}(\rho)$ the entropy of a gas of non interacting point particles.

The "imperfect gas" where the hard core length is not neglected as in (6.1) has been much studied starting from the famous Mayer virial expansion where the equation of state of the hard sphere gas is expressed as a convergent series in the density ρ, valid for ρR^d small enough. Many attempts have been made to improve the radius of convergence of the series, but nothing is known analytically on what happens when ρR^d is no longer small.

Numerical evidence, [26], [28], [48], shows that in $d = 3$ the hard core free energy density $f^{\mathrm{hc}}(\rho)$ is linear in an interval (ρ_1, ρ_2) (which scales as R^{-d}). Such a phase transition would mark the transition from disorder to order. When $\rho < \rho_1$ entropy wins and the hard spheres positions are random and thus quite disordered. We very well know (for instance when we play the game of who puts more non overlapping discs on a table) that in disordered configurations a lot of space gets lost and at some point it becomes very hard to find room for new spheres. When such a critical condition is reached, to increase the density we need to readjust (in some region of the space) the particles disposing them in some more ordered way which accommodates for a higher density. Such a phenomenon may explain the origin of the (ρ_1, ρ_2) phase transition.

There is no physical reason to expect the LMP phase transition to disappear if instead of points we take spheres, the proof however cannot be straightforward otherwise we would work directly with the Kac model (of attractive Kac interactions among spheres). However, since the analysis on the LMP model is "robust", we may hope to be able to handle LMP plus hard cores if $\rho R^d \ll 1$, i.e. when the hard core radius R is much smaller than typical interparticle distance. We could then study the system as a perturbation of LMP because in the above regime the hard core constraint should be quite unimportant.

Coarse graining is about integrating over configurations with the "multi-canonical" constraint that the numbers N_i of particles in the cubes $C_i^{(\ell)}$ of a given partition $\pi^{(\ell)}$ are fixed. By choosing properly ℓ ($\ell \ll \gamma^{-1}$) we may consider to first order the Kac interaction independent of the actual positions of the particles in each cube and the integration within such an approximation is over particles which interact only via hard cores. If the relevant numbers N_i turn out to be such that the local densities N_i/ℓ^d are in the domain where the virial expansion applies, [37], [38], [46], [33], [42], [15], [16], we can then control the difference between entropies of hard spheres and point particles in terms of a convergent series in the particles density.

The fact that the numbers N_i cannot be dangerously large will be enforced by the repulsive ρ^4 part of the LMP energy. Such a term is absent in the Kac model where the growth of N_i is contrasted only by the hard cores interaction, for this reason in Kac the numbers N_i are typically large, while here they can be controlled by the LMP energy alone and by choosing R small we can then suppose to be in the virial expansion regime.

Recent works on cluster expansion, [44], have extended its validity to systems in the canonical ensemble (i.e. where the number of particles in a region is prescribed) and thus apply directly to the coarse graining procedure outlined above.

Conjectures on the phase diagram

We fix an inverse temperature $\beta \in (\beta_c, \beta^*)$ as in Theorem 5.2 and consider the LMP model with additional hard cores interaction with hard core length R. In agreement with the previous discussion we suppose $R^d \rho_{+,\beta} \ll 1$ ($\rho_{\pm,\beta}$ are the mean field pure phase densities in the LMP model) and the conjectures below are tacitly stated for values of γ sufficiently small.

Let us first discuss the phase diagram when we increase the chemical potential λ from $-\infty$ to $+\infty$ (with β fixed as above). We expect to see three phases, gas, liquid and solid, but while the transition gas-liquid will be sharp the liquid-solid one will be "diffuse". Let us start with λ increasing from $-\infty$. This is the gas phase regime where densities are very small and the typical interaction among particles is weak. This regime is very well understood even for general interactions and a fortiori here.

The system will stay in the gas phase till the chemical potential λ reaches a critical value $\lambda_{\beta,\gamma}$. Then a new phase appears and precisely at $\lambda_{\beta,\gamma}$ two phases exist, gas and liquid. As soon as the chemical potential increases past $\lambda_{\beta,\gamma}$ the gas phase is suppressed and only the liquid one survives. Due to the condition $R^d \rho_{+,\beta} \ll 1$ we expect that the gas and liquid densities at the transition are pretty close to those in LMP. The conjectures so far look quite solid, what follows is instead much more tentative.

If we further increase the chemical potential the liquid density will then increase with λ (but quite slowly due to the ρ^4 term in LMP). Once λ and the density become large the influence of the hard core interaction becomes more and more significant (and the analysis harder). At some large value of the chemical potential, say λ', the density will reach the value ρ_1, i.e. where the forbidden interval for the pure hard spheres system starts. A further increase of λ past λ' would cause a jump (from ρ_1 to ρ_2 in the pure hard sphere gas, but such a jump is not compatible with the LMP energy which (for large densities) is in its strongly convex region.

This is the competition between forces on very different scales discussed in the introduction, recall the Stefan Müller example. We thus expect to see microstructures, namely on scales smaller than γ^{-1} the hard core interaction wins and we locally see one or the other of the two allowed densities ρ_1 and ρ_2: they will be however spatially arranged in the right proportion so to have on a larger scale the uniform density ρ which the LMP energy demands. We thus observe as λ increases past λ' clusters of the solid phase (of density ρ_2) forming in some sui-

table pattern. The clusters size increases with λ till invading the whole space, i.e. at $\lambda = \lambda''$, namely when the total density is ρ_2: the competition between LMP and hard core interactions is at this point over. Further increases of λ past λ'' only cause an increase of density past ρ_2, with the solid being the only existing phase at all scales.

The corresponding picture in a canonical ensemble setting, where the order parameter is no longer the chemical potential λ but the particles density ρ, is as follows. Notation are as in Section 3, where we have introduced partitions $\pi^{(\ell)}$ into cubes $C_i^{(\ell)}$).

The gas phase exists when the density ρ is below a critical value $\rho'_{-,\beta,\gamma}$ close (for R small) to the LMP value $\rho_{-,\beta,\gamma}$. When $\rho \leq \rho'_{-,\beta,\gamma}$, "typically" "most cubes" $C_i^{(\ell)}$ have density "essentially" equal to ρ. "Typically" "most" and "essentially" in the sense explained in Section 3.

In the forbidden density interval $(\rho'_{-,\beta,\gamma}, \rho'_{+,\beta,\gamma})$ ($\rho'_{+,\beta,\gamma}$ close for small R to the LMP value $\rho_{+,\beta,\gamma}$) typically most cubes $C_i^{(\ell)}$ are plus or minus cubes, namely they have density essentially equal to $\rho'_{\pm;\beta,\gamma}$. The minus and plus cubes are those where we see the gas or the liquid phases. ℓ can be arbitrarily large and we still see in most $C_i^{(\ell)}$ a pure phase (either the liquid or the gas phase), but the statement holds provided the region Λ is large enough (in terms of ℓ). This means that the clusters of each phase are large and not too dispersed, a statement which will be much strengthened in the next section.

As the density ρ increases past $\rho'_{+;\beta,\gamma}$, "typically" "most cubes" $C_i^{(\ell)}$ have density "essentially" equal to ρ, analogously to the picture we have seen for the gas phase.

However when ρ increases past ρ_1 we see two scales. For small ℓ (much smaller than the LMP interaction range γ^{-1}) typically most cubes $C_i^{(\ell)}$ have density essentially equal to ρ_1 or ρ_2, the phase in the cubes ρ_1 being liquid, in the others solid. For larger values of ℓ, $\ell \gg \gamma^{-1}$ instead typically most cubes $C_i^{(\ell)}$ have density essentially equal to ρ. These cubes, apparently "normal" have however microstructures, since when observed on smaller scales exhibit a different structure (droplets of density ρ_1 and ρ_2). When ρ is past ρ_2 only the solid phase is present and we see ρ at all scales.

7. – Wulff shape and microstructures

Phases may coexist with different geometries, the interface may be a single smooth surface or it may break into very many pieces. The former case arises when the surface tension is the dominant force, then, in the presence of a phase transition with a canonical constraint, the phases separate in such a way to minimize the integral of the surface tension over the interface (the Wulff problem) compatibly with the canonical constraint. Microstructures instead arise

when other forces than surface tension enter into play: on some small scale surface tension wins and we see one phase or the other, but when averaging over larger scales other forces prevail and we see a constant density.

So far we have considered thermodynamic potentials like the free energy density and entropy, which are all bulk quantities (as they are obtained by computing the free energy or the entropy of the system in a large region Λ, then dividing by the volume $|\Lambda|$, and finally taking the thermodynamic limit $|\Lambda| \to \infty$). Surface tension instead is a thermodynamic potential of a different kind as it involves surface rather than volume properties, it thus belongs to a completely new and indeed much more complex chapter of statistical mechanics.

The primitive notion in the macroscopic theory of phase coexistence (with only two pure phases having density ρ' and $\rho'' > \rho'$) is that states are described by functions $u(r)$, $r \in \Omega$, Ω the macroscopic region where the system is confined (supposed to be the unit torus in $\mathbb{R}^d$), with values ρ' and ρ'' ("local equilibrium assumption"). The free energy of such states is

$$\Phi(u) = \int_{\Sigma} \sigma(\vec{n}) dr \tag{7.1}$$

where $\Sigma := \partial\{r : u(r) = \rho'\}$ (the boundary of the region where $u = \rho'$) is a smooth surface, $\vec{n}$ the unit normal on Σ and $\sigma(\vec{n}) \geq 0$ the surface tension that we suppose to be a strictly positive smooth function on the unit ball.

"Geometric measure theory" shows that it is possible to extend Φ to functions u which are ρ', ρ'' valued and have "bounded variation". In fact, measure theoretically, the boundary of a BV set is almost everywhere C^1 relative to the Hausdorff measure of codimension 1, [9], [14], [4]. Thus modulo sets of zero measure we may regard the surface as C^1 and (7.1) naturally extends to such u. Any other state which is not BV has an infinite free energy cost: thus the cost of an interface controls its regularity (in the C^1 sense) but only modulo a region of the interface of zero measure.

In the mesoscopic theory states are described by functions $u(\,\cdot\,)$ with values in $\mathbb{R}_+$ (the local equilibrium assumption is dropped here) and their free energy is a functional $F(u)$, at the moment we restrict for simplicity to the Ginzburg-Landau functional (1.1), non local functionals will be considered later. Suppose that the potential W in (1.1) has value 0 at ρ' and ρ'' and it is everywhere else strictly positive. We call F_Λ the functional (1.1) defined on non negative functions u on the torus $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ such that $|\nabla u|^2$ is integrable. Our aim is to derive the macroscopic functional (7.1) from F_Λ in the thermodynamic limit $|\Lambda| \to \infty$. The first task is to relate macroscopic and mesoscopic states. Since they are functions on different spaces, Ω and Λ, we start by mapping Λ to Ω by $r \to r/L$, L the side of Λ. Then F_Λ becomes the functional

$$F^{(L)}(v) = F_\Lambda(u), \quad v(r) = u(Lr) \tag{7.2}$$

defined on non negative valued functions v on the torus Ω such that $|\nabla v|^2$ is integrable. Explicitly

$$F^{(L)}(v) = L^d \int_\Omega \{W(v) + L^{-2}|\nabla v|^2\} dr \tag{7.3}$$

In the meso-theory macroscopic states (recall that they are BV functions on Ω with values ρ' and ρ'') are not simply a subset of all the meso-states as they are not in the domain of $F^{(L)}$. To identify the macro-states u we use the L^1 distance and say that the meso-state v "recognizes" the macro-state u with accuracy $\varepsilon > 0$ if $|v - u|_{L^1} \leq \varepsilon$. Then the meso-free energy of u (with accuracy ε and meso/macro scale L) is

$$\Phi_\varepsilon^{(L)}(u) := \frac{1}{L^{d-1}} \inf_{|v-u|_{L^1} \leq \varepsilon} F^{(L)}(v) \tag{7.4}$$

The normalizing factor L^{d-1} foresees the fact that the mesoscopic free energy of a state with coexisting phases scales as the surface (if the interface is nice where nice means BV according to the macroscopic theory). Explicitly

$$\Phi_\varepsilon^{(L)}(u) := \inf_{|v-u|_{L^1} \leq \varepsilon} \int_\Omega \{LW(v) + L^{-1}|\nabla v|^2\} dr \tag{7.5}$$

We are thus led to conjecture that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{L \to \infty} \Phi_\varepsilon^{(L)}(u) = \Phi(u) \tag{7.6}$$

with $\Phi(u)$ the functional defined in (7.1). This is indeed a theorem, [40], [7]. The surface tension in (7.1) is isotropic, its explicit value is

$$\sigma = 2 \int_{\rho'}^{\rho''} \sqrt{W(s)} ds \tag{7.7}$$

It is remarkable and in some sense surprising how the above considerations motivated by physical intuitions fit exactly in the scheme devised by De Giorgi in the calculus of variations which led to the introduction of the notion of Gamma convergence, see again [7] for details.

Analogous results have been proved for non local functional as those arising from particles or spins systems with Kac potentials. See [3], [5] and [43], for the case of Ising systems with Kac potentials where the limit free energy and the surface tension are explicitly computed. An extension to more general systems and a general definition of surface tension can be found in [1] and [2].

In the microscopic theory we follow the approach used in the mesoscopic theory and since in the previous considerations we had not fixed the total mass here as well we do not fix the number of particles in Λ. The equilibrium state in

such a case is described by the gran canonical Gibbs measure $\mu_{\beta,\lambda,\Lambda}$ which is the probability on $\mathcal{X}_\Lambda := \bigcup_{n\geq 0} \Lambda^n$ defined so that its restriction to Λ^n is:

$$d\mu_{\beta,\lambda,\Lambda}(q) = \frac{1}{Z_{\beta,\lambda,\Lambda}} e^{-\beta(H(q)-\lambda n)} \frac{dq}{n!}, \quad q \in \Lambda^n \tag{7.8}$$

λ being the "chemical potential", $Z_{\beta,\lambda,\Lambda}$ the gran canonical partition function.

As in the mesoscopic theory we need to equilibrate the two phases: the existence of a forbidden interval translates in the language of the gran canonical Gibbs measures into the following statement. There is $\lambda = \lambda_\beta$ so that

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{L\to\infty} \mu_{\beta,\lambda_\beta,\Lambda}\left[\left|\frac{|q|}{|\Lambda|} - s\right| < \varepsilon\right] = \frac{1}{2}, \quad s = \rho', \rho'' \tag{7.9}$$

Proceeding as in the mesoscopic theory and calling L the side of Λ, we set

$$\rho^{(L,\ell)}(r,q) := \frac{|q \cap C^{(\ell)}_{Lr}|}{\ell^d}, \quad q \in \mathcal{X}_\Lambda, \ r \in \Omega \tag{7.10}$$

the empirical density on scale ℓ (i.e. relative to the partition $\pi^{(\ell)}$) translated into a function on the torus Ω. Then, in analogy with (7.5) and recalling that the free energy is related to minus the log of the Gibbs measure we set

$$\Phi^{(L,\ell)}_\varepsilon(u) := -\frac{1}{\beta L^{d-1}} \log\left(\mu_{\beta,\Lambda,\lambda}\left[|\rho^{(L,\ell)}(\cdot,q) - u|_{L^1} \leq \varepsilon\right]\right) \tag{7.11}$$

and define the free energy of the macro-state u as

$$\Phi(u) := \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{\ell\to\infty} \liminf_{L\to\infty} \Phi^{(L,\ell)}_\varepsilon(u) \tag{7.12}$$

If $\Phi(u)$ has the form (7.1) we have then derived the macroscopic theory from the theory of Gibbs measures and identified the surface tension of the particle system. Results have been obtained so far only for Ising systems, we shall give some details after explaining the relation with the Wulff problem.

Macroscopic theory. The optimal shape for the coexistence of two phases with the total mass constraint is a minimizer of the functional (7.1) with the mass constraint. This problem has been solved by Wulff with an explicit construction of the minimizing surface, see for instance [25].

Since in the mesoscopic and microscopic theories the limit functional is (7.1) it is natural to conjecture that also the optimal state converges to the Wulf shape. This requires an inversion of limits as one should first minimize the functional and then take the thermodynamic limit. To interchange these operations a coercivity property is needed, we refer to [7] for an analysis of the mesoscopic theory.

The Wulff problem in a statistical mechanics context has been first studied by Dobrushin, Kotecký and Shlosman [13] for the n.n. ferromagnetic Ising model in

$d = 2$ at low temperatures. The proof uses sharp estimates on contours which are used to define the interface at the spin level. By such estimates it is possible to control the probability that the interface passes through a given set of points, defining a polygonal structure which approximates the Wulff shape. The result has then been extended to higher temperatures but the method is intrinsically two dimensional. The first paper where ideas of Gamma convergence have been used in a statistical mechanics context was the above paper [3] on the Ising model with Kac interactions. The result however was obtained in the spirit of the Lebowitz-Penrose theory that is in the thermodynamic limit followed by the scaling limit $\gamma \to 0$.

There were afterwards several generalization in this same context, but the first results on Wulff shape in general dimensions (obtained by using the ideas of Gamma convergence) are in [6] and [8] which have then been followed by many other papers with extensions and improvements.

We shall next briefly discuss the case where the interface breaks into many small pieces giving rise to microstructures. For brevity we shall discuss only the issue at the mesoscopic level, for particle models the analysis is still in fieri and rigorous proofs are lacking. For concreteness we consider a specific model, the Ginzburg-Landau functional $F^{\mathrm{gl}}_{\Lambda}(u)$ defined in (1.2) plus a non local term:

$$F_{\gamma;\Lambda}(u) := F^{\mathrm{gl}}_{\Lambda}(u) + \int_{\Lambda} (J_\gamma * u)^2 dr \tag{7.13}$$

where $u : \Lambda \to \mathbb{R}$ (which is interpreted as a magnetization density); the potential W in (1.2) is taken here equal to $W(s) = (s^2 - 1)^2$.

Without the non local term (i.e. setting $\gamma = 0$) there is a phase transition, the forbidden interval for the magnetization being $(-1, 1)$. Namely the graph of the limit free energy density is constantly 0 in $s \in (-1, 1)$

$$\lim_{|\Lambda|\to\infty} \inf \left\{ \frac{F^{\mathrm{gl}}_{\Lambda}(u)}{|\Lambda|} \;\middle|\; \int_{\Lambda} u = s|\Lambda| \right\} = 0 \tag{7.14}$$

and a recovering sequence is made by a regularization of profiles with $u = \pm 1$ (in the right proportion), as discussed in the introduction.

If we consider the problem with the non local term we have for $s \in (-1, 1)$:

$$\lim_{\gamma\to 0} \lim_{|\Lambda|\to\infty} \inf \left\{ \frac{F_{\gamma;\Lambda}(u)}{|\Lambda|} \;\middle|\; \int_{\Lambda} u = s|\Lambda| \right\} = \frac{s^2}{2} \tag{7.15}$$

In the double limit first $|\Lambda| \to \infty$ and then $\gamma \to 0$, the phase transition has disappeared and the limit free energy density is strictly convex. We conjecture that for $\gamma > 0$ small enough there is no phase transition and minimizers at finite Λ will be functions made by a regularization of profiles with $u = \pm 1$ (in the right

proportion). The scale where the function varies is determined by the non local term and scale as ℓ with $\ell \ll \gamma^{-1}$. Thus if we look on scales smaller than ℓ we essentially see either 1 or -1, but on the average on scales much larger than ℓ, we see the imposed density s.

Proofs have been obtained when $J_\gamma * J_\gamma$ is "reflection positive", [20], and we conclude the discussion on these topics referring to the literature, in particular see [21], [22], [23], [24], [10], [12].

REFERENCES

[1] G. Alberti - G. Bellettini, *A non local anisotropic model for phase transition. Part I: the optimal profile problem*. Math. Ann., **310** (1998), 527-560.

[2] G. Alberti - G. Bellettini, *A non local anisotropic model for phase transition: asymptotic behaviour of rescaled energies.* European J. Appl. Math., **9** (1998), 261-284.

[3] G. Alberti - G. Bellettini - M. Cassandro - E. Presutti, *Surface tension in Ising systems with Kac potentials*. J. Stat. Phys., **82** (1996), 743-796.

[4] L. Ambrosio - N. Fusco - D. Pallara, *Functions of bounded variations and free discontinuity problems*. Oxford Science Publications. (2000).

[5] G. Bellettini - M. Cassandro - E. Presutti, *Constrained minima of non local free energy functionals*. J. Stat. Phys., **84** (1996), 1337-1349.

[6] T. Bodineau, *The Wulff construction in three and more dimensions.* Comm. Math. Phys., **207** (1999), 197-229.

[7] A. Braides, *Gamma-Convergence for Beginners.* Series: Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, number 22 (2002).

[8] R. Cerf - A. Pisztora, *On the Wulff crystal in the Ising model.* Ann. Probab., **28** (2000), 947-1017.

[9] G. Dal Maso, *An introduction to Gamma convergence.* Birkhäuser (1993).

[10] A. De Masi - I. Merola - E. Presutti - Y. Vignaud, *Coexistence of ordered and disordered phases in Potts models in the continuum.* J. Stat. Phys., **134** (2009), 243.

[11] A. De Masi - E. Orlandi - E. Presutti - L. Triolo, *Uniqueness of the instanton profile and global stability in non local evolution equations.* Rendiconti di Matematica, **14** (1993), 693-723.

[12] A. De Simone - R. V. Kohn - F. Otto - S. Müller, *Recent analytical developments in micromagnetics in The Science of Hysteresis II: Physical Modeling, Micromagnetics, and Magnetization Dynamics.* G. Bertotti and I. Mayergoyz eds., pp. 269-381, Elsevier (2001).

[13] R. L. Dobrushin - R. Kotecký - S. Shlosman, *The Wulff construction: a global shape for local interactions.* Amer. Math. Soc. Providence (1992).

[14] L. C. Evans - R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Math. CRC Press, Boca Raton (1992).

[15] R. Fernandez - A. Procacci, *Cluster expansion for abstract polymer models. New bounds from an old approach*, Comm. Math. Phys., **274**, n. 1 (2007), 123-140.

[16] R. Fernandez - A. Procacci - B. Scoppola, *The Analyticity Region of the Hard Sphere Gas. Improved Bounds*. J. Stat. Phys., **128** (2007), 1139-1143.

[17] D. J. Gates - O. Penrose, *The van der Waals limit for classical systems. I. A variational principle.* Commun. Math. Phys., **15** (1969), 255-276.

[18] D. J. GATES - O. PENROSE, *The van der Waals limit for classical systems. II. Existence and continuity of the canonical pressure.* Commun. Math. Phys., **16** (1970), 231-237.

[19] D. J. GATES - O. PENROSE, *The van der Waals limit for classical systems. III. Deviation from the van der Waals-Maxwell theory.* Commun. Math. Phys., **17** (1970), 194-209.

[20] A. GIULIANI - J. L. LEBOWITZ - E. H. LIEB, *Periodic Minimizers in 1D Local Mean Field Theory*. Commun.Math.Phys., **286** (2009), 163-177.

[21] A. GIULIANI - J. L. LEBOWITZ - E. H. LIEB, *Ising models with long-range antiferromagnetic and short-range ferromagnetic interactions.* Phys. Rev. B, **74** (2006), 064-420.

[22] A. GIULIANI - J. L. LEBOWITZ - E. H. LIEB, *Striped phases in two dimensional dipole systems*. Phys. Rev. B, **76** (2007), 184-426.

[23] A. GIULIANI - J. L. LEBOWITZ - E. H. LIEB, *Modulated phases of a 1D sharp interface model in a magnetic field.* Phys. Rev. B, **80** (2009), 134-420.

[24] A. GIULIANI - J. L. LEBOWITZ - E. H. LIEB, *Checkerboards, stripes, and corner energies in spin models with competing interaction.* Phys. Rev. B, **84** (2011), 064205-1–10.

[25] M. E. GURTIN, *Thermodynamics of evolving phase boundaries in the plane*. Oxford Science Publications (1993).

[26] J. P. HANSEN - I. R. MCDONALD, *Theory of Simple Liquids.* Academic, London (1976).

[27] R. C. HEITMANN - C. RADIN, *The ground state for sticky disks.* J. Statist. Phys., **22** (1980), 281-287.

[28] W. G. HOOVER - F. H. REE, J. Chem. Phys., **49** (1968), 3609.

[29] M. KAC - G. UHLENBECK - P. C. HEMMER, *On the van der Waals theory of vapor-liquid equilibrium.* I. *Discussion of a one dimensional model.* J. Math. Phys., **4** (1963), 216-228.

[30] M. KAC - G. UHLENBECK - P. C. HEMMER, *On the van der Waals theory of vapor-liquid equilibrium.* II. *Discussion of the distribution functions.* J. Math. Phys., **4** (1963), 229-247.

[31] M. KAC - G. UHLENBECK - P. C. HEMMER, *On the van der Waals theory of vapor-liquid equilibrium.* III. *Discussion of the critical region*. J. Math. Phys., **5** (1964), 60-74.

[32] M. K.-H. KIESSLING - J. K. PERCUS, *Hard-sphere fluids with chemical self-potentials.* J. Math. Phys., **51** , no. 015206, 42, 82B21 (2010).

[33] R. KOTECKÝ - D. PREISS, *Cluster expansion for abstract polymer models*, Comm. Math. Phys., **103** (1986), 491-498.

[34] J. L. LEBOWITZ - A. MAZEL - E. PRESUTTI, *Liquid-vapor phase transitions for systems with finite-range interactions.* J. Statist. Phys., **94** (1999), 955-1025.

[35] J. L. LEBOWITZ - O. PENROSE, *Rigorous treatment of the Van der Waals-Maxwell theory of the liquid vapour transition*. J. Math. Phys., **7** (1966), 98-113.

[36] J. L. LEBOWITZ - E. PRESUTTI, *Statistical mechanics of unbounded spins*. Comm. Math. Phys., **50** (1976), 195-218.

[37] J. E. MAYER, *Theory of Real Gases*, Handbuch der Physik, **12** (Springer-Verlag, Berlin, 1958).

[38] J. E. MAYER - M. G. MAYER, *Statistical Mechanics*, New York, John Wiley and Sons (1940).

[39] R. A. MINLOS - YA. G. SINAI, *Phenomenon of Phase Separation at Low Temperatures in Certain Lattice Models of a Gas*. Soviet Physics Doklady, **12** (1968), 688.

[40] L. Modica - S. Mortola, *Un esempio di Gamma convergenza.* Boll.Un. Mat.Ital. B (5), **14** (1977), 285-299.
[41] O. Penrose - J. L. Lebowitz, *Rigorous treatment of metastable states in the van der Waals-Maxwell theory.* J. Stat. Phys., **3** (1971), 211-236.
[42] S. Poghosyan - D. Ueltschi, *Abstract cluster expansion with applications to statistical mechanical systems*. J. of Math. Phys., **50** (2009), 053-509.
[43] E. Presutti, *Scaling Limits in Statistical Mechanics and Microstructures in Continuum Mechanics.* Heidelberg: Springer, Theoretical and Mathematical Physics (2008).
[44] E. Pulvirenti - D. Tsagkarogiannis, *Cluster expansion in the canonical ensemble*. Submitted to Commun. Math. Phys.
[45] C. Radin, *The ground state for soft disks.* J. Statist. Phys., **26** (1981), 365-373.
[46] D. Ruelle, *Statistical Mechanics: rigorous results*, World Scientific, Imperial College Press, 1969.
[47] Ya. G. Sinai, *Theory of phase transitions: rigorous results.* Akademiai Kiadó. Budapest (1982).
[48] R. J. Speedy, J. Phys., Condens. Matter, **10** (1998), 4387.
[49] F. Theil, *A proof of crystallization in two dimensions.* Comm. Math. Phys., **262** (2006), 209-236.
[50] Y. Au Yeung - G. Friesecke - B. Schmidt, *Minimizing atomic configurations of short range pair potentials in two dimensions: crystallization in the Wulff shape.* arXiv:0909.0927v1 [math.AP] (2009).
[51] M. Zahradnik, *A short course on the Pirogov-Sinai theory.* Rend. Mat. Appl., **18** (1998), 411-486.

Errico Presutti, Dipartimento di Matematica,
Università di Roma Tor Vergata, Roma, 00133, Italy
E-mail: presutti@mat.uniroma2.it

Received December 16, 2011 and in revised form January 29, 2012

Stefano Serra-Capizzano: Strutture, strutture nascoste e analisi spettrale nei metodi multigrid e nel precondizionamento

Stefano Serra-Capizzano
Dipartimento di Fisica e Matematica, Università dell'Insubria
email: stefano.serrac@uninsubria.it

Sunto

Problemi di algebra lineare numerica e segnatamente la soluzione di sistemi lineari di elevatissime dimensioni sono un normale passo intermedio quando si voglia descrivere quantitativamente fenomeni complessi, modellati da equazioni nel continuo, ad esempio integrali e/o differenziali, o già direttamente nel discreto, come accade nel trattamento di segnali, di immagini o per problemi su grafi.

Con le dimensioni tipiche in tali contesti, 10^{10} ad esempio nel problema del web-ranking di Google, l'uso di tecniche dirette è sconsigliato sia per motivi di stabilità numerica, crescita degli errori dovuti alla finitezza della precisione di macchina, sia di costo computazionale complessivo. La comunità numerica ha dunque indicato nei metodi iterativi un possibile modo per superare tali difficoltà ed i motivi sono i seguenti: i metodi iterativi rispettano la struttura del problema, portando ad una contrazione del costo computazionale del prodotto matrice-vettore, riducono il calcolo della soluzione approssimata ad un numero finito di passi in cui l'operazione più costosa è proprio il prodotto matrice-vettore, l'analisi di tale numero di passi necessari a garantire la precisione desiderata è possibile se si conoscono proprietà spettrali delle matrici coinvolte.

In questa comunicazione si sceglie una classe di problemi "shift invariant" (Toeplitz) o riconducibile al caso "shift invariant" e si discutono alcuni risultati significativi degli ultimi trenta anni. In particolare si analizzano criticamente i risultati ottenuti in ambito multigrid ed in ambito di precondizionamento, in termini di costo computazionale complessivo ed in particolare in termini delle proprietà spettrali delle strutture matriciali coinvolte.

In questa direzione si fa menzione alla classe di successioni di matrici localmente Toeplitz generalizzate, GLT, che forniscono un ambito nel quale l'analisi spettrale può essere naturalmente ricondotta alla individuazione di un simbolo, che a sua volta porta informazioni dal problema continuo o discreto di provenienza. La classe GLT è di interesse poiché contiene strutture provenienti da un ricco ambito di applicazioni ed in particolare contiene le successioni di matrici di Toeplitz associate ad un simbolo e virtualmente ogni approssimazione con metodi "locali" (differenze finite, elementi finiti, volumi finiti) di operatori integrali e differenziali con coefficienti variabili.

Si fanno cenni ad alcune applicazioni per dare evidenza tangibile dei risultati ottenibili e delle tecniche discusse.

Susanna Terracini: Le traiettorie paraboliche della meccanica celeste come transizioni di fase minimali

Susanna Terracini
Dipartimento di Matematica, Università di Milano-Bicocca
email: susanna.terracini@unimib.it

Sunto

L'esistenza di traiettorie paraboliche che collegano due diverse configurazioni centrali di N corpi è un problema classico della meccanica celeste. Dato un potenziale di tipo Kepleriano anisotropo in una dimensione qualunque, positivamente omogeneo di grado $-\alpha \in (-2, 0)$, cerchiamo traiettorie globali, di energia nulla aventi due prescritte direzioni asintotiche all'infinito e che, inoltre, siano geodetiche globali per la metrica di Jacobi. Tali traiettorie corrispondono a connessioni eterocline sella-sella sulla varietà di collisione introdotta da McGeehe e, pertanto, sono strutturalmente instabili e compaiono solo per una sottovarietà dei potenziali di codimensione uno.

Siamo in grado di dar loro una caratterizzazione variazionale in termini di un problema ausiliario di traiettorie minimali, a parametro libero, con un ostacolo. In tale modo possiamo formire una caratterizzazione completa della classe dei potenziali che ammettono tali traiettorie paraboliche minimali, e riusciamo a parametrizzarla per mezzo del grado stesso di omogeneità. Inoltre, l'esistenza delle traiettorie paraboliche minimali può essere messa in relazione con la comparsa di traiettorie minimali di collisione. Infine, in due dimensioni, la loro comparsa viene messa in relazione con con l'esistenza di una soluzioni globale liscia dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata sul ricoprimento doppio del piano.

Si tratta di una ricerca in collaborazione con V. Barutello e G. Verzini.

Intervento: Susanna Terracini,
Le traiettorie paraboliche della meccanica celeste come transizioni di fase minimali,
***Bollettino U. M. I. (9)* V (2012), 689–710**

Bollettino U. M. I.
(9) **V** (2012), 689-710

Le traiettorie paraboliche della meccanica celeste come transizioni di fase minimali (*)

SUSANNA TERRACINI

Abstract. – *Quanto segue è il testo della conferenza plenaria che ho tenuto al XVIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, in cui ho esposto il contenuto di due lavori in collaborazione con V. Barutello e G. Verzini* ([2, 3]). *In tali lavori si è sviluppato l'approccio variazionale alle traiettorie paraboliche della Meccanica Celeste, che connettono due configurazioni centrali minimali.*

1. – Introduzione

1.1 – *Il problema degli N-corpi*

Date N particelle puntiformi di masse m_i e posizioni $x_i \in \mathbb{R}^d$ e dati dei potenziali di interazione $U_{i,j}(x)$ (tali che si soddisfi il principio di azione e reazione, cioè $U_{i,j}(x) = U_{j,i}(-x)$), ci interessiamo al sistema di equazioni differenziali:

$$m_i \ddot{x}_i(t) = \sum_{j \neq i}^{N} \nabla U_{i,j}(x_i(t) - x_j(t)) \ .$$

Detta $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}$ la configurazione e $U(x) = \sum_{j<i}^{N} U_{i,j}(x_i - x_j)$ il potenziale totale. Detta $M = \mathrm{diag}(m_1, \ldots, m_N)$ abbiamo un sistema Newtoniano della forma:

$$M\ddot{x}(t) = \nabla U(x) \ .$$

Per noi i potenziali sono omegenei di grado $-\alpha$:

$$U_{i,j}(x) = \frac{m_i m_j}{|x|^\alpha}$$

e, come noto, il caso Kepleriano si ha per $\alpha = 1$. Osserviamo la presenza di

(*) Conferenza Generale tenuta a Bologna il 17 settembre 2011 in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

molte relazioni di interazione binaria (tutte le particelle interagiscono con tutte le altre). Il sistema degli N-corpi è integrabile per quadrature nel caso di due corpi, ma non lo è più non appena $N \geqslant 3$. Per questa ragione, è considerato il proprotipo di sistema complesso, essendo soggetto a diversi regimi, anche in dipendenza di valori dell masse. Innanzitutto, sono di interesse le regioni dello spazio delle fasi in cui si hanno *dinamiche regolari* (esempio: il problema della stabilità del sistema solare), lo studio delle quali coinvolge principalmente la teoria KAM e quella delle perturbazioni. È in un certo senso paradossale che, nonostante la teoria KAM sia stata in origine motivata proprio dallo studio della stabilità del sistema planetario, tale applicazione sia stata resa possibile soltanto dagli avanzamenti più recenti della teoria (si veda per esempio il recente lavoro di Chierchia e Pinzari [12]). Altrettanto imteressante è lo studio delle *regioni di instabilità* del problema degli N-corpi. Le metodologie coinvolte nel riconoscimento di orbite periodiche vieppiù complicate, ed in generale, di traiettorie non banali fanno capo sia alle teorie perturbative che a quelle proprie dell'Analisi non lineare (metodi variazionali e topologici). Un ruolo di fondamentale importanza è rivestito dalle orbite periodiche, la cui rilevanza è ben sottolineata nella celebre citazione di Poincaré:

Il semble d'abord que ce fait [l'existence de solutions périodiques] ne puisse être d'aucun intérét pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les méthodes anciennes ne sont plus applicables. On peut alors avec avantage prendre la solution périodique comme première approximation, comme orbite intermédiaire, pour employer le langage de M. Gyldén.

Il y a même plus: voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

Étant données des équations de la forme définie dans le numéro 13[1] *et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui rend ces solutions périodiques aussi précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusq'ici réputée inabordable.* [H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céléste (1892-1899), p. 82].

([1]) Poincaré considerava, in questo paragrafo, le equazioni hamiltoniane in forma canonica.

1.2 – *Minimi G–equivarianti del problema degli N-corpi*

Un capitolo notevole nello studio recente delle orbite periodiche riguarda quelle che hanno simmetrie spazio-temporali non banali. Nell'ultimo decennio ne sono state descritte diverse ed è stata elaborata una teoria sulla minimizzazione G-equivariante (si vedano per esempio le referenze [11, 23, 7, 8, 9, 20, 21, 46, 47, 22, 24]). Tale studio ha portato, per esempio, alla determinazione di orbite con le simmetrie dei gruppi di Klein delle rotazioni dei solidi platonici, nel caso di N-corpi di masse uguali (si vedano i lavori [20, 21, 24]). È da notare che, in tali casi, il potenziale ridotto ha la forma:

$$U(x) = \sum_{r \in \mathcal{R}} \frac{m_r}{\mathrm{d}(x, r)^{\alpha}}$$

qui $\mathcal{R}$ è l'insieme degli assi delle rotazioni e m_r dipende dall'ordine della rotazione. Il potenziale ridotto, come quello originario degli N-corpi peraltro, è dunque anisotropo, omogeneo di grado $-\alpha$. Dato un potenziale U come sopra, dati $a < b$, e una funzione x appartenente allo spazio di Sobolev $H^1\left((a, b); \mathbb{R}^d\right)$, consideriamo la sua *azione lagrangiana* (corrispondente alla lagrangiana $\mathcal{L}$):

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}([a, b]; x) := \int_a^b \mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t))\, \mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) := \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x).$$

Quando l'esponente di omogeneità è minore di due, se l'arco x interagisce con le singolarità del potenziale, allora l'azione può essere infinita oppure finita. Se invece $\alpha \geqslant 2$ l'azione di un arco di collisione è sempre infinita (*la strong force condition di W. Gordon*, [25]). Nell'approccio variazionale alle orbite periodiche, uno dei problemi principali è quello delle *collisioni:* in principio, infatti, le traiettorie minimali potrebbero presentare collisioni. È questo un problema strettamente collegato con il più classico problema della *regolarizzazione:*, ovvero come proseguire il moto dopo una collisione. Questo secondo aspetto ha radici più antiche nella letteratura, ed è doveroso citare le regolarizzazioni proposte da Levi-Civita, Kustaanheimo-Stiefel, Moser, Knauf ([33, 51, 41, 32]). Le tecniche di regolarizzazione prevedono un rivestimento doppio dello spazio delle configurazioni, insieme ad una riparametrizzazione. Nell'approccio variazionale, invece, si sono utilizzate approriate variazioni per dimostrare che le orbite paraboliche non hanno collisioni. Un aspetto che è stato recentemente messo in luce (a partire da [48]) riguarda il *legame fra l'esistenza di collisioni in archi minimali e l'apparire delle orbite paraboliche*. In questa conferenza mi concentrerò proprio sull'analisi di questo legame.

2. – Orbite paraboliche

Traiettorie ad energia nulla

Consideriamo il sistema conservativo

$$\ddot{x}(t) = \nabla V(x(t)), \qquad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Sigma, \tag{1}$$

dove $d \geqslant 2$, il potenziale V è regolare al di fuori di un insieme di collisioni Σ, vicino al quale ha limite $+\infty$:

$$\lim_{x \to \Sigma} V(x) = +\infty, \tag{2}$$

e infine soddisfa la condizione di normalizzazione

$$0 = \liminf_{|x| \to \infty} V(x) < V(x) \quad \forall x. \tag{3}$$

Nel seguito supporremo inoltre che

$$V \text{ sia omogeneo di grado } -\alpha, \text{ per qualche } \alpha \in (0,2). \tag{4}$$

DEFINIZIONE 2.1. – *Una* traiettoria parabolica *del sistema* (1) *è una soluzione globale e priva di collisioni che ha energia nulla:*

$$\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 = V(x(t)), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Come noto, nel problema di Keplero (cioè quando $V(x) = 1/|x|$), tutte le soluzioni intere con energia nulla disegnano delle parabole. In questo caso le orbite paraboliche possono essere definite equivalentemente come quelle soluzioni che hanno energia cinetica nulla all'infinito: $|\dot{x}(t)| \to 0$ quando $t \to \pm\infty$.

Moti asintotici e moti omotetici

Le orbite paraboliche hanno delle proprietà asintotiche notevoli, sia per quanto riguarda il modulo $|x|$ che la configurazione normalizzata $x/|x|$. Come prima cosa, $|x(t)| \to \infty$ per $t \to \pm\infty$ con un'asintotica precisa. Per descrivere il comportamento della configurazione normalizzata, ricordiamo che

DEFINIZIONE 2.2. – *Una* configurazione centrale *per V è un punto critico della restrizione di V alla sfera unitaria* $\mathbb{S}^{d-1}$.

Va osservato che *ad una configurazione centrale corrisponde un moto omotetico, a energia nulla e di collisione.* Si tratta delle traiettorie autosimilari della forma:

$$x(t) = Kt^{\frac{2}{2+\alpha}}\xi$$

Inoltre, si dimostra che la configurazione normalizzata $x(t)/|x(t)|$ "tende" all'insieme delle configurazioni centrali di V, quando $t \to \pm\infty$. In particolare, se tale insieme è discreto, avremo che

$$\frac{x(t)}{|x(t)|} \to \xi^{\pm}, \qquad \text{as } t \to \pm\infty,$$

dove $\xi^{\pm}$ sono due configurazioni centrali. *Se le configurazioni centrali sono isolate, le traiettorie paraboliche sono asintotiche alla giustapposizione di due moti omotetici (traiettorie di collisione–eiezione) associati a due configurazioni centrali.* L'andamento asintotico delle soluzioni paraboliche è stato studiato a partire da Chazy ($\sim$ 1920), fino ai lavori di Hulkover-Saari e Pollard ($\sim$ 1970) ([6, 5, 30, 42]). Il seguente enunciato si trova dimostrato in [3]: si considerano le *coordinate polari*:

$$r := |x| > 0 \qquad s := x/|x| \in \mathbb{S}^{d-1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

TEOREMA 2.3. – *Se V è un potenziale $-\alpha$-omogeneo, $\ddot{x} = \nabla V(x)$ su $(t_0, +\infty)$, $|\dot{x}|^2 = 2V(x)$ e $r(t) \to +\infty$, allora per $t \to +\infty$ valgono le seguenti relazioni, per qualche $\gamma > 0$:*

- $r(t) \sim (Kt)^{\frac{2}{2+\alpha}}$, *as* $t \to +\infty$, *dove* $K := \dfrac{\alpha+2}{2}\sqrt{2\gamma}$;
- $\dot{r}(t) \sim \sqrt{2\gamma}(Kt)^{-\frac{\alpha}{2+\alpha}}$, *as* $t \to +\infty$;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} V(s(t)) = \gamma$;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \nabla_T V(s(t)) = 0$;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(C^{\gamma}, s(t)) = 0$, $C^{\gamma} = \{s : V(s) = \gamma, \nabla_T V(s) = 0\}$, *dove* $\nabla_T V(s)$ *è la proiezione di* $\nabla V(s)$ *su* $T_s\mathbb{S}^{d-1}$.

3. – Traiettorie Morse-minimali

Data una coppia ξ^- e ξ^+ di direzioni, ci proponiamo di capire se esista un'orbita parabolica avente proprio quelle due come le sue direzioni asintotiche a $\pm\infty$. In base al Teorema 2.3, una condizione necessaria è che $\xi^{\pm}$ siano due configurazioni centrali per il potenziale: sceglieremo *due minimi del potenziale ristretto alla sfera*. Per comprendere se esse siano o meno connesse da un'orbita parabolica introduciamo la seguente classe di traiettorie minimali.

DEFINIZIONE 3.1. – *Diciamo che $x \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ è una traiettoria Morse-minimale a tempo libero di $\mathcal{A}$ di tipo parabolico con configurazioni asintotiche $\xi^{\pm}$, se*

- $\min_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| > 0$;

- $|x(t)| \to +\infty$, $x(t)/|x(t)| \to \xi^{\pm}$ *per* $t \to \pm\infty$;
- *per ogni* $a<b$, $a'<b'$, *e* $z \in H^1(a', b')$, *si ha*

$$z(a') = x(a),\ z(b') = x(b) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}([a,b];x) \leqslant \mathcal{A}([a',b'];z).$$

In qualche caso saremo interessati in minimi locali invece che globali, eventualmente soddisfacenti qualche condizione di carattere topologico.

La metrica di Jacobi

Le traiettorie Morse-minimali minimizzano il problema ad estremi fissi associati al funzionale di Maupertuis' (cfr. [4])

$$\mathcal{M}(x) = \int_0^1 |\dot{x}|^2 \cdot \int_0^1 V(x)$$

e sono *geodetiche minimali per la metrica di Jacobi*:

$$g_{i,j}(x) = V(x)\delta_{i,j} = \frac{V(x/|x|)}{|x|^{\alpha}}\delta_{i,j}\ .$$

Si tratta quindi di *geodetiche di una metrica con una singolarità conica*.

4. – Instabilità strutturale delle orbite paraboliche fra minimi del potenziale

Come vedremo, non c'è necessità alcuna che un potenziale V ammetta traiettorie Morse-minimali che connettono *due configurazioni centrali minimali* assegnate, anzi, si tratta di un caso molto improbabile, soprattutto se le due configurazioni sono dei minimi del potenziale ristretto alla sfera *cioè delle configurazioni centrali minimali*.

Per far fronte a questa intrinseca instabilità strutturale abbiamo bisogno di introdurre un parametro ausiliario e cercare le orbite paraboliche come coppie traiettoria-parametro. Per chiarire il ruolo del parametro aggiuntivo, è opportuno lasciare che il potenziale varî in un insieme e descrivere la struttura dell'insieme dei potenziali omogenei che posseggono una traiettoria Morse-minimale.

Per fissare le idee, occupiamoci per un momento del caso bidimensionale. Il caso del potenziale kepleriano anisotropo è stato studiato da Gutzwiller e Devaney ([27, 28, 15]). Ora guardiamo il problema con gli occhi di Devaney, che propone una variante notevole delle coordinate di McGehee ([38]), nelle quali il flusso del problema di Keplero anisotropo si può regolarizzare attaccando allo spazio delle fasi la *varietà delle collisioni*.

Sia

$$z = \sqrt{2U(\vartheta)}$$

e, posti $x = re^{i\theta}$, $\dot{x} = r^{-\alpha/2} z e^{i\varphi}$, si introduca un nuovo parametro temporale τ attraverso la relazione

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = z r^{1+\alpha/2} \ .$$

Ora, riscriviamo il sistema come (qui " $'$ " denota la derivata rispetto a τ)

$$\begin{cases} r' = rz^2 \cos(\varphi - \vartheta) = 2rU(\vartheta)\cos(\varphi - \vartheta) \\ z' = zU'(\vartheta)\sin(\varphi - \vartheta) \\ \vartheta' = z^2 \sin(\varphi - \vartheta) = 2U(\vartheta)\sin(\varphi - \vartheta) \\ \varphi' = U'(\vartheta)\cos(\varphi - \vartheta) + \alpha U(\vartheta)\sin(\varphi - \vartheta). \end{cases} \tag{6}$$

Il sistema (6) contiene un sottosistema indipendente 2×2:

$$\begin{cases} \vartheta' = 2U(\vartheta)\sin(\varphi - \vartheta) \\ \varphi' = U'(\vartheta)\cos(\varphi - \vartheta) + \alpha U(\vartheta)\sin(\varphi - \vartheta). \end{cases} \tag{7}$$

I punti stazionari del sottosistema hanno la forma (ϑ^*, φ^*), dove $U'(\vartheta^*) = 0$ e $\sin(\varphi^* - \vartheta^*) = 0$. *Dunque una traiettoria asintotica a due configurazioni centrali minimali corrisponde ad una connessione eteroclina fra due punti di sella.* I punti stazionari invece corrispondono a *moti omotetici* (entranti o uscenti), cioè che lasciano fissa la configurazione normalizzata. Sono sempre dei moti di collisione.

Genericamente, *la varietà instabile di una sella finisce direttamente in un pozzo, mentre la varietà stabile esce da una sorgente.*

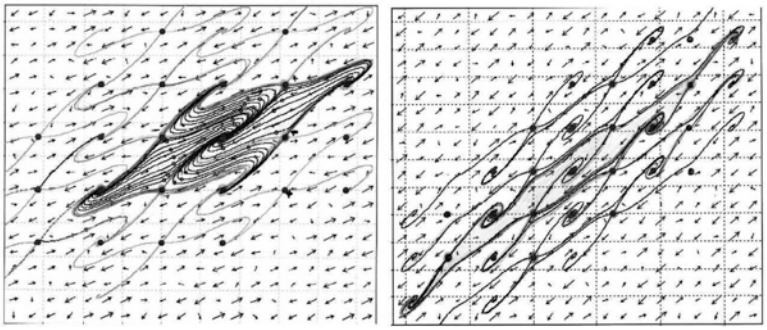


Fig. 1. – Qui $U(\vartheta) = 2 - \cos(2\vartheta)$, e $\alpha = 0.5$ (a sinistra) oppure $\alpha = 1$ (a destra). Concentriamo la nostra attenzione sulle selle $(0, \pi)$ e (π, π): si vede dalla figura che i due sistemi dinamici non sono topologicamente equivalenti. Ne deduciamo l'esistenza, per alcuni $\bar{\alpha} \in (0.5, 1)$, di una connessione eteroclina fra le selle $(0, \pi)$ e (π, π).

5. – In e out

Una classe di funzionali omogenei

Ora fissiamo una configurazione centrale di entrata ed una di uscita $\xi^+ \neq \xi^-$ in $\mathbb{S}^{d-1}$ e $U_{\min} > 0$, e definiamo gli spazi metrici

$$\mathcal{U} = \left\{ U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{S}^{d-1}) : \begin{array}{l} s \in \mathbb{S}^{d-1} \Longrightarrow U(s) \geqslant U(\xi^\pm) = U_{\min}; \\ \exists \delta > 0, \mu > 0 \text{ tale che } |s - \xi^\pm| < \delta \\ \Longrightarrow U(s) - U(\xi^\pm) \geqslant \mu |s - \xi^\pm|^2 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{V} = \Big\{ (U, \alpha) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{S}^{d-1}) \times (0, 2) : \ U \in \mathcal{U} \Big\},$$

quest'ultimo dotato della distanza prodotto. Con un po' di abuso, identificheremo sistematicamente un elemento $(U, \alpha) \in \mathcal{V}$ con l'estensione omogenea della prima componente:

$$\mathcal{V} \ni V = (U, \alpha) \quad \leftrightarrow \quad V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}; \mathbb{R}),\ V(x) := \frac{U(x/|x|)}{|x|^\alpha} \ .$$

OSSERVAZIONE 5.1. – (1) *Per tutti i potenziali della classe, $\xi^\pm$ sono configurazioni centrali minimali e non degeneri.*

(2) *È da notare che sono esclusi dalla nostra classe quei potenziali che presentano singolarità sulla sfera, come quello proprio del problema degli N-corpi, o quello ridotti per simmetrie. Ugualmente abbiamo escluso potenziali con punti critici degeneri. Non riteniamo che si tratti di una limitazione troppo grave, giacché la gran parte dei risultati si possono recuperare anche in casi degeneri e/o singolari con opportune passaggi al limite in seguito a procedimenti di approssimazione.*

La proprietà di un potenziale di ammettere traiettorie paraboliche Morse-minimali è legata al suo comportamento relativamente ai problemi di minimo ad estremi fissi.

Per ogni potenziale $V \in \mathcal{V}$, definiamo il valore

$$c(U, \alpha) := \inf \big\{ \mathcal{A}([a, b]; x) : a < b,\ x \in H^1(a, b),\ x(a) = \xi^-,\ x(b) = \xi^+ \big\};$$

non è difficile provare che il minimo è assunto, eventualmente su una traiettoria di collisione. Più precisamente, ricordando che un moto omotetico ha configurazione normale costante, vale il risultato seguente.

PROPOSIZIONE 5.2 ([3]). – *Sia $U \in \mathcal{V}$; si pone l'alternativa:*

(1) *$c(U, \alpha) = 4\sqrt{2U_{\min}}/(2 - \alpha)$ è realizzato dalla giustapposizione di due archi di moto omotetico, il primo che connette ξ^- all'origine e il secondo l'origine a ξ^+;*

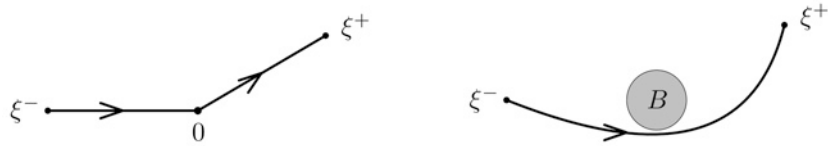


Fig. 2. – A sinistra, $c(U,\alpha)$ è realizzato dall'arco di collisione-eiezione (caso (1) della Proposizione 5.2); a destra $c(U,\alpha)$ è assunto da una traiettoria di non collisione (caso (2) della Proposizione) 5.2. Nel secondo caso, esiste un disco B, centrato nell'origine, tale che ogni minimo di $c(U,\alpha)$ non interseca B.

(2) $c(U,\alpha) < 4\sqrt{2U_{\min}}/(2-\alpha)$, *ed è realizzato da un insieme di traiettorie la cui distanza minima dall'origine è positiva.*

Distinguiamo i potenziali con archi minimali di collisione da quelli i cui archi minimali non passano per l'origine:

$$\mathrm{In} := \left\{ V = (U,\alpha) \in \mathcal{V} : c(U,\alpha) = 4\sqrt{2U_{\min}}/(2-\alpha) \right\},$$
$$\mathrm{Out} := \left\{ V = (U,\alpha) \in \mathcal{V} : c(U,\alpha) < 4\sqrt{2U_{\min}}/(2-\alpha) \right\}.$$

Si vede facilmente che i due insiemi sono disgiunti e che la loro unione è l'intero $\mathcal{V}$; in più, In *è chiuso mentre* Out *è aperto*. Ci interessa la frontiera comune della partizione:

$$\Pi := \partial\,\mathrm{In} \cap \partial\,\mathrm{Out}.$$

Intuitivamente si tratta di un oggetto di codimensione uno. La proprietà di separazione della frontiera comune è messa in luce dal lemma seguente.

LEMMA 5.3 ([3]). – *Esistono un aperto non vuoto $\Sigma \subset \mathcal{U}$ e una funzione continua $\bar{\alpha} : \Sigma \to (0,2)$ tali che*

$$\Pi = \{(U, \bar{\alpha}(U)) : \ U \in \Sigma\}.$$

Siamo in grado di esibire criteri espliciti che permettono di stabilire se un potenziale $U \in \mathcal{U}$ appartiene o meno al dominio della funzione $\bar{\alpha}$.

Struttura dell'insieme dei potenziali che ammettono traiettorie paraboliche Morse-minimali

Il nostro risultato principale afferma che il grafico della funzione $\bar{\alpha}$ coincide con l'insieme dei potenziali che ammettono una traiettoria parabolica Morse-minimale.

TEOREMA DI STRUTTURA 5.4 ([3]). – *Un potenziale $V \in \mathcal{V}$ ammette una traiettoria parabolica Morse-minimale se e soltanto se $V \in \Pi$.*

Ricordiamo che le configurazioni minimali di entrata e di uscita sono state fissate quando abbiamo definito la classe $\mathcal{V}$.

A causa dell'invarianza per riscalamenti del problema, le traiettorie paraboliche Morse-minimali compaiono sempre in famiglie ad un parametro e danno luogo ad una sottovarietà isotropica 2-dimensionale il cui bordo corrisponde alle due traiettorie omotetiche.

Esponente critico e proprietà focali

Ricordiamo che l'interfaccia è il grafico di una funzione continua: come detto, esistono un aperto non vuoto $\Sigma \subset \mathcal{U}$ e una funzione continua $\bar{\alpha} : \Sigma \to (0,2)$ tali che

$$\Pi = \big\{(U, \bar{\alpha}(U;\xi^{\pm})) : \, U \in \Sigma\big\}.$$

L'esponente $\bar{\alpha}$ di apparizione dell'orbita parabolica rappresenta una soglia critica relativa alle proprietà focali della singolarità:

TEOREMA 5.5. – *Sia $U \in \Sigma$ e sia $\bar{\alpha}(U;\xi^{\pm})$ come nel Lemma. Allora*

• *Se $\alpha < \bar{\alpha}(U;\xi^{\pm})$ allora (U,α) ammette un intorno di (ξ^-,ξ^+) di coppie di estremi che sono connessi da geodetiche minimali passanti per l'origine.*

• *Se invece $\alpha > \bar{\alpha}(U;\xi^{\pm})$ allora (U,α) ammette un intorno di (ξ^-,ξ^+) di coppie di estremi connessi da geodetiche minimali che evitano l'origine.*

6. – Ritorno al caso planare: i problemi di Bolza

Vincoli topologici

Sul piano possiamo cercare traiettorie paraboliche che connettono due configurazioni centrali minimali con un dato *indice di rotazione*. Più precisamente, dati

$$0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2 < 2\pi,$$

definiamo la classe di potenziali

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\vartheta_1\vartheta_2} := \left\{ U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} \text{for every } \vartheta \in \mathbb{R} \text{ and } i = 1,2 \\ U(\vartheta + 2\pi) = U(\vartheta) \\ U(\vartheta) \geqslant U(\vartheta_1) = U(\vartheta_2) > 0 \\ U''(\vartheta_i) > 0 \end{array} \right\},$$

e, con il solito abuso notazionale,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} :=& \{V = (U,\alpha) : U \in \mathcal{U} \text{ and } \alpha \in (0,2)\} \\ =& \left\{ V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) : V(x) = \frac{U(\vartheta)}{r^\alpha}, U \in \mathcal{U} \text{ and } \alpha \in (0,2) \right\}. \end{aligned}$$

Per imporre il vincolo di girare, per esempio, h volte in senso antiorario attorno all'origine, ci poniamo sul rivestimento universale di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il che corrisponde a connettere ϑ_1 with $\vartheta_2 + 2h\pi$. Introduciamo gli insiemi

$$\Theta = \Theta_{\vartheta_1\vartheta_2} := \{\vartheta \in \mathbb{R} : \vartheta = \vartheta_i + 2n\pi \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z} \text{ e } i \in \{1,2\}\}$$

e, date $\vartheta^- \neq \vartheta^+$ in $\Theta_{\vartheta_1\vartheta_2}$ (o, più in generale, $\vartheta^- \neq \vartheta^+$ due configurazioni centrali minimali), modifichiamo le nostre definizioni fondamentali come segue:

DEFINIZIONE 6.1. – *Diciamo che $x = (r, \vartheta) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ è una* traiettoria parabolica *di non collisione associata a ϑ^-, ϑ^+ e V, se risolve* (1), (5) *e*

- $\min_{t\in\mathbb{R}} r(t) > 0$;
- $r(t) \to +\infty$, $\vartheta(t) \to \vartheta^\pm$ *as* $t \to \pm\infty$;

DEFINIZIONE 6.2. – *Diciamo che x è un'orbita parabolica* Morse-minimale *(tempo libero) se in più verifica*

- *per ogni $t_1 < t_2$, $t_1' < t_2'$, e $z = (\rho, \zeta) \in H^1(t_1', t_2')$,*

$$\rho(t_i') = r(t_i),\ \zeta(t_i') = \vartheta(t_i) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}([t_1, t_2]; x) \leqslant \mathcal{A}([t_1', t_2']; z).$$

(quest'ultima condizione implica (1), (5)*). Un'orbita minimale a tempo libero verifica la condizione di estremalità solo per $t_i' = t_i$.*

Si può dimostrare che una traiettoria parabolica Morse-minimale rimane dentro il settore $(\vartheta^-, \vartheta^+)$ e che la sua funzione angolare è monotona rispetto al tempo (nonostante il momento angolare non si conservi).

Unicità e caratterizzazione variazionale dell'orbita parabolica con indice di rotazione assegnato

TEOREMA 6.3 ([2]). – *Siano $U \in \mathcal{U}$ e $\vartheta^-, \vartheta^+ \in \Theta$, $\vartheta^- \neq \vartheta^+$ due configurazioni centrali minimali fissate; si ha:*

- *esiste al più un $\bar\alpha = \bar\alpha(\vartheta^-, \vartheta^+, U) \in (0, 2)$ per cui $V = (U, \bar\alpha)$ ammette una traiettoria parabolica con configurazioni asintotiche $(\vartheta^-, \vartheta^+, U)$;*
- *ogni traiettoria parabolica associata a ϑ^-, ϑ^+ è U Morse-minimale a tempo libero;*
- *se $|\vartheta^+ - \vartheta^-| > \pi$ allora esiste esattamente un valore $\bar\alpha$ per cui $V = (U, \alpha)$ ammette una traiettoria parabolica Morse-minimale corrispondente se e solo se $\alpha = \bar\alpha$.*

Assenza di collisioni per i minimi dei problemi di Bolza

DEFINIZIONE 6.4. – *Dato un potenziale V, diciamo che $x = (r, \vartheta) \in H^1(t_1, t_2)$ è minimo per il problema di Bolza in tempo fisso con estremi $x_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$,*

$x_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, *se*

- $r(t_i) = r_i$ *and* $\vartheta(t_i) = \varphi_i$, $i = 1, 2$;
- *per ogni* $z = (\rho, \zeta) \in H^1(t_1, t_2)$, *risulta*

$$\rho(t_i) = r_i,\ \zeta(t_i) = \varphi_i \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}([t_1, t_2]; x) \leqslant \mathcal{A}([t_1, t_2]; z).$$

Se in più $\min_{t\in[t_1,t_2]} r(t) > 0$ *diciamo che il minimo è privo di collisioni.*

TEOREMA 6.5 ([2]). – *Sia* $U \in \mathcal{U}_{\vartheta_1\vartheta_2}$ *una funzione di Morse (tutti i suoi punti critici sono non degeneri); si consideri il potenziale perturbato* $V = \dfrac{U(\vartheta)}{r^\alpha} + W$, *con* $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$, $\alpha > \alpha'$ *e*

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha'}(W(x) + r|\nabla W(x)|) = 0\ .$$

Data comunque una coppia di punti x_1 *e* x_2 *nel settore* $(\vartheta^-, \vartheta^+)$, *se* $\alpha > \bar{\alpha}(U, \vartheta^-, \vartheta^+)$ *allora i minimi di tutti i problemi di Bolza a tempo fisso con estremi* x_1, x_2 *a valori entro il settore* $(\vartheta^-, \vartheta^+)$ *sono privi di collisioni.*

La restrizione che il cammino minimale assuma valori dentro al settore $(\vartheta^-, \vartheta^+)$ si può sollevare se, per esempio, $W \equiv 0$.

OSSERVAZIONE 6.6. – • *Se invece* $\alpha \leqslant \bar{\alpha}(U, \vartheta^-, \vartheta^+)$, *vi sono sempre dei problemi di Bolza che hanno minimi di collisione. È sufficiente prendere* $x_1 = \vartheta^-$ *and* $x_2 = \vartheta^+$ *e come tempo* T *il tempo naturale del minimo a tempo libero.*

• *Se* $\alpha = \bar{\alpha}(U, \vartheta^-, \vartheta^+)$, *abbiamo la seguente alternativa:*

1. *la traiettoria minimale è asintotica nella collisione a quella omotetica di collisione-eiezione,*

2. *oppure è di non collisione.*

• *Questo enunciato generalizza la caratterizzazione variazionale di* Marchal degli archi kepleriani diretti e inversi (Teorema di Lambert. cfr [36]).

Altre osservazioni

Come sottolineano Luz and Maderna in [14], la proprietà che tutti i problemi di Bolza siano privi di collisione implica la non esistenza di traiettorie Morse-minimali nell'usuale problema degli N-corpi con $\alpha = 1$ in assenza di vincoli topologici.

Invece, archi parabolici minimali (cioè definiti solo sulla semiretta) esistono per ogni configurazione iniziale, come dimostrato recentemente da Maderna e Venturelli in [34].

Assenza di collisioni per le traiettorie minimali

Il problema dell'esclusione delle collisioni per i minimi dell'azione ha ormai una lunga storia, che parte delle elaborazioni degli ultimi anni '80, (Ambrosetti, Coti Zelati, Marino, Degiovanni, Giannoni, Serra, Bessi, Terracini, Tanaka), per arrivare alle ricerche degli ultimi dieci anni, motivate dalla ricerca di nuove soluzioni perodiche simmetriche per il problema degli n-corpi (Chenciner, Montgomery, Chen, Venturelli, Ferrario, Barutello, Terracini, Shibayama).

Ci sono due aspetti importanti:

- la formula di monotonia che conduce all'isolatezza degli istanti di collisione ed alle stime asintotiche alle collisioni;
- le variazioni in media, introdotte da C. Marchal ([36])

Questi aspetti sono stati ripresi e sviluppati in [23, 1], dove è stato sviluppato ed esteso il metodo della variazione in media di Marchal.

TEOREMA 6.7 ([1]). – *L'insieme degli istanti di collisione delle traiettorie localmente minimali e dei loro limiti uniformi è localmente finito e valgono le classiche stime asintotiche. Inoltre, se vale la Rotating Circle Property le traiettorie localmente minimali sono prive di collisioni.*

7. – Orbite periodiche

Orbite chiuse con numero di rotazione assegnato

Come abbiamo detto, diversi casi notevoli hanno uno spazio delle configurazioni non semplicemente connesso. In questo caso, è interessante minimizzare in una classe di lacci con un particolare tipo omotopico (Gordon, Montgomery, Venturelli, Terracini-Venturelli, Chen, Fusco-Gronchi-Negrini).

TEOREMA 7.1 (W. Gordon 1977 [26]). – *Le ellissi kepleriane minimizzano l'azione fra tutti i cammini T-periodici che hanno indice di rotazione non banale rispetto all'origine.*

Quando si minimizza con un vincolo topologico, la tecnica della variazione media non funziona e si devono inventare altri argomenti per evitare le collisioni.

Generalizzazione del Teorema di W. Gordon

La soglia $\bar{\alpha}$ che segna la comparsa dell'orbita parabolica con indice di rotazione prefissato permette di determinare la soglia di esistenza delle traiettorie periodiche minimali di non collisione con indice assegnato.

Il risultato seguente può essere considerato una generalizzazione della proprietà di minimizzazione delle ellissi kepleriane di W. Gordon:

TEOREMA 7.2 ([2]). – *Sia $U \in \mathcal{U}_{\vartheta_1\vartheta_2}$ una funzione di Morse che ha solo minimi globali, e siano $V = \dfrac{U(\vartheta)}{r^\alpha}$ i potenziali α-omogenei associati. Dato un intero $k \neq 0$ e un periodo $T > 0$, se*

$$\alpha > \bar{\alpha}(U, \vartheta^*, \vartheta^* + 2k\pi), \quad \textit{per ogni configurazione minimale } \vartheta^* \textit{ of } U,$$

allora esiste un'orbita T-periodica minimale fra quelle con indice di rotazione k, priva di collisioni. Inoltre, se

$$\alpha = \bar{\alpha}(U, \vartheta^*, \vartheta^* + 2k\pi), \quad \textit{per ogni minimo } \vartheta^* \textit{ of } U,$$

allora o esiste un'orbita T-periodica minimale fra quelle con indice di rotazione k, priva di collisioni, oppure esiste una successione di esponenti $\alpha_n \searrow \alpha$ e una successione di orbite T-periodiche minimali, senza collisioni x_n per $V_n = (U, \alpha_n)$, che converge alla traiettoria parabolica sui compatti di $\mathbb{R}$.

La dimostrazione utilizza una tecnica di minimizzazione vincolata già utilizzata in un lavoro [48] con A. Venturelli , dove si è stabilita per la prima volta la relazione fra la non esistenza di orbite paraboliche e l'assenza di collisioni per le traiettorie che minimizzano l'azione.

Soluzioni regolari dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Come osservato, nel caso planare possiamo sempre scegliere configurazioni di ingresso e di uscita uguali a meno di 2π. Si supponga $\alpha = \bar{\alpha}(U, \vartheta^*, \vartheta^* + 2\pi)$. Abbiamo già osservato che ad un'orbita parabolica è associata una varietà lagrangiana che è laminata dalla famiglia delle orbite paraboliche. Tale struttura determina una soluzione regolare dell'equazione stazionaria di Hamilton-Jacobi associata (1), di classe $\mathcal{C}^1$ sul rivestimento doppio di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

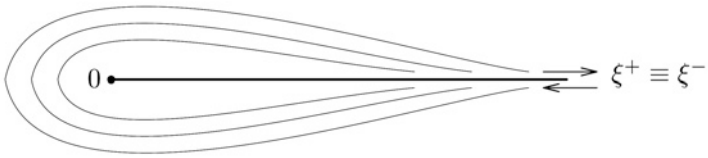


Fig. 3. – La famiglia a un parametro delle traiettorie paraboliche Morse-minimali aventi la stessa configurazione asintotica a $+\infty$ e $-\infty$ e indice di rotazione uno.

8. – Prova del Teorema di struttura

Da Bolza a Morse-minimale

Seguiremo la strategia introdotta in [3]. Per costruire traiettorie Morse-minimali, cominciamo col considerare il problema su intervalli limitati (i cosiddetti problemi di Bolza), per poi passare al limite. In questo procedimento, incontriamo due difficoltà principali: le successioni così ottenute possono convergere verso una collisione, oppure tendere all'infinito. In entrambi i casi il passaggio al limite fallisce. Questa osservazione conduce naturalmente ad introdurre di vincoli e, conseguentemente, allo studio dei seguenti problemi di minimizzazione vincolata:

$$m = m(\varepsilon, x_1, x_2) := \inf_{x \in \Gamma} \mathcal{A}(x) \quad \text{dove } \Gamma := \bigcup_{T>0} \Gamma_T, \quad \text{e}$$

$$\Gamma_T := \left\{ x \in H^1(-T,T) : x(-T) = x_1, x(T) = x_2, \quad \min_{t \in [-T,T]} |x(t)| = \varepsilon \right\},$$

dove $\varepsilon > 0$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \setminus B_{2\varepsilon}(0)$ sono fissati.

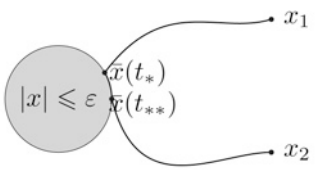
Proprietà di base dei minimi vincolati

- Se $\bar{x} = \bar{r}\bar{s} \in \Gamma_T \varepsilon x_1 x_2$ è un minimo vincolato e $\bar{r}(t) > \varepsilon$ for $t \in (a,b)$, allora

$$\ddot{\bar{x}}(t) = \nabla V(\bar{x}(t)) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}|\dot{\bar{x}}(t)| = V(\bar{x}(t)), \quad \text{per ogni } t \in (a,b).$$

- Se $\bar{x}$ realizza il minimo m, allora esistono $t_* \leqslant t_{**}$ tali che

$\bar{r}(t) = \varepsilon \;\Leftrightarrow\; t \in [t_*, t_{**}]$;
$t \in (-T, t_*) \;\Rightarrow\; \dot{\bar{r}}(t) < 0$;
$t \in (t_{**}, T) \;\Rightarrow\; \dot{\bar{r}}(t) > 0$;



$$\text{se } t_* < t_{**} \text{ e } t \in (t_*, t_{**}) \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\bar{x}}(t) = \nabla_T V(\bar{x}(t)) - \dfrac{1}{\varepsilon^2}|\dot{\bar{x}}(t)|^2 \bar{x}(t), \\ \dfrac{1}{2}|\dot{\bar{x}}(t)| = V(\bar{x}(t)). \end{cases}$$

Interazione con il vincolo

Abbiamo un primo risultato di regolarità dei minimi vincolati:

PROPOSIZIONE 8.1. – *Se $\bar{x}$ è un arco minimale allora può perdere di regolarità solamente in t_* e t_{**}.*

Ora esaminiamo invece l'interazione con il vincolo. Abbiamo:

PROPOSIZIONE 8.2. – *Se $\bar{x}$ realizza m, allora si verifica una delle seguenti alternative:*

(a) $t_* < t_{**}$ *e* $\bar{x} \in \mathcal{C}^1(-\bar{T}, \bar{T})$;
(b) $t_* = t_{**}$ *e* $\bar{x} \in \mathcal{C}^1(-\bar{T}, \bar{T})$;
(c) $t_* = t_{**}$ *e* $\dot{\bar{x}}(t_*^-) \neq \dot{\bar{x}}(t_*^+)$; *in tal caso* $\bar{x}$ *ha una riflessione radiale, cioè*

$$\dot{\bar{r}}(t_*^-) = -\dot{\bar{r}}(t_*^+) \neq 0 \quad e \quad \dot{\bar{s}}(t_*^-) = \dot{\bar{s}}(t_*^+).$$

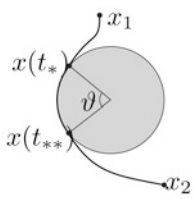
Possiamo utilizzare questa osservazione per classificare gli archi Bolza-minimali rispetto alle possibili variazioni delle quantità x e $\dot{x}$ sul vincolo:

DEFINIZIONE 8.3. – *Dato un arco Bolza-minimale vincolato, $x = rs$ definiamo:*

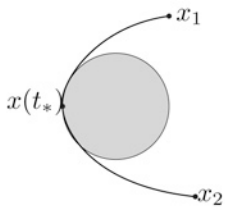
$$\Delta_{\text{pos}}(x) := |s(t_{**}) - s(t_*)| = \frac{|x(t_{**}) - x(t_*)|}{\varepsilon},$$

$$\Delta_{\text{vel}}(x) := \varepsilon^{\alpha/2}\left[\dot{r}(t_{**}^+) - \dot{r}(t_*^-)\right] = \frac{\dot{x}(t_{**}^+) \cdot x(t_{**}) - \dot{x}(t_*^-) \cdot x(t_*)}{\varepsilon^{-\alpha/2} \cdot \varepsilon},$$

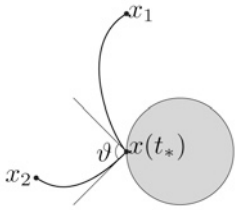
rispettivamente come il salto di posizione *(normalizzato) e il* salto di angolo *di x.*



(a) $t_* < t_{**}$, $\bar{x} \in \mathcal{C}^1$, $\Delta_{\text{pos}} > 0$,
$\Delta_{\text{vel}} = 0$,
x ha un salto di posizione



(b) $t_* = t_{**}$, $\bar{x} \in \mathcal{C}^1$, $\Delta_{\text{pos}} = 0$,
$\Delta_{\text{vel}} = 0$,
x è parabolica



(c) $t_* = t_{**}$, $\dot{\bar{x}}(t_*^-) \neq \dot{\bar{x}}(t_*^+)$,
$\Delta_{\text{pos}} = 0$, $\Delta_{\text{vel}} > 0$,
x ha un salto di velocità

Invarianza di scala

Poiché $|x(t^*)| = |x(t^{**})| = \varepsilon$, e, per la conservazione dell'energia, $|\dot{x}(t)| = \varepsilon^{-\alpha/2}\sqrt{2V(s(t))}$, per ogni $t \in [t^*, t^{**}]$, possiamo riscrivere i salti di posizione e di velocità come

$$\Delta_{\text{pos}}(x) = \left| \left[\frac{x}{|x|} \right]_{t_*}^{t_{**}} \right| \quad \text{e} \quad \Delta_{\text{vel}}(x)\sqrt{2V(s(t_*))} = \left| \left[\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \right]_{t_*^-}^{t_*^+} \right|.$$

In questo modo Δ_{pos} e Δ_{vel} sono degli invarianti per trasformazioni omotetiche. In effetti, si dimostra facilmente che, se x realizza $m = m(x_1, x_2, \varepsilon)$, allora, per ogni $R > 0$,

$$z(t) := Rx(R^{-(2+\alpha)/2}t) \quad \text{realizza } m(Rx_1, Rx_2, R\varepsilon),$$

e

$$\Delta_{\text{pos}}(z) = \Delta_{\text{pos}}(x) \quad \text{e} \quad \Delta_{\text{vel}}(z) = \Delta_{\text{vel}}(x).$$

Esistenza di traiettorie Morse-minimali vincolate

DEFINIZIONE 8.4. – *Diciamo che $x \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ è una traiettoria* Morse-minimale ε-vincolata *se*

- $\min_t |x(t)| = \varepsilon$;
- $|x(t)| \to +\infty$ *e* $\dfrac{x(t)}{|x(t)|} \to \xi^{\pm}$, *per* $t \to \pm\infty$;
- *per ogni* $a < b$ *e* $T > 0$, *e per ogni* $z \in H^1(-T, T)$, *con* $\min_{t\in[-T,T]} |z(t)| = \min_{t\in[a,b]} |x(t)|$, *si ha*

$$z(-T) = x(a),\ z(T) = x(b) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}([a,b]; x) \leqslant \mathcal{A}([-T, T]; z).$$

PROPOSIZIONE 8.5. – $\mathcal{M} = \{$*traiettorie Morse-minimali ε-vincolate*$\} \neq \emptyset$.

Ragioniamo per approssimazione, risolvendo i problemi di Bolza con $x_1 = R\xi^-$ e $x_2 = R\xi^+$, per poi fare tendere $R \to +\infty$;

Classificazione dei salti delle traiettorie Morse-minimali ε-vincolate

Ovviamente anche le traiettorie Morse-minimali ε-vincolate si possono classificare secondo il loro comportamento rispetto al vincolo.

PROPOSIZIONE 8.6. – *Sia $x = rs \in \mathcal{M}$; allora esistono $t_* \leqslant t_{**}$ tali che:*

- $r(t) = \varepsilon$ *se e soltanto se* $t \in [t_*, t_{**}]$, $\dot{r}(t) < 0$ *(risp.* > 0*) se e solo se* $t < t_*$ *(risp.* $t > t_{**}$*)*;
- $\ddot{x}(t) = \nabla V(x(t))$, *per ogni* $t \notin [t_*, t_{**}]$;

- *i salti* $\Delta_{\text{pos}}(x)$ *e* $\Delta_{\text{vel}}(x)$ *sono non negativi e almeno uno è nullo;*
- $\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 = V(x(t))$, *per ogni* $t \in \mathbb{R}$.

In generale, per un dato ε ed un potenziale V, non ci aspettiamo unicità della traiettoria Morse-minimale. Tuttavia, si può dimostrare che, rispetto alla classificazione dei loro salti, esse hanno tutte lo stesso tipo.

Le traiettorie Morse-minimali vincolate hanno tutte lo stesso tipo

TEOREMA 8.7. – *Siano* $\varepsilon > 0$ *e* $V \in \mathcal{V}_{\xi^-,\xi^+}$ *fissati. Si verifica una ed una sola delle seguenti alternative:*

- *(i) per ogni* $x \in \mathcal{M}$, $\Delta_{\text{pos}}(x) > 0$ *(and* $\Delta_{\text{vel}}(x) = 0$*);*
- *(ii) per ogni* $x \in \mathcal{M}$, $\Delta_{\text{pos}}(x) = \Delta_{\text{vel}}(x) = 0$ ***(le traiettorie sono paraboliche)****;*
- *(iii) per ogni* $x \in \mathcal{M}$, $\Delta_{\text{vel}}(x) > 0$ *(and* $\Delta_{\text{pos}}(x) = 0$*).*

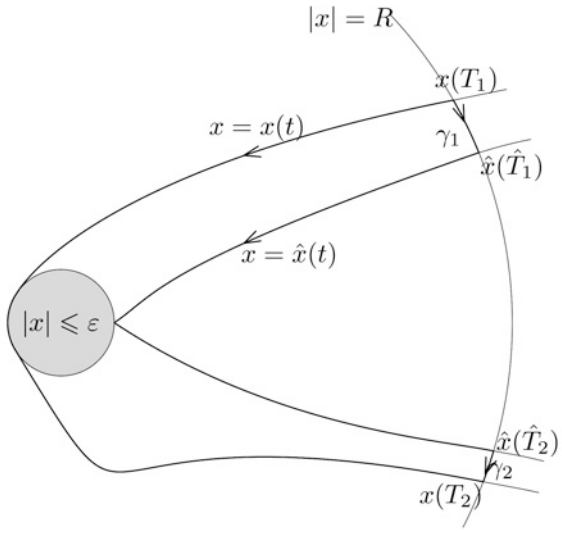
IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE. – Supponiamo, per assurdo, che queste due traiettorie Morse-minimali vincolate $x, \hat{x} \in \mathcal{M}$ e $x \neq \hat{x}$ non verifichino la stessa alternativa e, per esempio, che

$$\Delta_{\text{pos}}(\hat{x}) = \Delta_{\text{vel}}(x) = 0.$$

Fissato $R \gg \varepsilon$, definiamo T_1, T_2, $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ tali che:

$$[T_1, T_2] = \{t : |x(t)| \leqslant R\}, \qquad [\hat{T}_1, \hat{T}_2] = \{t : |\hat{x}(t)| \leqslant R\}.$$

Per confrontare le due azioni $\mathcal{A}([T_1, T_2]; x)$ e $\mathcal{A}\big([\hat{T}_1, \hat{T}_2]; \hat{x}\big)$, giustapponiamo l'arco $\hat{x}(t)$ con i due archi di cerchio come in figura:



Di modo che

$$\underbrace{\mathcal{A}([T_1,T_2];x)}_{\Delta_{\mathrm{vel}}(x)=0} \leqslant \underbrace{\mathcal{A}\Big([\hat{T}_1,\hat{T}_2];\hat{x}\Big)}_{\Delta_{\mathrm{pos}}(\hat{x})} + \underbrace{\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2}_{\substack{\text{contributo degli}\\ \text{archetti circolari}}}.$$

Sia $\alpha_* := \dfrac{2-\alpha}{2} > 0$; si verificano le seguenti diseguaglianze:

- $\Delta_{\mathrm{vel}}(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}([T_1,T_2];x) \geqslant \dfrac{2}{\alpha_*}\sqrt{2V_{\min}}\Big[R^{\alpha_*} + \dfrac{\alpha_*}{2}\varepsilon^{\alpha_*}\Delta_{\mathrm{pos}}(x) - \varepsilon^{2\alpha_*}R^{-\alpha_*}\Big]$,
- $\Delta_{\mathrm{pos}}(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}\Big([\hat{T}_1,\hat{T}_2];\hat{x}\Big) \leqslant \dfrac{1}{\alpha_*}\Big[R^{\alpha_*}\Big(\sqrt{2V(s(\hat{T}_2))}+\sqrt{2V(s(\hat{T}_1))}\Big) - \Delta_{\mathrm{vel}}(\hat{x})\varepsilon^{\alpha_*}\Big]$,
- $\mathcal{B}_1 \leqslant CR^{\alpha_*}|s(T_1)-\hat{s}(\hat{T}_1)| \leqslant CR^{\alpha_*}\Big[|s(T_1)-\xi^-| + |\hat{s}(\hat{T}_1)-\xi^-|\Big]$, e una stima analoga vale per $\mathcal{B}_2$.

Infine otteniamo

$$\begin{aligned} C\big[\Delta_{\mathrm{pos}}(x)+\Delta_{\mathrm{vel}}(\hat{x})\big]\varepsilon^{\alpha_*} \leqslant \\ R^{\alpha_*}\Big[\sqrt{V(\hat{s}(\hat{T}_2))}-\sqrt{V_{\min}}+\sqrt{V(\hat{s}(\hat{T}_1))}-\sqrt{V_{\min}}\Big] - \varepsilon^{2\alpha_*}R^{-\alpha_*} + \\ + R^{\alpha_*}\Big[|s(T_1)-\xi^-| + |\hat{s}(\hat{T}_1)-\xi^-| + |s(T_2)-\xi^+| + |\hat{s}(\hat{T}_2)-\xi^+|\Big]. \end{aligned}$$

Affermiamo che, scegliendo R sufficientemente grande, il secondo membro può essere reso arbitrariamente piccolo. Infatti

$$\sqrt{V(\hat{s}(t))}-\sqrt{V_{\min}} \leqslant C|\hat{s}(t)-\xi^{\pm}|^2.$$

e, per ogni $x = rs \in \mathcal{M}$, abbiamo la stima asintotica

$$\lim_{t\to-\infty}[r(t)]^{\alpha_*}|s(t)-\xi^-| = \lim_{t\to+\infty}[r(t)]^{\alpha_*}|s(t)-\xi^+| = 0.$$

Poiché il primo membro è non negativo ed indipendente da R, otteniamo che deve necessariamente annullarsi. In definitiva, abbiamo dimostrato che

$$\Delta_{\mathrm{pos}}(\hat{x}) = \Delta_{\mathrm{vel}}(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \Delta_{\mathrm{pos}}(x) = \Delta_{\mathrm{vel}}(\hat{x}) = 0,$$

e quindi entrambe le traiettorie x e $\hat{x}$ devono soddisfare l'alternativa (ii), in contraddizione con la nostra ipotesi dell'assurdo. □

OSSERVAZIONE 8.8. – *Fissato un potenziale $V \in \mathcal{V}_{\xi^-,\xi^+}$, la sua omegeneità induce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme delle traiettorie Morse-minimali con vincolo ε_1 e quelle con vincolo ε_2, per ogni ε_1, ε_2. Dunque il tipo di salto delle traiettorie Morse-minimali vincolate dipende solamente da V. È quindi*

lecito scrivere

- *"$\Delta_{\mathrm{pos}}(V) > 0$" se è verificata l'alternativa (i) e*
- *"$\Delta_{\mathrm{vel}}(V) > 0$" se è verificata la (iii).*

Se invece si verifica (ii), abbiamo che il potenziale V possiede una traiettoria parabolica Morse-minimale.

REFERENCES

[1] V. Barutello - D. L. Ferrario - S. Terracini, *On the singularities of generalized solutions to n-body-type problems*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008).

[2] V. Barutello - S. Terracini - G. Verzini, Entire Minimal Parabolic Trajectories: the planar anisotropic Kepler problem, Arch. Ration. Mech. Anal., to appear (2011).

[3] V. Barutello - S. Terracini - G. Verzini, Entire Parabolic Trajectories as Minimal Phase Transitions, preprint (2011).

[4] V. Benci, *Closed geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonian systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **1** (1984), 401-412.

[5] J. Chazy, *Sur certaines trajectoires du problème des n corps*, Bulletin Astronomique, **35** (1918), 321-389.

[6] J. Chazy, *Sur l'allure du mouvement dans le problème de trois corps quand lle temps crois indèfinimment*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **39** (1922), 29-130.

[7] K.-C. Chen, *Action-minimizing orbits in the parallelogram four-body problem with equal masses*, Arch. Ration. Mech. Anal., **158** (2001), 293-318.

[8] K.-C. Chen, *Existence and minimizing properties of retrograde orbits to the three-body problem with various choices of masses*, Ann. of Math. (2), **167** (2008), 325-348.

[9] K.-C. Chen, *Variational constructions for some satellite orbits in periodic gravitational force fields*, Amer. J. Math., **132** (2010), 681-709.

[10] A. Chenciner, *Collisions totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le problème des n corps*, Regul. Chaotic Dyn., **3** (1998), 93-106.

[11] A. Chenciner - R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math. (2), **152** (2000).

[12] L. Chierchia - G. Pinzari, *The planetary N-body problem: Symplectic foliation, reductions and invariant tori* Invent. Math. (2011).

[13] F. H. Clarke - R. B. Vinter, *Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., **289** (1985), 73-98.

[14] A. da Luz - E. Maderna, *On the free time minimizers of the newtonian n-body problem*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., to appear (2011).

[15] R. L. Devaney, *Collision orbits in the anisotropic Kepler problem*, Invent. Math., **45** (1978), 221-251.

[16] R. L. Devaney, *Singularities in classical mechanical systems*, in Ergodic theory and dynamical systems, I (College Park, Md., 1979-80), vol. 10 of Progr. Math., Birkhäuser Boston, Mass., 1981, 211-333.

[17] A. Fathi, *Weak Kam Theorem in Lagrangian Dynamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2007.

[18] A. Fathi - E. Maderna, *Weak KAM theorem on non compact manifolds*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **14** (2007), 1-27.

[19] A. FATHI - A. SICONOLFI, *Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation*, Invent. Math., **155** (2004), 363-388.
[20] D. L. FERRARIO, *Symmetry groups and non-planar collisionless action-minimizing solutions of the three-body problem in three-dimensional space*, Arch. Ration. Mech. Anal., **179** (2006), 389-412.
[21] D. L. FERRARIO, *Transitive decomposition of symmetry groups for the n-body problem*, Adv. Math., **213** (2007), 763-784.
[22] D. L. FERRARIO - A. PORTALURI, *On the dihedral n-body problem*, Nonlinearity, **21** (2008), 1307-1321.
[23] D. L. FERRARIO - S. TERRACINI, *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n-body problem*, Invent. Math., **155** (2004), 305-362.
[24] G. FUSCO - G. F. GRONCHI - P. NEGRINI, *Platonic polyhedra, topological constraints and periodic solutions of the classical N-body problem*, Invent. Math., **185** (2011), 283-332.
[25] W. B. GORDON, *Conservative dynamical systems involving strong forces*, Trans. Amer. Math. Soc., **204** (1975), 113-135.
[26] W. B. GORDON, *A minimizing property of Keplerian orbits*, Amer. J. Math., **99** (1977), 961-971.
[27] M. C. GUTZWILLER, *The anisotropic Kepler problem in two dimensions*, J. Mathematical Phys., **14** (1973), 139-152.
[28] M. C. GUTZWILLER, *Bernoulli sequences and trajectories in the anisotropic Kepler problem*, J. Mathematical Phys., **18** (1977), 806-823.
[29] J. K. HALE - H. KOÇAK, *Dynamics and bifurcations*, vol. 3 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.
[30] N. D. HULKOWER - D. G. SAARI, *On the manifolds of total collapse orbits and of completely parabolic orbits for the n-body problem*, J. Differential Equations, **41** (1981), 27-43.
[31] M. KLEIN - A. KNAUF, *Classical planar scattering by coulombic potentials*, Lecture Notes in Physics Monographs, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[32] A. KNAUF, *The n-centre problem of celestial mechanics for large energies*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **4** (2002), 1-114.
[33] T. LEVI-CIVITA, *Sur la régularisation du problème des trois corps*, Acta Math., **42** (1920), 99-144.
[34] E. MADERNA - A. VENTURELLI, *Globally minimizing parabolic motions in the Newtonian N-body problem*, Arch. Ration. Mech. Anal., **194** (2009), 283-313.
[35] E. MADERNA, *On weak kam theory for N-body problems*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., to appear (2011).
[36] C. MARCHAL, *How the method of minimization of action avoids singularities*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **83** (2002), 325-353.
[37] C. MARCHAL - D. G. SAARI, *On the final evolution of the n-body problem*, J. Differential Equations, **20** (1976), 150-186.
[38] R. MCGEHEE, *Triple collision in the collinear three-body problem*, Invent. Math., **27** (1974), 191-227.
[39] R. MOECKEL, *Chaotic dynamics near triple collision*, Arch. Rational Mech. Anal., **107** (1989), 37-69.
[40] C. MOORE, *Braids in Classical Dynamics*, Phys. Rev. Lett., **70**, no. 24 (1993), 3675-3679.
[41] J. MOSER, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Comm. Pure. Appl. Math., **23** (1970), 609-636.
[42] H. POLLARD, *The behavior of gravitational systems*, J. Math. Mech., **17** (1967/1968), 601-611.

[43] H. Pollard, *Celestial mechanics*, Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1976.
[44] D. G. Saari, *Expanding gravitational systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **156** (1971), 219-240.
[45] D. G. Saari, *The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the n-body problem*, J. Differential Equations, **55** (1984), 300-329.
[46] M. Shibayama, *Multiple symmetric periodic solutions to the* $2n$*-body problem with equal masses*, Nonlinearity, **19** (2006), 2441-2453.
[47] M. Shibayama, *Minimizing periodic orbits with regularizable collisions in the n-body problem*, Arch. Ration. Mech. Anal., **199** (2011), 821-841.
[48] S. Terracini - A. Venturelli, *Symmetric trajectories for the* $2N$*-body problem with equal masses*, Arch. Ration. Mech. Anal., **184** (2007), 465-493.
[49] A. Venturelli, *Une caractérisation variationelle des solutions de Lagrange du problème plan des trois corps*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, **332**, Série I (2001), 641-644.
[50] E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies: With an introduction to the problem of three bodies*, 4th ed, Cambridge University Press (New York, 1959), xiv+456.
[51] J. Waldvogel, *Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **102** (2008), 149-162.

Università di Milano Bicocca, Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Piazza Ateneo Nuovo 1, 20126 Milano, Italy
E-mail: susanna.terracini@unimib.it

Received December 17, 2011 and in revised form February 1, 2012

Parte 2

Comunicazioni di 30 minuti

Francesco Bastianelli: Il Teorema di Noether sulla gonalità di curve piane per ipersuperficie

Francesco Bastianelli[1]
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano Bicocca
email: `francesco.bastianelli@unimib.it`

Renza Cortini
I. T. G. Fazzini-Mercantini, Grottammare (AP)

Pietro De Poi[2]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Sunto

Si consideri una curva complessa $C \subset \mathbb{P}^2$ liscia e avente grado $d \geq 4$. Un ben noto teorema enunciato da M. Noether afferma che la gonalità di C è pari a $d-1$ e che i morfismi $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ di grado minimo sono tutti e soli le proiezioni della curva da un suo punto (cfr. [2]). In generale, considerando una ipersuperficie complessa $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ liscia, l'estensione più naturale della nozione di gonalità è il *grado di irrazionalità*, ossia il minimo grado di una mappa razionale dominante $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. Il nostro intento è di generalizzare il Teorema di Noether in questi termini.

In [1], a partire dalle tecniche usate in [3], mettiamo in relazione mappe razionali dominanti $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ e congruenze di rette di $\mathbb{P}^{n+1}$. Mediante la descrizione di queste ultime in $\mathbb{P}^3$ ed in $\mathbb{P}^4$, proviamo che il grado di irrazionalità di superficie e threefold di grado d sufficientemente grande è pari a $d-1$, ad eccezione di alcuni casi che caratteriziamo in cui esso è $d-2$. In particolare, proviamo il seguente risultato.

Teorema. *Posto $n = 2$ o $n = 3$, sia $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ una generica ipersuperficie liscia di grado $d \geq 2n+2$. Allora il grado di irrazionalità di X è $d-1$ e le mappe razionali dominanti $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ di grado minimo sono tutte e sole le proiezioni dell'ipersuperficie da un suo punto.*

Bibliografia

[1] F. Bastianelli, R. Cortini, P. De Poi, The gonality theorem of Noether for hypersurfaces, *arXiv:1102.4550v1* (2011).

[2] C. Ciliberto, Alcune applicazioni di un classico procedimento di Castelnuovo, *Seminari di geometria, 1982-1983 (Bologna, 1982/1983)*, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1984, 17–43.

[1]Ricerca parzialmente supportata dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi" e dal FAR 2010 (Pavia) *"Varietà algebriche, calcolo algebrico, grafi orientati e topologici"*.

[2]Ricerca parzialmente supportata dal MIUR nell'ambito del progetto *"Geometria delle varietà algebriche e dei loro spazi di moduli"*.

[3] A. F. Lopez and G. P. Pirola, On the curves through a general point of a smooth surface in $\mathbb{P}^3$, *Math. Z.* **219** (1995), 93–106.

Intervento: Francesco Bastianelli,
Noether's Theorem on Gonality of Plane Curves for Hypersurfaces,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 781–791**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 781-791

Noether's Theorem on Gonality of Plane Curves for Hypersurfaces

FRANCESCO BASTIANELLI

Abstract. – *A well-known theorem of Max Noether asserts that the gonality of a smooth curve $C \subset \mathbb{P}^2$ of degree $d \geq 4$ is $d-1$, and any morphism $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ of minimal degree is obtained as the projection from one point of the curve. The most natural extension of gonality to n-dimensional varieties X is the degree of irrationality, that is the minimum degree of a dominant rational map $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. This paper reports on the joint work* [4] *with Renza Cortini and Pietro De Poi, which aims at extending Noether's Theorem to smooth hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ in terms of degree of irrationality. We show that both generic surfaces in $\mathbb{P}^3$ and generic threefolds in $\mathbb{P}^4$ of sufficiently large degree d have degree of irrationality $d-1$, and any dominant rational map of minimal degree is obtained as the projection from one point of the variety. Furthermore, we classify the exceptions admitting maps of minimal degree smaller than $d-1$, and we show that their degree of irrationality is $d-2$.*

1. – Introduction

Let C be a complex projective non-singular curve. The *gonality* of C is the minimum integer m such that the curve admits a non-constant morphism $f: C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ of degree m.

The gonality of plane curves is governed by the following classical theorem, whose assertion goes back to Max Noether (see [17]). It is actually included in a wider statement describing the dimension and the geometry of linear systems of arbitrary degree on plane curves. We note further that Noether's original proof is incomplete, and the general assertion has been differently proved in the eighties by Ciliberto and Hartshorne (cf. [5, 11]).

NOETHER'S THEOREM *Let $C \subset \mathbb{P}^2$ be a smooth curve of degree $d \geq 4$. Then the gonality of C is* $\mathrm{gon}(C) = d-1$.

Moreover, any morphism $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ of degree $d-1$ is obtained projecting C from one of its points.

It is interesting to note that analogous results hold for certain classes of non-singular space curves. The paradigmatic statement is that—under addi-

tional hypothesis—the gonality of a smooth curve $C \subset \mathbb{P}^3$ is $\mathrm{gon}(C) = d - h$, where d is the degree of the curve and $h := \max\{\deg(\ell \cap C) | \ell \subset \mathbb{P}^3 \text{ is a line}\}$ is the maximal order of multisecant lines. For instance, this has been shown for complete intersections ([2]), curves lying on smooth quadric surfaces ([1, 15]), and arithmetically Cohen-Macaulay curves either being general ([10]) or lying on particular quartic surfaces ([7]). However, Noether's Theorem can not be extended in this terms to every space curve of large enough degree (cf. [9, Example 2.9] and [10]).

On the other hand, it would be interesting to investigate when the gonality of non-singular curves $C \subset \mathbb{P}^n$ can be computed by projecting C from suitable multisecant $(n-2)$–planes.

Throughout we deal instead with extensions of Noether's Theorem to non-singular hypersurfaces of projective spaces. In particular, we report on the joint work [4] with Renza Cortini and Pietro De Poi, where analogous statements have been proved for surfaces and threefolds.

In this setting, the most suitable notion extending gonality to a n-dimensional variety X is the *degree of irrationality*—usually denoted by $\mathrm{d}_r(X)$—that is the minimum integer m such that the variety admits a dominant rational map $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of degree m. In particular, the degree of irrationality of a curve C coincides with its gonality as any dominant rational map $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ can be resolved to a morphism. Furthermore, the projection of a smooth hypersurface $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of degree d from one of its points does provide a dominant rational map $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of degree $d-1$.

Thus it is natural to wonder whether Noether's theorem can be somehow extended in terms of degree of irrationality to hypersurfaces of $\mathbb{P}^{n+1}$.

The first result we present in this direction is a bound on the degree of irrationality of smooth hypersurfaces of arbitrary dimension (cf. [4, Theorem 1.2]).

THEOREM 1.1. – *Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a smooth hypersurface of degree $d \geq n+3$. Then*

$$d - n \leq \mathrm{d}_r(X) \leq d - 1.$$

We note that this theorem overlaps the first part of Noether's one when $n = 1$. Moreover, we shall see that surfaces in $\mathbb{P}^3$ reach both the admissible values, whereas the lower bound fails to be sharp for threefolds in $\mathbb{P}^4$.

By focusing on small dimensional hypersurfaces, we can indeed provide a more detailed picture. Beside plane curves, the first case to describe is given by non-singular surfaces in $\mathbb{P}^3$ (cf. [4, Theorem 1.3]).

THEOREM 1.2. – *Let $X \subset \mathbb{P}^3$ be a smooth surface of degree $d \geq 5$. Then $\mathrm{d}_r(X) = d - 1$ unless one of the following occurs:*

(1) *X contains a twisted cubic;*
(2) *X contains a line ℓ and a rational curve C of degree c such that ℓ is a $(c-1)$-secant line of C;*

in these cases $\mathrm{d}_r(X) = d - 2$.

It is worth noticing that there exist surfaces as in (1) and (2) (see e.g. [8, p. 355] and [4, Example 4.8]). Moreover, the dominant rational maps $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ of degree $d-2$ can be constructed explicitly by means of either the family of bisecant lines of the rational normal cubic, or the family of lines meeting both ℓ and C. Namely,

EXAMPLE 1.3. Let $X \subset \mathbb{P}^3$ be a smooth surface of degree $d \geq 6$ containing a twisted cubic Γ. For any $x \in X - \Gamma$, there exists a unique line ℓ_x through x intersecting twice the cubic (cf. Theorem 2.3), and each ℓ_x meets X at $d-2$ points outside Γ. We then consider the second symmetric product of the twisted cubic $\Gamma^{(2)} \cong \mathbb{P}^2$, and we define a dominant rational map $X \dashrightarrow \Gamma^{(2)}$ of degree $d-2$ by sending a general point $x \in X$ to the unordered pair $x_1 + x_2 \in \Gamma^{(2)}$ such that $\ell_x \cap \Gamma = \{x_1, x_2\}$.

On the other hand, provided that $X \subset \mathbb{P}^3$ is a smooth surface of degree $d \geq 6$ as in (2), we can construct analogously a dominant rational map of degree $d-2$ on the rational surface $\ell \times C$.

In the case of non-singular threefolds in $\mathbb{P}^4$, we prove a very similar result (see [4, Theorem 1.4]). In particular, we still provide a characterization—in terms of subvarieties—of those hypersurfaces having degree of irrationality $d-2$, and the dominant rational maps $X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ of minimal degree are obtained analogously. However, we can not decide whether these exceptions really occur.

THEOREM 1.4. – *Let $X \subset \mathbb{P}^4$ be a smooth threefold of degree $d \geq 7$. Then* $\mathrm{d}_r(X) = d - 1$ *unless one of the following occurs:*

(1) *X contains a non-degenerate rational scroll S of degree s and an $(s-1)$-secant line ℓ of S;*
(2) *X contains a non-degenerate rational surface S of degree s and a line $\ell \subset S$ such that the intersection of S outside ℓ with the general hyperplane H containing ℓ is a rational curve C and ℓ is an $(s-2)$-secant line of it;*

in these cases $\mathrm{d}_r(X) = d - 2$.

In the light of the previous results, both surfaces in $\mathbb{P}^3$ and threefolds in $\mathbb{P}^4$ having $\mathrm{d}_r(X) = d-2$ are characterized by the existence of some rational subvarieties. On the other hand, sufficiently general hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of

degree $d \geq 2n+1$ do not contain rational curves (see [26, 6, 25]). Thus we deduce that when $n = 2$ or $n = 3$, the degree of irrationality of a generic hypersurface $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of degree $d \geq 2n+1$ is $\mathrm{d}_r(X) = d-1$.

Furthermore, we prove the following generalization of Noether's Theorem.

THEOREM 1.5. – *Let $1 \leq n \leq 3$, and let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a generic hypersurface of degree $d \geq 2n+2$. Then the degree of irrationality of X is $\mathrm{d}_r(X) = d-1$.*

Moreover, any dominant rational map $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of degree $d-1$ is obtained projecting X from one of its points.

In the next section we outline the proofs of the above results, whereas the last section is devoted to some remarks and conjectures in view of further extensions of Noether's Theorem.

2. – Outline of the proofs

In this section we present the techniques our argument involves, and we outline the proofs of the results stated in the Introduction.

In the spirit of [13] and [3], we use Mumford's technique of *induced differentials* (see [16]) to provide restrictions of *Cayley-Bacharach* type on dominant rational maps $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ from non-singular hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of degree $d \geq n+3$. On one hand, we estimate the degree of the maps, and we deduce Theorem 1.1. On the other, we show that the general fiber of a map $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of low degree consists of collinear points, so that any such a map specifies a families of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$.

Then we turn to describing an important class of families known as *first order congruence of lines of* $\mathbb{P}^{n+1}$, and we establish a certain one-to-one correspondence connecting them with dominant rational maps $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of low degree.

In the light of this fact, we finally achieve our results by exploiting the classification of first order congruence of lines in low dimensional projective spaces, together with some classical results such as Lefschetz and Bertini's Theorems.

2.1 – *Mumford's trace map and Cayley-Bacharach condition*

Let $f: X \dashrightarrow Y$ be a dominant rational map of degree m between non-singular n-dimensional varieties. Let $U := \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) = 0\}$ be the open set over which f is finite, and let $X^{(m)}$ be the m-fold symmetric product of X. So we can consider the morphism $\gamma: U \longrightarrow X^{(m)}$, which sends the general $y \in U$ to the unordered m-tuple $x_1 + \ldots + x_m$ such that $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

By using Mumford's induced differentials (cf. [16, Section 2]), it is then possible to define the *trace map of* γ

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}_\gamma\colon & H^{n,0}(X) & \longrightarrow & H^{n,0}(U) \\ & \omega & \longmapsto & \omega_\gamma \end{array}.$$

When the morphism γ has null trace map, the general 0-cycle $x_1 + \ldots + x_m \in \mathrm{Im}\gamma$ satisfies the *Cayley-Bacharach condition* with respect to the canonical linear series $|\omega_X|$, i.e. for any $i = 1, \ldots, m$ and for any effective divisor $K_X \in |\omega_X|$ passing through $x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_m$, we have that $x_i \in K_X$ as well (see e.g. [13, Section 2]).

Given a dominant rational map $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ from a non-singular hypersurface $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of degree d, it is immediate to check that $H^{n,0}(U) = \{0\}$, so that γ has null trace map. Thus the general point of $\mathrm{Im}\gamma$ satisfies the Cayley-Bacharach condition with respect to $|\omega_X| \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d-n-2)$, and we deduce the following (cf. [4, Theorem 2.5 and Example 2.7]).

LEMMA 2.1. – *Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a smooth hypersurface of degree $d \geq n+3$, and let $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ be a dominant rational map of degree m. Then*

i) the degree of the map is $m \geq d-n$;
ii) if in addiction $m \leq 2d-2n-3$ and $y \in \mathbb{P}^n$ is general, the points $x_1, \ldots, x_m \in f^{-1}(y)$ are collinear.

We point out that the first assertion provides the lower bound on $\mathrm{d}_r(X)$ of Theorem 1.1, whereas the upper bound is the obvious one obtained projecting $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ from one of its points.

On the other hand, any dominant rational map $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$—as in the second assertion—specifies a n-dimensional subvariety $B' \subset \mathbb{G}(1, n+1)$ which parameterizes the lines in $\mathbb{P}^{n+1}$ containing the sets of collinear points $f^{-1}(y)$.

2.2 – *First order congruences of lines in* $\mathbb{P}^{\mathbf{n+1}}$

Let $\mathbb{G}(1, n+1)$ be the Grassmannian of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$, and let us denote by $\ell_b \subset \mathbb{P}^{n+1}$ the line parameterized by the point $b \in \mathbb{G}(1, n+1)$. A *congruence of lines in* $\mathbb{P}^{n+1}$ is a flat family of lines

$$\begin{array}{l} \Lambda := \left\{(b, P) \in B \times \mathbb{P}^{n+1} | P \in \ell_b\right\} \\ \Big\downarrow \\ B \end{array}$$

obtained as the pullback of the universal family under a desingularization map $B \longrightarrow B'$ of an irreducible n-dimensional subvariety $B' \subset \mathbb{G}(1, n+1)$.

The *order* of the congruence is defined as the degree of the projection $\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$, that is the number of lines of the family passing through the general point of $\mathbb{P}^{n+1}$. In particular, a *first order congruence of lines in* $\mathbb{P}^{n+1}$ is a n-dimensional family of lines such that the general point of $\mathbb{P}^{n+1}$ lies on a unique line of the family.

Moreover, a point $P \in \mathbb{P}^{n+1}$ is said to be a *fundamental point* of the congruence if it lies on infinitely many lines of the family, and the set F of fundamental points is called *fundamental locus*.

Congruences of lines are very classical geometric objects, which have been studied long since (see e.g. [12, 24, 14]), aiming for a classification in dependence on the number and the dimension of the components of their fundamental locus.

First order congruences of lines in $\mathbb{P}^2$ have a very simple description.

EXAMPLE 2.2. A congruence of lines in $\mathbb{P}^2$ is a family parameterized over a curve B lying on the dual plane $\mathbb{G}(1,2) \cong \mathbb{P}^2$. Moreover, the order of the congruence equals the degree of such a curve. Thus $\Lambda \longrightarrow B$ is a first order congruence of lines in $\mathbb{P}^2$ if and only if $B \subset \mathbb{G}(1,2)$ parameterizes the star of lines through a fixed point $F \in \mathbb{P}^2$, which is the fundamental locus.

On the other hand, the more the dimension grows, the more the combinatorics are involved. In particular, the following describes the case of $\mathbb{P}^3$ (cf. e.g. [23, 19]).

THEOREM 2.3. – *Let $B \subset \mathbb{G}(1,3)$ be a surface. Then $\Lambda \longrightarrow B$ is a first order congruence of lines in $\mathbb{P}^3$ if and only if the fundamental locus F is one of the following:*

(a) *a point, where B is the star of lines through F;*
(b) *a twisted cubic, where B is the family of bisecant lines of F;*
(c) *a non-degenerate reducible curve consisting of a rational curve C of degree c and a $(c-1)$-secant line ℓ, where B is the family of lines meeting both C and ℓ;*
(d) *a non-reduced line ℓ and B is the family of lines $\bigcup_{\pi \in B_\ell} B_{\rho(\pi)}$, where $B_\ell \subset \mathbb{G}(2,3)$ is the pencil of planes containing ℓ, $\rho\colon B_\ell \longrightarrow \ell$ is a non-constant map, and for any plane $\pi \in B_\ell$, $B_{\rho(\pi)} \subset \mathbb{G}(1,3)$ is the star of lines on π passing through the point $\rho(\pi) \in \ell$.*

Although the classification of first order congruences of lines in $\mathbb{P}^4$ is not complete, there are series of papers on this topic (see e.g. [18, 20, 21]) providing a quite detailed picture (cf. [22, Table 1]), which have been crucial to prove Theorem 1.4.

In order to relate congruences of lines and dominant rational maps from hypersurfaces in $\mathbb{P}^{n+1}$, we introduce the following notation. Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a

non-singular hypersurface of degree $d \geq 2n+1$, and let $\Lambda \longrightarrow B$ be a first order congruence of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$ having fundamental locus F. We denote by $F_{B|X}$ the union of the irreducible components of F entirely contained in X, and by $\delta_{B|X}$ we mean the number of intersection points—counted with multiplicity—of a general line of the congruence with X at $F_{B|X}$.

Since the n-dimensional variety $B \subset \mathbb{G}(1, n+1)$ is rational (cf. [18, Theorem 7]), the congruence $\Lambda \longrightarrow B$ induces a dominant rational map $f_B : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of degree $d - \delta_{B|X}$, which is obtained by sending the general $x \in X - F_{B|X}$ to the unique point $b \in B$ such that $x \in \ell_b$. On the other hand, we already observed by Lemma 2.1 that any dominant rational map $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of low degree specifies a family $\Lambda_f \longrightarrow B_f$ of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$, which turns out to be a first order congruence.

Indeed [4, Theorem 4.3] assures that the above constructions are somehow each other's inverses. Namely,

THEOREM 2.4. – *Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a smooth hypersurface of degree $d \geq 2n+3-k$, with $0 \leq k \leq 2$. Then*

i) any dominant rational map $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of degree $m \leq d-k$ induces a first order congruence $\Lambda_f \longrightarrow B_f$ of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$;

ii) any first order congruence $\Lambda \longrightarrow B$ of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$ induces a dominant rational map $f_B : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of degree $m = d - \delta_{B|X}$.

In particular, the congruence induced by the map f_B coincides with B, and—up to birational isomorphisms of $\mathbb{P}^n$—the dominant rational map induced by the congruence $\Lambda_f \longrightarrow B_f$ is f.

2.3 – *Proofs*

By virtue of the previous subsections, proving Theorems 1.2, 1.4 and 1.5 is now almost straightforward.

Moreover, we can provide a different proof of Noether's Theorem as follows.

PROOF OF NOETHER'S THEOREM. Let $X \subset \mathbb{P}^2$ be a smooth curve of degree $d \geq 4$. Therefore $\mathrm{gon}(X) = \mathrm{d}_r(X) = d-1$ by Theorem 1.1.

On the other hand, setting $n = k = 1$ in Theorem 2.4, any morphism $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ of degree $d-1$ induces a first order congruence $\Lambda_f \longrightarrow B_f$ of lines in $\mathbb{P}^2$. Therefore B_f parameterizes a star of lines through a fixed point $F \in \mathbb{P}^2$, which is the fundamental locus of the congruence (cf. Example 2.2). Since $\deg f = d-1 = d - \delta_{B|X}$, we conclude that $F \in X$ and $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ is the projection from F. □

Then we turn to the degree of irrationality of non-singular surfaces in $\mathbb{P}^3$ and we prove Theorem 1.2.

PROOF OF THEOREM. 1.2. Let $X \subset \mathbb{P}^3$ be a smooth surface of degree $d \geq 5$. Hence its degree of irrationality $\mathrm{d}_r(X)$ equals either $d-2$ or $d-1$ by Theorem 1.1.

In order to characterize the former case, we suppose that X admits a dominant rational map $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ of degree $d-2$. By Theorem 2.4, the map f is induced by the associated first order congruence $\Lambda_f \longrightarrow B_f$ of lines in $\mathbb{P}^3$. Moreover, $\deg f = d-2 = d - \delta_{B_f|X}$ and hence the general line $\ell_b \subset \Lambda_f$ intersects twice X at $F_{B_f|X}$. Clearly, the intersection multiplicity between ℓ_b and X at any reduced component of $F_{B_f|X}$ is one. We refer throughout to the classification of first order congruence of lines in $\mathbb{P}^3$ provided by Theorem 2.3.

If the general line $\ell_b \subset \Lambda_f$ meets X at two distinct points of $F_{B_f|X}$, then the fundamental locus F is either a twisted cubic as in (b), or a non-degenerate reducible curve as in (c). In particular, the whole fundamental locus F is contained in the surface X, and we obtain conditions (1) and (2) in the statement of Theorem 1.2.

On the other hand, if the general line $\ell_b \subset \Lambda_f$ met X at a double point of the fundamental locus, the surface X would be singular. This is obvious if $F \in X$ were a point as in (a), whereas [4, Lemma 4.6] uses Bertini's Theorem recursively to show that, if F were a non-reduced line as in (d), any plane containing F would be tangent to X at the same point. □

The proof of Theorem 1.4 is very similar to the previous one, and we refer the reader to [4, Section 4] for details. Initially, we note that the degree of irrationality of a smooth threefold $X \subset \mathbb{P}^4$ of degree $d \geq 7$ satisfies $d-3 \leq \mathrm{d}_r(X) \leq d-1$. Then we consider a dominant rational map $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ of degree $\deg f \leq d-2$, together with its associated congruence $\Lambda_f \longrightarrow B_f$. Finally, we analyze $F_{B_f|X}$ in the light of Lefschetz Theorem and the description of first order congruences of lines in $\mathbb{P}^4$. In particular, there are only two admissible configurations, which lead to $\mathrm{d}_r(X) = d-2$ and are described by conditions (1) and (2) of Theorem 1.4.

Then we conclude this section by proving Noether's Theorem for generic hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$, having dimension $1 \leq n \leq 3$ and degree $d \geq 2n+2$.

PROOF OF THEOREM. 1.5. The case of plane curves is covered by Noether's result. Therefore we set $n = 2, 3$ and we consider a dominant rational map $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of minimal degree. Since $\deg f \leq d-1$ and $d \geq 2n+2$, Theorem 2.4 guarantees that there exists a first order congruence $\Lambda_f \longrightarrow B_f$ of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$ induced by f.

Let F be the fundamental locus of the congruence, and let $F_{B_f|X}$ the union of the irreducible components of F contained in X. From the description of first order congruences of lines in $\mathbb{P}^3$ (cf. Theorem 2.3) and in $\mathbb{P}^4$ (see [4, Table 1]), we deduce that either F is a point, or it consists of rational components. Furthermore, $F_{B_f|X}$ is non-empty as $\deg f = d - \delta_{B_f|X} \leq d-1$.

On the other hand, X does not contain rational subvarieties (cf. [26, 6]). Hence $F = F_{B_f|X}$ is a point of X, and $\Lambda_f \longrightarrow B_f$ is the family of lines of $\mathbb{P}^{n+1}$ passing through F. Thus $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ is the dominant rational map of degree $\mathrm{d}_r(X) = d - 1$ projecting X from the point $F \in X$.

3. – Final remarks

In this section we briefly deal with the degree of irrationality of non-singular hypersurfaces of arbitrary dimension. In particular, we discuss whether the techniques we used may lead to further extensions of Noether's Theorem. On one hand, we look for a characterization of hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of degree d having $\mathrm{d}_r(X) \leq d - 2$, as in Theorems 1.2 and 1.4. On the other, we focus on generic hypersurfaces along the lines of Theorem 1.5.

To this aim, we note that both Theorem 1.1—bounding $\mathrm{d}_r(X)$—and Theorem 2.4—connecting dominant rational maps of minimal degree with first order congruences of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$—hold for any dimension n.

In low dimensional cases, our argument uses the descriptions of first order congruences of lines in $\mathbb{P}^3$ and $\mathbb{P}^4$ to decide whenever the irreducible components of the fundamental locus may lie on the hypersurface X. However, a detailed picture of first order congruences in arbitrary dimension is still missing. Moreover, it turns out that even to construct examples of hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ having $\mathrm{d}_r(X) \leq d - 2$ is a difficult task. Indeed, we can not determine whether these varieties really occur when n is odd, whereas something more is known otherwise.

EXAMPLE 3.1. When $n = 2k$ is even, the family of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$ meeting two given k-planes is a first order congruence. Thus any hypersurface $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of degree $d \geq 3$ containing both these linear spaces has $\mathrm{d}_r(X) = d - 2$. For example, the smooth hypersurface defined by the equation $x_0^d - x_0 x_1^{d-1} + \ldots + x_{2k}^d - x_{2k} x_{2k+1}^{d-1} = 0$ contains the k-planes $x_0 = \ldots = x_{2k} = 0$ and $x_0 - x_1 = \ldots = x_{2k} - x_{2k+1} = 0$.

If instead $n = 2k - 1$, analogous constructions fail as no smooth hypersurface in $\mathbb{P}^{2k}$ contains a linear space of dimension at least k.

Turning to generic hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of degree $d \geq 2n + 1$, we already mentioned that they do not contain rational curves (cf. [6]).

On the other hand, rational curves cover the whole fundamental locus of every known first order congruences of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$, which has been classified and differs from the star of lines through a fixed point. Furthermore, the same fact holds for many other non-classified cases (see e.g. [19, Theorem 7]). Therefore it seems natural to conjecture that for any first order congruence of lines in $\mathbb{P}^{n+1}$,

each positive dimensional irreducible component of the fundamental locus contains rational curves.

If this is the case, then none of these component shall be contained on a generic hypersurface $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ of degree $d \geq 2n+1$, and we shall achieve the following.

CONJECTURE 3.2. *Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a generic hypersurface of degree $d \geq 2n+1$. Then the degree of irrationality of X is $\mathrm{d}_r(X) = d-1$.*

If in addiction $d \geq 2n+2$, any dominant rational map $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ of degree $d-1$ is obtained projecting X from one of its points.

REFERENCES

[1] E. BALLICO, *On the gonality of curves in $\mathbb{P}^n$*, Comment. Math. Univ. Carolin. **38**(1) (1997), 177-186.

[2] B. BASILI, *Indice de Clifford des intersections complètes de l'espace*, Bull. Soc. Math. France **124**(1) (1996), 61-95.

[3] F. BASTIANELLI, *On symmetric products of curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **364**(5) (2012), 2493-2519.

[4] F. BASTIANELLI, R. CORTINI and P. DE POI, *The gonality theorem of Noether for hypersurfaces*, J. Algebraic Geom., to appear, doi:10.1090/S1056-3911-2013-00603-7.

[5] C. CILIBERTO, *Alcune applicazioni di un classico procedimento di Castelnuovo*, in Seminari di geometria, 1982-1983 (Bologna, 1982/1983), 17-43, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1984.

[6] H. CLEMENS, *Curves in generic hypersurfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **19**(4) (1986), 629-636.

[7] P. DE POI, *On first order congruences of lines of $\mathbb{P}^4$ with a fundamental curve*, Manuscripta Math. **106**(1) (2001), 101-116.

[8] P. DE POI, *Congruences of lines with one-dimensional focal locus*, Port. Math. (N.S.) **61**(3) (2004), 329-338.

[9] P. DE POI, *On first order congruences of lines of $\mathbb{P}^4$ with irreducible fundamental surface*, Math. Nachr. **278**(4) (2005), 363-378.

[10] P. DE POI and E. MEZZETTI, *On congruences of linear spaces of order one*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **39** (2007), 177-206.

[11] P. DE POI, *On first order congruences of lines of $\mathbb{P}^4$ with generically non-reduced fundamental surface*, Asian J. Math., **12**(1) (2008), 55-64.

[12] G. FARKAS, *Brill-Noether loci and the gonality stratification of $\mathcal{M}_g$*, J. Reine Angew. Math. **539** (2001), 185-200.

[13] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math. **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[14] R. HARTSHORNE, *Generalized divisors on Gorenstein curves and a theorem of Noether*, J. Math. Kyoto Univ. **26**(3) (1986), 375-386.

[15] R. HARTSHORNE, *Cliffor index of ACM curves in $\mathbb{P}^3$*, Milan J. Math. **70** (2002), 209-221.

[16] R. HARTSHORNE and E. SCHLESINGER, *Gonality of a general ACM curve in $\mathbb{P}^3$*, Pacific J. Math. **251**(2) (2011), 269-313.

[17] E. E. Kummer, *Collected papers*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
[18] A. F. Lopez and G. P. Pirola, *On the curves through a general point of a smooth surface in* $\mathbb{P}^3$, Math. Z. **219**(1) (1995), 93-106.
[19] G. Marletta, *Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni*, Rend. Circ. Mat. Palermo **28**(1) (1909), 353-399.
[20] G. Martens, *The gonality of curves on a Hirzebruch surface*. Arch. Math (Basel) **67**(4) (1996), 349-352.
[21] D. Mumford, *Rational equivalence of* 0*-cycles on surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **9** (1969), 195-204.
[22] M. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, Verl. d. Konig. Akad. d. Wiss., Berlin (1883).
[23] Z. Ran, *Surfaces of order* 1 *in Grassmannians*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 119-126.
[24] C. Segre, *Preliminari di una teoria di varietà luoghi di spazi*, Rend. Circ. Mat. Palermo **30**(1) (1910), 87-121.
[25] C. Voisin, *On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces*, J. Differential Geom. **44**(1) (1996), 200-213.
[26] G. Xu, *Subvarieties of general hypersurfaces in projective spaces*, J. Differential Geom. **39**(1) (1994), 139-172.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni,
Università degli Studi di Milano-Bicocca, via Cozzi 53, 20125 Milano, Italy
E-mail: francesco.bastianelli@unimib.it

Received December 6, 2012 and in revised form December 8, 2013

Elvise Berchio: Sulle soluzioni globali di alcune equazioni differenziali nonlineari del quarto ordine

Elvise Berchio
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: `elvise.berchio@polimi.it`

Filippo Gazzola
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Alberto Ferrero
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano Bicocca

Paschalis Karageorgis
School of Mathematics, Trinity College - Dublin 2

Sunto

Si consideri l'equazione

$$w^{iv}(s) + kw''(s) + f(w(s)) = 0 \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ e f è una funzione localmente Lipschitziana.

Quando k è negativo, (1) è anche nota come equazione di Fisher-Kolmogorov estesa, mentre per k positivo è denominata equazione di Swift-Hohenberg. In entrambi i casi, l'equazione modellizza fenomeni nonlineari connessi a molteplici ambiti fisici. Per fare un esempio, quando $k \in (0, 2)$ e $f(t) = (t+1)^+ - 1$, essa descrive le onde di trasporto in un ponte sospeso secondo il modello suggerito in [2]. In [1], si è proposto di sostituire la f lineare a tratti con la variante liscia $f(t) = e^t - 1$. Rimandiamo al libro [3] per una rassegna di vari modelli fisici associati ad (1) e di molti risultati esistenti.

Lo scopo della comunicazione vuole essere quello di discutere l'esistenza globale e alcune proprietà qualitative, quali oscillazioni e limitatezza, delle soluzioni di (1) per nonlinearità del tipo

$$f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \quad f(t)\,t > 0 \quad \text{for every } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La necessità di eventuali ipotesi aggiuntive su f verrà commentata e giustificata nel corso della presentazione.

Bibliografia

[1] Y. Chen, P.J. McKenna, "Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: theoretical results and numerical observations", J. Diff. Eq. **136**, 325-355 (1997)

[2] P.J. McKenna, W. Walter, "Traveling waves in a suspension bridge", SIAM J. Appl. Math. **50**, 703-715 (1990)

[3] L.A. Peletier, W.C. Troy, "Spatial patterns. Higher order models in physics and mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications", 45. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, (2001)

Intervento: Elvise Berchio,
A Note on Some Nonlinear Fourth Order Differential Equations,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 349–361**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 349-361

A Note on Some Nonlinear Fourth Order Differential Equations

ELVISE BERCHIO

Abstract. – *For a family of fourth order semilinear ordinary differential equations we discuss some fundamental issues, such as global continuation of solutions and their qualitative behavior. The note is the summary of a communication given at the XIX Congress of U.M.I. (Bologna - September* 12-17, 2011*).*

1. – Introduction

The present note is the summary of a communication held at the XIX Congress of U.M.I. (Bologna - September 12-17, 2011). It contains results proved in [5] complemented with some remarks and comments.

Consider the following fourth order nonlinear equation

$$w''''(s) + kw''(s) + f(w(s)) = 0 \qquad (s \in \boldsymbol{R}) \tag{1}$$

where $k \in \boldsymbol{R}$ and f is a locally Lipschitz function. When k is negative, (1) is known as the extended Fisher-Kolmogorov equation, whereas when k is positive it is usually referred to as Swift-Hohenberg equation.

Equation (1) serves as model in several contexts such as the pattern formation in many physical, chemical and biological systems or the spreading of deformation in a strut confined by an elastic foundation, see [7, 22]. In particular, if $f(t) = (t+1)^+ - 1$ and $k = c^2$, where c is the wave speed, (1) describes traveling waves in a suspension bridge according to the model suggested by McKenna-Walter [20]. Here, w denotes the vertical deflection of the bridge and f represents the forces on the bridge composed by gravity and by the action of the suspension cables. The positive part in f reflects the fact that cables obey the Hooke's law, with a restoring force proportional to the displacement if they are stretched and no restoring force if they are compressed. Later, Chen-McKenna [10] suggest to replace the piecewise linear function with the nonlinearity $f(t) = e^t - 1$ sharing many qualitative properties with the original one but being analytic. See also [13, 14] for further comments on this model.

Our interest in (1) is also due to the fact that it arises when dealing with a suitable family of biharmonic coercive equations. For instance, when $k = -4$ and f is the smoothed nonlinearity in the suspension bridge model, equation (1)

comes from a suitable transformation of the biharmonic pde

$$\Delta^2 u + e^u = \frac{1}{|x|^4} \qquad \text{in } \boldsymbol{R}^4 \setminus \{0\}, \tag{2}$$

namely a fourth order coercive nonautonomous version of the celebrated Gelfand problem [15, 16]. For other values of n and k further biharmonic equations arise, see Section 3. While not much is now about (2), its noncoercive versions have recently attracted much interest both in $\boldsymbol{R}^4$ (see [4, 9, 19]) and in $\boldsymbol{R}^n$ for $n \geq 5$ (see [1, 2, 3, 4, 6, 11, 12]). The study of (1), though lying in an apparently different context, may contribute to reach a better knowledge to (2).

Two fundamental issues related to (1) are global continuation of local solutions and their qualitative behavior. In Section 2 we collect some results concerning these topics. The problem of existence of homoclinics is also briefly discussed there. In Section 3 we show how the results given in Section 2 can be applied to the family of biharmonic coercive equations to which (2) belongs. In the last Section we describe the main tools applied in the proofs referring to [5] for the details.

2. – Global continuation of solutions and their qualitative behavior

First we discuss global continuation of solutions to (1). From [5] we know

THEOREM 1. – *Let $k \in \boldsymbol{R}$ and assume that f satisfies*

$$f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}), \quad f(t)\,t > 0 \quad \textit{for every } t \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}. \tag{3}$$

(*i*) *If a local solution w to* (1) *blows up at some finite $R \in \boldsymbol{R}$, then*

$$\liminf_{s \to R} w(s) = -\infty \qquad \textit{and} \qquad \limsup_{s \to R} w(s) = +\infty\,. \tag{4}$$

(*ii*) *If f also satisfies*

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} < +\infty \qquad \textit{or} \qquad \limsup_{t \to -\infty} \frac{f(t)}{t} < +\infty, \tag{5}$$

then any local solution to (1) *exists for all $s \in \boldsymbol{R}$.*

In other words, from Theorem 1-(*i*) we infer that, under assumption (3), the only way that finite time blow up can occur is with wide oscillations of the solution. This clearly suggests a possible strategy to prove the second part of the statement: to get global continuation one only needs to rule out solutions blowing up in finite time with this kind of behavior. The proof of Theorem 1 is quite long and technical, see [5, Section 4] for the details. It is based on elementary calculus

arguments but applied in a refined way. One of the crucial tools exploited is a suitable energy function, see our Section 4.1.

A few comments on (5) are in order. If both the conditions in (5) are satisfied then global existence follows from classical theory of ODEs. But (5) merely requires that f is "one-sided at most linear". Of course, (5) does not cover functions f (satisfying (3)) with uncontrolled behaviors at both $\pm\infty$. Nevertheless, if we exclude these cases, assumption (5) appears general enough to include many interesting models satisfying (3). In particular, (5) is satisfied if f is either concave or convex.

Let us now turn to assumption (3). One may easily find examples of functions showing that if it is violated global continuation may fail. For instance, if $f(t) = 24(t - t^5)$ then $w(s) = \tan s$ solves (1) for $k = -20$ and blows up in finite time. Here, (5) holds at $+\infty$ while (3) is not satisfied. See [5] for further examples.

A more difficult problem is to find examples showing that when (3) holds and (5) is violated, (4) really occurs. The following result is due to [13]

THEOREM 2. – *Fix any integer* $n \geq 5$ *and consider equation* (1) *with* $k = -\dfrac{n^2 - 4n + 8}{2} < 0$ *and*

$$f(t) = \left(\frac{n(n-4)}{2}\right)^2 t + |t|^{8/(n-4)} t. \tag{6}$$

There exists a solution to (1) *which is defined in a neighborhood of* $s = -\infty$ *and such that* (4) *holds for some finite* $R \in \boldsymbol{R}$.

The nonlinearity given in (6) satisfies (3) but not (5). As far as we are aware, this is the first explicit example where the finite time blow up with wide and thinning oscillations (4) occurs. In [13] the authors also showed that this phenomenon is typical of (at least) fourth order problems such as (1) since it does not occur in related lower order equations. The proof of Theorem 2 is achieved by studying some applications of Theorem 1 to suitable semilinear biharmonic problems at critical growth. This justifies the special form (6), see [13, Section 3.2].

Once global continuation of solutions to (1) has been discussed the natural subsequent step consists in studying the behavior of global solutions as $s \to \pm\infty$. Here we recall some statements about this topic. All the proofs can be found in [5]. If $k \geq 0$, then solutions to (1) have oscillations.

THEOREM 3. – *Let* $k \geq 0$ *and* f *satisfy* (3) *with* $\limsup_{t\to-\infty} f(t) < 0$ *and* $\liminf_{t\to+\infty} f(t) > 0$. *If* w *is a global solution to* (1), *then*

$$\liminf_{s\to+\infty} w(s) \leq 0 \leq \limsup_{s\to+\infty} w(s) \ ,$$

so that if $\lim_{s\to+\infty} w(s)$ *exists then*

$$\lim_{s\to+\infty} w(s) = 0 \ .$$

Furthermore, if $w \not\equiv 0$ *then* $w(s)$ *changes sign infinitely many times as* $s \to +\infty$. *Similar statements hold for* $s \to -\infty$.

Figure 1 shows that a completely different behavior may occur when $k<0$.

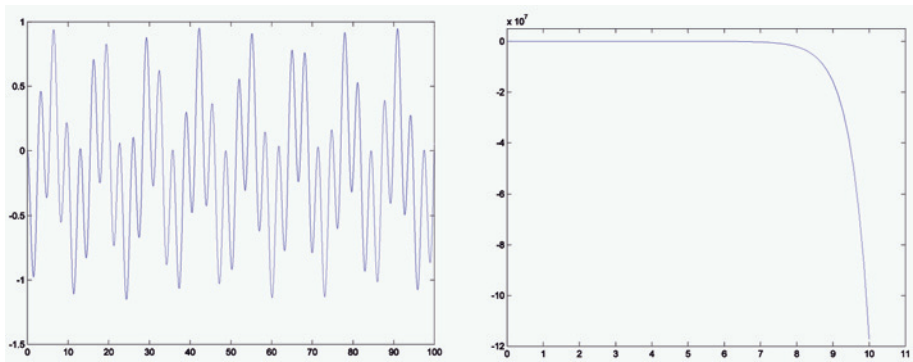


Fig. 1. – The plot of the solution to (1) with $f(t) = e^t - 1$ and $k = 4$ or $k = -4$ (right) corresponding to the initial values $w(0) = w'(0) = w'''(0) = 0$ and $w''(0) = -2$.

What is suggested by the figure can be proved rigorously. Indeed, we have

THEOREM 4. – *Let* $k<0$ *and assume that* f *satisfies* (3) *and*

$$\inf_{t\in\boldsymbol{R}} f(t) = -M > -\infty, \tag{7}$$

then there exists a global solution w *of* (1) *which is eventually negative, decreasing, and concave as* $s \to +\infty$; *in particular,*

$$\lim_{s\to+\infty} w(s) = -\infty \ .$$

If, instead of (7), f *satisfies*

$$\sup_{t\in\boldsymbol{R}} f(t) = M < +\infty. \tag{8}$$

Then there exists a global solution w *of* (1) *which is eventually positive, increasing, and convex as* $s \to +\infty$; *in particular,*

$$\lim_{s\to+\infty} w(s) = +\infty \ .$$

Similarly, there exist solutions having the above mentioned behaviors as $s \to -\infty$.

We point out that (7) (respectively (8)) implies the second (respectively the first) condition in (5) so that Theorem 1 states that all the solutions are global. We also emphasize that assumption (7) is essential in the previous statement. The next statement shows that if it is violated, then the solution is bounded from above.

THEOREM 5. – *Let* $k<0$ *and* f *satisfy* (3), (8) *and*

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)}{t}=+\infty\,. \tag{9}$$

Then any solution w *of* (1) *is global and*

$$\sup_{s\in\boldsymbol{R}} w(s)=+\infty \quad \textit{and} \quad \inf_{s\in\boldsymbol{R}} w(s)>-\infty\ .$$

On the contrary, suppose that (8) *is replaced by* (7) *and* (9) *holds as* $t\to+\infty$. *Then any solution* w *of* (1) *is global and*

$$\sup_{s\in\boldsymbol{R}} w(s)<+\infty \quad \text{and} \quad \inf_{s\in\boldsymbol{R}} w(s)=-\infty\ .$$

Important global solutions are the so-called *homoclinics*. These are nontrivial solutions w such that

$$\lim_{s\to\pm\infty} w(s)=0.$$

In literature, one may find different definitions which also involve the derivatives of the solutions. For instance, by successive integrations of the equation it can be proved that if $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ is a continuous function such that $f(0)=0$ and w is a global solution to (1) such that $\lim_{s\to+\infty} w(s)=0$, then

$$\lim_{s\to+\infty} w'(s)=\lim_{s\to+\infty} w''(s)=\lim_{s\to+\infty} w'''(s)=\lim_{s\to+\infty} w''''(s)=0\ . \tag{10}$$

The same result also holds with $-\infty$ in place of $+\infty$. See e.g. [5, Proposition 11] for a proof.

Existence of homoclinics to (1) is a tricky problem (see [21, Problem 6.2]) and, as far we are aware, only partial results are known. We collect some of them in Theorem 6 below. Here and in the sequel we denote

$$F(t):=\int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

In particular, by (3) we see that $F(t)>0$ for all $t\neq 0$.

THEOREM 6. – *Let* f *satisfy* (3). *The following statements hold*

(*i*) *if* $k\leq 0$ *equation* (1) *has no nontrivial bounded solutions. In particular, it has no homoclinic solution.*

(*ii*) *if* $0<k\leq 2$ *and* f *satisfies*

$$\frac{f(t)}{t}\geq 1 \qquad \forall t\neq 0\,, \tag{11}$$

then equation (1) *has no homoclinic solution.*

(*iii*) *If* f *is differentiable at* $t=0$ *with* $f'(0)=1$ *and* $\lim_{t\to-\infty}\frac{F(t)}{t^2}=0$, *then there exists a homoclinic solution to* (1) *for almost every* $k\in(0,2)$.

The proof of statement (*i*) can be obtained by repeating the proof of [22, Theorem 10.1.1] where the explicit nonlinearity $f(t)=e^t-1$ is considered. On the other hand, a very simple proof of the second part of statement (*i*) can be obtained by exploiting a suitable energy function, see our Section 4.1. The same energy function has been used to prove statement (*ii*) in [5, Section 11], see again Section 4.1. Statement (*iii*) has been proved in [24] by using a mountain-pass procedure. We note that an alternative approach in getting existence of homoclinics consists in studying a suitable constrained minimization problem. This has been developed in the work [23]. We refer the interested reader to [23, Sections 2 and 7]. Finally we mention that, when $f(t)=e^t-1$, a multiplicity result for homoclinics is obtained in [8] by means of a computer-assisted proof.

We conclude our short survey on homoclinic solutions with a couple of complementary results from [5]. See also [17, 18] for further results.

THEOREM 7. – *Let* $k>0$. *Assume that* f *satisfies* (3) *and it is differentiable at* $t=0$ *with* $f'(0)=1$. *The following statements hold*

(*i*) *if* w *is a homoclinic solution to* (1), *and if* $\{s_m\}_{m\geq 1}$ *denotes the increasing sequence of zeroes of* w *as* $s\to+\infty$, *then*

$$\liminf_{m\to+\infty}(s_{m+1}-s_m)\geq\frac{\pi\sqrt{k+\sqrt{k^2+12}}}{\sqrt{6}}. \tag{12}$$

A similar statement holds as $s\to-\infty$.

(*ii*) *If* $k<2$, *then any homoclinic solution* w *to* (1) *satisfies* $w\in H^2(\boldsymbol{R})$.

From Theorem 3 we know that any homoclinic solution changes sign infinitely many times as $s\to\pm\infty$ (cfr. Theorem 6-(*i*)). Theorem 7-(*i*) states that the distance between two consecutive zeroes of an homoclinic solution stays bounded away from zero as $s\to\pm\infty$. Finally, we note that the limit value $k=2$ comes from the dynamical system analysis, see Section 4.2.

3. – Related biharmonic Gelfand-type problems

Here we give an interpretation of the results stated in Section 2 in terms of suitable biharmonic equations. Let $k \in \boldsymbol{R}$ and consider the equation

$$\Delta^2 u - 2(n-4)\frac{x \cdot \nabla \Delta u}{|x|^2} + (n^2 - 6n + 12 + k)\frac{\Delta u}{|x|^2} - (n-2)\big[(n-2)^2 + k\big]\frac{x \cdot \nabla u}{|x|^4} + e^u = \frac{1}{|x|^4} \tag{13}$$

where $x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ $(n \geq 2)$. For any $k \in \boldsymbol{R}$, (13) admits an explicit global radial solution which is given by $\overline{u}(x) = -4 \log |x|$. To see this, one may write (13) in its radial form, that is

$$u''''(r) + 6\,\frac{u'''(r)}{r} + (7+k)\,\frac{u''(r)}{r^2} + (1+k)\,\frac{u'(r)}{r^3} + e^{u(r)} = \frac{1}{r^4}\,,$$

where $r = |x| \in (0, +\infty)$. Then, with the change of variables

$$s = \log r \qquad w(s) := u(e^s) + 4s \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,$$

one finds that $w = w(s)$ solves (1) with $f(t) = e^t - 1$ and the singular solution $\overline{u}(x) = -4 \log |x|$ to (13) corresponds to the trivial solution $w \equiv 0$.

For problem (13), Theorem 1 reads

COROLLARY 1. – *Let $k \in \boldsymbol{R}$ and B_R be the ball in $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geq 2)$ with radius $0 < R < +\infty$ and center the origin. Then, any radial solution to* (13) *in $B_R \setminus \{0\}$ admits a radial extension to $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$. In particular, equation* (13) *in $B_R \setminus \{0\}$ subject to the boundary condition*

$$\lim_{|x| \to R} u(x) = \infty\,,$$

admits no radial solution.

On the other hand, Theorem 6 reads

COROLLARY 2. – *Let $k \leq 0$ and let u be a radial solution to* (13). *If*

$$\lim_{|x| \to 0} (u(x) + 4 \log |x|) = 0 = \lim_{|x| \to +\infty} (u(x) + 4 \log |x|)\,,$$

then $u(x) \equiv -4 \log |x|$.

Let us consider some meaningful values of n and k in (13).

If $n = 4$, (13) becomes

$$\Delta^2 u + (4+k)\left(\frac{\Delta u}{|x|^2} - 2\,\frac{x\cdot\nabla u}{|x|^4}\right) + e^u = \frac{1}{|x|^4}\ , \qquad x \in \boldsymbol{R}^4 \setminus \{0\}.$$

Hence, if furthermore $k = -4$ we get equation (2).

If $n = 2$, (13) corresponds to the equation

$$\Delta^2 u + 4\,\frac{x\cdot\nabla\Delta u}{|x|^2} + (4+k)\frac{\Delta u}{|x|^2} + e^u = \frac{1}{|x|^4}\ , \qquad x \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Thus, by taking $k = -4$, the equation reduces to

$$\Delta^2 u + 4\,\frac{x\cdot\nabla\Delta u}{|x|^2} + e^u = \frac{1}{|x|^4}\ , \qquad x \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Finally, for any $n \geq 2$, taking $k = -(n^2 - 6n + 12) \in (-\infty, -3]$ we have

$$\Delta^2 u - 2(n-4)\left[\frac{x\cdot\nabla\Delta u}{|x|^2} + (n-2)\frac{x\cdot\nabla u}{|x|^4}\right] + e^u = \frac{1}{|x|^4}\ , \qquad x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\},$$

while taking $k = -(n-2)^2 \in (-\infty, 0]$ leads to

$$\Delta^2 u - 2(n-4)\left[\frac{x\cdot\nabla\Delta u}{|x|^2} + \frac{\Delta u}{|x|^2}\right] + e^u = \frac{1}{|x|^4}\ , \qquad x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}.$$

4. – About the proofs

As already remarked, the proofs of the statements given in Section 2 are mainly based on elementary calculus arguments but applied in a refined way. We refer to [5] for the details. Nevertheless it is worth mentioning two fundamental tools which turn out to be crucial in most of the proofs. Namely, the exploitation of suitable energy functions and the analysis of the dynamical system associated to (1). The next two subsections are devoted to a description of these tools.

4.1 – *Energy functions*

To equation (1) we may associate the following three different energy functions each one characterized by suitable properties:

$$E(s) := \frac{1}{2}\,w''(s)^2 - \frac{k}{2}\,w'(s)^2 - F(w(s)),$$

$$\mathcal{E}(s) := \frac{1}{2}\, w''(s)^2 - \frac{k}{2}\, w'(s)^2 - w'(s)w'''(s) - F(w(s)) = E(s) - w'(s)w'''(s)$$

and

$$H(s) := w'(s)w''(s) - w(s)w'''(s) - kw(s)w'(s)$$

for any $s \in \boldsymbol{R}$.

$E(s)$ turns out to be constant on critical points of solutions. Indeed, let $w = w(s)$ be a solution to (1) and let s_1 and s_2 be such that $w'(s_1) = w'(s_2) = 0$. By differentiating we obtain

$$E'(s) = w'''(s)w''(s) - kw''(s)w'(s) - f(w(s))w'(s).$$

Hence, if $s_2 > s_1$, an integration by parts yields

$$\begin{aligned} E(s_2) - E(s_1) &= \int_{s_1}^{s_2} E'(s)\, ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \big(w'''(s)w''(s) - kw''(s)w'(s) - f(w(s))w'(s)\big)\, ds \\ &= -\int_{s_1}^{s_2} \big(w''''(s) + kw''(s) + f(w(s))\big)w'(s)\, ds = 0, \end{aligned}$$

where we used $w'(s_1) = w'(s_2) = 0$ and (1).

The second energy function is constant on solutions. Indeed, if w solves (1), there holds

$$\mathcal{E}'(s) = w'''(s)w''(s) + w''''(s)w'(s) - (w'(s)w'''(s))' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E}(s) = C\,,$$

for some $C \in \boldsymbol{R}$. Therefore, if one is interested in homoclinics, by (10), $\mathcal{E}(s) = 0$ for all $s \in \boldsymbol{R}$. This property has been exploited to prove Theorem 7-(i).

Next we turn to $H(s)$. Let w be a solution to (1), a short computation gives

$$H'(s) = w''(s)^2 - kw'(s)^2 + w(s)f(w(s)).$$

If $k \le 0$ and f satisfies (3), then it is readily deduced that H is nondecreasing. This gives a simpler proof of the second part of Theorem 6-(i). Indeed, let w be a homoclinic solution to (1), (10) yields $\lim_{s\to\pm\infty} H(s) = 0$. Since H is nondecreasing, $H = H' \equiv 0$ and we have a simple proof of the fact that no homoclinic solution exists.

The energy H may also be exploited when $k > 0$. See e.g. the proof of Theorem 6-(ii) as given in [5].

4.2 – *Dynamical system analysis*

In some situations, it may be useful to transform the fourth order ode (1) into a *first order system* of four equations. Let $w = w(s)$ be a solution to (1) and put

$$Y(s) = (y_1(s), y_2(s), y_3(s), y_4(s)) = (w(s), w'(s), w''(s), w'''(s))$$

so that (1) may be rewritten as a system

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -ky_3 - f(y_1). \end{cases} \tag{14}$$

If we define $\Phi : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ by

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2, y_3, y_4, -ky_3 - f(y_1))$$

then any solution $Y(s) = (y_1(s), y_2(s), y_3(s), y_4(s))$ of (14) may be rewritten as

$$Y'(s) = \Phi(Y(s)).$$

In view of (3), $f(s)$ admits a unique zero at $s = 0$. Therefore, the dynamical system (14) admits a unique stationary point which is $O = (0, 0, 0, 0)$. This point corresponds to the solution $w \equiv 0$ to (1). We now study the stability of O.

If we assume that f is differentiable at $t = 0$ with $f'(0) = 1$, then the linearized problem at O for (14) reads

$$Y'(s) = AY(s)\ , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

The eigenvalues λ of A satisfy the equation $\lambda^4 + k\lambda^2 + 1 = 0$ and therefore also

$$\lambda^2 = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Hence, if $k < -2$ the eigenvalues of A are all real and are given by

$$\lambda \in \left\{ \pm\sqrt{\frac{|k| + \sqrt{k^2 - 4}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{|k| - \sqrt{k^2 - 4}}{2}} \right\}.$$

If $-2 < k < 2$, the eigenvalues of A are

$$\lambda \in \left\{ \pm\frac{\sqrt{2 - k}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2 + k}}{2}\ , \pm\frac{\sqrt{2 - k}}{2} \mp i\,\frac{\sqrt{2 + k}}{2} \right\}.$$

If $k > 2$, the eigenvalues of A are given by

$$\lambda \in \left\{ \pm i \sqrt{\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}}, \pm i \sqrt{\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}} \right\}.$$

If $k = -2$ the eigenvalues of A are $\lambda \in \{\pm 1\}$, they both have multiplicity 2, and the corresponding eigenvectors are $v_+ = (1, 1, 1, 1)$ and $v_- = (1, -1, 1, -1)$.

If $k = 2$ the eigenvalues of A are $\lambda \in \{\pm i\}$ (with multiplicity 2) and the corresponding eigenvectors are $v = (1, i, -1, -i)$ and $\overline{v} = (1, -i, -1, i)$.

Summarizing, we have

PROPOSITION 1. – *Assume* (3) *and that* f *is differentiable at* $t = 0$ *with* $f'(0) = 1$. *For any* $k \in \boldsymbol{R}$, (14) *has a unique stationary point* $O = (0, 0, 0, 0)$ *which satisfies*

(*i*) *if* $k < -2$, O *has a 2-dimensional stable manifold and a 2-dimensional unstable manifold, both not oscillating near O;*

(*ii*) *if* $k = -2$, O *has a 2-dimensional stable manifold (tangent to* v_- *near O) and a 2-dimensional unstable manifold (tangent to* v_+ *near O);*

(*iii*) *if* $-2 < k < 2$, O *has a 2-dimensional stable manifold and a 2-dimensional unstable manifold, both having locally the form of a spiral near O;*

(*iv*) *if* $k = 2$, *the linearized problem at O has 2 (opposite) double purely imaginary eigenvalues;*

(*v*) *if* $k > 2$, *the linearized problem at O has 4 purely imaginary eigenvalues.*

If $k \geq 0$, by Theorem 3 we know that any global solution to (1) changes sign infinitely many times as $s \to \pm\infty$. The dynamical system analysis performed above suggests that oscillations may also occur when $-2 < k < 0$ since A has complex eigenvalues. On the other hand when $k \leq -2$ we expect solutions having eventually one sign. More precisely, from [5] one has

THEOREM 8. – *Assume that* f *satisfies* (3).

(i) *If* $k \leq -2$ *and* f *also satisfies one of the following*

$$f(t) \geq t \quad \text{near } t = 0 \quad \text{or} \quad f(t) \leq t \quad \text{near } t = 0 \tag{15}$$

then any global solution w *to* (1) *such that* $\lim_{s \to +\infty} w(s) = 0$ *is of one sign as* $s \to +\infty$. *Moreover, a similar statement holds with* $+\infty$ *replaced by* $-\infty$.

(ii) *If* $-2 < k < 0$, f *is differentiable at* $t = 0$ *with* $f'(0) = 1$ *and also satisfies*

$$\liminf_{|t| \to +\infty} \frac{f(t)}{t} > k^2 , \tag{16}$$

then any global nontrivial solution w *to* (1) *changes sign infinitely many times both as* $s \to \pm\infty$.

REFERENCES

[1] G. Arioli - F. Gazzola - H.-Ch. Grunau, *Entire solutions for a semilinear fourth order elliptic problem with exponential nonlinearity*, J. Diff. Eq. **230** (2006), 743-770.

[2] G. Arioli - F. Gazzola - H.-Ch. Grunau - E. Mitidieri, *A semilinear fourth order elliptic problem with exponential nonlinearity*, SIAM J. Math. Anal. **36**, (2005), 1226-1258.

[3] E. Berchio - D. Cassani - F. Gazzola, *Hardy-Rellich inequalities with boundary remainder terms and applications*, Manuscripta Math. **131** (2010), 427-458.

[4] E. Berchio - A. Farina - A. Ferrero - F. Gazzola, *Existence and stability of entire solutions to a semilinear fourth order elliptic problem*, J. Diff. Eq. **252** (2012), 2596-2616.

[5] E. Berchio - A. Ferrero - F. Gazzola - P. Karageorgis, *Qualitative behavior of global solutions to some nonlinear fourth order differential equations*, J. Diff. Eq. **251** (2011), 2696-2727.

[6] E. Berchio - F. Gazzola, *Some remarks on biharmonic elliptic problems with positive, increasing and convex nonlinearities*, Electronic J. Diff. Eq. **34** (2005), 1-20.

[7] D. Bonheure - L. Sanchez, *Heteroclinic orbits for some classes of second and fourth order differential equations*, Handbook of Diff. Eq. Vol. III, Elsevier Science (2006), 103-202.

[8] B. Breuer - J. Hórak - P. J. McKenna - M. Plum, *A computer-assisted existence and multiplicity proof for travelling waves in a nonlinearly supported beam*, J. Diff. Eq. **224** (2006), 60-97.

[9] S. Y. A. Chang - W. Chen, *A note on a class of higher order conformally covariant equations*, Discrete Cont. Dyn. Syst. **7** (2001), 275-281.

[10] Y. Chen - P. J. McKenna, *Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: theoretical results and numerical observations*, J. Diff. Eq. **136** (1997), 325-355.

[11] J. Dávila - L. Dupaigne - I. Guerra - M. Montenegro, *Stable solutions for the bilaplacian with exponential nonlinearity*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2007), 565-592.

[12] J. Dávila - I. Flores - I. Guerra, *Multiplicity of solutions for a fourth order problem with exponential nonlinearity*, J. Diff. Eq. **247** (2009), 3136-3162.

[13] F. Gazzola - R. Pavani, *Blow up oscillating solutions to some nonlinear fourth order differential equations*, Nonlin. Anal. TMA **74** (2011), 6696-6711.

[14] F. Gazzola - R. Pavani, *Blow-up oscillating solutions to some nonlinear fourth order differential equations describing oscillations of suspension bridges*, IABMAS12, 6th International Conference on Bridge Maintenance, Safety, Management, Resilience and Sustainability, Stresa 2012, Biondini-Frangopol (Editors), Taylor-Francis Group (London, 2001), 3089-3093.

[15] I. M. Gel'fand, *Some problems in the theory of quasilinear equations*, Section 15, due to G. I. Barenblatt, Amer. Math. Soc. Transl. II. Ser. **29** (1963), 295-381. Russian original: Uspekhi Mat. Nauk. **14** (1959), 87-158.

[16] D. Joseph - T. S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rat. Mech. Anal. **49** (1973), 241-269.
[17] P. Karageorgis - P. J. McKenna, *The existence of ground states for fourth-order wave equations*, Nonlinear Analysis **73** (2010), 367-373.
[18] P. Karageorgis - J. G. Stalker, *A lower bound for the amplitude of traveling waves of suspension bridges*, Nonlinear Analysis **75** (2012), 5212-5214.
[19] C. S. Lin, *A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in* ***R****n*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), 206-231.
[20] P. J. McKenna - W. Walter, *Traveling waves in a suspension bridge*, SIAM J. Appl. Math. **50** (1990), 703-715.
[21] P. J. McKenna, *Large-amplitude periodic oscillations in simple and complex mechanical systems: outgrowths from nonlinear analysis*, Milan J. Math. **74** (2006), 79-115.
[22] L. A. Peletier - W. C. Troy, *Spatial patterns. Higher order models in physics and mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA **45** (2001).
[23] M. A. Peletier, *Sequential buckling: a variational analysis*, SIAM J. Math. Anal. **32** (2001), 1142-1168.
[24] D. Smets - J. B. van den Berg, *Homoclinic solutions for Swift-Hohenberg and suspension bridge type equations*, J. Diff. Eq. **184** (2002), 78-96.

Dipartimento di Matematica del Politecnico
Piazza L. da Vinci 32 - 20133 Milano (Italy)
E-mail: elvise.berchio@polimi.it

Received October 15, 2012 and accepted November 6, 2012

Francesco Bigolin: Caratterizzazioni di ipersuperfici regolari intrinseche nel gruppo di Heisenberg

Francesco Bigolin
Dipartimento di Matematica, Università di Trento
email: bigolin@science.unitn.it

Sunto

Consideriamo il gruppo di Heisenberg $H^n = C^n \times R \equiv R^{2n+1}$ con algebra di Lie h_n di campi vettoriali linearmente generata da $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{y_j}{2}\frac{\partial}{\partial t}$, $Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{x_j}{2}\frac{\partial}{\partial t}$, $j = 1, \ldots, n$, $T = \frac{\partial}{\partial t}$; gli unici commutatori non banali sono $[X_j, Y_j] = T$, $j = 1, \ldots n$.

Una funzione reale continua f su $\Omega \subseteq H^n$ appartiene a $C^1_H(\Omega)$ se il suo gradiente orizzontale $\nabla_H f$, definito da $\nabla_H f := (X_1 f, \ldots, X_n f, Y_1 f, \ldots, Y_n f)$ nel senso delle distribuzioni, è una funzione vettoriale continua. Definiamo un insieme $S \subset H^n$ *ipersperficie H-regolare* se esiste $f \in C^1_H(H^n)$ tale che S è localmente definito come l'insieme dei punti $P \in H^n$ tali che $f(P) = 0$ e $\nabla_H f \neq 0$ su S.

[4] dimostrano un teorema delle funzioni implicite per una ipersuperficie H-regolare così definita, in modo che se $S \subset H^n$ è H-regolare allora S è localmente un X_1-*grafico*: esiste cioè una funzione $\phi : \omega \subset R^{2n} \to R$, tale che $S = \{A \cdot \phi(A)\, e_1 : A \in \omega\}$. [1] caratterizzano la parametrizzazione $\phi : \omega \to R$ come soluzione del sistema di EDP non lineari del primo ordine $\nabla^\phi \phi = w$ in ω, dove ∇^ϕ è definito da

$$\nabla^\phi_j := \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{v_{j+n}}{2}\frac{\partial}{\partial \tau} & \text{if } 2 \leq j \leq n \\ \frac{\partial}{\partial \eta} + \phi \frac{\partial}{\partial \tau} & \text{if } j = n+1 \\ \frac{\partial}{\partial v_j} + \frac{v_{j-n}}{2}\frac{\partial}{\partial \tau} & \text{if } n+2 \leq j \leq 2n, \end{cases}$$

I risultati principali dell'intervento, tratti da [2] e [3], si riassumono come segue:

Teorema. *Se $\phi \in C^0(\omega)$ e $w \in C^0(\omega, R^{2n-1})$ allora sono equivalenti:*

i: *$S = G^1_{H,\phi}(\omega)$ è una ipersurperficie H-regolare in H^n.*
ii: *ϕ è una soluzione broad* del sistema $\nabla^\phi \phi = w$.*
iii: *ϕ è una soluzione distribuzionale del sistema $\nabla^\phi \phi = w$.*

Bibliografia

[1] Ambrosio L., Serra Cassano F., Vittone D. 'Intrinsic Regular Hypersurfaces in Heisenberg Groups',J. Geom. Anal. 16, (2006)

[2] Bigolin F., Serra Cassano F., 'Intrinsic regular graphs in Heisenberg groups vs. weak solutions of non linear first-order PDEs', Adv. Calc. Var. 3, (2010)

[3] Bigolin F., Serra Cassano F., 'Distributional solutions of Burgers' equation and intrinsic regular graphs in Heisenberg groups', J. Math. Anal. Appl. 366, (2010)

[4] Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F., 'Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group', Math. Ann. 321, (2001)

Intervento: Francesco Bigolin,
Caratterizzazioni di ipersuperfici regolari intrinseche nei gruppi di Heisenberg,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 685–692**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 685-692

Caratterizzazioni di ipersuperfici regolari intrinseche nei gruppi di Heisenberg

FRANCESCO BIGOLIN

Sommario. – *Lo scopo di questa conferenza è quello di presentare le relazioni tra una ipersuperficie regolare intrinseca S nel gruppo di Heisenberg, munito della sua naturale struttura subriemanniana, e la sua parametrizzazione, vista come soluzione debole di un particolare sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine, che nel caso del primo gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ si riduce alla classica equazione di Burgers.*

Daremo esposizione dei principali risultati dei lavori [2, 3, 5]. *Non riporteremo per iscritto le dimostrazioni dei vari teoremi enunciati, fornendo però i precisi riferimenti bibliografici e alcuni commenti e osservazioni.*

La conferenza è suddivisa in tre parti: nella prima si presentano alcuni risultati noti sulle leggi di conservazione e si introducono i concetti di soluzione distribuzionale ed entropica; nella seconda si dà una breve introduzione al gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$; nella terza si riportano i risultati principali degli articoli [2, 3, 5] *e in particolare alcune caratterizzazioni delle ipersuperfici regolari intrinseche e delle funzioni intrinsecamente Lipschitz metrico nel gruppo di Heisenberg.*

1. – Leggi di conservazione

In questa sezione richiamiamo alcuni risultati noti riguardanti lo studio delle soluzioni delle leggi di conservazione. Useremo poi questi risultati nella caratterizzazione delle ipersuperfici regolari intrinseche.

Dato $\omega := (0,T) \times (-r_0, r_0) \subset \mathbb{R}^2$ insieme aperto e date le funzioni $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\omega)$, $u_0 \in L^\infty(-r_0, r_0)$, consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = g(t,x) & \text{in } \omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } (-r_0, r_0) \end{cases} \tag{1.1}$$

Vale il seguente concetto di soluzione distribuzionale:

DEFINIZIONE 1.1. – *$u \in C^0([0,T]; L^1(-r_0, r_0)) \cap L^\infty(\omega)$ è una soluzione distribuzionale di* (1.1) *se*

i) $\forall v \in C_c^\infty(\omega) \quad \int_\omega [uv_t + f(u)v_x + gv]\, dt\, dx = 0,$

ii) $\lim_{t \to 0^+} \| u(t,\cdot) - u_0 \|_{L^1(-r_0,r_0)} = 0.$

Poiché le soluzioni distribuzionali non sono uniche, è necessario introdurre un secondo concetto di soluzione debole, per cui ottenere un risultato di unicitá. In particolare Kružkov definisce nel 1970 una nuova classe di soluzioni, le soluzioni entropiche, per le quali si ottiene questo risultato.

DEFINIZIONE 1.2. – *Diciamo che le funzioni* $e, d \in C^\infty(\mathbb{R})$ *costituiscono una entropia/flusso di entropia per* (1.1) *se* e *è convessa e vale* $e' \cdot f' = d'$.

DEFINIZIONE 1.3. – *Siano* $g \in L^1(\omega)$, $u_0 \in L^\infty((-r_0, r_0))$. *Diciamo allora che* $u \in C^0([0,T]; L^1(-r_0, r_0)) \cap L^\infty(\omega)$ *è una soluzione entropica di* (1.1) *se*

i) $\forall\, v \in C_c^\infty(\omega)$ *tale che* $v \geq 0$, $\forall\,(e,d)$ *entropia/flusso di entropia abbiamo*

$$\int_\omega [e(u)v_t + d(u)v_x + e'(u)gv]\, dt\, dx \geq 0;$$

ii) $\lim_{t \to 0^+} \| u(t,\cdot) - u_0 \|_{L^1(-r_0,r_0)} = 0.$

TEOREMA 1.1 (Kružkov, 1970). – *Data* $g \in L^1(\omega)$, *siano* $u, \tilde{u} \in C^0([0,T]; L^1(-r_0, r_0)) \cap L^\infty(\omega)$ *due soluzioni entropiche del problema* (1.1) *tali che*

i) $|u(t,x)| \leq M, \quad |\tilde{u}(t,x)| \leq M \qquad \forall (t,x) \in \omega$
ii) $u(0,\cdot) = \tilde{u}(0,\cdot) \quad$ *a.e. in* $(-r_0, r_0)$,

allora, per $r < r_0$ *vale* $u(t,x) = \tilde{u}(t,x)$ *per* $\mathcal{L}^2 - q.o.$ $(t,x) \in (0,T) \times (-r, r)$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [9]

In generale, le soluzioni distribuzionali e entropiche di una legge di conservazione (1.1) possono avere delle discontinuità. Nel caso di continuità, si ottiene un particolare risultato di regolarità delle soluzioni distribuzionali lungo le caratteristiche, dimostrato da Dafermos.

TEOREMA 1.2 (Dafermos, 1977, 2006). – *Siano* f *convessa e* $g \in C^0(\omega)$; *sia* u *una soluzione distribuzionale continua di* (1.1) *e indichiamo* $v(t) = u(t, \xi(t))$ *per* $t \in [0,T)$. *Allora* $(\xi(t), v(t))$ *soddisfa il sistema di EDO*

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = f'(v(t)) \\ \dot{v}(t) = g(t, \xi(t)) \end{cases}$$

in $[0,T)$. *In particolare* $v(t)$ *e* $\dot{\xi}(t)$ *sono Lipschitz in* $[0,T)$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [7]

2. – Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$

Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{2n+1}$ è l'esempio più semplice di gruppo di Carnot, su cui si definisce una metrica non equivalente alla metrica euclidea. Denotiamo i punti di $\mathbb{H}^n$ con $P = [z,t] = [x+iy,t]$, dove $z \in \mathbb{C}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Dati $P = [z,t]$, $Q = [\zeta, \tau] \in \mathbb{H}^n$ definiamo la legge di gruppo $P \cdot Q := \left[z+\zeta, t+\tau - \frac{1}{2}\Im m(z \cdot \bar{\zeta})\right]$ e la norma su $\mathbb{H}^n$ $\|P\| := \max\{|z|, |t|^{1/2}\}$, da cui si ha la distanza $d_\infty(P,Q) := \|P^{-1} \cdot Q\|$ per $P, Q \in \mathbb{H}^n$.

L'algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$ di campi vettoriali invarianti a sinistra è linearmente generata da

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\, y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2}\, x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, n, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

gli unici commutatori non banali sono $[X_j, Y_j] = T$, per $j = 1, \dots n$.

Una funzione reale continua f su $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ appartiene a $C^1_{\mathbb{H}}(\Omega)$ se il suo gradiente orizzontale $\nabla_{\mathbb{H}} f$, definito da $\nabla_{\mathbb{H}} f := (X_1 f, \dots, X_n f, Y_1 f, \dots, Y_n f)$ nel senso delle distribuzioni, è una funzione vettoriale continua.

Usualmente si identificano i campi vettoriali e gli operatori differenziali del primo ordine associati, si ha quindi che $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ generano un fibrato vettoriale su $\mathbb{H}^n$, chiamato fibrato orizzontale $H\mathbb{H}$, che è un sottofibrato del fibrato tangente di $\mathbb{H}^n$. Per ogni punto $P \in \mathbb{H}^n$ la fibra orizzontale è indicata da $H\mathbb{H}_P$ e su ogni fibra si definiscono il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ e la norma associata $|\cdot|_P$ che rendono il campo vettoriale $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ ortonormale. Nel seguito denoteremo $\mathbb{W} := \{P \in \mathbb{H}^n : x_1 = 0\}$ e $v = (x_2, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n)$.

Possiamo ora introdurre le ipersuperfici regolari intrinseche (o ipersuperfici $\mathbb{H}$-regolari):

Definizione 2.1. – *Definiamo un insieme $S \subset \mathbb{H}^n$ ipersuperficie $\mathbb{H}$-regolare se localmente esiste una funzione $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ tale che S è definito come l'insieme dei punti $P \in \mathbb{H}^n$ tali che $f(P) = 0$ e $\nabla_{\mathbb{H}} f(P) \neq 0$.*

Quindi una ipersuperficie $\mathbb{H}$-regolare S si può vedere localmente come luogo di zeri di una funzione $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ con $X_1 f \neq 0$. Infine si definisce la *normale orizzontale* a S nel punto $P \in S$ $\nu_S(P)$, come il versore $\nu_S(P) := -\dfrac{\nabla_{\mathbb{H}} f(P)}{|\nabla_{\mathbb{H}} f(P)|_P}$.

In [8] si dimostra un teorema delle funzioni implicite per una ipersuperficie regolare intrinseca così definita.

Teorema 2.1 (Franchi, Serapioni, Serra Cassano, 2001). – *Sia $S \subset \mathbb{H}^n$ una ipersuperficie $\mathbb{H}$-regolare. Se $X_1 f \neq 0$, allora esiste localmente una parametrizzazione $\Phi : \omega \subset \mathbb{W} \equiv \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{H}^n$ tale che $S = \Phi(\omega)$.*

$S = \Phi(\omega)$ è chiamato un X_1-*grafico*: esiste cioè una funzione $\phi : \omega \subset \mathbb{W} \to \mathbb{R}$, tale che $S = \{A \cdot \phi(A)\, e_1 : A \in \omega\}$. Data $\phi : \omega \to \mathbb{R}$, $\Phi : \omega \to \mathbb{H}^n$ indica la corrispondente funzione parametrica, definita per $A \in \omega$

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= A \cdot \phi(A)\, e_1 = \\ &= \Big(\phi(y_1, t), y_1, t - \frac{y_1}{2}\phi(y_1, t)\Big) \quad \text{se } n = 1 \\ &= \Big(\phi(y_1, v, t), x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, t - \frac{y_1}{2}\phi(y_1, v, t)\Big) \quad \text{se } n \geq 2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

3. – Caratterizzazioni delle ipersuperici regolari intrinseche

In [1] si dà una caratterizzazione della parametrizzazione $\phi : \omega \subset \mathbb{W} \to \mathbb{R}$, che viene considerato come soluzione del sistema di EDP non lineari del primo ordine

$$\nabla^{\phi}\phi = w \qquad \text{in} \quad \omega, \tag{3.1}$$

dove ∇^{ϕ} è la famiglia di operatori differenziali del primo ordine definiti da

$$\nabla_j^{\phi} := \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \dfrac{y_j}{2}\dfrac{\partial}{\partial t} & \text{if } 2 \leq j \leq n \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} + \phi\dfrac{\partial}{\partial t} & \text{if } j = n+1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y_{j-n}} + \dfrac{x_{j-n}}{2}\dfrac{\partial}{\partial t} & \text{if } n+2 \leq j \leq 2n, \end{cases}$$

se $n \geq 2$ e da $\nabla^{\phi} := \dfrac{\partial}{\partial y_1} + \phi\dfrac{\partial}{\partial t}$ se $n = 1$.

In particolare si osservi che l'operatore differenziale non lineare $C^1(\omega) \ni \phi \to \mathfrak{B}\phi := \nabla_{n+1}^{\phi}\phi$ è un operatore di tipo Burgers che può essere rappresentato in forma distribuzionale come $\mathfrak{B}\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial y_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi^2}{\partial t}$.

In [1] l'operatore $\nabla^{\phi}\phi$ è stato caratterizzato come gradiente intrinsico di ϕ in una struttura differenziale proiettata su $\mathbb{W}$ dalla struttura differenziale di $\mathbb{H}^n$ tramite la parametrizzazione $\phi : \omega \to S$. Il risultato principale di [1] (teoremi 1.2 e 1.3) è il seguente:

TEOREMA 3.1. – *Sia $\omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ un insieme aperto e sia $\phi : \omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $S = \Phi(\omega)$, dove Φ è la parametrizzazione in* (2.1). *Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

i) *S è una superficie $\mathbb{H}$-regolare;*

ii) *la distribuzione* $\nabla^{\phi}\phi$ *è rappresentata da una funzione* $w = (w_2, ..., w_{2n}) \in C^0(\omega; \mathbb{R}^{2n-1})$ *ed esiste una famiglia* $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^1(\omega)$ *tale che, per ogni insieme aperto* $\omega' \Subset \omega$, *abbiamo*

$$\phi_\varepsilon \to \phi \text{ e } \nabla^{\phi_\varepsilon}\phi_\varepsilon \to w^* \textit{uniformemente in } \omega'. \tag{3.2}$$

In più abbiamo che $\phi \in h^{1/2}_{loc}(\omega)$, cioè per ogni insieme aperto $\omega' \Subset \omega$ vale

$$\lim_{r\to 0^+} \sup\left\{ \frac{|\phi(A) - \phi(B)|}{\sqrt{|A-B|}} : A, B \in \omega', 0 < |A-B| < r \right\} = 0\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [1]

Questa caratterizzazione motiva i metodi e le tecniche usate nel lavoro. Questi derivano infatti principalmente dalla teoria delle EDP non lineari del primo ordine e dallo studio dell'equazione di Burgers. In particolare è fondamentale lo studio di due classi di soluzioni deboli: le soluzioni distribuzionali dell'equazione $\dfrac{\partial\phi}{\partial y_1} + \phi\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = w$ e le soluzioni broad* del sistema (3.1).

DEFINIZIONE 3.1. – *Chiamiamo soluzione broad* del sistema* (3.1) *una funzione continua* $\phi : \omega \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ *tale che per ogni* $A \in \omega$, $\forall j = 2, ..., 2n$ *esiste una mappa esponenziale,*

$$\gamma_j^B(s) = \exp(s\nabla_j^{\phi})(B) : [-\delta, \delta] \times \overline{I} \to \overline{J} \subset \omega$$

dove I *e* J *sono intorni di* A, $\delta > 0$ *e* $s \in [-\delta, \delta]$, *tali che* $\forall B \in I$

(E.1) $\gamma_j^B \in C^1([-\delta, \delta])$

(E.2) $\begin{cases} (\dot{\gamma}_j^B = \nabla_j^{\phi} \circ \gamma_j^B \\ \gamma_j^B(0) = B \end{cases}$

(E.3) $\phi\Big(\gamma_j^B(s)\Big) - \phi\Big(\gamma_j^B(0)\Big) = \displaystyle\int_0^s w_j\Big(\gamma_j^B(r)\Big)\,dr \qquad \forall s \in [-\delta, \delta]$

I risultati principali di questo intervento sono le seguenti caratterizzazioni, dimostrate in [2, 3]:

TEOREMA 3.2 (B., Serra Cassano 2010). – *Se* $\phi \in C^0(\omega)$ *e* $w \in C^0(\omega, \mathbb{R}^{2n-1})$ *le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

i) $S = \Phi(\omega)$ *è una ipersurperficie* $\mathbb{H}$*-regolare in* $\mathbb{H}^n$ *e*

$$\nu_S(P) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}, \frac{w}{\sqrt{1+|w|^2}} \right)(\phi^{-1}(P)) \qquad \forall P \in S;$$

ii) *ϕ è una soluzione broad* del sistema $\nabla^{\phi}\phi = w$;*

iii) *ϕ è una soluzione distribuzionale del sistema $\nabla^{\phi}\phi = w$.*

La caratterizzazione data nel teorema 3.2 è l'esatta controparte di quello nel caso euclideo. Più precisamente una funzione $\phi \in C^1(\omega)$ può essere vista come soluzione distribuzionale di $\nabla\phi = w$ in ω, se $w \in C^0(\omega; \mathbb{R}^m)$ e $\omega \subset \mathbb{R}^m$ è aperto.

Si osservi che non è richiesta la forte ipotesi di esistenza dell'approssimazione (3.2) di ϕ fatta in [1]. La dimostrazione non è immediata e la continuità delle soluzioni broad* e distribuzionali gioca un ruolo centrale nel discorso: infatti sfruttando un risultato di [7] si prova che se la funzione ϕ è continua, i concetti di soluzione broad* e distribuzionale coincidono. Si dimostra l'equivalenza tra i punti **i** e **ii** sfruttando la regolarità della soluzione broad* lungo le sue linee caratteristiche, che dal punto di vista della geometria intrinseca di $\mathbb{H}^n$ sono le curve esponenziali dei campi ∇_j^{ϕ}.

Oltre alla caratterizzazione già descritta, presentiamo alcuni risultati di unicità per soluzioni broad* di (3.1) uniformemente limitate e la loro interpretazione geometrica: se due ipersperfici $\mathbb{H}$-regolari con la stessa normale orizzontale sono la stessa ipersuperficie se hanno una curva verticale in comune nel caso di $\mathbb{H}^1$ oppure se hanno un punto in comune nel caso di $\mathbb{H}^n$. Le tecniche di dimostrazione si rifanno ai risultati di [9]. Indicheremo con $I_{r_0}(A_0)$ un intorno centrato nel punto A_0 di raggio r_0.

TEOREMA 3.3 (B., Serra Cassano, 2010). – *Dato $A_0 = (y_{1,0}, t_0) \in \mathbb{R}^2$, siano $\phi_1, \phi_2 \in C^0(\overline{I_{r_0}(A_0)})$ soluzioni broad* del problema*

$$\begin{cases} \nabla^{\phi}\phi = w & w \in C^0(I_{r_0}(A_0)) \\ \phi(y_{1,0}, t) = \phi_0(t) & \phi_0 \in C^0([t_0 - r_0, t_0 + r_0]) \end{cases}$$

tali che $|\phi_i(A)| \leq M \quad \forall A \in \overline{I_{r_0}(A_0)}\,(i = 1, 2)$.

Allora $\phi_1 = \phi_2$ in $I_r(A_0)$ if $0 < r < \dfrac{r_0}{1+M}$.

TEOREMA 3.4 (B., Serra Cassano, 2010). – *Dato $A_0 = (y_{1,0}, v_0, t_0) \in \mathbb{R}^{2n}$, siano $\phi_1, \phi_2 \in C^0(\overline{I_{r_0}(A_0)})$ soluzioni broad* del problema*

$$\begin{cases} \nabla^{\phi}\phi = w & w \in C^0(I_{r_0}(A_0), \mathbb{R}^{2n-1}) \\ \phi(A_0) = a & a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tali che $|\phi_i(A)| \leq M \quad \forall A \in \overline{I_{r_0}(A_0)}\,(i = 1, 2)$.

Allora $\phi_1 = \phi_2$ in $I_r(A_0)$ if $0 < r < \dfrac{r_0}{1+M}$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [2]

Studiamo infine la regolarità euclidea di un grafico $\mathbb{H}$-regolare $S = \Phi(\omega)$ attraverso la regolarità del suo gradiente intrinseco $\nabla^{\phi}\phi$:

TEOREMA 3.5 (B., Serra Cassano 2010). – *Sia $\phi \in C^0(\omega)$, $\omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, una soluzione distribuzionale di $\nabla^{\phi}\phi = w$.*

i) *Caso $n = 1$: se $\nabla^{\phi}\phi \in Lip(\omega)$ allora $\phi \in Lip(\omega)$.*

ii) *Caso $n \geq 2$: se $\phi, w_j \in Lip(\omega)\ \forall j \in \{2, \dots, 2n\}$ allora $\phi \in C^1(\omega)$.*
Se $w_j \in C^k(\omega)\ \forall j \in \{2, \dots, 2n\}$ allora $\phi \in C^k(\omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Cfr. [2]

La regolarità euclidea della parametrizzazione di una ipersuperficie regolare intrinseca dipende quindi dalla regolarità del gradiente intrinseco $\nabla^{\phi}\phi$, analogamente al caso euclideo. Osserviamo che il teorema nel caso $n = 1$ è ottimale: infatti esistono superfici $\mathbb{H}$-regolare in $\mathbb{H}^1$ tali che $W^{\phi}\phi \equiv 0 \in C^{\infty}(\omega)$ ma $\phi \in Lip(\omega) \setminus C^1(\omega)$, ad esempio $\phi(y_1, t) := \dfrac{t}{y_1 + \frac{t}{|t|}}$.

Possiamo riassumere questi risultati dal punto di vista delle leggi di conservazione nel seguente corollario:

COROLLARIO 3.1 (B., Serra Cassano, 2010). – *Data una sorgente $w \in C^0(\omega)$ e una soluzione distribuzionale continua del problema $\dfrac{\partial \phi}{\partial y_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi^2}{\partial t} = w$ allora*

i) *esiste una successione $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^1(\omega)$ tale che $\phi_\varepsilon \to \phi$ e $\dfrac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial y_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi_\varepsilon^2}{\partial t} \to w$ in $L^{\infty}_{loc}(\omega)$;*

ii) *ϕ è localmente piccolo Hölderiana in ω di ordine $1/2$, cioè $\forall\ \omega' \Subset \omega$ vale*

$$\lim_{r \to 0^+} \sup \left\{ \frac{|\phi(A) - \phi(B)|}{\sqrt{|A - B|}} : A, B \in \omega', 0 < |A - B| < r \right\} = 0;$$

iii) *Se w è Lipschitz, allora anche ϕ è localmente Lipschitz in ω.*

Si osservi che non è richiesto $\phi \in BV(\omega)$.

Concludiamo introducendo le funzioni intrinsecamente Lipschitz nel gruppo di Heisenberg e dandone una caratterizzazione, che riprende la strategia dimostrativa dei risultati già descritti.

DEFINIZIONE 3.2. – *Sia $\omega \subset \mathbb{W}$ un insieme aperto e limitato e siano $A, B \in \omega$. Sia $\phi \in C^0(\omega)$, allora definiamo la distanza grafico come*

$$d_\phi(A,B) := \|\pi_{\mathbb{W}}(\Phi(A)^{-1} \cdot \Phi(B))\|_\infty.$$

DEFINIZIONE 3.3. – *Una funzione $\phi : \omega \subset \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ è intrinsecamente Lipschitz metrico se esiste $L > 0$ tale che per ogni $A, B \in \omega$*

$$|\phi(A) - \phi(B)| \leq L d_\phi(A,B).$$

TEOREMA 3.6 (B., Caravenna, Serra Cassano, preprint 2011). – *Sia $\omega \subset \mathbb{W}$ un insieme aperto e limitato e siano $\phi \in C^0(\omega)$, $w \in L^\infty(\omega, \mathbb{R}^{2n})$. Allora ϕ è intrinsecamente Lipschitz metrico se e solo se ϕ è una soluzione distribuzionale del problema $\nabla^\phi \phi = w$ in ω.*

DIMOSTRAZIONE. – cfr. [5]

$\Longrightarrow$ si usa un risultato di approssimazione di [6]

$\Longleftarrow$ si ottiene dalla lipschitzianità di ϕ lungo le curve caratteristiche e dimostrando la regolarità hölderiana di ϕ, nello spirito di [2].

REFERENCES

[1] AMBROSIO L., SERRA CASSANO F. and VITTONE D., *Intrinsic Regular Hypersurfaces in Heisenberg Groups,* J. Geom. Anal. **16** (2006), 187-232.

[2] BIGOLIN F. and SERRA CASSANO F., *Intrinsic regular graphs in Heisenberg groups vs. weak solutions of non linear first-order PDEs*, Adv. Calc. Var. **3** (2010), 69-97.

[3] BIGOLIN F. and SERRA CASSANO F., *Distributional solutions of Burgers' equation and intrinsic regular graphs in Heisenberg groups*, Journal of Mathmatical Analysis and Applications, **366** (2010), 561-568.

[4] BIGOLIN F. and VITTONE D., *Some remarks about parametrizations of intrinsic regular surfaces in the Heisenberg group*, Publ. Mat. **54** (2010), 159-172.

[5] BIGOLIN F., CARAVENNA L. and SERRA CASSANO F., *Intrinsic Lipschitz graphs in Heisenberg groups and continuous solutions of a balance equation*, Preprint 2012.

[6] CITTI G., MANFREDINI M., PINAMONTI A., and SERRA CASSANO F., *Approximation, area formula and characterization of intrinsic Lipschitz functions in Heisenberg groups*, Preprint 2011.

[7] DAFERMOS C.M., *Continuous solutions for balance laws*, Ric. Mat. **55** (2006), 79-91.

[8] FRANCHI B., SERAPIONI R. and SERRA CASSANO F., *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group*, Math. Ann. **321** (2001), 479-531.

[9] KRUŽKOV S.N., *First order quasilinear equations in several indipendent variable*, Math. USSR Sb. **10** (1970), 217-243.

Dipartimento di Matematica di Trento
via Sommarive 14, 38050 Povo (Trento), Italia
E-mail: bigolin@science.unitn.it

Received November 30, 2012 and in revised form October 26, 2013

Giuseppina D'Aguì: Molteplicità di soluzioni per problemi di Sturm-Liouville

Giuseppina D'Aguì
Università di Messina
email: dagui@unime.it

Sunto

Lo scopo di questa comunicazione è di presentare alcuni risultati di molteplicità di soluzione per problemi differenziali inizialmente nel caso ordinario e successivamente nel caso relativo alle equazioni ellittiche con il $p-$Laplaciano.

In particolare, si presenta un teorema di esistenza di infinite soluzioni per il problema completo di Sturm-Liouville ordinario con condizioni di Neumann, del tipo

$$\begin{cases} -(\overline{p}u')' + \overline{r}u' + \overline{q}u = \lambda g(x,u) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

I risultati ottenuti su tale problema sono conseguenza dello studio del problema di Neumann, per l'equazione di Sturm-Liouville

$$-(pu')' + qu = \lambda f(x,u).$$

Tali risultati si basano sull'applicazione ad opportuni funzionali di un risultato di esistenza di infiniti punti critici ottenuto da B. Ricceri nel 2000 e recentemente riformulato da G. Bonanno e G. Molica Bisci.

Per lo stesso problema di Neumann sono stati inoltre ottenuti alcuni risultati di esistenza di almeno tre soluzioni, sfruttando risultati astratti sulla esistenza di tre punti critici.

Verranno inoltre presentati alcuni risultati di molteplicità di soluzione per il seguente problema differenziale per equazioni ellittiche con $p-$Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u + q(x)|u|^{p-2}u = \lambda f(x,u) & in\ \Omega \\ \\ \partial u/\partial\nu = 0 & su\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Bibliografia

[1] G. Bonanno, G. D'Aguì, "A Neumann boundary value problem for the Sturm-Liouville Equation", Applied Mathematics and Computations, **208**, (2009), 318-327.

[2] G. Bonanno, G. D'Aguì, "On the Neumann problem for elliptic Equations involving the p-Laplacian", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **358**, (2009), 223-228.

[3] G. D'Aguì, G. Molica Bisci, "Three non-zero solutions for elliptic Neumann problems", Analysis and Applications (2010) (In corso di stampa).

Intervento: Giuseppina D'aguì,
Molteplicity of Solutions for Sturm-Liouville Problems,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 725–734**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 725-734

Molteplicity of Solutions for Sturm-Liouville Problems

GIUSEPPINA D'AGUÌ

Abstract. – *The existence of multiple solutions to a Sturm-Liouville boundary value problem is presented. The approach adopted is based on multiple critical points theorems.*

1. – Introduction

In different fields of research, such as computer science, mechanical engineering, control systems, artificial or biological neural networks, economics and many others, the mathematical modeling of important questions leads naturally to consider nonlinear differential boundary value problems. For instance, a steady state temperature distribution in a rod (identified with a closed interval), or a semi-infinity porous medium initially filled with gas at a uniform pressure, are governed by nonlinear second order differential equations with suitable boundary conditions, as in particular, Neumann boundary conditions.

In this paper, we study the following nonlinear problem:

$$\begin{cases} -(\overline{p}u')' + \overline{r}u' + \overline{q}u = \lambda g(x,u) \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $\overline{p} \in C^1([0,1])$, $\overline{q}, \overline{r} \in C^0([0,1])$, with $\overline{p}$ and $\overline{q}$ positive functions, and λ is a positive real parameter.

The aim of this paper is to present some multiplicity results for the Neumann boundary value problem (1), as obtained in [3].

There is a wide literature that deals with multiplicity results for such a problem (see [6], [17], [18] and references therein) and, in the last few years, the existence of infinitely many solutions to Neumann problems has been widely investigated, for instance, in [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [16]. In [17] and [18], for the case $\overline{p} = 1$, $\overline{q} = 1$, $\overline{r} = 0$ and $\lambda = 1$, by using fixed point theorems, the existence of three solutions is established under a suitable behaviour of nonlinear term g which, in addition, must be sublinear at infinity. Our main tools to study the multiplicity of solutions for Neumann problems are critical point theorems.

First we use an important result due to B. Ricceri ([15]), as given in [5].

Other two results which insure three critical points will be used; in the first one the coercivity of the functional $\Phi - \lambda\Psi$ is required, in the second one a suitable sign hypothesis is assumed. The first result has been obtained in [4], the second one in [2].

2. – Main results

Consider the following problem

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda f(x,u) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

where $p \in C^1([0,1])$, $q \in C^0([0,1])$, $f : [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is a continuous function and λ is a positive real parameter.

Put $F(x,t) = \int_0^t f(x,\xi)d\xi$ for all $(x,t) \in [0,1] \times \mathbf{R}$,

$$p_0 = \min_{[0,1]} p(x) > 0,\ q_0 = \min_{[0,1]} q(x) > 0,$$

$$A := \liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\int_0^1 \max_{|t|\le\xi} F(x,t)dx}{\xi^2}, \quad B := \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_0^1 F(x,\xi)dx}{\xi^2}$$

$$m = \min\{p_0, q_0\}, \quad k = \frac{m}{\|q\|_1} \tag{3}$$

where, as usual, $\|q\|_1 = \int_0^1 q(x)dx$,

$$\lambda_1 := \frac{\|q\|_1}{2B}, \quad \lambda_2 := \frac{m}{4A}. \tag{4}$$

We note that when $p = q = 1$ then $k = 1$.

Here, we give our first result on the existence of infinitely many solutions by requiring an oscillating behavior of the nonlinearity. (See [3] [Theorem 3.1])

THEOREM 1. – *Assume that*

$$\liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\int_0^1 \max_{|t|\le\xi} F(x,t)dx}{\xi^2} < \frac{1}{2} k \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_0^1 F(x,\xi)dx}{\xi^2} \tag{5}$$

where k is given by (3).

Then for each $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, where λ_1, λ_2 are given in (4), *the problem* (2) *possesses a sequence of pairwise distinct classical solutions.*

PROOF. – Our aim is to apply part (b) of [5] [Theorem 2.1]. Take as X the Sobolev space $W^{1,2}([0,1])$ endowed with the norm

$$\|u\| = \Big(\int_0^1 p(t)|u'(t)|^2 dt + \int_0^1 q(t)|u(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

For each $u \in X$, put

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2, \qquad \Psi(u) := \int_0^1 F(x, u(x))dx.$$

It is well known that the critical points in X of the functional $\Phi - \lambda\Psi$ are exactly the classical solutions of the problem (2).

Pick $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$. Let $\{c_n\}$ be a real sequence such that $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ and

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 \max_{|t|\le c_n} F(x,t)dx}{c_n^2} = A.$$

Put $r_n = m\Big(\frac{c_n}{2}\Big)^2$ for all $n \in \mathbf{N}$. Taking into account $\|v\|^2 < 2r_n$ and $|v| \le \sqrt{\frac{2}{m}}\|v\|$ for every $t \in [0,1]$, $|v(t)| \le c_n$. One has

$$\varphi(r_n) = \inf_{\|u\|^2<2r_n} \frac{\sup_{\|v\|^2<2r_n} \int_0^1 F(x,v(x))dx - \int_0^1 F(x,u(x))dx}{r_n - \frac{\|u\|^2}{2}} \le \frac{\sup_{\|v\|^2<2r_n} \int_0^1 F(x,v(x))dx}{r_n}.$$

Hence,

$$\varphi(r_n) \le \frac{\int_0^1 \max_{|t|\le c_n} F(x,t)dx}{r_n} = 4\frac{\int_0^1 \max_{|t|\le c_n} F(x,t)dx}{mc_n^2} \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Then,

$$\gamma := \liminf_{n\to+\infty} \varphi(r_n) \le \frac{4A}{m} < +\infty.$$

Now, we claim that the functional $\Phi - \lambda\Psi$ is unbounded from below.

Let $\{d_n\}$be a real sequence such that $\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty$ and

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{F(x,d_n)dx}{d_n^2} = B. \tag{6}$$

For each $n \in \mathbf{N}$, we consider the functions $w_n(x) = d_n \in W^{1,2}([0,1])$.

Hence,

$$\|w_n\|^2 = d_n^2 \|q\|_1$$

and

$$\Phi(w_n) - \lambda\Psi(w_n) = \frac{\|w_n\|^2}{2} - \lambda \int_0^1 F(x, w_n(x))dx = \frac{d_n^2\|q\|_1}{2} - \lambda \int_0^1 F(x, d_n)dx.$$

Now, if $B < +\infty$ let $\varepsilon \in \left]0, B - \frac{\|q\|_1}{2\lambda}\right[$. From (6) there exists v_ε such that

$$\int_0^1 F(d_n) > (B - \varepsilon)d_n^2 \qquad \forall n > v_\varepsilon.$$

Therefore,

$$\Phi(w_n) - \lambda\Psi(w_n) = \frac{d_n^2\|q\|_1}{2} - \lambda \int_0^1 F(x, d_n)dx < \frac{d_n^2\|q\|_1}{2} - \lambda d_n^2(B - \varepsilon) = d_n^2\left(\frac{\|q\|_1}{2} - \lambda(B - \varepsilon)\right).$$

From the choice of ε, one has

$$\lim_{n\to+\infty} [\Phi(w_n) - \lambda\Psi(w_n)] = -\infty.$$

If $B = +\infty$ we fix $M > \frac{\|q\|_1}{2\lambda}$. From 6 there exists v_M such that

$$\int_0^1 F(x, d_n)dx > Md_n^2 \quad \forall n > v_M.$$

Moreover

$$\Phi(w_n) - \lambda\Psi(w_n) = \frac{d_n^2\|q\|_1}{2} - \lambda \int_0^1 F(x, d_n)dx < \frac{d_n^2\|q\|_1}{2} - \lambda M d_n^2 = d_n^2\left(\frac{\|q\|_1}{2} - \lambda M\right).$$

Taking into account the choice of M, also in this case, one has

$$\lim_{n\to+\infty} [\Phi(w_n) - \lambda\Psi(w_n)] = -\infty.$$

By applying [5] [Theorem 2.1, part (b)], the functional $\Phi - \lambda\Psi$ admits a sequence u_n of critical points, and the conclusion is proven. □

Now, we point out our main results on the existence of three classical solutions. For more details, see [3] [Theorem 3.3 and Theorem 3.4].

THEOREM 2. – *Assume that:*

(*i*) *there exist two positive constants* c, d, *with* $c < d$, *such that:*

$$\frac{\int_0^1 \max_{t\in[-c,c]} F(x,t)dx}{c^2} < \frac{k}{2}\frac{\int_0^1 F(x,d)dx}{d^2}$$

when k *is given by* (4)*;*

(*ii*) *there exist two positive constants* a, s, *with* $s < 2$, *such that:*

$$F(x,t) \le a(1+|t|^s)$$

for all $(x,t) \in [0,1] \times \mathbf{R}$.

Then, for each $\lambda \in \left]\frac{d^2\|q\|_1}{2\int_0^1 F(x,d)dx}, \frac{mc^2}{4\int_0^1 \max_{t\in[-c,c]} F(x,t)dx}\right[$, (2) *admits at least three classical solutions.*

THEOREM 3. – *Let* $f : [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *be a continuous function such that* $f(x,t) \ge 0$ *for all* $x \in [0,1]$ *and for all* $t \ge 0$. *Assume that there exist three positive constants* c_1, c_2, d, *with* $c_1 < d < \frac{c_2}{2}$ *such that*

$$(j) \quad \frac{\int_0^1 \max_{|t|\le c_1} F(x,t)dx}{c_1^2} < \frac{m}{3\|q\|_1}\frac{\int_0^1 F(x,d)dx}{d^2};$$

$$(jj) \quad \frac{\int_0^1 \max_{|t|\le c_2} F(x,t)dx}{c_2^2} < \frac{m}{6\|q\|_1}\frac{\int_0^1 F(x,d)dx}{d^2}.$$

Then, for all $\lambda \in \left(\frac{3}{4}\frac{d^2\|q\|_1}{\int_0^1 F(x,d)dx}, \min\left\{\frac{mc_1^2}{4\int_0^1 \max_{|t|<c_1} F(x,t)dx}, \frac{mc_2^2}{2\int_0^1 \max_{|t|<c_2} F(x,t)dx}\right\}\right)$, *the problem* (2) *admits three nonnegative classical solutions* u_1, u_2, u_3 *such that* $|u_i(t)| < c_2$ *for all* $t \in [0,1]$, $i = 1,2,3$.

3. – Multiple Solutions for the complete equation

Consider the problem

$$\begin{cases} -(\overline{p}u')' + \overline{r}u' + \overline{q}u = \lambda g(x,u), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Let $g : [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be a continuous function, $\overline{p} \in C^1([0,1])$, $\overline{q}, \overline{r} \in C^0([0,1])$, and λ is a positive parameter. Moreover $\overline{p}$ and $\overline{q}$ are positive functions.

Put $G(x,t) = \int_0^t g(x,\xi)d\xi$ for all $(x,t) \in [0,1] \times \mathbf{R}$ $k' = \dfrac{m'}{\|e^{-R}\overline{q}\|_1}$, $m' = \min\left\{\min_{[0,1]} e^{-R}\overline{p}, \min_{[0,1]} e^{-R}\overline{q}\right\}$ where R is a primitive of $\dfrac{\overline{r}}{\overline{p}}$

$$\overline{\lambda}_1 = \frac{\|e^{-R}\overline{q}\|}{2\limsup_{\xi\to+\infty} \dfrac{\int_0^1 e^{-R}G(x,\xi)dx}{\xi^2}} \qquad \overline{\lambda}_2 = \frac{m'}{4\liminf_{\xi\to+\infty} \dfrac{\int_0^1 \max_{|t|<\xi} e^{-R}G(x,t)dx}{\xi^2}}.$$

COROLLARY 4. – *Assume that*

$$\liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\int_0^1 \max_{|t|\le\xi} e^{-R}G(x,t)dx}{\xi^2} < \frac{1}{2}k' \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_0^1 e^{-R}G(x,\xi)dx}{\xi^2}. \tag{8}$$

Then, for each $\lambda \in (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2)$, the problem (7) *possesses a sequence of pairwise distinct classical solutions.*

REMARK 5. – *We observe that if g is autonomous the hypothesis* (8) *of Corollary* 4 *becomes*

$$\liminf_{\xi\to+\infty} \frac{\max_{|t|\le\xi} G(t)}{\xi^2} < \frac{1}{2}k' \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{G(\xi)}{\xi^2}$$

and

$$\overline{\lambda}_1 = \frac{\|e^{-R}\overline{q}\|}{2\|e^{-R}\| \limsup_{\xi\to+\infty} \dfrac{G(\xi)}{\xi^2}} \qquad \overline{\lambda}_2 = \frac{m'}{4\|e^{-R}\| \liminf_{\xi\to+\infty} \dfrac{\max_{|t|<\xi} G(t)}{\xi^2}}$$

where $G(t) = \int_0^t g(\xi)dx$ for all $t \in \mathbf{R}$.

Moreover, we stress that $\overline{p}, \overline{q}$ and $\overline{r}$ can depend on the variable x.

In the sequel, we deal with the autonomous case.

COROLLARY 6. – *Let* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *be a continuous function and put*

$$G(t) = \int_0^t g(\xi)d\xi.$$

for all $t \in \mathbf{R}$

Assume that:

(i') *there exist two positive constants* c, d, *with* $c < d$, *such that:*

$$\frac{\max_{t\in[-c,c]} G(t)}{c^2} < \frac{k'}{3}\frac{G(d)}{d^2};$$

(ii') *there exist two positive constants* a, s, *with* $s < 2$, *such that:*

$$G(t) \le a(1 + |t|^s)$$

for all $t \in \mathbf{R}$.

Then, for each $\lambda \in \left(\frac{3}{4}\frac{d^2\|e^{-R}\overline{q}\|_1}{G(d)\|e^{-R}\|_1}, \frac{m'c^2}{4\|e^{-R}\|_1 \max_{t\in[-c,c]} G(t)}\right)$, *the problem* (7) *admits three classical solutions.*

COROLLARY 7. – *Let* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *be a continuous function such that* $g(x) \ge 0$ $\forall x > 0$. *Assume that there exist three positive constants* c_1, c_2, d, *with* $c_1 < d < \frac{c_2}{2}$ *such that*

(j') $\dfrac{\max_{|t|\le c_1} G(t)}{c_1^2} < \dfrac{m'}{3\|e^{-R}\overline{q}\|_1}\dfrac{G(d)}{d^2};$

(jj') $\dfrac{\max_{|t|\le c_2} G(t)}{c_2^2} < \dfrac{m'}{6\|e^{-R}\overline{q}\|_1}\dfrac{G(d)}{d^2}.$

Then, for all $\lambda \in \left(\frac{3}{4}\frac{d^2\|e^{-R}\overline{q}\|_1}{G(d)\|e^{-R}\|_1}, \min\left\{\frac{m'c_1^2}{4\|e^{-R}\|_1 \max_{|t|<c_1} G(t)}, \frac{m'c_2^2}{2\|e^{-R}\|_1 \max_{|t|<c_2} G(t)}\right\}\right)$,

the problem (7) *admits three nonnegative classical solutions.*

EXAMPLE 8. *Put*

$$a_n := \frac{2n!(n+2)! - 1}{4(n+1)!}, \quad b_n := \frac{2n!(n+2)! + 1}{4(n+1)!}$$

for every $n \in \mathbf{N}$ *and define the positive continuous function* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(\xi) = \begin{cases} \dfrac{32(n+1)!^2[(n+1)!^2 - n!^2]}{\pi} \sqrt{\dfrac{1}{16(n+1)!^2} - \left(\xi - \dfrac{n!(n+2)}{2}\right)^2} + 1 & \text{if } \xi \in \cup_{n\in\mathbf{N}}[a_n, b_n], \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

One has $\int_{n!}^{(n+1)!} f(t)dt = \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt = (n+1)!^2 - n!^2$, *for every* $n \in \mathbf{N}$. *Then, one has* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{F(b_n)}{b_n^2} = 4$ *and* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{F(a_n)}{a_n^2} = 0$. *Therefore, by a simple computation, we obtain* $\liminf_{\xi\to+\infty} \dfrac{F(\xi)}{\xi^2} = 0$ *and* $\limsup_{\xi\to+\infty} \dfrac{F(\xi)}{\xi^2} = 4$. *So,*

$$0 = \liminf_{\xi\to+\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^2} < \frac{2}{e-1} = \frac{1}{2(e-1)} \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^2}.$$

Hence, from Corollary 4, *for each* $\lambda > \dfrac{1}{8}$, *the problem*

$$\begin{cases} -u'' + u' + u = \lambda f(u) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

has a sequence of pairwise distinct positive classical solutions.

Example 9. *The problem*

$$\begin{cases} -\left(e^{-x}u'\right)' + e^x u = 2\lambda x u^{10}(11-u) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

admits at least three solutions for each $\lambda \in \left(\dfrac{3(e-1)e^2}{2^{11}}, \dfrac{e}{4}\right)$.

In fact, if we choose, for instance, $c = 1$ *and* $d = 2$, *hypotheses of Theorem* 2 *are satisfied.*

Example 10. *Consider the following problem*

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda f(x,u) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Let $f(x,t) = g(x)h(t)$, *where* $g(x) : [0,1] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$, *and*

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \textit{if } \ t \in (-\infty, 1]; \\ t^{10}, & \textit{if } \ t \in (1, 2]; \\ 2^{10}, & \textit{if } \ t \in (2, 400]; \\ \widetilde{h}(t), & \textit{if } \ t \in (400, +\infty[, \end{cases}$$

where $\widetilde{h}(t)$ *is an arbitrary function.*

Choosing $c_1 = 1$, $d = 2$ *and* $c_2 = 400$, *the function* $f(x,t)$ *satisfies the hypotheses of Theorem* 3, *and, for each* $\lambda \in \left(\frac{33}{2^{11}-1}, \frac{2^7 5^3}{\left(\frac{1-2^{11}}{11} + 2^{13}5\right)} \right)$, *the given problem admits at least three positive classical solutions* u_i *such that* $|u_i(t)| < 400$ *for all* $t \in [0,1]$, $i = 1,2,3$.

REFERENCES

[1] H. Brézis, *Analyse Functionelle- Théorie et Applications,* Masson, Paris, 1983.

[2] G. Bonanno and P. Candito, *Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities,* J. Differential Equations **244** (2008), 3031-3059.

[3] G. Bonanno and G. D'Aguì, *A Neumann boundary value problem for the Sturm-Liouville Equation,* Applied Mathematics and Computations, **208**, (2009), 318-327.

[4] G. Bonanno and S.A. Marano, *On the structure of the critical set of non-differentiable functions with a weak compactness condition*, Appl. Anal., **89** (2010), 1-10.

[5] G. Bonanno and G. Molica Bisci, *Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities,* Bound. Value Probl. 2009 (2009) 1-20.

[6] G. Bonanno, *Multiple solutions for a Neumann boundary value problem,* J. Nonlinear and Convex Anal. **4** (2003), 287-290.

[7] P. Candito, *Infinitely many solutions to a Neumann problem for ellictic equations involving the p−Laplacian and with discontinuous nonlinearities,* Proc. Edinb. Math. Soc. **45** (2002), 397-409.

[8] G. D'Aguì, *Infinitely many solutions for a double Sturm-Liouville problem,* Journal of Global Optimization, **54** (2012), 619-625.

[9] G. D'Aguì and A. Sciammetta, *Infinitely many solutions to elliptic problems with variable exponent and nonhomogeneous Neumann conditions*, Nonlinear Anal., **75** (2012), 5612-5619.

[10] G. Dai, *Infinitely many soluions for a Neumann-Type differential inclusion problem involving the p(x)−Laplacian,* Nonlinear Anal., **70**, Issue 6, (2009), 2297-2305.

[11] X. Fan and C. Ji, *Existence of Infinitely many solutions for a Neumann problem involving the p(x)−Laplacian,* J. Math. Anal. Appl. **334** (2007), 248-260.

[12] C. Li, *The existence of Infinitely many solutions of a class of nonlinear elliptic equations with a Neumann boundary conditions for both resonance and oscillation problems,* Nonlinear Anal. **54** (2003), 431-443.

[13] C. Li and S. Li, *Multiple solutions and sign-changing solutions of a class of nonlinear elliptic equations with Neumann boundary conditions,* J. Math. Anal. Appl. **298** (2004), 14-32.
[14] S. Marano and D. Motreanu, *Infinitely many Critical points of Non-Differentiable Functions and Applications to the Neumann-Type problem involving the $p-$Laplacian,* J. Differential Equations **182** (2002), 108-120.
[15] B. Ricceri, *A general variational principle and some of its applications,* J. Comput. Appl. Math. **133** (2000), 401-410.
[16] B. Ricceri, *Infinitely many solutions of the Neumann problem for elliptic equations involving the $p-$Laplacian,* Bull. London Math. Soc. **33** (2001), 331-340.
[17] J.-P. Sun, W.-T. Li and S.S. Cheng, *Three positive solutions for second-order Neumann boundary value problems,* Appl. Math. Letters **17** (2004), 1079-1084.
[18] J.-P. Sun and W.-T. Li, *Multiple positive solutions to second-order Neumann boundary value problems,* Appl. Math. Comput. **146** (2003), 187-194.

Giuseppina D'Aguì
Dipartimento di Ingegneria Civile, Informatica, Edile, Ambientale e Matematica Applicata
Università degli Studi di Messina, C/da di Dio (S. Agata) 98166, Messina, Italy
e-mail: dagui@unime.it

Received November 30, 2012 and in revised form December 1, 2013

Simone Diverio: Intorno all'iperbolicità delle intersezioni complete

Simone Diverio
Institut de Mathématiques de Jussieu - CNRS
email: `diverio@math.jussieu.fr`

Sunto

Se X è una varietà complessa compatta, allora X è iperbolica secondo Kobayashi se e solo se non esistono applicazioni olomorfe non costanti $f\colon \mathbb{C} \to X$ (criterio di Brody).

In [4] viene proposta la congettura seguente: *se* $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$, $n \geq 2$, *è un'ipersuperficie proiettiva generica di grado* $\deg X \geq 2(n+1)$ *allora* X *è iperbolica.* Ne segue la naturale estensione al caso di intersezioni complete generiche di (multi)grado elevato.

In questa comunicazione, ci proponiamo di illustrare il seguente risultato:

Teorema ([2],[3]). *Sia* $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$, $n \geq 2$, *un'ipersuperficie proiettiva (molto) generica di grado* $\deg X \geq 2^{n^5}$. *Allora esiste una sottovarietà* $Y \subset X$ *di codimensione* $\operatorname{codim}_X Y \geq 2$, *tale che per ogni applicazione olomorfa* $f\colon \mathbb{C} \to X$, *si ha* $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

Una possibile applicazione ne è il seguente:

Corollario ([3]). *Sia* $X \subset \mathbb{P}^4$ *un'ipersuperficie proiettiva (molto) generica di grado* $\deg X \geq 593$. *Allora* X *è iperbolica.*

Tempo permettendo, elencheremo alcuni recenti sviluppi ottenuti in [1], nel caso in cui X sia un'intersezione completa generica di (multi)grado elevato: come sottoprodotto di questo circolo di idee si ottengono nuovi esempi di superfici intersezioni complete a cotangente ampio.

Bibliografia

[1] Brotbek, Damian. "Hyperbolicity Related Problems for Complete Intersection Varieties". eprint arXiv:1101.3394.

[2] Diverio, Simone; Merker, Joël; Rousseau, Erwan. "Effective algebraic degeneracy". Invent. Math. **180** (2010), no. 1, 161–223.

[3] Diverio, Simone; Trapani, Stefano. "A remark on the codimension of the Green-Griffiths locus of generic projective hypersurfaces of high degree". J. Reine Angew. Math. **649** (2010), 55–61.

[4] Kobayashi, Shoshichi. "Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings". Pure and Applied Mathematics, 2 Marcel Dekker, Inc., New York 1970 ix+148 pp.

Intervento: Simone Diverio,
About the Hyperbolicity of Complete Intersections,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 579–590**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 579-590

About the Hyperbolicity of Complete Intersections

SIMONE DIVERIO

Abstract. – *This note is an extended version of a thirty minutes talk given at the "XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana", held in Bologna from September 12th to September 17th, 2011. This was essentially a survey talk about connections between Kobayashi hyperbolicity properties and positivity properties of the canonical bundle of projective algebraic varieties.*

1. – Notations and preliminary material

Let X be a compact complex space.

DEFINITION 1.1. – An *entire curve* in X is a non constant holomorphic map $f\colon \mathbb{C} \to X$.

We shall give a definition of Kobayashi hyperbolicity which is often referred to as Brody hyperbolicity. Nevertheless, by Brody's lemma, the two concepts coincide in the compact case: in the sequel, we shall freely speak of "hyperbolicity" referring to these equivalent concepts. For more details on Brody's lemma and Brody hyperbolicity, see for instance [15].

DEFINITION 1.2. – A compact complex space X is *hyperbolic* if and only if there are no entire curves in X.

REMARK 1.3. – Fix any hermitian metric ω on X. By Brody's lemma, if there exists on X an entire curve, then there exists on X also a so-called Brody curve, *i.e.* an entire curve f with bounded derivative $\|f'\|_\omega \leq C$.

Let us give some basic examples of hyperbolic compact manifolds.

EXAMPLE 1.4. – Let C be a compact Riemann surface. Of course if C is the Riemann sphere or an elliptic curve, then C is not hyperbolic. On the other hand, by the Uniformization Theorem, if the geometric genus of C is greater than or equal to two, then the universal cover of C is the complex unit disc. Thus, since every holomorphic map $f\colon \mathbb{C} \to C$ lifts to a holomorphic map to the

universal cover, by Liouville's theorem it must be constant. Therefore, C is hyperbolic if and only if $g(C) \geq 2$.

EXAMPLE 1.5 (Kobayashi). – Let X be a compact complex manifold with ample cotangent bundle T^*_X, *i.e.* such that there exists a positive integer k_0 such that all evaluation maps

$$H^0(X, S^k T^*_X) \to J^1 S^k T^*_{X,x}, \quad H^0(X, S^k T^*_X) \to S^k T^*_{X,x} \oplus S^k T^*_{X,y},$$

for $x, y \in X$, $x \neq y$, are surjective for all $k \geq k_0$. Here, $S^k T^*_X$ is the k-th symmetric power of the cotangent bundle and $J^1 S^k T^*_X$ is the bundle of 1-jets of sections of $S^k T^*_X$.

We claim that X is hyperbolic. To see this, fix an integer $k \geq k_0$ as above and a basis $\sigma_0, \ldots, \sigma_N$ of $H^0(X, S^k T^*_X)$. Then, the function

$$\begin{aligned} \eta \colon T_X &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \left(\sum_{j=0}^{N} |\sigma_j(x) \cdot v^{\otimes k}|^2 \right)^{1/2k}, \quad v \in T_{X,x}, \end{aligned}$$

is easily seen to be plurisubharmonic, and strictly plurisubharmonic outside the zero section, thanks to the ampleness assumption. Now, suppose that X is not hyperbolic. Then, there exists on X a non constant Brody curve $f \colon \mathbb{C} \to X$ and therefore $\eta \circ f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ is a bounded subharmonic function defined on the entire complex plane which is strictly subharmonic outside $\{f' = 0\}$. Hence, f is constant and we get a contradiction.

Examples of compact complex manifolds with ample cotangent bundle are given for instance by the intersection of at least $n/2$ sufficiently ample general hypersurfaces in an abelian variety of dimension n, and by general linear section of small dimension in a product of sufficiently many smooth projective varieties with big cotangent bundle (see [3] for more details). Other examples are given by compact hermitian manifolds with negative holomorphic bisectional curvature.

It is conjectured in [3] that the intersection, in $\mathbb{P}^N$, of at least $N/2$ generic hypersurfaces of sufficiently high degrees has ample cotangent bundle (and hence is hyperbolic). We shall come back to that later.

EXAMPLE 1.6. – More generally, a compact hermitian manifold (X, ω) such that its holomorphic sectional curvature is negative is hyperbolic. Any compact quotient Δ^n/Γ, $n \geq 2$, of a polydisc by a group $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)^n$ acting freely and properly discontinuously on Δ^n gives an example of compact hermitian manifold with negative holomorphic sectional curvature but with no hermitian metrics of negative holomorphic bisectional curvature.

In the case of complex projective curves, the hyperbolicity can be characterized in a completely algebraic way: a complex projective curve is hyperbolic if and only if its geometric genus is greater than or equal to two, and this happens if and only if its cotangent bundle, which in complex dimension one coincides with its canonical bundle, is ample. By the Riemann-Roch formula, this is equivalent to being of general type. Let us give the precise definition.

DEFINITION 1.7. – Let X be a compact complex manifold and $L \to X$ a holomorphic line bundle. The *Kodaira-Iitaka dimension* $\kappa(L)$ *of* L is defined as follows: if $H^0(X, L^{\otimes m}) = \{0\}$ for each $m \geq 1$ then put $\kappa(L) = -\infty$, otherwise $0 \leq \kappa(L) \leq \dim X$ is the unique integer such that

$$C^{-1}\, m^{\kappa(L)} \leq \dim H^0(X, L^{\otimes m}) \leq C\, m^{\kappa(L)},$$

for some positive constant C and for all sufficiently large and divisible integers m. If $\kappa(L) = \dim X$, L is said to be *big*. We denote by $\kappa(X)$ the Kodaira-Iitaka dimension of the canonical bundle $K_X = \det T^*_X$ of X and call it the *Kodaira dimension of* X. The manifold X is said to be of *general type* if it has maximal Kodaira dimension.

REMARK 1.8. – By Hirzebruch-Riemann-Roch and Kodaira's vanishing, if $L \to X$ is ample then L is big. Thus, manifolds with ample canonical bundle are of general type. Beside projective curve of genus ≥ 2, a typical example of manifold of general type is given by smooth projective hypersurfaces $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ such that $\deg X \geq n+3$ (they have in fact ample canonical bundle, as it can be straightforwardly checked by adjunction).

2. – Guiding conjectures

Let us begin with the following proposition.

PROPOSITION 2.1 (Demailly [4]). – *Let X be a compact complex manifold and ω a hermitian form on X. Consider the following statements:*

(i) *X is Kobayashi hyperbolic.*

(ii) *There exists $\varepsilon_0 > 0$ such that for every curve $C \subset X$*

$$-\chi(\widehat{C}) = 2g(\widehat{C}) - 2 \geq \varepsilon_0 \deg_\omega C,$$

where $\widehat{C} \to C$ is the normalization of C and $\deg_\omega C := \int_C \omega$.

(iii) *Every holomorphic map $Z \to X$, where Z is a complex torus, is constant.*

Then, $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$.

Property (ii) above is often referred to as *algebraic hyperbolicity*. Now, if X is supposed to be projective algebraic, the three properties above are conjectured to be equivalent.

CONJECTURE 2.2 (Lang [17], Demailly [4]). – In the proposition above, if X is moreover projective algebraic, then (iii)$\Longrightarrow$(i).

REMARK 2.3. – If X is supposed to be merely Kähler, then the conjecture is false. One can show, for instance, that a $K3$ surface without any curve does not admit any non constant map from a complex torus. Nevertheless, a $K3$ surface is never hyperbolic. For more details, see [2].

Thus, from now on, X will be always projective algebraic. In this case, it is very tempting to believe that the analytic property of being hyperbolic should translate to completely algebraic properties of the manifold (generalizing then the case of complex dimension one). This belief is formalized in the following.

CONJECTURE 2.4 (Lang [17]). – Let X be a complex projective manifold. Then, X is Kobayashi hyperbolic if and only if X as well as all its subvarieties are of general type.

The sufficiency of the condition in the conjecture above is the object of this other one.

CONJECTURE 2.5 (Green-Griffiths). – Let X be a projective manifold of general type. Then, there should exists a proper algebraic subvariety $Y \subsetneq X$ such that all entire curves in X are actually contained in Y.

The necessity of the condition in Conjecture 2.4, since a projective manifold of general type without rational curves has ample canonical bundle, would imply the following.

CONJECTURE 2.6 (Kobayashi). – Let X be a projective hyperbolic manifold. Then, the canonical bundle K_X should be ample.

Observe that all these conjectures are obvious in dimension one, but already non trivial (and, apart from the last one, not known) in dimension two.

To end this section, let us mention that there is also an arithmetic counterpart of the story, which is moreover already highly non trivial in dimension one. In number theory, the Mordell conjecture states that a curve of genus greater than 1 defined over a number field K has only finitely many rational points over any finite field extension L of K: it was proved by G. Faltings in 1983. Remind that

until Faltings' theorem, there was not known a single example of a curve which was proved to have only a finite number of rational points in every finitely generated field over $\mathbb{Q}$. "Accidentally", the curves satisfying Faltings' theorem are exactly the hyperbolic ones. According to Lang, this should be the right framework in order to have a higher dimensional analogous of Faltings' theorem.

CONJECTURE 2.7 (Lang [16]). – Let X be a projective manifold defined over a number field K. Then, X is hyperbolic if and only if it contains only finitely many rational points over any finite field extension L of K.

At present, almost nothing is known about this very fascinating theme.

3. – Overview of old and recent results

We now survey some results relative to the conjectures mentioned above.

3.1 – *The Kobayashi conjecture*

As mentioned in the previous sections, for the case of curves this conjecture is a trivial consequence of the Uniformization Theorem and Liouville's theorem.

For surfaces, the Enriques-Kodaira birational classification implies that, in order to prove the conjecture, it suffices to show that K3 surfaces are not hyperbolic. Since Kummer surfaces (which are obviously non hyperbolic) are dense in the moduli space of K3's and since hyperbolicity is an open property (with respect to analytic topology), the conjecture follows. In fact, much more is true: by [21] every projective K3 surface does contain at least one rational curve.

Unfortunately, we do not dispose of an analogous result in higher dimension. It is likely that every compact projective manifold with vanishing first real Chern class is not hyperbolic and even more: it should admit a non trivial holomorphic map from a complex torus (or, more optimistically, a rational curve).

Now, we concentrate on dimension three. To begin with, observe that several powerful machineries from birational geometry — such as the characterization of uniruledness in terms of negativity of the Kodaira dimension (which holds true up to dimension three and is conjectural in general), the Iitaka fibration, the abundance conjecture (which is actually a theorem up to dimension three) — permit to reduce this conjecture to the following statement: a projective threefold X of Kodaira dimension $\kappa(X) = 0$ cannot be hyperbolic. This is the analogous of the reduction to K3 surfaces in dimension two. By abundance, the Beauville-Bogomolov decomposition theorem and elementary properties of hyperbolic manifolds, in order to prove the Kobayashi conjecture in dimension three *it suffices to show that a Calabi-Yau threefold is not hyperbolic*. Here, by a Calabi-

Yau threefold we mean a simply connected compact projective threefold with trivial canonical class $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ and $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $i = 1, 2$.

All known results at present prove in fact a much stronger statement, namely existence of rational curves on Calabi-Yau threefolds. Let us cite a couple of results in this direction:

- The article [14] is the culmination of a series of papers by Wilson in which he studies in a systematic way the geometry of Calabi-Yau threefolds; among many other things, it is shown there that if the Picard number $\rho(X) > 13$, then there always exists a rational curve on X.
- Following somehow the same circle of ideas, it was proven in [24] (see also [22]) that a Calabi-Yau threefold X has a rational curve provided there exists on X a non-zero effective non-ample line bundle on X.

By the Cone Theorem, if there exists on a Calabi-Yau manifold X a non-zero effective non-nef line bundle, then there exists on X a rational curve (generating an extremal ray). Therefore, we can always suppose that such an effective line bundle is nef. Remark, on the other hand, that in Peternell's result, the effectivity hypothesis is crucial (regarding it in a more modern way) in order to make the machinery of the logMMP work. In this spirit, Oguiso asked in [22] the following question: *is it true that if a Calabi-Yau threefold X possesses a non-zero nef non-ample line bundle, then there exists a rational curve on X*?

Here is a positive answer, under a mild condition on the Picard number of X.

THEOREM 3.1 (Diverio-Ferretti [9]). – *Let X be a Calabi-Yau threefold and $L \to X$ a non-zero nef non-ample line bundle. Then, X has a rational curve provided $\rho(X) > 4$.*

The proof of this theorem is of arithmetic nature and relies upon a careful study of the diophantine properties of the cubic intersection form defining the nef boundary in the Néron-Severi space of X. In particular, it is exploited the link between the boundedness and convexity properties of the nef cone and the arithmetic of its boundary.

The results stated above thus permit, as in [24], to exclude a certain number of cases to be checked in order to prove such a non-hyperbolicity statement. Finally, as far as we know, there is no known example of a Calabi-Yau threefold without non-constant holomorphic images of complex tori.

3.2 – *The Green-Griffiths-Lang conjecture*

This conjecture in full generality is still unknown even in dimension two, so let us start by discussing this case.

To begin with, observe that if the Zariski closure of all entire curves in a surface S is positive dimensional (otherwise the surface is hyperbolic) but a proper subvariety, then by uniformization it must be a finite union of rational and elliptic curves. If the second Segre number $c_1^2 - c_2$ of a minimal surface of general type S is positive, then it is know, since the work of Bogomolov, that there is abundance of symmetric differentials on S. Thanks to this, Bogomolov himself was able to show that there is only a finite number of rational and elliptic curves on such a surface S, see [7].

Several years later, McQuillan [18], proving deep results on holomorphic (multi)foliations on surfaces, was able to extend the work of Bogomolov to the transcendental setting, thus showing that the Green-Griffiths conjecture is true for surfaces of general type with positive second Segre number. More precisely, using Miyaoka's semi-positivity result for cotangent bundles of nonuniruled projective varieties and a dynamic diophantine approximation, he derived strong Nevanlinna Second Main Theorems for entire curves tangent to the leaves of a holomorphic foliation. In particular, he obtains that every parabolic leaf of an algebraic (multi)foliation on a surface S of general type is algebraically degenerate. The assumption $c_1^2 > c_2$ guarantees the existence of an algebraic multifoliation such that every entire curve is contained in one of its leaves.

This last sentence can be rephrased by saying that under the assumption on the second Segre class, every entire curve must satisfy an algebraic differential equation of order one. This can be put in perspective as follows (see [4] for all the details). Let X be a complex manifold, $p_k\colon J_kX \to X$ the holomorphic fiber bundle of k-jets of germs of holomorphic curves $\gamma\colon (\mathbb{C}, 0) \to X$ and J_kX^{reg} its subset of regular ones, *i.e.* such that $\gamma'(0) \neq 0$. There is a natural action of the group $\mathbb{G}_k$ of k-jets of biholomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$ on J_kX, and the quotient $J_kX^{\mathrm{reg}}/\mathbb{G}_k$ admits a nice geometric relative compactification $J_kX^{\mathrm{reg}}/\mathbb{G}_k \hookrightarrow X_k$. Here, $\pi_k\colon X_k \to X$ is a tower of projective bundles over X. In particular, it is naturally endowed with a tautological line bundle $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$.

It turns out that the direct image $(\pi_k)_*\mathcal{O}_{X_k}(m)$, $m \geq 1$, is the sheaf of holomorphic sections of a holomorphic vector bundle $E_{k,m}T_X^* \to X$ on X. For instance, when $k = 1$, we have that $E_{1,m}T_X^* \simeq S^mT_X^*$ is just the m-th symmetric power of the cotangent bundle.

DEFINITION 3.2. – The holomorphic sections of the vector bundle $E_{k,m}T_X^*$ are called *invariant jet differentials of order k and (weighted) degree m.*

Invariant jet differentials of order k and (weighted) degree m act on (k-jets of) holomorphic curves traced in X as polynomial differential operators. More precisely, let $P \in \mathcal{O}_X(E_{k,m}T_X^*)(U)$ be an invariant jet differentials over an open set $U \subset X$. Then, P is nothing but a holomorphic function $P\colon p_k^{-1}(U) \subset J_kX \to \mathbb{C}$, such that $P(\gamma \circ \varphi) = (\varphi')^m P(\gamma)$, for $\gamma\colon (\mathbb{C}, 0) \to U$ a k-jet of germs of holomorphic

curve and $\varphi\colon(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ a k-jet of biholomorphism of the origin. This immediately explains why $E_{1,m}T^*_X \simeq S^m T^*_X$ and why, in general, invariant jet differentials can be considered as algebraic differential operators acting on holomorphic curves.

THEOREM 3.3 (Green-Griffiths [13], Siu-Yeung [28], Demailly [4]). – *Let X be projective algebraic and $A \to X$ an ample line bundle. Then, for all invariant jet differentials $P \in H^0(X, E_{k,m}T^*_X \otimes A^{-1}) \simeq H^0(X_k, \mathcal{O}_{X_k}(m) \otimes \pi_k^* A^{-1})$ with values in the anti-ample divisor A^{-1} and all entire curves $f\colon \mathbb{C} \to X$, we have $P(f) \equiv 0$.*

Therefore, abundance of invariant jet differentials is translated by this theorem in abundance of constraints for entire curves. From this point of view, the first step to prove hyperbolicity type (or, more generally, algebraic degeneracy type) statements is to produce some invariant jet differential.

For instance, it is conjectured (and proved for surfaces) by Green and Griffiths in [13] that if X is a projective algebraic manifold of general type then there should exist a $k \gg 1$ such that $\mathcal{O}_{X_k}(1)$ is big (or rather, another less refined version of this line bundle is big, when X_k is obtained by modding out just by the group of homotheties instead of the full group of reparametrization of the origin). This conjecture has been proved in full generality only very recently by J.-P. Demailly in [5], by means of an astonishing combination of his holomorphic Morse inequalities and a probabilistic interpretation of higher order jets.

3.2.1 – Projective hypersurfaces and complete intersections

Since in full generality the Green-Griffiths-Lang conjecture seems out of reach for the moment, several efforts have been made in some particular cases. Let us concentrate on projective hypersurfaces and, later on, more generally, on complete intersections.

Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$, $n \geq 2$, be a projective hypersurface of degree $\deg X = d$. If X is smooth, then adjunction formula together with the Euler exact sequence show that $K_X \simeq \mathcal{O}_X(d-n-2)$. Thus, K_X is ample if (and only if) $d \geq n+3$; in particular, if $\deg X \geq n+3$, then X is of general type. Therefore, if X is a smooth projective hypersurface of degree $\deg X \geq n+3$, the Green-Griffiths conjecture predicts the existence of a proper subvariety $Y \subsetneq X$ containing all entire curve in X.

If, moreover, $\deg X \geq 2n+1$ and X is (very) generic, then Voisin proved in [29, 30] (among other things) that all its subvarieties are of general type (this was first proven in [12]) and, as a consequence of her proof, that X is algebraically hyperbolic. Here, by very generic we mean a hypersurface whose modulus is outside a countable union of proper subvarieties of the parameter space. Then, in view of Conjectures 2.2 and 2.4, in this case X should be hyperbolic: this was in fact the content of the following conjecture made by Kobayashi in 1970.

CONJECTURE 3.4 (Kobayashi). – Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$, $n \geq 2$, be a smooth (very) generic projective hypersurface of degree $\deg X \geq 2n+1$. Then, X is hyperbolic.

Observe, first of all, that the genericity assumption is necessary since, for example, Fermat's hypersurfaces always contain lines (which shows also that ample canonical bundle does not imply hyperbolic). Second, the conjecture implies in particular that every generic projective complete intersection of high (multi)degree should be hyperbolic.

For surfaces in projective 3-space, the conjecture is known without optimality of the degree d, which should be starting from five: it has been proven independently by McQuillan [19] for $d \geq 36$ and Demailly-El Goul [6] for $d \geq 21$. The lower bound on the degree has been further refined by Păun [23] to $d \geq 18$.

For threefolds in projective 4-space, Rousseau [25] was able to show that if $\deg X \geq 593$ and X is generic, then there does not exist any Zariski dense entire curve in X (but observe that the locus covered by the image of entire curve is not excluded to be Zariski dense).

Next, let us give a brief account about more recent and somehow general results.

THEOREM 3.5 (Diverio-Merker-Rousseau [10], Diverio-Trapani [11]). – *Let $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ be a generic projective hypersurface of degree $\deg X \geq 2^{n^5}$. Then, there exists a proper algebraic subvariety $Y \subsetneq X$ which contains the image of all entire curves in X. If $\dim X \geq 3$ or $\dim X = 2$ and X is very generic, then the codimension of Y in X is at least two.*

The information about the codimension of Y is the contribution of [11]: in order to obtain it, it is crucial that every effective divisor is ample (this explains the very genericity assumption for surfaces, in view of the Noether-Lefschetz theorem).

Before discussing the key ingredients in the proof of the theorem above, let us make some comments and state a couple of corollaries. As far as we know, this is the first result in all dimensions about algebraic degeneracy of entire curves in manifolds of general type. On the other hand, unfortunately, projective hypersurfaces form a too small class to see this result really as an evidence for the Green-Griffiths conjecture. Nevertheless, this theorem gives also an effective estimate on the degree of the hypersurfaces only in terms of their dimension (even if this degree is very far from being optimal...). It would be desirable to drop the genericity assumption (which is intrinsic in the methods used in the proof) as far as only algebraic degeneracy (and not the full hyperbolicity) is concerned.

COROLLARY 3.6 (Diverio-Trapani [11]). – *A very generic threefold in* $\mathbb{P}^4$ *of degree at least* 593 *is Kobayashi hyperbolic.*

This follows from the fact that the degeneracy locus is of dimension one in this case and thus it should consist of rational or elliptic curves, which are absent in these hypersurfaces.

COROLLARY 3.7 (Brotbek [1]). – *Let* X *be a generic projective complete intersection of (multi)degree greater than or equal to* $(2^{n^5}, \dots, 2^{n^5})$. *Then,* X *is hyperbolic provided* $\dim X \leq 2\mathrm{codim} X$.

This corollary is obtained by one further genericity argument combined with the action of the group of projective automorphisms. Observe that this last result can be seen as a partial confirmation of Debarre's conjecture stated in the introduction (for more developments on Debarre's conjecture, especially for generic complete intersection surfaces of high degree in $\mathbb{P}^4$ which are shown to have ample cotangent bundle, see [1]).

HEURISTIC IDEA OF THE PROOF OF THEOREM 3.5. – Thanks to the strategy proposed in the work [26] of Siu and inherited somehow by Voisin's work [29, 30], it was quite clear that in order to prove such an algebraic degeneracy statement one had, above all, to overcome two main difficulties:

(i) Produce some invariant jet differential vanishing on an ample divisor on every smooth projective hypersurface of large degree.
(ii) Produce low pole order meromorphic vector fields on the universal hypersurface, in order to produce by differentiation new jet differentials, enough to control the geometry of entire curves.

Step (i) has been done in [8], as an application of algebraic holomorphic Morse inequalities: the method is intrinsically effective and permits to estimate explicitly, in terms of the dimension only, how large the degree should be. Step (ii) has been achieved in [20].

Once we have at our disposal a "first" jet differentials, thanks to a semicontinuity argument we can extend it holomorphically to all projective hypersurfaces parametrized by a Zariski open set of their moduli space (this semicontinuity argument makes the result "only" generic). Next, the extended jet differential can be seen as a jet differential on an open set of the universal hypersurface. Therefore, one can now use low pole order meromorphic tangent vector fields to derive this algebraic operator in order to obtain new ones, algebraically independent from the first one. These new operators, once restricted to every projective hypersurface parametrized by this Zariski open set, give enough informations to conclude that their base locus projects onto a proper

subvariety. The low pole order property enables us to be sure that after differentiation the jet differential remains holomorphic and with values in an anti-ample divisor. □

Very recently, Siu, in [27], was able to push forward his own strategy in order to obtain Kobayashi hyperbolicity of generic projective hypersurfaces of high degree. The details of his beautiful and delicate proof are underway of validation by the experts.

REFERENCES

[1] D. Brotbek, *Hyperbolicity Related Problems for Complete Intersection Varieties*, ArXiv e-prints, January 2011.

[2] S. Cantat, *Deux exemples concernant une conjecture de Serge Lang*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **330**, no. 7 (2000), 581-586.

[3] O. Debarre, *Varieties with ample cotangent bundle*, Compos. Math., **141**, no. 6 (2005), 1445-1459.

[4] J.-P. Demailly, *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Algebraic geometry-Santa Cruz 1995, 285-360, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[5] J.-P. Demailly, *Holomorphic Morse inequalities and the Green-Griffiths-Lang conjecture*, Pure Appl. Math. Q., **7**, no. 4 (2011), Special Issue: In memory of Eckart Viehweg, 1165-1207.

[6] J.-P. Demailly - J. El Goul, *Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Amer. J. Math., **122**, no. 3 (2000), 515-546.

[7] M. Deschamps, *Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général [d'après F. A. Bogomolov]*, Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78), Exp. No. 519, pp. 233-247, Lecture Notes in Math., 710, Springer, Berlin, 1979.

[8] S. Diverio, *Existence of global invariant jet differentials on projective hypersurfaces of high degree*, Math. Ann., **344**, no. 2 (2009), 293-315.

[9] S. Diverio - A. Ferretti, *On a conjecture of Oguiso about rational curves on Calabi-Yau threefolds*, to appear on Comment. Math. Helv.

[10] S. Diverio - J. Merker - E. Rousseau, *Effective algebraic degeneracy*, Invent. Math., **180**, no. 1 (2010), 161-223.

[11] S. Diverio - S. Trapani, *A remark on the codimension of the Green-Griffiths locus of generic projective hypersurfaces of high degree*, J. Reine Angew. Math., **649** (2010), 55-61.

[12] L. Ein, *Subvarieties of generic complete intersections*, Invent. Math., **94**, no. 1 (1988), 163-169.

[13] M. Green - P. Griffiths, *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979 (Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif., 1979), 41-74, Springer, New York-Berlin, 1980.

[14] D. R. Heath-Brown - P. M. H. Wilson, *Calabi-Yau threefolds with* $\rho > 13$, Math. Ann., **294**, no. 1 (1992), 49-57.

[15] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 318. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[16] S. Lang, *Higher dimensional diophantine problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 779-787.
[17] S. Lang, *Hyperbolic and Diophantine analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **14**, no. 2 (1986), 159-205.
[18] M. McQuillan, *Diophantine approximations and foliations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 87 (1998), 121-174.
[19] M. McQuillan, *Holomorphic curves on hyperplane sections of 3-folds*, Geom. Funct. Anal., **9**, no. 2 (1999), 370-392.
[20] J. Merker, *Low pole order frames on vertical jets of the universal hypersurface*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **59**, no. 3 (2009), 1077-1104.
[21] S. Mori - S. Mukai, *The uniruledness of the moduli space of curves of genus* 11; In Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), volume 1016 of Lecture Notes in Math., pages 334-353. Springer, Berlin, 1983.
[22] K. Oguiso, *On algebraic fiber space structures on a Calabi-Yau 3-fold*, Internat. J. Math., **4**, no. 3 (1993), 439-465.
[23] M. Păun, *Vector fields on the total space of hypersurfaces in the projective space and hyperbolicity*, Math. Ann., **340**, no. 4 (2008), 875-892.
[24] T. Peternell, *Calabi-Yau manifolds and a conjecture of Kobayashi*, Math. Z., **207**, no. 2 (1991), 305-318.
[25] E. Rousseau, *Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in* $\mathbb{P}^4$, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **16**, no. 2 (2007), 369-383.
[26] Y.-T. Siu, *Hyperbolicity in complex geometry*, The legacy of Niels Henrik Abel (Springer, Berlin, 2004), 543-566.
[27] Y.-T. Siu, *Hyperbolicity of Generic High-Degree Hypersurfaces in Complex Projective Spaces*, ArXiv e-prints, October 2012.
[28] Y.-T. Siu - S.-K. Yeung, *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, Invent. Math., **124**, no. 1-3 (1996), 573-618.
[29] C. Voisin, *On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces*, J. Differential Geom., **44**, no. 1 (1996), 200-213.
[30] C. Voisin, *A correction: "On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces [J. Differential Geom. 44 (1996), no. 1, 200-213; MR1420353 (97j:14047)]"*, J. Differential Geom., **49**, no. 3 (1998), 601-611.

Simone Diverio, CNRS and Institut de Mathématiques de Jussieu
Paris Rive Gauche
E-mail: diverio@math.jussieu.fr

Received October 10, 2012 and in revised form September 8, 2013

Emanuele Dolera: Su una proprietà asintotica della distribuzione finale

Emanuele Dolera
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata "G. Vitali", Università di Modena
email: emanuele.dolera@unimore.it

Eugenio Regazzini
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia

Sunto

Si considera una successione di elementi aleatori scambiabili a valori in uni spazio metrico $\mathbb{X}$ totalmente limitato. Ci occupiamo del comportamento asintotico della distribuzione finale sullo spazio delle misure di probabilità su $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, corrispondente ai primi n elementi di una successione $(x_n)_{n\geq 1}$ di osservazioni, tale che $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ converge debolmente, per $n \to \infty$, ad una probabilità p_0 su $\mathcal{B}(\mathbb{X})$. Per ben noti risultati classici, la distribuzione finale converge debolmente a δ_{p_0}. Ci proponiamo di fornire una stima della distanza di Prokhorov tra la finale e il limite, in funzione di n. Il metodo generale proposto si basa su una discretizzazione dello spazio $\mathbb{X}$ in un numero finito di celle di diametro minore di ε e la stima della suddetta distanza è di conseguenza ricondotta alle stime di tre elementi: (1) la distanza tra δ_{p_0} e $\delta_{p_0^\varepsilon}$, essendo p_0^ε la discretizzazione di p_0; la distanza tra $\delta_{p_0^\varepsilon}$ e la legge finale basata sui dati discretizzati; (3) la distanza tra quest'ultima e la finale effettiva. Nel punto (2) si fa intervenire una opportuna rivisitazione del metodo di approssimazione di integrali dovuto a Laplace. Nel punto (3) interviene una proprietà di continuità della "distribuzione" finale rispetto ai dati. Il procedimento viene infine illustrato con esempi significativi per le applicazioni statistiche.

Intervento: Emanuele Dolera,
Su una proprietà asintotica della distribuzione finale,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 741–748**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 741-748

Su una proprietà asintotica della distribuzione finale (*)

EMANUELE DOLERA

Il seminario tratta un problema di inferenza statistica in ambito bayesiano, ovvero quello di descrivere il comportamento della distribuzione finale in presenza di un grande numero di osserazioni. L'obiettivo principale è mettere in luce il ruolo della *frequenza*, valutata su n osservazioni, ai fini della valutazione della legge di probabilità di un segmento di osservazioni future rispetto alle n già considerate, impostando il problema solamente su risultati basilari del calcolo delle probabilità, come il teorema di Bayes. Come corollario, si hanno condizioni entro le quali la stima bayesiana concorda, in maniera più marcata al crescere di n, con una stima ottenuta tramite un principio di massima verosimiglianza, tipico di un'impostazione frequentistita.

Per chiarire tali concetti, si consideri sullo spazio $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ una successione $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ di variabili aleatorie (v.a.) *scambiabili* a valori in uno spazio polacco $\mathbb{X}$, munito di una metrica ρ e relativa σ-algebra di Borel $\mathscr{X}$. Denotando con $\tilde{e}_n(\cdot, \omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\xi_i(\omega)}(\,\cdot\,)$ il *processo empirico*, che riassume in sè il concetto di frequenza, un ben noto teorema di de Finetti [4] afferma che esiste una misura di probabilità (m.d.p.) aleatoria $\tilde{p}$ su $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$ per cui $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_P(\tilde{e}_n, \tilde{p}) = 0$ P-quasi certamente, dove d_P denota la metrica di Prokhorov su $\mathbb{M}$, lo spazio di tutte le m.d.p. su $(\mathbb{X}, \mathscr{X})$. La misura $\gamma(\,\cdot\,) := \mathsf{P}[\,\tilde{p} \in \cdot\,]$, definita sulla σ-algebra $\mathscr{M}$ dei boreliani di $\mathbb{M}$, è la *distribuzione iniziale* e vale la rappresentazione (di de Finetti)

$$\mathsf{P}[\boldsymbol{\xi}^{(n)} \in A_1 \times \ldots \times A_n, \tilde{p} \in B] = \int_B \Big[\prod_{j=1}^{n} p(A_j)\Big]\gamma(\mathrm{d}p)$$

per ogni n e $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{X}$, con $\boldsymbol{\xi}^{(n)} := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. In questo contesto, la m.d.p. (aleatoria) $\mathsf{P}[\,\tilde{p} \in \cdot \mid \boldsymbol{\xi}^{(n)}]$ su $(\mathbb{M}, \mathscr{M})$ viene detta *distribuzione finale*, la quale descrive la legge di $\tilde{p}$ condizionatamente ai dati osservati. Inoltre, fissata una specifica versione della finale, si indicherà con $\gamma_n(\cdot\,; \mathbf{x}^{(n)})$ la valutazione di tale versione in $\boldsymbol{\xi}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} := (x_1, \ldots, x_n)$. Una notevole proprietà asintotica della finale è messa in evidenza da un celebre teorema di Doob [7], che afferma che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}_P(\mathsf{P}[\,\tilde{p} \in \cdot \mid \boldsymbol{\xi}^{(n)}]\,; \delta_{\tilde{p}}(\,\cdot\,)) = 0 \qquad (\mathsf{P} - q.c.) \tag{1}$$

* Lavoro svolto in collaborazione con E. Regazzini, Università degli Studi di Pavia.

essendo D_P la metrica di Prokhorov su $\mathbb{P}$, lo spazio di tutte le m.d.p. su $(\mathbb{M}, \mathscr{M})$. Dunque, considerando $\gamma_n(\cdot\,; \mathbf{x}^{(n)})$ come una funzione definita su $(\mathbb{X}^\infty, \mathscr{X}^\infty)$, (1) si può rileggere come segue: esiste un $\mathbb{M}_* \in \mathscr{M}$ con $\gamma(\mathbb{M}_*) = 1$ tale che, per ogni p_* in $\mathbb{M}_*$, vale la formula

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}_P(\gamma_n(\cdot\,; \mathbf{x}^{(n)})\,; \delta_{p_*}(\,\cdot\,)) = 0 \tag{2}$$

per ogni successione $\mathbf{x}^{(\infty)} = (x_1, x_2, \dots)$ appartenente a $\mathbb{X}^\infty_* \in \mathscr{X}^\infty$, sottoinsieme di successioni tale che $p^\infty_*(\mathbb{X}^\infty_*) = 1$. Essendo il teorema di Doob solamente un risultato di esistenza, rimane aperto il problema di caratterizzare $\mathbb{M}_*$, o meglio di stabilire per quali p_* in $\mathbb{M}$ valga (2) per ogni successione $\mathbf{x}^{(\infty)} = (x_1, x_2, \dots)$ appartenente a $\mathbb{X}^\infty_* \in \mathscr{X}^\infty$, sottoinsieme di successioni tale che $p^\infty_*(\mathbb{X}^\infty_*) = 1$. Tale problema ha dato luogo alla seguente

Definizione 1 (di consistenza bayesiana). – *Diciamo che $\gamma_n(\cdot\,,\cdot)$ è consistente in $p_0 \in \mathbb{M}$ quando*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}_P(\gamma_n(\cdot\,; \mathbf{x}^{(n)})\,; \delta_{p_0}(\,\cdot\,)) = 0 \tag{3}$$

per ogni successione $\mathbf{x}^{(\infty)} = (x_1, x_2, \dots)$ appartenente a $\mathbb{X}^\infty_0 \in \mathscr{X}^\infty$, sottoinsieme di successioni tale che $p^\infty_0(\mathbb{X}^\infty_0) = 1$.

Tale importante definizione è dovuta a Diaconis e Freedman [5], i quali così ne sintetizzano la logica retrostante: "dopo aver assegnato una distribuzione iniziale, si generano immaginariamente successioni i.i.d. e, dopo aver calcolato la distribuzione finale, si valuta se quest'ultima riflette adeguatamente l'attuale conoscenza." Dopo i primi risultati di Freedman [8] in cui si mostrano esempi effettivi di inconsistenza, sono seguiti numerosissimi lavori sulla consistenza, tanto che essa rimane tuttora uno dei temi più studiati in ambito bayesiano. Tra i lavori pionieristici ricordiamo [5, 6, 7, 11] mentre tra i recenti [1, 2, 9, 12, 13].

In questo seminario si discute un problema connesso a quello della consistenza, che resta però formulato in ambito genuinamente bayesiano. A proposito, si precisi una ben determinata versione della m.d.p. finale $\gamma_n(\cdot\,,\cdot)$ e, in corrispondenza di una assegnata successione di osservazioni $\mathbf{x}^{(\infty)} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{X}^\infty$, si ponga $e_n(\,\cdot\,) := \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}(\,\cdot\,)$ per $n = 1, 2, \dots$. Emerge, in tale contesto, il seguente

Problema 1 (delle probabilità inverse). – *Supponendo che $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_P(e_n\,; p_0) = 0$ per una m.d.p. $p_0 \in \mathbb{M}$, trovare, per ogni $\varepsilon > 0$, un indice n_ε per cui, per ogni $n \geq n_\varepsilon$,*

$$\mathrm{D}_P(\gamma_n(\cdot\,; \mathbf{x}^{(n)})\,; \delta_{e_n}) \leq \varepsilon\,. \tag{4}$$

Si noti che il problema delle probabilità inverse (p.i.) possiede una natura finitaria e non fa cenno a "veri valori" del paramtro e ad insiemi eccezionali, ma considera solo successioni di frequenze con una tendenza a concentrarsi su valori dati. Pertanto, in accordo con la sua formulazione originaria, il problema delle p.i. equivale ad indagare il ruolo della frequenza, calcolata su un numero finito di prove, nella valutazione della probabilità. In questo spirito, pur sotto convinzioni radicalmente differenti, si sono mossi i grandi maestri del passato: Laplace, von Mises, de Finetti, Romanovski.

Così come il problema della consistenza, anche il problema delle p.i. può non avere soluzione, come mostra il seguente esempio. Si consideri $\mathbb{X} = \{0, 1\}$, cosicchè $\mathbb{M} = \{$leggi di Bernoulli di parametro $\theta\}$, omeomorfo a $[0, 1]$, con misura iniziale $\gamma(\mathrm{d}\theta) = w\delta_0 + (1 - w)\mathcal{U}_{[y,1]}(\mathrm{d}\theta)$, con $w, y \in (0, 1)$. Sulla succesione delle osservazioni si assuma che $e_n(\{1\}) =: f_n \to 0$ e $f_n > 0$ per qualche n. Perchè il problema delle p.i. abbia soluzione si dovrebbe avere $\gamma([0, s), \mathbf{x}^{(n)}) \to 1$ per $n \to \infty$ e ogni $s > 0$, mentre si dimostra che $\gamma([0, s), \mathbf{x}^{(n)}) \to 0$ per $n \to \infty$ e ogni $s \in (0, y)$, mostrando l'insolubilià del problema in questo caso.

Le tecniche impiegate per risolvere il problema differiscono a seconda della conplessità dello spazio $\mathbb{M}$. Si parla di "caso dominato" quando le realizzazioni di $\tilde{p}$ che appartengono al supporto di γ sono tutte assolutamente continue (a.c.) tra loro. L'esempio più cristallino si ha quando lo spazio delle osservazioni è finito, $\mathbb{X} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$, dove $\mathbb{M} = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \delta_{a_i} \mid \theta_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{k+1} \theta_i = 1 \right\}$, che risulta omeomorfo al simplesso $T_k := \left\{ (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k \mid \theta_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{k} \theta_i \geq 1 \right\}$ tramite la mappa $\mathfrak{t}_k\left(\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \delta_{a_i} \right) := (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Posto $\mathbf{f}^{(n)} = (f_1^{(n)}, \ldots, f_k^{(n)}) := (e_n(\{a_1\}), \ldots, e_n(\{a_k\}))$ e $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k) := (p_0(\{a_1\}), \ldots, p_0(\{a_k\}))$, La condizione $e_n \Rightarrow p_0$ equivale a $f_j^{(n)} \to f_j$ per $j = 1, \ldots, k$. Allora la distribuzione finale è data da

$$\gamma(B; \mathbf{x}^{(n)}) = \frac{\int_B \left[\prod_{j=1}^{k} p(\{a_j\})^{nf_j^{(n)}} \right] \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{k} p(\{a_j\}) \right)^{nf_{k+1}^{(n)}} \gamma(\mathrm{d}p)}{\int_{\mathbb{M}} \left[\prod_{j=1}^{k} p(\{a_j\})^{nf_j^{(n)}} \right] \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{k} p(\{a_j\}) \right)^{nf_{k+1}^{(n)}} \gamma(\mathrm{d}p)}$$

$$= \frac{\int_{\mathfrak{t}_k(B)} \left[\prod_{j=1}^{k} \theta_j^{nf_j^{(n)}} \right] \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \theta_j \right)^{nf_{k+1}^{(n)}} \gamma \circ \mathfrak{t}_k^{-1}(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})}{\int_{T_k} \left[\prod_{j=1}^{k} \theta_j^{nf_j^{(n)}} \right] \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \theta_j \right)^{nf_{k+1}^{(n)}} \gamma \circ \mathfrak{t}_k^{-1}(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})}$$

essendo B un elemento di $\mathscr{M}$. In questo contesto, vale il seguente

TEOREMA 1. – *Si assuma che* $\mathbf{f} \in \mathrm{supp}[\gamma \circ \mathfrak{t}_k^{-1}]$ *e* $\gamma \circ \mathfrak{t}_k^{-1}(\{\mathbf{f}\}) \neq 1$. *Sia poi* $B(\mathbf{f}, r)$ *una sfera euclidea di centro* $\mathbf{f}$ *e raggio* r *tale che* $\gamma \circ \mathfrak{t}_k^{-1}(B(\mathbf{f}, r)^c \cap T_k) > 0$.

Allora, esistono due costanti positive α e β (esplicite) indipendenti da n tali che

$$\gamma(\mathrm{t}_k^{-1}(B(\mathbf{f},r)^c \cap T_k); \mathbf{x}^{(n)}) \leq \alpha e^{-\beta n} \tag{5}$$

in ciascuno dei casi seguenti

i) $\mathbf{f}$ *è interno a* T_k
ii) $\mathbf{f} \in \partial T_k$ *e* $\{B(\mathbf{f},\varepsilon) \cap \mathrm{supp}[\gamma \circ \mathrm{t}_k^{-1}]\} \setminus \{\mathbf{f}\} \neq \emptyset$ *per ogni* $\varepsilon > 0$.

Se (5) *vale, allora*

$$\mathrm{D}_P(\gamma_n(\cdot\,;\mathbf{x}^{(n)})\,;\delta_{e_n}) \leq a e^{-bn}$$

con opportune costanti positive a, b *che dipendono da* γ.

Una prima formulazione di questo teorema si trova in [6], mentre qui l'enunciato è stato migliorato considerando anche dati sul bordo del simplesso. La strategia dimostrativa coinvolge opportuni sviluppi di Taylor della verosimiglianza e semplici disuguaglianze, come già messo in evidenza da de Finetti [3].

Dopo l'invenzione del processo di Dirichlet, sono state introdotte incessantemente nuove distribuzioni iniziali non parametriche che non rientrano nel caso dominato (processi neutrali a destra, misure completamente aleatorie normalizzate, processi di Dirichlet gerarchici, misture nel senso di Antoniak, etc.). Si richiede in modo naturale un approccio generale al problema delle p.i. Uno studio pionieristico in questo senso è rappresentato da un articolo di Regazzini e Sazonov [10]. Gli autori considerano $\mathbb{X}$ totalmente limitato e introducono una successione di partizioni

$$\Pi_m := \{A_{m,1}, \ldots, A_{m,k_m+1}\} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

dove ogni $A_{m,j} \in \mathscr{X}$. Posto $\varepsilon_m := \max_{1 \leq i \leq k_m+1} \mathrm{diam}(A_{m,i})$, si richiede che Π_{m+1} sia un raffinamento di Π_m per ogni m, $\mathscr{X}$ sia generata da $\bigcup_{m \geq 1} \Pi_m$ e $\varepsilon_m \downarrow 0$ per $m \to \infty$. Ora, per ogni p in $\mathbb{M}$ e m in $\mathbb{N}$ poniamo

$$p_{\varepsilon_m}(\,\cdot\,) := \sum_{i=1}^{k_m+1} p(A_{m,i}) \delta_{a_{m,i}}$$

essendo gli $a_{m,i}$ punti di $A_{m,i}$. Si definiscono allora i nuovi elementi aleatori, da interpretarsi come "discretizzazione" delle osservazioni,

$$\xi_{j,m}(\omega) := a_{m,i} \qquad \text{se } \xi_j(\omega) \in A_{m,i}$$

per $j, m \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \ldots, k_m + 1$. Si pone anche $\xi_m^{(n)} := (\xi_{1,m}, \ldots, \xi_{n,m})$. Si associa ad ogni $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \{1, \ldots, k_m+1\}^n$ il rettangolo $R_{m,\mathbf{j}} := A_{m,j_1} \times \ldots \times A_{m,j_n}$. Infine, senza ledere la generalità, si può assumere che $\int_{\mathbb{M}} p^n(R_{m,\mathbf{j}}) \gamma(\mathrm{d}p) > 0$ per

ogni $\mathbf{j}$. In questo contesto si ha

$$\mathsf{P}[\,\tilde{p} \in B \mid \xi_m^{(n)}](\omega) = \sum_{\mathbf{j}} 1\!\!1_{R_{m,\mathbf{j}}}(\xi^{(n)}(\omega)) \, \frac{\int_B p^n(R_{m,\mathbf{j}})\gamma(\mathrm{d}p)}{\int_{\mathbb{M}} p^n(R_{m,\mathbf{j}})\gamma(\mathrm{d}p)}$$

e

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}[\,\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in B \mid \xi_m^{(n)}](\omega) \\
&= \sum_{\mathbf{j}} 1\!\!1_{R_{m,\mathbf{j}}}(\xi^{(n)}(\omega)) \cdot \frac{\int_{\mathfrak{t}_{k_m}(B)} \Big[\prod_{i=1}^{k_m} \theta_i^{n_i(\mathbf{j})}\Big] \cdot \Big(1 - \sum_{i=1}^{k_m} \theta_i\Big)^{n_{k_m+1}(\mathbf{j})} \gamma \circ \mathfrak{t}_{k_m}^{-1}(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})}{\int_{T_{k_m}} \Big[\prod_{i=1}^{k_m} \theta_i^{n_i(\mathbf{j})}\Big] \cdot \Big(1 - \sum_{i=1}^{k_m} \theta_i\Big)^{n_{k_m+1}(\mathbf{j})} \gamma \circ \mathfrak{t}_{k_m}^{-1}(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})}
\end{aligned}$$

dove $n_i(\mathbf{j}) := \sharp\{h \in \{1, \dots, n\} \mid j_h = i\}$ e $B \in \mathscr{M}$. Si giunge così alla seguente disuguaglianza, direttamente riconducibile al problema delle p.i.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_P(\gamma_n(\cdot\,;\mathbf{x}^{(n)})\,;\delta_{e_n}(\,\cdot\,)) \\
&\le 2\mathrm{D}_P(\delta_{p_0}(\,\cdot\,);\delta_{e_n}(\,\cdot\,)) + 2\mathrm{D}_P(\delta_{p_0}(\,\cdot\,);\delta_{p_{0,\varepsilon_m}}(\,\cdot\,)) \\
&+ \mathrm{D}_P(\delta_{e_{n,\varepsilon_m}}(\,\cdot\,)\,;\delta_{e_n}(\,\cdot\,)) + \mathrm{D}_P(\delta_{e_{n,\varepsilon_m}}(\,\cdot\,)\,;\mathsf{P}[\,\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in \cdot \mid \xi_m^{(n)}](\omega)) \\
&+ \mathrm{D}_P(\mathsf{P}[\,\tilde{p} \in \cdot \mid \xi_m^{(n)}](\omega)\,;\mathsf{P}[\,\tilde{p}_{\varepsilon_m} \in \cdot \mid \xi_m^{(n)}](\omega)) \\
&+ \mathrm{D}_P(\mathsf{P}[\,\tilde{p} \in \cdot \mid \xi_m^{(n)}](\omega)\,;\gamma_n(\cdot\,;\mathbf{x}^{(n)}))
\end{aligned} \tag{6}$$

Ora, il primo termine è chiaramente infinitesimo in n, avendo supposto $e_n \Rightarrow p_0$. Il secondo e il terzo termine sono controllati da $2\varepsilon_m$ e ε_m rispettivamente, per le proprietà elementari delle distanza di Prokhorov. Il quinto termine è anche controllato da ε_m, per la Proposizione 1 in [10]. Il quarto termine è controllato da un'espressione del tipo ae^{-bn}, per il Teorema 1. Per concludere, bisogna prestare attenzione al fatto che a, b dipendono da m implicitamente. Una strategia efficace consiste nel cercare limitazioni sull'ultimo termine in (6) con maggioranti infinitesimi indipendenti da n. Un'ipotesi che asseconda tale scopo è che esista una versione specifica $\overline{\gamma}_n(\cdot\,;\cdot)$ della finale (determinabile a priori) per cui

$$\mathrm{D}_P(\overline{\gamma}_n(\cdot\,;\mathbf{y}^{(n)})\,;\overline{\gamma}_n(\cdot\,;\mathbf{x}^{(n)})) \le C_\alpha \max_{1\le i\le n} \rho(x_i, y_i)^\alpha \tag{7}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)} \in \mathbb{X}^n$, essendo $\alpha \in (0, 1]$ e $C_\alpha > 0$ indipendenti da n, $\mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{x}^{(n)}$. Infatti, si può affermare che

PROPOSIZIONE 1. – *Se vale* (7) *allora l'ultimo termine in* (6) *è limitato da* $C'_\alpha \varepsilon_m^{\alpha/2}$ *e il problema delle p.i. (relativamente alla versione* $\overline{\gamma}_n$*) ammette una soluzione esplicita.*

Tale proposizione riconduce il problema nell'individuare condizioni facilmente verificabili che garantiscano la validità di (7). A proposito si dà la seguente

PROPOSIZIONE 2. – *Si assuma che* $\mathbb{X}$ *sia un aperto limitato di* $\mathbb{R}^d$ *con bordo lipschitziano. Si supponga poi che* $A \mapsto \mathsf{P}[\boldsymbol{\xi}^{(n)} \in A]$, *con* $A \in \mathscr{X}^n$, *sia a.c. rispetto alla misura di Lebesgue nd-dimensionale. Si ponga infine* $F_\phi : \mathbf{x}^{(n)} \mapsto \int_{\mathbb{M}} \phi(p)\gamma(\mathrm{d}p\ ; \mathbf{x}^{(n)})$. *Se esistono due costanti* $\tau > 1$ *e* C_τ *tali per cui*

$$\Big| \int_{\mathbb{X}^n} \partial_j \zeta(\mathbf{x}^{(n)}) F_\phi(\mathbf{x}^{(n)}) \mathrm{d}\mathbf{x}^{(n)} \Big| \leq \frac{C_\tau}{n} \|\zeta\|_{L^{nd\tau'}(\mathbb{X}^n)} \tag{8}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{X}^n)$ *e* $j = 1, \ldots, nd$, *dove* τ' *è l'esponente coniugato di* τ, *allora esiste una versione* $\overline{\gamma}_n$ *della finale che soddisfa* (7).

La dimostrazione di questo fatto è basata su un'applicazione di una celebre disuguaglianza di Morrey. In ogni caso, siccome la condizione (8) non è di agevole verifica, si può ricorrere al metodo delle partizioni e scrivere

$$\int_{\mathbb{X}^n} \partial_h \zeta(\mathbf{x}^{(n)}) F_\phi(\mathbf{x}^{(n)}) \mathrm{d}\mathbf{x}^{(n)} = \lim_{m \to \infty} \sum_{\mathbf{j}} L_{\mathbf{j}}[\phi] \int_{R_{m,\mathbf{j}}} \partial_h \zeta(\mathbf{x}^{(n)}) \mathrm{d}\mathbf{x}^{(n)} \tag{9}$$

dove

$$L_{\mathbf{j}}[\phi] := \frac{\int_{T_{k_m}} \phi\Big(\sum_{i=1}^{k_m+1} \theta_i \delta_{a_i}\Big) \Big[\prod_{i=1}^{k_m} \theta_i^{n_i(\mathbf{j})}\Big] \cdot \Big(1 - \sum_{i=1}^{k_m} \theta_i\Big)^{n_{k_m+1}(\mathbf{j})} \gamma \circ \mathfrak{t}_{k_m}^{-1}(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})}{\int_{T_{k_m}} \Big[\prod_{i=1}^{k_m} \theta_i^{n_i(\mathbf{j})}\Big] \cdot \Big(1 - \sum_{i=1}^{k_m} \theta_i\Big)^{n_{k_m+1}(\mathbf{j})} \gamma \circ \mathfrak{t}_{k_m}^{-1}(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})}$$

e ϕ è una funzione limitata e lipschitziana, con norma lipschitz minore o uguale a 1 rispetto alla metrica di Wasserstein. Si enuncia allora la seguente

PROPOSIZIONE 3. – *La disuguaglianza* (8) *resta verificata se esiste una costante* $C > 0$ *tale che*

$$|L_{\mathbf{j}}[\phi] - L_{\mathbf{j}'}[\phi]| \leq C \frac{\varepsilon_m}{n} \tag{10}$$

per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ *e per ogni* ϕ *limitata e lipschitziana, con norma lipschitz minore o uguale a 1 rispetto alla metrica di Wasserstein, essendo*

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_l, \ldots, j_n)$$
$$\mathbf{j}' = (j_1, j_2, \ldots, j_l', \ldots, j_n)$$

e A_{m,j_l} *contiguo ad* $A_{m,j_l'}$.

Ora la disuguaglianza (10) ha il pregio di riguardare solo di distribuzioni finali di dimensione finita, che possono spesso essere note. Non vi è poi nessun problema a livello di scelta delle versioni. Inoltre, (10) può essere verificata a mano in alcuni casi notevoli, oppure mediante la

PROPOSIZIONE 4. – *La disuguaglianza* (10) *resta verificata se esistono due costanti* $C_1, C_2 > 0$ *tale che*

$$\mathrm{d}_W\Big(\sum_{i=1}^{k_m+1} \overline{\theta}_i \delta_{a_{m,i}} \,;\, \sum_{i=1}^{k_m+1} \overline{\theta}_i^{'} \delta_{a_{m,i}}\Big) \leq C_1 \frac{\varepsilon_m}{n} \tag{11}$$

$$Var[\mathcal{L}] + Var[\mathcal{L}^{'}] \leq C_2 \frac{1}{n} \tag{12}$$

essendo $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{'}$ *le leggi finali finito dimensionali con campioni individuati, rispettivamente da* $\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{j}^{'}$, *e* $(\overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_{k_m+1}), (\overline{\theta}_1^{'}, \ldots, \overline{\theta}_{k_m+1}^{'})$ *i relativi valori attesi.*

Per concludere la trattazione dell'argomento, utilizzando i precedenti enunciati si sono analizzate diverse classi di misure di probabilità non-parametriche, comunemente utilizzate nella pratica, quali le misure normalizzate di James, Lijoi e Prünster, il processo di Ongaro e il processo Beta-stacy di Walker e Muliere, ottenendo risultati di consistenza legati al problema delle p.i. finora non noti in letteratura.

REFERENCES

[1] BARRON A., SCHERVISH M.J. e WASSERMAN L., *The consistency of posterior distribution in nonparametric problems.* Ann. Statist. **27** (1999), 536-561.

[2] CHOI T. e RAMAMOORTHI R.V., *Remarks on consistence of posterior distributions. Bertrand Clarke and Subhashis Ghoshal, eds., Pushing the limits of contemporary statistics: Contributions in honor of Jayanta K. Ghosh* (IMS) (2008), 170-186.

[3] DE FINETTI B., *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio.* Atti Reale Accademia Nazionale dei Lincei. **4** (1930), 86-133.

[4] DE FINETTI B., *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives.* Ann. Inst. H. Poincaré. **7** (1939), 1-68.

[5] DIACONIS P. e FREEDMAN D.A., *On the consistency of Bayes estimates (with discussion)* Ann. Statist. **14** (1986), 1-26.

[6] DIACONIS P. e FREEDMAN D.A., *On the uniform consistency of Bayes estimates for multinomial probabilities*. Ann. Statist. **18** (1990), 1317-1327.

[7] DOOB J.L., *Application of the theory of martingales*. In *Le calcul des Probabilités et ses Applications* 23-27. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, 1949, Paris.

[8] FREEDMAN D.A., *On the asymptotic behavior of Bayes' estimates in the discrete case.* Ann. Math. Statist. **34** (1963), 1194-1216.

[9] GHOSHAL S., GHOSH J.K. e VAN DER VAART A.W., *Convergence rates of posterior distributions.* Ann. Statist. **28** (2000), 500-531.

[10] Regazzini E. e Sazonov V., *Approximation of laws of random probabilities by mixtures of Dirichlet distributions with applications to nonparametric bayesian inference*. Theory Probab. Appl. **45** (2001), 93-110.
[11] Schwartz L., *On Bayes procedures*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. **4** (1965), 10-26.
[12] Shen X. e Wasserman L., *Rates of convergence of posterior distributions*. Ann. Statist. **29** (2001), 666-686.
[13] Walker S., *New approaches to Bayesian consistency*. Ann. Statist. **32** (2004), 2028-2043.

Emanuele Dolera
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata "Giuseppe Vitali"
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Via Campi 213/b, 41125 Modena, Italy
E-mail: emanuele.dolera@unimore.it emanuele.dolera@unipv.it

Received December 1, 2012 and in revised form December 1, 2013

Carmelo Antonio Finocchiaro: La topologia degli ultrafiltri su spazi di domini di valutazione e sue applicazioni

Carmelo Antonio Finocchiaro
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma Tre
email: carmelo@mat.uniroma3.it

Marco Fontana
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma Tre

K. Alan Loper
Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus

Sunto

Siano K un campo e A un suo sottoanello. Denotiamo con $\mathrm{Zar}(K|A)$ l'insieme dei domini di valutazione di K che contengono A come sottoanello. Seguendo l'impostazione di Zariski, si rende $\mathrm{Zar}(K|A)$, in modo naturale, uno spazio topologico, dichiarando come base di insiemi aperti la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathrm{Zar}(K|A)$ della forma $\mathrm{Zar}(K|B)$, al variare di B fra le $A-$sottoalgebre di K che sono di tipo finito (su A). Tale topologia su $\mathrm{Zar}(K|A)$ è la cosiddetta *topologia di Zariski*. L'insieme $\mathrm{Zar}(K|A)$, munito della topologia di Zariski, è *lo spazio di Riemann-Zariski di K su A*. Come è ben noto, $\mathrm{Zar}(K|A)$ è uno spazio compatto e, più precisamente, è uno *spazio spettrale*, nel senso di Hochster (i.e., è omeomorfo allo spettro primo di qualche anello). Tuttavia, la topologia di Zariski su $\mathrm{Zar}(K|A)$ è di Hausdorff solo nel caso (banale) in cui K è intero su A, i.e. se $\mathrm{Zar}(K|A)$ è un singoletto. In questa presentazione, introdurrò una topologia su $\mathrm{Zar}(K|A)$, detta *topologia degli ultrafiltri*, che è più fine della topologia di Zariski e rende $\mathrm{Zar}(K|A)$ uno spazio compatto di Hausdorff. Inoltre, darò applicazioni di questa nuova topologia per caratterizzare certe classi di domini integralmente chiusi. Inoltre, dopo aver richiamato le nozioni e le proprietà fondamentali delle operazioni semistar `e.a.b.` e degli anelli di funzioni di Kronecker, mostrerò che il completamento (secondo Zariski) di una operazione semistar `e.a.b.` corrisponde alla compattificazione di un opportuno sottospazio di $\mathrm{Zar}(K|A)$, rispetto alla topologia degli ultrafiltri. Infine, introdurrò su $\mathrm{Zar}(K|A)$ la cosiddetta *topologia duale, rispetto alla topologia di Zariski* (nel senso di Hochster), e caratterizzerò, in termini della topologia degli ultrafiltri e della topologia duale, quando due operazioni semistar complete sono uguali.

Carlotta Giannelli: B–splines gerarchiche: raffinamento locale e normalizzazione

Carlotta Giannelli[1]
Institute of Applied Geometry, Johannes Kepler University, Linz
email: carlotta.giannelli@jku.at

Bert Jüttler
Institute of Applied Geometry, Johannes Kepler University, Linz

Sunto

Le strategie adattive di raffinamento della mesh costituiscono una componente fondamentale nello sviluppo degli algoritmi di approssimazione comunemente usati per il fitting di dati e la ricostruzione di superfici. Tali tecniche permettono di localizzare cambiamenti nel reticolo di controllo in modo tale che modifiche puntuali su di esso si riflettano solo su regioni ben delimitate della rappresentazione geometrica sottostante. Nel contesto della soluzione numerica di equazioni alle derivate parziali, un'attenzione particolare è attualmente rivolta a queste tematiche in connessione con l'emergere dell'analisi isogeometrica. Usando gli stessi spazi di funzioni per la modellizzazione della geometria e la simulazione numerica, i metodi isogeometrici incorporano strumenti propri del Computer Aided Geometric Design nella fase di analisi. Tecniche di raffinamento, originariamente introdotte per applicazioni standard di disegno geometrico, sono quindi divenute argomento di studi recenti per l'identificazione di rappresentazioni geometriche che soddisfino simultaneamente i requisiti imposti dal loro uso per l'approssimazione numerica della soluzione e l'accuratezza del modello geometrico.

Una possibile estensione del paradigma isogeometrico, originariamente introdotto considerando lo standard NURBS (Non Uniform Rational B–splines), con rappresentazioni spline che, staccandosi dalla rigidità della struttura di prodotto tensoriale, permettono di controllare e adattare la procedura di raffinamento in base alle esigenze specifiche, risiede nell'utilizzo di basi gerarchiche. Il modello gerarchico permette di agire esclusivamente sulle aree selezionate per il raffinamento definendo diversi livelli di dettaglio tramite una gerarchia di funzioni di base. La località del raffinamento è quindi garantita utilizzando tale sequenza di spazi funzionali in corrispondenza di determinate zone del dominio parametrico. Rivisitando la costruzione classica di splines tensor–product gerarchiche, saranno presentati risultati recenti riguardo la costruzione di basi B–splines gerarchiche normalizzate e il loro possibile uso nei problemi applicativi di interesse.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di una borsa Marie Curie intraeuropea del Settimo programma quadro della Commissione Europea.

Intervento: Carlotta Giannelli, Bert Jüttler,
Local and Adaptive Refinement with Hierarchical B-splines,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 735–740**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 735-740

Local and Adaptive Refinement with Hierarchical B–splines (*)

CARLOTTA GIANNELLI - BERT JÜTTLER

Abstract. – *Adaptive spline models for geometric modeling and spline-based PDEs solvers have recently attracted increasing attention both in the context of computer aided geometric design and isogeometric analysis. In particular, approximation spaces defined over extensions of tensor-product meshes which allow axis aligned segments with T–junctions are currently receiving particular attention. In this short paper we review some recent results concerning the characterization of the space spanned by the hierarchical B–spline basis. In addition, we formulate a refinement algorithm which allows us to satisfy the conditions needed for this characterization.*

1. – Introduction

By using the same smooth function spaces for describing the geometry and performing the simulation phase, the recently introduced isogeometric approach [8] will potentially lead to major improvements of the product design process in certain parts of industrial applications. The geometry of the computational domain is usually defined in terms of non–uniform rational B–splines (NURBS), the standard representation model used in geometric modeling. Classic finite element methodologies transform the NURBS model provided by commercial computer aided design (CAD) systems into an *approximate* triangular or polygonal geometry described by piecewise linear or non–linear elements. On the other hand, the goal of the isogeometric approach is to preserve the *exact* CAD geometry by eliminating the time–consuming mesh generation task and avoiding additional interactions with the CAD system during the mesh refinement procedure.

In order to extend the isogeometric methodology with spline representations which allow local control of the refinement procedure, suitable applications of the T–spline model and related issues have also been considered [1, 2]. Recently, alternative solutions based on hierarchical B–splines have been investigated [11].

(*) Conferenza tenuta a Bologna il 13 Settembre 2011 da C. Giannelli in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana. Lavoro svolto nell'ambito di una borsa Marie Curie intraeuropea del Settimo programma quadro della Commissione Europea.

Starting from the classical construction of hierarchical tensor-product B–splines, we will review some recent results concerning the characterization of multilevel spline spaces and the identification of suitable hierarchical bases. We will also present a simple hierarchical refinement strategy which allows to guarantee certain properties of the corresponding multilevel spline space.

2. – Spline hierarchy

Hierarchical B–splines constitutes an effective extension of classical tensor-product B–splines to address the problem of a local and adaptive mesh refinement in standard approximation algorithms [3, 4]. A sequence of nested tensor–product meshes is used to identify different levels of resolution. B–splines defined with respect to these increased levels of details are then suitably used over the regions selected to be refined at the current refinement step.

We consider a sequence of tensor–product grids which corresponds to a nested sequence of bivariate B–spline spline spaces $V^0, \dots, V^{N-1}$ so that $V^{\ell-1} \subset V^\ell$, for $\ell = 1, \dots, N-1$. At each level ℓ, the bi–degree and smoothness are (d, d) and $(d-1, d-1)$, respectively. The initial spline space V^0 is spanned by a bivariate tensor–product B–spline basis $\mathcal{B}^0$ with respect to two bi–infinite uniform knot sequences. Any space V^ℓ instead is spanned by the normalized B–spline basis $\mathcal{B}^\ell$ defined on corresponding nested knot sequences obtained by subsequently applying dyadic subdivision to the previous level.

Let $\{\Omega^\ell\}_{\ell=0,\dots,N-1}$ be a nested sequence of subdomains so that $\Omega^{\ell-1} \supseteq \Omega^\ell$, for $\ell = 1, \dots, N-1$. For each hierarchical level, Ω^ℓ is defined as a collection of cells with respect to the tensor–product grid of level $\ell - 1$. We say that a B–spline $\beta \in \mathcal{B}^\ell$ is *active* if and only if the intersection of its support with Ω^0 is completely contained in Ω^ℓ but not in $\Omega^{\ell+1}$, and *passive* otherwise. A simple selection mechanism from a starting sequence of B-spline bases allows to construct a basis for the corresponding multilevel spline space [9, 10, 11].

DEFINITION 2.1. – *The hierarchical B–spline basis is defined as the set of all active B–splines over the tensor–product grid of each level.*

The application of the hierarchical B–spline construction to scattered data approximations and to the solution of partial differential equations in isogeometric analysis has already shown the potential of this refinement framework with respect to the modeling of detailed local features and to the reduced number of degrees of freedom needed to obtain a certain accuracy, see e.g., the recent work [11].

3. – Hierarchical spline spaces

Related issues to address naturally concern the characterization of the hierarchical spline space. In particular, we may investigate the possibility of representing any function of arbitrary multi-degree and with maximum order of smoothness. By focusing on the bivariate case, it is possible to show that, under some reasonable assumptions on the domain configuration, we can give a positive answer to this question.

Let S^ℓ be the the space of all piecewise polynomials of bi–degree (d, d) on the subdivision of the plane obtained by restricting the grid of V^ℓ to $\Omega^0 \setminus \Omega^{\ell+1}$ for a certain level ℓ, as defined in equation (3) of [7]. In the considered uniform setting characterized by single knots at all levels, in order to prove that the number of B–splines whose support overlap $\Omega^0 \setminus \Omega^{\ell+1}$ is equal to the dimension of S^ℓ, we need the following assumption.

(A) The ring $\Omega^0 \setminus \Omega^{\ell+1}$ admits offsets at distance less or equal to $(d-1)/2$ with respect to the grid of level ℓ.

The complete analysis leading to the above assumption is carried over in [7] by introducing the notion of *offset* at a certain distance to a given domain and leads to the following result.

THEOREM 3.1 [7]. – *If Assumption (A) on the domain configuration holds for all* $\ell = 0, \dots, N-1$, *then the hierarchical B–spline basis introduced in Definition* 2.1 *spans the entire space W defined as*

$$W = \left\{ f \in \mathcal{C}^{d-1,d-1}(\Omega^0) : f\big|_{\Omega^0 \setminus \Omega^{\ell+1}} \in S^\ell \ \forall \ell = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Hence, the space spanned by hierarchical B–splines contains all spline functions of a certain degree and maximum smoothness that exists on the underlying hierarchical grids.

4. – A simple refinement algorithm

Finally, we present a method which allows to perform adaptive refinement while satisfying the condition which was formulated in the previous section. We assume that, for any level, the number of cells in each direction, is a multiple of d. By denoting as d–*grid* of level ℓ the *aligned disjoint* boxes composed of $d \times d$ cells with respect to the grid of V^ℓ (see Figure 1), an algorithm to guarantee satisfaction of assumption (A) is based on the following observation, see also Remark 21 in [7].

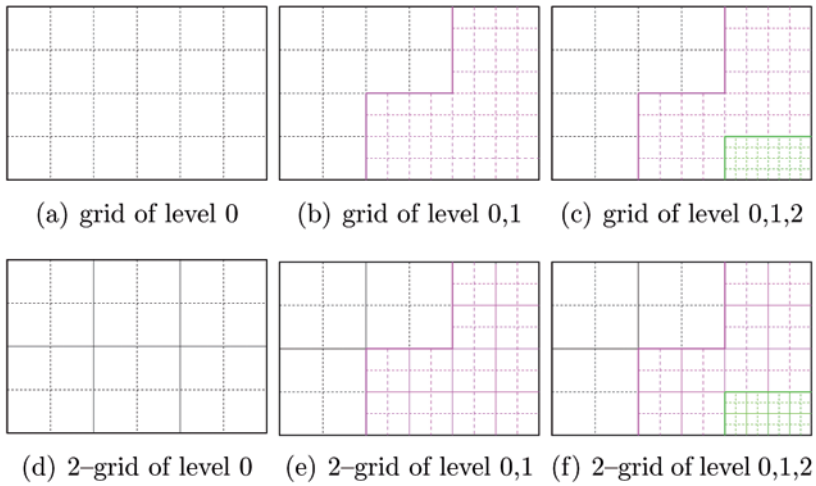


Fig. 1. – Grids and d–grids for $d = 2$.

REMARK 1. – If $\Omega^{\ell+1}$, for $\ell = 0, \ldots, N-2$, can be decomposed into a d–grid of level ℓ, then assumption (A) is satisfied.

A simple refinement procedure based on the above observations may be summarized as follows.

ALGORITHM 1.

Input:

I1 A nested hierarchy of domains $\{\Omega^\ell\}_{\ell=0,\ldots,N}$ so that $\Omega_0 \supseteq \Omega_1 \supseteq \ldots \supseteq \Omega_N$, where each Ω^ℓ can be decomposed into a d–grid of level ℓ and $\Omega^N = \emptyset$.

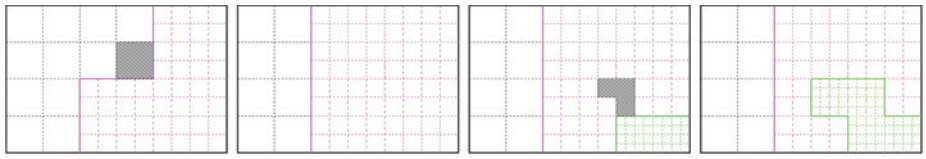
I2 A set Φ of cells marked to be refined.

1. $\hat{\Omega}_0 = \Omega_0$;
2. for $\ell = 0, \ldots, N-1$

$$\hat{\Omega}^{\ell+1} = \Omega^{\ell+1} \cup C$$

where C is the union of all the cells c which belong to the d–grid of level ℓ so that $c \cap \Phi \neq \emptyset$.

Output: the enlarged hierarchy of domains $\{\hat{\Omega}^\ell\}_{\ell=0,\ldots,N}$ so that $\hat{\Omega}_0 \supseteq \hat{\Omega}_1 \supseteq \ldots \supseteq \hat{\Omega}_N$, where each $\hat{\Omega}^\ell \supseteq \Omega^\ell$ is the union of *disjoint* boxes composed by $d \times d$ cells with respect to the grid of $V^{\ell-1}$.



(a) $\Phi \cap \Omega^0$ (hatched) (b) identification of $\hat{\Omega}^1$ (c) $\Phi \cap \Omega^1$ (hatched) (d) identification of $\hat{\Omega}^2$

Fig. 2. – Identification of $\hat{\Omega}^1$ and $\hat{\Omega}^2$ in Example 1.

EXAMPLE 1. By considering the input data illustrated in Figure 2(a) and (c) with $d = 2$, the application of step 2 of Algorithm 1 allows to identify $\hat{\Omega}^1$ and $\hat{\Omega}^2$ as shown in Figure 2(b) and (d).

5. – Closure

Bases and dimensions of bivariate hierarchical tensor–product splines were recently investigated [7] together with specific condition on admissible domain configurations. In this paper we presented a simple algorithm which ensures the repeated fulfillment of this condition during the refinement procedure.

The hierarchical framework can even be adapted to the multivariate setting or to more general spline spaces [5, 6]. The possibility of extending the analysis of hierarchical spline spaces and the proposed refinement algorithm to a more general multivariate setting is an interesting topic for future research.

REFERENCES

[1] A. BUFFA, D. CHO and G. SANGALLI, *Linear independence of the T-spline blending functions associated with some particular T–meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **199** (2010), 1437–1445.

[2] M.R. DÖRFEL, B. JÜTTLER and B. SIMEON, *Adaptive Isogeometric Analysis by Local h-Refinement with T–splines*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **199** (2010), 264–275.

[3] D.R. FORSEY and R.H. BARTELS, *Hierarchical B–spline refinement*, Comput. Graphics, **22** (1988), 205–212.

[4] D.R. FORSEY and R.H. BARTELS, *Surface fitting with hierarchical splines*, ACM Trans. Graphics, **14** (1995), 134-161.

[5] C. GIANNELLI, B. JÜTTLER and H. SPELEERS, *THB–splines: the truncated basis for hierarchical splines.* Comput. Aided Geom. Design, **29** (2012), 485-498.

[6] C. GIANNELLI, B. JÜTTLER and H. SPELEERS, *Strongly stable bases for adaptively refined multilevel spline spaces*, Adv. Comp. Math., to appear (2013).

[7] C. GIANNELLI and B. JÜTTLER, *Bases and dimensions of bivariate hierarchical tensor–product splines*, J. Comput. Appl. Math., **239** (2013), 162-178.

[8] T.J.R. HUGHES, J.A. COTTRELL and Y. BAZILEVS, *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **194** (2005), 4135-4195.

[9] R. KRAFT, *Adaptive and linearly independent multilevel B–splines*, in: LE MÉHAUTÉ A., RABUT C. and SCHUMAKER L.L. (Eds.), *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, Vanderbilt University Press, Nashville (1997), 209-218.

[10] R. KRAFT, *Adaptive und linear unabhängige Multilevel B–Splines und ihre Anwendungen*, PhD Thesis, Universität Stuttgart (1998).

[11] A.-V. VUONG, C. GIANNELLI, B. JÜTTLER and B. SIMEON, *A hierarchical approach to adaptive local refinement in isogeometric analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **200** (2011), 3554-3567.

Carlotta Giannelli, Bert Jüttler
Institute of Applied Geometry
Johannes Kepler University, Altenberger Str. 69 A-4040 Linz, Austria
E-mail: carlotta.giannelli@jku.at bert.juettler@jku.at

Received December 7, 2012 and in revised form December 1, 2013

Erika Luciano: Fra tradizione e innovazione: l'Enciclopedia delle Matematiche elementari (1909-1949)

Erika Luciano[1]
Dipartimento di Matematica G. Peano, Università di Torino
email: erika.luciano@unito.it

Sunto

Nell'adunanza della Mathesis tenutasi a Pavia il 23 Maggio 1909, R. Bonola, influenzato dall'attività di promozione della cultura matematica condotta da F. Klein, avanzò il progetto di pubblicare un'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*. L'intento era quello di costruire, per un pubblico di insegnanti, di studenti universitari e di allievi delle Scuole di magistero, una collana di saggi di taglio sintetico che comprendesse i contenuti curricolari delle scuole secondarie oltre ad alcune teorie del primo biennio universitario. I lavori procedettero in una prima fase a ritmi serrati ma, nonostante l'impegno dei direttori L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli, l'edizione in tre volumi (*Analisi, Geometria* e *Applicazioni - Storia della matematica - Questioni didattiche*) andò incontro a lunghe soste, anche legate ai conflitti mondiali, e si concluse solo nel 1949. Iniziativa unica nel panorama editoriale dell'epoca, l'*Enciclopedia* fu accolta con ampio favore in Italia e all'estero. Con i suoi 37 autori e 8 commissari essa incontrò il sostegno delle componenti più attive nella ricerca e nell'insegnamento (docenti, ingegneri, statistici, storici, ...) e rappresentò una delle forme più corali e partecipate di collaborazione della comunità matematica italiana. L'analisi storiografica di quest'impresa ci permette di:

- individuare quali aspetti, temi e problemi di matematica pura ed applicata furono ritenuti rilevanti per la formazione degli studenti e degli insegnanti, e come e quanto essi variarono nel corso della vicenda editoriale;
- cogliere i differenti approcci metodologici declinati nei capitoli, mostrando ad esempio le strategie per colmare lo iato fra le matematiche 'elementari' e quelle 'superiori';
- percepire la dialettica di confronto e di interazione fra i redattori e lo sforzo sincretico di Berzolari per il superamento delle partigianerie di Scuola e di indirizzo;
- valutare il ruolo rivestito dall'*Enciclopedia* nell'organizzazione e nell'istituzio-

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Progetto *Scuole matematiche e identità nazionale nell'età moderna e contemporanea* - Unità di Torino.

nalizzazione di alcune tradizioni di studi classiche della matematica italiana, oltre che nella diffusione di teorie d'avanguardia, quali la logica ideografica ed intuizionista, gli studi sui fondamenti, la relatività e le matematiche bourbakiste.

Intervento: Erika Luciano,
Fra tradizione e innovazione: l'Enciclopedia delle Matematiche Elementari (1909-1949),
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 817–836**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 817-836

Fra tradizione e innovazione: l'Enciclopedia delle Matematiche Elementari (1909-1949)

ERIKA LUCIANO

Sunto. – *Con i suoi 42 autori, 3 direttori e 8 commissari, l'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari *è stata una delle iniziative più corali e partecipate intraprese dalla comunità matematica italiana. Illustrare la genesi e la vicenda editoriale di quest'opera dà modo di individuare quali aspetti e temi di matematica pura e applicata furono ritenuti rilevanti per la formazione dei docenti, come essi variarono negli anni 1909-1949 e secondo quali approcci fu impostata la loro trattazione. D'altro canto, indagando le dinamiche di confronto e di interazione reciproca fra i redattori e i direttori dell'*Enciclopedia*, emerge il ruolo che questa ricoprì nell'organizzazione e nell'istituzionalizzazione di alcune tradizioni di studi, quali la logica e i fondamenti della matematica, che videro riconosciuto il proprio ruolo di parti integranti della cultura degli insegnanti italiani.*

1. – La vicenda editoriale

Nell'adunanza dell'associazione Mathesis, tenutasi a Pavia il 23 Maggio 1909, il socio R. Bonola avanza per la prima volta l'idea di pubblicare un'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* rivolta ai docenti in servizio, agli studenti universitari e agli allievi delle Scuole di Magistero. (1) Un'opera di questo genere avrebbe dovuto mirare

> "a diffondere la coltura delle scienze esatte fra i numerosi insegnanti che, per ragioni d'ufficio, risiedono lontani dai centri di studio, dalle biblioteche, dal movimento scientifico moderno; (...) formare una specie di legame intellettuale fra quanti s'interessano del progresso delle matematiche elementari e, porgendo a tutti dati preziosi, notizie interessanti, promuovere ricerche in campi non sterili, né privi di qualsiasi interesse". (2)

(1) Cfr. Sezione Lombarda Mathesis 1909, p. 35-37, 48; Bonola 1909b, p. 343-344; *Un'opera in progetto*, Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche (Loria), 11, 1909, p. 91.

(2) Bonola 1909a, p. 41.

Fin da questo momento, temi e indirizzo della collana sono fissati. L'*Enciclopedia* dovrebbe includere i contenuti previsti dai *curricula* delle scuole secondarie e oggetto di insegnamento nel primo biennio universitario, oltre a comprendere alcuni argomenti cosiddetti 'complementari': le applicazioni (fisica, meccanica, statistica), la storia e la didattica delle matematiche. Lo stile ritenuto più adeguato per un'opera di questo tipo è quello sintetico, strettamente espositivo, uno stile che "pur non evitando di toccare in certe quistioni il lato critico e filosofico" si conservi "senza pregiudizi di metodo o Scuola". ([3])

Le proposte di Bonola sono approvate all'unanimità e, nella medesima riunione del 23 maggio 1909, viene costituita la Commissione direttiva dell'*Enciclopedia*, tutta composta da docenti universitari e di scuola media-secondaria di area pavese: L. Berzolari, F. Gerbaldi, G. Vivanti, R. Bonola e E. Veneroni. ([4]) Questa, nel corso di alcune riunioni preparatorie, tenutesi nel Luglio del 1909, si dedica a precisare meglio gli orientamenti e l'indice delle materie, affrontando pure le problematiche connesse alla selezione dei collaboratori e alla scelta della casa editrice. Le fasi preliminari di progettazione dell'opera si svolgono in un clima di fattiva collaborazione tant'è che, già al congresso Mathesis di Padova, nel Settembre dello stesso anno, la Commissione è in grado di presentare un piano dettagliato dell'*Enciclopedia*, che sarà seguito abbastanza fedelmente negli anni a venire. ([5]) Esso prevede una struttura in tre volumi, di cui i primi due dedicati all'*Analisi* e alla *Geometria*, e il terzo mirato agli argomenti 'complementari' sopra citati. Il prospetto incontra il pieno sostegno del presidente della Mathesis F. Severi e, nel frattempo, illustri matematici come V. Volterra e G. Castelnuovo si dichiarano disponibili a intervenire presso i Ministeri dell'Istruzione e di Agricoltura per ottenere sussidi all'edizione.

I lavori procedono speditamente. Fin dai primi mesi del 1910 inizia la distribuzione del lavoro redazionale e sono contattati i collaboratori: M. Pieri per la *Logica*, F. Amodeo per la *Geometria del piano e dello spazio*, A. Perna per la *Teoria della misura*, G. Vacca per la *Storia della Matematica*. ([6]) Frattanto, l'annuncio dell'imminente pubblicazione dell'*Enciclopedia*, corredato dall'indice dei soggetti e dalla lista dei redattori, campeggia su numerosi periodici 'intermediari' italiani come *Il Bollettino di Matematica*, il *Giornale di Matematiche* e il *Bollettino di Bibliografia e Storia delle*

([3]) Bonola 1909a, p. 41.

([4]) Sezione Lombarda Mathesis 1909, p. 36, 48.

([5]) Berzolari, Bonola 1909, p. 1-5, 43-45.

([6]) Cfr. L. Berzolari a M. Pieri, 29.5.1910, in Arrighi 1997, p. 7-8; G. Vivanti a F. Amodeo, 4.8.1910, in F., N. Palladino 2006, p. 477; G. Vivanti a G. Vacca, 11.5.1910, in Nastasi, Scimone 1995, p. 185.

Scienze Matematiche. ([7]) Per accelerare i tempi di uscita, viene prevista una stampa dell'*Enciclopedia* in fascicoli, sul modello dell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* promossa da F. Klein. ([8])

Alcuni lutti, fra cui l'improvvisa scomparsa di tre membri del Consiglio direttivo (Bonola, Calò e Veneroni), il primo conflitto mondiale e la crisi post-bellica paralizzano però per lungo tempo le attività della Commissione, che è

> "ridotta per lunghi anni all'inerzia, e all'impossibilità di dare qualsiasi risposta ai molti che dall'Italia e dall'estero chiedevano notizie dello stato de' suoi lavori". ([9])

([7]) Cfr. *Per la pubblicazione di una Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Il Bollettino di Matematica (Conti), VIII, 1909, p. 180-182; *Notiziario*, Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane (Battaglini), 49 (3, 2), 1911, p. 171; *Notizie. Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche (Loria), 13, 1911, p. 44-45. Particolarmente significativa, per documentare i molteplici cambi di redattori e, conseguentemente, i mutati rapporti di forza fra le varie 'Scuole' matematiche italiane è la *Notizia* apparsa sul Bollettino di Loria, secondo cui la scansione dell'*Enciclopedia* è la seguente: " Vol. I. *Analisi*. 1. Logica matematica (A. Padoa). 2. Aritmetica elementare (E. Bortolotti). 3. Teoria dei numeri, analisi indeterminata (M. Cipolla). 4. Concetto di numero e sue estensioni (F. Enriques e D. Gigli). 5. Limiti, serie, frazioni continue, prodotti infiniti (G. Vitali). 6. Progressioni e logaritmi (L. Tenca e A. Finzi). 7. Calcolo letterale, identità algebriche (D. Gigli). 8. Analisi combinatoria, determinanti, equazioni lineari (L. Berzolari). 9. Equazioni di grado superiore al primo (O. Nicoletti). 10. Problemi algebrici e loro discussione (B. Calò). 11. Elementi di calcolo infinitesimale (G. Vivanti). 12. Rapporti fra l'analisi e l'algebra elementare (S. Pincherle e G. Vivanti). Vol. II *Geometria*. 1. Proprietà elementari delle figure del piano e dello spazio (F. Amodeo). 2. Teoria della misura ed applicazioni (A. Perna). 3. Geometria del triangolo e del tetraedro (V. Retali). 4. Poligoni e poliedri regolari e stellati (L. Brusotti). 5. Trasformazioni geometriche elementari (E. Veneroni). 7. Geometria sulla sfera (R. Bonola). 8. Sezioni del cilindro e del cono circolari (E. Ciani). 9. Massimi e minimi in geometria (A. Padoa). 10. Metodi per la risoluzione dei problemi geometrici; problemi classici (F. Gerbaldi). 11. Fondamenti della geometria elementare (U. Amaldi). 12. Funzioni circolari, funzioni iperboliche, trigonometria piana e sferica (G. Pesci). 13. Calcolo vettoriale (R. Marcolongo e C. Burali-Forti). 14. Elementi di geometria analitica (L. Berzolari). 15. Elementi di geometria projettiva (M. Pieri). 15. Elementi di geometria descrittiva (F. Severi). 17. Curve e superficie speciali (G. Loria). 18. Geometria non euclidea (R. Bonola). 19. Geometria non archimedea (G. Veronese). 20. Rappresentazioni geometriche dei numeri complessi (R. Bonola). 21. Rapporti fra le teorie geometriche superiori e la geometria elementare (U. Amaldi, R. Bonola, F. Enriques). Vol. III. *Matematica applicata, Storia, Didattica*. 1. Unità di misura (G. Celoria). 2. Approssimazioni numeriche; calcolo grafico (G. Lazzeri e G. Pesci). 3. Calcolo delle probabilità; teoria degli errori (F. Guarducci). 4. Applicazioni elementari della matematica alle scienze fisiche (E. Daniele e A. Viterbi). 5. Statistica matematica; attuaria (C. Gini e R. Viti). 6. Matematica finanziaria (T. Boggio). Storia della matematica elementare (G. Vacca). 8. Indirizzi didattici e libri di testo (G. Scorza). 9. Ricreazioni matematiche (M. Cipolla). 10. Strumenti (F. Guarducci). 11. Modelli (F. Guarducci)".

([8]) Berzolari, Bonola 1909, p. 5.

([9]) Berzolari - Vivanti - Gigli 1930-1949, I_1, p. VIII.

Di fatto, la prima parte dell'*Enciclopedia*, pur essendo pronta fin dal dicembre del 1923, ([10]) esce solo nel giugno del 1929, seguita da tre altri tomi, apparsi nel novembre del 1931, nel 1932 e nel settembre del 1936, ([11]) che vengono presentati nelle principali accademie italiane e accolti con favore sulla scena nazionale ed internazionale. ([12])

Le leggi razziali del 1938, che colpiscono alcuni autori e uno dei direttori, Vivanti, insieme allo scoppio del secondo conflitto mondiale, portano però a un'altra brusca interruzione della pubblicazione. Gli ultimi tre volumi della collana, che nella veste definitiva comprenderà 63 capitoli, per un totale di oltre 4300 pagine, appariranno solo nel dicembre del 1949, dopo la morte di Berzolari.

2. – I direttori e i collaboratori

Ad animare e dirigere l'*Enciclopedia*, durante il quarantennio della sua edizione, è Berzolari (1863-1949) che si vale, per i primi volumi, della collaborazione di suo genero D. Gigli (1878-1933) e di quella del collega G. Vivanti (1859-1949). ([13])

Questi studiosi sono accomunati dalla partecipazione, in veste di redattori, a importanti imprese enciclopediche italiane ed estere, quali l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, il *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, il *Repertorio di Matematiche Superiori* e l'*Enciclopedia Italiana Treccani*, oltre che dal legame, per formazione o per attività, con le Università di Pavia e di Milano e con la sezione lombarda della Mathesis. Ad accostarli, però, è soprattutto l'"intento di compiere alta opera nazionale" ([14]) e di dar prova di "fervore patriottico", ([15]) mettendo a frutto della scuola italiana e dei suoi insegnanti la loro decennale esperienza di matematici professionisti e di educatori.

È specialmente Berzolari a incarnare il ruolo di *chief editor* dell'*Enciclopedia*, nella quale esplica al meglio la sua capacità di coniugare una "larga veduta d'assieme ed una minuta informazione bibliografica, conciliando tali esigenze a

([10]) Cfr. Berzolari 1924, p. 47.

([11]) Le informazioni sull'uscita dei vari tomi sono desunte da indagini condotte su carteggi e documenti archivistici; il frontespizio dei volumi reca in alcuni casi una data successiva di un anno a quella di stampa. Cfr. Luciano 2012, p. 348-349.

([12]) Berzolari riceve pure l'offerta di curare un'edizione tedesca dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, da pubblicarsi contemporaneamente a quella italiana.

([13]) Fra i numerosi profili biografici di Berzolari, Gigli e Vivanti si vedano quelli di Bompiani 1950; Brusotti 1936; AA.VV. 1934; Brusotti 1934; Brusotti 1935; Cinquini 1950; Vivanti 1933.

([14]) Brusotti 1936, p. XXVII.

([15]) Bennett 1930, p. 378.

prima vista antitetiche in un quadro armonico ed efficace". ([16]) È lui, di fatto, a selezionare, talora in completa autonomia, la maggior parte dei redattori, molti dei quali provengono dalle fila dei suoi ex allievi, assistenti e colleghi. ([17]) Ed è ancora Berzolari a seguire la gestione finanziaria dell'impresa e a stringere e mantenere i contatti con l'editore Hoepli, dopo il rifiuto della Zanichelli ad accollarsi l'incarico della stampa.

Quella di Berzolari, Vivanti e Gigli non è una mera forma di patrocinio o di gestione manageriale. Da un lato, infatti, essi fanno fronte a una pletora di problemi materiali – dalle sostituzioni nella squadra dei collaboratori, dovute a ragioni estrinseche e non, al monitoraggio dei costi dell'iniziativa, dalla correzione delle bozze alla promozione e alla propaganda dell'opera –; dall'altro, stabiliscono i criteri generali della collana ed entrano nel merito dei contenuti, della forma e dell'estensione dei vari articoli, anche a costo di limitare la libertà degli autori. ([18]) Questo tipo di supervisione emerge bene, per esempio, nel caso della sezione dell'*Enciclopedia* dedicata all'Analisi. Di questa fanno parte, secondo il piano originale dell'opera, due capitoli classici: quello su *Limiti, serie, frazioni continue, prodotti infiniti* (I_2, p. 391-440) e quello sugli *Elementi del calcolo infinitesimale* (I_2, p. 447-547), affidati rispettivamente a G. Vitali e a G. Vivanti. Fanno loro da cornice due saggi di natura meno propedeutica: gli *Elementi della teoria degli aggregati* (I_2, p. 551-563), redatti ancora da Vivanti, e *Le funzioni analitiche da un punto di vista elementare* (I_2, p. 567-597), curate da S. Pincherle. A Berzolari spetta, in quella circostanza, il compito di coordinare il lavoro dei tre autori, con l'obiettivo di offrire nell'*Enciclopedia* un'esposizione degli argomenti di analisi che da un lato sia immediatamente spendibile nell'insegnamento (per esempio nei licei classici e moderni e nelle sezioni fisico-matematiche degli istituti tecnici) e, dall'altro, dia ai lettori gli strumenti concettuali essenziali per addentrarsi negli sviluppi più avanzati di questa disciplina. Di fronte a tale delicata opera di mediazione epistemico-cognitiva, Berzolari, Vivanti e Vitali intrecciano un fitto dialogo epistolare. ([19]) I due direttori chiedono in particolare a Vitali di apportare alcune aggiunte e modifiche allo schema che egli aveva tracciato per il suo saggio, così da fornire a un pubblico come quello dell'*Enciclopedia*, costituito da docenti e allievi di Scuola di Magistero, i requisiti per leggere autonomamente il capitolo sulle funzioni analitiche. Da ultimo, Vivanti e Vitali concertano una suddivisione dei compiti che vede affidata a Vitali la parte numerica dell'analisi e a Vivanti quella più prettamente funzionale, oltre ai cenni di teoria degli insiemi.

([16]) Brusotti 1936, p. XXVII.

([17]) La rosa definitiva vede la presenza di 36 docenti universitari e 6 insegnanti di scuola media-superiore, attivi in 14 sedi italiane.

([18]) Berzolari, Bonola 1909, p. 5.

([19]) Cfr. Luciano 2012, p. 361-369.

3. – Le enciclopedie e l'apprendistato culturale degli insegnanti

Il contesto in cui appare l'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* è contraddistinto a livello internazionale da una forte sensibilità per imprese collettive quali repertori, bibliografie ragionate, enciclopedie, dizionari sistematici, ecc. Le problematiche suscitate da questo tipo di pubblicazioni sono spesso portate all'attenzione dei congressi e le discussioni che ne scaturiscono, cui prendono parte fra gli altri H. Poincaré, G. Mittag-Leffler, C.-A. Laisant, G. Peano, F. Klein e J. Molk, fanno emergere nuove forme di creazione condivisa, di trasmissione e di socializzazione del sapere scientifico. ([20]) Oggetti del dibattito sono, in prima battuta: i problemi di classificazione delle conoscenze, soprattutto in presenza di ambiti 'di frontiera'; il taglio da adottare per le singole voci (con una costante contrapposizione fra chi propende per lo stile analitico e specialistico, e chi invece si schiera a favore di quello sintetico e generalista-divulgativo); le difficoltà di conciliare le esigenze di unitarietà di impostazione di un'enciclopedia con la varietà e, talvolta, con l'inconciliabilità delle posizioni di autori lontani fra loro per formazione, professionalità, convinzioni e carattere.

In questo *parterre* di progetti non mancano collane dedicate alle matematiche elementari e rivolte agli insegnanti. Fra queste spiccano l'*Enzyclopädie der Elementar Mathematik* (1907) di H. Weber e J. Wellstein e, per l'Italia, il *Formulaire des mathématiques* (1895-1908) di G. Peano e – a cura di F. Enriques – le *Questioni riguardanti la Geometria Elementare* (1900), le *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (1912-14; 1925-27) e la collana *Per la storia e la filosofia delle matematiche* (1925-38), oltre all'*Enciclopedia dei Maestri* (1923-32) di E. Brenna e a volumi di sintesi quali *I concetti fondamentali dell'algebra e della geometria* di J.W. Young, tradotto nel 1919 da D. Mercogliano, *Il concetto di numero e le sue estensioni* (1923) di A. Natucci, *L'insegnamento delle matematiche nelle scuole elementari e secondarie* di J.W. Young, tradotto nel 1923 da D. Gambioli e *La matematica elementare nei suoi fondamenti, nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori* (1927) di M. Cipolla.

Dominante, nell'ambito di tale segmento editoriale, è l'influenza dei trattati di Klein *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (1908-1909), collegati alle iniziative per i docenti avviate a Göttingen e improntati ad un assunto unitario: quello di colmare il baratro fra insegnamento secondario e universitario, contrastando il 'sistema del duplice oblio'. ([21])

Pur in presenza di tale modello di riferimento comune, le collane sopra menzionate assumono caratteristiche distinte e si rivolgono a fasce di pubblico

([20]) Cfr. von Dyck 1908; Gispert 1999; Gispert, Verley 2000; Gispert 2001; Goldstein 2001; Rollet, Nabonnand 2002.

([21]) Cfr. Luciano, Roero 2012, p. 42-44, 54-62, 204.

differenti, a seconda del significato e dell'estensione attribuiti dai loro direttori alla locuzione 'matematiche elementari'. A questo riguardo, la posizione epistemologica di Berzolari appare chiara: è l'opinione di chi, *à la* Klein, ritiene che una pubblicazione rivolta agli insegnanti – sia essa un trattato o un'enciclopedia – debba necessariamente contemplare: le matematiche elementari in senso stretto, che "debbono costituire il solido fondamento della cultura"; le matematiche elementari da un punto di vista superiore, cioè quell'insieme di idee, strumenti e metodi utili "per bene comprendere lo spirito delle matematiche elementari in senso stretto" ([22]) e, infine, le matematiche complementari, ossia le riflessioni di carattere storico e pedagogico che conferiscono profondità al bagaglio di competenze del docente, rendendo più maturo e consapevole il suo magistero.

Di qui discende naturalmente, per Berzolari, la necessità di fissare il discrimine fra 'elementare' e 'superiore', in rapporto ai contenuti della sua *Enciclopedia*, e quella di dettare le linee da seguire nella trattazione, affinché questa si possa legittimamente qualificare come 'elementare'. In assenza di fonti, quali lettere o manoscritti, è possibile solo formulare delle ipotesi sulla linea di condotta da lui tenuta all'atto di assumere la direzione dell'*Enciclopedia*. Tuttavia, esaminando l'opera nella sua veste definitiva è plausibile sostenere, con E. Bompiani, che l'attributo 'elementare' vi abbia assunto almeno tre significati distinti:

> "il primo è quello di semplice, piano, e vale a delimitare qualitativamente la materia che è oggetto dell'insegnamento medio; il secondo è quello di relativo agli elementi, ai fondamenti ed offre all'analisi critica l'opportunità di approfondire le nozioni che soggiacciono all'intuizione comune e di allargare conseguentemente il campo della ricerca; il terzo si riferisce alla elementarietà dei mezzi impiegati per raggiungere proprietà che più rapidamente si troverebbero con altri mezzi. Di questi tre aspetti il primo è necessario, il secondo è il più interessante perché supera il primo dandogli sicuro fondamento e indicando nuove vie di sviluppo; il terzo sa spesso d'artificio". ([23])

Effettivamente, la struttura dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* ricalca bene, a livello tematico, questa molteplicità di accezioni. Accanto a capitoli di 'matematiche elementari in senso stretto', che illustrano cioè teorie tradizionali dell'insegnamento attivo (aritmetica pratica, progressioni, logaritmi, proprietà delle figure del piano e dello spazio, trigonometria, ...) o che sono di sussidio ai docenti per rendere più accattivanti le lezioni e le esercitazioni (ad esempio il saggio di matematica ricreativa), spiccano articoli che affrontano argomenti di 'matematiche elementari da un punto di vista superiore', quali i fondamenti del-

([22]) Cassina 1932, p. LXVII.
([23]) Bompiani 1937, p. 156.

l'aritmetica e della geometria, la teoria dei gruppi, le geometrie non euclidee e non archimedee, le trasformazioni, le curve speciali, ecc. Dal punto di vista dello stile, il *modus operandi* di Berzolari è altrettanto lucido e coerente: il livello di 'elementarietà' della trattazione è mantenuto quasi ovunque adeguato a una fascia di lettori costituita in prevalenza da insegnanti, non dettando a priori una serie di indicazioni sull'approccio da seguire, bensì concertando, insieme ai redattori dell'*Enciclopedia*, la strategia di volta in volta più opportuna. A seconda dei casi, perciò, vi saranno alcuni autori (assai pochi, in verità) che rinunciano del tutto ad addentrarsi nei risvolti più tecnici e avanzati del tema loro affidato, e altri che li sviluppano invece in modo dettagliato, talora nei paragrafi conclusivi del saggio, talaltra in sezioni indicate con metasegni editoriali, o ancora nelle note a piè di pagina.

Grazie a questa distribuzione contenutistica e a questo taglio espositivo, l'*Enciclopedia* risponde egregiamente alle esigenze formative e informative delle prime due sfere di pubblico individuate da Bonola e Berzolari nel 1909: gli insegnanti di ruolo e gli studenti universitari. Resta da esaminare la sua efficacia in relazione alla terza sfera di lettori, quella costituita dagli allievi delle Scuole di Magistero. A questo proposito, occorre tener presente che la pubblicazione dell'*Enciclopedia* si situa in un'epoca di ricchi dibattiti sull'organizzazione di tali Scuole, ([24]) dibattiti che vedono coinvolti matematici e docenti come G. Castelnuovo, L. Certo, F. Enriques, G. Fano, G. Loria, A. Padoa, G. Peano, S. Pincherle, G. Pittarelli e G. Vailati. Come è noto, le loro opinioni in merito alla preparazione scientifica e pedagogica necessaria ai futuri insegnanti sono contrastanti. Nella sostanza, tuttavia, la maggior parte di questi studiosi concorda nel sottolineare quattro tipi di criticità che viziano il consueto percorso di studi degli aspiranti docenti: 1) l'ignoranza dei recenti sviluppi delle ricerche logico-fondazionali; 2) la carenza di cultura storico-filosofica; 3) l'insufficiente conoscenza delle applicazioni della matematica alle scienze fisiche, naturali, economiche, ...; 4) la superficialità della preparazione didattica propriamente detta, sia di tipo attivo (tirocinio), sia di tipo passivo (in particolare a causa dell'assenza di lezioni dedicate a questioni metodologiche, all'analisi dei manuali, ecc.). A tali néi si propone di ovviare istituendo corsi di Logica e Fondamenti, Metodologia Matematica, Matematiche elementari da un punto di vista superiore, ecc. ([25])

L'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* recepisce pienamente le istanze sollevate in questi dibattiti e, pur non potendo essere utilizzata effetti-

([24]) Cfr. Furinghetti, Giacardi 2012.

([25]) Fra i vari interventi spicca – nell'ottica del nostro discorso – quello di G. Fano (1922, p. 107) che, come antidoto all'educazione eccessivamente settoriale impartita agli aspiranti insegnanti nelle Università e nelle Scuole di Magistero, propone di offrire loro corsi etichettati come "corsi di Enciclopedia".

vamente nelle Scuole di Magistero, che vengono soppresse nel 1921, diventerà però un *point de repère* dei corsi di Matematiche complementari dal 1922 e fino agli anni Cinquanta almeno. ([26]) In effetti, alcuni suoi saggi – ad esempio quelli di calcolo delle probabilità, fisica, matematica finanziaria – valorizzano le 'matematiche di precisione e di approssimazione', esattamente nel senso auspicato, fra gli altri, da Castelnuovo. Quelli di storia della matematica e della fisica vanno invece nella direzione di sostenere l'ideale di *humanitas scientifica*, la cui importanza per la formazione dei docenti era stata sostenuta da Vailati ed Enriques.

Sotto questo punto di vista, l'*Enciclopedia* è affine ad altre iniziative coeve, e soprattutto alle *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari*, coordinate da Enriques. Di queste ultime, però, essa è tutt'altro che "un inutile duplicato". ([27]) La diversità d'impostazione, come vedremo, si avverte soprattutto sul terreno delle questioni logico-fondazionali.

4. – Un'occasione mancata: il capitolo di Logica matematica

Fra gli elementi di maggiore originalità dell'*Enciclopedia* di Berzolari, Vivanti e Gigli vi è l'inserzione di un capitolo di logica (I_1, p. 5-79).

La decisione di aprire la collana con un saggio di questo tipo è tutt'altro che scontata, per l'epoca. Nel 1909, infatti, la logica è lungi dall'essere una disciplina istituzionalizzata ([28]) e i suoi stessi cultori nutrono opinioni divergenti sullo *status* da conferire alle loro ricerche, in un eterno oscillare fra chi considera la logica uno strumento della matematica, chi la vorrebbe elevare al rango di disciplina autonoma e chi la considera un *organon* della gnoseologia, o della filosofia. D'altra parte, altrettanto poco condivisa, sia dai matematici sia dagli insegnanti, è la convinzione che la logica costituisca la naturale propedeutica alle matema-

([26]) Per esempio all'Università di Torino i volumi dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* sono citati da G. Peano (1929-32), G. Ascoli (1948-56) e T. Viola (1957-65) nei loro corsi di Matematiche Complementari. Cfr. G. Peano a A. Natucci, 21.11.1929, Domus Galilaeana Pisa, *Fondo Natucci*, c.p.; Ascoli 1954, p. 297.

([27]) Bonola 1909b, p. 344. Di fatto, i punti di contatto fra le due collane non mancano, a partire dalle intersezioni tematiche per giungere ai casi di sovrapposizione fra le due cerchie di redattori. Il taglio delle voci, però, è differente e, salvo eccezioni, i capitoli dell'*Enciclopedia* hanno carattere più compendiale rispetto agli omologhi delle *Questioni*. Per contro, l'apparato storico-bibliografico è più rigoroso, ampio e dettagliato nei saggi dell'*Enciclopedia*, in confronto a quelli delle *Questioni*.

([28]) I corsi di Logica sono istituiti in Italia, nelle facoltà di Scienze MFN, solo dal 1960 tuttavia, a partire dalla fine dell'Ottocento, era esistita nel nostro paese una tradizione piuttosto ricca di corsi liberi e di cicli di conferenze e seminari di logica matematica. Cfr. Luciano 2010, p. 279-300, 303-315.

tiche elementari. A peggiorare ulteriormente il quadro vi è poi il grado di esacerbazione raggiunto dalle polemiche su rigore e intuizione, e più precisamente dai dibattiti sull'opportunità di riversare nell'ambito dell'insegnamento alcuni esiti degli studi logico-fondazionali, in special modo se condotti con linguaggi simbolico-ideografici.

Di fronte a questo stato di cose, la decisione di Berzolari ha del sorprendente e testimonia l'apertura dell'*Enciclopedia* a tutte le correnti di studi, anche a quelle ancora non universalmente accettate, 'senza pregiudizi di Scuola', secondo gli auspici originari dei suoi direttori.

Il compito, assai spinoso, di redattore del capitolo *Logica* è affidato da principio a M. Pieri, eminente studioso di fondamenti della geometria e legato alla Scuola di Peano, al quale viene espressamente chiesto, da Berzolari, di tenere conto nell'esposizione delle "più recenti deviazioni dal sistema del Peano (Russell ecc.)". ([29]) Questo *affidavit* è indice della lungimiranza e dello spirito sincretico del direttore dell'*Enciclopedia*, che da un lato contatta un esponente dell'*equipe* italiana unanimemente considerata come specialista nelle ricerche di logica e, dall'altro, non coinvolge però un logico *tout-court* o un 'peaniano di salda fede'. Pieri, infatti, ha al suo attivo nel 1909 un solo lavoro di logica, è fra coloro che da tempo hanno rinunciato a valersi dell'ideografia nei lavori a stampa e, a differenza di C. Burali-Forti o di A. Padoa, non ha mai insegnato logica né in ambito medio-secondario, né all'Università. Per contro, Pieri è ritenuto uno studioso equilibrato, capace di apprezzare i vantaggi dell'ideografia per le ricerche sui fondamenti, ma anche di segnalare le pecche di un'impostazione strettamente formalistico-deduttiva, soprattutto se applicata nella scuola in modo acritico.

Le speranze di Berzolari, questa volta, andranno deluse. Già nel 1911, infatti, come redattore del capitolo *Logica* a Pieri subentra Padoa, uno fra i propugnatori più tenaci dell'indirizzo peaniano, sia a livello di attività scientifica che di insegnamento. Questi, in un'ottantina di pagine, fornisce una trattazione non priva di spunti nuovi, anche rispetto alla sua precedente produzione e in particolare in rapporto al suo manuale *La logique deductive dans sa dernière phase de développement* (Paris, Gauthier-Villars, 1912). È ad esempio abolita la distinzione fra la logica delle classi e quella delle proposizioni e sono introdotti tre soli concetti primitivi: uguale, et e tale che ($=$, $\cap$ e $\ni$). ([30]) Per quanto attiene

([29]) L. Berzolari a M. Pieri, 29.5.1910, in Arrighi 1997, p. 7-8.

([30]) Nel far ciò, Padoa prende le distanze dalla presentazione della logica offerta dall'edizione completa e definitiva del *Formulario* di Peano (1908, p. 3-17), che non era di tipo assiomatico. La Logica non figurava come capitolo a sé stante in nessuna delle enciclopedie e collane rivolte a insegnanti precedentemente citate. La voce *Logica* curata da Peano per il *Dizionario di cognizioni utili. Enciclopedia elementare di Scienze, Lettere, Arti, Agricoltura, Diritto, Medicina, Geografia, ecc.* (direttore F. Cosentini, v. 6, Supplemento, Torino, Utet, 1919, p. 959-960) e quella *Logica Matematica* redatta da B.

all'approccio, due sono gli elementi salienti: da una parte la scelta di Padoa di rilevare, anche con una certa *verve*, i successi dell'indirizzo ideografico italiano (I_1, p. 16, 22, 26-29, 41, 43, 47, 62, 78-79) e i suoi vantaggi rispetto alle altre correnti; dall'altra, la decisione di sorvolare sulle questioni controverse, come le antinomie, l'assioma della scelta e il teorema del buon ordinamento, anche a costo di dar luogo a un completo distacco del capitolo *Logica* da altri saggi dell'*Enciclopedia* che pure gli sarebbero stati naturalmente legati, per esempio quelli sui principi dell'aritmetica (I_1, p. 83-212), sulla teoria degli insiemi (I_2, p. 551-563) e sulla teoria delle funzioni di variabile reale.

Le reazioni della comunità italiana, all'uscita del volume dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* contenente l'articolo *Logica*, sono discordi. Pur ritenendo "giusto che questo ramo di scienza, che la Scuola del Peano pone a fondamento di ogni altra e che ha fatto anche recentemente notevoli progressi, trovi posto in una raccolta di matematiche elementari", (31) parecchi studiosi manifestano perplessità sull'approccio adottato da Padoa. Già all'interno della Scuola torinese vi è chi, come Peano, apprezza la *Logica* come "una chiara ed esauriente esposizione storica e critica, di quanto fu fatto finora", (32) ma anche chi, come G. Vacca (33) e U. Cassina, ravvisa in essa carenze e difetti. Quest'ultimo, in particolare, critica l'eccessivo peso dato all'analisi dei concetti primitivi, a discapito di quella delle proposizioni primitive. Entrambe le questioni, secondo Cassina, esulerebbero dagli scopi di una trattazione destinata a un'enciclopedia per insegnanti, e meglio sarebbe stato:

> "venire senz'altro e nel modo più semplice alla formulazione dei concetti e delle proposizioni logiche fondamentali, senza preoccuparsi troppo della loro riduzione ad un sistema completo di concetti e proposizioni primitive assolutamente indipendenti; la quale, pur essendo questione interessante ed ancora insoluta, è di pura pertinenza della logica come scienza in sé, e non della logica come introduzione alla matematica". (34)

Levi per l'*Enciclopedia Italiana di Scienze, Lettere ed Arti* Treccani (Roma, v. XXI, 1934, p. 398-401) erano invece inadatte a essere utilizzate come traccia per attività didattiche.

(31) Onofri 1929, p. 276.

(32) Accademia delle Scienze di Torino, *Cat. 3º, Adunanze di Classe e Verbali, Classe I, Mazzo 38, Verbali originali della Classe di Scienze Fisiche e Matematiche, 1920-33*, p. nn., seduta del 1.12.1929.

(33) Cfr. G. Vacca a G. Peano, 24.11.1929, Dip. di Matematica dell'Università di Torino, *Archivio Peano-Vacca*: "Non ho ancora visto l'*Enciclopedia* del prof. Berzolari, se non di sfuggita. Ho avuto l'impressione che la *Logica* del Padoa sia troppo lunga, e forse anche, per quanto me ne ha detto il Padoa stesso, non corrispondente in tutto al mio modo di vedere".

(34) Cassina 1931, p. LV.

La *Logica* di Padoa è fortemente criticata soprattutto da Enriques, che pure riconosce la rilevanza di questo ramo di studi per la formazione dei docenti. Questi rimprovera all'autore di non aver puntato a una trattazione che contemplasse sia l'aspetto 'in grande' che quello 'in piccolo' della logica, e di essersi invece chiuso "in una scuola particolare e quasi nel suo sistema attuale", rinunciando al confronto con le idee altrui e dando prova di partigianeria:

> "Approviamo *toto corde* la scelta di codesto titolo [*Logica*] che implica il concetto non esservi due diverse logiche, ad una delle quali lavorano i matematici o quei matematici che usano linguaggi simbolici, mentre l'altra sarebbe coltivata dagli altri (filosofi, o cultori delle scienze in genere o anche matematici non simbolisti). C'è una sola logica, e si capisce anche che, per il Padoa, questa tocchi la più alta espressione nella trattazione simbolica e nel suo proprio sistema. La spiegazione d'una tale veduta, col confronto delle idee altrui, sarebbe riuscita interessantissima anche e specialmente per chi ne dissenta". ([35])

In effetti, se si scorrono i riferimenti bibliografici, si resta stupiti dell'arretratezza degli orizzonti culturali di Padoa, che accenna solo di sfuggita ai problemi metamatematici più rilevanti (soffermandosi anzi quasi esclusivamente su quello dell'indipendenza) e che si dimostra poco al corrente della letteratura d'avanguardia. Basti pensare che i soli nomi menzionati nel capitolo, oltre a quelli di membri della cerchia di Peano, sono C.S. Peirce, E. Schröder, L. Couturat, B. Russell e A.N. Whitehead. Fra i 'grandi assenti' vi è D. Hilbert, a proposito del quale Padoa si limita ad asserire, in una nota a piè dell'ultima pagina del saggio:

> "giova raffrontare quanto è stato esposto con D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin, 1928. Quantunque siano citati G. Peano e il suo *Formulaire de Mathématiques* (p. 2) le medesime idee sono indicate con simboli diversi, che non sembrano preferibili (p. 3-5). (...) Senza inoltrarci nel raffronto, devesi riconoscere a D. Hilbert il grande merito di aver rimesso in onore gli studi di Logica, che da parecchi anni languivano". ([36])

Il passo è sintomatico di un sentire diffuso nell'ultima Scuola di Peano. Proprio negli anni che separano la prima bozza dalla stesura definitiva del capitolo di Padoa, si avverte infatti la progressiva miopia di alcuni allievi di Peano che coltivano forme sempre più accese di auto-celebrazione dei propri contributi, talora anche in chiave nazionalista, ([37]) e che rimangono così estranei alle

([35]) Enriques 1930, p. 40-41.

([36]) A. Padoa, *Logica*, in Berzolari - Vivanti - Gigli 1930-1949, I_1, p. 78.

([37]) Cfr. per esempio Burali-Forti 1919, p. XXXII, 109, 163, 313, 341, 359, 387, 477; G. Vacca, *La logica matematica negli ultimi cinquant'anni*, Dip. di Matematica dell'Università di Torino, *Archivio Peano-Vacca*, dattiloscritto, 1939, p. 1, 10-11.

'deviazioni' dal sistema logico ideografico, in particolare alle nuove linee di studio percorse dalle scuole anglosassoni, tedesca e polacca. ([38])

5. – I saggi sui fondamenti della matematica

Se l'introduzione di un capitolo di logica in un'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* è un elemento innovativo, molto meno lo è il fatto che essa includa dei saggi sui principi dell'aritmetica e della geometria, cui era già stato dedicato un intero volume dei *Collectanea* di Enriques. La cifra di originalità, questa volta, è data più che dal livello di spessore critico-filosofico o tecnico della trattazione, dalla volontà di finalizzare esplicitamente la presentazione dei contenuti fondazionali alla loro trasposizione didattica. ([39])

A risultare provvidenziale, in vista di un'operazione culturale di questo tipo, è una serie di avvicendamenti nelle fila dei redattori dell'*Enciclopedia*. Infatti, mentre la scelta iniziale era caduta su Enriques e Gigli per i fondamenti dell'aritmetica, e su U. Amaldi per quelli della geometria, dal 1911 vediamo subentrare a questi il solo Gigli per l'aritmetica e P. Benedetti per la geometria. In entrambi i casi si tratta di studiosi meno profondi, rispetto a Peano, Enriques, Pieri o G. Veronese, che avevano dedicato a quei temi numerosi lavori di ricerca. Essi, però, possiedono un *quid* aggiuntivo, e cioè il fatto di aver potuto testare sul campo i pregi e i limiti dell'insegnamento ipotetico-deduttivo, grazie alla loro esperienza di professori e di autori di

([38]) Il 'confronto' fra il *Formulario* di Peano e i *Grundzüge der theoretischen Logik* di D. Hilbert e W. Ackermann, abbozzato da Padoa nell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, riprende quasi alla lettera alcune affermazioni che Peano aveva indirizzato ad A. Natucci in una lettera dell'8.5.1926, conservata alla Domus Galilaeana di Pisa, nel *Fondo Natucci*.

([39]) A partire dalla fine dell'Ottocento, in Italia si erano susseguiti aspri dibattiti sull'opportunità o meno di introdurre le discussioni sui fondamenti nell'insegnamento medio-secondario. Relativamente ai fondamenti dell'aritmetica, sono innumerevoli gli articoli dedicati dai peaniani al loro utilizzo nella didattica e i manuali scolastici, da essi pubblicati, in cui si sviluppava l'aritmetica razionale sulla scorta degli studi di Peano, Padoa e Burali-Forti. A titolo d'esempio cfr. Burali-Forti 1892; Burali-Forti 1897; Burali-Forti 1897b; Padoa 1898; Burali-Forti 1898; Padoa 1902; Peano 1902; Catania 1904; Catania 1913; Padoa 1936. Peano a Torino, F. Cecioni a Pisa, U. Cassina a Milano, A. Perna a Roma dedicano inoltre interi corsi ai fondamenti dell'aritmetica (cfr. L'Enseignement mathématique, 28, 1929, p. 321; 30, 1931, p. 151; 32, 1933, p. 94; 33, 1934, p. 108). Nel 1939 A. Natucci propone infine di istituire una cattedra universitaria dedicata ai fondamenti della matematica, con speciale riguardo ai principi dell'aritmetica generale, sviluppati con metodo assiomatico o sintetico, e a quelli della teoria dei numeri (cfr. Il Bollettino di Matematica, s. 3, a. 1, 1939, p. 80). Per quanto concerne invece la trasposizione didattica degli studi sui fondamenti della geometria si veda Luciano 2012b, p. 281-301.

manuali scolastici. ([40]) L'esposizione che ne deriva, se da un lato è meno suggestiva rispetto a quella delle *Questioni*, ([41]) oltre che viziata da alcune ingenuità, dall'altro risulta più utile per valutare lo stato effettivo di penetrazione degli studi fondazionali nella classe docente del primo Novecento italiano.

L'impostazione metodologica del capitolo *Aritmetica generale* (I_1, p. 83-212) riprende gli assunti adottati da Gigli nei saggi *Riflessioni sui principi dell'aritmetica* ([42]) e *Definizioni in matematica*, ([43]) dei quali si configura, unitamente al manuale *Lezioni di aritmetica e di algebra elementare ad uso delle scuole secondarie superiori*, come un esempio di applicazione concreta.

Animato dalla convinzione che, nella didattica, occorra salvaguardare di pari passo le istanze del rigore logico deduttivo della trattazione e le esigenze dell'aderenza alla realtà psicologica dei concetti e delle costruzioni matematiche oggetto di studio, Gigli sceglie di declinare il suo saggio secondo un doppio registro.

Dopo una breve introduzione, dedicata alla distinzione fra numeri astratti e concreti, agli aspetti storico-matematici di tali concetti e alla critica della manualistica di aritmetica per la scuola, la trattazione si scinde in tre filoni: una prima parte rivolta ai numeri naturali, una seconda dedicata ai numeri assoluti e una terza incentrata su quelli relativi e complessi. Alla dimostrazione della trascendenza di e e di π, considerata un tema di matematiche elementari da un punto di vista superiore, è riservata un'appendice posta al termine del capitolo.

Per ciascuna specie numerica è svolta dapprima la teoria sintetica e poi quella analitica. Gigli è attento a non esprimere giudizi di merito o commenti sulla preferibilità di adottare in classe un approccio o l'altro. Tuttavia, un lettore attento non ha difficoltà a cogliere che le sue preferenze vanno al metodo combinatorio di A. Capelli per i naturali, alle teorie sintetiche per gli interi e per i razionali, e alla costruzione dei reali tramite sezioni di Dedekind.

L'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* valorizza ampiamente i contributi della Scuola di Peano, che fin dagli anni '90 aveva ribadito proprio il risvolto didattico del campo di ricerche fondazionali. ([44]) Ecco allora che, passando in rassegna le definizioni assiomatiche di numero reale, Gigli ricorda che:

([40]) In particolare si ricordano i seguenti testi: Gigli 1921-1931; Benedetti, Rosati 1925.

([41]) Basti citare, a titolo d'esempio, la maggior profondità di analisi critica e storico-matematica delle pagine delle *Questioni* dedicate da Enriques al continuo o ai numeri non archimedei (p. 361-363, 364-383, 383-398), temi assenti dall'articolo di Gigli curato per l'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, e cui si accenna solo di sfuggita nei capitoli redatti da G. Vivanti (I_2, p. 554-555, 560-562) e da G. Fano (II_2, p. 499-504) per la medesima *Enciclopedia*.

([42]) Gigli 1925-26, p. 215-237.

([43]) Gigli 1926-27, 8 p.

([44]) Cfr. Peano 1891, p. 87-102, 256-267; 1894, p. 51-90; 1910, p. 31-37.

"Rappresentante principale dell'indirizzo assiomatico è G. Peano, che ha in Italia una Scuola e che in Italia e fuori ha esercitato una grande influenza sullo sviluppo degli studi critici intorno ai fondamenti delle Matematiche. (...) La teoria sintetica dei numeri reali è stata espressa da C. Burali-Forti nelle forme usate dalla Logica matematica". ([45])

Sezioni specifiche sono poi dedicate alle definizioni sintetiche dei numeri interi, razionali e reali "nella logica matematica" (p. 141-142), alla teoria analitica operatoria di Peano per i razionali (p. 144-147), ai razionali come classi di coppie di interi secondo i lavori di A. Padoa (p. 147-149), ai reali introdotti come limiti superiori di classi di razionali, seguendo gli scritti di Peano (p. 153-154) e, ancora, ai contributi di Peano e di Padoa inerenti i numeri relativi (p. 173-174, 175).

Fra gli elementi di pregio dell'*Aritmetica generale* di Gigli spicca l'inusuale ricchezza di riferimenti bibliografici che includono – accanto ai classici lavori di Weierstrass, Cantor, Peano, Enriques, Frege e Dedekind (nella traduzione italiana curata da O. Zariski nel 1926) – alcuni manuali e trattati scolastici in cui sono confluiti i risultati della critica fondazionale, in particolare i testi di Peano (1902), Capelli (1902), S. Catania (1915), M. Cipolla (1914), G. Scorza (1921), D. Gigli (1921-31), e alcune autentiche rarità bibliografiche, come un contributo di A. Grandi del 1874-75, apparso nelle *Cronache del R. Liceo Forteguerri di Pistoia*, a proposito del quale Gigli afferma che gli si deve "riconoscere il merito d'aver intrapreso a far conoscere in Italia le teorie ricordate" di Weierstrass, Cantor e Dedekind sui reali (p. 158).

Parimenti indicativo è il quadro offerto dall'*Enciclopedia* a proposito della cosiddetta 'geometria razionale', illustrata da P. Benedetti e da E. Artom ([46]) nei capitoli *Fondamenti di geometria* (II_1, p. 3-47) e *Proprietà elementari delle figure del piano e dello spazio* (II_1, p. 51-118). In entrambi i casi, infatti, i due autori mostrano di saper declinare la geometria euclidea nella duplice veste di sistema assiomatico-deduttivo e di fisica matematica dell'estensione, illustrando le riflessioni di M. Pasch e G. Veronese, quelle della scuola peaniana e gli adattamenti che ne erano stati dati in manuali per l'insegnamento secondario, quali quelli di P. Gazzaniga e G. Veronese (1877), F. Enriques e U. Amaldi (1903), M. De Franchis (1909), C. Rosati e P. Benedetti (1925), e F. Palatini (1920). In questo caso, tuttavia, le preferenze appaiono più decisamente orientate verso il volume *Grundlagen der Geometrie* di D. Hilbert, che è seguito come testo di riferimento. Tutt'altro che scontata risulta la scelta di Benedetti di dedicare alcune sezioni del capitolo a delicati problemi metama-

([45]) D. Gigli, *Aritmetica generale*, in Berzolari - Vivanti - Gigli 1930-1949, I_1, p. 95, 141.

([46]) Ricordiamo, fra l'altro, che Artom era stato allievo di Peano, durante gli studi universitari, e aveva continuato a seguire le iniziative del logico cuneese rivolte alla scuola, partecipando ad esempio alle Conferenze Matematiche Torinesi (1915-1925).

tematici, quali la compatibilità dei gruppi di assiomi hilbertiani (p. 18-19, 26, 27-28, 30), la loro indipendenza e completezza (p. 33-35).

Il sostanziale favore con cui risulta giudicato, nell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, l'utilizzo degli studi fondazionali nell'ambito della didattica attiva e, ancor più, nel quadro della formazione culturale dei docenti, contribuisce ad alimentare alcune critiche, fra cui quelle di Enriques, che asserisce nella recensione curata per il *Periodico di Matematiche*:

> "l'esposizione dell'argomento (...) non aveva da conformarsi a vedute subiettive, anzi doveva seguire un ordine storico, cominciando dal rilevare i presupposti dell'Euclide che i critici moderni hanno cercato di enunciare nella loro assiomatica: in mancanza di un tale ordine i diversi sistemi di postulati rischiano di apparire senza connessione fra loro, e i giudizi che vi si riferiscono non riesciranno prospettati nella giusta luce. La critica fatta al Benedetti si estende anche all'Artom (...). Anzi questo autore aveva tanto meno motivo di ordinare la sua esposizione secondo un particolare sistema di postulati, che dovrebbe farsi ricevere dal lettore come presupposto. Ciò che vi è d'arbitrario nel suo procedimento appare per esempio nella dimostrazione del primo criterio dell'eguaglianza dei triangoli, ([47]) che, seguendo non so quale trattato ipercritico, si allontana a dire il vero dalla semplicità e dal buon gusto. Mi auguro che queste osservazioni sieno tenute in conto dai redattori dei volumi in preparazione, e in ispecie di quello che concernerà le questioni didattiche: l'*Enciclopedia* deve fornire al lettore un'informazione quanto è possibile obiettiva dei varii indirizzi e criterii scientifici, logici e didattici: i redattori non hanno il compito di risolvere, secondo un proprio criterio questioni disputate, che sono passibili soltanto d'un giudizio storico di là del presente". ([48])

Quest'invito è, di fatto, recepito da Berzolari, che incarica G. Giorgi di completare il saggio di Benedetti, entrando nel merito delle ragioni storiche e filosofiche alla base dei vari indirizzi di studi sui fondamenti della geometria, e discutendo in particolare le caratteristiche di quelli fisico-sperimentale, psicologico

([47]) Cfr. E. Artom, *Proprietà elementari delle figure del piano e dello spazio*, in Berzolari - Vivanti - Gigli 1930-1949, II_1, p. 72: "Se in due triangoli due lati dell'uno sono rispettivamente uguali a due lati dell'altro e l'angolo compreso fra i primi due è uguale all'angolo compreso fra gli altri due, i due triangoli sono uguali. Siano ABC, $A'B'C'$ i due triangoli e sia per ipotesi: $< ABC = < A'B'C'$; $AB = A'B'$; $BC = B'C'$. Fra le due corrispondenze di uguaglianza che intercedono fra i due angoli, si scelga quella che alle semirette BA, BC fa corrispondere rispettivamente le B'A', B'C'; allora ai punti A e C dovranno corrispondere i punti A' e C', quindi i due triangoli ABC e $A'B'C'$ saranno figure corrispondenti nell'uguaglianza che intercede fra i due detti angoli e perciò saranno figure uguali. In conseguenza $AC = A'C'$; $< BAC = < B'A'C'$; $< BCA = < B'C'A'$". Una dimostrazione di questo tipo compariva ad esempio nei manuali di De Franchis 1909, p. 89 e di Benedetti, Rosati 1925, p. 28-29.

([48]) Enriques 1937, p. 113.

e astratto-teoretico. ([49]) Per quanto concerne invece la trasposizione degli studi sui fondamenti nel campo dell'educazione, è L. Brusotti – subentrato a G. Scorza e ad A. Frajese come redattore del saggio *Questioni didattiche* (III_2, p. 887-973) – a dare prova di equanimità, dedicando specifici paragrafi del suo articolo sia alle istanze avanzate dalla Scuola di geometria italiana (l'educazione alla scoperta, la valorizzazione delle facoltà creative e di intuizione), ([50]) sia agli assunti difesi dalla compagine 'avversaria', e cioè dai sostenitori dell'educazione al rigore, finalizzata allo sviluppo delle capacità logico-deduttive. ([51]) In particolare, per quanto concerne la didattica dell'aritmetica razionale, Brusotti condivide molti dei giudizi tacitamente formulati da Gigli (III_2, p. 928-930), mentre raccomanda ai docenti maggiore prudenza in merito alla scelta di sviluppare in classe la geometria euclidea come sistema assiomatico-deduttivo (III_2, p. 922-924).

6. – Conclusioni e problemi aperti

Dall'esame fin qui tracciato emerge l'importanza dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* per valutare la formazione degli insegnanti di matematica in Italia nella prima metà del XX secolo, in rapporto ai profondi mutamenti del contesto istituzionale, scientifico e metodologico, soprattutto per quanto attiene i temi logico-fondazionali.

Altrettanto evidente è il riscontro che l'*Enciclopedia*, più ancora di altre collane miscellanee coeve, seppe profittare della collaborazione di tutte le 'Scuole' italiane, giocando un ruolo chiave nella costruzione dell'identità di alcune tradizioni di studi e, in particolare, valorizzando e diffondendo il pensiero della Scuola di Peano.

Restano invece ancora da indagare ulteriormente le derive di stampo nazionalista che si avvertono a tratti nell'*Enciclopedia* e che danno luogo ad atteggiamenti di esaltazione delle glorie scientifiche italiane. ([52])

([49]) Cfr. G. Giorgi, *Sui Fondamenti della geometria*, in Berzolari - Vivanti - Gigli 1930-1949, III_2, p. 977-1014. Tale capitolo è il frutto di tre conferenze tenute al seminario matematico di Roma, già apparse sul Bollettino della Mathesis nel 1912 (p. 29-44, 74-91, 105-119), nelle quali l'autore aveva messo a frutto i suoi contatti con V. Volterra, F. Enriques, G. Castelnuovo, T. Levi-Civita, R. Marcolongo e F. Severi.

([50]) L. Brusotti, *Questioni didattiche*, in Berzolari - Vivanti - Gigli 1930-1949, III_2, p. 892, 917-918, 969.

([51]) *Ibidem*, p. 892, 900-902, 924-925, 937, 955, 959, 968.

([52]) Del resto più volte, negli anni Trenta e Quaranta, l'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari* è pubblicizzata come "opera interamente italica". Cfr. per esempio Severi 1943, p. 83-91.

Parimenti aperta rimane la disamina dell'utilizzo effettivo dell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, sia nei corsi universitari rivolti agli insegnanti sia nell'attività professionale, negli anni della dittatura fascista e nella complessa fase di riordino del sistema scolastico italiano, durante il secondo dopoguerra.

BIBLIOGRAFIA

AA.V.V. 1934, *In memoria del Prof. Duilio Gigli*, Pisa, Nistri-Lischi, 1934, 39 p.

ARRIGHI G. (a cura di) 1997, *Lettere a Mario Pieri*, Milano, Univ. Bocconi, Quaderni Pristem n. 6.

ASCOLI G. 1954, *Lezioni di matematiche complementari*, Torino, Gheroni.

BENEDETTI P., ROSATI C. 1925, *Geometria*, Napoli, Perrella.

BENNETT A. 1930, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari* I_1, The American Mathematical Monthly, 37 (7), p. 378-380.

BERZOLARI L. 1924, *Intorno alla pubblicazione di una Enciclopedia delle matematiche elementari*, 20.12.1923, Bollettino dell'UMI, s. 1, 3, p. 47.

BERZOLARI L., BONOLA R. 1909, *Allegato E. Sopra una Enciclopedia di Matematiche Elementari da pubblicarsi sotto gli auspici della Mathesis, Relazione della Commissione Direttiva dell'opera*, in *Atti del 2. Congresso della Mathesis, Società italiana di matematica*, Padova, Società Cooperativa Tipografica, p. 1-5, 43-45.

BERZOLARI L. - VIVANTI G. - GIGLI D. (a cura di) 1930-1949, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, 3 voll., Milano, Hoepli, I_1, 1930; I_2, 1932; II_1, 1937; II_2, 1938; III_1, 1949; III_2 1949; III_3, 1950.

BOMPIANI E. 1937, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari* II_1, Bollettino dell'UMI, s. 1, 16, p. 155-156.

BOMPIANI E. 1950, *Commemorazione del Socio Luigi Berzolari*, Rendiconti Sc. Fis. Mat. e Nat. Lincei, IX, p. 396-410.

BONOLA R. 1909a, *Sunto della relazione sul tema: Per la pubblicazione di una Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Bollettino della Mathesis, I, p. 40-42.

BONOLA R. 1909b, *Per la pubblicazione di una Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane (Battaglini), 47 [2, 16], p. 343-344.

BRUSOTTI L. 1934, *Duilio Gigli. Cenno necrologico pubblicato nell'Annuario della R. Università di Pavia 1933-34*, Pavia, Tip. Cooperativa, 1934, 5 p.

BRUSOTTI L. 1935, *Duilio Gigli. Parole commemorative lette in un'aula del R. Liceo-Ginnasio 'Ugo Foscolo' l'11 maggio 1934*, Pavia, Tip. Moderna, 7 p.

BRUSOTTI L. 1936, *Luigi Berzolari. Cenni biografici*, in *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, Istituto matematico della R. Università, p. XXI-XXIX.

BURALI-FORTI C. 1892, *Aritmetica razionale per gli istituti tecnici*, Torino, Petrini.

BURALI-FORTI C. 1897, *Lezioni di Aritmetica pratica ad uso delle scuole secondarie inferiori*, Torino, Petrini, 1901^2, 1904^3, 1907^4, 1910^5, 1913^6.

BURALI-FORTI C. 1897b, *Note scientifiche e critiche alle lezioni di aritmetica pratica*, Torino, Petrini-Gallizio.

BURALI-FORTI C. 1898, *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari*, Torino, Gallizio.

BURALI-FORTI C. 1919, *Logica Matematica*, Milano, Hoepli, 2ª ed.

CASSINA U. 1931, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari* I_1, Il Bollettino di Matematica (Conti), 27, p. LIII-LVIII.

CASSINA U. 1932, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari I_2*, Il Bollettino di Matematica (Conti), 28, p. LXVII-LXX.

CATANIA S. 1904, *Aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie superiori*, Catania, Giannotta.

CATANIA S. 1913, *Sui metodi d'insegnamento della matematica nelle scuole medie*, Bollettino della Mathesis, 5, p. 142-143.

CINQUINI S. 1950, *G. Vivanti*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo. Accademia di Scienze e Lettere, Parte Generale e Atti Ufficiali, 78, p. 184-205.

DE FRANCHIS M. 1909, *Geometria elementare*, Milano, Sandron.

ENRIQUES F. 1930, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari I_1*, Periodico di Matematiche, s. 4, 10, p. 39-41.

ENRIQUES F. 1937, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari II_1*, Periodico di Matematiche, s. 4, 17, p. 112-113.

FANO G. 1922, *Le scuole di magistero*, in *Atti della Società italiana di Matematiche "Mathesis"*, Periodico di Matematiche, s. 4, 2, p. 102-111.

FURINGHETTI F., GIACARDI L. 2012, *Secondary school mathematics teachers and their training in pre- and post-unity Italy (1810-1920)*, ZDM, 44, 4, p. 537-550.

GIGLI D., 1921-1931, *Lezioni di aritmetica e di algebra elementare ad uso delle scuole secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli.

GIGLI D. 1925-26, *Riflessioni sui principi dell'aritmetica*, Annuario del R. Liceo-Ginnasio Ugo Foscolo di Pavia, 3, Pavia, Tipografia cooperativa, p. 215-237.

GIGLI D. 1926-27, *Definizioni in matematica*, Annuario del R. Liceo Ginnasio Ugo Foscolo di Pavia, 4, Pavia, Istituto Pavese di arti Grafiche, 8 p.

GISPERT H. 1999, *Les débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'enterprise encyclopédique de Felix Klein et Jules Molk*, Historia Mathematica, 26, p. 344-360.

GISPERT H. 2001, *The German and French editions of the Klein-Molk Encyclopedia: contrasted images* in U. Bottazzini, A. Dahan Dalmedico (a cura di), *Changing Images of Mathematics: From the French Revolution to the new millennium*, London, Routledge, p. 93-112.

GISPERT H., VERLEY J.L. 2000, *L'encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, (1904-1916): traduire ou adapter l'entreprise de Felix Klein*, Paris, Springer.

GOLDSTEIN C. 2001, *Sur quelques pratiques de l'information mathématique*, Philosophia Scientiae, 5, 2, p. 125-160.

LUCIANO E. 2010, *Sulla didattica della Logica Matematica: dalle conferenze di A. Padoa (1898) all'istituzione dei corsi ufficiali (1960)*, in C.S. Roero (a cura di), *Peano e la sua Scuola fra matematica, logica e interlingua. Atti del Congresso internazionale di Studi (Torino 6-7 ott. 2008)*, Centro di Studi per la Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti XVI, Torino, Dep. Sub. Storia Patria, p. 279-315.

LUCIANO E. 2012, *The Enciclopedia delle Matematiche elementari and the Contributions of Bolognese Mathematicians*, in S. Coen (a cura di), *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Basel, Birkhäuser, p. 343-372.

LUCIANO E. 2012b, *The proposal of the School of Peano on the rational teaching of geometry* in K. Bjarnadottir, F. Furinghetti, J. Matos, G. Schubring (a cura di), *Dig where you stand 2. Proceeedings of the Second International Conference on the History of Mathematics Education*, Lisbona, Portugal, p. 281-301.

LUCIANO E., ROERO C.S. (a cura di) 2012, *From Turin to Göttingen: Dialogues and Correspondence (1879-1923)*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XXXII, 1, p. 7-232.

NASTASI P., SCIMONE A. (a cura di) 1995, *Lettere a Giovanni Vacca*, Palermo, Quaderni Pristem n. 5.

ONOFRI, L. 1929, *Enciclopedia delle Matematiche Elementari* I_1, Bollettino dell'UMI, s. 1, 8, p. 276-277.

PADOA A. 1898, *Note critiche al libro di aritmetica e di algebra elementare di Paolo Gazzaniga*, Pinerolo, Chiantore-Mascarelli.

PADOA A. 1902, *Logica matematica e matematica elementare*, in *Atti del Secondo Congresso dei Professori di Matematica delle scuole secondarie, tenuto in Livorno nei giorni 17-22 agosto 1901*, Livorno, Giusti, p. 186-200.

PADOA A. 1936, *Logica, Aritmetica, Geometria*, Periodico di Matematiche, s. 2, 16, p. 15-16.

PALLADINO F., PALLADINO N. (a cura di) 2006, *Dalla 'moderna geometria' alla 'nuova geometria italiana'. Viaggiando per Napoli, Torino e dintorni. Lettere di Sannia, Segre, Peano, Castelnuovo, D'Ovidio, Del Pezzo, Pascal e altri a Federico Amodeo*, Firenze, Olschki.

PEANO G. 1891, *Sul concetto di numero*, Rivista di Matematica, 1, p. 87-102, 256-267.

PEANO G. 1894, *Sui fondamenti della Geometria*, Rivista di Matematica, 4, p. 51-90.

PEANO G. 1902, *Aritmetica generale e algebra elementare*, Torino, Paravia.

PEANO G. 1910, *Sui fondamenti dell'Analisi*, Bollettino della Mathesis, Padova, giugno, p. 31-37.

ROLLET L., NABONNAND P. 2002, *Une bibliographie mathématique idéale? Le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, Gazette des mathématiciens, 92, p. 11-26.

SEVERI F. 1943, *La Matematica Italiana nell'ultimo ventennio*, Gli Annali della Università d'Italia, IV, p. 83-91.

Sezione Lombarda Mathesis 1909, *Adunanza 23 Maggio 1909*, Bollettino della Mathesis, I, p. 35-37, 48.

VIVANTI G. 1933, *Duilio Gigli*, Periodico di Matematiche, s. 4, 13, p. 255-256.

VON DYCK W. 1908, *Die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Vortrag gehalten auf dem IV Internationalen Mathematiker Kongress in Rom am 7. April 1908*, Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung, 17, 1908, p. 213-227.

Erika Luciano
Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università di Torino
Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino
e-mail: erika.luciano@unito.it

Received December 28, 2012 and in revised form December 8, 2013

Marco Maggis: Dualità completa per misure di rischio dinamiche quasiconvesse su moduli di variabili aleatorie

Marco Frittelli
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano
Marco Maggis[1]
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano
email: marco.maggis@gmail.com

Sunto

Il concetto di modulo su un anello di funzioni appare nel panorama della ricerca matematica intorno agli anni Cinquanta; solo nel 2009 Filipovic et al. hanno dato un nuovo impulso a tale teoria dimostrando una versione del Teorema di Separazione di Hahn Banach, per moduli definiti su un anello di variabili aleatorie. Molti risultati di Finanza Matematica si basano infatti su di esso, dalla Teoria del Non Arbitraggio ai risultati di dualità per Misure di Rischio o massimizzazione dell'utilità.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità: per ogni $p \in [1, +\infty)$ definiamo

$$L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) =: \{X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \|X|\mathcal{G}\|_p \in L^0(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})\}$$

dove la norma $\|\cdot|\mathcal{G}\|_p : \overline{L}^0_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) \to \overline{L}^0_+(\mathcal{G})$ è data da $\|X|\mathcal{G}\|_p =: \lim_{n\to\infty} E[|X|^p \wedge n|\mathcal{G}]^{\frac{1}{p}}$.
$(L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}), \|\cdot|\mathcal{G}\|_p)$ è un modulo normato su $L^0(\mathcal{G})$ che ha la struttura prodotto:

$$L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = L^0(\mathcal{G})L^p(\mathcal{F}) = \{YX \mid Y \in L^0(\mathcal{G}),\ X \in L^p(\mathcal{F})\}$$

In tale modello $L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$ rappresenta l'insieme di variabili aleatorie $\mathcal{F}$ misurabili di cui si vuole stimare il rischio ad un certo tempo intermedio $t > 0$. $\mathcal{G}$ è una sotto $\sigma-$algebra di $\mathcal{F}$ che rappresenta le informazioni a disposizione all'istante t: a tale istante tutte le variabili $\mathcal{G}$ misurabili saranno note e giocheranno la parte delle costanti nel processo di diversificazione delle strategie. In tale contesto è possibile garantire una rappresentazione robusta delle misure di rischio dinamiche quasiconvesse, stabilendo una dualità completa tra la mappa ρ e la sua funzione duale R.

Teorema. *Una misura di rischio $\rho : L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) \to L^0(\mathcal{G})$ è monotona descrente, regolare e monotona descrescente se e soltanto se*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^q} R\left(E\left[-\frac{dQ}{d\mathbb{P}}X|\mathcal{G}\right], Q\right)$$

[1]Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2008 Probability and Finance prot. 2008YYYBE4

dove $R(Y,Q) = \inf_{\xi \in L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})} \left\{ \rho(\xi) \mid E\left[-\xi \frac{dQ}{d\mathbb{P}} | \mathcal{G} \right] = Y \right\}$ *è l'unica nella classe duale* $\mathcal{M}$.

Bibliografia

[1] D. Filipovic, M. Kupper e N. Vogelpoth: "Separation and duality in locally L^0-convex modules", *J. Funct. Anal.* , Vol**256**(12), 3996-4029, 2009.

[2] M. Frittelli e M. Maggis: "Dual representation of quasiconvex conditional maps", forthcoming on *SIAM J. Fin. Math.*, 2011.

Intervento: Marco Maggis,
The Dynamics of Risk Beyond Convexity,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 441–457**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 441-457

The Dynamics of Risk Beyond Convexity

MARCO MAGGIS

Abstract. – *We outline the history of Risk Measures from the original formulation given by Artzner Delbaen Eber and Heath until the more recent research on quasiconvex Risk Measures. We therefore present some novel results on quasiconvex Risk Measures in the conditional setting, focusing on two different approaches: the vector space compared to the module approach. In particular the second one will guarantee a complete duality theory which is a key ingredient in the representation of risk preferences.*

1. – Introduction: the axiomatic birth of risk measurement

What is Risk?

Due to the recent financial crisis which has sunk the trust and optimism of people towards financial markets, Risk has become one of the most used and misused words in everyday life. Nevertheless a rigorous mathematical definition of Risk is a delicate issue even for financial practitioners.
A seminal contribution to this topic was surprisingly given by Daniel Bernoulli in 1738, who perceived the role of the risk aversion in everyday life decision making. This was the starting point of the notion of *Expected Utility*.

'*The determination of the value of an item must not be based on its price, but rather on the utility it yields. The price of the item is dependent only on the thing itself and is equal for everyone; the utility, however, is dependent on the particular circumstances of the person making the estimate. Thus there is no doubt that a gain of one thousand ducats is more significant to a pauper than to a rich man though both gain the same amount.*

[...] *Now it is highly probable that any increase in wealth, no matter how insignificant, will always result in an increase in utility which is inversely proportionate to the quantity of goods already possessed.*

[...] *First, it appears that in many games, even those that are absolutely fair, both of the players may expect to suffer a loss; indeed this is Nature's admonition to avoid the dice altogether....This follows from the concavity of curve. [...] It is clear that the disutility which results from a loss will always exceed the expected gain in utility.*'

(D. Bernoulli, *Exposition of a new theory on the measurement of risk*, [3], English translation by L. Sommer).

The formulation of these ideas in a modern notation leads directly to the well known representation of Agents' beliefs in terms of an expected utility as studied by Von Neumann and Morgenstern [20]: let $L^\infty =: L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be the space of essentially bounded random variables over a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ then for any $X, Y \in L^\infty$, X is preferred to Y if and only $E_{\mathbb{P}}[u(X)] \geq E_{\mathbb{P}}[u(Y)]$. Here $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is a monotone increasing concave utility function as suggested by Bernoulli, which describes the agent attitude towards Risk.

Later on, in a financial environment, many risk procedure were introduced. It was the case of the *Mean-Variance* criterion (Markovitz, 1952, [17]), the *Sharpe's ratio* (1964, [18]) and the *Value at Risk* ($V@R$), defined through the quantiles of a given distribution with a predefined level of probability. This last method is the most employed in credit institutes and has been pointed out as the reference parameter by the Basel Committee on Banking Supervision (Basel II 2006). More in detail, for a given random variable X and a parameter $\lambda \in (0, 1)$ (usually $\lambda = 0.01$) we have

$$V@R_\lambda(X) := -\sup\{m \in \mathbb{R} \mid P(X \leq m) \leq \lambda\}.$$

The capital requirement $V@R_\lambda(X)$ due to the risk exposure of position X is therefore the necessary amount of money to cover eventual losses greater than m which occur with probability $(1 - \lambda)$. Unfortunately we will be dangerously affected to all the other losses (those that are under level m), which are rare events of probability λ.

Modern Developments

At the end of the Nineties, Artzner, Delbaen, Eber and Heath [2] produced a rigorous axiomatic formalization of coherent risk measures, led by normative intent. The regulating agencies asked for computational methods to estimate the capital requirements, exceeding the unmistakable lacks showed by the extremely popular $V@R$. The key idea was to provide a set of axioms that any reasonable risk measure should have, instead of analyzing each single risk measure.

Risk Measures are real valued functionals defined on a space of random variables which encloses every possible financial position. It may seem naive to use a single number to describe the complexity of the distributions characterizing those random variables. On the other hand this appears as the only way to succeed in the assessment of the capital requirement needed to a bank to recover a high possible loss due to risky investments.

The definition of a *coherent risk measure* requires four main hypotheses to be satisfied:

DEFINITION 1. – *A coherent risk measure is a functional* $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ *which satisfies*

(i) *monotonicity, i.e.* $X_1 \leq X_2$ $\mathbb{P}$*-a.s. implies* $\rho(X_1) \geq \rho(X_2)$ *for every* $X_1, X_2 \in L^\infty$,
(ii) *cash additivity, i.e.* $\rho(X + c) = \rho(X) - c$,
(iii) *positive homogeneity, i.e. for every* $\alpha > 0$, $\rho(\alpha X) = \alpha\rho(X)$,
(iv) *sublinearity*, i.e. $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Monotonicity represents the minimal requirement for a risk measure to model the preferences of a rational agent. Assumption (ii) allows an important characterization of Risk as

$$\rho(X) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid X + \alpha \in \mathcal{A}\}. \tag{1}$$

The Risk of a financial position is thus the minimal amount of money that an institution will have to sum up to X in order to make it acceptable with respect to some *criterium* modelled by the Acceptance Set $\mathcal{A} = \{X \in L^\infty \mid \rho(X) \leq \rho(0)\}$.

Unfortunately both axioms (iii) and (iv) appear to be restrictive and unrealistic: the former does not sense the presence of liquidity risks, the latter does not describe the real intuition hidden behind the diversification process. For this reason in most of the literature (iii) and (iv) are substituted by

(v) *convexity*, i.e. $\rho(tX_1 + (1-t)X_2) \leq t\rho(X_1) + (1-t)\rho(X_2)$ for all $t \in [0, 1]$.

Axiom (v) has a natural interpretation: the risk of the diversified aggregated position $tX_1 + (1-t)X_2$ is surely smaller than the combination of the two single risks.

The class of convex Risk Measures was independently studied by Föllmer and Schied (2002, [9]) and Frittelli and Rosazza Gianin (2002, [14]).

Further developments were provided by El Karoui and Ravanelli relaxing the cash additivity axiom to cash subadditivity (2009, [7]) when the market presents a stochastic discount factor; finally Cerreia-Vioglio et al. (2010, [5]) showed how quasiconvexity better describes than convexity the principle of diversification, whenever cash additivity does not hold true. Following this trajectory we may conclude that the largest class of feasible Risk Measure is the following.

DEFINITION 2. – *A quasiconvex risk measure is a functional* $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ *which satisfies*

(i) *monotonicity, i.e.* $X_1 \leq X_2$ *implies* $\rho(X_1) \geq \rho(X_2)$ *for every* $X_1, X_2 \in L^\infty$,
(vi) *quasiconvexity, i.e.* $\rho(tX_1 + (1-t)X_2) \leq \max\{\rho(X_1), \rho(X_2)\}$ *for all* $t \in [0, 1]$.

To better explain the quasiconvexity assumption we consider two random variable $X_1, X_2 \in L^\infty$ such that $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$. (vi) is the literal translation of the

diversification principle: actually diversification over a proportion t of the position X_1 and the remaining proportion on the position X_2 (namely $tX_1 + (1-t)X_2$) should not increase the risk for more than $\rho(X_2)$.

On the other hand it is important to recall that under the cash additive assumption (ii) we deduce that quasiconvexity and convexity are equivalent. As a matter of fact quasiconvexity assumes a primary role in those markets for which the zero coupon bond is illiquid, and cash additivity needs to be dropped.

2. – Risk Measures in the Conditional Setting

Most of the applications that concern with decisions in the future are based on the notion of sigma algebra, which is the main probabilistic tool aimed to the description of the information available to the agent. As a consequence the Conditional Expectation, which is the simplest example of conditional map, appears as the 'red line' that distinguishes Probability from Analysis. The conditional expectation $E_{\mathbb{P}}[X|\mathcal{G}]$ filters a random variable X with the information provided by the sigma algebra $\mathcal{G}$, giving a sort of backward projection of X. In the dynamic description of Risk, we have the following situation: let $0 \leq t \leq T$

$$
\begin{array}{rccccc}
\text{Time Line} & 0 & \rightsquigarrow & t & \rightsquigarrow & T \\
\text{Filtration} & \sigma(\emptyset) & \rightsquigarrow & \mathcal{G} & \rightsquigarrow & \mathcal{F} \\
\text{Static Risk Measure} & \rho_0(X) & \leftleftarrows & \leftleftarrows & \leftleftarrows & X \\
\text{Conditional Risk Measure} & & & \rho_t(X) & \leftleftarrows & X
\end{array}
\tag{2}
$$

where $\sigma(\emptyset)$ is the trivial σ-algebra. In the dynamic framework the risk assessment at the intermediate time t deals with a future decision and is thus described by a $\mathcal{G}$ measurable random variable $\rho_t(X)$. This means that any Risk Measure has to be a map that takes value in a set of random variables as will be properly formalized in the next paragraphs and in Section 4.

Notations

The probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is fixed throughout this paper and $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ is any sigma algebra contained in $\mathcal{F}$. We denote with $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = L^0(\mathcal{F})$ (resp. $L^0(\mathcal{G})$) the space of $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) measurable random variables that are $\mathbb{P}$ a.s. finite, whereas by $\bar{L}^0(\mathcal{F})$ the space of extended random variables which may take values in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. In general since $(\Omega, \mathbb{P})$ are fixed we will always omit them in the notation. We define $L^0_+(\mathcal{F}) = \{X \in L^0(\mathcal{F}) \mid X \geq 0\}$ and

$L^0_{++}(\mathcal{F}) = \{X \in L^0(\mathcal{F}) \mid X > 0\}$. We remind that all equalities/inequalities among random variables are meant to hold $\mathbb{P}$-a.s.. As the expected value $E_{\mathbb{P}}[\,\cdot\,]$ is mostly computed w.r.t. the reference probability $\mathbb{P}$, we will often omit $\mathbb{P}$ in the notation.

Moreover the essential ($\mathbb{P}$ almost surely) *supremum ess* $\sup_\lambda (X_\lambda)$ of an arbitrary family of random variables $X_\lambda \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ will be simply denoted by $\sup_\lambda (X_\lambda)$, and similarly for the essential *infimum*. The symbol $\vee$ (resp. $\wedge$) denotes the essential ($\mathbb{P}$ almost surely) *maximum* (resp. the essential *minimum*) between two random variables, which are the usual lattice operations.

Capital Requirements in the conditional setting

As explained in the Introduction (see equation (1)) the cash additivity assumption guarantees the characterization of the Risk as a capital required to cover future losses or equivalently the minimal amount of money that we have to add so that the position becomes acceptable. Using the same notation as in (2) we consider $t \in [0, T]$ and a non empty convex set $C_T \in E \subset L^0(\mathcal{F})$ such that $C_T + L^0_+ \subseteq C_T$. The set C_T represents the future positions considered acceptable by the supervising agency. For all $m \in \mathbb{R}$ denote by $v_t(m, \omega)$ the price at time t of m euros at time T. The function $v_t(m, \cdot)$ will be in general $\mathcal{G}$ measurable as in the case of stochastic discount factor where $v_t(m, \omega) = D_t(\omega)m$. By adapting the definitions in the static framework of [2] and [5] we set:

$$\rho_{C_T, v_t}(X) := \inf_{Y \in L^0(\mathcal{G})} \{v_t(Y) \mid X + Y \in C_T\}. \tag{3}$$

Notice that the previous definition is well posed only if the sum $X + Y \in E$ for any $X \in E$ and any $Y \in L^0(\mathcal{G})$. In some sense $Y \in L^0(\mathcal{G})$ plays the role that $\alpha \in \mathbb{R}$ had in equation (1), but since it concerns a future decision then it has to be a $\mathcal{G}$ measurable random variable. For this reason we need to introduce the more complex structure of module over the ring $L^0(\mathcal{G})$ as will be soon explained. Once the opportune structure E is provided equation (3) defines a Risk Measure $\rho_{C_T, v_t} : E \to \overline{L}^0(\mathcal{G})$. When v_t is linear, then ρ_{C, v_t} is a convex cash additive dynamic risk measure, but the linearity of v_t may fail when zero coupon bonds with maturity T are illiquid. It seems anyway reasonable to assume that $v_t(\cdot, \omega)$ is increasing and upper semicontinuous and $v_t(0, \omega) = 0$, for $\mathbb{P}$ almost every $\omega \in \Omega$. In this case

$$\rho_{C_T, v_t}(X)(\omega) = v_t\Big(\inf_{Y \in L^0(\mathcal{G})} \{Y(\omega) \mid X + Y \in C_T\}, \omega\Big) = v_t(\rho_{C_T}(X)(\omega), \omega),$$

where $\rho_{C_T}(X)$ is the convex monetary dynamic risk measure induced by the

set C_T namely

$$\rho_{C_T}(X) := \inf_{Y \in L^0(\mathcal{G})} \{Y \mid X + Y \in C_T\}.$$

Thus in general ρ_{C_T, v_t} is neither convex nor cash additive, but it is always quasiconvex.

3. – Current literature on L^0-modules

This section is inspired by the contribution given to the theory of L^0 -modules by Filipovic et al. [8] on one hand and on the other to the extended research provided by Guo from 1992 until today (see the references in [15]).

We will consider $L^0(\mathcal{G})$, with the usual operations among random variables, as a partially ordered ring and we will always assume in the sequel that τ_0 is a topology on $L^0(\mathcal{G})$ such that $(L^0(\mathcal{G}), \tau_0)$ is a topological ring. We do not require that τ_0 is a linear topology on $L^0(\mathcal{G})$ (so that $(L^0(\mathcal{G}), \tau_0)$ may not be a topological vector space) nor that τ_0 is locally convex.

DEFINITION 3 (Topological L^0-module). – *We say that (E, τ) is a topological L^0-module if E is a module over the ring $L^0(\mathcal{G})$ and τ is a topology on E such that the module operation*

(i) $(E, \tau) \times (E, \tau) \to (E, \tau)$, $(X_1, X_2) \mapsto X_1 + X_2$,
(ii) $(L^0(\mathcal{G}), \tau_0) \times (E, \tau) \to (E, \tau)$, $(\gamma, X_2) \mapsto \gamma X_2$

are continuous w.r.t. the corresponding product topology.

DEFINITION 4 (Duality for L^0-modules). – *For a topological L^0-module (E, τ), we denote*

$$E^* := \{\mu : (E, \tau) \to (L^0(\mathcal{G}), \tau_0) \mid \mu \text{ is a continuous module homomorphism}\}. \tag{4}$$

It is easy to check that $(E, E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is a dual pair, where the pairing is given by $\langle X, \mu \rangle = \mu(X)$. Every $\mu \in E^*$ is $L^0(\mathcal{G})$-linear in the following sense: for all $\alpha, \beta \in L^0(\mathcal{G})$ and $X_1, X_2 \in E$

$$\mu(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha \mu(X_1) + \beta \mu(X_2).$$

In particular, $\mu(X_1 \mathbf{1}_A + X_2 \mathbf{1}_{A^C}) = \mu(X_1)\mathbf{1}_A + \mu(X_2)\mathbf{1}_{A^C}$ for every $A \in \mathcal{G}$.

DEFINITION 5. – *A map $\| \cdot \| : E \to L^0_+(\mathcal{G})$ is a $L^0(\mathcal{G})$-seminorm on E if*

(i) $\|\gamma X\| = |\gamma| \|X\|$ *for all* $\gamma \in L^0(\mathcal{G})$ *and* $x \in E$,
(ii) $\|X_1 + X_2\| \leq \|X_1\| + \|X_2\|$ *for all* $X_1, X_2 \in E$.

The $L^0(\mathcal{G})$-seminorm $\|\cdot\|$ becomes a $L^0(\mathcal{G})$-norm if in addition

(iii) $\|X\| = 0$ *implies* $X = 0$.

We will consider families of $L^0(\mathcal{G})$-seminorms $\mathcal{Z}$ satisfying in addition the property:

$$\|X\| = 0,\ \forall \|\cdot\| \in \mathcal{Z} \ \text{ iff } \ X = 0, \tag{5}$$

As clearly pointed out in [15], one family $\mathcal{Z}$ of $L^0(\mathcal{G})$ -seminorms on E may induce on E more than one topology τ such that $\{X_\alpha\}$ converges to X in (E,τ) iff $\|X_\alpha - X\|$ converges to 0 in $(L^0(\mathcal{G}),\tau_0)$ for each $\|\cdot\| \in \mathcal{Z}$. Indeed, also the topology τ_0 on $L^0(\mathcal{G})$ play a role in the convergence.

DEFINITION 6 (L^0-module associated to $\mathcal{Z}$). – *We say that $(E,\mathcal{Z},\tau)$ is a L^0-module associated to $\mathcal{Z}$ if:*

(i) *$\mathcal{Z}$ is a family of L^0-seminorms satisfying* (5),
(ii) *(E,τ) is a topological L^0-module,*
(iii) *A net $\{X_\alpha\}$ converges to X in (E,τ) iff $\|X_\alpha - X\|$ converges to 0 in (L^0,τ_0) for each $\|\cdot\| \in \mathcal{Z}$.*

Remark 2.2 in [15] shows that any random locally convex module over $\mathbb{R}$ with base $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$, according to Definition 2.1 [15], is a L^0-module $(E,\mathcal{Z},\tau)$ associated to a family $\mathcal{Z}$ of L^0-seminorms, according to the previous definition.

EXAMPLE 1. – *Let $\mathcal{F}$ be a sigma algebra containing $\mathcal{G}$ and consider the generalized conditional expectation of $\mathcal{F}$ -measurable non negative random variables: $E[\cdot|\mathcal{G}] : L^0_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to \bar{L}^0_+ := \bar{L}^0_+(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$*

$$E[X|\mathcal{G}] =: \lim_{n\to+\infty} E[X\wedge n|\mathcal{G}].$$

Let $p \in [1,\infty]$ and consider the L^0-module defined as

$$L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) =: \{X \in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \mid \|X|\mathcal{G}\|_p \in L^0(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})\}$$

where $\|\cdot|\mathcal{G}\|_p$ is the L^0-norm assigned by

$$\|X|\mathcal{G}\|_p =: \begin{cases} E[|X|^p|\mathcal{G}]^{\frac{1}{p}} & \text{if } p < +\infty \\ \inf\{Y \in \bar{L}^0(\mathcal{G}) \mid Y \geq |X|\} & \text{if } p = +\infty \end{cases} \tag{6}$$

Then $L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$ becomes a L^0-normed module associated to the norm $\|\cdot|\mathcal{G}\|_p$ having the product structure:

$$L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) = L^0(\mathcal{G})L^p(\mathcal{F}) = \{YX \mid Y \in L^0(\mathcal{G}),\ X \in L^p(\mathcal{F})\}.$$

For $p<\infty$, any L^0-linear continuous functional $\mu : L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) \to L^0$ can be identi-

fied with a random variable $Z \in L^q_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$ *as* $\mu(\,\cdot\,) = E[Z \cdot |\mathcal{G}]$ *where* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *So we can identify* E^* *with* $L^q_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$.

Based on the results of Guo [15] and Filipovic et al. [8], we show that a family of seminorms on E may induce more than one topology on the L^0-module E and that these topologies guarantee a generalized version of the Hahn Banach Separation Theorem. The two different topologies on E depend on which topology is selected on L^0: either the uniform topology or the topology of convergence in probability.

These topologies on E will collapse to the same one whenever $\mathcal{G} = \sigma(\emptyset)$ is the trivial sigma algebra, but in general present different structural properties.

We set:

$$\|X\|_{\mathcal{S}} := \sup\{\|X\| \mid \|X\| \in \mathcal{S}\}$$

for any finite subfamily $\mathcal{S} \subset \mathcal{Z}$ of L^0 -seminorms. Recall from the assumption given in equation (5) that $\|X\|_{\mathcal{S}} = 0$ if and only if $X = 0$.

The uniform topology τ_c [8]

In this case, L^0 is equipped with the following uniform topology. For every $\varepsilon \in L^0_{++}$, the ball $B_\varepsilon := \{Y \in L^0 \mid |Y| \leq \varepsilon\}$ centered in $0 \in L^0$ gives the neighborhood basis of 0. A set $V \subset L^0$ is a neighborhood of $Y \in L^0$ if there exists $\varepsilon \in L^0_{++}$ such that $Y + B_\varepsilon \subset V$. A set V is open if it is a neighborhood of all $Y \in V$. A net converges in this topology, namely $Y_N \xrightarrow{|\cdot|} Y$ if for every $\varepsilon \in L^0_{++}$ there exists $\overline{N}$ such that $|Y - Y_N| < \varepsilon$ for every $N > \overline{N}$. In this case the space $(L^0, |\cdot|)$ looses the property of being a topological vector space. In this topology the positive cone L^0_+ is closed and the strictly positive cone L^0_{++} is open.

Under the assumptions that there exists an $X \in E$ such that $X\mathbf{1}_A \neq 0$ for every $A \in \mathcal{G}$ and that the topology τ on E is Hausdorff, Theorem 2.8 in [8] guarantees the existence of $X_0 \in E$ and $\mu \in E^*$ such that $\mu(X_0) > 0$.

A family $\mathcal{Z}$ of L^0-seminorms on E induces a topology on E in the following way. For any finite $\mathcal{S} \subset \mathcal{Z}$ and $\varepsilon \in L^0_{++}$ define

$$U_{\mathcal{S},\varepsilon} := \left\{X \in E \mid \|X\|_{\mathcal{S}} \leq \varepsilon\right\}$$

$$\mathcal{U} := \{U_{\mathcal{S},\varepsilon} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{Z} \text{ finite and } \varepsilon \in L^0_{++}\}.$$

$\mathcal{U}$ gives a convex neighborhood base of 0 and it induces a topology on E denoted by τ_c. We have the following properties:

1. $(E, \mathcal{Z}, \tau_c)$ is a $(L^0, |\cdot|)$-module associated to $\mathcal{Z}$, which is also a locally convex topological L^0-module (see Proposition 2.7 [15]);

2. on $(E, \mathcal{Z}, \tau_c)$ we can apply the generalization of Hahn Banach Separation theorem either for closed or open sets (see Theorems 2.6 and 2.8 [8]),
3. any topological $(L^0, |\cdot|)$ module (E, τ) is locally convex if and only if τ is induced by a family of L^0-seminorms, i.e. $\tau \equiv \tau_c$, (see Theorem 2.4 [8]).

A probabilistic topology $\tau_{\varepsilon,\lambda}$ [15]

The second topology on the L^0-module E is a topology of a more probabilistic nature and originated in the theory of probabilistic metric spaces.

Here L^0 is endowed with the topology $\tau_{\varepsilon,\lambda}$ of convergence in probability and so the positive cone L^0_+ is $\tau_{\varepsilon,\lambda}$-closed. According to [15], for every $\varepsilon, \lambda \in \mathbb{R}$ and a finite subfamily $\mathcal{S} \subset \mathcal{Z}$ of L^0 -seminorms we let

$$\mathcal{V}_{\mathcal{S},\varepsilon,\lambda} := \{X \in E \mid \mathbb{P}(\|X\|_{\mathcal{S}} < \varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

$$\mathcal{V} := \{\mathcal{U}_{\mathcal{S},\varepsilon,\lambda} \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{Z} \text{ finite}, \varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1\}.$$

$\mathcal{V}$ gives a neighborhood base of 0 and it induces a linear topology on E, also denoted by $\tau_{\varepsilon,\lambda}$ (indeed if $E = L^0$ then this is exactly the topology of convergence in probability). This topology may not be locally convex, but has the following properties:

1. $(E, \mathcal{Z}, \tau_{\varepsilon,\lambda})$ becomes a $(L^0, \tau_{\varepsilon,\lambda})$-module associated to $\mathcal{Z}$ (see Proposition 2.6 [15]),
2. on $(E, \mathcal{Z}, \tau_{\varepsilon,\lambda})$ we can apply the generalization of Hahn Banach Separation theorem only for closed sets (see Theorems 3.6 and 3.9 [15]).

4. – Quasiconvex duality in the conditional setting

The relaxation of the convexity property for the risk maps has an immediate drawback in terms of the dual representation of the risk measures, since Fenchell-Moreau theorem fails for a non-convex functional. In the static case this problem has been addressed by Cerreia-Vioglio et al. in [5], providing a robust dual representation of the Risk Measures as a *supremum* over some probabilistic scenarios, based on the Penot-Volle dual representation (see [19]). The result obtained in [5] matches the one that holds for convex Risk Measures (see [14]) and can be stated as follows.

THEOREM 1 (Cerreia-Vioglio, Maccheroni, Marinacci, Montrucchio, [5]). – *A function $\rho : L^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ is quasiconvex monotone decreasing and $\sigma(L^\infty, L^1)$–lower*

semicontinuous if and only if

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} R(E_Q[-X], Q),$$

$$R(m, Q) = \inf\{\rho(\xi) \mid \xi \in L^\infty \text{ and } E_Q[-\xi] = m\}$$

where $\mathcal{P}$ is an opportune set of probability measures.

Notice that $R : \mathbb{R} \times \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ and $R(m, Q)$ can be interpreted as the reserve amount required today, under the scenario Q, to cover an expected loss m in the future.

In this section we consider the following type of Conditional Risk Measures and we compare the results obtained in two different frameworks. Here $(E, \geq)$ is a partially ordered convex lattice $E \subset L^0(\mathcal{F})$ and we assume that the following property holds:

$$X \in E \text{ and } A \in \mathcal{F} \Longrightarrow (X\mathbf{1}_A) \in E. \tag{7}$$

DEFINITION 7. – *A Conditional Quasiconvex Risk Measure is a map $\rho : E \to L^0(\mathcal{G})$ such that*

(MON) *monotone decreasing if for every $X, Y \in E$*

$$X \leq Y \quad \Rightarrow \quad \rho(X) \geq \rho(Y)\ ;$$

(QCO) *quasiconvex if for every $X, Y \in E$, $\Lambda \in L^0(\mathcal{G})$ and $0 \leq \Lambda \leq 1$*

$$\rho(\Lambda X + (1 - \Lambda)Y) \leq \rho(X) \vee \rho(Y)\,;$$

(REG) *regular if for every $X, Y \in E$ and $A \in \mathcal{G}$*

$$\rho(X\mathbf{1}_A + Y\mathbf{1}_{A^c}) = \rho(X)\mathbf{1}_A + \rho(Y)\mathbf{1}_{A^c}.$$

The vector space approach [11]

We now adopt the standard approach in which E is any locally convex topological vector space of random variables satisfying the following assumptions

1. *The order continuous dual of $(E, \geq)$ denoted by E^*, is a lattice* ([1], *Th.* 8.28) *that satisfies $E^* \hookrightarrow L^1(\mathcal{F})$.*
2. *The space E endowed with the weak topology $\sigma(E, E^*)$ is a locally convex Riesz space.*

REMARK 1. – Many important classes of spaces satisfy these conditions, such as

– The L^p-spaces, $p \in [1, \infty]$: $E = L^p(\mathcal{F})$, $E^* \hookrightarrow L^1_{\mathcal{F}}$.

– The Orlicz spaces L^Ψ for any Young function Ψ: $E^* = L^{\Psi^*} \hookrightarrow L^1(\mathcal{F})$, where Ψ^* denotes the conjugate function of Ψ;

– The Morse subspace M^Ψ of the Orlicz space L^Ψ, for any continuous Young function Ψ.

In order to state the dual representation in the vector space case we set

$$\mathcal{P} =: \left\{ \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \mid Q \ll \mathbb{P} \text{ and } Q \text{ probability} \right\}$$

and

$$R(Y, Q) := \inf_{\xi \in E} \{ \rho(\xi) \mid E_Q[-\xi|\mathcal{G}] =_Q Y \}. \tag{8}$$

THEOREM 2 (Frittelli - Maggis [11]). – *Suppose that E is order complete (with further topological assumptions). If $\rho : E \to \overline{L}^0(\mathcal{G})$ is (MON), (QCO), (REG) and $\sigma(E, E^*)$-lower semicontinuous then*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in E^* \cap \mathcal{P}} R(E_Q[-X|\mathcal{G}], Q). \tag{9}$$

Sketch of the proof of Theorem 2

We here point out the essential arguments involved in the proof of Theorem 2 and we defer to the original article [11] for the details and the rigorous statements.

Unfortunately, we cannot prove directly that $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Q_\varepsilon \in E^* \cap \mathcal{P}$ s.t.

$$\{\xi \in E \mid E_{Q_\varepsilon}[\xi|\mathcal{G}] \geq_{Q_\varepsilon} E_{Q_\varepsilon}[X|\mathcal{G}]\} \subseteq \{\xi \in E \mid \rho(\xi) > \rho(X) - \varepsilon\} \tag{10}$$

relying on Hahn-Banach Theorem, as it happened in the real case (see [19]). Indeed, the complement of the set in the right hand side of (10) is not any more a convex set – unless ρ is real valued – regardless of the continuity assumption made on ρ.

Also the idea applied in the conditional convex case [6] can not be used here, since the map $X \to E_{\mathbb{P}}[\rho(X)]$ there adopted preserves convexity but not quasiconvexity.

Then our method is to apply an approximation argument and the choice of approximating $\rho(\,\cdot\,)$ by

$$\rho^\Gamma(\,\cdot\,) = \sum_{A \in \Gamma} \rho_A(\,\cdot\,)\mathbf{1}_A,$$

is forced by the need to preserve quasiconvexity. Here Γ is any finite partition of

Ω and $\rho_A(X) = \sup_A \rho(X)$. Let

$$H(X) = \sup_{Q \in E^* \cap \mathcal{P}} \inf_{\xi \in E} \{\rho(\xi) \mid E_Q[\xi|\mathcal{G}] =_Q E_Q[X|\mathcal{G}]\}$$

$$H^\Gamma(X) = \sup_{Q \in E^* \cap \mathcal{P}} \inf_{\xi \in E} \{\rho^\Gamma(\xi) \mid E_Q[\xi|\mathcal{G}] =_Q E_Q[X|\mathcal{G}]\}.$$

I The first step is to prove that:

$$\pi^\Gamma(X) = H^\Gamma(X)$$

This is based on the representation of the *real valued* quasiconvex map ρ_A. Therefore, the assumptions (MON), (REG), (QCO) and (LSC) on ρ are here all needed.

II Then it is a simple matter to deduce $\rho(X) = \inf_\Gamma \rho^\Gamma(X) = \inf_\Gamma H^\Gamma(X)$, where the inf is taken with respect to all finite partitions.

III The last step, i.e. proving that $\inf_\Gamma H^\Gamma(X) = H(X)$, is more delicate. It can be shown easily that is possible to approximate $H(X)$ with $R(E_{Q_\varepsilon}[-X|\mathcal{G}], Q_\varepsilon)$ on a set A_ε of probability arbitrarily close to 1. However, we need the following *uniform* approximation: for any $\varepsilon > 0$ there exists $Q_\varepsilon \in E^* \cap \mathcal{P}$ such that for any finite partition Γ we have $H^\Gamma(X) - R(E_{Q_\varepsilon}[-X|\mathcal{G}], Q_\varepsilon) < \varepsilon$ on the same set A_ε. This key approximation result shows that the element Q_ε does not depend on the partition and allows us to conclude the proof.

The module approach [16]

We now replicate and empower the same results given in the previous paragraph using the L^0-module technology. The proof of our result is based on a version of the hyperplane separation theorem and not on some approximation or scalarization arguments, as it happened in the vector space setting. By carefully analyzing the proof in [16] one may appreciate many similarities with the original demonstration in the static setting by Volle [19]. One key difference with [19], in addition to the conditional setting, is the continuity assumption needed to obtain the representation. We choose to work, as in [4], with evenly quasiconvex functions, i.e. function having evenly convex lower level sets. This is an assumption weaker than quasiconvexity and lower semicontinuity. The notion of conditional evenly convexity has been studied in [13], matching the characterization originally given by Fenchel.

DEFINITION 8. – *Let $\mathcal{C}$ be a subset of E.*

(CSet) *$\mathcal{C}$ has the countable concatenation property if for every countable partition $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{G}$ and for every countable collection of elements $\{X_n\}_n \subset \mathcal{C}$ we have $\sum_n \mathbf{1}_{A_n} X_n \in \mathcal{C}$.*

We notice that an arbitrary set $\mathcal{C} \subset E$ may present some components which degenerate to the entire module. Basically it might occur that for some $A \in \mathcal{G}$, $\mathcal{C}\mathbf{1}_A = E\mathbf{1}_A$, i.e., for each $\xi \in E$ there exists $\eta \in \mathcal{C}$ such that $\eta\mathbf{1}_A = \xi\mathbf{1}_A$. In this case there are no chances to guarantee a separation on the set Ω as for the results given in [8]. Thus we need to determine the maximal $\mathcal{G}$-measurable set on which $\mathcal{C}$ reduces to E. The existence of the maximal element has been proved in [13] and the following definition is well posed.

DEFINITION 9. – *Fix a set $\mathcal{C} \subseteq E$ and $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \{A \in \mathcal{G} | \mathcal{C}\mathbf{1}_A = E\mathbf{1}_A\}$. We denote with $A_{\mathcal{C}}$ the $\mathcal{G}$-measurable maximal element of the class $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ and with $D_{\mathcal{C}}$ the (P-a.s. unique) complement of $A_{\mathcal{C}}$. Hence $\mathcal{C}\mathbf{1}_{A_{\mathcal{C}}} = E\mathbf{1}_{A_{\mathcal{C}}}$.*

DEFINITION 10. – *Let $\mathcal{C}$ be a subset of E. We will say that*

(i) $X \in E$ is outside $\mathcal{C}$ *if $\mathbf{1}_A\{X\} \cap \mathbf{1}_A\mathcal{C} = \emptyset$ for every $A \in \mathcal{G}$ with $A \subseteq D_{\mathcal{C}}$ and $\mathbb{P}(A) > 0$.*

(iii) *$\mathcal{C}$ is conditional evenly convex if $\mathcal{C}$ satisfies (CSet) and for every X outside $\mathcal{C}$ there exists a $\mu \in E^*$ such that*

$$\mu(X) > \mu(\xi) \text{ on } D_{\mathcal{C}}, \ \forall\, \xi \in \mathcal{C}.$$

In [13] it is showed that any conditional evenly convex set is also L^0-convex and it can be characterized as intersection of half spaces.

DEFINITION 11. – *A map $\rho : E \to \bar{L}^0(\mathcal{G})$ is*

(EQC) *conditionally evenly quasiconvex if $U_Y = \{\xi \in E \mid \rho(\xi) \leq Y\}$ are conditionally evenly convex for every $Y \in L^0(\mathcal{G})$.*

The following Theorem is the module counterpart of Theorem 2. One may appreciate the pretty weaker assumptions that allow the statement and the proof will be a natural application of functional analysis more that a mere matter of hard analysis as for the vector space approach.

THEOREM 3. – *If $\rho : E \to \bar{L}^0(\mathcal{G})$ is (REG), (EQC) then*

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in E^*} \mathcal{R}(\mu(X), \mu), \tag{11}$$

where for $Y \in L^0(\mathcal{G})$ *and* μ,

$$\mathcal{R}(Y,\mu) := \inf_{\xi \in E} \{\rho(\xi) \mid \mu(\xi) \geq Y\}. \tag{12}$$

Sketch of the proof of Theorem 3

We here propose a non-rigorous simplification of the proof given in [13]. We defer to the original paper for all the technical details. Here we suppose for simplicity that $\rho(0) = 0$.

First there might exist a set $A \in \mathcal{G}$ on which the map ρ is constant, in the sense that $\rho(\xi)\mathbf{1}_A = \rho(\eta)\mathbf{1}_A$ for every $\xi, \eta \in E$. For this reason we introduce

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{G} \mid \rho(\xi)\mathbf{1}_B = \rho(\eta)\mathbf{1}_B \ \forall\, \xi, \eta \in L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})\}.$$

There exist two maximal sets $A \in \mathcal{G}$ and $A^{\vdash} \in \mathcal{G}$ for which $P(A \cap A^{\vdash}) = 0$, $P(A \cup A^{\vdash}) = 1$ and

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= \rho(\eta) \quad \text{on } A \text{ for every } \xi, \eta \in E, \\ \rho(\zeta_1) &< \rho(\zeta_2) \quad \text{on } A^{\vdash} \text{ for some } \zeta_1, \zeta_2 \in E. \end{aligned}$$

Fix $X \in E$ and $G = \{\rho(X) < +\infty\}$. For every $\varepsilon \in L^0_{++}(\mathcal{G})$ we set

$$Y_\varepsilon =: \rho(X)\mathbf{1}_A + (\rho(X) - \varepsilon)\mathbf{1}_{G \cap A^{\vdash}} + \varepsilon \mathbf{1}_{G^C \cap A^{\vdash}}$$

and for every $\varepsilon \in L^0(\mathcal{G})_{++}$ we set the evenly convex set

$$\mathcal{C}_\varepsilon =: \{\xi \in E \mid \rho(\xi) \leq Y_\varepsilon\} \neq \emptyset$$

This may be separated from X by $\mu_\varepsilon \in E^*$ i.e.

$$\mu_\varepsilon(X) > \mu_\varepsilon(\xi) \quad \text{on } D_{\mathcal{C}_\varepsilon},\ \forall\, \xi \in \mathcal{C}_\varepsilon.$$

Since

$$\{\xi \in E \mid \mu_\varepsilon(X)\mathbf{1}_{A^{\vdash}} \leq \mu_\varepsilon(\xi)\mathbf{1}_{A^{\vdash}}\} \subseteq \{\xi \in E \mid \rho(\xi) > (\rho(X) - \varepsilon)\mathbf{1}_G + \varepsilon \mathbf{1}_{G^C} \text{ on } A^{\vdash}\},$$

one can easily deduce that on the set $A^{\vdash}$

$$\begin{aligned} \rho(X)\mathbf{1}_{A^{\vdash}} &\geq \inf_{\xi \in E} \{\rho(\xi)\mathbf{1}_{A^{\vdash}} \mid \mu_\varepsilon(\xi) \geq \mu_\varepsilon(X)\} \\ &\geq \inf_{\xi \in E} \{\rho(\xi)\mathbf{1}_{A^{\vdash}} \mid \rho(\xi) > (\rho(x) - \varepsilon)\mathbf{1}_G + \varepsilon \mathbf{1}_{G^C} \text{ on } A^{\vdash}\} && (13) \\ &\geq (\rho(X) - \varepsilon)\mathbf{1}_{G \cap A^{\vdash}} + \varepsilon \mathbf{1}_{G^C \cap A^{\vdash}} && (14) \end{aligned}$$

The representation (11) follows by taking ε arbitrary small on $G \cap A^{\vdash}$ and arbitrary big on $G^C \cap A^{\vdash}$ and observing that on A the representation trivially holds true.

Evidences of the power of the L^0-module approach: a Complete Duality result.

A *complete duality* for real valued quasiconvex functionals has been firstly established in [4]: the idea is to prove a *one to one* relationship between quasiconvex monotone functionals ρ and the function R in the dual representation. Obviously R will be unique only in an opportune class of maps satisfying certain properties. In Decision Theory the function R can be interpreted as the decision maker's index of uncertainty aversion: the uniquesness of R becomes crucial (see [4]) if we want to guarantee a robust dual representation of ρ characterized in terms of the unique R. In mathematical terms

DEFINITION 12. – *Let $\mathcal{P}$ be the set of probability measures on $(\Omega, \mathcal{F})$. There exists a complete duality between a class $\mathcal{R}$ of maps*

$$R : \mathbb{R} \times \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$$

and a class $\mathcal{L}$ of functions

$$\rho : E \to \overline{\mathbb{R}}$$

if for every $\rho \in \mathcal{L}$ the only $R \in \mathcal{R}$ such that

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} R(E_Q[-X], Q)$$

is given by

$$R(m, Q) = \inf_{\xi \in L_{\mathcal{F}}} \{\rho(\xi) \mid E_Q[-\xi] \geq m\};$$

and conversely for every $R \in \mathcal{R}$ there is a unique $\rho \in \mathcal{L}$ satisfying the above equations.

To the best of our knowledge the following Theorem is the first establishment of such a Complete Duality in the conditional framework for modules of the L^p-type, i.e. $E = L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$. (see [12] for the complete proof)

THEOREM 4 (Frittelli-Maggis [12]). – *The map $\rho : L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) \to L^0(\mathcal{G})$ satisfies (REG), (MON), (EVQ) if and only if*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^q} R\big(E_Q[-X|\mathcal{G}], Q\big) \tag{15}$$

where

$$R(Y, Q) = \inf_{\xi \in L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})} \big\{\rho(\xi) \mid E_Q[-\xi|\mathcal{G}] = Y\big\}$$

is unique in the class $\mathcal{M}(L^0(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}^q)$.

DEFINITION 13. – *The class* $\mathcal{M}(L^0(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}^q)$ *is composed by maps* $K : L^0(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}^q \to \bar{L}^0(\mathcal{G})$ *s.t.*

(i) K *is increasing in the first component.*

(ii) $K(Y\mathbf{1}_A, Q)\mathbf{1}_A = K(Y, Q)\mathbf{1}_A$ *for every* $A \in \mathcal{G}$ *and* $\left(Y, \frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right) \in \Sigma$.

(iii) $\inf_{Y \in L^0(\mathcal{G})} K(Y, Q) = \inf_{Y \in L^0(\mathcal{G})} K(Y, Q')$ *for every* $Q, Q' \in \mathcal{P}^q$.

(iv) K *is* $\diamond$*-evenly* $L^0(\mathcal{G})$*-quasiconcave: for every* $(Y^*, Q^*) \in L^0(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}^q$, $A \in \mathcal{G}$ *and* $\alpha \in L^0(\mathcal{G})$ *such that* $K(Y^*, Q^*) < \alpha$ *on* A, *there exists* $(S^*, X^*) \in L^0_{++}(\mathcal{G}) \times L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$ *with*

$$Y^*S^* + E\left[X^* \frac{dQ^*}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{G}\right] < YS^* + E\left[X^* \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{G}\right] \text{ on } A$$

for every (Y, Q) *such that* $K(Y, Q) \geq \alpha$ *on* A.

(v) *the set* $\mathcal{K}(X) = \left\{K(E[X\frac{dQ}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}], Q) \mid Q \in \mathcal{P}^q\right\}$ *is upward directed for every* $X \in L^p_{\mathcal{G}}(\mathcal{F})$.

(vi) $K(Y, Q_1)\mathbf{1}_A = K(Y, Q_2)\mathbf{1}_A$, *if* $\frac{dQ_1}{d\mathbb{P}}\mathbf{1}_A = \frac{dQ_2}{d\mathbb{P}}\mathbf{1}_A$, $Q_i \in \mathcal{P}^q$, *and* $A \in \mathcal{G}$.

REMARK 2. – In view of the establishment of a complete duality one could argue that the vector space approach should be set aside in favor of the module approach. This is not completely appropriate: as shown by Frittelli and Maggis [10] the class of quasiconcave maps given by Conditional Certainty Equivalents leads to a vector space approach using Orlicz spaces. It does not seem reasonable in such an example to extend the conditional maps to the L^0-module set up.

REFERENCES

[1] C. D. ALIPRANTIS - K. C. BORDER, *Infinite dimensional analysis*, Springer, Berlin, third edition, 2006. A hitchhiker's guide.

[2] P. ARTZNER - F. DELBAEN - J.-M. EBER - D. HEATH, *Coherent measures of risk*, Math. Finance, **9**, n. 3 (1999), 203-228.

[3] D. BERNOULLI, *Exposition of a new theory on the measurement of risk*, Econometrica, **22** (1954), 23-36.

[4] S. CERREIA-VIOGLIO - F. MACCHERONI - M. MARINACCI - L. MONTRUCCHIO, *Complete monotone quasiconcave duality*, Math. Op. Res. **36** (2) (2011), 321-339.

[5] S. CERREIA-VIOGLIO - F. MACCHERONI - M. MARINACCI - L. MONTRUCCHIO, *Risk measures: rationality and diversification*, Math. Finance, **21** (4) (2011), 743-774.

[6] K. DETLEFSEN - G. SCANDOLO, *Conditional and dynamic convex risk measures*, Finance Stoch., **9** (4) (2005), 539-561.

[7] N. EL KAROUI - C. RAVANELLI, *Cash sub-additive risk measures and interest rate ambiguity*, Math. Finance, **19**(4) (2009), 561-590.

[8] D. FILIPOVIĆ - M. KUPPER - N. VOGELPOTH, *Separation and duality in locally* L^0*-convex modules*, J. Funct. Anal. **256** (12) (2009), 3996-4029.

[9] H. Föllmer - A. Schied, *Convex measures of risk and trading constraints*, Finance Stoch. **6** (4) (2002), 429-447.
[10] M. Frittelli - M. Maggis, *Conditional Certainty Equivalent*, Int. J. Theor. Appl. Finance, **14**(1) (2011), 41-59.
[11] M. Frittelli - M. Maggis, *Dual representation of quasi-convex conditional maps.*, SIAM J. Financial Math., **2** (2011), 357-382.
[12] M. Frittelli - M. Maggis, *Complete duality for quasiconvex dynamic risk measures on modules of the L^p-type* (2012). Preprint.
[13] M. Frittelli - M. Maggis, *Conditionally evenly convex sets and evenly quasi-convex maps* (2012). Preprint.
[14] M. Frittelli - E. Rosazza Gianin, *Putting order in risk measures*, J. Bank Fin. **26** (7) (2002), 1473-1486.
[15] T. Guo, *Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 3024-3047.
[16] M. Maggis, *On quasiconvex conditional maps*, volume 4. Ledizioni, Math. Sciences Series, 2010. Duality results and applications to finance.
[17] H. Markovitz, *Portfolio selection*, J. Finance, **7** (1) (1952), 77-91.
[18] W. F. Sharpe, *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*, J. Finance, **19** (3) (1964), 425-442.
[19] M. Volle, *Duality for the level sum of quasiconvex functions and applications*, Control, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **3** (1998), 329-343.
[20] J. Von Neumann - O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004. Reprint of the 1980 edition.

Dipartimento di Matematica «F. Enriques»
Università di Milano, Via Cesare Saldini, 50 - 20133 Milano
E-mail: marco.maggis@unimi.it

Received November 15, 2012 and accepted May 6, 2013

Edoardo Mainini: Gradient flow di energie di interazione e applicazioni alla superconduttività

Edoardo Mainini[1]
Dipartimento di Matematica F. Casorati, Università di Pavia
email: `edoardo.mainini@unipv.it`

Sunto

Ci occupiamo dell'analisi di modelli di aggregazione-diffusione della forma

$$\partial_t \mu = \mathrm{div}((\nabla W * \mu)\mu) \qquad \text{in } (0+\infty) \times \mathbb{R}^n,$$

dove μ è una densità di particelle in $\mathbb{R}^n$ la cui dinamica è governata da un potenziale di interazione $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, che rappresenta la mutuale energia di attrazione-repulsione di ogni coppia di particelle.

Presentiamo una breve discussione sulla buona positura del problema nell'ambito dei flussi gradiente in spazi di probabilità, sotto l'ipotesi di convessità (ovvero λ-convessità) del potenziale W. Descriviamo inoltre il comportamento asintotico e la possibile concentrazione di massa in tempo finito. Presentiamo infine alcuni risultati recentemente ottenuti in collaborazione con Josè A. Carrillo (Universitat Autònoma de Barcelona), Stefano Lisini e Giuseppe Savarè (Università degli Studi di Pavia), riguardanti la formulazione e l'analisi del problema per potenziali non lisci.

Analizziamo in seguito il caso del potenziale newtoniano $W(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y|$, che compare in diversi modelli matematici di recente interesse. Siamo in particolare interessati ai modelli per la descrizione della dinamica dei vortici di Ginzburg-Landau nei superconduttori, in cui è necessario considerare anche soluzioni non positive: in questo contesto presentiamo alcuni altri risultati di buona positura e regolarità, ottenuti in collaborazione con Luigi Ambrosio (Scuola Normale Superiore, Pisa) e Sylvia Serfaty (Universitè Pierre et Marie Curie, Paris 6).

[1]Lavoro svolto con il supporto del progetto FP7-IDEAS-ERC-StG Grant #200497 (BioSMA).

Enrico Manfredi: Gruppo di nodi e link in spazi lenticolari

Enrico Manfredi
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: enrico.manfredi3@unibo.it

Sunto

Si è studiato il gruppo di nodi e link in spazi lenticolari e si sono ottenute tre diverse presentazioni del gruppo, a seconda della rappresentazione scelta dello spazio lenticolare $L(p,q)$ e conseguentemente del link $L \subset L(p,q)$.

(1) Se si costruisce $L(p,q)$ mediante uno spezzamento di Heegaard di genere uno, si può vedere L attraverso una $(1,b)$-decomposizione. In tal caso il gruppo del link ammette una presentazione dove i generatori sono alcune delle curve che generano il gruppo fondamentale del toro con $2b$ punture, e le relazioni si trovano come immagini delle rimanenti curve attraverso l'omeomorfismo di incollamento dello spezzamento di Heegaard.

(2) Se si costruisce $L(p,q)$ grazie ad un opportuno quoziente di B^3, si rappresenta L mediante una sua particolare proiezione sul disco equatoriale di B^3. Per trovare una presentazione del gruppo, si generalizza il classico teorema di Wirtinger, aggiungendo generatori e relazioni su ∂B^3, dove avviene il quoziente.

(3) Se si costruisce $L(p,q)$ come chirurgia di Dehn lungo il nodo banale I nella sfera S^3 con coefficiente p/q, si può vedere L mediante diagramma di link misti, ovvero il classico diagramma del link $L \cup I$ in S^3. Generatori e relazioni sono le stesse trovate grazie al teorema di Wirtinger per $L \cup I$, a cui si aggiungono un generatore e due relazioni che nascono dalla chirurgia.

Come immediato corollario si ricava che il primo gruppo di omologia del complementare del link è isomorfo a $\mathbb{Z}^\nu \oplus \mathbb{Z}_d$, dove ν è il numero delle componenti del link e d è il massimo comun divisore tra p e i valori dell'omologia in $\mathbb{Z}_p$ delle varie componenti del link.

Tali risultati sono stati ottenuti nella mia tesi di laurea specialistica in matematica presso l'Università di Trieste, nell'ambito del percorso formativo in comune con la SISSA (relatori: Prof. M. Mulazzani, Dott.ssa A. Cattabriga, Dott. M. Mecchia).

Bibliografia

[1] A. Cattabriga, M. Mulazzani, *Strongly-cyclic branched coverings of* $(1,1)$*-knots and cyclic presentations of group*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **135** (2003), 137-146.

[2] V. Q. Huynh, T. T. Q. Le, *Twisted Alexander polinomial of links in the projective space*, J. Knot Th. Ram. **17** (2008), 411-438.

[3] S. Lambropoulou, *Solid torus links and Hecke algebras of $\mathcal{B}$-type*, Proc. Conf. Quant. Topology (1994), 225-245.

Vincenzo Mantova: Approssimazioni di Artin-Whaples con grado limitato su varietà algebriche

Vincenzo Mantova
Scuola Normale Superiore di Pisa
email: v.mantova@sns.it

Umberto Zannier
Scuola Normale Superiore di Pisa

Sunto

Il classico teorema di approssimazione di Artin-Whaples afferma che dati n valori assoluti indipendenti su un campo K, e n punti associati in $\mathbb{P}_1(K)$, esiste un punto in $\mathbb{P}_1(K)$ che approssima simultaneamente con precisione voluta ognuno dei punti dati rispetto ai valori assoluti corrispondenti. Una forma molto nota ed elementare è il teorema cinese dei resti.

Se a $\mathbb{P}_1$ si sostituisce un'altra varietà algebrica, esistono risultati analoghi a patto di ingrandire il campo di definizione dei punti approssimanti; tuttavia, essi sono poco espliciti, e non si possono considerare generalizzazioni in senso proprio.

Descriviamo qui una generalizzazione alle varietà algebriche dimostrabile in modo semplice, che inoltre produce stime esplicite e uniformi per i gradi dei punti approssimanti.

Intervento: Vincenzo Mantova,
Approssimazioni di Artin-Whaples con grado limitato su varietá algebriche,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 693–697**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 693-697

Approssimazioni di Artin-Whaples con grado limitato su varietà algebriche

V. Mantova

Sommario. – *Il classico teorema di approssimazione di Artin-Whaples afferma che dati n valori assoluti indipendenti su un campo K, e n punti associati in* $\mathbb{P}_1(K)$*, esiste un punto in* $\mathbb{P}_1(K)$ *che approssima simultaneamente con precisione voluta ognuno dei punti dati rispetto ai valori assoluti corrispondenti. Una forma molto nota ed elementare è il teorema cinese dei resti.*

Se a $\mathbb{P}_1$ *si sostituisce un'altra varietà algebrica, esistono risultati analoghi a patto di ingrandire il campo di definizione dei punti approssimanti; tuttavia, essi sono poco espliciti, e non si possono considerare generalizzazioni in senso proprio.*

Descriviamo qui una generalizzazione alle varietà algebriche dimostrabile in modo semplice che produce inoltre stime esplicite e uniformi per i gradi dei punti approssimanti.

Un classico risultato in teoria dei numeri è il seguente teorema di approssimazione [1]:

Teorema 1 (Artin-Whaples). – *Sia K un campo e siano* $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_n$ *dei valori assoluti indipendenti di K. Se* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *è una sequenza di elementi di K, allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un elemento* $\beta \in K$ *tale che* $|\beta - \alpha_i|_i < \varepsilon$ *per ogni* $1 \leq i \leq n$.

Nel caso $K = \mathbb{Q}$ e con valori assoluti p-adici, il teorema è essenzialmente una forma alternativa del teorema cinese del resto: trovare un β tale che $|\beta - \alpha_i|_{p_i} < p_i^{-k_i}$ significa trovare una soluzione al sistema di congruenze $x \equiv \alpha_i \bmod p_i^{k_i}$.

Di fatto, il teorema può essere ulteriormente generalizzato scegliendo gli elementi α_i nei vari completamenti di K nei rispettivi valori assoluti $|\cdot|_i$. Possiamo anche assumere che α_i sia il punto all'infinito $\infty \in \mathbb{P}_1(K_i)$.

In questo contesto l'enunciato può essere riformulato in termini di densità. Siano d_i delle distanze associate agli $|\cdot|_i$ su $\mathbb{P}_1(K_i)$.

Teorema 1′ – *Sia K un campo e siano* $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_n$ *dei valori assoluti indipendenti di K, con distanze associate* d_i *su* $\mathbb{P}_1(K_i)$*. Dati dei punti* $Q_i \in \mathbb{P}_1(K_i)$*,*

per $i = 1, \dots, n$, e dato $\varepsilon > 0$, esiste un punto $P \in \mathbb{P}_1(K)$ tale che $d(P, Q_i) < \varepsilon$ per ogni $1 \le i \le n$.

In altre parole, l'immersione diagonale

$$\mathbb{P}_1(K) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_1(K_i)$$

ha immagine densa.

Ci chiediamo, quindi, se sia possibile sostituire a $\mathbb{P}_1$ un'altra varietà algebrica V definita su K: *dati dei punti $Q_i \in V(K_i)$, è possibile trovare un $P \in V(K)$ vicino a Q_i rispetto a $|\cdot|_i$ simultaneamente per $i = 1, \dots, n$?*

La risposta è ovviamente negativa, poiché molte varietà non hanno abbastanza punti per produrre un'approssimazione; per esempio, $V(K)$ può essere finito, come nel caso di curve di genere ≥ 2. Una possibilità per aggirare quest'ostacolo è di ammettere punti approssimanti definiti su un'estensione di K, ad esempio sulla chiusura algebrica $\overline{K}$. Ci sono vari modi per estendere i valori assoluti dati a $\overline{K}$; per questo, ad ogni $|\cdot|_i$ associamo un'estensione fissata $\overline{K}$, che prendiamo come dato del problema, e cerchiamo P vicino a Q_i rispetto all'estensione data.

Un esempio semplice che illustra bene il tipo di difficoltà è dato dalle curve iperellittiche. Supponiamo che V sia una curva piana definita dall'equazione $y = p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio su K, e $Q_1 = (x_1, y_1)$, $Q_2 = (x_2, y_2)$ siano due punti da approssimare rispetto a due valori assoluti $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$. In questo caso, un primo approccio potrebbe iniziare usando il teorema di Artin-Whaples per approssimare la prima coordinata con un $\beta \in K$ vicino a x_1 rispetto a $|\cdot|_1$, e vicino a x_2 rispetto a $|\cdot|_2$, e controllare quale delle due radici $\pm\sqrt{p(\beta)}$ approssima y_1 e y_2.

Tuttavia, se la distanza richiesta è sufficientemente piccola, solo una delle due radici $\pm\sqrt{p(\beta)}$ può essere vicina a y_1 rispetto a $|\cdot|_1$, e può accadere che la radice trovata sia lontana da y_2 rispetto a $|\cdot|_2$; in questo caso, nessuno dei due punti $(\beta, \pm\sqrt{p(\beta)})$ è approssimante. Di fatto l'aritmetica del campo può impedire questa costruzione, e si possono dare esempi espliciti in cui, qualunque sia β, i punti ottenuti come sopra non sono approssimanti [4].

Ciò nonostante la risposta alla domanda originale per $P \in V(\overline{K})$ è affermativa, e si possono dare alcune stime esplicite per il grado di P.

TEOREMA 2 ([4]). – *Sia V una sottovarietà assolutamente irriducibile di $\mathbb{P}_N$ di grado d e definita su K. Siano dati $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$ valori assoluti indipendenti su K, con estensioni fissate a $\overline{K}$ e con distanze associate $d_1, \dots, d_n$ su $V(\overline{K})$. Dati dei punti $Q_i \in V(K_i)$, per $i = 1, \dots, n$, e dato $\varepsilon > 0$ esiste un punto $P \in V(\overline{K})$ tale che $d(P, Q_i) < \varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e inoltre*

$$[K(P) : K] \le d^{|S| \cdot (\min\{2, \dim(V)+1\}) - 1}.$$

In particolare, l'immersione diagonale

$$V(\overline{K}) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} V(\overline{K}_i)$$

ha immagine densa.

Nel caso in cui $V = \mathbb{P}_1$, abbiamo $d = 1$, quindi $P \in \mathbb{P}_1(K)$, e recuperiamo il teorema di Artin-Whaples come caso speciale.

Se il campo base è globale, l'enunciato qualitativo senza stime sul grado discende già da un principio di densità isolato da Rumely [9] nella dimostrazione del suo principio locale-globale (originariamente ottenuto tramite la teoria della capacità, e poi ridimostrato con tecniche differenti da Moret-Bailly [7, 8] e da Green, Pop e Roquette [3]). Il principio di Rumely fallisce però su campi più generali, come mostrato da un esempio di Raynaud [6].

Inoltre, il principio di Rumely è sensibilmente più forte della generalizzazione qui sopra, in quanto, ad esempio, dimostra che il punto P si può trovare vicino a Q_i rispetto a *tutte* le estensioni di $|\cdot|_i$ a $\overline{K}$, e anche che sotto opportune condizioni P è S-intero. In questo senso, il teorema di Rumely richiama il teorema di approssimazione forte, anch'esso riguardante punti S-interi e valido solo su campi globali. Inoltre, le poche stime sul grado che si trovano in letteratura si applicano solo a varietà di tipo specifico [2, 5], non sono uniformi nei restanti dati del problema e non permettono di recuperare il teorema di Artin-Whaples come caso speciale.

La dimostrazione del Teorema 2 può essere ottenuta in modo piuttosto semplice utilizzando strumenti classici di geometria algebrica. Come primo passo dimostriamo il caso delle curve, che porta ad un enunciato lievemente più fine.

Data una curva $\mathcal{C}$, siano p_a il suo genere aritmetico e $G(K, \mathcal{C})$ la *gonalità* di $\mathcal{C}$ su K, cioè il minimo grado di una funzione non costante definita su K e regolare in tutti i punti singolari di $\mathcal{C}$.

TEOREMA 3. – *Sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva assolutamente irriducibile definita su K, e sia p_a il suo genere aritmetico. Siano dati $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_n$ valori assoluti indipendenti su K, con estensioni fissate a $\overline{K}$ e con distanze associate $d_1, \ldots, d_n$ su $\mathcal{C}(\overline{K})$. Dati dei punti $Q_i \in \mathcal{C}(K_i)$, per $i = 1, \ldots, n$, e dato $\varepsilon > 0$ esiste un punto $P \in \mathcal{C}(\overline{K})$ tale che $d(P, Q_i) < \varepsilon$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, e inoltre $[K(P) : K] \leq G(K, \mathcal{C}) \cdot (p_a + 1)^{|S|-1}$.*

Scriviamo qui solo i passi principali della dimostrazione; maggiori dettagli possono essere trovati in [4].

DIMOSTRAZIONE. – L'idea non è dissimile dall'approccio presentato qui sopra per la curva piana $y = p(x)$. Per aggirare il problema della doppia

scelta della radice $\sqrt{p(x)}$, che impedisce di portare a termine la costruzione, sostituiamo la coordinata x con una funzione z totalmente ramificata nel primo punto Q_1; in questo modo, non appena il valore di z si avvicina a $z(Q_1)$ rispetto al primo valore assoluto, tutti i punti sulla sua fibra saranno vicini a Q_1. A questo punto basta scegliere il punto della fibra che cade vicino al secondo punto Q_2, rispetto al secondo valore assoluto, per risolvere il problema per due punti.

A patto di correggere Q_1 con un punto vicino che sia algebrico su K e non singolare, l'esistenza di una funzione totalmente ramificata in Q_1 e definita su K è garantita, per esempio, dalla formula di Riemann-Roch, che mostra anche che il grado della funzione può essere limitato da $(p_a + 1)$. La correzione del punto Q_1 produce il termine $G(K, \mathcal{C})$ nella stima.

Il caso generale di n punti si può ricavare per induzione: è sufficiente scegliere una funzione che sia totalmente ramificata nel punto che approssima i primi $n - 1$ punti. □

Da quest'ultimo enunciato è immediato ricavare il Teorema 2 per le curve: è sufficiente applicare le stime classiche $G(K, \mathcal{C}) \leq d$ e $(p_a + 1) \leq d(d + 1)/2$.

Il Teorema 2 per le varietà di dimensione più alta si può ottenere tagliando la varietà con un opportuno sottospazio, in modo che l'intersezione sia una curva assolutamente irriducibile che passi vicino ai punti da approssimare; a quel punto è sufficiente applicare il Teorema 3. Per esempio, si può prendere una famiglia a un parametro di sottospazi che intersechi la varietà in una curva, e poi usare il teorema di Artin-Whaples per scegliere un sottospazio che sia vicino ai sottospazi della famiglia passanti per i punti da approssimare. Questo approccio produce un ulteriore termine d^n nella stima del grado di P.

BIBLIOGRAFIA

[1] Artin Emil e George Whaples, *Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations*. Bulletin of the American Mathematical Society, pagine 469-492, 1945.

[2] Erné Reinie, *On the degree of integral points of a projective space minus a horizontal hypersurface*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 532:151-177, maggio 2001, ISSN 07644442.

[3] Green Barry, Florian Pop e Peter Roquette, *On Rumely's local-global principle*. Jahresbericht der Deutschen Matematiker-Vereinigung, 97:43-74, 1995.

[4] Mantova Vincenzo e Umberto Zannier, *Artin-Whaples approximations of bounded degree on algebraic varieties*. Proceedings of the American Mathematical Society. In stampa.

[5] Mikkelsen Per, *Effective bounds for integral points on arithmetic surfaces*. Journal füur die reine und angewandte Mathematik, 1998(496):55-72, marzo 1998, ISSN 0075-4102.

[6] MORET-BAILLY LAURENT, *Points entiers des variétés arithmétiques*. Nel Goldstein, Catherine (curatore): *Séminaire de théorie des nombres*, Paris 1985-86, pagine 147-154, Paris, 1987. Birkhäuser.

[7] MORET-BAILLY LAURENT, *Groupes de Picard et problémes de Skolem. II*. Annales scientifiques de l'É.N.S., 22(2):181-194, 1989.

[8] MORET-BAILLY LAURENT, *Applications of Local-Global Principles to Arithmetic and Geometry*. Nel Denef, Jan, Leonard Lipshitz, Thanases Pheidas e Jan Van Geel (curatori): *Hilbert's tenth problem: relations with arithmetic and algebraic geometry*., volume 270 della serie *Contemporary Mathematics*, pagine 169-186. American Mathematical Society, Providence, 2000, ISBN 0-8218-2622-0.

[9] RUMELY ROBERT S., *Capacity Theory on Algebraic Curves*, volume 1378 della serie *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989, ISBN 978-3-540-51410-7.

Scuola di Scienze e Tecnologie, Sezione di Matematica - Università degli Studi di Camerino
Via Madonna delle Carceri 9, 62032 Camerino (MC), Italia
E-mail: vincenzo.mantova@unicam.it

Received November 30, 2012 and in revised form November 2, 2013

Luca Motto Ros: Quasi-ordini κ-Souslin

Luca Motto Ros
Dipartimento di logica, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
email: `luca.motto.ros@math.uni-freiburg.de`

Alessandro Andretta
Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Torino

Sunto

Una relazione binaria S su $\mathbb{R}$ si dice *quasi-ordine* se è una relazione riflessiva e transitiva. Dato un cardinale infinito κ, il quasi-ordine S si dice *κ-Souslin* se è immagine continua dello spazio ${}^{\mathbb{N}}\kappa$ delle sequenze di ordinali $< \kappa$ (dotato del prodotto delle topologie discrete su κ).

Teorema 1. *La relazione di immergibilità tra alberi combinatoriali (ovvero grafi connessi ed aciclici) di taglia κ è completa per i quasi-ordini κ-Souslin.*

Teorema 2. *Per ogni quasi-ordine κ-Souslin S esiste un enunciato φ della logica infinitaria $\mathcal{L}_{\kappa^+\kappa}$ tale che S è biriducibile con la relazione di immergibilità tra modelli di φ.*

Tutte le riduzioni coinvolte negli enunciati precedenti sono esplicitamente definibili a partire da una qualunque funzione continua che testimoni che S è κ-Souslin.

Corollario 3. *Assumiamo la determinatezza dei giochi su $\mathbb{R}$. Per ogni quasi-ordine S su $\mathbb{R}$ esiste un cardinale $\kappa < \Theta$ ed un $\mathcal{L}_{\kappa^+\kappa}$-enunciato φ tale che S è biriducibile con la relazione di immergibilità tra modelli di φ.*

Corollario 4. *Nel modello di Solovay, ogni quasi-ordine definibile a partire da parametri reali e ordinali è biriducibile con la relazione di immergibilità tra modelli di un corrispondente $\mathcal{L}_{\omega_2\omega}$-enunciato (mediante riduzioni definibili a partire dagli stessi paramentri).*

Bibliografia

[1] A. Andretta and L. Motto Ros: "κ-Souslin quasi-orders and definable cardinality", in preparation, 2011.

[2] R. Camerlo, A. Marcone and L. Motto Ros: "Invariantly universal analytic quasi-orders", in corso di stampa in *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 2011.

[3] S. Friedman and L. Motto Ros: "Analytic equivalence relations and bi-embeddability", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 76, 243–266, 2011.

[4] A. Louveau and C. Rosendal: "Complete analytic equivalence relations", *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, vol. 357, 4839–4866, 2005.

[5] L. Motto Ros: "On the complexity of the relations of isomorphism and bi-embeddability", in corso di stampa in *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, 2011.

Matteo Penegini: Sulle superfici di tipo generale con $p_g = q = 2$

Matteo Penegini
Dipartimento di Matematica, Università di Bayreuth
email: matteo.penegini@uni-bayreuth.de

Sunto

Lo studio delle superfici algebriche complesse lisce minimali di tipo generale con invarianti bassi ha visto negli ultimi anni sorprendenti sviluppi, in particolare nel caso ove $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$. Se ci limitiamo al caso irregolare (cioè $q > 0$) si ha $1 = \chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g$ che implica $p_q = q > 0$, inoltre le disuguaglianze di Bogomolov-Miyaoka-Yau e di Debarre implicano $2 \leq K_S^2 \leq 9$ e $K_S^2 \geq 2p_g$, dunque $1 \leq p_g \leq 4$. Se $p_g = q = 4$ allora abbiamo un prodotto di due curve di genere 2, come dimostrato da Beauville, il caso $p_g = q = 3$ è stato completamente compreso grazie al lavoro di diversi autori. Sembra che la classificazione diventi via via più complicata al diminuire di p_g. Infatti già del caso $p_g = q = 2$ non abbiamo che una parziale comprensione.

In questa comunicazione illustreremo i risultati da noi ottenuti proprio nel caso $p_g = q = 2$ ([2,3,4]). Questi risultati comprendono la completa classificazione delle superfici che ammettono una fibrazione isotriviale, in particolare abbiamo classificato tutti i casi in cui l'immagine della mappa di Albanese è una curva (si veda anche [1] e [5]). La classificazione è ottenuta studiando i quozienti del prodotto di due curve lisce modulo l'azione di un gruppo finito. Inoltre presenteremo alcuni risultati riguardanti il caso in cui l'immagine della mappa di Albanese è una superficie. Questi risultati sono stati ottenuti in collaborazione con F. Polizzi combinando la teoria dei rivestimenti doppi, tripli e quadrupli e lo studio di fibrati su superfici abeliane polarizzate. Infine descriveremo le componenti connesse dello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale relative a tutte le superfici che abbiamo classificato.

Bibliografia

[1] F. Catanese, *Fibred surfaces, varieties isogenous to a product and related moduli spaces.* Amer. J. Math. **122**, (2000), 1–44.

[2] M. Penegini, *The classification of isotrivial fibred surfaces with* $p_g = q = 2$. With an appendix of S.Rollenske, e-print arXiv:0904.1352.

[3] M. Penegini, F. Polizzi *On surfaces with* $p_g = q = 2$ *and* $K_S^2 = 5$ *and Albanese map of degree* 3, e-print arXiv:1011.4388 (2010).

[4] M. Penegini, F. Polizzi *Surfaces with* $p_g = q = 2$, $K^2 = 6$ *and Albanese map of degree* 2, in preparazione.

[5] F. Zucconi, *Surfaces with $p_g = q = 2$ and an irrational pencil.* Canad. J. Math. Vol. **55**, (2003), 649–672.

Intervento: Matteo Penegini,
On the Classification of Surfaces of General Type with $p_g = q = 2$,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 549–563**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 549-563

On the Classification of Surfaces of General Type with $p_g = q = 2$

MATTEO PENEGINI

Contents

0 - Introduction 549
1 - Product-Quotient Surfaces with $p_g = q = 2$ 552
2 - Surfaces with $p_g = q = 2$ **and** $K_S^2 = 6$ 556
Albanese map of degree 4 556
Albanese map of degree 2 558
3 - Surfaces with $p_g = q = 2$ **and** $K_S^2 = 5$ 560
4 - Surfaces with $p_g = q = 2$ **and** $K_S^2 = 4, 7$ **and** 9 561
References 562

0. – Introduction

The following is an extended version of the talk which I gave at the "*XIX Congresso dell'UMI*" in Bologna in September 2011. The aim of this paper is twofold: first, to give an overview on the recent development in the classification of surfaces of general type with $p_g = q = 2$; second, to point out some of the problems that are still open. Some of the results that will appear in this article have been proven in collaboration with Francesco Polizzi.

We shall use the standard notation from the theory of complex algebraic surfaces. Let S be a smooth, complex, projective *minimal* surface S of *general type*; this means that the canonical divisor K_S of S is *big* and *nef*.

The principal numerical invariants for the study of minimal surfaces of general type are

- the *geometric genus* $p_g(S) := h^0(S, \Omega_S^2) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S))$,
- the *irregularity* $q(S) := h^0(S, \Omega_S^1)$, and
- the *self intersection of the canonical divisor* K_S^2.

As a matter of fact, these determine all the other classical invariants, as

- the *Euler-Poincaré characteristic* $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S)$,

- the *topological Euler number* $e(S) = 12\chi(S) - K_S^2$, and
- the *plurigenera* $P_n(S) = \chi(S) + \binom{n}{2}K_S^2$.

By a theorem of Bombieri, a minimal surface of general type S with fixed invariants is birationally mapped to a normal surface X in a fixed projective space of dimension $P_5(S) - 1$. Moreover, X is uniquely determined and is called the *canonical model* of S. Let us recall Gieseker's Theorem (see [Gie77]).

THEOREM 0.1. – *There exists a quasi-projective coarse moduli space $\mathcal{M}_{K_S^2,\chi}$ for canonical models of surfaces of general type S with fixed invariants K_S^2 and χ.*

In particular, we can also consider the subscheme $\mathcal{M}_{K_S^2,p_g,q} \subset \mathcal{M}_{K_S^2,\chi}$ of surfaces with fixed K_S^2, $p_g(S) = p_g$ and $q(S) = q$, which is a union of connected components of $\mathcal{M}_{K_S^2,\chi}$. The first basic question we would like to answer is

QUESTION 0.2. – *For which values of (K_S^2, p_g, q) is $\mathcal{M}_{K_S^2,p_g,q}$ not empty?*

Much is known about this question; indeed, we have the following classical inequalities:

- $K_S^2 \geq 1$ and $\chi \geq 1$.
- $K_S^2 \leq 9\chi(S)$ (Bogomolov-Miyaoka-Yau).
- $K_S^2 \geq 2p_g$, if $q > 0$, (Debarre).
- $K_S^2 \geq 2\chi - 6$ (Noether).

Once we have established that $\mathcal{M}_{K_S^2,p_g,q} \neq \emptyset$, the second basic question is

QUESTION 0.3. – *Can we describe $\mathcal{M}_{K_S^2,p_g,q}$?*

For example, can we find out the number of connected components it consists and their dimensions?

We are interested in surfaces with small invariants, and in particular in surfaces with $\chi(S) = 1$, which is the smallest possible value for a surface of general type. This implies that $p_g = q$ and the above inequalities yield

$$0 \leq p_g \leq 4.$$

A partial classification of these surfaces has already been accomplished. In the case $\mathbf{p_g = q = 4}$ we have a full classification theorem.

THEOREM 0.4 [B82]. – *If S is a minimal surface of general type with $p_g = q = 4$, then S is a product of two curves of genus 2 and $K_S^2 = 8$. Moreover, $\mathcal{M}_{8,4,4}$ consists of exactly one connected component of dimension 6.*

Also, in the case $\mathbf{p_g = q = 3}$ we have a full classification theorem due to several authors: [CCML98], [HP02], and [Pi02].

THEOREM 0.5. – *Let S be a minimal surface of general type with $p_g = q = 3$, then there are only two possibilities:*

(1) $K_S^2 = 8$, *and $S = (C \times F)/G$ where C is a curve of genus 2, F is a curve of genus 3 and $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Here G acts freely and diagonally on the product $C \times F$, on C as a hyperelliptic involution, and on F as a fixed point free involution. Moreover, $\mathcal{M}_{8,3,3}$ consists of exactly one connected component of dimension 5.*

(2) $K_S^2 = 6$, *and S is the symmetric square of a genus 3 curve. Moreover, $\mathcal{M}_{6,3,3}$ consists of exactly one connected component of dimension 6.*

On the other hand, in the case $p_g \leq 2$ a complete classification theorem is still missing. It seems that the classification becomes more complicated as the value of p_g decreases. In this paper, we address the case $p_g = q = 2$.

Since we are dealing with irregular surfaces, i.e., with $q > 0$, a useful tool that we can use is the Albanese map. The *Albanese variety* of S is defined as $\mathrm{Alb}(S) := H^0(\Omega_S^1)^\vee / H_1(S, \mathbb{Z})$. By Hodge theory, $\mathrm{Alb}(S)$ is an abelian variety. For a fixed base point $x_0 \in S$, we define the *Albanese* morphism

$$\alpha_{x_0} : S \longrightarrow \mathrm{Alb}(S), \qquad x \mapsto \int_{x_0}^{x} .$$

If we choose a different base point in S, the Albanese morphism changes by a translation of $\mathrm{Alb}(S)$; so we often ignore the base point and write α.

The dimension of $\alpha(S)$ is called the *Albanese dimension* of S and it is denoted by Albdim(S). If $\mathrm{Albdim(S)} = 2$, we say that S has *maximal Albanese dimension*. If, moreover, $q(S) > 2$, we say that S is of *Albanese general type*.

For surfaces with $q(S) = 2$, we have two possibilities:

(1) either $\alpha(S)$ is a curve, or
(2) α is a generically finite cover of an abelian surface.

In the latter case, the degree of α plays a crucial role. Indeed, if $q(S) = 2$, then the degree of the Albanese map α is a topological invariant, see e.g. [Ca11, Section 5].

In this paper, we want to present the up-to-date list of the known surfaces of general type with $\mathbf{p_g = q = 2}$, which can be shortly summarized in the following table.

TABLE 0.

n.	K_S^2	$Albdim(S)$	$\deg \alpha$	$\sharp$ Families	dim	Name
1	8	1	–	24	$3^{15}, 4^6, 5^2, 6$	Isog. to a Prod.
2	8	2	≤ 6	4	$3^3, 4$	Isog. to a Prod.
3	6	2	4	1	4	
4	6	2	2	3	$4^2, 3$	
5	5	2	3	1	4	Chen-Hacon surf.
6	4	2	2	1	4	Catanese surf.

In the table we used the notation 3^{15} to mean that there are 15 families of dimensions 3.

The paper is organized as follows. We shall describe the families of our surfaces following the numeration of Table 0.

Indeed, in the first section we shall treat the case where $\alpha(S)$ is a curve. Here we have a complete classification theorem. We introduce the surfaces isogenous to a product of curves and some of their properties. The end of the section is dedicated to product-quotient surfaces, which are a generalization of surfaces isogenous to a product.

In the second section, we describe the four families of surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 6$. Three families are characterized by the fact that their elements have Albanese map of degree 2, while the last one has Albanese map of degree 4.

The third section is devoted to describe *Chen-Hacon surfaces*. These surfaces were introduced by Chen and Hacon in [CH06] and together with F. Polizzi were able to give a description of the connected component of the moduli space of surfaces of general type they belong to.

The last section is devoted to the last cases and to give an account of the open problems on this topic.

1. – Product-Quotient Surfaces with $p_g = q = 2$

A surface S is said to be *isogenous to a (higher) product of curves* if and only if S is a quotient $S := (C \times F)/G$, where C and F are curves of genus at least two, and G is a finite group acting freely on $C \times F$.

Let S be a surface isogenous to a higher product, and $G^\circ := G \cap (Aut(C) \times Aut(F))$. Then G° acts on the two factors C and F and diagonally on the product $C \times F$. If G° acts faithfully on both curves, we say that $S = (C \times F)/G$ is a *minimal realization* of S. In [Ca00], the author proves that any surface iso-

genous to a higher product admits a unique minimal realization. From now on we shall work only with minimal realizations.

There are two cases: the *mixed* case where the action of G exchanges the two factors (in this case C and F are isomorphic and $G^\circ \neq G$); the *unmixed* case (where $G = G^\circ$, and therefore it acts diagonally).

Moreover, we observe that a surface isogenous to a product of curves is of general type. It is always minimal and its numerical invariants are explicitly given in terms of the genera of the curves and the order of the group. Indeed, we have the following proposition.

PROPOSITION 1.1. – *Let $S = (C \times F)/G$ be a surface isogenous to a higher product of curves, then:*

$$\chi(S) = \frac{(g(C)-1)(g(F)-1)}{|G|},$$

$$e(S) = \frac{4(g(C)-1)(g(F)-1)}{|G|},$$

$$K_S^2 = \frac{8(g(C)-1)(g(F)-1)}{|G|}.$$

In the unmixed case G acts separately on C and F, and the two projections $\pi_C: C \times F \longrightarrow C$, $\pi_F: C \times F \longrightarrow F$ induce two isotrivial fibrations $\alpha: S \longrightarrow C/G$, $\beta: S \longrightarrow F/G$, whose smooth fibres are isomorphic to F and C, respectively.

A surface isogenous to a product of unmixed type $S := (C \times F)/G$ is said to be of *generalized hyperelliptic type* if:

(1) the Galois covering $\pi_1 : C \to C/G$ is unramified, and
(2) the quotient curve F/G is isomorphic to $\mathbb{P}^1$.

Surfaces of generalized hyperelliptic type play a crucial role among surfaces with $p_g = q = 2$ because of the following proposition.

PROPOSITION 1.2 ([Z03] Prop. 4.2). – *If S is a surface of general type with $p_g = q = 2$ and* $\mathrm{Albdim}(S) = 1$. *Then S is of generalized hyperelliptic type.*

By this proposition, once we classify all the surfaces isogenous to a product with $p_g = q = 2$, we also achieve the classification of all the ones such that $\alpha(S)$ is a curve. This work was started by Zucconi in [Z03] and completed in [Pe11]. We can summarize the results in the following theorem.

THEOREM 1.3 ([Pe11] Theorem 1.1). – *Let S be a surface isogenous to a higher product of curves with $p_g = q = 2$. Then we have the following possibilities:*

(1) *If Albdim$(S)) = 1$, then $S \cong (C \times F)/G$ and it is of generalized hyperelliptic type. The classification of these surfaces is given by the cases labelled with GH in Table* 1, *where we specify the possibilities for the genera of the two curves C and F, and for the group G.*

(2) *If Albdim$(S)) = 2$, then there are two cases:*

- *S is isogenous to product of curves of unmixed type $(C \times F)/G$, and the classification of these surfaces is given by the cases labelled with UnMix in Table* 1*;*
- *S is isogenous to a product of curves of mixed type $(C \times C)/G$, there is only one such case and it is labelled with Mix in Table* 1;

TABLE 1.

Type	K_S^2	$g(F)$	$g(C)$	G	IdSmallGroup	$\boldsymbol{m}$	dim	n
GH	8	2	3	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	*G(2,1)*	(2^6)	6	1
GH	8	2	4	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	*G(3,1)*	(3^4)	4	1
GH	8	2	5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	*G(4,2)*	(2^5)	5	2
GH	8	2	5	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	*G(4,1)*	$(2^2, 4^2)$	4	1
GH	8	2	6	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	*G(5,1)*	(5^3)	3	1
GH	8	2	7	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	*G(6,2)*	$(2^2, 3^2)$	4	1
GH	8	2	7	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	*G(6,2)*	$(3, 6^2)$	3	1
GH	8	2	9	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	*G(8,1)*	$(2, 8^2)$	3	1
GH	8	2	11	$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	*G(10,2)*	$(2, 5, 10)$	3	1
GH	8	2	13	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	*G(12,5)*	$(2, 6^2)$	3	2
GH	8	2	7	$\mathfrak{S}_3$	*G(6,1)*	$(2^2, 3^2)$	4	1
GH	8	2	9	Q_8	*G(8,4)*	(4^3)	3	1
GH	8	2	9	D_4	*G(8,3)*	$(2^3, 4)$	4	2
GH	8	2	13	D_6	*G(12,4)*	$(2^3, 3)$	3	2
GH	8	2	13	$D_{4,3,-1}$	*G(12,1)*	$(3, 4^2)$	3	1
GH	8	2	17	$D_{2,8,3}$	*G(16,8)*	$(2, 4, 8)$	3	1
GH	8	2	25	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$	*G(24,8)*	$(2, 4, 6)$	3	2
GH	8	2	25	$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$	*G(24,3)*	$(3^2, 4)$	3	1
GH	8	2	49	$\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$	*G(48,29)*	$(2, 3, 8)$	3	1
UnMix	8	3	3	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	*G(4,2)*	$(2^2), (2^2)$	4	1
UnMix	8	3	4	$\mathfrak{S}_3$	*G(6,1)*	$(3), (2^2)$	3	1
UnMix	8	3	5	D_4	*G(8,3)*	$(2), (2^2)$	3	1
Mix	8	3	3	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	*G(4,1)*	–	3	1

In Table 1 IdSmallGroup *denotes the label of the group G in the GAP4 database of small groups,* ***m*** *is the branching data, i.e., the number of points (exponent) of given branching order (base) of the covering* $F \to \mathbb{P}^1$ *(e.g.* 2^6 *means that there are six points with ramification order two). Moreover, each item provides a union of connected components of the moduli space of surfaces of general type, their dimension is listed in the column dim, and n is the number of connected components.*

The proof of the theorem involves techniques from both geometry and combinatorial group theory developed in [BCG08] and [CP09].

An idea of the proof of the theorem is the following. There are two cases. In the first case S is not of Albanese maximal dimension; it is of generalized hyperelliptic type, hence one classifies all possible finite groups G which induce a $G-$covering $\pi_F: F \to \mathbb{P}^1$ with $g(F) = 2$ (see [Bol88]). Then we need to check whether such groups G induce an unramified $G-$covering $\pi_C: C \to B \cong C/G$, where the genus of B is 2 and the genus of C is determined by the Riemann-Hurwitz formula. We notice that the action of G on the product $C \times F$ is always free, because the action on C is free.

In the second case, S is of maximal Albanese dimension and it is slightly more difficult. In this case, both projections $C \to C/G$ and $C \to F/G$ are ramified covers of elliptic curves. By [Z03, Corollary 2.4] the genera of C and F can be at most five. Therefore, we can proceed as in the previous case by analyzing all possible combinations of genera. This time we also take into account the fact that, since we do not have an étale cover, we have to check whether the action of G on the product of the two curves is free or not.

REMARK 1.4. – By the above theorem, we know that $\mathcal{M}_{8,2,2}$ consists of at least 28 connected components of dimensions between 3 and 6.

An interesting and still unanswered question is the following one

QUESTION 1.5. – *Is there a surface with* $p_g = q = 2$ *and* $K_S^2 = 8$ *which is not isogenous to a product?*

It is worth noticing that up to now the only known examples of surfaces of general type with $\chi(S) = 1$ and $K_S^2 = 8$ are all isogenous to a higher product of curves. These surfaces have all been classified, in particular for $p_g = q = 1$ see [CP09], and for $p_g = q = 0$ see [BCG08].

The study of surfaces of general type with $p_g = q = 2$ and $\mathrm{Albdim}(S) = 2$ started with a generalization of the definition of surface isogenous to a product. A surface S is said to be a *product-quotient* surface if S is the minimal model of the minimal desingularization of the quotient surface $T := (C_1 \times C_2)/G$ where C_1, C_2 are curves of genus at least two, and G is a finite group acting diagonally but not necessarily freely on the product.

THEOREM 1.6 ([Pe11] Theorem 1.1). – *Let S be a product-quotient surface of general type with $p_g = q = 2$. In particular S is the minimal desingularization of $T := (C_1 \times C_2)/G$, and these surfaces are classified in Table 2.*

TABLE 2.

K_S^2	$g(C_1)$	$g(C_2)$	G	IdSmallGroup	$\boldsymbol{m}$	*Type*	*Num. Sing.*	*dim*	n
4	2	2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	*G(2,1)*	$(2^2)(2^2)$	$\frac{1}{2}(1,1)$	4	4	1
4	3	3	D_4	*G(8,3)*	(2) (2)	$\frac{1}{2}(1,1)$	4	2	1
4	3	3	Q_8	*G(8,4)*	(2) (2)	$\frac{1}{2}(1,1)$	4	2	1
5	3	3	$\mathfrak{S}_3$	*G(6,1)*	(3)(3)	$\frac{1}{3}(1,1)+\frac{1}{3}(1,2)$	2	2	1
6	4	4	$\mathfrak{A}_4$	*G(12,3)*	(2) (2)	$\frac{1}{2}(1,1)$	2	2	1

In Table 2 each item provides a union of irreducible subvarieties of the moduli space of surfaces of general type, their dimension is listed in the column dim and n is the number of subvarieties. Moreover the columns of Table 2 labelled with Type and Num.Sing. indicate the types and the number of singularities of T.

We observe that a complete classification of product-quotient surfaces of general type with $\chi(S) = 1$ and $p_g \leq 1$ is still missing. A partial classification for the ones with $p_g = q = 1$ is given in [MP10] and for the ones with $p_g = q = 0$ in [BP11].

2. – Surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 6$

Albanese map of degree 4

We briefly recall the construction of the surface with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 6$ given in Theorem 1.6. Let us denote by $\mathfrak{A}_4$ the alternating group on four symbols and by V_4 its Klein subgroup, namely

$$V_4 = \langle id,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

V_4 is normal in $\mathfrak{A}_4$ and the quotient $H := \mathfrak{A}_4/V_4$ is a cyclic group of order 3. By Riemann's existence theorem, it is possible to construct two smooth curves C_1, C_2 of genus 4 endowed with an action of $\mathfrak{A}_4$ such that the only non-trivial stabilizers are the elements of V_4. Then

- $E_i' := C_i/\mathfrak{A}_4$ is an elliptic curve;
- the $\mathfrak{A}_4$-cover $f_i\colon C_i \to E_i'$ is branched at exactly one point of E_i', with branching order 2.

It follows that the surface

$$\widehat{X} := (C_1 \times C_2)/\mathfrak{A}_4,$$

where $\mathfrak{A}_4$ acts diagonally, has two rational double points of type $\frac{1}{2}(1, 1)$ and no other singularities. It is straightforward to check that the desingularization $\widehat{S}$ of $\widehat{X}$ is a minimal surface of general type with $p_g = q = 2$, $K^2_{\widehat{S}} = 6$ and that $\widehat{X}$ is the canonical model of $\widehat{S}$.

The $\mathfrak{A}_4$-cover $f_i: C_i \to E'_i$ factors through the bidouble cover $g_i: C_i \to E_i$, where $E_i := C_i/V_4$. Note that E_i is again an elliptic curve, so there is an isogeny $E_i \to E'_i$, which is a triple Galois cover with Galois group H. Consequently, we have an isogeny

$$p: E_1 \times E_2 \to \widehat{A} := (E_1 \times E_2)/H,$$

where the group H acts diagonally, and a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} C_1 \times C_2 \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "g_1 \times g_2"'] & (C_1 \times C_2)/\mathfrak{A}_4 = \widehat{X} \arrow[d, "\widehat{\alpha}"] \\ E_1 \times E_2 \arrow[r, "p"] & (E_1 \times E_2)/H = \widehat{A}. \end{tikzcd} \tag{1}$$

The morphism $\hat{\alpha}: \widehat{X} \to \widehat{A}$ is the Albanese map of $\widehat{X}$; it is a finite, non-Galois quadruple cover.

This last observation led us to study surfaces $\widehat{S}$ with $p_g = q = 2$ and $K^2_{\widehat{S}} = 6$ whose Albanese map $\hat{\alpha}: \widehat{S} \to \widehat{A} := \mathrm{Alb}(\widehat{S})$ is a quadruple cover of an abelian surface $\widehat{A}$, in order to understand and describe the deformations of $\widehat{S}$.

The main result in the theory of quadruple cover for algebraic varieties is the following.

THEOREM 2.1 ([HM99, Theorem 1.2]). – *Let Y be a smooth algebraic variety. Any quadruple cover $f: X \longrightarrow Y$ is determined by a locally free $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{E}^\vee$ of rank 3 and a totally decomposable section $\eta \in H^0(Y, \bigwedge^2 S^2\mathcal{E}^\vee \otimes \bigwedge^3 \mathcal{E})$.*

The vector bundle $\mathcal{E}^\vee$ is called the *Tschirnhausen bundle* of the cover.

We have $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{E}^\vee$.

In the situation above, we can prove that the Tschirnhausen bundle $\mathcal{E}^\vee$ associated with the Albanese cover is of the form $\Phi^{\mathcal{P}}(\mathcal{L}^{-1})^\vee$, where $\mathcal{L}$ is a polarization on A (the dual abelian variety of $\widehat{A}$) and $\Phi^{\mathcal{P}}$ denotes the Fourier-Mukai transform with kernel the normalized Poincaré bundle $\mathcal{P}$ i.e.,

$$\mathcal{E} = \Phi^{\mathcal{P}}(\mathcal{L}^{-1}) := R^i\pi_{\widehat{A}*}(\mathcal{P} \otimes \pi_A^*\mathcal{L}^{-1}).$$

More precisely, the bundle $E^\vee$ has rank 3 and $\mathcal{L}$ is a polarization of type (1, 3).

We are able to prove the following theorem.

THEOREM 2.2 ([PP12, Theorem 2.1]). – *There exists a* 4*-dimensional family* $\mathcal{M}_\Phi$ *of minimal surfaces of general type with* $p_g = q = 2$ *and* $K^2_{\widehat{S}} = 6$ *such that, for the general element* $\widehat{S} \in \mathcal{M}_\Phi$*, the canonical class* $K_{\widehat{S}}$ *is ample and the Albanese map* $\hat{\alpha}: \widehat{S} \longrightarrow \widehat{A}$ *is a finite cover of degree* 4.

The Tschirnhausen bundle $\mathcal{E}^\vee$ *associated with* $\hat{\alpha}$ *is isomorphic to* $\Phi^{\mathcal{P}}(L^{-1})$*, where* $\mathcal{L}$ *is a polarization of type* $(1, 3)$ *on* A.

The family $\mathcal{M}_\Phi$ *provides an irreducible component of the moduli space* $\mathcal{M}_{6,2,2}$ *of canonical models of minimal surfaces of general type with* $p_g = q = 2$ *and* $K^2 = 6$*. Such a component is generically smooth and contains the* 2*-dimensional family of product-quotient surfaces given in Theorem* 1.6.

This theorem is obtained by extending the construction given in [CH06] to the much more complicated case of quadruple covers. More precisely, in order to build a quadruple cover $\hat{\alpha}: \widehat{S} \longrightarrow \widehat{A}$ with Tschirnhausen bundle $\mathcal{E}^\vee$, we first build a quadruple cover $\alpha: S \longrightarrow A$ with Tschirnhausen bundle $\phi^*_{\mathcal{L}^{-1}}\mathcal{E}^\vee$ (here $\phi_{\mathcal{L}}: A \to \widehat{A}$ denotes the group homomorphism sending $x \in A$ to $t^*_x\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L} \in \widehat{A}$) and then, by using the Schrödinger representation of the finite Heisenberg group $\mathcal{H}_3$ on $H^0(A, \mathcal{L})$, we identify the covers of this type which descend to a quadruple cover $\hat{\alpha}: \widehat{S} \longrightarrow \widehat{A}$. For the general surface $\widehat{S}$, the branch divisor $\widehat{B} \subset \widehat{A}$ of $\alpha: \widehat{S} \longrightarrow \widehat{A}$ is a curve in the linear system $|\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes 2}|$, where $\widehat{\mathcal{L}}$ is a polarization of type $(1, 3)$ on $\widehat{A}$. $\widehat{B}$ has six ordinary cusps and no other singularities; such a curve is $\mathcal{H}_3$-equivariant and can be associated with the dual of a member of the Hesse pencil of plane cubics in $\mathbb{P}^2$. Once we have established these facts with the help of a MAGMA script, we can show that $\widehat{S}$ is smooth in the general case.

Albanese map of degree 2

In [PP11] we give other families of surfaces with $p_g = q = 2$, $K^2_S = 6$, and with Albanese map of degree equal to two.

Let us introduce some notation. Let $(A, \mathcal{L})$ be a $(1, 2)$-polarized abelian surface and let us denote by $\phi_2: A[2] \to \widehat{A}[2]$ the restriction of the canonical homomorphism $\phi_{\mathcal{L}}: A \to \widehat{A}$ to the subgroup of 2-division points. Then $\operatorname{im}\phi_2$ consists of four line bundles $\{\mathcal{O}_A, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3\}$. Let us denote by $\operatorname{im}\phi_2^\times$ the set $\{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3\}$.

THEOREM 2.3 ([PP11, Theorem A]). – *Given an abelian surface* A *with a symmetric polarization* $\mathcal{L}$ *of type* $(1, 2)$*, not of product type, for any* $\mathcal{Q} \in \operatorname{im}\phi_2$ *there exists a curve* $D \in |\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{Q}|$ *whose unique singularity is an ordinary quadruple point at the origin* $o \in A$*. Let* $\mathcal{Q}^{1/2}$ *be a square root of* $\mathcal{Q}$*, and if* $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_A$

assume moreover $\mathcal{Q}^{1/2} \neq \mathcal{O}_A$. Then the minimal desingularization S of the double cover of A branched over D and defined by $\mathcal{L} \otimes \mathcal{Q}^{1/2}$ is a minimal surface of general type with $p_g = q = 2$, $K_S^2 = 6$ and Albanese map of degree 2.

Conversely, every minimal surface of general type with $p_g = q = 2$, $K_S^2 = 6$ and Albanese map of degree 2 can be constructed in this way.

When $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{1/2} = \mathcal{O}_A$, we obtain a minimal surface with $p_g = q = 3$, which correspond to the second case of Theorem 0.5.

We use the following terminology:

- if $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_A$ we say that S is a *surface of type I*. Furthermore, if $\mathcal{Q}^{1/2} \notin \operatorname{im} \phi_2$ we say that S is of type Ia, whereas if $\mathcal{Q}^{1/2} \in \operatorname{im} \phi_2^{\times}$ we say that S is of type Ib;
- if $\mathcal{Q} \in \operatorname{im} \phi_2^{\times}$ we say that S is a *surface of type II*.

Recall that the degree of the Albanese map in this case is a topological invariant since $q(S) = 2$. Therefore, let us consider the moduli space $\mathcal{M}$ of minimal surfaces of general type with $p_g = q = 2$, $K_S^2 = 6$ and Albanese map of degree 2. Let $\mathcal{M}_{Ia}$, $\mathcal{M}_{Ib}$, $\mathcal{M}_{II}$ be the algebraic subsets whose points parametrize isomorphism classes of surfaces of type Ia, Ib, II, respectively. Therefore $\mathcal{M}$ can be written as the disjoint union

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{Ia} \sqcup \mathcal{M}_{Ib} \sqcup \mathcal{M}_{II}.$$

Our result on the moduli space is

THEOREM 2.4 ([PP11, Theorem B]). – *The following holds:*

(i) *$\mathcal{M}_{Ia}$, $\mathcal{M}_{Ib}$, $\mathcal{M}_{II}$ are the connected components of $\mathcal{M}$;*

(ii) *these are also irreducible components of the moduli space of minimal surfaces of general type;*

(iii) *$\mathcal{M}_{Ia}$, $\mathcal{M}_{Ib}$, $\mathcal{M}_{II}$ are generically smooth, of dimension 4, 4, 3, respectively;*

(iv) *the general surface in $\mathcal{M}_{Ia}$ and $\mathcal{M}_{Ib}$ has ample canonical class; all surfaces in $\mathcal{M}_{II}$ have ample canonical class.*

Some interesting questions remain open also for surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 6$ namely

QUESTION 2.5. – • Is $\mathcal{M}_{\Phi}$ a *connected* component of $\mathcal{M}_{6,2,2}$?

- What are the possible degrees for the Albanese map of a minimal surface with $p_g = q = 2$ and $K^2 = 6$?
- What are the irreducible/connected components of $\mathcal{M}_{6,2,2}$?

3. – Surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 5$

A similar calculation as the one in the previous section shows that any element of the family of surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 5$ given in Theorem 1.6 has Albanese map of degree 3. Moreover, for such element S the image $\alpha(S)$ is an abelian surface with a polarization of type $(1, 2)$. In order to understand the connected components of the moduli space that contains this family, we have to study triple covers in detail.

Let us introduce some terminology. Let S be a minimal surface of general type with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 5$, such that its Albanese map $\alpha: S \to \mathrm{Alb}(S)$ is a generically finite morphism of degree 3. If we consider the Stein factorization of α, i.e.,

$$S \xrightarrow{p} \widehat{X} \xrightarrow{\hat{f}} \mathrm{Alb}(S),$$

the map $\hat{f}: \widehat{X} \to \mathrm{Alb}(S)$ is a flat triple cover, which can be studied by applying the techniques developed in [M85]. In particular, $\hat{f}$ is determined by a rank 2 vector bundle $\mathcal{E}^\vee$ on $\mathrm{Alb}(S)$, called the *Tschirnhausen bundle* of the cover, and by a global section $\eta \in H^0(\mathrm{Alb}(S), S^3\mathcal{E}^\vee \otimes \bigwedge^2 \mathcal{E})$. In the examples of [CH06] and [Pe11], the surface $\widehat{X}$ is singular; nevertheless, in both cases the numerical invariants of $\mathcal{E}$ are the same predicted by the formulae of [M85], as if $\widehat{X}$ were smooth. This leads us to introduce the definition of *negligible singularity* for a triple cover, which is similar to the corresponding well-known definition for double covers. Then, inspired by the construction in [CH06], we say that S is a *Chen-Hacon surface* if there exists a polarization $\mathcal{L}$ of type $(1, 2)$ on $\mathrm{Pic}^0(S) = \widehat{\mathrm{Alb}(S)}$ such that $\mathcal{E}^\vee$ is the Fourier-Mukai transform of the line bundle $\mathcal{L}^{-1}$.

Our first result is the following characterization of Chen-Hacon surfaces.

THEOREM 3.1 ([PP10, Theorem A]). – *Let S be a minimal surface of general type with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 5$ such that the Albanese map $\alpha: S \to \mathrm{Alb}(S)$ is a generically finite morphism of degree 3. Let*

$$S \xrightarrow{p} \widehat{X} \xrightarrow{\hat{f}} Alb(S)$$

be the Stein factorization of α. Then S is a Chen-Hacon surface if and only if $\widehat{X}$ has only negligible singularities.

Moreover, we can completely describe all the possibilities for the singular locus of $\widehat{X}$. It follows that $\widehat{X}$ is never smooth, and it always contains a cyclic quotient singularity of type $\frac{1}{3}(1, 1)$. Therefore S always contains a (-3)-curve, which turns out to be the fixed part of the canonical system $|K_S|$.

Now let $\mathcal{M}_{5,2,2}$ be the moduli space of surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 5$, and let $\mathcal{M}^{CH} \subset \mathcal{M}_{5,2,2}$ be the subset of the points parametrizing (isomorphism classes of) Chen-Hacon surfaces. Our second result is the following.

THEOREM 3.2 ([PP10, Theorem B]). – *$\mathcal{M}^{CH}$ is an irreducible, connected, generically smooth component of $\mathcal{M}_{5,2,2}$ of dimension* 4.

It is worth noticing that Theorem 3.2 shows that every small deformation of a Chen-Hacon surface is still a Chen-Hacon surface; in particular, no small deformation of S makes the (-3)-curve disappear. Moreover, since $\mathcal{M}^{CH}$ is generically smooth, the same is true for the first-order deformations. By contrast, Burns and Wahl proved in [BW74] that first-order deformations always smooth all the (-2)-curves. Furthermore, Catanese used this fact in [Ca89] to produce examples of surfaces of general type with everywhere non-reduced moduli spaces. Theorem 3.2 shows rather strikingly that the results of Burns-Wahl and Catanese cannot be extended to the case of (-3)-curves and, as far as we know, provides the first explicit example of this situation.

QUESTION 3.3. – There are mainly three questions open for surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 5$:

- Are there surfaces with these invariants whose Albanese map has degree different from 3?
- Are there surfaces with these invariants whose Albanese map has degree 3, but which are not Chen–Hacon surfaces?
- What are the irreducible/connected components of $\mathcal{M}_{5,2,2}$?

4. – Surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 4, 7$ and 9

Surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 4$ were studied by Ciliberto and Mendes Lopes in [CML02]. The authors classified all surfaces with $p_g = q = 2$ and non-birational bicanonical map (not presenting the standard case). Their result is the following.

THEOREM 4.1. – *If S is a minimal surface of general type with $p_g = q = 2$ and non-birational bicanonical map not presenting the standard case, then S is a double cover of a principally polarized abelian surface (A, Θ), with Θ irreducible. The double cover $S \to A$ is branched along a divisor $B \in |\Theta|$, having at most double points. In particular $K_S^2 = 4$.*

Surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 4$ were also considered by Manetti in his work on Severi's conjecture ([M03]). In particular, Manetti proved that if

$p_g = q = 2$, K_S is *ample*, and $K_S^2 = 4$, then S is a double cover of its Albanese variety, which turns out to be a principally polarized abelian surface (A, Θ). In our investigation on product-quotient surfaces in [Pe11], we constructed three families of surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 4$: see Theorem 1.6. In all these cases, the canonical bundle is not ample; nevertheless, the Albanese map has degree two and the Albanese variety is a principally polarized abelian surface.

Eventualy in [CMLP13], it is proven that all surfaces with $p_g = q = 2$ and $K_S^2 = 4$ are double covers of a principally polarized abelian surface. This also proves that there is only one connected component of the moduli space $\mathcal{M}_{4,2,2}$ of dimension 4.

The cases with $K_S^2 = 7$ and 9 are more mysterious. There are no examples known up to now.

As we have seen, the degree of the Albanese map plays a very important role in the classification of surfaces with $p_g = q = 2$, so it would be nice to have an upper bound on this number. We notice that the degree of the Albanese map of all the families given in Table 0 is always less or equal to $K_S^2 - 2$. Unfortunately we cannot prove that this is the actual upper bound.

Acknowledgments. The author is grateful to G. Bini, F. Catanese, A. Garbagnati, E.C. Mistretta, R. Pignatelli e F. Polizzi for reading and commenting the paper.

REFERENCES

[BCP06] I. Bauer - F. Catanese - R. Pignatelli, *Complex surfaces of general type: some recent progress*. Global aspects of complex geometry. Springer, Berlin (2006), 1-58.

[BCG08] I. Bauer - F. Catanese - F. Grunewald, *The classification of surfaces with $p_g = q = 0$ isogenous to a product*. Pure Appl. Math. Q., **4**, no. 2, part 1 (2008), 547-586.

[BP11] I. Bauer - R. Pignatelli, *The classification of minimal product-quotient surfaces with $p_g = 0$*. Mathematics of Computation **81**, 280 (2012), 2389-2418.

[B78] A. Beauville, *Surfaces Algébriques Complex*. Astérisque **54**, Paris (1978).

[B82] A. Beauville, *L'inegalite $p_g \geq 2q - 4$ pour les surface de type general*. Bull. Soc. Math. France **110**, (1982), 344-346.

[Bol88] O. Bolza, *On binary sextic with linear transformations into themselves*. Amer. J. Math. **10**, (1888), 47-70.

[BW74] D. M. Burns - J. M. Wahl, *Local contributions to global deformations of surfaces*. Invent. Math. **26** (1974), 67-88.

[CP09] G. Carnovale - F. Polizzi, *The classification of surfaces with $p_g = q = 1$ isogenous to a product of curves*. Adv. Geom., Vol. **9**, no. 2 (2009), 233-256.

[Ca89] F. Catanese, *Everywhere non reduced moduli spaces*. Invent. Math. **98** (1989), 293-310.

[Ca91] F. Catanese, *Moduli and classification of irregular Kaehler manifolds (and algebraic varieties) with Albanese general type fibrations*. Invent. Math. **104** (1991), 263-289.

[Ca00] F. Catanese, *Fibred surfaces, varieties isogenous to a product and related moduli spaces*. Amer. J. Math. **122**, (2000), 1-44.

[Ca11] F. Catanese, *A superficial working guide to deformations and moduli*, e-print arXiv:1106.1368, to appear in in the Handbook of Moduli, a volume in honour of David Mumford, to be published by International Press.

[CCML98] F. Catanese - C. Ciliberto - M. Mendes Lopes, *On the classification of irregular surfaces of general type with nonbirational bicanonical map*. Trans. Amer. Math. Soc. **350**, no. 1 (1998), 275-308.

[CH06] J. Chen - C. Hacon, *A Surface of general type with $p_g = q = 2$ and $K^2 = 5$*. Pacific. J. Math. **223** no. 2 (2006), 219-228.

[CML02] C. Ciliberto - M. Mendes Lopes, *On surfaces with $p_g = q = 2$ and non-birational bicanonical map*. Adv. Geom. **2**, n. 3 (2002), 281-300.

[CMLP13] C. Ciliberto - M. Mendes Lopes - R. Pardini, *The classification of minimal irregular surfaces of general type with $K^2 = 2p_g$*, preprint arXiv:1307.6228.

[Gie77] D. Gieseker, *Global moduli for surfaces of general type*. Invent. Math **43**, no. 3 (1977), 233-282.

[HP02] C. Hacon - R. Pardini, *Surfaces with $p_g = q = 3$*. Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 2631-2638.

[HM99] D. W. Hahn - R. Miranda, *Quadruple covers of algebraic varieties*. J. Algebraic Geom. 8 (1999).

[M03] M. Manetti, *Surfaces of Albanese General type and the Severi conjecture*. Math. Nachr., Vol. **261/262** (2003), 105-122.

[M85] R. Miranda, *Triple covers in algebraic geometry*. Amer. J. of Math. **107** (1985), 1123-1158.

[MP10] E. Mistretta - F. Polizzi, *Standard isotrivial fibrations with $p_g = q = 1$ II*. AG/0805.1424.

[Pi02] G. P. Pirola, *Surfaces with $p_g = q = 3$*. Manuscripta Math. **108**, no. 2 (2002), 163-170.

[Pe11] M. Penegini, *The classification of isotrivially fibred surfaces with $p_g = q = 2$*. Collect. Math. **62**, No. 3 (2011), 239-274.

[PP10] M. Penegini - F. Polizzi, *On surfaces with $p_g = q = 2$, $K^2 = 5$ and Albanese map of degree* 3. e-print arXiv:1011.4388 (2010), to appear in Osaka J. Math.

[PP11] M. Penegini - F. Polizzi, *On surfaces with $p_g = q = 2$, $K^2 = 6$ and Albanese map of degree* 2. e-print arXiv:1105.4983 (2011), to appear in Canad. J. Math.

[PP12] M. Penegini - F. Polizzi, *A new family of surfaces with $p_g = q = 2$ and $K^2 = 6$ whose Albanese map has degree* 4. e-print arXiv:1207.3526.

[Z03] F. Zucconi, *Surfaces with $p_g = q = 2$ and an irrational pencil*. Canad. J. Math. Vol. **55** (2003), 649-672.

Matteo Penegini, Dipartimento di Matematica "F. Enriques"
Via Saldini 50, I-20100 Milano, Italy
E-mail: matteo.penegini@unimi.it

Received November 22, 2012 and in revised form September 5, 2013

Federico Poloni: Un nuovo algoritmo per un sistema di equazioni quadratiche nei *branching processes*

Dario Bini
Dipartimento di matematica, Università di Pisa

Beatrice Meini
Dipartimento di matematica, Università di Pisa

Federico Poloni
Scuola Normale Superiore, Technische Universität Berlin
email: `f.poloni@sns.it`

Sunto

Nello studio dei *branching processes* in probabilità applicata si incontrano sistemi di equazioni quadratiche che possono essere espressi nella forma

$$x = a + b(x, x),$$

con $a, x \in \mathbb{R}^n_+$, dove $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ per ogni } i\}$, e $b(u, v) : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ è una forma bilineare. Qui x è incognito, e a e b sono dati in modo che il vettore di tutti uni e sia una soluzione. Nelle applicazioni si richiede la più piccola soluzione non negativa (ordinando componente per componente), che si dimostra esistere.

Tradizionalmente questi sistemi vengono risolti con iterazioni di punto fisso o con il metodo di Newton. Tuttavia ci sono problemi in cui è necessario un grande numero di generazioni prima di identificare il comportamento asintotico del processo, i cosiddetti *casi critici*, e in questi casi tali algoritmi richiedono molte iterazioni prima di convergere alla soluzione. Per esempio, il metodo di Newton converge linearmente anziché quadraticamente nel caso limite.

Proponiamo qui un nuovo algoritmo, la cui teoria si basa sul celebre teorema di Perron–Frobenius. Dopo il cambio di variabile $y := e - x$, interpretiamo il sistema risultante come la condizione che y sia il vettore di Perron di una matrice nonnegativa che dipende in modo affine da y stesso. Da questa formulazione deriva un'iterazione di punto fisso dal comportamento diverso rispetto a quelle preesistenti.

Sorprendentemente, la convergenza di questa iterazione asintoticamente *migliora*, anziché peggiorare, nei casi critici. Nel talk dimostriamo questo fatto e presentiamo alcuni significativi esperimenti numerici. Studiamo gli aspetti teorici dell'iterazione e proponiamo un *preprocessing* che assicura le condizioni di positività e irriducibilità necessarie per lo sviluppo dell'algoritmo. Mostriamo infine che diverse equazioni matriciali studiate separatamente in letteratura possono essere viste come generalizzazioni di questa equazione e inquadrate in una teoria comune.

Bibliografia

[1] B. Meini, F. Poloni, *A Perron iteration for the solution of a quadratic vector equation arising in Markovian binary trees.* SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2011.

[2] D. Bini, B. Meini, F. Poloni *On the solution of a quadratic vector equation arising in Markovian Binary Trees*, arXiv:1011.1233.

Intervento: Federico Poloni,
An Algorithm for Solving Systems of Quadratic Equations in Branching Processes,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 481–486**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 481-486

An Algorithm for Solving Systems of Quadratic Equations in Branching Processes

FEDERICO POLONI

This document contains a short survey of the talk presented by the author during the XIX Conference of the Italian Mathematical Union in 2011; it summarizes and recalls the results described there.

1. – Introduction – Markovian binary trees and classical algorithms

We are interested in studying Markovian binary trees [1, 4, 3, 6, 9], i.e., a family of branching processes characterized by the following laws.

1. At each time instant, a finite number of entities, called "individuals", exist.
2. Each individual can be in any one of N different states (these model, for instance, age classes or difference features in a population).
3. Each individual evolves independently from the others. Depending on its state i, it has a fixed probability b_{ijk} of being replaced by two new individuals ("children") in states j and k respectively, and a fixed probability a_i of dying without producing any offspring.

The characteristics of the population are determined therefore by the vector $a \in \mathbb{R}_+^N$ and the 3-way tensor $B \in \mathbb{R}_+^{N\times N\times N}$, where we denote by $\mathbb{R}_+$ the set of nonnegative reals. Instead of B, it is useful to think in terms of the bilinear map $b : \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+^N$ given by

$$[b(u,v)]_i := \sum_{j,k=1}^{N} b_{ijk} u_j v_k.$$

We denote by e the vector, of dimensions that are clear by the context, all of whose components are 1. With this notation, a necessary compatibility condition for our model is that $e = a + b(e,e)$, that is, for each i we require the probabilities of all the possible events that can happen to an individual in state i to sum to 1.

Markovian binary trees are used not only for population dynamics, but also for instance for modelling computer and networking systems [5]. A natural question is computing the extinction probabilities, i.e., the vector

$x \in \mathbb{R}_+^N$ such that a colony starting from a single individual in state i becomes extinct in a finite time with probability x_i. One can prove [1, 3] that x is the minimal (in the componentwise order) nonnegative solution x_* of the equation

$$x = a + b(x, x).$$

As noted above, $x = e$ is a solution for this equation, although not necessarily the minimal one. In fact, one can define two different families of processes:

- *subcritical* processes, in which $x_* = e$ is the minimal solution, and thus the colony becomes extinct with probability 1. This corresponds, in a suitable sense, to the case in which the average number of children per individual is less than 1.
- *supercritical* processes, in which $x_* \leq e$ and equality does not hold for all components. In this case, there is a nonzero probability that the number of individuals grows indefinitely; this corresponds to the case in which the average number of children pre individual is more than 1.

There is of course an intermediate case, in which the average number of children is *exactly* 1. In this case, the colony becomes extinct with probability 1 but requires on average an infinite time to do that.

There are several algorithms for computing the extinction probabilities x for supercritical processes. Several fixed-point iterations have been studied in [1, 4, 3], e.g.,

$$x_{k+1} = a + b(x_k, x_k) \tag{1}$$

or

$$x_{k+1} = a + b(x_{k+1}, x_k). \tag{2}$$

The latter iteration can be computed explicitly since the map $b(\cdot, x_k)$ is a linear map from $\mathbb{R}^N$ to itself and thus is associated to a matrix, and the stochasticity properties ensure that

$$I - b(\cdot, x_k)$$

is a nonsingular M-matrix.

With this notation, the Newton method takes a similar form, namely

$$x_{k+1} = \big(I - b(\cdot, x_k) - b(x_k, \cdot)\big)^{-1} a. \tag{3}$$

A similar strategy has been suggested in [6], i.e., applying Newton's method to a slightly different fixed-point equation.

These fixed-point iterations share several properties, the most interesting one being that they converge monotonically to the minimal solution x_* when

started from $x_0 = 0$, i.e.,

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \ \leq \ldots,$$

and $x_k \to x_*$.

All of them have probabilitistic explanations, in that x_k can be seen as the probability of the colony becoming extinct under additional restrictions depending on k. The probabilistic interpretations are of great interest to the applied queuing theory community, as they provide better insight on the properties of the method.

The Newton method (3) has quadratic convergence for supercritical processes, but this convergence degrades to linear in the critical case; similarly, (1) and (2) converge linearly, but the convergence speed degrades to sublinear for critical processes. This makes sense intuitively in view of the probabilistic interpretation, since we need to "simulate" many more iterations to determine the asymptotical behavior of a critical process. In particular, it is a common feature of all these algorithms that the convergence is slower for critical or close-to-critical processes.

2. – Perron vector-based algorithms

We wish to propose here an algorithm with a completely different origin and numerical behavior [7, 2, 8]. First of all, for ease of explanation, we make a change of variable by setting $y = e - x$. In this way, y_i is the complement of the extinction probability, i.e., the *survival probability* starting from a single individual. The equation becomes

$$y = b(e - y, y) + b(y, e), \tag{4}$$

or, setting $P_y := b(e - y, \cdot) + b(\cdot, e) \in \mathbb{R}^{N \times N}$,

$$y = P_y y. \tag{5}$$

Since this is a linear change of variable, there are little changes if we apply the traditional fixed point iterations to this reformulation. However, (5) can be interpreted as saying that y is the Perron vector of a nonnegative matrix depending on y itself. This suggests setting up the following fixed-point iteration:

$$y_{k+1} = \text{Perron vector of } P_{y_k}. \tag{6}$$

Perron vectors are determined up to a multiplicative constant; therefore, we have the additional issue of choosing a normalization for y_{k+1}. We make here

the choice of imposing that the residual

$$y_{k+1} - P_{k+1} y_{k+1}$$

be orthogonal to a fixed nonnegative vector w. In principle, any $w > 0$ could work. However, the following result shows that there is a clear best candidate for w.

THEOREM 1 ([7]). – *Let b_t, $t \leq 1$ define a smoothly varying family of supercritical Markovian binary trees that converge to a critical problem for $t \to 1$; Let v_t, y_t be the left and right Perron eigenvectors of*

$$R_t := b_t(e, \cdot) + b_t(\cdot, e), \tag{7}$$

which we suppose to be irreducible for t sufficiently close to 1. *Then, the Jacobian J_t of the iteration map is such that*

$$\lim_{t \to 1} \rho(J_t) = \left| 1 - \frac{v_1^T b_1(y_1, y_1) \cdot w^T y_1}{w^T b_1(y_1, y_1) \cdot v_1^T y_1} \right|$$

In particular, choosing $w = v_1$ the right-hand side vanishes and thus we have superlinear convergence in the limit $t \to 1$.

The work [2] suggests a deflation algorithm to deal with cases in which R_1 is not irreducible; essentially, we can split the problem into two smaller ones which can be solved one after the other. It is proved in the same paper that, when the algorithm converges, it always converges to the minimal solution rather than spurious ones.

Moreover, it is possible to construct a Newton-type algorithm based on the same fixed-point equation (6).

The previous result works whenever R_t as in (7) is irreducible in a neighbourhood of $t = 1$ (or, equivalently, for $t = 1$). Problems with a reducible matrix $R = b(e, \cdot) + b(\cdot, e)$ can be dealt with by reducing to two smaller problems, with a strategy which is analogue to (block) back-substitution for block triangular systems.

3. – Numerical experiments

Numerical experiments reveal that, unlike the previous algorithm, the convergence is not in general monotone; indeed, for problems which are very far from the critical case (and thus "easy to solve" in the framework of the classical algorithms), this new method can fail to converge.

Nevertheless, in close-to-critical problems, convergence is surprisingly fast. We report numerical experiments for two parameter-dependent problems in Figures 1 and 2. The upward spikes in the classical Newton algorithm (red line) correspond to values of λ for which the problem is critical; in these cases, the algorithm is slower as expected. However, the Perron-

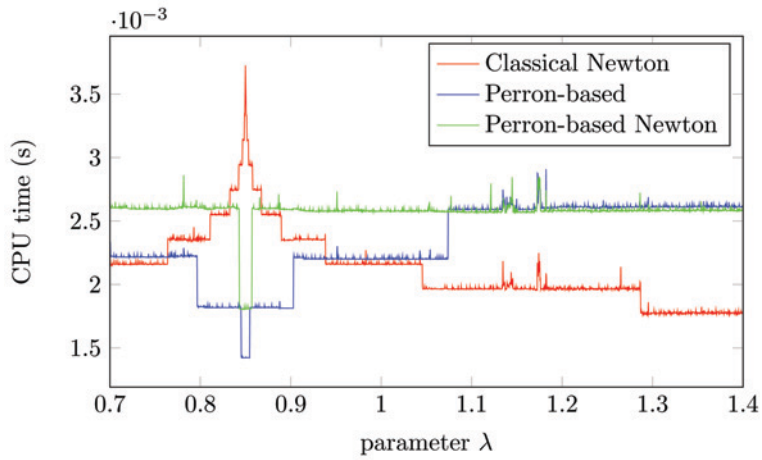


Fig. 1. – Computational times vs. parameter for a parameter-dependent problem [4, Example 1].

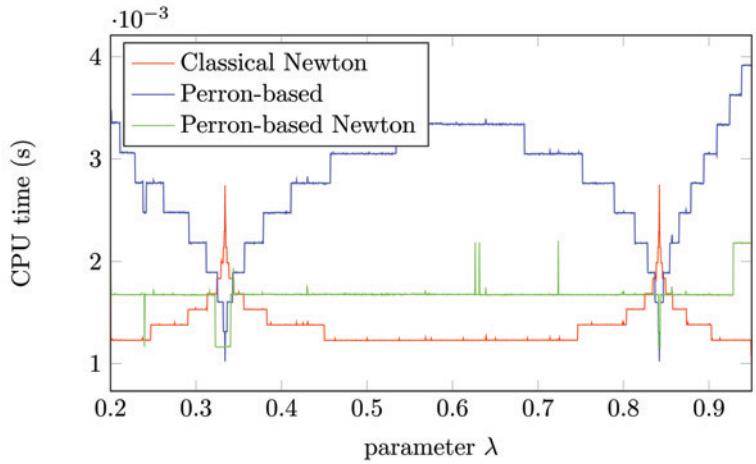


Fig. 2. – Computational times vs. parameter for a parameter-dependent problem [4, Example 2].

based algorithms (the fixed-point iteration (6) and its Newton-based variant) show the opposite behavior and become faster instead when the problem is close-to-critical.

Overall, the proposed algorithm is faster than the classical algorithms for close-to-critical problems, and is thus the recommended choice in these cases.

REFERENCES

[1] N. G. Bean - N. Kontoleon - P. G. Taylor, *Markovian trees: properties and algorithms*, Ann. Oper. Res., **160** (2008), 31-50.

[2] D. A. Bini - B. Meini - F. Poloni, *On the solution of a quadratic vector equation arising in Markovian binary trees*, Numer. Linear Algebra Appl., **18**, n. 6 (2011), 981-991.

[3] S. Hautphenne - G. Latouche - M.-A. Remiche, *Algorithmic Approach to the Extinction Probability of Branching Processes*, Methodology and Computing in Applied Probability (2010).

[4] S. Hautphenne - G. Latouche - M.-A. Remiche, *Newton's iteration for the extinction probability of a Markovian binary tree*, Linear Algebra Appl., **428** (11-12) (2008), 2791-2804.

[5] S. Hautphenne - K. Leibnitz - M.-A. Remiche, *Modeling of P2P file sharing with a level-dependent QBD process*, Advances in queueing theory and network applications, (Springer, New York, 2009), 247-263.

[6] S. Hautphenne - B. Van Houdt, *On the link between Markovian trees and tree-structured Markov chains*, European Journal of Operational Research, **201**, n. 3 (2010), 791-798.

[7] B. Meini - F. Poloni, *A Perron iteration for the solution of a quadratic vector equation arising in Markovian binary trees*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **32**, n. 1 (2011), 248-261.

[8] F. Poloni, *Algorithms for quadratic matrix and vector equations*, Vol. 16, Tesi. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie) [Theses of Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)], Dissertation, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2011, pp. xvi+239.

[9] F. Poloni, *Quadratic vector equations*, Linear Algebra and its Applications, Vol. **438**, n. 4 (2013), 1627-1644 (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379511004484?np=y).

Università di Pisa, Dipartimento di Informatica
Largo Pontecorvo, 3; 56127 Pisa (Italy)
E-mail: fpoloni@di.unipi.it

Received July 11, 2012 and accepted May 21, 2013

Marina Popolizio: Approssimazione numerica di funzioni di matrice per equazioni differenziali frazionarie

Marina Popolizio
Dipartimento di Matematica, Università del Salento, Lecce
email: marina.popolizio@unisalento.it

Roberto Garrappa
Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Bari

Sunto

L'approssimazione numerica di funzioni di matrice riveste un ruolo molto importante in diversi settori scientifici ed in particolare nella risoluzione delle equazioni differenziali.

Tra le funzioni di matrice l'esponenziale è indubbiamente una tra quelle maggiormente studiate e svolge un ruolo fondamentale nell'ambito degli *integratori esponenziali* per sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Questa presentazione, riprendendo alcuni dei risultati proposti in [1,2], mostra l'analogo ruolo, nell'ambito della risoluzione numerica di equazioni differenziali frazionarie (FDE), di una particolare classe di funzioni di matrice legate alla funzione di Mittag-Leffler.

L'uso di derivate di ordine non intero è in notevole aumento rispetto al passato, grazie anche alle tecniche sempre più efficienti proposte per la loro risoluzione numerica.

Partendo dall'introduzione delle funzioni di matrice che intervengono nella generalizzazione alle FDE di integratori esponenziali, si mostreranno le difficoltà implementative e si presenteanno alcune tecniche per la valutazione numerica di funzioni di Mittag-Leffler generalizzate con argomento matriciale.

Bibliografia

[1] R. Garrappa, M. Popolizio, Generalized Exponential Time Differencing methods for fractional order problems, Computers and Mathematics with Applications, 2011

[2] R. Garrappa, M. Popolizio, On the use of matrix functions for fractional partial differential equations, Mathematics and Computers in Simulation, 2011

[3] I. Moret, M. Popolizio, Restarted Rational Krylov approximations to matrix functions, Preprint (2011)

Intervento: Matina Popolizio,
Numerical Approximation of Matrix Functions for Fractional Differential Equations,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 793–815**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 793-815

Numerical Approximation of Matrix Functions for Fractional Differential Equations

MARINA POPOLIZIO

Sunto. – *In questo lavoro si presentano delle connessioni rilevanti tra le funzioni di matrice e la soluzione di equazioni differenziali di ordine frazionario. Questo nesso è stato notato solo recentemente ed ora riscuote notevole interesse. Si presenta qui una rassegna dei fondamenti del calcolo frazionario e della teoria dell'approssimazione di funzioni di matrice; si mostrano inoltre i contributi che, insieme ad i miei coautori, abbiamo recentemente elaborato su questo argomento* [13, 14, 15, 16, 32].

Abstract. – *In this paper relevant insights are given on the connection between matrix functions and the solution of differential equations of fractional order. This nexus only recently has been disclosed and is gaining weight in the current research. We present here a review on the basics of fractional calculus and matrix function approximations, together with the main results my coauthors and me have given to the subject in the recent works* [13, 14, 15, 16, 32].

1. – Introduction

Functions of matrices deserve a fundamental role in several branches of applied sciences as biology, physics, engineering and many others.

From a theoretical point of view, the first one to address the problem of matrix functions was Cayley who, in his paper *A Memoir on the Theory of Matrices* dated back to 1858, treated the square root of a matrix of dimension 2×2 and 3×3. The formal definition of matrix function dates back to 1883 and is due to Sylvester. Matrix functions appear in several important applications and this makes their numerical approximation a fundamental topic in the research community; many different approaches have been proposed during the last years; we cite, among the others, [27, 28, 39, 30, 24, 36, 5, 6, 37, 38, 29, 31, 32] and the recent book by Higham [19] completely devoted to this subject.

The most common matrix function is certainly the exponential and it is also the most studied one from the computational point of view. The applications involving this matrix are several and very common: among the most important we cite its role in the solution of systems of ordinary differential equations

(ODEs) of the form

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

whose solution is

$$y(t) = \exp(tA)y_0.$$

It is thus clear that the matrix exponential has a key role in the numerical solution of systems of differential equations; however, in this field other matrix functions are very important, as we will discuss in Section 3 when introducing methods for differential equations of fractional order.

Systems of ODEs like (1) derive from real life models or, more often, are the result of the process of discretization of partial differential equations (PDEs) by means of the *method of lines*, that consists in discretizing only the spatial derivatives to reduce the problem to a system of differential equations just in the time variable.

This is actually the source of some of the difficulties one faces in the numerical approximation of matrix functions. Indeed, in this context the dimension of the matrix argument A is usually large, while the classical numerical methods only work for small dimension problems. To find effective numerical methods for large dimension problems is thus compelling, with efficiency intended both for the computational costs and for the memory requirements.

2. – Fractional calculus

The origin of fractional calculus is far and, probably, this history dates back to 1695, when Leibnitz and L'Hopital started to intellectualize about the meaning of derivative of order 1/2. The theoretical analysis of this topic has received a great attention and important results have been collected over the years; this development is due also to the interest that the subject receives from many fields, such as control theory, finance, physics and many others. A meaningful example of the importance of fractional calculus is the class of *non-newtonian* fluids, as asphalt, rubbers and polymers, whose dynamics are adequately described only through models involving fractional derivatives.

For a deep analysis of the subject and for a wide list of references we refer to the cornerstone books [34, 22] and, for the more recent developments, to [8, 9, 10, 11, 15, 18].

A differential equation of *fractional order* (FDE) is of the form

$$D_0^\alpha y(t) = g(t, y(t)) \tag{2}$$

where $\alpha > 0$ is the fractional order. Different definitions hold for the fractional

derivative $D_0^\alpha y(t)$; however, for the applications, usually the Caputo's definition, given in 1967, is preferred

$$D_0^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \left(\frac{d^m}{d\tau^m} y(\tau) \right) d\tau, \ m = \lceil \alpha \rceil.$$

Indeed, with this definition, (2) can be combined with initial conditions of the form

$$y^{(k)}(0) = y_{0,k}, \quad k = 0, \dots, m-1$$

which, as in the case of ODEs, have a clear physical meaning.

Substantial differences with the ordinary derivatives arise from the definition of D_0^α: indeed, it involves an integral over the whole interval $[0, T]$ (for this reason the origin is pointed out in the symbol of fractional derivative operator). This is a very interesting feature of the fractional derivatives and a strong point of it: indeed, this integral representation works well in describing all those phenomena "with memory", for example in finance, psychology, rheology and so on.

However the numerical computation of the fractional derivatives is clearly more difficult for this feature; indeed there is no possibility to extend the classical methods for ODEs which substantially work in a step-by-step way.

For linear FDEs the solution can be easily recovered by means of the *variation of constants formula*. Let consider the solution of the following system of linear FDEs

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(t) + Ay(t) = g(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3}$$

The Laplace transform applied to every term gives

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y_0 + AY(s) = G(s)$$

so, if I denotes the identity matrix of the same dimension of A,

$$Y(s) = s^{\alpha-1}(s^\alpha I + A)^{-1} y_0 + (s^\alpha I + A)^{-1} G(s).$$

The exact solution in the temporal domain can then be written as

$$y(t) = e_{\alpha,1}(t; A) y_0 + \int_0^t e_{\alpha,\alpha}(t-s; A) g(s) ds \tag{4}$$

with $e_{\alpha,\beta}(t;\lambda)$ denoting the inverse of the Laplace transform $\dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}$ for scalar λ's.

Throughout the paper the extension to the matrix case is intended to be well defined, for the matrices and the functions we deal with.

The variation of constants formula can be generalized to the case of semilinear FDEs of the form

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(t) + Ay(t) = g(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{5}$$

and its use allows us to express the solution as

$$y(t) = e_{\alpha,1}(t;A)y_0 + \int_0^t e_{\alpha,\alpha}(t-s;A)g(y(s))ds. \tag{6}$$

It is easy to verify that (5) is a generalization to FDEs of the variation of constants formula for semilinear ODEs like

$$y'(t) + Ay(t) = g(y(t)), \;\; y(0) = y_0$$

whose solution is

$$y(t) = e^{-tA}y_0 + \int_0^t e^{(s-t)A}g(y(s))ds. \tag{7}$$

The expressions for the solutions of these differential equations clearly show that the key role of the exponential function in the ODEs' solution is exactly the same that the $e_{\alpha,\beta}$ functions have for FDEs.

In particular, the numerical approximation of these problems undiscovers a more deep relationship between the $e_{\alpha,\beta}$ functions and the φ-functions, derived from the exponential, which are fundamental for some classes of numerical solvers, we will discuss later on.

To get a simple numerical scheme for (7) we fix a discretization step h and we interpolate the term $g(y(t))$ in the known value $g(y_n)$, so that

$$y_{n+1} = e^{-hA}y_n + h\varphi_1(-hA)g(y_n), \quad \varphi_1(z) = \frac{e^z - 1}{z};$$

this method goes under the name *explicit exponential Euler*.

More accurate methods can be defined by expressing the solution as a linear combination of terms like $\varphi_j(A)$ with φ_j defined by the relation

$$\varphi_0(z) = \exp(z), \quad \varphi_k(0) = \frac{1}{k!}, \;\; \varphi_{k+1}(z) = \frac{\varphi_k(z) - \varphi_k(0)}{z}. \tag{8}$$

Methods of this form belong to the class of *Exponential Integrators*, and we will discuss them in Section 3.

The functions $e_{\alpha,\beta}$ in (4) and (6) can also be defined by the classical Mittag-Leffler (ML) functions

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{9}$$

for $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ with $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$ and Γ denoting the Euler Gamma function. It holds, indeed, that [34]

$$e_{\alpha,\beta}(t;\lambda) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-t^{\alpha}\lambda).$$

The analogy between $E_{\alpha,\beta}$ and the exponential is evident; moreover, it is immediate to verify that these functions coincide for $\alpha = \beta = 1$. In practice a strict relationship binds the ML functions with the φ-functions, as shown in the following proposition:

PROPOSITION 2.1 ([14]). – *Let $k \in \mathbb{N}$ and $z \in \mathbb{C}$. Then $E_{1,k+1}(z) = \varphi_k(z)$.*

The ML functions thus represent an extension of φ-functions to the non-integer case; moreover they have similar properties for $\beta \geq 1$; indeed, [14]

$$e_{\alpha,\alpha+\beta}(t;\lambda) = \frac{e_{\alpha,\beta}(t;\lambda) - e_{\alpha,\beta}(t;0)}{-\lambda}, \quad e_{\alpha,\beta}(t;0) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)},$$

which generalize (8).

Moreover, as shown in [34], for any $\gamma \in \mathbb{R}$

$$D_0^{\gamma} e_{\alpha,\beta}(t;\lambda) = e_{\alpha,\beta-\gamma}(t;\lambda).$$

3. – Generalized Exponential Integrators

The numerical solution of *stiff* differential equations is a tough problem to treat. In particular, we consider systems of ODEs of the form

$$\frac{d}{dt} y(t) + Ay(t) = g(t, y(t)), \quad y(0) = y_0 \tag{10}$$

with y and g vector valued functions and A a real matrix which represents the *stiff* part of the problem.

The term *Exponential Integrators* is commonly used to define a class of numerical methods to solve problems of this kind, whose origin probably dates back to the beginning of the 1960's with Certain and Lawson; in the following we will denote them with ETD, which is the acronym for "Exponential Time Differencing" methods, which is another name to define them.

The recent paper by Hochbruck and Ostermann [21] is an excellent reference for a deep analysis of the subject, with a rich description of the development these methods have had in the past. It is important to stress that their development is actually strictly connected with that of the numerical methods to approximate matrix functions since, as their name suggests, these methods are based on the exponential function and on the φ-functions defined in (8), for matrix arguments

which, in the applications, have very large dimensions. The lack of numerical techniques for this aspect has, for long time, discouraged the use of these integrators. Recently, the important development of effective techniques for the matrix functions approximation gave new light to these methods, which are now very popular and commonly employed in the applications.

Explicit methods are not adequate to solve stiff problems for the severe restriction on the integration step that the problem nature imposes. On the other hand, implicit methods are sometimes too tough to be applied since they entail the solution of a non-linear system at each integration step. Exponential integrators, instead, turn out to be very effective since they solve exactly the linear part in (10), or at least with a very high accuracy, while explicit schemes are applied to solve the non-linear term, without particular restriction on the integration step.

3.1 – *Linear FDEs with constant source term*

In [14] we addressed the numerical solution of linear systems of FDEs of the form (3) with constant source term $g(t) = b$. It is known that the solution of this problem can be found by means of (4) [34] and can be written as

$$y(t) = y_0 + t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha A)\big(-Ay_0 + b\big). \tag{11}$$

In [14] an experimental comparison has been proposed among different techniques to approximate (11), the difference being in the numerical approach to approximate the term $E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha A)\big(-Ay_0 + b\big)$, as we will describe in Section 4.

3.2 – *Semilinear case*

The exponential integrators for ODEs are essentially grounded on the *Variation of Constants formula* (7).

To numerically evaluate it we fix a mesh-grid of equispaced points $t_n = nh$ on the integration interval; thus (7) can be written as

$$y(t_{n+1}) = e^{-(t_{n+1}-t_n)A} y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-(t_{n+1}-s)A} g(y(s))ds; \tag{12}$$

the ETDs' strategy lies on the polynomial approximation of the non-linear term g; then the resulting integral is exactly solved. The simplest method in this class is the *explicit exponential Euler* as described in Section 2.

The technique used to evaluate the integral in (12) distinguishes the methods of the ETD family, as for example the exponential multistep methods, the exponential Runge-Kutta methods and so on.

The introduction of the φ-functions provides the opportunity to define ETD methods which are more accurate; the solution to (10) can indeed be expressed as

$$y(t_{n+1}) = e^{-hA}y(t_n) + \sum_{k=0}^{\infty} h^{k+1}\varphi_{k+1}\big(-hA\big)g^{(k)}(y(t_n)); \tag{13}$$

thus, for example, the exponential Adams-Bashforth and Adams-Moulton methods derive when the series in (13) is truncated and the derivatives are approximated by means of finite differences.

For the semilinear FDE (5) an analogous approach can be considered: so, (6) can be written as

$$y(t_n) = e_{\alpha,1}(t_n;A)y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e_{\alpha,\alpha}(t_n - s;A)g(y(s))ds.$$

To get a naïve version of the ETD methods one can use a polynomial interpolant for the term $g(y(s))$ in each subinterval $[t_j, t_{j+1}]$, and then solve the resulting integrals. The resultant methods were named *Generalized Exponential Time Differencing* (GETD) in [14] for the plain analogy with the corresponding exponential integrators for ODEs.

The simplest choice would be to approximate $g(y(s))$ in each subinterval $[t_j, t_{j+1}]$ by the constant value $g(y_j)$. To explicitely evaluate the coefficients of the corresponding scheme we make use of the formula

$$e_{\alpha,\beta}(t;\lambda) = h^{\beta-1}e_{\alpha,\beta}\left(\frac{t}{h};h^{\alpha}\lambda\right), \quad \forall h > 0$$

and of the following result:

THEOREM 3.1 [14]. – *Let* $a < b \leq t$, $\Re(\alpha) > 0$, $\beta > 0$. *Then*

$$\int_a^b e_{\alpha,\beta}(t-s;A)ds = e_{\alpha,\beta+1}(t-a;A) - e_{\alpha,\beta+1}(t-b;A).$$

Then the resulting 1-*step GETD* method can be written as

$$y_n = e_{\alpha,1}(n;h^{\alpha}A)y_0 + h^{\alpha}\sum_{j=0}^{n-1}\big(e_{\alpha,\alpha+1}(n;h^{\alpha}A) - e_{\alpha,\alpha+1}(n-1;h^{\alpha}A)\big)g(y_j). \tag{14}$$

To get more accurate schemes we can simply interpolate $g(y(s))$ with higher degree polynomials. For quadratic polynomials, for example, the explicit expression for the coefficients of the 2-*step GETD* method has been derived in [14], together with an analysis of its main properties.

The introduction of these GETD methods in [14] is grounded also on rigorous analysis on accuracy and stability properties. We just cite an important result about the order of convergence of the two methods 1-*step GETD* and 2-*step GETD*:

THEOREM 3.2 [14]. – *If the source term g is smooth, then the* 1-step GETD *method has order* 1 *and the* 2-step GETD *has order* $1+\alpha$.

4. – Approximation of $f(A)$

All the numerical methods of exponential type described so far for the solution of ODEs or FDEs are essentially based on matrix functions, whose numerical approximation turns out to be crucial for the effectiveness of the method itself. This aspect fully motivates the analysis we are going to present.

For small dimension problems, that is, when the matrix argument A has a small dimension n, more than one strategy is often at disposal; for the exponential, for example, about twenty approaches are described in [27, 28].

More complicate is the situation for medium n and far more for large n, which is the most common case in the solvers described in Section 2. When speaking of systems of differential equations, indeed, the matrix A usually comes from a discretization process, thus to have so large dimensions to make impracticable any strategy of decomposition or similar, since they require a computational cost proportional to n^3, which is prohibitive for large n [17]. Thus, in these situations, it turns out to be more convenient to work with some approximation of the function f.

4.1 – *Rational Approximations*

Among the possible approximations of a given function f the rational ones show, under suitable hypotheses, interesting features which can be well exploited when the numerical approximation is in play.

A rational function is defined as the ratio of two polynomials, without common factors, of degree μ and ν not necessarily coinciding. The set of rational functions is thus defined as

$$R_{\mu,\nu} = \left\{ r : r(z) = \left(\sum_{k=0}^{\mu} a_k z^k \right) \Big/ \left(\sum_{k=0}^{\nu} b_k z^k \right) \right\}.$$

An usual problem in approximation theory is, given a continuous function f and two values μ and ν, to find a rational function $r^* \in R_{\mu,\nu}$ which minimizes the approximation error $\|f - r^*\|_\infty$ with respect to all other functions in the

set $R_{\mu,\nu}$. This *best* approximation always exists and it is called the *Chebyshev* approximation.

For the exponential function the Chebyshev rational approximation has been largely studied [4, 40, 26]. Particularly useful is the expression of this approximation in the case in which the numerator and the denominator have the same degree, say ν. Indeed, it can be written as

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{g_k}{x - \xi_k} \tag{15}$$

whose terms g_k and ξ_k are the poles and the residues, respectively, of $\mathcal{R}$.

In [4], for the exponential function, the poles and the residues have been tabled for several values of ν; moreover, the error analysis for these approximations have been largely studied [33, 4, 26], with very interesting results showing an exponential decay for the error at the rate $9.28903^{-\nu}$, which thus ensures a good accuracy also for moderate values of ν.

In [36, 37, 38] the numerical approximation of $\exp(A)$ has been addressed with techniques based on the Chebyshev rational approximations.

4.2 – *Carathéodory-Fejér approximation*

To find the poles and the residues of the Chebyshev approximation of a generic function, as for example the ML one (9), is a tough problem, also because uniqueness is not guaranteed for the best approximation. This problem has been a core issue in approximation theory and, in 1917, the *Carathéodory-Fejér* (CF) theory was presented: this is an appealing approach since, other than theoretical results, it offers a practical way to determine a rational approximation of fixed degree for any given smooth function. The key idea of this approach is to look for the rational approximation in a different set, namely

$$\tilde{R}_{\mu,\nu} = \left\{ r : r(z) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\mu} a_k z^k \right) \Big/ \left(\sum_{k=0}^{\nu} b_k z^k \right) \right\}.$$

The goal is to determine the function $r^{cf} \in \tilde{R}_{\mu,\nu}$ which minimizes the error $\|f - r^{cf}\|_\infty$ with respect to all other functions in the set $\tilde{R}_{\mu,\nu}$. Then the CF approximation is r^{cf} without the terms of negative degree.

From a theoretical point of view the CF approximations are particularly interesting for the good quality they guarantee. Moreover, for smooth functions, Trefethen [40, 41] has justified their use by showing that the error is very similar to the one of the Chebyshev approximation. For the exponential, for example, r^{cf} and r^*, both of degree ν, differ for a factor $\mathcal{O}(56^{-\nu})$ [26].

From a practical point of view the CF approximants are interesting since they are easy to determine and they can be expressed in the form (15). Recently an

elegant and effective strategy has been poposed to calculate the poles and the residues for generic functions f [42], by means of the SVD decomposition of the Hankel matrix defined by the coefficients of the Fourier series of f. In Section 6 we will present the results of numerical techniques based on this strategy.

In [14] we followed the approach in [42] to find the CF approximation of the ML function in order to approximate the terms $E_{\alpha,\beta}(A)v$ in (11).

The error analysis has highlighted the good accuracy these approximations reach even for moderate degrees, with a behavior for the error similar to the equioscillation, typical feature of the best approximations.

In Section 6 we will present some of the results in [14] on the accuracy of these approximations.

5. – Problems for the computation of $f(A)v$

The examples described so far stress the importance to approximate vectors of the form $f(A)v$, rather than to approximate just the matrix $f(A)$. To take into account this slight difference is fundamental from the computational point of view. To give a flavor of the difference between the two problems, we cite the trivial example of linear systems of the form $Ax = b$: in this case, even though the solution is, theoretically, $A^{-1}b$, no one can think to numerically compute it in this way, for the inaccuracies the matrix inversion can generate.

We thus analyze in depth the approximation of vectors like $f(A)v$, taking into account the approximation results described so far for f.

5.1 – *$f(A)v$ for f in partial fraction expansion*

Assume we know a rational approximation for f of the form (15), then it is possible to approximate $f(A)v$ by solving ν linear systems with coefficient matrices of the form $A - \xi_j I$; indeed, if the argument is a matrix, (15) becomes equivalent to

$$\mathcal{R}(A)v = \sum_{j=0}^{\nu} g_j (A - \xi_j I)^{-1} v. \tag{16}$$

When the matrix A is not too large and/or ill-conditioned, then any numerical method can solve the linear systems in (16). A matrix A with large dimension leads to a completely different scenario, since iterative methods are compelling. Moreover, when the convergence of these methods is too slow a kind of preconditioning is needed. In [13] we compared different strategies to compute (16), some of them involving also the Krylov subspace methods, as we will define in Section 5.2. In [38], instead, we found a strict relationship between the *Shift-and-Invert* technique, we are going to describe, and the preconditioning of systems in (16).

An additional difficulty is related to the nature of the poles ξ_j: indeed, when these poles are complex, complex linear systems need to be solved. In this case, not only the execution time is far larger than that of real systems of the same dimension, but even more complicate is the problem of their preconditioning: this subject is not yet well understood and important contributes are on the way. For shifted linear systems, as in (16), that is, with coefficient matrices of the form $A + \xi I$, for a real A and a complex ξ, we cite, among the others [1, 2, 3].

5.2 – *Shift-and-Invert method*

The Krylov subspace methods are largely used for the computation of vectors like $f(A)v$ for their efficiency and for their good accuracy and convergence properties. Their use has been widely analyzed in the context of the exponential function [20, 39, 24, 25].

They aim to approximate $f(A)v$ in Krylov subspaces defined as

$$\mathcal{K}_m(A, v) \equiv span\{v, Av, \ldots, A^{m-1}v\}.$$

To build an orthonormal basis for this space the starting vector is $v_1 = v/\|v\|$; then at each step $i = 2, \ldots,$ a new vector v_i is defined, by applying the orthonormalization Gram-Schmidt process to Av_{i-1} with respect to the previously computed vectors. This technique defines the matrices $V_m = [v_1, \ldots, v_m]$ and H_m of dimension $m \times m$ whose entries $h_{i,j}$ are the orthonormalization coefficients. Through these matrices the following approximation holds

$$f(A)v \approx \|v\| V_m f(H_m) e_1$$

where e_1 denotes the first column of the identity matrix of dimension $m \times m$.

The potency of these techniques is that usually a small dimension m is sufficient to get a sufficiently accurate approximation; thus some classical method usually works to compute $f(H_m)$.

Anyway, as shown by Hochbruck and Lubich [20], the convergence of the Krylov subspace methods is connected to the spectral properties of the matrix A. This feature makes the approach particularly slow for matrices A with large spectrum, as it often happens when the matrix derives from the discretization of differential operators. The slow convergence motivated the investigation of acceleration techniques. Among them we put our attention on the *Shift-and-Invert* (SI) technique proposed by Moret and Novati [30] and afterwards by van den Eshof e Hochbruck [43]. This technique is grounded on the Krylov subspaces $\mathcal{K}_m((I + \gamma A)^{-1}, v)$ for a suitable shift parameter γ. In this way, if V_m and H_m denote the matrices for $\mathcal{K}_m((I + \gamma A)^{-1}, v)$, the approximation becomes

$$f(A)v \approx \|v\| V_m f(B_m) e_1,$$

with B_m defined by the equation

$$(I + \gamma B_m)H_m = I.$$

Several applications show the superiority of this approach with respect to the standard Krylov subspace methods. It is indeed evident that in lots of applications the SI method needs a space dimension m much smaller than the one required by the standard approach. However, for this approach the shift parameter γ plays a fundamental role. In the paper [38] we got the interesting result to fix this parameter *a priori*, independently on the matrix A. To get this result a different perspective was crucial: indeed, it was necessary to set the SI method in the framework of rational approximations for the exponential function. Indeed, if a rational approximation like (16) is used for $\exp(A)v$, then in [38] we demonstrated that the SI method corresponds to precondition all the systems in (16) by means of the same preconditioner for all poles, which depends on γ.

The problem to approximate $f(A)v$ reduces then to approximate $f(B_m)$, with B_m in general much smaller than A. Various approaches can then be applied to the last approximation: if, for example, $f = \exp$, then the Matlab code `expm` can be used: it is based on the classical *scaling-and-squaring* method combined with a Padé rational approximation [33]. For the tests in [37, 38], for example, this choice was used. In general, given a rational approximation to f with a partial fraction expansion like (16), one can think to compute $f(B_m)e_1$ by solving the linear systems in (16) by a direct solver, as the Matlab `backslash`, for example. Or, in Matlab environment, also the command `funm` can be used when the first derivative of f is at disposal; the code computes the Schur decomposition of the matrix and then evaluates the function f for the triangular factor by means of the Parlett algorithm (for details see [17] and references therein).

Podlubny and Kacenak [35] gave a Matlab code for the ML function with scalar arguments; it allows one to approximate the ML function with any desired accuracy and, for our numerical tests, we combined it with the `funm` command.

Recently Moret and Novati [31] studied the convergence of the SI method when applied to the computation of the ML for $0 < \alpha < 1$ and $\beta = 1$: an interesting result is that the convergence accelerates when α decreases, exactly the inverse of what happens for the standard Krylov subspace methods.

6. – Numerical tests

6.1 – *Comparison of numerical methods for linear FDEs*

In [13] we addressed the solution of systems of linear FDEs with constant source terms (3). In practice systems like (3) often derive from PDEs with fractional time derivatives and space derivatives of integer or fractional order. If

only the space derivatives are discretized, then these PDEs reduce to systems of FDEs in the time variable.

We report here these model problems:

Example 1: the fractional Fokker-Planck equation

The Fokker-Planck equation is commonly used in the statistical physics to describe the time evolution of a test particle subject to an external field; its solution is the probability $u(x,t)$ of the particle to be at the time t in a given position x. In presence of an highly non-homogeneous medium the anomalous diffusion is adequately described only by FDEs. In particular, according to the formulation given by [7], the Fokker-Planck equation in one dimension can be written as

$$\begin{aligned} &D_0^\alpha u(x,t) = \frac{F''(x)}{\eta} u(x,t) + \frac{F'(x)}{\eta} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) + k u(x,t), && x \in (a,b),\ t \in [0,T], \\ &u(x,0) = 0.1, && x \in [a,b], \\ &u(a,t) = 0.1, u(b,t) = 0.1, && t \geq 0, \end{aligned} \tag{17}$$

with $F(x) = \cos x - 6x$, $\eta = 6$ and $k = 2$.

Given an equispaced grid $x_j = a + jh$ on $[a,b]$ with step-size h, the discretization of the first and second order spatial derivatives by means of central differences leads to the system (3) with a tridiagonal matrix A. Thus, taking into account the initial and boundary conditions, the solution of (17) is equivalent to solve the systems of FDEs (3).

Example 2: A space-time fractional diffusion equation

We consider the generic space-time fractional diffusion equation

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta}, \quad 0 < \alpha < 1 < \beta \leq 2, x \in [0,10], t \in [0,T]$$

subject to the initial conditions $u(x,0) = 0.1$ and $u_t(x,0) = 0.1$. When the fractional space derivatives are suitably discretized one gets a system like (3) with the matrix A in Hessenberg form.

Numerical methods:

Once the equation tests have been reduced to systems of FDEs, we compute their solution by different approaches to compare their accuracy and efficiency. We describe the methods under investigation, taking into account that the environment used is Matlab, and thus, when necessary, we directly refer to the specific command used;

- **CF + PFE**: Carathéodory-Fejér (CF) approximation of degree $\nu = 6$ for $E_{\alpha,\alpha+1}$ evaluated by means of its partial fraction expansion (PFE) as in (16); the `backslash` is used for the linear systems.

- **SI**+`funm`: Shift-and-Invert method combined with `funm` to evaluate $E_{\alpha,\alpha+1}(B_k)$. The shift parameter is $\gamma = 0.05$, as in [31]. Krylov spaces are built by using a direct approach every time vectors of the form $(A + \gamma I)^{-1} v_j$ are required.
  We stop the iteration for the smallest dimension m such that the distance between y_m and y_{m-1} is smaller than 10^{-7}.
- **SI + CF + PFE**: Shift-and-Invert method with CF approximation and PFE to evaluate $E_{\alpha,\alpha+1}(B_k)e_1$. We proceed as in **SI** + `funm`, the difference being that at each step for $E_{\alpha,\alpha+1}(B_k)e_1$ the expression (16) is used, as for **CF** + PFE.
- **PTR**: *product trapezoidal rule*. It is an implicit product-integration rule based on first degree polynomial interpolants; this formula combines a good accuracy and a reasonable computational cost; it is among the most used methods in the fractional calculus community [9, 23]. We use a time-step $h = 10^{-3}$ since it requires an execution time comparable to that of the other methods.

For the `mlf` code we use a tolerance 10^{-9} since it offers a good compromise between accuracy and speed. Moreover the Cuthill-McKee ordering (Matlab `symrcm`) is used to improve the matrix approaches under investigation. The reported elapsed time includes every part of the methods: the reordering, the computation of the CF coefficients and so on.

The accuracy of the methods

We report the results in [13] on the accuracy of the methods described above. Since the true solutions of our test equations are not explicitly known, we consider as reference solution the one obtained by the PTR approach with $h = 10^{-5}$. This is a very tiny value for the problems under investigation and it requires the computation of 100.000 steps to get the solution at $T = 1$, and about 90 minutes of CPU time (on the PC used for all other tests). It would be thus impracticable to consider smaller steps.

In Tables 1 and 2 we report the errors with respect to the reference solution of the methods under investigation.

The value n refers to the nodes number for the discretization of the space derivatives (thus the matrix A has dimension $n \times n$).

One of the most interesting aspects that Tables 1 and 2 put to light is that the approaches based on matrix functions always reach a high accuracy, comparable to the one of the classical PTR method. Moreover, this last approach is quite always the most expensive and this gap enlarges, according to other numerical tests in [13], when the dimension of the problem or the integration interval gets larger.

TABLE 1. – Comparison for accuracy and execution time (in parenthesis) to evaluate the solution of Example 1 for $T = 1$.

n	α	CF+PFE	SI + Schur	SI + CF+PFE	PTR $h = 10^{-3}$
50	0.5	6.3e-11 (1.29)	1.9e-10 (1.03)	8.5e-09 (1.32)	6.7e-08 (1.16)
	0.8	1.0e-09 (0.59)	8.0e-10 (0.48)	1.3e-09 (0.61)	9.9e-09 (1.10)
100	0.5	8.7e-11 (1.29)	1.1e-09 (1.01)	6.6e-09 (1.32)	9.5e-08 (2.35)
	0.8	1.4e-09 (0.59)	4.4e-10 (0.50)	3.8e-09 (0.61)	1.4e-08 (2.35)

TABLE 2. – Comparison for accuracy and execution time (in parenthesis) to evaluate the solution of Example 2 for $T = 1$.

n	α	β	CF+PFE	SI + Schur	SI + CF+PFE	PTR $h = 10^{-3}$
50	0.5	1.5	2.4e-10 (1.28)	2.4e-09 (1.60)	1.1e-08 (1.33)	1.3e-07 (1.12)
	0.6	1.8	2.7e-11 (1.13)	1.6e-10 (0.98)	8.5e-09 (1.16)	2.7e-08 (1.23)
100	0.5	1.5	3.8e-10 (1.29)	7.8e-09 (2.34)	9.3e-08 (1.35)	1.9e-07 (2.66)
	0.6	1.8	3.6e-11 (1.13)	2.1e-09 (1.09)	2.8e-08 (1.17)	3.8e-08 (2.70)

Efficiency of the methods

Another important factor to compare methods is the efficiency in terms of execution time. To this purpose in [13] test problems of large dimensions have been considered, without considering the PTR method which is not adequate to treat similar situations that, in practice, are the most common in the applications.

Tables 3 and 4 report the execution time and, for methods based on Krylov subspaces, we report in parenthesis the dimension of the space the solution belongs to.

TABLE 3. – Comparison of execution time and iterates (in parenthesis) to evaluate the solution of Example 1 for $T = 1$.

n	α	CF+PFE time	SI+funm time (iterations)	SI+CF+PFE time (iterations)
1000	0.5	1.315	**1.092** (20)	1.398 (19)
	0.8	0.603	**0.543** (18)	0.660 (17)
2000	0.5	1.305	**1.092** (20)	1.455 (19)
	0.8	0.611	**0.607** (18)	0.758 (17)
3000	0.5	**1.325**	1.335 (20)	1.760 (19)
	0.8	**0.635**	0.822 (18)	0.949 (17)

TABLE 4. – Comparison of execution time and iterates (in parenthesis) to evaluate the solution of Example 1 for $T = 1$.

n	α	β	CF+PFE time (avg its.)	SI+funm time (iterations)	SI+CF+PFE time (iterations)
1000	0.5	1.5	**1.880**	3.908 (31)	2.600 (29)
	0.6	1.8	**1.728**	2.194 (23)	2.115 (20)
2000	0.5	1.5	**3.721**	7.449 (31)	6.105 (29)
	0.6	1.8	**3.524**	5.141 (23)	4.978 (21)
3000	0.5	1.5	**7.131**	14.206 (31)	13.029 (30)
	0.6	1.8	**6.757**	10.594 (23)	10.189 (21)

The interesting result is that the execution time of these methods remains quite small; they are indeed effective also for very large problems, whose resolution would be not affordable by the classical methods.

6.2 – *Tests for semilinear FDEs*

The introduction of GETD methods in [14] was supported by several numerical tests aiming to validate the theoretical findings; we report here some of them, and we refer to [14] for details and further examinations.

The test equation is

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(t,x) + a\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) = cu(t,x)\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) + f(t,x), \quad x \in [0,1], \quad t \geq 0 \tag{18}$$

with $u(t,0) = u(t,1) = 0$, $u(0,x) = x(1-x)$ and

$$f(t,x) = -\big(2a + ce_{\alpha,1}(t;\psi)(2x^3 - 3x^2 + x) + \psi x(1-x)\big)e_{\alpha,1}(t;\psi).$$

The exact solution is $u(t,x) = e_{\alpha,1}(t;\psi)x(1-x)$.

Finite differences are used to discretize the spatial derivatives for a equispaced mesh-grid on $[0,1]$ with mesh-size $\Delta x = 1/(n+1)$; thus the system of semilinear FDEs to solve is

$$D_0^\alpha U(t) + \frac{a}{\Delta x^2} AU(t) = \frac{c}{2\Delta x} G(U(t)) + F(t),$$

with $U(t) = \big(u(t,x_1), u(t,x_2), \ldots, u(t,x_n)\big)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad g(U) = \begin{pmatrix} U_2U_1 \\ U_3U_2 - U_2U_1 \\ U_4U_3 - U_3U_2 \\ \vdots \\ -U_nU_{n-1} \end{pmatrix}$$

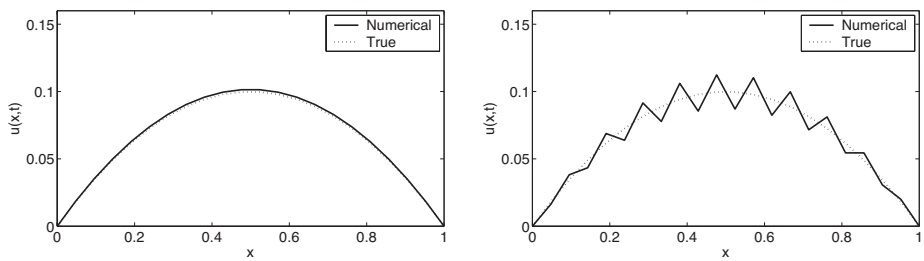


Fig. 1. – Comparison between 1-step GETD (left) and 1-step fractional Adams-Bashfort (right) for the fractional PDE (18).

and $F(t) = \big(f(t,x_1), f(t,x_2), \ldots, f(t,x_n)\big)^T$. For our numerical tests we used $\alpha = 0.7$, $a = -1$, $c = 1$ and $\psi = 1$ with $n = 20$ grid points.

The first plot in Figure 1 represents the exact solution $u(1,x)$ and the numerical solution for $t = 1$ evaluated by the 1-step GETD method (14) with step $h = 0.05$. It is interesting to notice that this quite large step leads to a numerical solution which is very similar to the exact one. The second plot in Figure 1 refers to an explicit product-integration method of the first order, commonly used for FDEs, with step-size $h = 3.685 \times 10^{-5}$. Some noticeable oscillations appear in this case, even though the remarkably smaller step-size has been used, thus confirming the difficulties described in Section 3 when explicit methods are used to solve stiff problems. The value h has been deliberately chosen close to the border of the stability region in order to highlight the difficulties of using explicit methods of traditional type.

7. – The restarted shift-and-invert Krylov method

In some situations even the convergence rate of the SI method, introduced in Section 4, can result slow. To overcome this difficulty, with related problems of memory storage and high computational costs, in [32] we proposed a variant of SI with *restart*. The basic idea is to fix a priori the largest dimension the Krylov subspace can reach to define suitable approximations by working only on spaces of the fixed dimension.

The theory developed in [32] applies to sectorial matrices, that is, for matrices $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ such that for every vector $u \in \mathbb{C}^N$

$$\mathrm{Re}\langle u, Au\rangle \geq 0.$$

Let $\rho(A)$ and $\sigma(A)$ denote the resolvent and the spectrum of A, respectively. Let apply the SI method defined in Section 4 to approximate $f(A)v$ with f as in (16)

and $Z = (I + \gamma A)^{-1}$. Then

$$f(A)v \approx y_m = \sum_{k=1}^{\nu} g_k w_{k,m}, \;\; w_{k,m} = \gamma V_m H_m (\mu_k H_m + I)^{-1} e_1, \;\; \mu_k = \gamma \xi_k - 1$$

with the assumption that $-\mu_k^{-1} \in \rho(H_m)$ for any $k = 1, 2, \ldots, \nu$.

The approximation error for $m \geq 2$, as shown in [29], can be expressed as

$$y - y_m = \sum_{k=1}^{\nu} g_k \eta_{k,m} (I + \gamma A)(\xi_k I + A)^{-1} v_{m+1} \tag{19}$$

with

$$\eta_{k,m} = h_{m+1,m} e_m^T (\mu_k H_m + I)^{-1} e_1.$$

It is thus possible to update y_m by approximating this error to get

$$\widetilde{y_m} = y_m + \gamma \sum_{k=1}^{\nu} g_k \eta_{k,m} v_{m+1};$$

the error now is

$$y - \widetilde{y_m} = -\sum_{k=1}^{\nu} g_k \eta_{k,m} \mu_k (\xi_k I + A)^{-1} v_{m+1}. \tag{20}$$

The restart process is grounded on the fact that both the errors (19) and (20) have partial fraction expansions like (16). In practice, the steps to follow in this procedure are the following:

- Find $y_m \in \mathcal{K}_m(Z, v)$;
- Update it $y^{(1)} \equiv y_m + \gamma \sum_{k=1}^{\nu} g_k \eta_{mk} v_{m+1}$
- Approximate the error $e^{(1)} \equiv -\sum_{k=1}^{\nu} g_k^{(1)} (\xi_k I + A)^{-1} v_{m+1}$ in $\mathcal{K}_m(Z, v_{m+1})$
- Update the approximation to y

$$y^{(2)} \;=\; y^{(1)} - e_m^{(1)} - \gamma \sum_{k=1}^{\nu} g_k^{(1)} \eta_{mk}^{(2)} v_{m+1}^{(2)}$$

  which gives an error

$$e^{(2)} = y - y^{(2)} = \sum_{k=1}^{\nu} g_k^{(1)} \eta_{mk}^{(2)} \mu_k (\xi_k I + A)^{-1} v_{m+1}^{(2)}$$

- Approximate

$$e^{(2)} \approx e_m^{(2)} \in \mathcal{K}_m(Z, v_{m+1}^{(2)})$$

  and so on.

For the approximation $\widetilde{y_m}$ the useful *a posteriori* error estimate holds [32]

$$\|y - \widetilde{y_m}\| \leq \sum_{k=1}^{v} |g_k \eta_{k,m}| \left\| \mu_k (\xi_k I + A)^{-1} v_{m+1} \right\|$$

which can work as a stopping criterion in the method's implementation with

$$\mu_k (\xi_k I + A)^{-1} v_{m+1} \cong \gamma (v_{m+1} - V_{m+1} (\mu_k H_{m+1} + I)^{-1} e_{m+1}). \tag{21}$$

7.1 – *Application to the Mittag-Leffler function*

In [32] we applied this restart version of SI to the numerical approximation of the ML function for $0 < \alpha < 1$ and $\beta = 1$, A and v real and $\sigma(A) \subset [a, b]$.

To approximate the ML we make use of the quadrature formulas proposed by Weideman e Trefethen [44]; in particular, we consider a parabolic contour

$$z(u) = d(iu + 1)^2, \ d > 0, \ -\infty < u < +\infty$$

which, according to the presentation in ([44], Sec. 3), leads to the approximation

$$E_\alpha(-t^\alpha w) \approx \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-L}^{L} e^{z(u_k)t} z'(u_k) z(u_k)^{\alpha-1} \left(z(u_k)^\alpha + w \right)^{-1}, \quad \text{for } t > 0, L \in \mathbb{N} \tag{22}$$

with $u_k = kh$, for $k = -L, ..., L$. When working in an interval like $[t_0, t_1]$ then

$$h = \frac{\sqrt{8R+1}}{L} \quad \text{and} \quad d = \frac{\pi L}{4 t_1 \sqrt{8R+1}}$$

are optimal parameters chosen as to guarantee, for $R = \dfrac{t_1}{t_0}$ and L fixed, an error like $E_L = \mathcal{O}\left(\exp\left(-\dfrac{2\pi L}{\sqrt{8R+1}} \right) \right)$ for any $t \in [t_0, t_1]$. The formula (22) can be extended also to matrix arguments with a spectrum close to the real axis [44].

Recently an extension of this approach to the more general case $\beta \neq 1$ has been carried over [16] and, by following a similar error analysis, the optimal parameters for the parabolic contour and other coefficients have been detected to reach any accuracy.

For $E_\alpha(-t^\alpha A)v$ formula (22) becomes

$$y_L(t) = \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=-L}^{L} e^{z(u_k)t} z'(u_k) z(u_k)^{\alpha-1} \left(z(u_k)^\alpha I + A \right)^{-1} v. \tag{23}$$

It is thus immediate to apply SI to approximate this sum. Moreover, since A and v are real, for the properties of the parabola z and the chosen nodes, formula (23) can be stated in such a way to reduce the addends from $2L + 1$ to $L + 1$.

A deep analysis has been carried out in [32] to fix the shift parameter γ and the conclusion was that it can be useful to use

$$\gamma = d^{-\alpha} \tag{24}$$

which, although not optimal in general, gives good results in many applications and it is independent on the problem. The numerical results presented in [32] show the similarity between the SI convergence with this γ and the one for the optimal γ obtained by applying the a priori error estimates as deduced in [32].

The strategy proposed by Weideman e Trefethen [44] applies to the computation of vectors like $f(A)v$ when f derives from the inversion of the Laplace transform of suitable functions, while the matrix A is chosen such that the linear systems in (23) can be easily solved by direct methods. For our tests the matrix A has the features outlined in [44]: in particular, we consider A as the discretization of the differential operator

$$D = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 10x\frac{d}{dx},$$

on the square $(0,1) \times (0,1)$, with homogeneous Dirichlet conditions. We use finite differences with constant step $h = \dfrac{1}{n+1}$ in both directions. The resulting matrix A has dimension $N = n^2$, is sparse and has real eigenvalues. The vector v derives from the discretization of the function $v(x,y) = x(1-x)y(1-y)$.

Many applications require the evaluation of $E_\alpha(-t^\alpha A)v$ for several values of t; let assume for example we need this vector for 40 distinct values of t's in the interval $[10^{-3}, 1]$. In practice, we partition this interval in 4 subintervals of the same length. Indeed, by taking into account the error estimate cited above, to reach an accuracy $\mathcal{O}(10^{-7})$, one would consider $L = 230$ terms in (16) when working in $[10^{-3}, 1]$, while only $L = 18$ if the mentioned partition is considered.

Motivated by the results of some numerical tests, we use the γ in (24) for an "intermediate" subinterval, that is, we use the γ for the second subinterval since it (experimentally) turns out to be effective also on the other subintervals [32]. Using just one γ is useful when building the Krylov subspace with a direct method; indeed, the factorization of $A + \gamma I$ can be done just once and reused any time a vector of the form $(A + \gamma I)^{-1} v_j$ is needed. This is the strategy adopted for our tests.

We compare the execution time to compute (23) for three different approaches: when solving the linear systems with the Matlab `backslash` ("Direct"), for SI, for SI with restart for a fixed dimension m ("SI(m)"). For $\alpha = 0.5$ we fix $m = 5$ while for $\alpha = 1$ the fixed dimension is $m = 10$. We impose an accuracy 10^{-9} on the error estimate (21).

TABLE 5. – Comparison of execution time, in seconds, to evaluate (23) in 40 points in $[10^{-3}, 1]$ by solving the linear systems with a direct approach, for SI with restart length m and for standard SI; the used values are $m = 5$ for $\alpha = 0.5$ and $m = 10$ for $\alpha = 1$.

α	Direct	SI(m)	SI
0.5	250.939	**0.268**	0.322
1	285.699	**0.269**	2.433

Results in Table 5 highlight the sharp difference between the "Direct" approach and the other two; the "SI(m)" method is always the fastest one, with an important difference with respect to "SI(m)" especially for $\alpha = 0.5$.

In these numerical tests it was interesting to notice that, in the "Direct" approach, the solution of the complex linear systems was actually the most expensive part, in practice the 99.7% of the total cost, thus confirming the difficulties discussed in Section 4.

REFERENCES

[1] BENZI M. and BERTACCINI D., *Block Preconditioning of Real-Valued Iterative Algorithms for Complex Linear Systems*, IMA Journal of Numerical Analysis, **28**, 598-618 (2008).

[2] BERTACCINI D., *Efficient preconditioning for sequences of parametric complex symmetric linear systems*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, **18**, 49-64 (2004).

[3] BERTACCINI D. and POPOLIZIO M., *Adaptive updating techniques for the approximation of functions of large matrices*, preprint (2012).

[4] CODY W. J., MEINARDUS G. and VARGA R. S., *Chebyshev rational approximations to e^{-x} in $[0, +\infty)$ and applications to heat-conduction problems*, J. Approximation Theory, **2**, 50-65 (1969).

[5] DEL BUONO N., LOPEZ L. and PELUSO R., *Computation of the exponential of large sparse skew-symmetric matrices*, SIAM J. Sci. Comput., **27 (1)**, 278-293 (2005).

[6] DEL BUONO N., LOPEZ L. and POLITI T., *Computation of functions of Hamiltonian and skew-symmetric matrices*, Math. Comput. Simulation, **79 (4)**, 1284-1297 (2008).

[7] DENG W., *Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation*, Journal of Computational Physics, **227**, 1510-1522 (2007).

[8] DIETHELM K., *The analysis of fractional differential equations,* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin *(2010).*

[9] GARRAPPA R., *On linear stability of predictor-corrector algorithms for fractional differential equations*, International Journal of Computer Mathematics, **87 (10)**, 2281-2290 (2010).

[10] GARRAPPA R., *On some generalizations of the implicit Euler method for discontinuous fractional differential equations*, Mathematics and Computers in Simulation, , **95** (2014), 213-228.

[11] GARRAPPA R., *Stability-preserving high-order methods for multiterm fractional differential equations*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **22 (4)** (2012), 1-13.

[12] GARRAPPA R., *A family of Adams exponential integrators for fractional linear systems*, Computers and Mathematics with Applications, (2013), in print, doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2013.01.022

[13] GARRAPPA R. and POPOLIZIO M., *On the use of matrix functions for fractional partial differential equations*, Math. Comput. Simulation, **81 (5)**, (2011), 1045-1056.

[14] GARRAPPA R. and POPOLIZIO M., *Generalized exponential time differencing methods for fractional order problems*, Comput. Math. Appl., **62(3)** (2011), 876-890

[15] GARRAPPA R. and POPOLIZIO M., *On accurate product integration rules for linear fractional differential equations*, J. Comput. Appl. Math., **235 (5)** (2011), 1085-1097.

[16] GARRAPPA R. and POPOLIZIO M., *Evaluation of generalized Mittag-Leffler functions on the real line*, Adv. Comput. Math., **39 (1)** (2013), 205-225.

[17] GOLUB G.H. and VAN LOAN C.F., *Matrix Computations*, Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences (1996).

[18] GORENFLO R. and MAINARDI F., *Some recent advances in theory and simulation of fractional diffusion processes.*, J. Comput. Appl. Math., **229 (2)** (2009), 400-415.

[19] HIGHAM N. J., *Functions of Matrices: Theory and Computation*, SIAM (2008).

[20] HOCHBRUCK M. and LUBICH C., *On Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **34** (1987), 1911-1925.

[21] HOCHBRUCK M. and OSTERMANN A., *Exponential integrators*, Acta Numerica, **19** (2010), 209-286.

[22] KILBAS A. A., SRIVASTAVA H. M. and TRUJILLO J. J., *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam (2006).

[23] LINZ P., *Analytical and numerical methods for Volterra equations*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA (1985).

[24] LOPEZ L. and SIMONCINI V., *Analysis of projection methods for rational function approximation to the matrix exponential*, SIAM J. Numer. Anal., **44 (2)** (2006), 613-635.

[25] LOPEZ L. and SIMONCINI V., *Preserving geometric properties of the exponential matrix by block Krylov subspace methods*, BIT, **46 (4)** (2006), 813-830.

[26] MAGNUS A. P., *Asymptotics and super asymptotics for best rational approximation error norms to the exponential function (the "1/9" problem) by the Carathéodory-Fejér method*, Nonlinear numerical methods and rational approximation, **296 (II)** (1994), 173-185.

[27] MOLER C. and VAN LOAN C., *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix*, SIAM Review, **20 (4)** (1978), 801-836.

[28] MOLER C. and VAN LOAN C., *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later*, SIAM Review, **45 (1)** (2003), 3-49.

[29] MORET I., *Rational Lanczos approximations to the matrix square root and related functions*, Numerical Linear Algebra with Applications, **16** (2009), 431-445.

[30] MORET I. and NOVATI P., *RD-Rational Approximations of the Matrix Exponential*, BIT, Numerical Mathematics, **44** (2004), 595-615.

[31] MORET I. and NOVATI P., *On the convergence of Krylov subspace methods for matrix Mittag-Leffler functions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **49** (2011), 2144-2164

[32] MORET I. and POPOLIZIO M., *The restarted shift-and-invert Krylov method for matrix functions*, Numerical Linear Algebra with Applications, **21** (2014), 68-80.

[33] PETRUSHEV P.P. and POPOV V.A., *Rational approximation of real function*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).

[34] PODLUBNY I., *Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering,* Academic Press Inc., San Diego, CA (1999).

[35] PODLUBNY I. and KACENAK M., *Matlab implementation of the Mittag-Leffler function*, available online: http://www.mathworks.com (2005).

[36] POLITI T. and POPOLIZIO M., *Schur Decomposition Methods for the Computation of Rational Matrix Functions*, Computational science-ICCS 2006. Part IV, Springer, **3994**, 708-715 (2006).

[37] POPOLIZIO M., *Tecniche di accelerazione per approssimare l'esponenziale di matrice*, La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. II, Agosto (2009), 275-278.

[38] POPOLIZIO M. and SIMONCINI V., *Acceleration Techniques for Approximating the Matrix Exponential Operator*, SIAM J. Matrix Analysis and Appl., **30** (2008), 657-683.

[39] SAAD Y., *Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **29** (1992), 209-228.

[40] TREFETHEN L. N., *Rational Chebyshev approximation on the unit disk*, Numer. Math., **37 (2)** (1981), 297-320

[41] TREFETHEN L. N., *Circularity of the error curve and sharpness of the CF method in complex Chebyshev approximation*, SIAM J. Numer. Anal., **20 (6)** (1983), 1258-1263.

[42] TREFETHEN L. N., WEIDEMAN J. A. C. and SCHMELZER T., *Talbot quadratures and rational approximations*, BIT, **46 (3)** (2006), 653-670.

[43] VAN DEN ESHOF J. and HOCHBRUCK M., *Preconditioning Lanczos approximations to the matrix exponential*, SIAM Journal on Scientific Computing, **27** (2006), 1438-1457.

[44] WEIDEMAN J. A. C. and TREFETHEN L. N., *Parabolic and hyperbolic contours for computing the Bromwich integral*, Mathematics of Computation, **78** (2007), 1341-1358.

Marina Popolizio
Dipartimento di Matenatica e Fisica "Ennio De Giorgi"
Università del Salento, Via per Arnesano, 73100 Lecce
e-mail: marina.popolizio@unisalento.it

Received December 8, 2012 and in revised form December 8, 2013

Marco Prato: Un algoritmo di deconvoluzione per problemi di ricostruzione di immagini da Trasformata di Fourier

Marco Prato[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia
email: marco.prato@unimore.it

Silvia Bonettini
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Sunto

La ricostruzione di un'immagine a partire dalla conoscenza di un campionamento non uniforme della sua Trasformata di Fourier è un problema comune a molte aree scientifiche, come la radioastronomia, l'astronomia a raggi X, la tomografia computerizzata e l'imaging a risonanza magnetica. Nel caso generale si hanno N punti distribuiti in modo non regolare nello spazio delle frequenze e si vuole ricostruire la corrispondente immagine nello spazio fisico. Questo problema presenta difficoltà di tipo sia teorico che computazionale: il problema in questione è infatti un problema inverso che risulta essere mal posto a causa della sparsità dei campioni nello spazio delle frequenze e del rumore sui dati. Inoltre, la non regolarità del campionamento impedisce l'applicazione diretta dell'algoritmo di Fast Fourier Transform (FFT), con un conseguente appesantimento della procedura di inversione.

Diversi approcci sono stati proposti in letteratura per affrontare queste difficoltà [3], molti dei quali sono basati su uno step di gridding seguito da una procedura iterativa basata sulla FFT. In questa presentazione introdurremo un nuovo metodo per ricostruire un'immagine da un campionamento non uniforme della sua Trasformata di Fourier che agisce direttamente sui dati senza operazioni di interpolazione e ricampionamento, sfruttando così la reale natura dei dati stessi. In particolare, la nostra immagine target può essere vista come la soluzione di un particolare problema di deconvoluzione e la sua ricostruzione può essere calcolata efficacemente con un metodo del gradiente proiettato con un parametro di steplength adattivo, scelto attraverso un'alternanza opportuna delle regole di Barzilai-Borwein [2].

Come playground per la sperimentazione numerica del nostro algoritmo abbiamo scelto la ricostruzione di immagini di raggi X emessi durante i brillamenti solari e intercettati dal satellite RHESSI [1].

Bibliografia

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Programma Giovani Ricercatori 2010 "Tecniche di imaging da campionamenti non uniformi della Trasformata di Fourier", finanziato dal Gruppo Nazionale per il Calcolo Scientifico.

[1] R. P. Lin, et al., *Solar Phys.* **210**, 3–32 (2002).

[2] M. Prato, S. Bonettini, *Inverse Probl.* **26**, 095001 (2010).

[3] H. Schomberg, J. Timmer, *IEEE Trans. Med. Imaging* **14**, 596–607 (1995).

Intervento: Marco Prato,
A Deconvolution Algorithm for Imaging Problems from Fourier Data,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 389–404**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 389-404

A Deconvolution Algorithm for Imaging Problems from Fourier Data

MARCO PRATO

Abstract. – *In this paper we address the problem of reconstructing a two-dimensional image starting from the knowledge on nonuniform samples of its Fourier Transform. Such inverse problem has a natural semidiscrete formulation, that is analyzed together with its fully discrete counterpart. In particular, the image restoration problem in this case can be reformulated as the minimization of the data discrepancy under nonnegativity constraints, possibly with the addition of a further equality constraint on the total flux of the image. Moreover, we show that such problem is equivalent to a deconvolution in the image space, that represents a key property allowing the desing of a computationally efficient algorithm based on Fast Fourier Transforms to address its solution. Our proposal to compute a regularized solution in the discrete case involves a gradient projection method, with an adaptive choice for the steplength parameter that improves the convergence rate. A numerical experimentation on simulated data from the NASA RHESSI mission is also performed.*

1. – Introduction

In many imaging problems, one has to reconstruct a two-dimensional image of a certain object starting from the knowledge of one or more corrupted versions of it, depending in general of the data acquisition system that introduces blurring effects and statistical noise. In this cases, the data and the unknown are both "vectorized" images, possibly with different size, whose relation can often be assumed as linear thanks to the use of suitable physical approximations. In imaging problems arising in several scientific areas (e.g., radioastronomy, X-ray astronomy, computed tomography, magnetic resonance imaging [7, 13, 21]), instead, the data belong to a space different from the one of the unknown object. In particular, the specific nature of the acquisition system provides measures (or estimates) of the Fourier Transform of the object in a set of hardware-depending spatial frequencies. In the general case, the distribution of such frequencies in the Fourier plane is highly sparse and irregular, with specific zones in which the data are concentrated side by side to other areas with a total lack of information. This problem presents both theoretical and computational difficulties: from the theoretical point of view, we are dealing with an inverse problem which is ill

posed in the sense of Hadamard [22]. In fact, due to the sparsity of the samples in the frequency space, infinite solutions are admissible; moreover, some of these solutions could not be physically meaningful because of the error which potentially affects the data. On the other hand, from the computational point of view, the possible strong irregularity of the data sampling makes the use of the Nonuniform Fast Fourier Transform (NFFT) algorithm [17] very dangerous, since the choice of the interpolation strategy at the basis of NFFT could play a crucial role in arbitrarily filling the areas in the frequency space which lack in information. Moreover, for measured data affected by a high level of noise, the interpolation phase may lead to an amplification of this noise level on the resampled data with the result of artifacts formation and undesirable effects in the corresponding reconstructed image.

Here we propose an alternative strategy to reconstruct the desired image from the available set of Fourier samples that does not perform any interpolation and resampling procedure, thus avoiding arbitrary assumptions and possible noise amplifications. In particular, we reformulate the imaging problem as a constrained optimization problem, in which the stationary points of the objective function can be viewed as the solutions of a deconvolution problem with a suitable kernel. We propose a fast and effective gradient projection algorithm to provide regularized solutions of such a deconvolution problem by early stopping the iterations [2, 11]. An adaptive steplength parameter choice is adopted to improve the converge rate of the algorithm; more in details, we implemented a suitable alternation of the two Barzilai-Borwein rules [1], which recently obtained very good results in signal and image denoising and deblurring problems [2, 11, 28, 32]. Since the objective function involves a convolution operator, the algorithm can be effectively implemented exploiting the (uniform) Fast Fourier Transform.

The paper is divided in five further sections. In particular, sections 2 and 3 are devoted to the semidiscrete and fully discrete mathematical formulation of the problem, respectively. The analytic expression of its generalized solution is provided and the equivalent constrained optimization problem is deduced through the introduction of a particular convolution operator. In section 4, the optimization algorithm is described and the regularization issue is discussed. Numerical experiments involving synthetic data from a real-world astronomical application are given in section 5, while some conclusions and ideas for future developments of the method are offered in section 6.

2. – From Fourier samples to the continuous object

Inverse problems in which continuous functions have to be inferred from the knowledge of a measurements array are called semidiscrete problems [3, 4]. In

our case, the unknown is a non-negative two-dimensional distribution $f(x,y)$ defined on a square $\mathcal{I} = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ in the image plane, while the data array $g \in \mathbb{C}^M$ consists in a certain number of the object's Fourier Transform estimates corresponding to the spatial frequencies (u_k, v_k), $k = 1, \dots, M$, according to the relation

$$g_k = \int_{\mathcal{I}} f(x,y) e^{2\pi i (u_k x + v_k y)} dx dy. \tag{1}$$

Each component k of the data array can be considered as the evaluation of a continuous distribution

$$V(u,v) = \int_{\mathcal{I}} f(x,y) e^{2\pi i (ux + vy)} dx dy, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

in the specific frequencies (u_k, v_k). We consider the Hilbert space $X = L^2(\mathcal{I}, \mathbb{C})$ and the semidiscrete operator $\mathcal{H} : X \to \mathbb{C}^M$ defined as

$$(\mathcal{H}f)_k = \int_{\mathcal{I}} f(x,y) e^{2\pi i (u_k x + v_k y)} dx dy, \quad k = 1, \dots, M, \quad f \in X. \tag{3}$$

The adjoint of the operator $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^* : \mathbb{C}^M \to X$, also called back-projection, is defined as follows: given $c \in \mathbb{C}^M$

$$(\mathcal{H}^* c)(x,y) = \sum_{k=1}^{M} c_k e^{-2\pi i (u_k x + v_k y)}, \quad (x,y) \in \mathcal{I}. \tag{4}$$

Indeed, we have

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}f, c \rangle_{\mathbb{C}^M} &= \sum_{k=1}^{M} c_k \int_{\mathcal{I}} \overline{f(x,y)} e^{-2\pi i (u_k x + v_k y)} dx dy \\ &= \int_{\mathcal{I}} \overline{f(x,y)} \sum_{k=1}^{M} c_k e^{-2\pi i (u_k x + v_k y)} dx dy = \langle f, \mathcal{H}^* c \rangle_X \end{aligned}$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^M}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ denote the inner product of $\mathbb{C}^M$ and X, respectively.

Thus, the image reconstruction problem can be formulated as a linear inverse problem with discrete data [4]

$$\mathcal{H}f = g, \tag{5}$$

which is ill posed since it has infinite solutions.

We show now that equation (5) is equivalent to a deconvolution problem in the space domain. If we recall definition (2), we observe that the discrete data g_k can

be expressed as

$$g_k = V(u_k, v_k) = \int_{\mathbb{R}^2} \delta(u - u_k, v - v_k) V(u, v) du dv, \quad k = 1, \ldots, M.$$

By introducing the sampling function $S(u, v) = \sum_{k=1}^{M} \delta(u - u_k, v - v_k)$, we define the "dirty image" f_d as the Fourier Transform of the product SV:

$$f_d \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows}} SV.$$

In particular, for $(x, y) \in \mathcal{I}$, we have

$$\begin{aligned} f_d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} S(u, v) V(u, v) e^{-2\pi i(ux+vy)} du dv \\ &= \sum_{k=1}^{M} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(u - u_k, v - v_k) V(u, v) e^{-2\pi i(ux+vy)} du dv \\ &= \sum_{k=1}^{M} g_k e^{-2\pi i(u_k x + v_k y)} = (\mathcal{H}^* g)(x, y). \end{aligned} \tag{6}$$

Using the Convolution Theorem, the function f_d can be expressed as the convolution of the inverse Fourier Transform of S and V (see figure 1):

$$K * f \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows}} SV,$$

where K is the Fourier Transform of the sampling function S

$$K \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftarrows}} S$$

	SPACE		FREQUENCY	
	f	$\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightarrow}$	V	
Convolution	$\downarrow$		$\downarrow$	*Sampling*
	f_d	$\underset{\mathcal{F}}{\leftarrow}$	SV	

Fig. 1. – Space-frequency scheme.

defined, for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, as

$$
\begin{aligned}
K(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} S(u,v) e^{-2\pi i(ux+vy)} du dv \\
&= \sum_{k=1}^{M} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(u-u_k, v-v_k) e^{-2\pi i(ux+vy)} du dv \qquad (7)\\
&= \sum_{k=1}^{M} e^{-2\pi i(u_k x + v_k y)}.
\end{aligned}
$$

Thus, the image reconstruction problem can be formulated also as a deconvolution problem in the space domain: find a function $f \in L^2(\mathcal{I})$ such that

$$K * f = f_d. \qquad (8)$$

We remark that, for $f \in X$ and $(x, y) \in \mathcal{I}$,

$$
\begin{aligned}
(K * f)(x,y) &= \int_{\mathcal{I}} K(x-x', y-y') f(x',y') dx' dy' \\
&= \int_{\mathcal{I}} \left(\sum_{k=1}^{M} e^{-2\pi i(u_k(x-x') + v_k(y-y'))} \right) f(x',y') dx' dy' \\
&= \sum_{k=1}^{M} e^{-2\pi i(u_k x + v_k y)} \left(\int_{\mathcal{I}} f(x',y') e^{2\pi i(u_k x' + v_k y')} dx' dy' \right) \\
&= \sum_{k=1}^{M} (\mathcal{H}f)_k e^{-2\pi i(u_k x + v_k y)} = (\mathcal{H}^* \mathcal{H} f)(x,y)
\end{aligned}
$$

and, therefore, that

$$\|K * f - f_d\|_X^2 = \|\mathcal{H}^* \mathcal{H} f - \mathcal{H}^* g\|_X^2. \qquad (9)$$

From the identity

$$\|\mathcal{H}^* \mathcal{H} f - \mathcal{H}^* g\|_X^2 = (\mathcal{H}f - g)^* \mathcal{H}\mathcal{H}^* (\mathcal{H}f - g) = \|\mathcal{H}f - g\|_{\mathbb{C}^M, \mathcal{H}\mathcal{H}^*}^2, \qquad (10)$$

we can see that the data discrepancy measured in the norm in $\mathbb{C}^M$ induced by the Gram matrix $\mathcal{H}\mathcal{H}^*$ can be expressed by means of a convolution in the space X.

Since it is natural in an image reconstruction problem to require the radiation flux to be real and non-negative, we are interested in solving the minimization problem

$$\min_{\substack{f \in L^2(\mathcal{I}, \mathbb{R}) \\ f \geq 0}} J(f), \qquad (11)$$

where $J(f)$ is one of the equivalent distance measures defined in (9) or (10). Moreover, it could be useful to insert also an equality constraint

$$\int_{\mathcal{I}} f(x,y)dxdy = F,$$

where F represents the total flux emitted by the source and inferred in some way from the data. We observe that problem (11) can be still ill-posed, since the set of nonnegative functions is closed and convex in L^2 but not compact.

3. – Discrete formulation

Although in principle the semidiscrete problem can be solved with classical approaches with a resulting continuous solution for the unknown discribution, in practice a discrete version of the problem described in section 2 is considered, thus leading to a target object in the form of a matrix. To this aim, we consider a uniform grid over the square $\mathcal{I}$ given by the points

$$x_j = X_1 + (j-1)\Delta x, \;\; y_h = Y_1 + (h-1)\Delta y, \quad j,h = 1,...,N$$

and we discretize the integral of equation (1) by the rectangular rule obtaining a vector $g \in \mathbb{C}^M$ with

$$g_k \approx \sum_{j,h=1}^{N} f(x_j,y_h)e^{2\pi i(u_k x_j + v_k y_h)}\Delta x \Delta y, \quad k = 1,...,M.$$

In the discrete settings, we would like to find an approximation of the values

$$f_{jh} = f(x_j,y_h)\Delta x \Delta y, \quad j,h = 1,...,N.$$

Therefore, given a vector $f_{jh} \in \mathbb{C}^{N^2}$, we define the linear operator H as

$$(Hf)_k = \sum_{j,h=1}^{N} f_{jh} e^{2\pi i(u_k x_j + v_k y_h)}, \quad k = 1,...,M \tag{12}$$

and its adjoint is

$$(H^* c)_{jh} = \sum_{k=1}^{M} c_k e^{-2\pi i(u_k x_j + v_k y_h)}, \quad j,h = 1,...,N, \tag{13}$$

where $c \in \mathbb{C}^M$. The operators (12) and (13) can be considered a numerical approximation of (3) and (4); in these settings, the discrete inverse problems is given by

$$Hf = g.$$

Following the process described in section 2, now we discuss the discrete version of equation (8). With the same settings introduced before, we define the grid points

$$x_j = X_1 + (j-1)\Delta x,\ y_h = Y_1 + (h-1)\Delta y, \quad j,h = -N, -(N-1), ..., 0$$

and denote by K_{jh} the values $K(x_j, y_h)\Delta x \Delta y$ $(j,h = -N, \ldots, N)$.

Thus, the discrete counterpart of (8) becomes

$$\begin{aligned}
(K*f)(x_p, y_q) &= \sum_{jh=1}^{N} f_{jh} K_{p-j,q-h} \\
&= \sum_{jh=1}^{N} f_{jh} \sum_{k=1}^{M} e^{-2\pi i(u_k(x_p-x_j)+v_k(y_q-y_h))} \\
&= \sum_{k=1}^{M} e^{-2\pi i(u_k x_p + v_k y_q)} \sum_{jh=1}^{N} f_{jh} e^{2\pi i(u_k x_j + v_k y_h)} \\
&= \sum_{k=1}^{M} e^{-2\pi i(u_k x_p + v_k y_q)} (Hf)_k \\
&= (H^* H f)_{pq},
\end{aligned} \tag{14}$$

where (x_p, y_q) is a grid point and H, H^* are defined in (12) and (13), respectively.

Since

$$f_d(x_j, y_h) = \sum_{k=1}^{M} g_k e^{-2\pi i(u_k x_j + v_k y_h)} = (H^* g)_{jh}, \quad j,h = 1, ..., N, \tag{15}$$

we can write the analogous result in (9) as

$$\|K*f - f_d\|^2_{\mathbb{C}^{N^2}} = \|H^* H f - H^* g\|^2_{\mathbb{C}^{N^2}}. \tag{16}$$

We remark that also in the fully discrete setting we can write the identity

$$\|H^* H f - H^* g\|^2_{\mathbb{C}^{N^2}} = (Hf - g)^* H H^* (Hf - g) = \|Hf - g\|^2_{\mathbb{C}^M, HH^*}, \tag{17}$$

which shows the equivalence between the deconvolution problem and the least squares one in the norm induced by the Gram matrix.

Therefore, our optimal real positive radiation flux image will be the solution of the following minimum problem in the space domain:

$$\begin{array}{c} \min \\ f \in \mathbb{R}^{N^2} \\ f \geq 0 \end{array} \quad J(f), \tag{18}$$

where $J(f)$ is one of the equivalent distance measures defined in (16) or (17).

As in the semi-discrete case, the flux conservation condition can be easily imposed by adding the equality

$$\sum_{jh=1}^{N} f_{jh} = F$$

to the constraints of problem (18), where again F represents the total flux emitted by the source.

4. – The Space-D algorithm

The simple form of the constraint to be imposed on the unknown image suggested us to adopt a gradient projection (GP) method [5, 6, 11, 30] to address the numerical solution of (18). The GP approach can be applied to any minimization problem

$$\min_{f \in \mathcal{C}} \quad J(f) \tag{19}$$

where J is a differentiable real valued function and $\mathcal{C}$ is a convex closed subset of $\mathbb{R}^m$. Clearly, problem (18) is a special case of (19), since, even if the data are complex numbers, the objective function is real valued and its variable is constrained in a subset of $\mathbb{R}^{N^2}$. The general form of the GP algorithm is described in Algorithm 1, where $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ denotes the orthogonal projection on the set $\mathcal{C}$.

Algorithm 1 Gradient Projection (GP) Method

Choose the starting point $f^{(0)} \in \mathcal{C}$, set the parameters $\beta, \theta \in (0,1)$, $0 < \alpha_{min} < \alpha_{max}$ and fix a positive integer K.

FOR $k = 0, 1, 2, \ldots$ DO THE FOLLOWING STEPS:

STEP 1. Choose the parameter $\alpha_k \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$;

STEP 2. Projection: $y^{(k)} = P_{\mathcal{C}}(f^{(k)} - \alpha_k \nabla J(f^{(k)}))$;

STEP 3. Descent direction: $d^{(k)} = y^{(k)} - f^{(k)}$;

STEP 4. Set $\lambda_k = 1$ and $J_{max} = \max_{0 \le j \le \min(k, K-1)} J(f^{(k-j)})$;

STEP 5. Backtracking loop:

let $J_{new} = J(f^{(k)} + \lambda_k d^{(k)})$;

IF $J_{new} \le J_{max} + \beta \lambda_k \nabla J(f^{(k)})^T d^{(k)}$ THEN

go to Step 6;

ELSE

set $\lambda_k = \theta \lambda_k$ and go to Step 5.

ENDIF

STEP 6. Set $f^{(k+1)} = f^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}$.

END

In practice, each SGP iteration is based on the descent direction $d^{(k)}$, obtained as the difference between the current point $f^{(k)}$ and the projection $y^{(k)}$ of the scaled gradient on the feasible set. The global convergence of the algorithm is obtained by means of the standard monotone Armijo rule in the linesearch procedure described in step 5 (see [11]). We emphasize that any choice of the steplength $\alpha_k \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ is allowed; this freedom of choice can then be fruitfully exploited for introducing performance improvements. An effective selection strategy is obtained by means of the Barzilai and Borwein [1] rules (hereafter denoted BB), defined as

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{{s^{(k-1)}}^T s^{(k-1)}}{{s^{(k-1)}}^T t^{(k-1)}} \quad ; \quad \alpha_k^{(2)} = \frac{{s^{(k-1)}}^T t^{(k-1)}}{{t^{(k-1)}}^T t^{(k-1)}}, \tag{20}$$

where $s^{(k-1)} = f^{(k)} - f^{(k-1)}$ and $t^{(k-1)} = \nabla J(f^{(k)}) - \nabla J(f^{(k-1)})$. In our GP implementation, the values produced by these rules are constrained into the interval $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ in the following way:

IF $(s^{(k-1)})^T t^{(k-1)} \leq 0$ THEN
  $\alpha_k^{(1)} = \min\{10 \cdot \alpha_{k-1},\ \alpha_{max}\}$;
ELSE
  $\alpha_k^{(1)} = \min\left\{\alpha_{max},\ \max\left\{\alpha_{min},\ \alpha_k^{(BB1)}\right\}\right\}$;
ENDIF
IF $(s^{(k-1)})^T t^{(k-1)} \leq 0$ THEN
  $\alpha_k^{(2)} = \min\{10 \cdot \alpha_{k-1},\ \alpha_{max}\}$;
ELSE
  $\alpha_k^{(2)} = \min\left\{\alpha_{max},\ \max\left\{\alpha_{min},\ \alpha_k^{(BB2)}\right\}\right\}$;
ENDIF

The recent literature on steplength selection in gradient methods showed that remarkable convergence rate improvements can be obtained by alternation strategies of the two BB formulae [30, 33] that force the selection to be made in a suitable order of both low and high BB values. Frassoldati et al. [20] realized this aim by means of an alternation criterion, which compares well with other popular BB-like steplength rules, namely

IF $\alpha_k^{(2)}/\alpha_k^{(1)} \leq \tau_k$ THEN
  $\alpha_k = \min\limits_{j=\max\{1,k+1-M_\alpha\},\ldots,k} \alpha_j^{(2)}$;
  $\tau_{k+1} = 0.9 \cdot \tau_k$;
ELSE
  $\alpha_k = \alpha_k^{(1)}$;
  $\tau_{k+1} = 1.1 \cdot \tau_k$;
ENDIF

where M_α is a prefixed positive integer and $\tau_1 \in (0,1)$. As observed in several experimental studies [2, 11], the GP method equipped with this alternation of the two BB formulas is more efficient with respect to the same algorithm with other steplength selection rules and also to other iterative approaches as the projected Landweber method [18].

About the complexity of the algorithm, the main tasks are the computation of the objective function $J(f)$ at every backtracking loop and the gradient $\nabla J(f)$ at each main iteration, both depending of the quantities $H^*Hf^{(k)}$ and H^*g. We remark that H^*g, that is the dirty image f_d, needs to be computed only once at the beginning by formula (15), while, thanks to the equivalence (14), the matrix–vector product H^*Hf can be efficiently computed by the FFT algorithm. Thus, taking into account of the zero boundary conditions on the reconstructed image, the cost per iteration is $\mathcal{O}(2n^2 \log(2n^2))$.

The last (but not the least) aspect we have to take into account is the criterion adopted to arrest the iterations. Since problem (18) is ill conditioned and the data are affected by noise, some regularization techniques are needed to achieve a meaningful solution. Even if a rigorous theoretical study is not yet available, the numerical experience on image reconstruction from noisy data demonstrates that the GP method exhibits the semiconvergence property [3, 19]: the results of the iterations first provide better and better approximations of the true object but after a certain point they turn to the worse, due to increased noise propagation. Therefore, regularization is obtained in practice by a suitable stopping of the iterations: in this way, the GP algorithm is employed as an iterative regularization method. We chose a stopping rule based on Morozov's discrepancy equation [19, 31]. In particular, we assume that the measured data g^δ can be represented in the form $g^\delta = g + \delta g$, where δg denotes the noise affecting and $g = Hf$, where f is the object to be reconstructed. Furthermore, we assume that the quantity $\eta = \|\delta g\|$ (or an estimate of it, as in the case of the application described in the following section) is known. Then, a regularized solution $f^{(k)}$ is computed if we terminate the optimization procedure when

$$\|Hf^{(k)} - g^\delta\| \le \eta \tag{21}$$

As far as we know, no result exists proving that this criterion, applied to the GP iteration, leads to a regularization method for the constrained least square problem (18). However, in [2] it has been shown the practical effectiveness of the GP method equipped with criterion (21) on image deconvolution problems.

Moreover, we include a further stopping condition based on the relative difference of the objective function between two successive iterates

$$|J(f^{(k)}) - J(f^{(k-1)})| < \varepsilon |J(f^{(k)})| \tag{22}$$

where ε is a prefixed tolerance (in the following numerical tests we used $\varepsilon = 10^{-4}$). The criterion (22) is a quite standard condition to check the con-

vergence of an iterative optimization algorithm. Its main purpose is to devise the point where no significative decrease in the objective function is obtained (see for example [32]). We include this condition in our algorithm since, from the numerical experience, the discrepancy criterion alone may terminate the optimization procedure too soon [2], especially when the error norm η is overestimated.

In summary, our proposal is a gradient projection method with a suitable alternation of the two BB rules for the steplength selection and a combination of Morozov's discrepancy principle with the further stopping rule (22) to arrest the iterations. The resulting algorithm will be referred with the name *Space-D*.

5. – Numerical experiments: the RHESSI mission

In this section we show some numerical experiments to test the efficacy of Space-D in a real-world context. The particular application we consider is the reconstruction of the X-ray emission during solar flares starting from the data collected by the Reuven Ramaty High Energy Solar Spectroscopic Imager (RHESSI), launched from Cape Canaveral on February 5 2002 with the aim to recover temporally, spatially and spectrally resolved X-ray and γ-ray images of solar eruptions [24, 25]. The RHESSI satellite is still working and keeps on providing every day a large amount of data with very high quality.

The RHESSI instruments design is based on the Rotating Modulation Collimator (RMC) technique [23], that is a widely used approach for X-ray imaging that does not require focusing optics. Thanks to its nine bigrid RMC system, imaging information is recorded as a set of complex numbers, called *visibilities* (varying from tens to two or three hundreds according to the strength of the signal), measured at spatial frequencies arranged around nine concentric circles in the Fourier plane whose radii form a geometric sequence with common ratio $\sqrt{3}$. An example of a typical sampling of RHESSI data in the Fourier plane is shown in figure 2, where we can see that, especially in the high frequencies where the sampling is more sparse, the impact of the interpolation method can be non negligible.

The tests we present in this paper are divided in two groups. First, we simulate images with different geometries and we show the Space-D capability of providing satisfactory reconstructions independently of the object's shape. Afterwards, we investigate the very challenging task of detecting a faint source in presence of a stronger one, that represents a sort of measure of the resolution achievable by a method. Further tests on simulated and real data can be found in [9, 10]. All the simulations have been created by means of the *hsi_modelcbe2image.pro* routine, written in Interactive Data Language (IDL) and available within the official Solar SoftWare (SSW) of the RHESSI mission. For all the simulations, a comparison of the Space-D results with the ones achieved with a Maximum Entropy Method

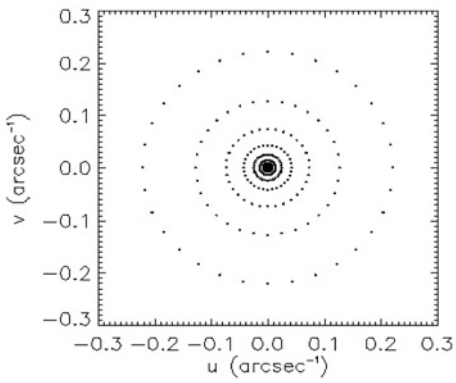


Fig. 2. – Example of a typical sampling of RHESSI data in the frequency plane.

(MEM) developed for RHESSI imaging [12] has been performed. MEM is based on the maximization of an entropy functional with constraints on the chi-square and the total flux of the image. A gridding initial step is performed on the measured visibilities in order to make possible the use of the FFT algorithm in the iterative optimization procedure adopted to solve the maximization problem. The analyses have been carried out on a computer equipped with a 1.60 GHz Intel Core i7 in a Windows 7 environment.

In figure 3 we can see the reconstructions obtained by MEM and Space-D of three maps containing very different source morphologies:

- an extremely elongated source with height very close to the best spatial resolution achievable by the RHESSI hardware (SIM1);
- a sequence of four circular sources plus a weaker one placed at the left side of the other ones (SIM2);
- a compact asymmetric source surrounded by a weaker halo (SIM3).

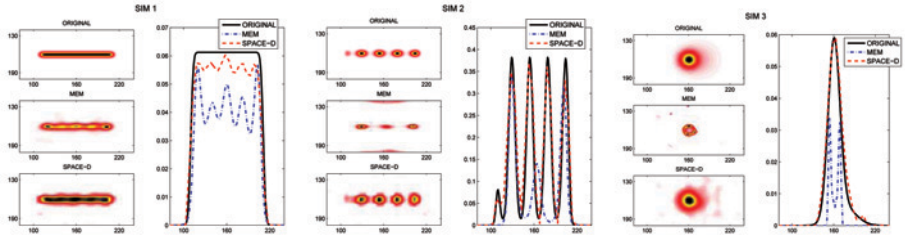


Fig. 3. — Reconstructions of the three simulations SIM1 (left panels), SIM2 (middle panels) and SIM3 (right panels) with MEM and Space-D. For each case, the restored maps and the plots of the central rows have been provided.

Due to the simulation routine, only a qualitative analysis of the reconstructions is possible, since the true pixel values are unknown. Therefore, we normalized the reconstructions so that their maximum values become equal to the reference image's one. Besides the resulting images, for a better comparison we also plotted the central rows of the true images and the corresponding reconstructions. From figure 3 we can appreciate the ability of Space-D in recovering all the different morphologies, together with the well-known tendency of MEM to overfit the data, as remarked also in [16, 26]: diffuse objects are reconstructed as a combination of sharper and narrower sources. We point out the good reconstruction of the fainter source in SIM2, that is a tough task that we further investigated with a second set of simulations.

We consider six images of two compact circular sources with equal size but different peak values, with relative ratios ranging from 1 (equal sources) to 1/30. The intermediate peaks ratios are 1/5, 1/10, 1/15 and 1/20. In figure 4 we report the same graphs provided in the previous case, namely the reconstructed maps together with the plots of the central rows. From these last curves, rather than from the images whose scale do not allow a deep investigation, we can see that Space-D recognizes the presence of a second source even in the more difficult case, while MEM behaves well only up to a peak ratio of 1/10. Such tests demonstrate the ability of Space-D in reconstructing details of the image, that are (possibly) hidden by the smooth interpolation step performed by MEM in the gridding procedure.

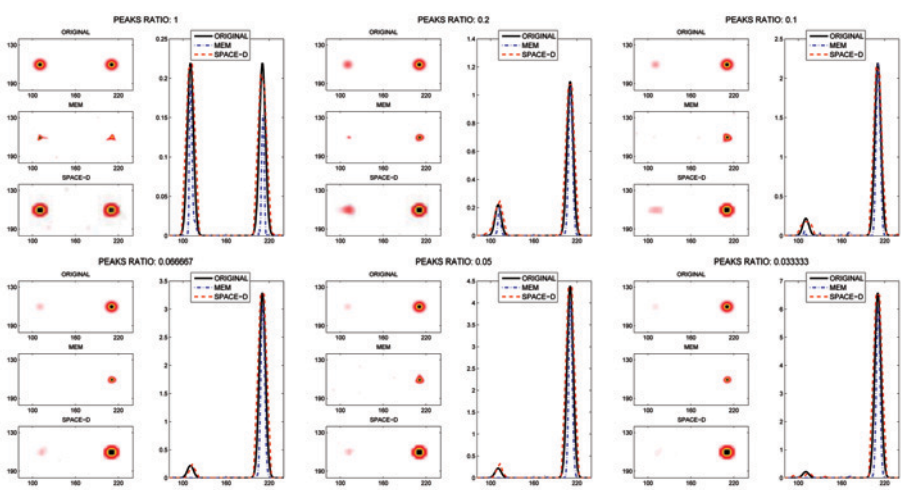


Fig. 4. – Reconstructions of the "resolution tests" with MEM and Space-D. From left to right, peaks ratios equal to 1, 1/5, 1/10, 1/15, 1/20 and 1/30 have been considered. For each case, the restored maps and the plots of the central rows have been provided.

6. – Conclusions and future work

In this paper we considered the image reconstruction problem in which the data at one's disposal are estimates or measurements of the unknown target Fourier Transform sampled nonuniformly in the frequency plane. Despite the more common approaches, we avoided to exploit interpolation techniques to resample the data on a uniform grid, since possible arbitrary impositions could be introduced in the data. Our proposal is to look for the image whose Fourier Transform is as close as possible to the measured data (in a least squares sense), with the addition of a non-negative constraint on the pixels content, that is a natural requirement for many real-world problems. The resulting formulation is a constrained optimization problem, and we addressed its solution by means of a suitable gradient method. Finally, regularization is achieved by means of an early stopping of the iterations, obtained through a combination of the Morozov's discrepancy principle with a numerical check on the objective function decrease. Simulated tests on solar X-ray images from RHESSI visibilities showed that our algorithm is able to provide effective reconstructions with different target morphologies, with a notable capability of detecting details of the image that in many cases result to be hidden by the strongest sources.

Future studies will address a semiblind deconvolution approach [14, 15], in which Space-D could be used within an alternating minimization scheme [8] to deduce exact values for the roll angles α (that now are arbitrarily assumed to be uniformly distributed in each of the nine circles). Moreover, if combined with an existing software which infers the Fourier Transform of the emitting source (instead of the emission flux) [27, 29], images of the emitting particles could be reproduced.

REFERENCES

[1] J. Barzilai - J. M. Borwein, *Two point step size gradient methods*, IMA J. Numer. Anal., **8** (1988), 141-148.

[2] F. Benvenuto - R. Zanella - L. Zanni - M. Bertero, *Nonnegative least-squares image deblurring: improved gradient projection approaches*, Inverse Probl., **26** (2010), 025004.

[3] M. Bertero - P. Boccacci, *Introduction to inverse problems in imaging*, Institute of Physics Publishing-Bristol, 1998.

[4] M. Bertero - C. De Mol - E. R. Pike, *Linear inverse problems with discrete data: I - General formulation and singular system analysis*, Inverse Probl., **1** (1985), 300-330.

[5] D. Bertsekas, *Nonlinear programming*, Athena Scientific-Belmont, 1999.

[6] E. G. Birgin - J. M. Martinez - M. Raydan, *Inexact spectral projected gradient methods on convex sets*, IMA J. Numer. Anal., **23** (2003), 539-559.

[7] R. E. Blahut, *Theory of remote image formation*, Cambridge University Press-Cambridge, 2001.

[8] S. Bonettini, *Inexact block coordinate descent methods with application to the nonnegative matrix factorization*, IMA J. Numer. Anal., **37** (2011), 1431-1452.

[9] S. Bonettini - M. Prato, *Nonnegative image reconstruction from sparse Fourier data: a new deconvolution algorithm*, Inverse Probl., **26** (2010), 095001.

[10] S. Bonettini - M. Prato, *A novel gradient projection approach for Fourier-based image restoration*, AIP Conf. Proc., **1281** (2010), 527-530.

[11] S. Bonettini - R. Zanella - L. Zanni, *A scaled gradient projection method for constrained image deblurring*, Inverse Probl., **25** (2009), 015002.

[12] S. C. Bong - J. Lee - D. E. Gary - H. S. Yun, *Spatio-spectral maximum entropy method. I. Formulation and test*, Astrophys. J., **636** (2006), 1159-1165.

[13] R. N. Bracewell, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill-New York, 2000.

[14] J.-M. Conan - L. M. Mugnier - T. Fusco - V. Michau - G. Rousset, *Myopic deconvolution of adaptive optics images by use of object and point-spread function power spectra*, Appl. Opt., **37** (1998), 4614-4622.

[15] J. C. Christou - D. Bonnacini - N. Ageorges - F. Marchis, *Myopic deconvolution of adaptive optics images*, Messenger, **97** (1999), 14-22.

[16] B. R. Dennis - R. L. Pernak, *Hard X-ray flare source sizes measured with the Ramaty High Energy Solar Spectroscopic Imager*, Astrophys. J., **698** (2009), 2131-2143.

[17] A. Dutt - V. Rokhlin, *Fast Fourier Transforms for nonequispaced data*, SIAM J. Sci. Comput., **14** (1993), 1368-1393.

[18] B. Eicke, *Iteration methods for convexly constrained ill-posed problems in Hilbert space*, Numer. Func. Anal. Opt., **13** (1992), 413-429.

[19] H. W. Engl - M. Hanke - A. Neubauer, *Regularization of inverse problems*, Kluwer–Dordrecht, 1996.

[20] G. Frassoldati - G. Zanghirati - L. Zanni, *New adaptive stepsize selections in gradient methods*, J. Ind. Manage. Optim., **4** (2008), 299-312.

[21] S. F. Gull - G. J. Daniell, *Image reconstruction from incomplete and noisy data*, Nature, **272** (1978), 686-690.

[22] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Yale University Press–New Haven, 1923.

[23] G. J. Hurford - E. J. Schmahl - R. A. Schwartz - A. J. Conway - M. J. Aschwanden - A. Csillaghy - B. R. Dennis - C. Johns-Krull - S. Krucker - R. P. Lin - J. McTiernan - T. R. Metcalf - J. Sato - D. M. Smith, *The RHESSI imaging concept*, Solar Phys., **210** (2002), 61-86.

[24] S. Krucker - M. Battaglia - P. J. Cargill - L. Fletcher - H. S. Hudson - A. L. MacKinnon - S. Masuda - L. Sui - M. Tomczak - A. L. Veronig - L. Vlahos - S. M. White, *Hard X-ray emission from the solar corona*, Astron. Astrophys. Rev., **16** (2008), 155-208.

[25] R. P. Lin - B. R. Dennis - G. J. Hurford - D. M. Smith - A. Zehnder - P. R. Harvey - D. W. Curtis - D. Pankow - P. Turin - M. Bester - A. Csillaghy - M. Lewis - N. Madden - H. F. van Beek - M. Appleby - T. Raudorf - J. McTiernan - R. Ramaty - E. Schmahl - R. Schwartz - S. Krucker - R. Abiad - T. Quinn - P. Berg - M. Hashii - R. Sterling - R. Jackson - R. Pratt - R. D. Campbell - D. Malone - D. Landis - C. P. Barrington-Leigh - S. Slassi-Sennou - C. Cork - D. Clark - D. Amato - L. Orwig - R. Boyle - I. S. Banks - K. Shirey - A. K. Tolbert - D. Zarro - F. Snow - K. Thomsen - R. Henneck - A. Mchedlishvili - P. Ming - M. Fivian - J. Jordan - R. Wanner - J. Crubb - J. Preble - M. Matranga - A. Benz - H. Hudson - R. C. Canfield - G. D.

HOLMAN - C. CRANNELL - T. KOSUGI - A. G. EMSLIE - N. VILMER - J. C. BROWN - C. JOHNS-KRULL - M. ASCHWANDEN - T. METCALF - A. CONWAY, *The Reuven Ramaty High-Energy Solar Spectroscopic Imager (RHESSI)*, Solar Phys., **210** (2002), 3-32.

[26] A. M. MASSONE - A. G. EMSLIE - G. J. HURFORD - M. PRATO - E. P. KONTAR - M. PIANA, *Hard X-ray imaging of solar flares using interpolated visibilities*, Astrophys. J., **703** (2009), 2004-2016.

[27] M. PRATO, *Regularization methods for the solution of inverse problems in solar X-ray and imaging spectroscopy*, Arch. Comput. Methods Eng., **16** (2009), 109-160.

[28] M. PRATO - R. CAVICCHIOLI - L. ZANNI - P. BOCCACCI - M. BERTERO, *Efficient deconvolution methods for astronomical imaging: algorithms and IDL-GPU codes*, Astron. Astrophys., **539** (2012), A133.

[29] M. PRATO - M. PIANA - A. G. EMSLIE - G. H. HURFORD - E. P. KONTAR - A. M. MASSONE, *A regularized visibility-based approach to astronomical imaging spectroscopy*, SIAM J. Imag. Sci., **2** (2009), 910-930.

[30] T. SERAFINI - G. ZANGHIRATI - L. ZANNI, *Gradient projection methods for quadratic programs and applications in training support vector machines*, Optim. Methods Softw., **20** (2005), 353-378.

[31] A. N. TIKHONOV - A. V. GONCHARSKY - V. V. STEPANOV - A. G. YAGOLA, *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*, Kluwer-Dordrecht, 1995.

[32] R. ZANELLA - P. BOCCACCI - L. ZANNI - M. BERTERO, *Efficient gradient projection methods for edge-preserving removal of Poisson noise*, Inverse Probl., **25** (2009), 045010.

[33] B. ZHOU - L. GAO - Y. H. DAI, *Gradient methods with adaptive step-sizes*, Comput. Optim. Appl., **35** (2006), 69-86.

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche
Università di Modena e Reggio Emilia, Via Campi 213/b, 41125 Modena, Italy
E-mail: marco.prato@unimore.it

Received November 14, 2012 and accepted April 27, 2013

Fabio Pusateri: Risonanze ed esistenza globale per equazioni dispersive

Fabio Pusateri[1]
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University
email: pusateri@cims.nyu.edu

Sunto

Presentiamo un risultato di esistanza globale per soluzioni di sistemi semilineari di equazioni delle onde in tre dimensioni. Come già osservato negli anni '70 da Fritz John blow-up in tempo finito può occorrere per alcune equazioni delle onde con nonlinerità quadratiche. Qualora la condizione di nullità (*null condition*) di Klainerman [3] sia verificata, si ha invece esistenza globale per dati piccoli. Qui presentiamo una nuova formulazione della condizione di nullità per sistemi di primo grado, dimostrando esistenza globale e scattering [4].

La particolare struttura dei sistemi considerati non sembra addattarsi all'utilizzo del classico metodo dei *commuting vector fields*. La nostra dimostrazione è invece basata sull'analisi delle risonanze spazio-temporali (*space-time resonances*) [1]. Al fine di ottenere stime dispersive ottimali, facciamo uso di una partizione angolare dello spazio delle frequenze. Questa consente di effettuare una forma normale in una regione dello spazio delle fasi, ed ottenere buone stime pesate nella regione complementare. É importante notare come le tecniche adottate facciano un uso molto ridotto delle invarianze dell'equazione e possano essere potenzialmente rilevanti in altre situazioni come, ad esempio, sistemi misti di equazioni.

Vorremmo infine mostrare come un adattamento del metodo delle risonanze spazio-temporali possa essere applicato allo studio del comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni di tipo Schrödinger [2].

Bibliografia

[1] P. Germain, N. Masmoudi and J. Shatah. *Global solutions for 3-d quadratic Schrödinger equations.* Int. Math. Res. Notices, (3):414–432, 2009.

[2] J. Kato and F. Pusateri. *A new proof of long range scattering for critical nonlinear Schrödinger equations.* ArXiv:1004.0721, 2010.

[3] S. Klainerman. *The null condition and global existence for systems of wave equations.* Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984), 293–326. Lectures in Appl. Math., 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[1] Lavoro svolto nell'ambito degli studi per il conseguimento del dottorato di ricerca

[4] F. Pusateri and J. Shatah. *Space-time resonances and the null condition for (first order) systems of wave equations.* Preprint, 2011.

Intervento: Fabio Pusateri,
Space-Time Resonances and the Null Condition for Wave Equations,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 513–529**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 513-529

Space-Time Resonances and the Null Condition for Wave Equations

FABIO PUSATERI

Abstract. – *In this note we describe a recent result obtained by the author and Shatah* [26]*, concerning global existence and scattering for small solutions of nonlinear wave equations. Based on the analysis of space-time resonances, we formulate a very natural non-resonance condition for quadratic nonlinearities that guarantees the existence of global solutions with linear asymptotic behavior. This non-resonance condition turns out to be a generalization of the null condition given by Klainerman in his seminal work* [21].

1. – Introduction

Global existence and asymptotic behavior of small solutions to nonlinear wave equations has been a subject under active investigation for over fifty years. One area of research, where much progress has been made, focuses on identifying nonlinearities that lead to global solutions for small initial data. In this note we consider first order systems on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, of the form

$$\text{(W)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = i\Lambda u + Q_1(u,v) + R_1(u,v) \\ \partial_t v = -i\Lambda v + Q_2(u,v) + R_2(u,v) \\ u(1,x) = u^0(x)\,, v(1,x) = v^0(x), \end{cases}$$

where $\Lambda := |\nabla|$, $Q_i(u,v)$ are bilinear in (u,v) and their complex conjugates, and R_i are of degree 3 or higher.

In this paper we focus on determining some general conditions, naturally arising from the *space time resonance analysis*, that guarantee global existence and scattering. Our non-resonant condition imposed on the Q_i, roughly states that time resonant wave interactions should be limited to waves with different group velocities (spatially non-resonant waves).

Since cubic and higher order terms do not require any condition to ensure global existence, we will drop the R_i's from any further consideration. Moreover by introducing the notation for bilinear pseudo-product operator

$$T_{m(\xi,\eta)}(f,g) := \mathcal{F}^{-1} \int m(\xi,\eta) \widehat{f}(\eta)\, \widehat{g}(\xi-\eta)\, d\eta,$$

where $\hat{g} = \mathcal{F}g$ is the Fourier transform of g, and without any loss of generality, we reduce the system to a single scalar equation

$$\begin{cases} \partial_t u - i\Lambda u = T_{q_{+,+}(\xi,\eta)}(u,u) + T_{q_{-,+}(\xi,\eta)}(\bar{u},u) + T_{q_{-,-}(\xi,\eta)}(\bar{u},\bar{u}) \\ u(1,x) = u^0(x)\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

with quadratic nonlinearities. Here and throughout the paper, the signs $+,-$ correspond to the presence of u and $\bar{u}$ respectively.

Our work is motivated by some recent applications of the *space-time resonance method* to several problems in the field of nonlinear dispersive PDEs. This method was introduced in [7, 9] where non resonant nonlinearites were treated for Schrödinger equations, which corresponds to (W) with $\Lambda = |\nabla|^2 = -\Delta$. In these works, most of the existing results on global existence and scattering of small solutions were reproduced and explained by studying space time resonant frequencies. Subsequently the method was applied to gravity water waves [8], which corresponds to $\Lambda = |\nabla|^{1/2}$, and to capillary waves [10], which corresponds to $\Lambda = |\nabla|^{3/2}$. Thus it is natural to us to apply this method to system (W), where $\Lambda = |\nabla|$, which can be reduced to a system of nonlinear wave equations. Our main result is:

THEOREM 1.1. – *Assume that system* (1.1) *is non-resonant in the sense of definition* 4.3, *and that the initial datum satisfies* (1)

$$\|xu_0\|_{H^2} + \|\Lambda x^2 u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{H^N} \leq \varepsilon_0 \tag{1.2}$$

for some large enough integer N. Then, if ε_0 is small enough, there exists a unique global solution to (1.1) *with*

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \lesssim \frac{\varepsilon_0}{t}\,.$$

Moreover, $u(t)$ scatters in H^2 to a linear solution as $t \to \infty$.

Our non resonant condition defined in 4.3 turns out to include the classical null condition for wave equations [21], wave equations which are not invariant under the full Lorentz group, as well as other systems where global existence and asymptotic behavior of small solutions was not known.

(1) See the remark at the end of section 3 for some comments about these initial conditions.

2. – Background

Since our system can be reduced to nonlinear wave equations, we give a brief review of some of the main results about the long time existence of solutions for systems of quadratic nonlinear wave equations on $\mathbb{R}^{1+3}$:

$$\Box u_i = \sum a^{jk}_{i,\alpha\beta} \partial^\alpha u_j \partial^\beta u_k \; + \text{ cubic terms} \tag{2.1}$$

where $i = 1, \dots, N$ for some $N \in \mathbb{N}$, and the sum runs over $j, k = 1, \dots, N$, and all multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^4$ with $|\alpha|, |\beta| \leq 2$, $|\alpha| + |\beta| \leq 3$, with the usual convention that $\partial_0 = -\partial^0 = \partial_t$. Let us first recall that in 3 space dimensions general quadratic nonlinearities have long range effects: the L^2 norm of the nonlinearity, computed on a linear solution, decays at the borderline non-integrable rate of t^{-1}. Thus, quadratic nonlinearties can contribute to the long time behavior of solutions. It is in fact known since the pioneering works of John [11, 12] that finite time blowup can occur even for solutions with small data. On the other hand, for some very general classes of quadratic nonlinearities solutions were shown to exist almost globally by John and Klainerman [13] and Klainerman [19].

The main breakthrough in identifying classes of nonlinear wave equations where solutions with small data exist globally and scatter was in the works of Klainerman [21], Choquet-Bruhat and Christodoulou [2], and Christodoulou [3]. The class of nonlinearities that satisfy the "null condition" was introduced by Klainerman [21], and for semlinear systems

$$\Box u_i = \sum_{|\alpha|,|\beta|=1} a^{jk}_{i,\alpha\beta} \partial^\alpha u_j \partial^\beta u_k + \text{ cubic terms} \tag{2.2}$$

is given by the condition

$$\sum a^{jk}_{i,\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta = 0 \qquad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^4 \text{ such that } -\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0\,. \tag{2.3}$$

For such systems it was shown by Klainerman [21] that in $3+1$ dimension small data solutions exists globally. This seminal work of Klainerman is based on the invariance of Minkowski space under the Lorentz group and on energy estimates using the vector fields that generate the Lorentz group [19].

Later on, building on Klainerman's original ideas, the problem of bypassing the use of the full invariance under the Lorentz group was dealt with by other authors. In [22] Klainerman and Sideris proved almost global existence of solutions for quadratic systems (2.1) in divergence form, under the sole assumption of translation, rotation and scaling invariance. Further developments were made by Sideris in [27, 28], where global existence of nonlinear elastic waves is proven under the assumption of the null condition. Similar results include the almost global existence of solutions contained in the works of Keel, Smith and Sogge [17, 18]. It also worth mentioning that several works have dealt with

the question of identifying other conditions (weaker than the null condition) under which global existence of solutions of (2.1) can be proven; see for instance Lindblad [23], Alinhac [1], Lindblad and Rodnianski [24, 25], and Katayama [14].

Another approach that identifies the effects of nonlinearities on the long time behavior of solutions is based on time resonant computations. For ODE's this is the Poincare-Dulac normal form. For PDE's normal forms were introduced by Shatah [30] and Simon [32] who treated, respectively, the Cauchy problem and the final state problem for the Klein-Gordon equation in $3+1$ dimensions. Similar results were obtained by Klainerman using the vector fields method [20].

In the past several years a new algorithmic method, called the "space-time resonance method", was developed by Germain, Masmoudi, and Shatah, to study long time behavior of spatially localized small solutions to dispersive equations. By bringing together ideas from both vector fields and normal forms, this new method proved to be very effective in proving new results [8, 5, 6] as well as simplifying already existing ones [7, 9, 16]. A description of this method can be found in [7].

Notations

We use R to denote indistinctly any one of the components of the vector of Riesz transforms $R = \dfrac{\nabla}{\Lambda}$, where $\Lambda := |\nabla|$. L^p norms will be denoted either by $\|\cdot\|_{L^p}$ or $\|\cdot\|_p$. For $s \geq 0$, $p \geq 1$, we define the usual Sobolev norms

$$\|\varphi\|_{W^{s,p}} := \|\langle\nabla\rangle^s \varphi\|_{L^p} ,$$

$$\|\varphi\|_{\dot{W}^{s,p}} := \|\Lambda^s \varphi\|_{L^p} ,$$

where $\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{1/2}$. We let $H^s := W^{s,2}$ and $\dot{H}^s := \dot{W}^{s,2}$.

Finally we write $A \lesssim B$ to mean $A \leq CB$ for some positive absolute constant C.

3. – Resonance analysis and non-resonant bilinear forms

To compute resonances for an equation of the type

$$iu_t + P\left(\frac{1}{i}\nabla\right)u = T_{m(\xi,\eta)}(u,u),$$

we write Duhamel's formula in Fourier space for the "profile" of u, namely

$f := e^{-itP(\frac{1}{i}\nabla)}u$, as follows:

$$\widehat{f}(t,\xi) = \widehat{u}_0(\xi) + \int_0^t \int e^{is\varphi(\xi,\eta)} m(\xi,\eta)\widehat{f}(s,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\,d\eta\,ds\,, \tag{3.1}$$

where $\varphi(\xi,\eta) := -P(\xi) + P(\eta) + P(\eta-\xi)$ (and obvious signs modifications occur if Q depends also on $\bar{u}$). We then define the *time resonant set*

$$\mathscr{T} := \{(\xi,\eta) \,:\, \varphi(\xi,\eta) = 0\} \qquad \text{(no oscillations in } s)\,,$$

the *space resonant set*

$$\mathscr{S} := \{(\xi,\eta) \,:\, \nabla_\eta\varphi(\xi,\eta) = 0\} \qquad \text{(no oscillations in } \eta)\,,$$

and the *space-time resonant set*

$$\mathscr{R} := \mathscr{T} \cap \mathscr{S}\,.$$

Since for system (1.1) both u and $\bar{u}$ are present in the bilinear terms, there are three types of interactions that we need to analyze.

The $--$ case

The phase $\varphi_{--} := -|\xi| - |\eta| - |\xi-\eta|$ clearly vanishes only at $\xi = \eta = 0$:

$$\mathscr{T}_{--} = \{\eta = \xi = 0\}\,.$$

Since the time resonant set is reduced to a point, we can perform a *normal form transformation*. This allows us to obtain the L^∞ decay in a more direct fashion (without the need to resort to weighted estimates). For completeness we compute

$$\mathscr{S}_{--} = \{\eta = \lambda\xi, \quad 0 \le \lambda \le 1\},$$

and

$$\mathscr{R}_{--} = \{\xi = \eta = 0\}\,.$$

The $++$ case

The phase $\varphi_{++} := -|\xi| + |\eta| + |\xi-\eta|$ vanishes on

$$\mathscr{T}_{++} = \{\eta = \lambda\xi, \quad 0 \le \lambda \le 1\}\,.$$

A simple computation shows that

$$\mathscr{S}_{++} = \{\eta = \lambda\xi, \quad 0 \le \lambda \le 1\}\,,$$

whence

$$\mathscr{R}_{++} = \mathscr{S}_{++} = \mathscr{T}_{++}\,.$$

The space time resonant set is very large, thus some additional structures are needed to help controlling these resonances. The first structure will be imposed on the interaction by requiring the symbol q_{++} to vanish on $\mathscr{R}_{++}$. The second structure is present in the phase

$$|\xi|\nabla_\xi \varphi_{++} = \frac{\eta - \xi}{|\eta - \xi|}\varphi_{++} - |\eta|\nabla_\eta \varphi_{++}\,,$$

and can be interpreted by saying that all resonant waves have the same group velocity and thus are spatially localized in the same region. This fact together with $\mathscr{S}_{++} = \mathscr{T}_{++}$ allows to control these resonances by solely relying on weighted energy estimates.

The $-+$ and $+-$ cases

Up to the change of variables (2) $\eta \to \xi - \eta$, these two case are the same. Therefore, we will just focus on the $-+$ case. Since the phase is $\varphi_{-+} := -|\xi| - |\eta| + |\xi - \eta|$, then

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_{-+} &= \{\eta = \lambda\xi, \qquad \lambda \le 0\} \cup \{\xi = 0\}\,,\\
\mathscr{S}_{-+} &= \{\eta = \lambda\xi, \qquad \lambda \le 0 \quad \text{or} \quad \lambda \ge 1\} \cup \{\xi = 0\}\,,\\
\mathscr{R}_{-+} &= \{\eta = \lambda\xi, \qquad \lambda \le 0\} \cup \{\xi = 0\}\,.
\end{aligned}$$

Again the set $\mathscr{R}_{-+}$ is very big and additional conditions are needed to ensure global existence and linear asymptotic behavior of solutions. These conditions are similar to the $++$ interaction, i.e., q_{-+} vanishes on $\mathscr{R}_{-+}$ and the fact that

$$|\xi|\nabla_\xi \varphi_{-+} = \frac{\eta - \xi}{|\eta - \xi|}\varphi_{-+} + |\eta|\nabla_\eta \varphi_{-+}\,.$$

However this interaction presents an additional difficulty over the $++$ case since $\mathscr{T}_{-+} \subsetneq \mathscr{S}_{-+}$, which requires both normal forms transformation and weighted estimates. The fact that this is an added difficulty is explained below.

4. – Non-resonant bilinear forms

From Duhamel's formula for equation (1.1) in Fourier space the quadratic terms are expressed as

$$\widehat{B}_{\pm\pm}(t,\xi) = \int_1^t\!\!\int e^{is\varphi_{\pm\pm}(\xi,\eta)} q_{\pm\pm}(\xi,\eta)\widehat{f}_\pm(s,\eta)\widehat{f}_\pm(s,\xi-\eta)\,d\eta ds$$

(2) notice that $m_{12}(\xi, \xi - \eta) = -m_{12}(\xi, \eta)$.

where $f_+ = f$ and $f_- = \bar{f}$ and

$$\varphi_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi,\eta) = -|\xi| + \varepsilon_1|\xi-\eta| + \varepsilon_2|\eta|\,,$$

for $\varepsilon_i = \pm$. The quadratic interaction is given in terms of its symbol $q_{\pm\pm}$. To define non-resonant bilinear forms we start by defining the class of symbols that we will be dealing with:

DEFINITION 4.1. – *A symbol $m = m(\xi,\eta)$ belongs to the class $\mathcal{B}_s$ if*

- *It is homogeneous of degree s;*
- *It is smooth outside of $\{\xi = 0\} \cup \{\eta = 0\} \cup \{\xi - \eta = 0\}$.*
- *For any labeling (ξ_1,ξ_2,ξ_3) of the three Fourier variables $(\xi,\eta,\xi-\eta)$ the following holds:*

$$\textit{for} \quad |\xi_1| \ll |\xi_2|, |\xi_3| \sim 1 \qquad m = \mathcal{A}\left(|\xi_1|, \frac{\xi_1}{|\xi_1|}, \xi_2\right)$$

for some smooth function $\mathcal{A}$.

Loosely speaking, symbols in $\mathcal{B}_0$ are Coifman-Meyer [4] except, possibly, along the axes $\xi = 0, \eta = 0$ and $\xi - \eta = 0$, where they can have singularities like linear Mihlin-Hörmander multipliers. Symbols in $\mathcal{B}_s$ are essentially of the form $|\xi|^s m_0$ for some $m_0 \in \mathcal{B}_0$. The boundedness of these bilinear operators on L^p is given by the following Theorem:

THEOREM 4.2 (Boundedness of bilinear multipliers [8], [26]). – *Let p,q,r be given such that $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ and $1 < p,q,r < \infty$. The following hold*

(i) *If m belongs to the class $\mathcal{B}_0$*

$$\|T_m(f,g)\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\,.$$

(ii) *If m belongs to the class $\mathcal{B}_s$ for $s \geq 0$ and k is an integer, then*

$$\left\| \Lambda^k T_m(f,g)\right\|_{L^r} \lesssim \|f\|_{W^{s+k,p}}\|g\|_{L^q} + \|f\|_{L^p}\|g\|_{W^{s+k,q}}\,.$$

(iii) *If m belongs to the class $\mathcal{B}_s$ and $M > 3$, then*

$$\left\| \Lambda^k T_m(f,g)\right\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{H^{s+k}}\|g\|_{W^{1,M}} + \|f\|_{W^{1,M}}\|g\|_{H^{s+k}}\,.$$

With the class $\mathcal{B}_s$ defined above we can define a non-resonant system as follows:

DEFINITION 4.3 (Non-resonant bilinear forms). – *System* (1.1) *is called non-resonant if*

$$q_{\pm\pm}(\xi,\eta) = a(\xi,\eta)\varphi_{\pm\pm}(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)\cdot\nabla_\eta\varphi_{\pm\pm}(\xi,\eta)\,, \tag{4.1}$$

with $a \in \mathcal{B}_{-1}$ and $b \in \mathcal{B}_0$. Additionally we require that

$$|\eta|\nabla_{(\xi,\eta)}a(\xi,\eta) \quad or \quad |\xi-\eta|\nabla_{(\xi,\eta)}a(\xi,\eta) = \frac{\mu_0^{(1)}(\xi,\eta)}{|\xi|} + \frac{\mu_0^{(2)}(\xi,\eta)}{|\eta|} + \frac{\mu_0^{(3)}(\xi,\eta)}{|\xi-\eta|} \tag{4.2}$$

for some $\mu_0^{(i)} \in \mathcal{B}_0$, and

$$\| T_{b(\xi,\eta)}(f,g)\|_{L^2} \lesssim \| f\|_{L^2} \sum_{j=0}^{k} \|R^j g\|_{L^\infty} + \sum_{j=0}^{k} \| R^j f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^2} \tag{4.3}$$

for some $k \in \mathbb{N}$.

Some comments about this definition. Equation (4.1) asserts that bilinear interactions vanish on $\mathscr{R}_{\pm\pm}$, the space time resonant set. The presence of $\varphi_{\pm\pm}$ in equation (4.1) allows us to perform normal form transformation on one part of the bilinear terms (integration by parts in s), while the presence of $\nabla_\eta \varphi_{\pm\pm}$ allows us to treat the remaining part by weighted estimates (integration by parts in η). The *classical null condition* is equivalent to $a = 0$ (see below). Equation (4.2) essentially avoids having $a(\xi,\eta) \sim |\xi|^{-1}$ which would be too singular to handle. Equation (4.3) is needed due to failure of the $L^2 \times L^\infty \to L^2$ estimate for symbols in $\mathcal{B}_0$. It would be possible to avoid this last technical restriction by resorting to the use of Besov spaces, but for the sake of simplicity we do not pursue this matter here (see also remark 5.1 for more comments about this aspect).

Examples of non-resonant systems

Now we give examples of non-resonant systems and explain how they relate to existing definitions on "null systems", and how our definition is a natural extension of previous ones.

Classical null forms.

Quadratic (semilinear) nonlinearities satisfying the null condition (2.3) are linear combinations of

$$Q_{ij}(u,v) = \partial_i u \partial_j v - \partial_j u \partial_i v\,, \tag{4.4a}$$

$$Q_{0i}(u,v) = \partial_t u \partial_i v - \partial_i u \partial_t v\,, \tag{4.4b}$$

$$Q_0(u,v) = \partial_t u \partial_t v - \nabla u \cdot \nabla v\,. \tag{4.4c}$$

By letting $(u_\pm, v_\pm) = (\partial_t u \mp i\Lambda u, \partial_t v \mp i\Lambda v)$, one can reduce systems (2.2) to first order systems in the unknowns $u_\pm$ and $v_\pm$. Then, one can check that the respective symbols of the above null forms (4.4), corresponding to interactions of

u_{ε_1} and v_{ε_2}, are given (up to a constant factor) by

$$m_{ij}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi,\eta) = 2\frac{\eta_i\xi_j - \eta_j\xi_i}{|\eta||\xi-\eta|} = \partial_{\eta_i}\varphi_{++}(\xi,\eta)\partial_{\eta_j}\varphi_{+-}(\xi,\eta) - \partial_{\eta_j}\varphi_{++}(\xi,\eta)\partial_{\eta_i}\varphi_{+-}(\xi,\eta)$$

$$m_{0i}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi,\eta) = \left(\varepsilon_1\frac{\eta_i}{|\eta|} + \varepsilon_2\frac{\eta_i-\xi_i}{|\eta-\xi|}\right) = \partial_{\eta_i}\varphi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\xi,\eta)$$

$$m_0^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\xi,\eta) = 2\left(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\eta}{|\eta|}\cdot\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|}\right) = \left|\nabla_\eta\varphi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\xi,\eta)\right|^2.$$

These symbols are of the form (4.1) with $a = 0$ and vanish on the space resonant set. Thus classical null forms are spatially non-resonant, and therefore can be treated by weighted estimates and without normal forms transformation. Note that in our system the $+-$ interactions have $\mathscr{T}_{+-} \subsetneq \mathscr{S}_{+-}$, and our symbols (4.1) only vanish on the smaller set $\mathscr{T}_{+-}$. To treat these interactions a normal form transformation is needed, leading to terms which are not well spatially localized. This causes a difficulty that will be elaborated on below.

The classical quasilinear null forms are also non-resonant in that their symbols satisfy (4.1) where the homogeneities of a and b are increased by 1. However, for general first order systems of the type (1.1), quasilinear equations lose derivatives in the energy estimates unless there are cancellations present. In the special case where the first order quasilinear system comes from a second order system of wave equations with quasilinear null terms, cancellations are present in the energy estimates. Thus, our results will apply for such nonlinearities as well ([3]).

Systems with multiple speeds

For systems

$$\partial_t u_\ell - ic_\ell \Lambda u_\ell = \sum_{j,k} T_{q_{j,k}^\ell(\xi,\eta)}(u_j, u_k) \tag{4.5}$$

the phases are given by $-c_\ell|\xi| + c_j|\xi-\eta| + c_k|\eta|$. In the case $c_j \neq \pm c_k$ one has $\mathscr{S} = \{0,0\}$, so that our results will trivially apply.

If $c_j = \pm c_k$, $\mathscr{R} = \{0,0\}$ unless $c_k = \pm c_\ell$. Therefore, in the case $c_k \neq \pm c_\ell$, global existence can be obtained provided a suitable null condition is imposed at $\{0,0\}$. This is similar to the work on quadratic NLS [9]. The full non-resonance condition

([3]) More specifically, in the quasilinear case the most efficient proof of the analogue of Theorem 1.1 would consist of two steps: 1) establishing energy and weighted energy estimates directly on the second order wave equation so to obtain the weighted bounds in (5.7); 2) run our proof to show the decay of solutions.

is then needed only for interactions of the form $-c_\ell|\xi| + c_\ell|\xi - \eta| \pm c_\ell|\eta|$. This extension is similar to the result of Sideris and Tu [29]. We also refer the reader to the work of Katayama and Yokoyama [15] and references therein for more on systems with multiple speeds.

Some examples of interest that can be treated using our techniques are:

1. First order systems of the form

$$\begin{cases} \partial_t u + ic\Lambda u = |v|^2 \\ \partial_t v + i\Lambda v = T_m(v,v) + u^3 \end{cases} \tag{4.6}$$

where $c > 1$ and m is non-resonant as in definition 4.1. Here no special null condition at the origin is assumed on the bilinear form in the first equation. This system does not satisfy any existing null condition criteria set by the vector fields method. In fact we believe that this system is not amenable to analysis by the vector fields method due to the simultaneous failure of the Lorentz invariance and the need of a normal form transform.

Our method works by first applying a normal form transformation on u (notice that the phase is bounded below by $(c-1)|\xi|$), and then handling the singularity introduced by such a transformation through a spread-tight splitting as explained in section 5.

2. Systems of wave equations of the form

$$\begin{cases} \Box_1 u = (\partial v)^2 + \partial u(\partial w)^2 \\ \Box_1 v = \partial v \partial w + Q(v,v) \\ \Box_c w = \partial v \partial w + \partial u(\partial v)^2 \end{cases} \tag{4.7}$$

where $\Box_c := \partial_t^2 - c^2\Delta$, $c \neq 1$ and Q is any null form. This is an example of a nonrelativistic system satisfying the weak null condition. Global existence can be obtained with a weaker decay on u of the form $\|\partial u\|_{L^\infty} \lesssim t^{-1+\varepsilon}$, for $\varepsilon \ll 1$.

Non-locality and absence of Lorentz invariance

The class of systems (W), under the non-resonance condition given by definition 4.3, includes the class of second order wave equations

$$\Box u = T_1 Q(T_2 u, T_3 u) \tag{4.8}$$

where the T_i's are zero-th order operator and Q is any combination of the nonlinear terms (4.4a)-(4.4c) (or their quasilinear version). For systems as (4.8) the action of the Lorentz boosts $L_i = x_i\partial_t + t\partial_i$ on the nonlinearity produces some terms which are too singular to be estimated. This makes the classical [21] vector fields method difficult to be applied.

In [27, 28] Sideris considered quasilinear hyperbolic systems governing the motion of isotropic, homogeneous, nonlinear elastic waves. Like systems with multiple speeds, these systems are only classical invariant, i.e. they do not possess Lorentz invariance. By imposing a null condition on the nonlinear terms of the form $F(\nabla u)\nabla^2 u$, he was able to show global existence of solutions. As mentioned in the introduction, several other works have dealt with the problem of long time existence for classically invariant systems on $\mathbb{R}^{3+1}$, see for example [22, 17, 18]. Our methods are also applicable to the systems considered in these works.

A remark about the initial data

In contrast with the results mentioned previously, our initial data belong to a low weighted Sobolev space. In particular we only ask for $xu_0 \in H^2$ and $|x|^2 \Lambda u_0 \in H^1$, see (1.2). In comparison, the spaces used in [22, 27, 17] would require $(|x|\Lambda)^i u_0 \in \Lambda(L^2)$, for $i = 0 \dots k$ and some $k \geq 7$. This means that we can allow more oscillating data. For example, for data behaving at infinity like $\cos|x|/|x|^\alpha$, we can allow any $\alpha > \frac{7}{2}$, whereas in the other works one would need $\alpha > \frac{17}{2}$.

5. – Outline of the proof

Before outlining the proof of Theorem 1.1 we would like to point out two difficulties in our problem:

a) Although the space-time resonance method is algorithmic, its implementation on the space-time resonant set is very much problem dependent. This is due to the fact that the aforementioned set can be large with no clear criteria, set by the method, to address how large is large. Its application to nonlinear dispersive equations has been restricted so far to cases where the resonant set is very small. In particular, for problems such as the Schrödinger equation, the resonant set is a point; and for gravity water waves, there are no quadratic time resonances. However for hyperbolic systems this set is large. For the system we are considering here the space time resonant set is 4 dimensional in a 6 dimensional space. Treating such a big space-time resonant set required new ideas, which we present in this manuscript.

b) When space resonant frequencies are different from time resonant frequencies, and when both types of resonances are present in the bilinear interactions, a normal form transformation is needed

$$u \to u + T_m(u,u) \Leftrightarrow \widehat{f} \to \widehat{f} + \int e^{is\varphi(\xi,\eta)} m(\xi,\eta)\widehat{f}(s,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)\,d\eta\,.$$

The bilinear term $T_m(u,u)$ need not be well localized in space since the outcome of the interaction may have a different group velocity, i.e., $\nabla_\xi \varphi \neq 0$, which is the case for (1.1). Thus weighted estimates on this bilinear interaction tend to grow at a fast rate with time. We refer to these bilinear interactions as *spread terms*. This is in contrast to non space resonant frequencies which are well spatially localized and for which weighted estimates tend to grow very slowly. We refer to such bilinear interactions as *tight terms*. The presence of tight and spread terms is problematic and requires a careful analysis when trying to establish the decay of solutions. This is the case here for the $+-$ interactions, as was the case for the 2D Schrödinger equation [9]. Our strategy in obtaining the pointwise decay of solutions will be explained below in more details.

Reduction of system (1.1)

By isolating the terms in equation (1.1) that are most difficult to estimate, we can considerably simplify our notations and the presentation of the main aspects of the proof of Theorem 1.1.

Reduction to the $-+$ case

As the analysis of resonances in section 3 showed, the $-+$ interactions lead to a more complicated resonant set than the $++$ and $--$ interactions. The $-+$ case actually contains the difficult aspects of both the $++$ and $--$ cases. More precisely, in the $-+$ case we will need to decompose the phase space in two sets: one containing $\mathscr{R}_{-+}$ but not $\mathscr{S}_{-+} \cap \mathscr{T}^c_{-+}$, and the other one containing $\mathscr{S}_{-+} \cap \mathscr{T}^c_{-+}$ but not $\mathscr{R}_{-+}$. The analysis on the set containing $\mathscr{R}_{-+}$, respectively on the set containing $\mathscr{S}_{-+} \cap \mathscr{T}^c_{-+}$, would be enough to take care of the $++$, respectively the $--$, interactions.

Therefore, we focus only on the $-+$ interactions, and we will drop the $-+$ indices for lighter notations.

Reduction to $a(\xi,\eta) = \dfrac{1}{|\eta|}$ and $b(\xi,\eta) = 1$

Recall that we are imposing the restriction (4.2) on a. This means that a can have singularities of the type $1/|\eta|$ or $1/|\xi-\eta|$, but not of the form $1/|\xi|$. By the symmetry between η and $\xi-\eta$, we can then assume that a is of the form $\mu_0(\xi,\eta)/|\eta|$ for some $\mu_0 \in \mathcal{B}_0$. Moreover, since the presence of symbols in the class $\mathcal{B}_0$ is irrelevant for our estimates on the terms corresponding to the symbol $a(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)$, we can simply assume that a is given by $1/|\eta|$.

Finally, since we assume that b satisfies (4.3), and since we will show that $\|R^j u\|_{L^\infty}$ is controlled with a decay of t^{-1} (see remark 5.1 below) we can reduce

matters to $b = 1$. It will be clear to the reader what minor modifications are necessary to perform the estimates for a general $b \in \mathcal{B}_0$ and satisfying (4.3).

In view of these reductions the non-resonant equation becomes

$$\widehat{f}(t,\xi) = \widehat{f}_0(\xi) + \int_1^t \int e^{is\varphi(\xi,\eta)} \left(\frac{\varphi(\xi,\eta)}{|\eta|} + \nabla_\eta \varphi(\xi,\eta) \right) \widehat{f}(s,\xi-\eta)\widehat{f}(s,\eta) d\eta ds \,. \tag{5.1}$$

Furthermore, we recall that $\nabla_\xi \varphi$ vanishes on the resonant set, and in particular the following identity holds:

$$|\xi| \nabla_\xi \varphi = \frac{\eta - \xi}{|\eta - \xi|} \varphi + |\eta| \nabla_\eta \varphi \,. \tag{5.2}$$

Splitting of the profile f

Integrating by parts in s in the terms containing the phase φ we get

$$\widehat{f}(t,\xi) \stackrel{def}{=} \widehat{f}_0(\xi) + \widehat{g}(t,\xi) + \widehat{h}(t,\xi) \stackrel{def}{=} \widehat{f}_0(\xi) + \widehat{g}(t,\xi) + \widehat{h}_0(t,\xi) + \widehat{h}_1(t,\xi)$$

where

$$\widehat{g}(t,\xi) \stackrel{def}{=} \int e^{it\varphi(\xi,\eta)} \frac{1}{|\eta|} \widehat{f}(t,\xi-\eta)\widehat{f}(t,\eta)\, d\eta \,, \tag{5.3a}$$

$$\widehat{h}_0(t,\xi) \stackrel{def}{=} \int_1^t \int e^{is\varphi(\xi,\eta)} \nabla_\eta \varphi(\xi,\eta) \widehat{f}(s,\xi-\eta)\widehat{f}(s,\eta)\, d\eta ds, \tag{5.3b}$$

$$\widehat{h}_1(t,\xi) \stackrel{def}{=} \int_1^t \int e^{is\varphi(\xi,\eta)} \frac{1}{|\eta|} \partial_s \Big(\widehat{f}(s,\xi-\eta)\widehat{f}(s,\eta) \Big)\, d\eta ds \,. \tag{5.3c}$$

This splitting can be understood in the following manner:

1) g comes from the normal form transformation, has very good time decay but is spatially spread;
2) h_0 is a spatially tight term due to the presence of $\nabla_\eta \varphi(\xi,\eta)$;
3) h_1 is cubic in f.

Regarding $h_0 = h_0(f,f)$ as a bilinear form of $f = f_0 + g + h$, we can decompose h_0 as

$$\begin{aligned} h_0(f,f) &= h_0(f_0,f_0+h) + h_0(f_0,g) + h_0(g,f) + h_0(h,h) + h_0(h,g) + h_0(h,f_0) \\ &= h_0(g,f) + h_0(h,h) + h_* \,, \end{aligned} \tag{5.4}$$

and thus decompose f further:

$$f = f_0 + g + h_0(h,h) + h_0(f,g) + h_1 + h_*. \tag{5.5}$$

A priori bounds

The proof of global existence and scattering of solutions is obtained from the following a priori bounds on $u = e^{it\Lambda}f$:

$$\begin{cases} \|u\|_{H^N} \lesssim t^{\varepsilon}, \quad \|u\|_{H^2} \lesssim 1, \qquad \|u\|_{L^\infty}, \|Ru\|_{L^\infty} \lesssim \dfrac{1}{t}, \\ \|xf\|_{L^2} \lesssim t^{\gamma}, \quad \|\Lambda xf\|_{H^1} \lesssim 1, \quad \left\| |x|^2 \Lambda f \right\|_{H^1} \lesssim t\,, \end{cases} \tag{5.6}$$

and a continuation of the local-in-time solution. Here, N is a suitably large number possibly depending on ε and γ, which are arbitrarily small but fixed positive constants. This leads us to define the space X by the norm associated to these bounds:

$$\begin{aligned} \|u\|_X := \sup_{t\geq 1} \Big[& t^{-\varepsilon}\|u\|_{H^N} + \|u\|_{H^2} + t(\|u\|_{L^\infty} + \|Ru\|_{L^\infty}). \\ & + t^{-\gamma}\|xf\|_{L^2} + \|\Lambda xf\|_{H^1} + t^{-1}\left\| |x|^2 \Lambda f \right\|_{H^1} \Big]\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

REMARK 5.1. – The presence of $\|Ru\|_{L^\infty}$ is not surprising because the Riesz transform is already present in the interaction symbol $\nabla_\eta \varphi$. However we remark here that if b is any symbol in $\mathcal{B}_0$ satisfying (4.3), the same X-norm above would work. Indeed, as a byproduct of our estimates we have

$$\left\|R^k u\right\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t}\left[\varepsilon_0 + \|u\|_X^2\right] \tag{5.8}$$

for any k. This is because L^∞ estimates on $u = e^{-it\Lambda}u_0 + e^{-it\Lambda}g + e^{-it\Lambda}h$ are obtained by

a) using Sobolev's embedding on g: $\|e^{-it\Lambda}g\|_{L^\infty} \lesssim \|e^{-it\Lambda}g\|_{W^{1,p}}$ for $p \gg 1$, and then showing $t\|e^{-it\Lambda}g\|_{W^{1,p}} \lesssim \|u\|_X^2$;
b) estimating weighted L^2 norms of the main components of h by means of the following linear dispersive estimates:

$$\left\|e^{it\Lambda}h\right\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t}\|\langle x\rangle^{\frac{3}{2}+}\Lambda^2 h\|_{L^2} \tag{5.9}$$

$$\left\|e^{it\Lambda}h\right\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t}\left\||x|\Lambda^2 h\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\||x|^2\Lambda^2 h\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.10}$$

In both operations *a*) and *b*) the presence of Riesz transforms becomes irrelevant.

Bounds for g and h

A key aspect of our proof is the different treatment of the components g and h, and the different treatment of some components of h itself. In particular, the

bound on $\|u\|_X$ will follow from the bounds on g

$$\begin{cases} \|g\|_{H^N} \lesssim \|u\|_X^2, \quad \|xg\|_{L^2} \lesssim t^\gamma \|u\|_X^2, \quad \|\Lambda xg\|_{H^1} \lesssim \|u\|_X^2, \\ \big\|\Lambda |x|^2 g\big\|_{H^1} \lesssim t\|u\|_X^2, \quad \big\|e^{it\Lambda} g\big\|_{L^\infty} \lesssim \dfrac{1}{t}\|u\|_X^2 . \end{cases} \tag{5.11}$$

and the bounds on h

$$\begin{cases} \|h\|_{H^N} \lesssim t^\varepsilon \|u\|_X^2, \quad \|h\|_{H^2} \lesssim \|u\|_X^2, \quad \|xh\|_{L^2} \lesssim t^\gamma \|u\|_X^2, \quad \|\Lambda xh\|_{H^1} \lesssim \|u\|_X^2, \\ \big\|\Lambda |x|^2 h\big\|_{L^2} \lesssim t^a \|u\|_X^2, \quad \big\|\Lambda^2 |x|^2 h\big\|_{L^2} \lesssim t^b \|u\|_X^2, \quad \big\|e^{it\Lambda} h\big\|_{L^\infty} \lesssim \dfrac{1}{t}\|u\|_X^2 , \end{cases} \tag{5.12}$$

where a and b are (small) positive constants satisfying $0<\gamma<b<\dfrac{a}{3}$ and $a<\dfrac{1}{8}$.

These a priori bounds will imply global existence provided the data is small:

$$\big\|e^{it\Lambda}(g+h)\big\|_X \lesssim \|u\|_X^2 \Rightarrow \|u\|_X \lesssim \big\|e^{it\Lambda} f_0\big\|_X + \big\|e^{it\Lambda}(g+h)\big\|_X \lesssim \varepsilon_0 + \|u\|_X^2 , \tag{5.13}$$

which in turn gives $\|u\|_X \lesssim \varepsilon_0$. Scattering is also a consequence of the bounds (5.11)-(5.12). To obtain Theorem 1.1 it is then enough to show (5.11) and (5.12). Below we briefly explain the main steps needed to obtain these bounds.

Main steps in the proof of (5.11) *and* (5.12)

From (5.6) and (5.12) we see that h has the same energy and pointwise estimates as f, and better weighted estimates than f. Thus, the bilinear terms that need to be bounded are g, $h_0(h,h)$, $h_0(f,g)$ and h_1. All the remaining bilinear terms in (5.5), denoted by h_*, see (5.4), are easier to estimate because their arguments satisfy stronger bounds.

The first step in the proof of the bounds (5.11) and (5.12) consists of estimating Sobolev norms. Such estimates are pretty straightforward, since we are dealing with a semilinear equation.

We then obtain weighted and L^∞ estimates for the spread component g defined by (5.3a). This component is the one who is responsible for the fast growth in time of the weighted norms, see the first inequality in the second line of (5.11). On the other hand, since g consists of a bilinear term with no time integration, its decay in L^∞ can be obtained easily.

Subsequently, we prove a priori bounds on weighted L^2 norms of $h_0(h,h)$. Thanks to the presence of the symbol $\nabla_\eta \varphi$, and to the identity (5.2), we can always integrate by parts at least twice in time and/or frequency. As a consequence we can prove that $h_0(h,h)$ satisfies the stronger weighted bounds (5.12) that hold for the h component.

The next step consists of estimating the L^∞ norm of $h_0(h,h)$, and is one of the most delicate parts of the proof. In order to obtain the t^{-1} decay we perform an angular decomposition of the phase space into two regions. The first region contains the space resonant set $\mathscr{S}$ but is away from the time resonant set $\mathscr{T}$. In this region we can perform a normal form at the expense of introducing only a mild singularity when one of the Fourier variables vanishes. For the quadratic boundary terms arising in the integration by parts in time, the decay is obtained in a straightforward manner, as it is done for the g component. For the cubic terms the decay is obtained as a consequence of L^2-weighted estimates. The second complementary region is away from $\mathscr{S} \cap \mathscr{T}^c$ and contains $\mathscr{R}$. There we can combine the identity (5.2) and the fact that φ can be divided by $\nabla_\eta \varphi$, to conclude, roughly speaking, that $\nabla_\xi \varphi \sim \nabla_\eta \varphi$ in this region. This implies a good control on weighted norms, and decay is obtained by interpolating in an appropriate fashion these norms.

Eventually, the cubic terms $h_0(f,g)$ and h_1 are estimated using again the decomposition $f = g + h$. Also for these terms the pointwise decay is obtained as a consequence of the L^2-weighted bounds.

REFERENCES

[1] S. Alinhac, *Semilinear hyperbolic systems with blowup at infinity*. Indiana Univ. Math. J., **55** (3) (2006),1209-1232.

[2] Y. Choquet-Bruhat - D. Christodoulou, *Existence of global solutions of the classical equations of gauge theories*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **293**, no. 3 (1981), 195-199.

[3] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*. Comm. Pure Appl. Math., **39** (2) (1986), 267-282.

[4] R. Coifman - Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*. Astérisque, **57** (1978).

[5] P. Germain, *Global existence for coupled Klein-Gordon equations with different speeds*. ArXiv:1005.5238v1, 2010.

[6] P. Germain - N. Masmoudi, *Global existence for the Euler-Maxwell system*, ArXiv:1107.1595v1, 2011.

[7] P. Germain - N. Masmoudi - J. Shatah, *Global solutions for 3D quadratic Schrödinger equations*. Int. Math. Res. Not. IMRN, (3) (2009), 414-432.

[8] P. Germain - N. Masmoudi - J. Shatah, *Global solutions for the gravity surface water waves equation in dimension 3*. Ann. of Math., **175**, no. 2 (2012), 691-754.

[9] P. Germain - N. Masmoudi - J. Shatah, *Global solutions for a class of 2d quadratic Schrödinger equations*. J. Math. Pures Appl., **97**, no. 5 (2012), 505-543.

[10] P. Germain - N. Masmoudi - J. Shatah, *Global existence for capillary waves*. To appear in Comm. Pure Appl. Math., 2012.

[11] F. John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*. Manuscripta Math., **28** (1-3) (1979), 235-268.

[12] F. John, *Blow-up for quasilinear wave equations in three space dimensions*. Comm. on Pure Appl. Math., **34** (1) (1981), 29-51.

[13] F. John - S. Klainerman, *Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions*. Comm. Pure Appl. Math., **37** (4) (1984), 443-455.

[14] S. Katayama, *Asymptotic pointwise behavior for systems of semilinear wave equations in three space dimensions*. arXiv:1101.3657, J. Hyperbolic Differ. Equ. **9** (2) (2012), 263-323.

[15] S. Katayama - K. Yokoyama, *Global small amplitude solutions to systems of nonlinear wave equations with multiple speeds*. Osaka J. Math., **43**, no. 2 (2006), 283-326.

[16] J. Kato - F. Pusateri, *A new proof of long range scattering for critical nonlinear Schrödinger equations*. Diff. Int. Equations, **24** (9-10) (2011), 923-940.

[17] M. Keel - H. Smith - C. Sogge, *Almost global existence for some semilinear wave equations*. Dedicated to the memory of Thomas H. Wolff. J. Anal. Math., **87** (2002), 265-279.

[18] M. Keel - H. Smith - C. Sogge, *Almost global existence for quasilinear wave equations in three space dimensions*. J. Amer. Math. Soc., **17** (1) (2004), 109-153.

[19] S. Klainerman, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*. Comm. Pure Appl. Math., **38** (3) (1985), 321-332.

[20] S. Klainerman, *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions*. Comm. Pure Appl. Math., **38** (5) (1985), 631-641.

[21] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*. Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984). Lectures in Appl. Math., **23** (1986), 293-326.

[22] S. Klainerman - T. Sideris, *On almost global existence for nonrelativistic wave equations in 3D*. Comm. Pure Appl. Math., **49** (3) (1996), 307-321.

[23] H. Lindblad, *Global solutions of nonlinear wave equations*. Comm. Pure Appl. Math. **45** (9) (1992), 1063-1096,.

[24] H. Lindblad - I. Rodnianski, *The weak null condition for Einstein's equations*. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, **336** (11) (2003), 901-906.

[25] H. Lindblad - I. Rodnianski, *Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates*. Comm. Math. Phys., **256**(1) (2005), 43-110.

[26] F. Pusateri - J. Shatah, *Space-time resonances and the null condition for (first order) systems of wave equations*. arXiv:1109.5662 (2011), Comm. Pure and Appl. Math., **66** (2) (2013), 1495-1540.

[27] T. Sideris, *The null condition and global existence of nonlinear elastic waves*. Invent. Math. **123**, no. 2 (1996), 323-342.

[28] T. Sideris, *Nonresonance and global existence of prestressed nonlinear elastic waves*. Ann. of Math. (2), **151**, no. 2 (2000), 849-874.

[29] T. Sideris - S. Tu, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds*. SIAM J. Math. Anal. **33**, no. 2 (2001), 477-488.

[30] J. Shatah, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*. Comm. Pure Appl. Math., **38** (5) (1985), 685-696.

[31] J. Shatah - M. Struwe, *Geometric wave equations*, volume 2 of Courant Lecture Notes in Mathematics. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1998.

[32] J. Simon, *A wave operator for a nonlinear Klein-Gordon equation*. Lett. Math. Phys. **7**, no. 5 (1983), 387-398.

Department of Mathematics Princeton University, Fine Hall,
Washington Road Princeton NJ 08544-1000 USA
E-mail: fabiop@math.princeton.edu

Received November 25, 2012 and in revised form August 26, 2013

Simone Scacchi: Precondizionatori paralleli a blocchi per il sistema Bidominio dell'elettrocardiologia

Simone Scacchi
Dipartimento di Matematica, Università di Milano
email: simone.scacchi@unimi.it

Sunto

Il modello matematico più completo dell'elettrofisiologia cardiaca è il modello Bidominio [1], un sistema degenere di due equazioni paraboliche di reazione-diffusione con termine di reazione non lineare, che modellano i potenziali elettrici intra- ad extra-cellulari del tessuto cardiaco (macroscala). Tale formulazione è detta parabolica-parabolica. Una formulazione alternativa del modello Bidominio, detta parabolica-ellittica, consiste nell'accoppiamento di un'equazione parabolica non lineare con una ellittica lineare. In entrambi i casi le equazioni alle derivate parziali sono accoppiate tramite il termine di reazione con un sistema stiff di equazioni differenziali ordinarie, detto modello di membrana, che descrive il flusso di ioni attraverso la membrana cellulare (microscala).

L'approssimazione numerica del sistema Bidominio è molto costosa dal punto di vista computazionale, a causa dell'interazione tra scale spaziali e temporali molto diverse fra loro e della natura degenere delle equazioni alle derivate parziali coinvolte. Nella maggior parte degli studi numerici sul sistema Bidominio sono stati sviluppati metodi agli elementi finiti per la discretizzazione in spazio e metodi semi-impliciti per la discretizzazione in tempo, che richiedono ad ogni passo temporale la soluzione di un sistema lineare di grosse dimensioni e mal condizionato. Sebbene le due formulazioni del modello Bidominio siano equivalenti dal punto di vista analitico, non lo sono da quello numerico.

Per entrambe le formulazioni del modello Bidominio sono stati studiati due tipi di precondizionatori paralleli simmetrici, uno diagonale a blocchi e l'altro risultante dal prodotto di due matrici triangolari a blocchi, basati su metodi di tipo Schwarz multilivello su ciascun blocco. Test numerici tridimensionali su cluster linux hanno mostrato che i precondizionatori a blocchi non sono scalabili per la formulazione parabolica-parabolica, mentre sono sia scalabili che efficienti per quella parabolica-ellittica. Il solver parallelo svilluppato è stato infine applicato alla simulazione dei meccanismi dell'attivazione cardiaca connessi al fenomeno dell'elettrodo virtuale [2].

Bibliografia

[1] M. Pennacchio, G. Savaré and P. Colli Franzone: "Multiscale modeling for the bioelectric activity of the heart". *SIAM J. Math. Anal.*, 37 (4): 1333–1370, 2006.

[2] P. Colli Franzone, L. F. Pavarino and S. Scacchi: "Exploring anodal and cathodal make and break cardiac excitation mechanisms in a 3D anisotropic Bidomain model". *Math. Biosci.*, 230 (2): 96–114, 2011.

Intervento: S. Scacchi,
Scalable Block Preconditioners for the Parabolic-Elliptic Bidomain coupling,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 699–714**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 699-714

Scalable Block Preconditioners for the Parabolic-Elliptic Bidomain coupling

S. Scacchi

Abstract. – *We review some results on parallel multilevel block preconditioners for the Bidomain model of electrocardiology. This model describes the bioelectric activity of the cardiac tissue in terms of the transmembrane electric potential v and the extracellular electric potential u_e and it consists of a system of a parabolic non-linear partial differential equation (PDE) for v and an elliptic linear PDE for u_e. The two PDEs are coupled with a system of ordinary differential equations, modeling the cellular membrane ionic currents. The space and time discretization of the Bidomain system yields at each time step the solution of large and ill-conditioned linear systems. We analyze here the scalability of Multilevel Schwarz Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners for the discrete Bidomain system. New three-dimensional parallel numerical tests on a Linux cluster are performed to compare the Multilevel Schwarz block preconditioners with Block Jacobi (BJ) and Algebraic Multigrid (AMG) preconditioners. The results show that the preconditioners developed are scalable and more efficient than both BJ and AMG preconditioners.*

1. – Introduction

We construct and analyze multilevel block preconditioners for implicit-explicit (IMEX) time discretizations of the Bidomain model of electrocardiology. The Bidomain model describes the cardiac bioelectric activity and consists of a parabolic non-linear reaction-diffusion PDE, coupled with an elliptic linear PDE. The unknowns are the transmembrane electric potential v and the extracellular potential u_e. The two PDEs are coupled through the non-linear reaction term with a stiff system of ordinary differential equations (ODEs), the so-called membrane model, describing the ionic currents through the cellular membrane.

The different space and time scales involved make the solution of this problem very challenging. Several approaches have been developed in order to reduce the high computational costs required by the Bidomain model. Fully implicit methods in time have been considered in a few studies, see e.g. [19, 17, 18, 28] and require the solution of nonlinear systems at each time step. Most previous works have considered IMEX time discretizations and/or operator splitting schemes, where the reaction and diffusion terms are treated separately, see e.g. [5, 6, 9, 15, 25, 32, 37, 38]. The advantage of IMEX

and operator splitting schemes is that they only require the solution of linear systems at each time step. Many different preconditioners have been proposed in order to obtain efficient iterative solvers for such linear systems: block diagonal or triangular [23, 24, 5, 36, 10], optimized Schwarz [11], multigrid [31, 25, 23, 24], multilevel Schwarz [20, 27], Balancing Neumann-Neumann [39] and BDDC [40] preconditioners.

In this work, we review the results obtained in [21] on the scalability of Multilevel Schwarz Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners for the discrete Bidomain system. New three-dimensional parallel numerical tests on a Linux cluster are performed to compare the Multilevel Schwarz block preconditioners with Block Jacobi (BJ) and Algebraic Multigrid (AMG) block preconditioners. The results show that our multilevel preconditioners are scalable and more efficient than both BJ and AMG preconditioners on a whole heart beat simulation.

The rest of the paper is organized as follows: we present the Bidomain model in Section 2 and its time and space discretization in Section 3; in Section 4 and 5, we introduce the Multilevel Schwarz Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners; finally, we report in Section 6 the results of three-dimensional parallel simulations.

2. – The anisotropic Bidomain model

The macroscopic Bidomain representation of the cardiac tissue volume Ω is obtained by considering the superposition of two anisotropic continuous media, the intra- (i) and extra- (e) cellular media, coexisting at every point of the tissue and separated by a distributed continuous cellular membrane; see e.g. [22] for a derivation of the Bidomain model from homogenization of cellular models. We recall that the cardiac tissue consists of an arrangement of fibers that rotate counterclockwise from epi- to endocardium, and that have a laminar organization modeled as a set of muscle sheets running radially from epi- to endocardium. The anisotropy of the intra- and extracellular media, related to the macroscopic arrangement of the cardiac myocytes in the fiber structure, is described by the anisotropic conductivity tensors $D_i(\boldsymbol{x})$ and $D_e(\boldsymbol{x})$, respectively, defined in (2) below.

2.1 – *Continuous model*

We denote by $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ the bounded physical region occupied by the cardiac tissue and we introduce the parabolic-elliptic formulation of the Bidomain system. Given an applied extracellular current per unit volume $I^e_{app} : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, and initial conditions $v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $w_0 : \Omega \to \mathbb{R}^{N_w}$, find the the transmembrane potential $v : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, extracellular potentials $u_e : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, the

gating variables $w : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^{N_w}$ and the ionic concentrations $c : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^{N_c}$ such that

$$
(1) \qquad \begin{cases}
c_m \dfrac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(D_i \nabla v) - \operatorname{div}(D_i \nabla u_e) + I_{ion}(v,w,c) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T) \\
-\operatorname{div}(D_i \nabla v) - \operatorname{div}((D_i + D_e)\nabla u_e) = I^e_{app} & \text{in } \Omega \times (0,T) \\
\dfrac{\partial w}{\partial t} - R(v,w) = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T) \\
\dfrac{\partial c}{\partial t} - S(v,w,c) = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T) \\
\boldsymbol{n}^T D_i \nabla (v + u_e) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,T) \\
\boldsymbol{n}^T (D_i + D_e)\nabla u_e + \boldsymbol{n}^T D_i \nabla v = 0, & \text{in } \partial\Omega \times (0,T) \\
v(\boldsymbol{x},0) = v_0(\boldsymbol{x}), \quad w(\boldsymbol{x},0) = w_0(\boldsymbol{x}), \quad c(\boldsymbol{x},0) = c_0(\boldsymbol{x}) & \text{in } \Omega,
\end{cases}
$$

where c_m is the membrane capacitance per unit volume. The applied extracellular current I^e_{app} must satisfy the compatibility condition $\int_\Omega I^e_{app}\,\mathrm{dx} = 0$, and we impose the reference potential $\int_\Omega u_e\,\mathrm{dx} = 0$. The non-linear reaction term I_{ion} and the ODE system for the gating variables w and the ionic concentrations c are given by the ionic membrane model. Here we will consider the Luo-Rudy I (LR1) membrane model [16]. For the well-posedness analysys of the Bidomain model (1) coupled with complex membrane models as the LR1 model and its recent updates, we refer to [34, 35].

The conductivity tensors $D_i(\boldsymbol{x})$ and $D_e(\boldsymbol{x})$ at any point $\boldsymbol{x} \in \Omega$ are assumed orthotropic, thus defined as

$$
(2) \qquad D_{i,e}(\boldsymbol{x}) = \sigma_l^{i,e}\, \boldsymbol{a}_l(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_l^T(\boldsymbol{x}) + \sigma_t^{i,e}\, \boldsymbol{a}_t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_t^T(\boldsymbol{x}) + \sigma_n^{i,e}\, \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_n^T(\boldsymbol{x}).
$$

Here $\boldsymbol{a}_l(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a}_t(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a_n}(\boldsymbol{x})$, is a triplet of orthonormal principal axes with $\boldsymbol{a}_l(\boldsymbol{x})$ parallel to the local fiber direction, $\boldsymbol{a}_t(\boldsymbol{x})$ and $\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{x})$ tangent and orthogonal to the radial laminae, respectively, and both being transversal to the fiber axis (see e.g. LeGrice et al. [14]). Moreover, $\sigma_l^{i,e}, \sigma_t^{i,e}, \sigma_n^{i,e}$ are the conductivity coefficients in the intra- and extracellular media measured along the corresponding directions $\boldsymbol{a}_l$, $\boldsymbol{a}_t$, $\boldsymbol{a}_n$.

2.2 – *Variational formulation*

Let V be the Sobolev space $H^1(\Omega)$, define the spaces

$$
\widetilde{V} = \left\{ \psi \in V : \int_\Omega \psi = 0 \right\} \qquad \text{and} \qquad U = V \times \widetilde{V} = \{ u = (\varphi, \psi) : \varphi \in V, \psi \in \widetilde{V} \},
$$

define the usual L^2-inner product $(\varphi,\psi)=\int_\Omega \varphi\psi dx\ \forall\varphi,\psi\in L^2(\Omega)$, and the elliptic bilinear forms

$$a_{i,e}(\varphi,\psi)=\int_\Omega (\nabla\varphi)^T D_{i,e}(x)\nabla\psi dx,$$

$$a(\varphi,\psi)=\int_\Omega (\nabla\varphi)^T D(x)\nabla\psi dx \quad \forall\varphi,\psi\in H^1(\Omega),$$

where $D=D_i+D_e$ is the bulk conductivity tensor.

The variational formulation of the Bidomain model reads as follows. Given $v_0, w_0, c_0\in L^2(\Omega)$, $I^e_{app}\in L^2(\Omega\times(0,T))$, find $v\in L^2(0,T;V)$, $u_e\in L^2(0,T;\widetilde{V})$, $w\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^{N_w})$ and $c\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^{N_c})$ such that $\frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(0,T;V)$, $\frac{\partial w}{\partial t}\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^{N_w})$, $\frac{\partial c}{\partial t}\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^{N_c})$ and $\forall t\in(0,T)$

$$\begin{cases} c_m\frac{\partial}{\partial t}(v,\hat{v})+a_i(v,\hat{v})+a_i(u_e,\hat{v})+(I_{ion}(v,w,c),\hat{v})=0 \quad \forall\hat{v}\in V\\ a_i(v,\hat{u}_e)+a(u_e,\hat{u}_e)=(I^e_{app},\hat{u}_e) \quad \forall\hat{u}_e\in\widetilde{V}\\ \frac{\partial}{\partial t}(w,\hat{w})-(R(v,w),\hat{w})=0, \quad \forall\hat{w}\in V,\\ \frac{\partial}{\partial t}(c,\hat{c})-(S(v,w,c),\hat{c})=0, \quad \forall\hat{c}\in V, \end{cases} \tag{3}$$

with the appropriate initial conditions in (1).

3. – Discretization and numerical methods

3.1 – *Space discretization*

System (3) is first discretized in space by the finite element method. Let $\mathcal{T}_h$ be a quasi-uniform triangulation of Ω having maximal diameter h and V_h be an associated conforming finite element space. In this work, we will consider isoparametric trilinear finite elements on hexahedral meshes. Once a finite element basis $\{\varphi_l\}_{l=1}^N$ of V_h is chosen, we denote by $A_{i,e}=\{a^{i,e}_{lj}\}$ the symmetric intra- and extracellular stiffness matrices, and by $M=\{m_{lj}\}$ the mass matrix, with elements

$$a^{i,e}_{lj}=\int_\Omega D_{i,e}\nabla\varphi_j\cdot\nabla\varphi_l\,\mathrm{dx}, \qquad m_{lj}=\int_\Omega \varphi_j\ \varphi_l\,\mathrm{dx}.$$

Applying a standard Galerkin procedure to (3) and using the finite element interpolants of I^e_{app}, I_{ion} associated to the vectors of nodal values $\boldsymbol{I}^e_{app}, \boldsymbol{I}_{ion}$, we obtain the following semi-discrete Bidomain problem, written in compact matrix

form as

$$
(4) \qquad \begin{cases} c_m \, \mathbb{M} \dfrac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{u}_e \end{bmatrix} + \mathbb{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{u}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M\boldsymbol{I}_{ion}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ M\boldsymbol{I}^e_{app} \end{bmatrix}, \\ \dfrac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \\ \dfrac{d\boldsymbol{c}}{dt} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{c}), \end{cases}
$$

with block mass and stiffness matrices

$$
\mathbb{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_i & A_i \\ A_i & A_i + A_e \end{bmatrix}.
$$

Here $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_e, \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{N_w})^T$, $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{N_c})^T$, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (R_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \ldots, R_{N_w}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}))^T$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{c}) = (S_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{c}), \ldots, S_{N_c}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{c}))^T$, are the coefficient vectors of the finite element approximations of u_i, u_e, v, w_r, c_r, $R_r(v, w_1, \ldots, w_{N_w})$, $S_r(v, w_1, \ldots, w_{N_w}, c_1, \ldots, c_{N_c})$, respectively. In our case of isoparametric trilinear finite elements, these are the vectors of nodal values of these functions.

3.2 – *Time discretization*

The time discretization of the Bidomain equations can be performed using either implicit, semi-implicit or explicit schemes, requiring accordingly vector updates or the solution of a non-linear or linear system. Fully implicit methods in time have been considered e.g. in [19, 17, 18, 28]. The advantage of implicit methods is that they do not require stability constraints on the choice of the time step, but they are very expensive, because at each time step one has to solve a non-linear system. A good compromise between stability and efficiency is obtained using linear implicit methods, studied e. g. in [7, 8, 17], which require at each time step the solution of 2-4 linear systems, or semi-implicit methods, studied e.g. in [5, 9, 29, 38]. For a detailed comparative study on the stability and accuracy of several Bidomain time discretizations (implicit, semi-implicit, explicit), we refer to the recent work [9]. However, the most popular technique is based on operator splitting, i.e. on separating the diffusion operator, associated with conduction in the media, from the reaction operator, associated with the ionic current, gating and ionic concentrations dynamics. The advantage of splitting methods is to allow different numerical schemes for the diffusion and the reaction terms in order to maximize computational efficiency and eliminate complex dependency between variables. The disadvantage is a loss of accuracy, because the simultaneous dependency between variables is neglected.

In this work, we consider an implicit-explicit (IMEX) strategy, based on decoupling the ODEs from the PDEs and on treating the linear diffusion terms

implicitly and the non-linear reaction terms explicitly. The implicit treatment of the diffusion term is needed in order to avoid a stability constraint on the time step Δt induced by the fine mesh size h. Nevertheless, due to the explicit treatment of the reaction terms, stability could be preserved for a time step Δt satisfying a condition of CFL type. To our knowledge, a theoretical and numerical investigation of stability properties of IMEX methods for the Bidomain model coupled to the LR1 membrane model is still lacking in literature. Some rigorous results on stability of IMEX methods for the Bidomain system coupled to the Fitzhugh-Nagumo membrane model are presented in [9].

The equations in (4) arising from the discretization of the PDEs are solved as a coupled system. Given $\boldsymbol{w}^n,\ \boldsymbol{c}^n,\ \boldsymbol{v}^n,\ \boldsymbol{u}_e^n$ at the generic time step n:

– we first solve the ODEs system by computing by Implicit Euler the new gating variables $\boldsymbol{w}^{n+1}$ and by Explicit Euler the new ionic concentrations $\boldsymbol{c}^{n+1}$,

– then we solve the PDEs system computing $\boldsymbol{v}^{n+1}$ and $\boldsymbol{u}_e^{n+1}$.

Summarizing in formulae, given $\boldsymbol{w}^n,\ \boldsymbol{c}^n,\ \boldsymbol{v}^n, \boldsymbol{u}_e^n$, the scheme is

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}^{n+1} - \Delta t\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}^n, \boldsymbol{w}^{n+1}) &= \boldsymbol{w}^n \\
\boldsymbol{c}^{n+1} &= \boldsymbol{c}^n + \Delta t\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}^n, \boldsymbol{w}^{n+1}, \boldsymbol{c}^n) \\
(c_t\,\mathbb{M} + \mathbb{A}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^{n+1} \\ \boldsymbol{u}_e^{n+1} \end{bmatrix} &= c_t\,\mathbb{M} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^{n} \\ \boldsymbol{u}_e^{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M\boldsymbol{I}_{ion}(\boldsymbol{v}^n, \boldsymbol{w}^{n+1}, \boldsymbol{c}^{n+1}) \\ M\boldsymbol{I}_{app}^{e,n+1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

where $c_t = \dfrac{c_m}{\Delta t}$. As a consequence, at each time step, we solve one linear system with unknowns $(\boldsymbol{v}^{n+1}, \boldsymbol{u}_e^{n+1})$. Because the iteration matrix is symmetric positive semi-definite, the iterative method employed is the preconditioned conjugate gradient (PCG) method. Due to the ill-conditioning of the iteration matrix and the large number of unknowns required by realistic simulations of cardiac excitation in three-dimensional domains, a scalable and efficient preconditioner is required. We will compare two Block Preconditioners, both based on approximating the diagonal blocks of the linear system matrix

$$\mathcal{A}_{bid} := c_t\mathbb{M} + \mathbb{A} = \begin{bmatrix} c_t\mathrm{M} + \mathrm{A}_i & \mathrm{A}_i \\ \mathrm{A}_i & \mathrm{A} \end{bmatrix}$$

with Block Jacobi or Algebraic Multigrid or Multilevel Hybrid Schwarz preconditioners.

4. – The Multilevel Hybrid Schwarz preconditioner

Let $\mathcal{T}_i$, $i = 0, \ldots, \ell - 1$ be a family of ℓ nested triangulations of Ω, coarsening from $\ell - 1$ to 0, hence $\mathcal{T}_0$ represents the coarsest level of discretization and $\mathcal{T}_{\ell-1}$

the finest one. Let us define the matrix $\mathrm{A} = c_t M + A_i$ or $\mathrm{A} = A_i + A_e$ and the restriction operators $\mathrm{R}^{(i)}$ from level $\mathcal{T}_{i+1}$ to level $\mathcal{T}_i$. With these definitions, set the matrices

$$\mathrm{A}^{(i)} := \mathrm{R}^{(i)} \mathrm{A} \mathrm{R}^{(i)^T},$$

thus $\mathrm{A}^{(\ell-1)} = \mathrm{A}$. We then decompose Ω into N overlapping subdomains, hence each grid $\mathcal{T}_i$ is decomposed into N overlapping subgrids $\Omega_k^{(i)}$ for $k = 1, \ldots, N$, such that the overlap $\delta^{(i)}$ at level $i = 1, \ldots, \ell - 1$ is equal to the mesh size $h^{(i)}$ of the grid $\mathcal{T}_i$. Let $R_k^{(i)}$, for $k = 1, \ldots, N$, be the restriction operators from $\mathcal{T}_i$ to $\Omega_k^{(i)}$, that is $R_k^{(i)}$ returns the vector of all the coefficients associated with domain $\Omega_k^{(i)}$. Define the matrix

$$\mathrm{A}_k^{(i)} := \mathrm{R}_k^{(i)} \mathrm{A}^{(i)} \mathrm{R}_k^{(i)^T},$$

i.e. the subblock matrix of $\mathrm{A}^{(i)}$ associated with domain $\Omega_k^{(i)}$. The action of the ℓ-level hybrid Schwarz preconditioner (MHS(ℓ)) on a given fine level residual $\boldsymbol{r}^{(\ell-1)}$ of the PCG iteration is computed as:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}^{(\ell-1)} \leftarrow \sum_{k=1}^{N} \mathrm{R}_k^{(\ell-1)^T} \mathrm{A}_k^{(\ell-1)^{-1}} \mathrm{R}_k^{(\ell-1)} \boldsymbol{r}^{(\ell-1)} \\
&\boldsymbol{r}^{(\ell-2)} \leftarrow \mathrm{R}^{(\ell-2)} (\boldsymbol{r} - \mathrm{A}^{(\ell-1)} \boldsymbol{u}^{(\ell-1)}) \\
&\boldsymbol{u}^{(\ell-2)} \leftarrow \sum_{k=1}^{N} \mathrm{R}_k^{(\ell-2)^T} \mathrm{A}_k^{(\ell-2)^{-1}} \mathrm{R}_k^{(\ell-2)} \boldsymbol{r}^{(\ell-2)} \\
&\boldsymbol{r}^{(\ell-3)} \leftarrow \mathrm{R}^{(\ell-3)} (\boldsymbol{r}^{(\ell-2)} - \mathrm{A}^{(\ell-2)} \boldsymbol{u}^{(\ell-2)}) \\
&\ldots \\
&\boldsymbol{u}^{(0)} \leftarrow \mathrm{A}^{(0)^{-1}} \boldsymbol{r}^{(0)} \\
&\boldsymbol{u}^{(1)} \leftarrow \boldsymbol{u}^{(1)} + \mathrm{R}^{(0)^T} \boldsymbol{u}^{(0)} \\
&\boldsymbol{u}^{(1)} \leftarrow \boldsymbol{u}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{R}_k^{(1)^T} \mathrm{A}_k^{(1)^{-1}} \mathrm{R}_k^{(1)} (\boldsymbol{r}^{(1)} - \mathrm{A}^{(1)} \boldsymbol{u}^{(1)}) \\
&\ldots \\
&\boldsymbol{u}^{(\ell-1)} \leftarrow \boldsymbol{u}^{(\ell-1)} + \mathrm{R}^{(\ell-2)^T} \boldsymbol{u}^{(\ell-2)} \\
&\boldsymbol{u}^{(\ell-1)} \leftarrow \boldsymbol{u}^{(\ell-1)} + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{R}_k^{(\ell-1)^T} \mathrm{A}_k^{(\ell-1)^{-1}} \mathrm{R}_k^{(\ell-1)} (\boldsymbol{r}^{(\ell-1)} - \mathrm{A}^{(\ell-1)} \boldsymbol{u}^{(\ell-1)}) \\
&\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{u}^{(\ell-1)}
\end{aligned}$$

We remark that MHS(ℓ) is additive on each level among the subdomains and multiplicative among the levels.

5. – The Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners

Serial block preconditioners for the Bidomain system have been studied by Pennacchio and Simoncini [23, 24]. Here we extend their study to the parallel context and additionally we combine block preconditioners with multilevel domain decomposition techniques on each block, obtaining convergence rate estimates that depend on both the block parameter γ defined in (7) below and domain decomposition parameters. Denoting by

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$$

the Bidomain matrix $\mathcal{A}_{bid}$, we will consider the following classical block preconditioners for A (see Axelsson [1]):

– the Block-Diagonal preconditioner

$$B_D = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

– the Block-Factorized preconditioner

$$B_F = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_1^{-1} & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{A}_{12} \\ 0 & \mathrm{B}_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

The main abstract results for these preconditioners are given in the following two propositions, see Axelsson [1] for a proof. For both propositions, we define the constant

$$\gamma^2 = \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus Ker(\mathrm{A}_{22})} \frac{\boldsymbol{v}^T \mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{11}^{-1}\mathrm{A}_{12}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T \mathrm{A}_{22}\boldsymbol{v}} \tag{7}$$

and the function $\phi(x) = \dfrac{1}{2}(1+x) + \sqrt{\dfrac{1}{4}(1-x^2) + x\gamma^2}$.

PROPOSITION 5.1 (Axelsson [1, Th. 9.3]). – *If* $\alpha_1 \mathrm{A}_{11} \le \mathrm{B}_1 \le \alpha_2 \mathrm{A}_{11}$, $\beta_1 \mathrm{A}_{22} \le \mathrm{B}_2 \le \beta_2 \mathrm{A}_{22}$, *with* $\alpha_2 \ge \beta_2$, *then*

$$\kappa_2(B_D^{-1}A) \le \frac{\alpha_2}{\alpha_1(1-\gamma^2)} \phi\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \phi\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right).$$

PROPOSITION 5.2 (Axelsson [1, Th. 9.5]). – *If* $\alpha_1 \mathrm{A}_{11} \le \mathrm{B}_1 \le \alpha_2 \mathrm{A}_{11}$, $\delta_1 \mathrm{A}_{22} \le \mathrm{S}_2 \le \delta_2 \mathrm{A}_{22}$, *where* $\mathrm{S} = \mathrm{B}_2 + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_1^{-1}\mathrm{A}_{12}$, *with* $\alpha_2 \ge 1 \ge \alpha_1 > \gamma^2$, $\delta_2 \ge 1 \ge \delta_1 > \gamma^2$, *then*

$$\lambda_{min}(B_F^{-1}A) \ge \left(1 + \frac{\max\{\alpha_2, \delta_2\} - 1}{1-\gamma^2} \phi(r_2)\right)^{-1},$$

where $r_2 = \min\left\{\frac{\alpha_2 - 1}{\delta_2 - 1}, \frac{\delta_2 - 1}{\alpha_2 - 1}\right\}$, *and* $\alpha_2 > 1$ *and/or* $\delta_2 > 1$,

$$\lambda_{max}(B_F^{-1}A) \leq \left(1 - \frac{1 - \min\{\alpha_1, \delta_1\}}{1 - \gamma^2}\phi(r_1)\right)^{-1},$$

where $r_1 = \min\left\{\frac{1 - \alpha_1}{1 - \delta_1}, \frac{1 - \delta_1}{1 - \alpha_1}\right\}$, *and* $\alpha_1 < 1$ *and/or* $\delta_1 < 1$.

We now define the diagonal blocks $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ of our block preconditioners (5), (6) as Multilevel Hybrid Schwarz (MHS) preconditioners for each scalar component. Therefore we define

$$\begin{aligned} B_1^{-1} &= \text{scalar MHS preconditioner for } c_t\mathrm{M} + \mathrm{A}_i, \\ B_2^{-1} &= \text{scalar MHS preconditioner for } \mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e. \end{aligned} \tag{8}$$

In the numerical section, we will compare these MHS block preconditioners with the analogous Block Jacobi (BJ) block preconditioners, where

$$\begin{aligned} B_1^{-1} &= \text{scalar BJ preconditioner for } c_t\mathrm{M} + \mathrm{A}_i, \\ B_2^{-1} &= \text{scalar BJ preconditioner for } \mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e, \end{aligned} \tag{9}$$

and with the Algebraic Multigrid (AMG) block preconditioners where

$$\begin{aligned} B_1^{-1} &= \text{scalar AMG preconditioner for } c_t\mathrm{M} + \mathrm{A}_i, \\ B_2^{-1} &= \text{scalar AMG preconditioner for } \mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e. \end{aligned} \tag{10}$$

LEMMA 5.1. – *The condition number of the block - diagonal preconditioned operator with MHS scalar blocks* (8) *is bounded by*

$$\kappa_2(B_D^{-1}A) \leq c \max_{1 \leq k \leq L-1}\left(1 + \frac{h^{(k-1)}}{\delta^{(k)}}\right)\frac{1+\gamma}{1-\gamma},$$

where $h^{(k-1)}$ *is the mesh size of the* $(k-1)$*-level grid and* $\delta^{(k)}$ *is the overlap size of the* k*-level grid.*

Lemma 5.1 shows that, in addition to the standard domain decomposition parameters $h^{(k-1)}$ and $\delta^{(k)}$, the convergence of the Block-Diagonal preconditioner B_D depends on the parameter γ, which in turn depends only on the original Bidomain blocks. Pennacchio and Simoncini [23] have shown that

$$\gamma^2 \leq (1 + \lambda_{min}(\mathrm{A}_e, \mathrm{A}_i))^{-1},$$

where $\lambda_{min}(\mathrm{A}_e, \mathrm{A}_i)$ is the minimum eigenvalue of $\mathrm{A}_e\mathrm{A}_i^{-1}$ (see [23, Lemma 4.1]) and numerical experiments seem to indicate that γ is close to $1/2$, so the bound of Lemma 5.1 is satisfactory.

LEMMA 5.2. – *The extreme eigenvalues of the Block-Factorized preconditioned operator with MHS scalar blocks* (8) *are bounded by*

$$\lambda_{min}(B_F^{-1}A) \geq \left(1 + 2\frac{c \max\limits_{1\leq k\leq L-1}\left(1+\frac{h^{(k-1)}}{\delta^{(k)}}\right) + N_c}{1-\gamma^2} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{max}(B_F^{-1}A) \leq \left(1 - \frac{1-(N_c+1)^{-1}}{1-\gamma} \right)^{-1},$$

where N_c is the number of colors of the subdomains partition.

These bounds are pessimistic because, due to Prop. 5.2, they require that $\gamma^2 < \delta_1$ and predict a large condition number when γ^2 approaches δ_1, while our numerical results seem to indicate that the same considerations on γ for the Block-Diagonal case also hold for the Block-Factorized case.

6. – Numerical results

In this section, we present the results of parallel numerical experiments performed on the Linux Cluster HP of the Department of Mathematics of the University of Milan. Our FORTRAN code is based on the parallel library PETSc [2], from the Argonne National Laboratory.

The Bidomain system coupled to the LR1 model is integrated by the coupled and uncoupled Implicit-Explicit methods described in the previous sections. The values of the coefficients and parameters in the LR1 model are given in the original paper [16]. The linear systems at each time step are solved by the preconditioned conjugate gradient (PCG) method, using as stopping criterion a 10^{-6} reduction of the relative residual l^2-norm. The preconditioners used are the Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners with Block Jacobi (BJ), Algebraic Multigrid (AMG) and 4-level Hybrid Schwarz (MHS(4)) approximations of the diagonal blocks of the original Bidomain system matrix. The AMG solver is based on the BoomerAMG algorithm [12], provided in the Hypre library [13].

Domain geometry and fiber structure.

The domain Ω is the image of a cartesian slab using ellipsoidal coordinates, yielding a portion of truncated ellipsoid. The family of truncated ellipsoids is

described by the parametric equations

$$\begin{cases} x = a(r)\cos\theta\cos\phi & \phi_{min} \le \phi \le \phi_{max}, \\ y = b(r)\cos\theta\sin\phi & \theta_{min} \le \theta \le \theta_{max}, \\ z = c(r)\sin\theta & 0 \le r \le 1, \end{cases}$$

where $a(r) = a_1 + r(a_2 - a_1)$, $b(r) = b_1 + r(b_2 - b_1)$, $c(r) = c_1 + r(c_2 - c_1)$, and $a_1 = 1.5$, $a_2 = 2.7$, $b_1 = 1.5$, $b_2 = 2.7$, $c_1 = 4.4$, $c_2 = 5$ are given coefficients (all in cm) determining the main axes of the ellipsoid. The fibers rotate intramurally linearly with the depth for a total amount of 90° proceeding counterclockwise from epicardium to endocardium. More precisely, in a local ellipsoidal reference system $(\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_r)$, the fiber direction $\boldsymbol{a}_l(\boldsymbol{x})$ at a point $\boldsymbol{x}$ is given by

$$\boldsymbol{a}_l(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_\phi \cos\alpha(r) + \boldsymbol{e}_\theta \sin\alpha(r), \quad \text{with} \quad \alpha(r) = \frac{2}{3}\pi(1-r) - \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \le r \le 1.$$

Conductivity coefficients.

The values of the conductivity coefficients in (2) used in all the numerical tests are the following:

$$\begin{aligned} \sigma_l^i &= 3 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}cm^{-1} & \sigma_l^e &= 2 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}cm^{-1} \\ \sigma_t^i &= 3.1525 \cdot 10^{-4}\Omega^{-1}cm^{-1} & \sigma_t^e &= 1.3514 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}cm^{-1} \\ \sigma_n^i &= 3.1525 \cdot 10^{-5}\Omega^{-1}cm^{-1} & \sigma_n^e &= 6.757 \cdot 10^{-4}\Omega^{-1}cm^{-1}. \end{aligned}$$

Mesh hierarchy.

In the case of the MHS preconditioner, the coarse meshes are constructed by progressively halving the number of elements in each coordinate direction.

Stimulation site, initial and boundary conditions.

The depolarization process is started by applying a stimulus of $I_{app}^e = -200\ mA/cm^3$ lasting $1\ ms$ on the face of the domain modeling the endocardial surface. The initial conditions are at resting values for all the potentials and LR1 gating variables, while the boundary conditions are for insulated tissue. In all simulations, the fine mesh size is $h = 0.01\ cm$. The time step size is $\Delta t = 0.05\ ms$.

6.1 – *Test 1: weak scaling on ellipsoidal subdomains*

We compare the performance of MHS(4), BJ and AMG Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners on a weak scaling test with increasing ellipsoidal domains. The local size of each subdomain on the finest mesh is kept fixed at the value 48^3 and each subdomain is assigned to one processor. The number of subdomains (hence number of processors) is increased from 2 to 32 forming increasing domains that are portions of a truncated ellipsoidal domain. With these data, the global size of the discrete Bidomain system increases from 465794 dof with 8 processors to 7226306 dof with 32 processors.

The results reported in Table 1 show that both the AMG and MHS block preconditioners are scalable, with the condition number and PCG iterations which remain bounded when increasing the number of processors. Instead, the BJ block preconditioners are not scalable, because the condition number and iteration counts grow with the number of subdomains. In terms of computational performance, the MHS block preconditioners are clearly the most efficient, with CPU time reductions of about 30% and 50% with respect to the BJ and AMG solvers, respectively.

TABLE 1. – Test 1, weak scaling on ellipsoidal domains for Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners with Block Jacobi (BJ), Algebraic Multigrid (AMG) and 4-level Hybrid Schwarz (MHS(4)) approximations of the diagonal blocks of the original Bidomain system matrix. Average condition numbers (κ_2), PCG iteration counts (it.) and CPU times in seconds per time step for each preconditioner as a function of the number of processors/subdomains (procs).

Weak scaling test, Block-Diagonal										
		BJ			AMG			MHS(4)		
procs	dof	κ_2	it	time	κ_2	it	time	κ_2	it	time
2	465794	4.05e+3	132	12.41	6.76	13	8.13	2.21	7	3.69
4	922082	5.99e+3	165	33.54	15.39	20	22.76	24.14	26	22.74
8	1825346	5.58e+3	211	75.63	13.92	21	51.09	20.73	25	38.25
16	3631874	5.66e+3	205	74.15	13.89	21	54.28	20.21	23	35.15
32	7226306	1.04e+4	268	97.52	12.22	21	58.58	17.17	22	34.82
Weak scaling test, Block-Factorized										
		BJ			AMG			MHS(4)		
procs	dof	κ_2	it	time	κ_2	it	time	κ_2	it	time
2	465794	3.91e+3	127	18.81	4.13	9	6.46	1.83	5	2.83
4	922082	5.16e+3	152	39.44	13.83	18	21.75	24.01	23	19.51
8	1825346	4.79e+3	193	101.42	11.21	19	48.62	19.07	23	39.42
16	3631874	4.81e+3	185	98.08	11.23	19	51.83	16.02	20	35.04
32	7226306	8.79e+3	244	129.41	9.90	18	54.73	13.64	19	33.92

6.2 – *Test 2: comparison of the BJ, AMG and MHS(4) block preconditioners on a complete cardiac cycle simulation*

We now compare the block preconditioners on a complete heartbeat (400 *ms*) in a portion of ellipsoid, modeling half of the left ventricle, discretized by a Q_1 structured finite element grid of $128 \times 64 \times 64$ elements (1090050 *dof*). The simulations are run on 16 processors. The time step size is changed according to the adaptive strategy described in [5].

TABLE 2. – Test 2, comparison on a whole heart beat simulation of Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners with Block Jacobi (BJ), Algebraic Multigrid (AMG) and 4-level Hybrid Schwarz (MHS(4)) approximations of the diagonal blocks of the original Bidomain system matrix. Average condition numbers (κ_2), PCG iteration counts (it.) and CPU times in seconds per time step and total CPU times in hours and minutes.

Whole heart beat test								
	Block-Diagonal				Block-Factorized			
	κ_2	it	time	Ttime	κ_2	it	time	Ttime
BJ	2.61e+3	161	16.51 s	5 h 36 m	1.99e+3	138	20.91 s	7 h 6 m
AMG	38.08	26	16.94 s	5 h 45 m	26.59	22	15.64 s	5 h 18 m
MHS(4)	50.43	31	13.00 s	4 h 19 m	42.68	27	13.25 s	4 h 25 m

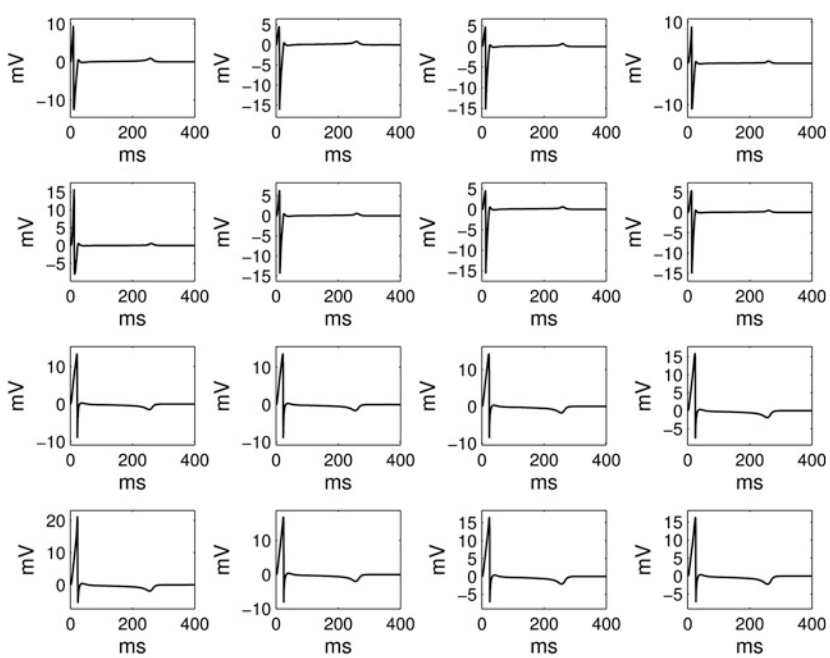


Fig. 1 – Test 2, time (ms) evolutions of the extracellular potential u_e (mV) in 16 epicardial sites.

The results in Table 2 confirm that the MHS block preconditioners are the most efficient, with CPU time reductions of about 20% with respect to the BJ and AMG solvers. Moreover, the BJ and AMG Block-Diagonal preconditioners are comparable, while the BJ Block-Factorized preconditioner is clearly slower than the AMG Block-Factorized preconditioner. Fig. 1 reports the time evolution of the extracellular potential u_e (the electrocardiograms) in 16 epicardial sites.

7. – Conclusion

We have studied the scalability and efficiency of Multilevel Hybrid Schwarz (MHS) Block-Diagonal and Block-Factorized preconditioners for the Bidomain model of the cardiac bioelectric activity. The three-dimensional parallel numerical tests performed on a Linux cluster have shown that the MHS block preconditioners are scalable and about 20-50% (depending on the simulation) more efficient than Block Jacobi and Algebraic Multigrid block preconditioners.

Acknowledgments. The author thanks Piero Colli Franzone and Luca Pavarino for introducing him to the field of Mathematical Cardiac Electrophysiology and for many helpful discussions and suggestions.

REFERENCES

[1] O. Axelsson, *Iterative Solution Methods*, Cambridge University Press, 1994.
[2] S. Balay - K. Buschelman - W. D. Gropp - D. Kaushik - M. Knepley - L. Curfman McInnes - B. F. Smith - H. Zhang, *PETSc Users Manual.Tech. Rep. ANL-95/11 - Revision 2.1.5*, Argonne National Laboratory, 2002.
[3] M. Boulakia - S. Cazeau - M. A. Fernandez - J.-F. Gerbeau - N. Zemzemi, *Mathematical modeling of electrocardiograms: a numerical study*. Ann. Biomed. Eng., **38** (3) (2010), 1071-1097.
[4] R. H. Clayton - O. Bernus - E. M. Cherry - H. Dierckx - F. H. Fenton - L. Mirabella - A. V. Panfilov - F. B. Sachse - G. Seemann - H. Zhang, *Models of cardiac tissue electrophysiology: Progress, challenges and open questions*. Progr. Biophys. Molec. Biol., **104** (2011), 22-48.
[5] P. Colli Franzone - L. F. Pavarino, *A parallel solver for reaction-diffusion systems in computational electrocardiology*. Math. Mod. Meth. Appl. Sci., **14** (6) (2004), 883-911.
[6] P. Colli Franzone - L. F. Pavarino - B. Taccardi, *Simulating patterns of excitation, repolarization and action potential duration with cardiac bidomain and monodomain models*. Math. Biosci., **197** (1) (2005), 33-66.
[7] P. Colli Franzone - P. Deuflhard - B. Erdmann - J. Lang - L. F. Pavarino, *Adaptivity in space and time for reaction-diffusion systems in Electrocardiology*. SIAM J. Sci. Comput., **28** (3) (2006), 942-962.

[8] P. Deuflhard - B. Erdmann - R. Roitzsch - G. T. Lines, *Adaptive finite element simulation of ventricular fibrillation dynamics*. Comput. Visual. Sci., **12** (5) (2009), 201-205.

[9] M. Ethier - Y. Bourgault, *Semi-implicit time-discretization schemes for the Bidomain model*. SIAM J. Numer. Anal., **46** (5) (2008), 2443-2468.

[10] L. Gerardo Giorda - L. Mirabella - F. Nobile - M. Perego - A. Veneziani, *A model-based block-triangular preconditioner for the Bidomain system in electrocardiology*. J. Comp. Phys., **228** (10) (2009), 3625-3639.

[11] L. Gerardo Giorda - M. Perego - A. Veneziani, *Optimized Schwarz coupling of Bidomain and Monodomain models in electrocardiology*, Math. Model. Numer. Anal., **45** (2011), 309-334.

[12] V. Henson - U. Yang, *BoomerAMG: a parallel algebraic multigrid solver and preconditioner*. Appl. Numerical Math., **41** (2002), 155-177.

[13] *HypreHigh Performance Preconditioners Users Manual Center for Applied Scientific Computing*, Lawrence Livermore National Laboratory, Tech. Rep. Software Version: 1.6.0, Jul. 27, 2001.

[14] I. J. LeGrice - B. H. Smaill - L. Z. Chai - S. G. Edgar - J. B. Gavin - P. J. Hunter, *Laminar structure of the heart: ventricular myocyte arrangement and connective tissue architecture in the dog*. Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol., **269** (38) (1995), H571-H582.

[15] S. Linge - J. Sundnes - M. Hanslien - G. T. Lines - A. Tveito, *Numerical solution of the bidomain equations*. Phil. Trans. R. Soc. A, **367** (1895) (2009), 1931-1950.

[16] C. Luo - Y. Rudy, *A model of the ventricular cardiac action potential: depolarization, repolarization, and their interaction*. Circ. Res., **68** (6) (1991), 1501-1526.

[17] M. Munteanu - L. F. Pavarino, *Decoupled Schwarz algorithms for implicit discretization of nonlinear Monodomain and Bidomain systems*. Math. Mod. Meth. Appl. Sci., **19** (7) (2009), 1065-1097.

[18] M. Munteanu - L. F. Pavarino - S. Scacchi, *A scalable Newton-Krylov-Schwarz method for the Bidomain reaction-diffusion system*. SIAM J. Sci. Comput., **31** (5) (2009), 3861-3883.

[19] M. Murillo - X.-C. Cai, *A fully implicit parallel algorithm for simulating the nonlinear electrical activity of the heart*. Numer. Linear Algebra Appl., **11** (2-3) (2004), 261-277.

[20] L. F. Pavarino - S. Scacchi, *Multilevel additive Schwarz preconditioners for the Bidomain reaction-diffusion system*. SIAM J. Sci. Comput., **31** (1) (2008), 420-443.

[21] L. F. Pavarino - S. Scacchi, *Parallel Multilevel Schwarz and Block Preconditioners for the Bidomain Parabolic-Parabolic and Parabolic-Elliptic Formulations*, SIAM J. Sci. Comput., **33** (4) (2011),1897-1919.

[22] M. Pennacchio - G. Savaré - P. Colli Franzone, *Multiscale modeling for the bioelectric activity of the heart*. SIAM J. Math. Anal., **37** (4) (2006), 1333-1370.

[23] M. Pennacchio - V. Simoncini, *Algebraic multigrid preconditioners for the bidomain reaction-diffusion system*, Appl. Numer. Math., **59** (2009), 3033-3050.

[24] M. Pennacchio - V. Simoncini, *Fast structured AMG preconditioning for the bidomain model in electrocardiology*. SIAM J. Sci. Comput., **33** (2) (2011), 721-745.

[25] G. Plank - M. Liebmann - R. Weber dos Santos - E. J. Vigmond - G. Haase, *Algebraic Multigrid Preconditioner for the Cardiac Bidomain Model*. IEEE Trans. Biomed. Engrg., **54** (4) (2007), 585-596.

[26] M. Potse - B. Dubè - J. Richer - A. Vinet - R. Gulrajani, *A comparison of Monodomain and Bidomain reaction-diffusion models for action potential propagation in the human heart*. IEEE Trans. Biomed. Eng., **53** (12) (2006), 2425-2434.

[27] S. Scacchi, *A hybrid multilevel Schwarz method for the bidomain model*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., **197** (45-48) (2008), 4051-4061.
[28] S. Scacchi, *A multilevel hybrid Newton-Krylov-Schwarz method for the Bidomain model of electrocardiology*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., **200** (5-8) (2011), 717-725.
[29] K. B. Skouibine - N. Trayanova - P. Moore, *A numerically efficient model for the simulation of defibrillation in an active bidomain sheet of myocardium*. Math. Biosci., **166** (1) (2000), 85-100.
[30] B. F. Smith - P. Bjørstad - W. D. Gropp, *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 1996.
[31] J. Sundnes - G. T. Lines - K. A. Mardal - A. Tveito, *Multigrid block preconditioning for a coupled system of partial differential equations modeling the electrical activity in the heart*. Comput. Meth. Biomech. Biomed. Engrg., **5** (6) (2002), 397-409.
[32] J. Sundnes - G. T. Lines - A. Tveito, *An operator splitting method for solving the bidomain equations coupled to a volume conductor model for the torso*. Math. Biosci., **194** (2) (2005), 233-248.
[33] A. Toselli - O. B. Widlund, *Domain Decomposition Methods: Algorithms and Theory*. Computational Mathematics, Vol. 34. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
[34] M. Veneroni, *Reaction-diffusion systems for the microscopic cellular model of the cardiac electric field*. Math. Meth. Appl. Sci., **29** (2006), 1631-1661.
[35] M. Veneroni, *Reaction-Diffusion systems for the macroscopic Bidomain model of the cardiac electric field*. Nonlin. Anal.-Real World Appl., **10** (2) (2009), 849-868.
[36] E. J. Vigmond - F. Aguel - N. A. Trayanova, *Computational techniques for solving the bidomain equations in three dimensions*. IEEE Trans. Biomed. Engrg., **49** (2002), 1260-1269.
[37] E. J. Vigmond - R. Weber dos Santos - A. J. Prassl - M. Deo - G. Plank, *Solvers for the cardiac bidomain equations*. Progr. Biophys. Molec. Biol., **96** (2008), 3-18.
[38] J. P. Whiteley, *An efficient numerical technique for the solution of the monodomain and bidomain equations*. IEEE Trans. Biomed. Engrg., **53** (11) (2006), 2139-2147.
[39] S. Zampini, *Balancing Neumann-Neumann methods for the cardiac Bidomain model*. Numer. Math., **123** (2) (2013), 363-393.
[40] S. Zampini, *Dual-primal methods for the cardiac bidomain model*. Math. Mod. Meth. Appl. Sci., in press.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano
Via Saldini 50, 20133 Milano, Italy
E-mail: simone.scacchi@unimi.it

Received November 30, 2012 and in revised form November 2, 2013

Antonio Segatti: Funzionali WED per gradient flow in spazi metrici

Riccarda Rossi
Dipartimento di Matematica, Università di Brescia

Giuseppe Savaré
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia

Antonio Segatti
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia
email: antonio.segatti@unipv.it

Ulisse Stefanelli
IMATI-CNR-Pavia

Sunto

In questa comunicazione presenterò alcuni risultati riguardo l'approssimazione WED (*Weighted energy dissipation*) di equazioni di tipo flusso gradiente in spazi metrici. L'approssimazione WED fornisce le soluzioni di un problema evolutivo come limiti di minimizzatori di un opportuno funzionale (il funzionale WED) definito sulle traiettorie. L'approccio WED è stato originariamente utilizzato da Mielke & Ortiz per lo studio di problemi *rate independent* e, più recentemente, da Mielke & Stefanelli per lo studio di equazioni di tipo flusso gradiente in spazi di Hilbert.

Il risultato principale riguarda la convergenza dei minimizzarori del funzionale WED, in opportune ipotesi di convessità, alla soluzione nel senso delle *curve di massima pendenza* di De Giorgi del gradient flow metrico.

Intervento: Antonio Segatti,
A Variational Approach to Gradient Flows in Metric Spaces,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 765–780**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 765-780

A Variational Approach to Gradient Flows in Metric Spaces

ANTONIO SEGATTI

Abstract. – *In this note we report on a new variational principle for Gradient Flows in metric spaces. This new variational formulation consists in a functional defined on entire trajectories whose minimizers converge, in the case in which the energy is geodesically convex, to curves of maximal slope. The key point in the proof is a reformulation of the problem in terms of a dynamic programming principle combined with suitable a priori estimates on the minimizers. The abstract result is applicable to a large class of evolution PDEs, including Fokker Plack equation, drift diffusion and Heat flows in metric-measure spaces.*

1. – Introduction

In this note I will present some results regarding a new variational formulation of gradient flow equations in general metric spaces. This results have been obtained in collaboration with R. Rossi, G. Savaré and U. Stefanelli and are contained in the Comptes Rendus [21] and in the forthcoming [22]. The exposition of this paper will try to keep the informal and not-so-much technical character of the seminar held at the UMI conference in Bologna in September 2011. In particular, I will not include the full proofs of the results but rather refer to the above mentioned papers.

In order to better clarify the setting of the problem and the purpose of this note, I will first introduce and comment some known results on gradient flows in Hilbert space.

Let H be a separable Hilbert space with scalar product $(\cdot,\cdot)$ and norm $\|\cdot\|$ and consider $\phi : H \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ a proper, convex and lower semicontinuous function. Assume we are given $\bar{u} \in D(\phi) = \{v \in H : \phi(v) < +\infty\}$, a reference time T and consider then the following gradient flow evolution

$$\begin{cases} u' + \partial\phi(u) \ni 0, & \text{a.e. in } (0,T), \\ u(0) = \bar{u}, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\partial\phi(u)$ is the convex analysis subdifferential of ϕ. Gradient flow equations arise almost ubiquitously in dissipative evolutions. More precisely, depending on the choice of the functional framework (even restricting to the classical Hilbert space formulation (1.1)) and on the choice of the functional ϕ, they come into play

in a variety of applications such as heat conduction, Hele Shaw cell problem, Stefan problem, porous media, obstacle problem and variational inequalities and the mean curvature flow for Cartesian graphs, among many others.

The mathematical analysis of evolutions of the type (1.1) dates back to the late sixties with the seminal works of Kömura [13], Crandall & Pazy [7] and Brezis [4]. Starting from then a huge literature concerning wellposedness, approximation and long time behavior of solutions originated (see, e.g., [19] and the references therein).

There are at least two main strategies to prove existence of a solution to (1.1). In the first approach one looks for a smooth approximation of problem (1.1). More precisely, one replaces the potential ϕ with its Moreau Yosida approximation obtaining a Gateaux differentiable potential ϕ_λ ($\lambda > 0$ being the approximation parameter intended to go to zero in the limit) and consider the (smooth) gradient flow equation driven by ϕ_λ. Once the approximate problem is solved, the task is to pass to the limit as $\lambda \searrow 0$ and consequently remove the approximation. This major step is usually based on monotonicity and convexity arguments (see [4]).

The other possible method consists in performing a time discretization of the time interval and consequently replacing the time derivative with the corresponding incremental quotients. The approximate problem is now a stationary problem which is solved relying on the maximal monotonicity of $\partial\phi$. The limit procedure is again based on monotonicity and convexity arguments. The interest for this method is twofold, since it provides a first important step towards the numerical approximation of (1.1) (see [19]) and since it is extremely flexible as the method of *Minimizing movements* for gradient flow equations in metric spaces shows (see [1]).

In this note we aim at presenting a possible third way. Again, to introduce the problem, I will start from the Hilbert space case. Thus, fixing a reference time $T > 0$ and a strictly positive ε, consider the functional $I_\varepsilon\colon H^1(0,T;H) \to (-\infty,\infty]$ defined as

$$I_\varepsilon[v] := \int_0^T \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2}\|v'(t)\|^2 + \phi(v(t))\right)\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Note that the functional I_ε is defined on (semi) trajectories. Moreover, it is given by a weighted sum $\left(\text{through the exponential weight } \dfrac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon}\right)$ between a *dissipation term* $\left(\text{i.e. } \dfrac{\varepsilon}{2}\|v'\|^2\right)$ and an *energy term* (i.e. $\phi(v)$) and the result is then integrated with respect to time. For this reason the functional I_ε is named with acronym WED functional which stands for *Weighted energy dissipation* functional. Now, if we fix some $\bar{u}$ in the domain of ϕ and suppose for a while that one

is able to find a curve $u_\varepsilon\colon [0,T] \to H$ such that

$$u_\varepsilon \in \operatorname{Argmin}\{I_\varepsilon[v],\ v \in H^1(0,T;H),\ v(0) = \bar{u}\},$$

we may ask what is the behavior of u_ε as $\varepsilon \searrow$ and if we are able to characterize the dynamics of its limit in terms of $\bar{u}$ and of ϕ. To get a clue of the possible behavior, one computes the corresponding Euler Equations (see [17] and subsection 3.1) and finds that u_ε is a solution of the following elliptic (in time) evolution problem

$$\begin{cases} -\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' + \partial\phi(u_\varepsilon) \ni 0, & \text{a.e. in } (0,T), \\ u_\varepsilon(0) = \bar{u}, \\ u_\varepsilon'(T) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Consequently, one expects that, at least formally, when $\varepsilon \searrow 0$ the sequence of minimizers u_ε approaches the solution of the gradient flow (1.1). The limit as $\varepsilon \searrow 0$ in (1.3) is named *causal limit* since it restores the causality of gradient flow evolution. More precisely, the following holds

THEOREM 1.1 (Variational principle in Hilbert spaces). – *As* $\varepsilon \searrow 0$, $u_\varepsilon \in \operatorname{Argmin}_{v \in H^1(0,T;H), v(0)=\bar{u}} I_\varepsilon[v]$ *converges in* $C^0([0,T];H)$ *to the solution of* (1.1).

The proof of this convergence, even for λ convex functionals, has been proved by Mielke & Stefanelli in [17]. It should be pointed out that the interest in constructing solutions of the gradient flow (1.1) as limits of minimizers of I_ε is not only limited to the question of proving existence of solutions to (1.1) but rather is related to the possibility of using tools from Calculus of Variations (such as Γ convergence and relaxation) to study (1.1). More precisely, in situations in which the energy ϕ is not lower semicontinuous (such as in models of micro structures) one may consider the functional I_ε and then consider its relaxation hoping that it could serve as an effective macroscopic description. This is one of the motivations that led Mielke & Ortiz to introduce the WED functional (1.2) in the context of rate independent evolutions ([16]). In the same paper it is also shown, via a counterexample, that for gradient evolutions of the type (1.1) the question that the limits of minimizers of the relaxed WED functional are solutions of the gradient flow for the relaxation of ϕ has to be worked out in every situation. We refer to [6] and [24] for two examples of relaxation in the contest, respectively of micro structure evolution and the evolution of the surface area for Cartesian graphs.

It is worthwhile noting that the possibility of addressing an evolution problem via functionals defined on trajectories is not new as the De Giorgi conjecture on Semi linear Wave equations ([9], and [26], [23] for its solution), the Brezis-Ekeland and the Nayroles principles (see [5], [18], [25]) and the works of Ghoussoub [11] and Visintin [27] show. Moreover, it should be recalled that also

the possibility of approximating dissipative evolutions with elliptic in time approximations is well known. For this subject we refer to the pioneering work of Lions [14], to the monograph of Lions and Magenes [15] and to Ilmanen [10] for the nonlinear case.

As already pointed out, in this note I will present the WED approach to gradient flows in metric spaces. To this end, I will first briefly recall in the next Section 2 the basic concepts and notations of gradient flows in metric spaces. Subsequently (see Section 3), I will sketch the proof of the convergence of the WED minimizers in the case of an Hilbert space and, moving from this I will explain the convergence in the metric context. As it will be clear later on, the Hilbert space proof will be mainly based on PDEs methods while the metric one will be more variational in nature.

2. – Gradient flows in metric spaces and formulation of the problem

Suppose we are given a Riemannian manifold (M, g), a smooth function $\phi: M \to \mathbb{R}$ and a point $\bar{u} \in M$. We call gradient flow of ϕ on (M, g) the equation

$$\begin{cases} u' + \nabla\phi(u) = 0 \text{ in } [0,T] \times M \\ u(0) = \bar{u} \end{cases} \tag{2.1}$$

Note that the metric tensor g is an essential ingredient because it allows for the identification of the differential of ϕ (a cotangent vector) with the gradient of ϕ (a tangent vector). In particular, thanks also to the smoothness of ϕ we have the Chain rule

$$\frac{d}{dt}\phi(v(t)) = g(v'(t), \nabla\phi(v(t))). \tag{2.2}$$

On the other hand, since being a solution to (2.1) is completely equivalent to

$$\frac{1}{2}g(u' + \nabla\phi(u), u' + \nabla\phi(u)) = 0 \text{ in } [0,T], \tag{2.3}$$

by expanding we obtain the equivalent formulation

$$\frac{1}{2}\|u'(t)\|_g^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\phi(u(t))\|_g^2 + \frac{d}{dt}\phi(u(t)) = 0, \text{ in } [0,T]. \tag{2.4}$$

Note that we have equivalently reformulated the vectorial problem (2.1) in terms of the single scalar equation (2.4). Moreover, while (2.1) could make no sense in non smooth situations, its scalar counterpart (2.4) makes sense even for evolutions $u: [0,T] \to X$, with (X, d) a general metric space, at the price of replacing $\|u'(t)\|_g^2$ and $\|\nabla\phi(u(t))\|_g^2$ with proper metric objects. The correct notions will be that of *metric derivative* and that of *local slope*. Consequently, following De

Giorgi and coworkers [8] and [1], (2.4) will be the notion of gradient flow evolution we use.

Now, we introduce these basic concepts. Given a metric space (X, d), we say that a curve $u : [0, T] \to X$ belongs to $\mathrm{AC}^2([0, T]; X)$, if there exists $m \in L^2(0, T)$ such that

$$d(u(s), u(t)) \leq \int_s^t m(r)\,\mathrm{d}r \quad \text{for all } 0 < s \leq t < T \tag{2.5}$$

It was proved in [1, Sec. 1.1] that for all $u \in \mathrm{AC}^2([0, T]; X)$, the limit

$$|u'|(t) = \lim_{s \to t} \frac{d(u(s), u(t))}{|t - s|}$$

exists for a.a. $t \in (0, T)$. We will refer to it as the *metric derivative* of u at t. We have that the map $t \mapsto |u'|(t)$ belongs to $L^2(0, T)$ and it is minimal within the class of functions $m \in L^2(0, T)$ fulfilling (2.5). The metric derivative is then the *metric surrogate* of the norm of time derivative.

Then, let

$$\phi : X \to (-\infty, +\infty] \quad \text{be proper and lower semicontinuous}$$

and let $D(\phi) := \{u \in X : \phi(u) < +\infty\}$ denote the effective domain of ϕ. As in the Hilbertian framework, a remarkable case is when the functional ϕ enjoys some convexity properties. In a purely metric context, the notion of λ-convexity we will use is the *λ-convexity along geodesic*. Thus, we say that the functional ϕ is λ-geodesically convex for some $\lambda \in \mathbb{R}$, if

$$\begin{gathered}\text{for all } v_0,\ v_1 \in D(\phi) \text{ there exists a constant-speed geodesic } \gamma : [0, 1] \to X \\ \text{(i.e. satisfying } d(\gamma_s, \gamma_t) = (t - s)d(\gamma_0, \gamma_1) \text{ for all } 0 \leq s \leq t \leq 1), \text{ such that} \\ \gamma_0 = v_0,\ \gamma_1 = v_1, \text{ and } \phi \text{ is } \lambda\text{-convex on } \gamma, \text{ i.e.} \\ \phi(\gamma_t) \leq (1 - t)\phi(\gamma_0) + t\phi(\gamma_1) - \frac{\lambda}{2} t(1 - t)d^2(\gamma_0, \gamma_1) \text{ for all } 0 \leq t \leq 1.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Then, we define the *local slope* (see [8, 1]) of ϕ at $u \in D(\phi)$ as

$$|\partial\phi|(u) := \limsup_{v \to u} \frac{(\phi(u) - \phi(v))^+}{d(u, v)}. \tag{2.7}$$

The local slope will be the *metric surrogate* of the norm of gradient. Assuming that the energy is geodesically convex, we get that the local slope is indeed a strong upper gradient (see [1]) and thus it satisfies a sort of Chain rule property, namely following [1, Def. 1.2.1], we have that for for every curve $u \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty); X)$, the function $|\partial\phi|(u)$ is Borel and

$$|\phi(u(t)) - \phi(u(s))| \leq \int_s^t |\partial\phi|(u(r))|u'|(r)\,\mathrm{d}r \quad \text{for all } 0 < s \leq t. \tag{2.8}$$

Consequently, if $|\partial\phi|(u(\,\cdot\,))|u'|(\,\cdot\,) \in L^1$ then, $\phi \circ u$ is absolutely continuous and there holds

$$|(\phi \circ u)'(t)| \leq |\partial\phi|(u(t))|u'|(t) \quad \text{for a.a. } t \in (0, +\infty). \tag{2.9}$$

Then, we say that $u \in \mathrm{AC}^2_{\mathrm{loc}}([0, +\infty); X)$ is a *curve of maximal slope* for ϕ with respect to the local slope if

$$\frac{1}{2}|u'|^2(t) + \frac{1}{2}|\partial\phi|^2(u(t)) = -\frac{d}{dt}\phi(u(t)) \qquad \text{for a.a. } t \in (0, +\infty). \tag{2.10}$$

or, equivalently, using the Chain Rule (2.9), if

$$\frac{1}{2}|u'|^2(t) + \frac{1}{2}|\partial\phi|^2(u(t)) \leq -\frac{d}{dt}\phi(u(t)) \qquad \text{for a.a. } t \in (0, +\infty). \tag{2.11}$$

At least when ϕ is λ geodesically convex the notion of *curve of maximal slope* with respect to the local slope is the correct metric notion of gradient flow evolution (see [1]). The question of existence, uniqueness and approximation of curves of maximal slope is fully treated in the book [1] together with the application of the theory of gradient flows in metric spaces to the case of the (metric) space of probability measures with the Wasserstein distance. In fact starting with the pioneering work of Otto [20] and of Jordan, Kinderlehrer & Otto [12], the (metric) space $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ of probability measures with finite second moment, endowed with the Wasserstein 2-metric, became the natural framework to highlight the gradient flow structure of a large class of evolutionary PDEs problems with nonnegative solutions $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, in the general form

$$\partial_t u - \nabla \cdot \left(u \, \frac{\delta\phi(u)}{\delta u} \right) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+. \tag{2.12}$$

In the equation above $\dfrac{\delta\phi(u)}{\delta u}$ is the suitably defined first variation of an integral functional, resulting from the linear combination of the terms

$$\mathcal{U}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} U(u(x))\,\mathrm{d}x, \quad \mathcal{V}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} V(x)u(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathcal{W}(u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} W(x-y)u(x)u(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

The functionals $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, and $\mathcal{W}$ are generally referred to as the *internal*, the *potential*, and the *interaction* energies, respectively. Different choices of the above functionals lead to different interesting evolutions, including Fokker-Planck and the nonlinear diffusion equations (see [1]). Transport and nonlinear drift-diffusion equations (with or without nonlocal interactions) can be considered as well. As anticipated, the PDE (2.12) is by now classically reformulated as a gradient flow equation in the metric space $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ of probability measures with finite second moment, endowed with the Wasserstein 2-metric. Parallel to this, another possible application of our abstract results concerns with the heat flow in a

Polish metric-measure space (M, d, m) satisfying the Lott-Sturm-Villani condition (see [2]): in this case $X = \mathcal{P}_2(M)$, $\phi(\mu) = Ent_m(\mu)$ is the relative entropy functional and the family of minimizers u_ε converge to the unique solution $\mu = \rho m$, $\partial_t \rho - \Delta_{m,d}\rho = 0$ (see [2] for the definition of the operator $\Delta_{m,d}$).

At this point, we are in the position to introduce the WED functional in metric spaces and state the Variational principle corresponding to Theorem 1.1. Thus, we will suppose that the energy functional

$$\begin{aligned}&\phi : X \to (-\infty, +\infty] \text{ is proper, lower semicontinuous, geodesically convex and}\\ &\text{such that } \forall v \in X\ \phi(v) \geq 0 \text{ and } \forall\, r > 0 \text{ the set } S_r = \{u \in X : \phi(u) \leq r\} \text{ is compact.}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Then the (metric) WED functional $I_\varepsilon : \mathrm{AC}^2(0, +\infty; X) \to (-\infty, +\infty]$ is given by

$$I_\varepsilon[v] := \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon} \Big(\frac{\varepsilon}{2} |v'|^2(t) + \phi(v(t)) \Big)\, \mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

Note that the metric version (2.14) is formally equivalent to the Hilbert one (1.2) (up to the obvious change of the norm of the time derivative with the metric derivative) except for the fact that (2.14) is written on the whole $(0, +\infty)$.

Under the above assumptions (2.13) on ϕ one can prove (see [22] and Theorem 3.2 in this note) that fixing $\bar{u} \in D(\phi)$ there exists $u_\varepsilon \in \mathrm{Argmin}\{I^\varepsilon[v],\ v \in AC^2(0, \infty, X),\ v(0) = \bar{u}\}$. Then we have may ask the following question:

Does u_ε converges in some suitable sense to some curve u, with u being a curve of maximal slope (for the functional ϕ, with respect to the upper gradient $|\partial\phi|$ and originating from $\bar{u}$)?

I will answer to the above question in the next Section 3 in the simplified case of a functional ϕ satisfying the assumptions (2.13). For the treatment of more general situations (for example λ geodesically convex potentials) and for the complete proofs, I refer to [22].

3. – Sketch of the proof

3.1 – *The Hilbert space setting*

The proof of Theorem 1.1 in the Hilbert space framework can be roughly divided into four main steps: *existence of minimizers, deduction of the Euler-Lagrange equation* (1.3)*, uniform a priori estimates, passage to the limit.* Due to the possibly lack of smoothness of the potential ϕ some care must be reserved to the

rigorous deduction of the Euler Lagrange equation (1.3) and of the a priori estimates. To this end, a careful combination of the Yosida approximation and of a time discretization scheme is needed (see [17]). The proof given in [17] permits to treat quite general conditions on ϕ and on the initial condition $\bar{u}$. In particular, one can consider λ convex functionals and more general initial data (even sequences) $\bar{u}^\varepsilon$ than the mere $\bar{u} \in D(\phi)$. Here, to keep the presentation as simple as possible we will simply assume that the potential ϕ is convex, lower semicontinuous and bounded from below and that $\bar{u} \in D(\phi)$. As a consequence, the existence of a unique minimizer $u_\varepsilon \in \mathrm{Argmin}\{I_\varepsilon[v],\ v \in H^1(0,T;H),\ v(0) = \bar{u}\}$, with $\bar{u} \in D(\phi)$ and $\varepsilon > 0$ fixed, follows in a standard way from the Direct Method of Calculus of Variations since the WED functional I_ε is itself (strictly) convex and lower semicontinuous in $H^1(0,T;H)$. Once we have a minimizer u_ε, by smoothing the potential ϕ with its Moreau-Yosida approximation and then passing to the limit, in [17] it is shown that u_ε satisfies the Euler Lagrange equation (1.3), namely

$$\begin{cases} -\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' + \xi_\varepsilon = 0, \quad \text{a.e. in } (0,T), \\ \xi_\varepsilon \in \partial\phi(u_\varepsilon), \\ u_\varepsilon(0) = \bar{u}, \\ u_\varepsilon'(T) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

At this point, evaluating the H norm of the left hand side of (3.1) and performing some standard manipulation one can get the key estimate

$$\varepsilon\|u_\varepsilon''\|_{L^2(0,T;H)} + \varepsilon^{1/2}\|u_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u_\varepsilon'\|_{L^2(0,T;H)} + \|\xi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)} \le C, \tag{3.2}$$

with C a positive constant depending on $\|\bar{u}\|$ but independent of ε. Note that this argument is only formal and requires some smoothness for ξ_ε. For this reason, (3.2) is first proved in a time discretization scheme and then the continuous version is obtained in the limit (see [17] for the details of the argument). Estimate (3.2) is the core of the convergence as it entails enough compactness to obtain the existence of a $u \in H^1(0,T;H)$ such that

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } C^0([0,T];H).$$

Then, passing to the limit in (3.1) and using standard monotonicity arguments we can get that u is the gradient flow for ϕ starting from $\bar{u}$, i.e. u solves (1.1). Theorem 1.1 is then proven.

3.2 – *The Metric space setting*

In this subsection I will answer to the question raised at the end of Section 2 by proving (actually sketching the proof)

THEOREM 3.1 (Variational principle in Metric spaces). – *As* $\varepsilon \searrow 0$, u_ε *locally uniformly converges to a curve of maximal slope for* ϕ, *with respect to the (local) slope* $|\partial\phi|$ *and starting from* $\bar{u}$.

I will prove the Theorem under the simplified assumptions (2.13). In the paper [22] more general situations are considered. First of all, we have to show that the minimization problem for the metric WED functional I_ε in (2.14) on the set of those v such that $v \in AC^2(0,T;X)$ with $v(0) = \bar{u}$ is well posed. We have the following

THEOREM 3.2 (Existence of minimizers). – *Let* (X,d) *be a metric space and let* $\phi : X \to (-\infty, +\infty]$ *be a functional satisfying* (2.13).

Then for any $\varepsilon > 0$, *the set* $\operatorname{Argmin}\{I_\varepsilon[v],\ v \in H^1(0,T;H),\ v(0) = \bar{u}\}$ *is not empty.*

The proof of this result is based on the Direct method of calculus of variations. Note that, even assuming that the functional ϕ is convex, the uniqueness of the minimizer of I_ε is not guaranteed by the above Theorem. In fact, contrary to the Hilbert space case, the quadratic term related to the metric derivative is not necessarily convex in the general metric setting. Now, if one wants to follow the path of the proof of the Hilbert case, the next step would be to determine some Euler Lagrange equation for the minimizers u_ε. Coming back to the Hilbertian framework, it is important to note that the Euler Lagrange equation (3.1) is fundamental for the following reason: it is the equation where both the a priori estimate (3.2) and the limit procedure are performed. Thus, the next step is to find a good metric surrogate of equation (3.1). Recall that (3.1) is obtained computing the first variation of the functional I_ε. Unfortunately, in a general metric framework the only variations we can do are inner variations with respect to the time variable. As a result, by performing these variations in the metric WED functional I_ε (2.14) we obtain (see [22] for the details of the proof) that the minimizers u_ε verify, for any $\varepsilon > 0$,

$$|u_\varepsilon'|^2(t) + \frac{d}{dt}\left(\phi(u_\varepsilon(t)) - \frac{\varepsilon}{2}|u_\varepsilon'|^2(t)\right) = 0 \text{ for a.e. } t \in (0,+\infty). \tag{3.3}$$

We will call (3.3) *metric inner variation equation*. Regarding (3.3), note that if we were in a Hilbert space, then the corresponding *inner variation* equation could be obtained by simply testing (3.1) with u_ε'. Consequently, it is extremely reasonable to expect that (3.3) gives less information than (3.1), in an Hilbert space. Another indication of this fact can be inferred by considering the target equation describing a curve of maximal slope. More precisely, comparing (2.10) with (3.3), we observe that the latter contains no information on the local slope $|\partial\phi|$ which is an ingredient in the definition of a curve of maximal slope. All these reasons suggest that (3.3) is

an important, although only intermediate, step in the understanding of the limit behavior of u_ε but it should be complemented with other ingredients. As it will be clear in a moment this will be also related to the possibility of obtaining the a priori estimates on u_ε needed for the limit procedure.

In a sense, the turning point is to look at the value of the minimum of (2.14) instead at the minimum point u_ε. More precisely, for any $\varepsilon > 0$ we consider the functional $V_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ defined by

$$V_\varepsilon(\bar{u}) := \min_{v \in AC^2(0,\infty;X), v(0)=\bar{u}} \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon} \Big(\frac{\varepsilon}{2} |v'|^2(t) + \phi(v(t)) \Big) \, \mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

As in control theory (see [3]) the functional V_ε is named *value functional*. In a moment, we will see other important analogies with the theory of optimal control. Besides control theory, it is also important to note that the *value function* related to the WED functional I_ε share some properties with the Yosida approximation. In fact, the following holds (see [22])

PROPOSITION 3.3. – *Under assumptions* (2.13) *the functional* V_ε *defined in* (3.4) *verifies*

(1) V_ε *is lower semicontinuous in* X *and is continuous on the sub levels of* ϕ
(2) $0 \le V_\varepsilon(\bar{u}) \le \phi(\bar{u})$ *for any* $\bar{u} \in X$
(3) $V_{\varepsilon_1}(\bar{u}) \le V_{\varepsilon_0}(\bar{u})$ *for any* $\bar{u} \in X$ *and for any* $\varepsilon_1 \ge \varepsilon_0$

The proofs of (2), of the continuity of V_ε and of (3) follow from testing the minimum problem (3.4) with suitable competitors. As an example, choosing the constant curve $v(t) = \bar{u}$ for any $t \ge 0$ in (3.4) and noting that the exponential weight integrates to one, we readily get $V_\varepsilon(\bar{u}) \le \phi(\bar{u})$ for any $\bar{u}$. On the other hand, the proof of the semicontinuity is similar to the proof of Theorem 3.2. Note that, except for the continuity of V_ε, all the above listed properties continue to hold even for non convex energies ϕ. Moreover, using the *metric inner variation equation* (3.3), we deduce the following

PROPOSITION 3.4. – *Under assumptions* (2.13), *for every* $u_\varepsilon \in \mathrm{Argmin}_{v \in AC^2(0,\infty;X), v(0)=\bar{u}} I_\varepsilon[v]$ *there holds*

$$\text{the map } t \mapsto V_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) \text{ is absolutely continuous on } (0, +\infty), \text{ and} \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} V_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) + \frac{1}{2} |u_\varepsilon'|^2(t) = \frac{1}{\varepsilon} \phi(u_\varepsilon(t)) \text{ for all } t \in [0, +\infty). \tag{3.6}$$

Then, combining (3.6) with the metric inner variation equation (3.3), we immediately get

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) + |u_\varepsilon'|^2(t) = 0 \quad \text{for a.a. } t \in (0, +\infty),$$

which produces, upon integration,

$$V_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) + \int_s^t |u_\varepsilon'|^2(r)\,\mathrm{d}r = V_\varepsilon(u_\varepsilon(s)) \quad \text{for all } 0 \le s \le t < +\infty. \tag{3.7}$$

Consequently, recalling that $0 \le V_\varepsilon(\bar{u}) \le \phi(\bar{u})$ for any $\bar{u} \in X$, we obtain the a priori estimates

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty |u_\varepsilon'|^2(t)\,\mathrm{d}t \;\le\; \phi(\bar{u}) + C_0, \\ \displaystyle\int_0^T \phi(u_\varepsilon(t))\,\mathrm{d}t \;\le\; (\phi(\bar{u}) + C_0)\Big(T + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \end{cases} \quad \text{for all } \; T \ge 0 \text{ and } \varepsilon > 0. \tag{3.8}$$

As before, Proposition 3.4 and estimates (3.7)-(3.8) work also without convexity conditions.

Now, note that taking $\bar{u} \in X$ and $u_\varepsilon \in \mathrm{Argmin}_{v \in AC^2(0,+\infty;X), v(0)=\bar{u}} I_\varepsilon[v]$ we have

$$V_\varepsilon(\bar{u}) \;\ge\; \int_0^\infty \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon}\phi(u_\varepsilon(t))\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty e^{-s}\phi(u_\varepsilon(\varepsilon s))ds. \tag{3.9}$$

Thus, since for any $s \in (0,+\infty)$ there holds

$$d(u_\varepsilon(\varepsilon s), \bar{u}) \;\le\; \int_0^{\varepsilon s} |u_\varepsilon'|(t)\,\mathrm{d}t \;\le\; \sqrt{\varepsilon s}\,\||u_\varepsilon'|\|_{L^2(0,\infty)} \;\le\; \sqrt{\varepsilon s(\phi(\bar{u}) + C_0)}, \tag{3.10}$$

where we have used (3.8) in the latter inequality, we arrive at

$$u_\varepsilon(\varepsilon s) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \bar{u} \quad \text{for any} \;\; s \in (0,+\infty).$$

Hence, taking the $\liminf$ when $\varepsilon \downarrow 0$ of the two sides of (3.9), using the lower semicontinuity of ϕ and the Fatou's lemma, we obtain that

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} V_\varepsilon(\bar{u}) \;\ge\; \phi(\bar{u}),$$

which is enough to conclude the *monotone* convergence

$$V_\varepsilon(\bar{u}) \nearrow \phi(\bar{u}) \text{ as } \varepsilon \searrow 0, \text{ for every } \bar{u} \in X, \tag{3.11}$$

since we already know that $V_\varepsilon(\bar{u}) \le \phi(\bar{u})$ and the monotonic character of V_ε. With a similar argument we can also prove the following

$$\Big(\bar{u}_\varepsilon \to \bar{u} \text{ in } X, \text{ with } \sup_\varepsilon \phi(u_\varepsilon) \le C < \infty\Big) \;\Rightarrow\; \phi(\bar{u}) \le \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} V_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon). \tag{3.12}$$

The convergences (3.11) and (3.12) will be fundamental in the limit procedure. To this end, note that the first of (3.8) gives some equicontinuity for the se-

quence u_ε. Thus, to have compactness we have to obtain a (pointwise) control on $\phi \circ u_\varepsilon$ (recall that ϕ has compact sublevels). This is the content of the following Lemma,

LEMMA 3.5. – *Under the assumptions* (2.13) *let* $u_\varepsilon \in \mathrm{Argmin}_{v \in AC^2(0,\infty;X), v(0)=\bar{u}} I_\varepsilon[v]$. *Then,*

$$t \mapsto |u_\varepsilon'|^2(t) \text{ and } t \mapsto \phi(u_\varepsilon(t)) \text{ are decreasing} \tag{3.13}$$

$$t \mapsto \phi(u_\varepsilon(t)) \text{ is convex} \tag{3.14}$$

$$\phi(u_\varepsilon(t)) \leq \phi(\bar{u}) \ \forall t \geq 0. \tag{3.15}$$

The main difficulty in the proof of the Lemma relies in showing (3.13) and the fact that the geodesic convexity of ϕ in X transfers to a convexity of $\phi \circ u_\varepsilon$ with respect to time. Once one proves (3.13) and (3.14) then (3.15) follows from a contradiction argument. It is important to observe that the above Lemma works only if we assume some geodesic convexity on the energy ϕ. We refer to [22] for the analysis of the non convex situation.

Now, we come to the fundamental property of the *value function* V_ε. Guided by the analogy with infinite horizon problems we have the following

PROPOSITION 3.6 (Dynamic programming principle). – *For every* $T > 0$ *there holds*

$$V_\varepsilon(\bar{u}) = \min_{v \in AC^2(0,\infty;X), v(0)=\bar{u}} \left(\int_0^T \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{2} |v'|^2(t) + \phi(v(t)) \right) \mathrm{d}t + V_\varepsilon(v(T)) e^{-T/\varepsilon} \right). \tag{3.16}$$

In particular, every $u_\varepsilon \in \mathrm{Argmin}\{I_\varepsilon[v], v \in AC^2(0,\infty;X), v(0) = \bar{u}\}$ *is a minimizer for* (3.16). *Hence, there holds*

$$V_\varepsilon(\bar{u}) = \int_0^T \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{2} |u_\varepsilon'|^2(t) + \phi(u_\varepsilon(t)) \right) \mathrm{d}t + V_\varepsilon(u_\varepsilon(T)) e^{-T/\varepsilon} \quad \text{for all } T > 0. \tag{3.17}$$

Quoting Bardi & Capuzzo Dolcetta ([3]) we can say that to achieve the minimum $V_\varepsilon(\bar{u})$ is necessary and sufficient to behave as follows:

(1) let the system evolve for a finite time T along an arbitrary trajectory.

(2) pay the corresponding cost, that is $\int_0^T \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{2} |v'|^2(t) + \phi(v(t)) \right) \mathrm{d}t$

(3) pay what it remains to pay in the best possible way, that is $V_\varepsilon(v(T)) e^{-T/\varepsilon}$

(4) minimize over all possible trajectories.

The proof of this crucial Proposition is, *mutatis mutandis*, analogous to the proof of the finite dimensional analogous in [3]. In particular, does not rely on any form of convexity for ϕ. The Dynamic programming principle (3.17) is the core of our limiting analysis. In fact, from (3.17) one can deduce the following chain of equalities

$$\int_0^t e^{-r/\varepsilon}\left(\frac{1}{2}|u_\varepsilon'|^2(r)+\frac{1}{\varepsilon}\phi(u_\varepsilon(r))\right)\mathrm{d}r = V_\varepsilon(u_\varepsilon(0)) - V_\varepsilon(u_\varepsilon(t))e^{-t/\varepsilon}$$

$$= -\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V_\varepsilon(u_\varepsilon(r))e^{-r/\varepsilon}\right)\mathrm{d}r = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V_\varepsilon(u_\varepsilon(r)))e^{-r/\varepsilon}\,\mathrm{d}r - \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-r/\varepsilon})V_\varepsilon(u_\varepsilon(r))\,\mathrm{d}r,$$

form which it follows, using the Lebesque Theorem, the following

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) = \frac{1}{2}|u_\varepsilon'|^2(t)+\frac{1}{\varepsilon}\phi(u_\varepsilon(t)) - \frac{1}{\varepsilon}V_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) \quad \text{for a.a. } t\in(0,+\infty). \tag{3.18}$$

This relation is extremely important for the passage to the limit procedure and plays the role of the Euler equation in the Hilbert space case. To see this, note that from (3.8) and (3.15) (recall that ϕ has compact sub levels) we get that (cf. [1, Proposition 3.3.1]) there exists a limiting curve $u\colon[0,\infty)\to X$ and a not relabeled subsequence such that

$$u_\varepsilon(t)\to u(t) \text{ in } X, \text{ for any } t\in[0,+\infty). \tag{3.19}$$

On the other hand, following the same argument as in [1, Theorem 2.3.3], one obtains that $u\in AC^2(0,\infty;X)$ and that

$$\int_0^T |u'|^2(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^T |u_\varepsilon'|^2(t)\,\mathrm{d}t, \text{ for any } T>0. \tag{3.20}$$

Now, if we integrate (3.18) between 0 and a generic time t, we get

$$V_\varepsilon(u_\varepsilon(t))+\frac{1}{2}\int_0^t |u_\varepsilon'|^2(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}(\phi(u_\varepsilon(s))-V_\varepsilon(u_\varepsilon(s)))\,\mathrm{d}s = V_\varepsilon(\bar u), \quad \text{for any } t\ge 0. \tag{3.21}$$

Recall that from (3.12) combined with (3.15), we have that

$$\phi(u(t)) \le \liminf_{\varepsilon\searrow 0} V_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) \text{ for any } t\ge 0 \text{ and } V_\varepsilon(\bar u)\nearrow \phi(\bar u) \text{ as } \varepsilon\searrow 0. \tag{3.22}$$

Thus, taking the limit in (3.21) we get

$$\phi(u(t))+\frac{1}{2}\int_0^t |u'|^2(s)\,\mathrm{d}s+\liminf_{\varepsilon\searrow 0}\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}(\phi(u_\varepsilon(s))-V_\varepsilon(u_\varepsilon(s)))\,\mathrm{d}s \le \phi(\bar u) \quad \text{for any } t\ge 0, \tag{3.23}$$

which is *almost* the integrated version of (2.11) up to the identification of the $\liminf$ term with $\frac{1}{2}\int_0^t |\partial\phi|^2(u(s))\,\mathrm{d}s$. This is contained in the following

PROPOSITION 3.7. – *Under assumptions* (2.13), *there holds that*

$$\frac{1}{2}\int_0^t |\partial\phi|^2(u(s))\,\mathrm{d}s \le \liminf_{\varepsilon\searrow 0}\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}(\phi(u_\varepsilon(s)) - V_\varepsilon(u_\varepsilon(s)))\,\mathrm{d}s, \quad \textit{for any } t>0. \tag{3.24}$$

Moreover, the quantity $\frac{1}{\varepsilon}(\phi(u_\varepsilon(s)) - V_\varepsilon(u_\varepsilon(s)))$ *is related to the slope of* V_ε *in the sense that* V_ε *satisfies, for any* $v\in X$ *the Hamilton Jacobi equation*

$$\frac{1}{2}|\tilde{\partial} V_\varepsilon|^2(v) = \frac{1}{\varepsilon}(\phi(v) - V_\varepsilon(v)), \tag{3.25}$$

where $|\tilde{\partial} V_\varepsilon|(v) := \limsup_{w\to v,\, \phi(w)\to\phi(v)} \dfrac{(V_\varepsilon(v) - V_\varepsilon(w))^+}{d(v,w)}, \quad \textit{for } v\in X.$

Note that the equation (3.25) is the metric version of the classical Hamilton-Jacobi-Bellman equation for the infinite horizon problem in finite dimensions (see [3, Chapter 3, Proposition 2.8]). The importance of this Proposition is two-fold. One one side, it allows to conclude the limit procedure in (3.23) and obtain that the curve u in (3.19) satisfies

$$\phi(u(t)) + \frac{1}{2}\int_0^t |u'|^2(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t |\partial\phi|^2(u(s))\,\mathrm{d}s \le \phi(\bar{u}) \quad \text{for any } t\ge 0, \tag{3.26}$$

and hence it is a curve of maximal slope for the energy ϕ with respect to the local slope $|\partial\phi|$ and starting from $\bar{u}$. This fact, in particular, concludes the proof of Theorem 3.1. On the other hand, the Hamilton Jacobi equation (3.25) sheds some new light on the *value function* V_ε and on the dynamics (for $\varepsilon>0$ fixed) of the minimizers u_ε. In fact, plugging (3.25) into (3.18) we immediately get that

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) = \frac{1}{2}|u_\varepsilon'|^2(t) + \frac{1}{2}|\tilde{\partial} V_\varepsilon|^2(u_\varepsilon(t)) \text{ for a.a. } t>0, \tag{3.27}$$

i.e., u_ε is a curve of maximal slope for V_ε with respect to the slope $|\tilde{\partial} V_\varepsilon|$. At this point, the definition of the slope $|\tilde{\partial} V_\varepsilon|$ may look a bit obscure. In particular, one may wonder under which conditions the new slope $|\tilde{\partial} V_\varepsilon|$ coincides with the usual slope (2.7). A sufficient condition for this is that the value funtion V_ε is geodesically convex (see [22]).

REFERENCES

[1] L. Ambrosio - N. Gigli - G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. Second edition.

[2] L. Ambrosio - N. Gigli - G. Savaré, *Calculus and heat flow in Metric-Measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, preprint (2011).

[3] M. Bardi - I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser, 1997.

[4] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[5] H. Brezis - I. Ekeland, *Un principe variationnel associé à certaines équations paraboliques. Le cas indépendant du temps*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **282**, (1976), Aii, A971-A974.

[6] S. Conti - M. Ortiz, *Minimum principles for the trajectories of systems governed by rate problems*, J. Mech. Phys. Solids, **56** (2008), 1885-1904.

[7] M. Crandall - A. Pazy, *Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets*, J. Functional Analysis, **3** (1969), 376-418.

[8] E. De Giorgi - A. Marino - M. Tosques, *Problems of evolution in metric spaces and maximal decreasing curve*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **68** (1980), 180-187.

[9] E. De Giorgi, *Conjectures concerning some evolution problems*, A celebration of John F. Nash, Jr., Duke Math. J., **81** (1996), 255-268.

[10] *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, Mem. Amer. Math. Soc., **108**, (1994), x+90.

[11] N. Ghoussoub, *A theory of anti-selfdual Lagrangians: dynamical case*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **340** (2005), 325-330.

[12] R. Jordan - D. Kinderlehrer - F. Otto, *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 1-17.

[13] Y. Kömura, *Nonlinear semi-groups in Hilbert space*, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 493-507.

[14] J. L. Lions, *Sur certaines équations paraboliques non linéaires*, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 155-175.

[15] J. L. Lions - E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. Vol. I, Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181, Springer-Verlag, New York, 1972.

[16] A. Mielke - M. Ortiz, *A class of minimum principles for characterizing the trajectories of dissipative systems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **14** (2008), 494-516.

[17] A. Mielke - U. Stefanelli, *Weighted energy-dissipation functionals for gradient flows*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **17** (2011), 52-85.

[18] B. Nayroles, *Deux théorèmes de minimum pour certains systèmes dissipatifs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **282** (1976), Aiv, A1035-A1038.

[19] R. H. Nochetto - G. Savaré - C. Verdi, *A posteriori error estimates for variable time-step discretizations of nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math., **53** (2000), 525-589.

[20] F. Otto, *The geometry of dissipative evolution: the porous medium equation*, Comm. Partial Differential Equations, **26** (2001), 101-174.

[21] R. Rossi - G. Savaré - A. Segatti - U. Stefanelli, *A variational principle for gradient flows in metric spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **349** (2011), 1225-1228.
[22] R. Rossi - G. Savaré - A. Segatti - U. Stefanelli, *Weighted-energy-dissipation functionals for gradient flows in metric spaces*, in preparation (2011).
[23] E. Serra - P. Tilli, *Nonlinear wave equations as limits of convex minimization problems: proof of a conjecture by De Giorgi*, Ann. of Math. (2), **175** (2012), **3**, 1551-1574.
[24] E. N. Spadaro - U. Stefanelli, *A variational view at the time-dependent minimal surface equation* J. Evol. Equ., **11** (2011), 793-809.
[25] U. Stefanelli, *The Brezis-Ekeland principle for doubly nonlinear equations*, SIAM J. Control Optim., **47** (2008), 1615-1642.
[26] U. Stefanelli, *The De Giorgi conjecture on elliptic regularization*, Math. Models Methods Appl. Sci., **21** (2011), 1377-1394.
[27] A. Visintin, *A new approach to evolution*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **332** (2001), 233-238.

Antonio Segatti, Dipartimento di Matematica "F. Casorati"
via Ferrata 1, I-27100 Pavia, Italy
E-mail: antonio.segatti@unipv.it

Received December 5, 2012 and in revised form December 8, 2013

Alfonso Sorrentino: Proprietà simplettiche e variazionali di sistemi hamiltoniani convessi

Alfonso Sorrentino
Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge, UK
email: A.Sorrentino@dpmms.cam.ac.uk

Sunto

L'utilizzo di metodi variazionali per lo studio di sistemi hamiltoniani convessi e superlineari – cosiddetti "*di tipo Tonelli*" – ha evidenziato l'esistenza di una pletora di insiemi invarianti dalle rimarchevoli proprietà dinamiche e simplettiche. Questi insiemi – generalmente noti come *insiemi di Aubry–Mather* – sono contraddistinti dalle medesime proprietà variazionali che caratterizzano i grafici lagrangiani invarianti, pur non condividendone, in generale, né la regolarità, né la struttura topologica.

In questa comunicazione, dopo aver brevemente introdotto questi insiemi, descriverò come la proprietà di *minima azione* che li caratterizza, si traduce in un'intrinseca struttura lagrangiana dalle interessanti conseguenze per la dinamica.

In particolare, mi soffermerò sulle implicazioni dinamiche di questa proprietà puramente simplettica. Discuterò dapprima l'invarianza di questi insiemi per il flusso di eventuali integrali del moto. Successivamente mostrerò come ogni coppia di integrali del moto sia obbligata a "commutare" (localmente) su questi insiemi, nel senso di Poisson. Questo ci permetterà di introdurre una nozione di "integrabilità in senso debole" e dimostrare una versione *non commutativa* del teorema di Liouville–Arnol′d sull'integrabilità di sistemi Hamiltoniani, dalle interessanti conseguenze sia per la dinamica del sistema (esistenza di una famiglia di grafici lagrangiani invarianti con proprietà ben distinte), sia per la struttura topologica della varietà sottostante.

Infine, mostrerò come, abbastanza sorprendentemente, questa versione – a priori più debole – implichi il teorema di Liouville–Arnol′d classico nel caso del toro.

Bibliografia

[1] A. Sorrentino: "On the integrability of Tonelli Hamiltonians", accettato per la pubblicazione su *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2009.

[2] L. Butler, A. Sorrentino: "Weak Liouville–Arnol′d theorem", pre-pubblicazione 2010.

[3] A. Sorrentino, C. Viterbo: "Action minimizing properties and distances on the group of Hamiltonian diffeomorphisms", *Geometry & Topology* 14 (4): 2383 - 2403, 2010.

Intervento: Alfonso Sorrentino,
A Variational Approach to the Study of the Existence of Invariant Lagrangian Graphs,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 405–440**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 405-440

A Variational Approach to the Study of the Existence of Invariant Lagrangian Graphs

ALFONSO SORRENTINO

Abstract. – *This paper surveys some recent results by the author and some collaborators, on the existence of invariant Lagrangian graphs for Tonelli Hamiltonian systems.*

Contents

1 - Introduction 405
1.1 - *Weak Liouville-Arnol'd Theorem* 406
1.2 - *Differentiability of the minimal average action and Integrability* . 410
1.3 - *Outline of the article* 412

2 - Introduction to (Aubry-)Mather theory 412
2.1 - *From KAM theory to AM theory* 412
2.2 - *Tonelli Lagrangians and Hamiltonians on compact manifolds* . 413
2.3 - *Cartoon example: action-minimizing properties of integrable systems* 418
2.4 - *Mather's theory for Tonelli Lagrangian systems* 421

3 - Weak Liouville-Arnol'd theorem and its implications 428

4 - Minimal average action and Integrability 432
4.1 - *Differentiability of Mather's β-function on closed surfaces* 434
4.2 - *C^0–Integrability on closed surfaces* 436

References 439

1. – Introduction

In this article I would like to describe some properties of Hamiltonian and Lagrangian systems, with particular attention to the relation between their *action-minimizing* properties, their *symplectic* nature and their *dynamics*. More specifically, I shall illustrate what kind of information the *principle of least*

Lagrangian action (1) conveys into the study of the integrability of these systems, and, more generally, how this information relates to the existence or to the non–existence of invariant Lagrangian graphs.

Hereafter I shall address how these very interesting (and difficult) questions can be tackled from different perspectives. The main results are all contained in [14], [28] and [39], to which I shall refer for a more comprehensive presentation and for detailed proofs.

1.1 – *Weak Liouville-Arnol'd Theorem* (See [39, 14]).

It is natural to expect that "sufficiently" symmetric systems ought to possess an abundance of invariant Lagrangian graphs. This is indeed the content of a very classical result in the study of Hamiltonian systems: what is generally called *Liouville-Arnol'd Theorem* (see for example [5]). This theorem is concerned with the *integrability* of a Hamiltonian system, *i.e.*, with the existence of a regular foliation of the phase space by invariant Lagrangian submanifolds. This theorem provides sufficient conditions for the existence of such a foliation in terms of the existence of *independent* "symmetries" that are in *involution*. In order to make the latter condition clearer, let us recall some terminology. Consider a Hamiltonian system with n degrees of freedom, given by a Hamiltonian $H : V \to \mathbb{R}$ defined on a $2n$-dimensional symplectic manifold (V, ω) and denote by $\{\cdot,\cdot\}$ the associated *Poisson bracket*, defined as follows: if $f, g \in C^1(M)$, then $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = df \cdot X_g$, where X_f and X_g denote the Hamiltonian vector fields associated to f and g (see for instance [5]). An important role in the study of the dynamics is played by the functions $F : V \to \mathbb{R}$ that are in *involution* with the Hamiltonian, *i.e.*, whose Poisson bracket $\{H, F\} \equiv 0$ on V (equivalently we can say that H and F *Poisson-commute*). Such functions, whenever they exist, are called *integrals of motion* (or *first integrals*) of H. It is quite easy to check that the condition of being in involution is equivalent to asking that F is constant along the orbits of the Hamiltonian flow of H and *vice versa*; moreover, this implies that the associated Hamiltonian vector fields X_H and X_F commute. Liouville-Arnol'd theorem relates the integrability of a given Hamiltonian system to the existence of "enough" integrals of motion in involution.

(1) "*Nature is thrifty in all its actions*", Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1744). A better-known special case of this principle is what is generally called *Maupertius' principle*. Actually, as I learnt from Leo Butler [13], König published a note claiming priority for Leibniz in the Berlin Academy correspondences overseen by Maupertuis. Priority dispute brought in Euler, Voltaire and ultimately a committee convened by the King of Prussia. In 1913, the Berlin Academy reversed its previous decision and found Leibniz had priority.

THEOREM (Liouville-Arnol'd). – *Let (V,ω) be a symplectic manifold with $\dim V = 2n$ and let $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$ be a proper Hamiltonian. Suppose that there exists n integrals of motion $F_1, \dots, F_n : V \longrightarrow \mathbb{R}$ such that:*

i) *$F_1, \dots, F_n$ are C^2 and functionally independent almost everywhere on V;*
ii) *$F_1, \dots, F_n$ are pairwise in involution, i.e., $\{F_i, F_j\} = 0$ for all $i,j = 1, \dots n$.*

Suppose the non-empty regular level set $\Lambda_a := \{F_1 = a_1, \dots, F_n = a_n\}$ is connected. Then Λ_a is an n-torus, $\mathbb{T}^n$, and there is a neighbourhood $\mathcal{O}$ of $0 \in H^1(\Lambda_a; \mathbb{R})$ such that for each $c' \in \mathcal{O}$ there is a unique smooth Lagrangian $\Lambda_{c'}$ that is a graph over Λ_a with cohomology class c'. Moreover, the flow of $X_H|\Lambda_{c'}$ is conjugated to a rigid rotation.

See for instance [5, Section 49] for a proof of this theorem.

REMARK 1.1. – The map $F := (F_1, \dots, F_n)$ is referred to as an *integral map*, *first-integral map* or a *momentum map*. The invariance of the level set Λ_a simply follows from F_i being integrals of motion; the fact that it is a Lagrangian torus and that the Hamiltonian flow is conjugate to a rigid rotation, strongly relies on these integrals being pairwise in involution and independent.

A natural question is then the following: *Is it possible to weaken the assumptions in the Liouville-Arnol'd theorem?* In particular: *What happens when the involution hypothesis on the integrals of motion is dropped?*

It is clear from Remark 1.1 that the involution hypothesis is fundamental in deducing the non-trivial fact that these invariant sets are Lagrangian and that the motion on them is conjugate to a rigid rotation. Roughly speaking this is not just a sufficient condition, it is also somehow necessary: the Lagrangianeity of these submanifolds, in fact, is essentially equivalent to the involution hypothesis. Hence, it seems almost hopeless to deduce interesting results without assuming it. However, in the case of *Tonelli Hamiltonians* it turns out to be possible.

Recall that a Hamiltonian $H \in C^2(T^*M)$ is called *Tonelli* if it is fibrewise strictly convex and enjoys fibrewise superlinear growth (see subsection 2.2 for a precise definition).

In [39], I introduced the following definition.

DEFINITION 1.2 (Weak integrability [39]). – *Let $H \in C^2(T^*M)$. If there is a C^2 map $F : (T^*M)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ whose singular set is nowhere dense, and F Poisson-commutes with H, then we say that H is weakly integrable.*

REMARK 1.3. – There exist examples of Hamiltonian systems that are weakly integrable but not Liouville Integrable. See for example [39, Appendix A].

Moreover, Butler and Paternain [12] proved the following. Let G be a compact semi-simple Lie group of rank at least 2. In any neighbourhood of the bi-invariant metrics, there are left-invariant metrics with positive topological entropy that are not completely integrable. Nevertheless, these metrics are weakly integrable.

In [39] and in a subsequent joint work with Leo Butler [14], we proved a version of Liouville-Arnol'd Theorem for weakly integrable Tonelli Hamiltonians. We named this theorem *Weak Liouville-Arnol'd Theorem* because it drops the involutivity hypothesis of the classical theorem and still obtains results that are quite analogous.

THEOREM 1.4 (Weak Liouville-Arnol'd). – *Let M be a closed manifold of dimension n and $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ a weakly integrable Tonelli Hamiltonian with integral map $F : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. If for some cohomology class $c \in H^1(M;\mathbb{R})$ the Mather set* (2) *$\mathcal{M}_c^* \subset \operatorname{reg} F$, then there exists an open neighbourhood $\mathcal{O}$ of c in $H^1(M;\mathbb{R})$ such that the following holds.*

i) *For each $c' \in \mathcal{O}$ there exists a smooth invariant Lagrangian graph $\Lambda_{c'}$ of cohomology class c', which admits the structure of a smooth $\mathbb{T}^d$-bundle over a base B^{n-d} that is parallelisable, for some $d > 0$.*
ii) *The motion on each $\Lambda_{c'}$ is Schwartzman strictly ergodic (see* [20]*), i.e., all invariant probability measures have the same rotation vector and the union of their supports equals $\Lambda_{c'}$. In particular, all orbits are conjugate by a smooth diffeomorphism isotopic to the identity.*
iii) *Mather's α-function (or minimal average action) $\alpha : H^1(M;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ is differentiable at all $c' \in \mathcal{O}$ and its convex conjugate $\beta : H_1(M;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ is differentiable at all rotation vectors $h \in \partial\alpha(\mathcal{O})$, where $\partial\alpha(\mathcal{O})$ denotes the set of subderivatives of α at some element of $\mathcal{O}$. In particular, for $c \in \mathcal{O}$ orbits on $\Lambda_{c'}$ have rotation vector $\partial\alpha(c')$.*

REMARK 1.5. – Observe that the flow of $X_H|\Lambda_{c'}$ is a rotation on the $\mathbb{T}^d$-fibres of $\Lambda_{c'}$ with rotation vector $h_{c'} = \partial\alpha(c')$, where $\partial\alpha(c')$ is the derivative of α at c' and $d = b_1(M)$, the first Betti number of M. This is analogous to what happens in the classical Liouville-Arnol'd theorem, where the rotation vector is the derivative of H (in action-angle coordinates) at c'.

This theorem shows the existence of a family of smooth invariant Lagrangian graphs $\{\Lambda_{c'}\}_{c' \in \mathcal{O}}$, which form a lamination of the space. However, in general, these graphs cannot be expected to foliate any open set of the phase

(2) A definition of the *Mather set* and a description of its properties will be provided in subsection 2.4.

space. In fact, there are obvious dimensional obstructions: $\{\Lambda_{c'}\}_{c'\in\mathcal{O}}$ is a $(\dim H^1(M;\mathbb{R}))$-dimensional family of graphs of dimension $\dim M$. Hence, a necessary condition for this to happen is that $\dim H^1(M;\mathbb{R}) \geq \dim M$. *Is this condition the unique obstruction? What can be said if these graphs foliate an open set?*

The following result answers these questions (see [39, 14]).

THEOREM 1.6. – *Assume the hypotheses of Theorem* 1.4. *If* $\dim H^1(M;\mathbb{R}) \geq \dim M$, *then* $\dim H^1(M;\mathbb{R}) = \dim M$ *and* M *is diffeomorphic to* $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. *In particular, it follows that* H *is integrable in the sense of Liouville and therefore the integrals of motion are in involution.*

REMARK 1.7. – (*i*) In other words, if $\dim H^1(M;\mathbb{R}) \geq \dim M$ then the notion of weak integrability is equivalent to the classical notion of Liouville integrability. This hypothesis is satisfied, for example, if $M = \mathbb{T}^n$.

(*ii*) Actually, in [14] we proved something more (these results go beyond the purpose of this survey article, therefore we refer all interested readers to [14] for complete proofs). We showed that under the hypotheses of Theorem 1.4:

a) if $\dim M \leq 3$, then M is diffeomorphic to a torus;
b) if $\dim M = 4$, then – assuming the virtual Haken conjecture([3]) – M is diffeomorphic to either $\mathbb{T}^4$ or $\mathbb{T}^1 \times E$, where E is an orientable 3-manifold finitely covered by S^3.

See [14, Theorem 1.2] for a detailed proof.

(*iii*) Moreover, we investigated the case in which the system's symmetries are not classical and do not come from conserved quantities, but are induced by invariance under the action of an amenable Lie group on the universal cover of the manifold. This action need not descend to the quotient and is generally only evident in statistical properties of orbits. In particular, these symmetries may only manifest themselves in the structure of the action-minimizing sets. Analogous results to the ones discussed above can be also proven in this case; see [14, Theorem 1.3] for a precise statement.

([3]) In 3-manifold topology, a central role is played by those closed 3-manifolds which contain a non-separating *incompressible* surface, or dually, which have non-vanishing first Betti number. Such manifolds are called *Haken*; it is an outstanding conjecture that every irreducible 3-manifold with infinite fundamental group has a finite covering that is Haken [22, Questions 1.1-1.3]. This conjecture is implied by the virtually fibred conjecture [1]. Given the proof of the geometrisation conjecture, the virtual Haken conjecture is proven for all cases but hyperbolic 3-manifolds. Thurston and Dunfield have shown there is good reason to believe the conjecture is true in this case [18].

1.2 – *Differentiability of the minimal average action and Integrability* (See [28]).

In this section I would like to discuss another possible approach to the study of the existence of invariant Lagrangian graphs and the integrability of the system.

In the study of Tonelli Lagrangian and Hamiltonian systems, a central role in understanding the dynamical and topological properties of the action-minimizing sets (see subsection 2.4), is played by the so-called *Mather's average action* (sometimes referred to as *β-function* or *effective Lagrangian*), with particular attention to its differentiability and non-differentiability properties. Roughly speaking, this is a convex superlinear function on the first homology group of the base manifold, which represents the minimal action of invariant probability measures within a prescribed *homology class*, or *rotation vector* (see (13) for a more precise definition). Understanding whether or not this function is differentiable, or even smoother, and what are the implications of its regularity to the dynamics of the system is a formidable problem, which is still far from being understood. Examples of Lagrangians admitting a smooth β-function are easy to construct; trivially, if the base manifold M is such that $\dim H_1(M;\mathbb{R}) = 0$ then β is a function defined on a single-point set and it is therefore smooth. Furthermore, if $\dim H_1(M;\mathbb{R}) = 1$ then a result by Carneiro [16] (see also Lemma 4.5) allows one to conclude that β is differentiable everywhere, except possibly at the origin. As soon as $\dim H_1(M;\mathbb{R}) \geq 2$ the situation becomes definitely less clear and the smoothness of β becomes a more "untypical" phenomenon. Nevertheless, it is still possible to find some interesting examples in which it is smooth. For instance, let $H : T^*\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ be a completely integrable Tonelli Hamiltonian system, given by $H(x,p) = \mathfrak{h}(p)$, and consider the associated Lagrangian $L(x,v) = \ell(v)$ on $T\mathbb{T}^n$. It is easy to check (see subsection 2.3) that in this case, up to identifying $H_1(\mathbb{T}^n;\mathbb{R})$ with $\mathbb{R}^n$, one has $\beta(h) = \ell(h)$ and therefore β is as smooth as the Lagrangian. One can weaken the assumption on the complete integrability of the system and consider C^0-*integrable systems*, *i.e.,* Hamiltonian systems that admit a foliation of the phase space by disjoint invariant continuous Lagrangian graphs, one for each possible cohomology class (see Definition 4.1 and [2]). It is then possible to prove that also in this case the associated β function is C^1.

These observations raise the following question: *If* $\dim H_1(M;\mathbb{R}) \geq 2$, *does the regularity of β imply the integrability of the system?* Or more generally, *is the existence of an invariant Lagrangian graph detected by some regularity property of this function?*

In a joint work with Daniel Massart [28], we addressed the above problem in the case of Tonelli Lagrangians on closed surfaces, not necessarily orientable (in this latter case, one considers the lifted Lagrangian to the orientable double cover). The main results can be summarized as follows.

THEOREM 1.8. – *Let M be a closed surface and $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ a Tonelli Lagrangian.*

(i) *If M is not the sphere, the projective plane, the Klein bottle or the torus, then β cannot be C^1 on the whole of $H_1(M;\mathbb{R})$.*
(ii) *If M is not the torus then the Lagrangian cannot be C^0-integrable.*
iii) *If M is the torus, then β is C^1 if and only if the system is C^0-integrable.*

In particular, in the orientable case it is possible to relate the differentiability of β at (non-singular([4])) 1-irrational homology classes to the existence of invariant Lagrangian graphs foliated by periodic orbits.

THEOREM 1.9. – *Let M be a closed, oriented surface and $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ an autonomous Tonelli Lagrangian. Let h_0 be a 1-irrational, non-singular homology class, and let $\langle \partial\beta(h_0)\rangle$ denote the underlying vector space of the affine subspace generated by $\partial\beta(h_0)$ in $H^1(M,R)$. Then, the dimension of $\langle \partial\beta(h_0)\rangle$ is at least the genus of M. Moreover, if $M = \mathbb{T}^2$ and β is differentiable at h_0, then there exists an invariant Lagrangian graph foliated by periodic orbits, whose homology is a multiple of h_0.*

REMARK 1.10. – Observe that the above result is not true if h is singular (see example [28, Remark 2]). Moreover, when M is not orientable, the situation is different because β may have flats of maximal dimension (that is, of dimension equal to the first Betti number of M). So β may well be differentiable at some 1-irrational, non-singular homology class without having any invariant Lagrangian graph foliated by periodic orbits (see subsection 4.2 and [28, pages 11-12] for a more precise discussion of this issue).

The above results consider the case of C^0-integrable case. An open question is whether similar results can be obtained with C^0-integrability replaced by integrability in the sense of Liouville. In the case of mechanical systems we can bridge this gap. A mechanical Lagrangian is a Lagrangian of the form $L(x,v) = 1/2\, g_x(v,v) + f(x)$, where g is a Riemannian metric and f is a C^2 function on $\mathbb{T}^2$ (see also subsection 2.2 for the definition).

PROPOSITION 1.11. – *Let L be a mechanical Lagrangian on a 2-dimensional torus, whose β-function is C^1. Then, the potential f is identically constant and the metric g is flat. In particular, L is integrable in the sense of Liouville.*

See [28, Proposition 6] for a complete proof.

([4]) We refer to Section 4 and [28] for a more precise definition.

1.3 – *Outline of the article*

In order to make the material interesting and accessible to a wider audience, in Section 2 I shall provide a brief introduction to Mather's theory, starting from an historical excursion (subsection 2.1) and guiding the reader through a cartoon example (subsection 2.2). A description of the general theory will be provided in subsection 2.3. In section 3, I shall describe the results related to weakly integrable system, providing a sketch of the main ideas involved in the proofs. Finally, in section 4 I shall survey the results about the differentiability of the minimal average action and its relation the the integrability of the system. Due to the nature of this survey, most of the proofs will not be provided. However, I shall refer the interested reader to the relevant literature.

2. – Introduction to (Aubry-)Mather theory

2.1 – *From KAM theory to AM theory*

The celebrated Kolmogorov-Arnol'd-Moser (or KAM) theorem finally settled the old question concerning the existence of *quasi-periodic* motions for *nearly-integrable* Hamiltonian systems, *i.e.*, Hamiltonian systems that are slight perturbation of an integrable one. In the integrable case, in fact, the whole phase space is foliated by invariant Lagrangian submanifolds that are diffeomorphic to tori, and on which the dynamics is conjugate to a rigid rotation. On the other hand, it is natural to ask what happens to such a foliation and to these *stable motions* once the system is perturbed. In 1954 Kolmogorov [23] – and later Arnol'd [4] and Moser [36] in different contexts – proved that, in spite of the generic disappearence of the invariant tori filled by periodic orbits, already pointed out by Henri Poincaré, for small perturbations of an integrable system it is still possible to find invariant Lagrangian tori corresponding to "*strongly non-resonant*" rotation vectors. This result, commonly referred to as *KAM theorem*, from the initials of the three main pioneers, besides opening the way to a new understanding of the nature of Hamiltonian systems and their stable motions, contributed to raise new interesting questions, for instance: *what about the destiny of the stable motions (orbits on KAM tori) that are destroyed by effect of the perturbation? Is it possible to identify something reminiscent of their past presence? What can be said about a system which is not close to an integrable one?*

Aubry-Mather theory provides an answer to these questions. Developed independently by Serge Aubry [6] and John Mather [29] in the eighties, this novel approach to the study of the dynamics of *twist diffeomorphisms of the annulus* (which correspond to Poincaré maps of 1-dimensional non-autono-

mous Hamiltonian systems) pointed out the existence of many *action-minimizing sets*, which in some sense generalize invariant rotational curves and that always exist, even after rotational curves are destroyed. Besides providing a detailed structure theory for these new sets, this powerful approach yielded a better understanding of the destiny of invariant rotational curves and to the construction of interesting chaotic orbits as a result of their destruction [30, 32].

Motivated by these achievements, John Mather [33, 34] – and later Ricardo Mañé [26, 25] and Albert Fathi [19] in different ways – developed a generalization of this theory to higher dimensional systems. Positive definite superlinear Lagrangians on compact manifolds, also called *Tonelli Lagrangians* (see Definition 2.1), were the appropriate setting to work in. Under these conditions, in fact, it is possible to prove the existence of interesting invariant sets, known as *Mather*, *Aubry* and *Mañé* sets, which generalize KAM tori, and which continue to exist even after KAM tori's disappearance or when it does not make sense to speak of them (for example when the system is "far" from any integrable one).

In the following we shall provide a brief introduction to Mather's theory. We shall first discuss a cartoon example (Integrable systems) and then show how similar ideas can be extended to a more general setting. A comprehensive exposition of this material (and much more) can be also found in [40] (see also [8, 31, 35, 19] for other interesting related material).

2.2 – *Tonelli Lagrangians and Hamiltonians on compact manifolds*

Before starting, let us introduce the basic setting that we shall consider in the following. Let M be a compact and connected smooth manifold without boundary. Denote by TM its tangent bundle and T^*M the cotangent one. A point of TM will be denoted by (x, v), where $x \in M$ and $v \in T_xM$, and a point of T^*M by (x, p), where $p \in T_x^*M$ is a linear form on the vector space T_xM. Let us fix a Riemannian metric g on it and denote by d the induced metric on M; let $\|\cdot\|_x$ be the norm induced by g on T_xM; we shall use the same notation for the norm induced on T_x^*M.

We shall consider functions $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ of class C^2, which are called *Lagrangians*. Associated to each Lagrangian, there is a flow on TM called the *Euler-Lagrange flow*, defined as follows. Let us consider the action functional A_L from the space of continuous piecewise C^1 curves $\gamma : [a, b] \to M$, with $a \leq b$, defined by:

$$A_L(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt.$$

Curves that extremize([5]) this functional among all curves with the same end-points (and the same time-length) are solutions of the *Euler-Lagrange equation*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot\gamma(t)) \qquad \forall\, t \in [a,b]\,. \tag{1}$$

Observe that this equation is equivalent to

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\ddot\gamma(t) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot\gamma(t)) - \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial x}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\dot\gamma(t)\,,$$

therefore, if the second partial vertical derivative $\partial^2 L/\partial v^2(x,v)$ is non-degenerate at all points of TM, we can solve for $\ddot\gamma(t)$. This condition

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \neq 0$$

is called *Legendre condition* and allows one to define a vector field X_L on TM, such that the solutions of $\ddot\gamma(t) = X_L(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ are precisely the curves satisfying the Euler-Lagrange equation. This vector field X_L is called the *Euler-Lagrange vector field* and its flow Φ_t^L is the *Euler-Lagrange flow* associated to L. It turns out that Φ_t^L is C^1 even if L is only C^2 (see Remark 2.3).

DEFINITION 2.1 (Tonelli Lagrangian). – *A function $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ is called a Tonelli Lagrangian if:*

i) *$L \in C^2(TM)$;*
ii) *L is strictly convex in the fibres, in the C^2 sense, i.e., the second partial vertical derivative $\partial^2 L/\partial v^2(x,v)$ is positive definite, as a quadratic form, for all (x,v);*
iii) *L is superlinear in each fibre, i.e.,*

$$\lim_{\|v\|_x \to +\infty} \frac{L(x,v)}{\|v\|_x} = +\infty.$$

This condition is equivalent to ask that for each $A \in \mathbb{R}$ there exists $B(A) \in \mathbb{R}$ such that

$$L(x,v) \geq A\|v\| - B(A) \qquad \forall\,(x,v) \in TM\,.$$

Observe that since the manifold is compact, then condition *iii)* is independent of the choice of the Riemannian metric g.

([5]) These extremals are not in general minima. The existence of global minima and the study of the corresponding motions is the core of Aubry-Mather theory; see subsection 2.4.

EXAMPLES OF TONELLI LAGRANGIANS.

- **Riemannian Lagrangians.** Given a Riemannian metric g on TM, the *Riemannian Lagrangian* on (M, g) is given by the *kinetic energy*:

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2 .$$

Its Euler-Lagrange equation is the equation of the geodesics of g:

$$\frac{D}{dt}\dot{x} \equiv 0 ,$$

and its Euler-Lagrange flow coincides with the geodesic flow.

- **Mechanical Lagrangians.** These Lagrangians play a key-role in the study of classical mechanics. They are given by the sum of the kinetic energy and a *potential* $U : M \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2 + U(x) .$$

The associated Euler-Lagrange equation is given by:

$$\frac{D}{dt}\dot{x} = \nabla U(x) ,$$

where ∇U is the gradient of U with respect to the Riemannian metric g, *i.e.*,

$$d_x U \cdot v = \langle \nabla U(x), v \rangle_x \quad \forall\, (x, v) \in TM .$$

- **Mañé's Lagrangians.** This is a particular class of Tonelli Lagrangians, introduced by Ricardo Mañé in [25]. If X is a C^k vector field on M, with $k \geq 2$, one can embed its flow φ_t^X into the Euler-Lagrange flow associated to a certain Lagrangian, namely

$$L_X(x, v) = \frac{1}{2}\|v - X(x)\|_x^2 .$$

It is quite easy to check that the integral curves of the vector field X are solutions of the Euler-Lagrange equation. In particular, the Euler-Lagrange flow $\Phi_t^{L_X}$ restricted to $\mathrm{Graph}(X) = \{(x, X(x)),\ x \in M\}$ (that is clearly invariant) is conjugate to the flow of X on M and the conjugacy is given by $\pi|\mathrm{Graph}(X)$, where $\pi : TM \to M$ is the canonical projection. In other words, the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Graph}(X) \arrow[r, "\Phi_t^{L_X}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Graph}(X) \arrow[d, "\pi"] \\
M \arrow[r, "\varphi_t^X"'] & M
\end{tikzcd}$$

that is, for every $x \in M$ and every $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t^{L_X}(x, X(x)) = (\gamma_x^X(t), \dot{\gamma}_x^X(t))$, where $\gamma_x^X(t) = \varphi_t^X(x)$.

In the study of classical dynamics, it turns often very useful to consider the associated *Hamiltonian system*, which is defined on the cotangent bundle T^*M. Given a Lagrangian L, we can define the associated *Hamiltonian*, as its Fenchel transform (or *Fenchel-Legendre transform*), see [37]:

$$\begin{aligned} H:\ T^*M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,p) &\longmapsto \sup_{v \in T_xM} \{\langle p,\, v\rangle_x - L(x,v)\} \end{aligned}$$

where $\langle\,\cdot,\,\cdot\,\rangle_x$ denotes the canonical pairing between the tangent and cotangent bundles.

If L is a Tonelli Lagrangian, one can easily prove that H is finite everywhere (as a consequence of the superlinearity of L), superlinear and strictly convex in each fibre (in the C^2 sense). Observe that H is also C^2. In fact the Euler-Lagrange vector field corresponds, under the Legendre transformation, to a vector field on T^*M given by Hamilton's equation; it is easily seen that this vector field is C^1 (see [15, p. 207]). Such a Hamiltonian is called *Tonelli* (or *optical*) *Hamiltonian*.

DEFINITION 2.2 (Tonelli Hamiltonian). – *A function $H:\ T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ is called a Tonelli (or optical) Hamiltonian if:*

i) *H is of class C^2;*
ii) *H is strictly convex in each fibre in the C^2 sense, i.e., the second partial vertical derivative $\partial^2 H/\partial p^2(x,p)$ is positive definite, as a quadratic form, for any $(x,p) \in T^*M$;*
iii) *H is superlinear in each fibre, i.e.,*

$$\lim_{\|p\|_x \to +\infty} \frac{H(x,p)}{\|p\|_x} = +\infty\,.$$

EXAMPLES OF TONELLI HAMILTONIANS. – Let us see what are the Hamiltonians associated to the Tonelli Lagrangians that we have introduced in the previous examples.

- **Riemannian Hamiltonians.** If $L(x,v) = \dfrac{1}{2}\|v\|_x^2$ is the Riemannian Lagrangian associated to a Riemannian metric g on M, the corresponding Hamiltonian will be

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2,$$

where $\|\cdot\|$ represents – in this last expression – the induced norm on the cotangent bundle T^*M.

- **Mechanical Hamiltonians.** If $L(x,v) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2 + U(x)$ is a mechanical Lagrangian, the associated Hamiltonian is:

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2 - U(x).$$

It is sometimes referred to as *mechanical energy*.

- **Mañé's Hamiltonians.** If X is a C^k vector field on M, with $k \geq 2$, and $L_X(x,v) = \|v - X(x)\|_x^2$ is the associated Mañé Lagrangian, one can check that the corresponding Hamiltonian is given by:

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\|p\|_x^2 + \langle p, X(x)\rangle\,.$$

Given a Hamiltonian one can consider the associated *Hamiltonian flow* Φ_t^H on T^*M. In local coordinates, this flow can be expressed in terms of the so-called *Hamilton's equations*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t))\,. \end{cases} \tag{2}$$

We shall denote by $X_H(x,p) := \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x,p), -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)\right)$ the *Hamiltonian vector field* associated to H. This has a more intrinsic (geometric) definition in terms of the canonical symplectic structure ω on T^*M. In fact, X_H is the unique vector field that satisfies

$$\omega(X_H(x,p),\cdot) = d_xH(\,\cdot\,) \qquad \forall (x,p) \in T^*M.$$

For this reason, it is sometime called *symplectic gradient of* H. It is easy to check from both definitions that – only in the autonomous case – the Hamiltonian is a *prime integral of the motion*, *i.e.*, it is constant along the solutions of these equations.

Now, we would like to explain what is the relation between the Euler-Lagrange flow and the Hamiltonian one. It follows easily from the definition of Hamiltonian (and Fenchel transform) that for each $(x,v) \in TM$ and $(x,p) \in T^*M$ the following inequality holds:

$$\langle p,\, v\rangle_x \leq L(x,v) + H(x,p)\,. \tag{3}$$

This is called *Fenchel inequality* (or *Fenchel-Legendre inequality*, see [37]) and it plays a crucial role in the study of Lagrangian and Hamiltonian dynamics and in the variational methods that we are going to describe. In particular, equality holds if and only if $p = \partial L/\partial v(x,v)$. One can therefore introduce the following

diffeomorphism between TM and T^*M, known as *Legendre transform*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} :\ & TM \longrightarrow T^*M \\ & (x,v) \longmapsto \left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}(x,v) \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Moreover, the following relation with the Hamiltonian holds:

$$H \circ \mathcal{L}(x,v) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(x,v),\ v \right\rangle_x - L(x,v)\,.$$

A crucial observation is that this diffeomorphism $\mathcal{L}$ represents a conjugacy between the two flows, namely the Euler-Lagrange flow on TM and the Hamiltonian flow on T^*M; in other words, the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\Phi_t^L"] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & TM \arrow[d, "\mathcal{L}"] \\ T^*M \arrow[r, "\Phi_t^H"'] & T^*M \end{tikzcd}$$

REMARK 2.3. – Since $\mathcal{L}$ and the Hamiltonian flow Φ^H are both C^1, then it follows from the commutative diagram above that the Euler-Lagrange flow is also C^1.

2.3 – *Cartoon example: action-minimizing properties of integrable systems*

Before entering into the details of Mather's work, I would like to discuss a very easy case: properties of invariant measures of an integrable system. This will provide us with a better understanding of the ideas behind Mather's theory and will make it clearer in which sense these *action-minimizing sets* – namely, what we shall call *Mather sets* (see subsection 2.4) – represent a generalization of KAM tori.

Let $H : T^*\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ be an integrable Tonelli Hamiltonian in action-angle coordinates, *i.e.*, $H(x,p) = \mathfrak{h}(p)$ depends only on the action variables([6]). On the other hand the associated Tonelli Lagrangian $L : T\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ has the form $L(x,v) = \ell(v)$. Let us denote by $\Phi^{\mathfrak{h}}$ and Φ^{ℓ} the respective flows and identify $T^*\mathbb{T}^n$ and $T\mathbb{T}^n$ with $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$.

([6]) In general one can find these coordinates only locally. For the sake of simplicity, let us assume in this example that they are defined globally. This simplification will not affect the main purpose of this section.

The Hamiltonian flow in this case is very easy to study. Hamilton's equations are:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial \mathfrak{h}}{\partial p}(p) =: \rho(p) \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathfrak{h}}{\partial x}(p) = 0, \end{cases}$$

therefore $\Phi_t^{\mathfrak{h}}(x_0, p_0) = (x_0 + t\rho(p_0),\, p_0)$. In particular, p is an integral of motion, that is, it remains constant along the orbits. Therefore, the phase space $T^*\mathbb{T}^n$ is foliated by invariant tori $\Lambda_{p_0}^* = \mathbb{T}^n \times \{p_0\}$ on which the motion is a rigid rotation with rotation vector $\rho(p_0)$. Clearly these tori are Lagrangian.

We would like to understand if these invariant tori can be characterized in a different way, possibly in a form that can be more feasibly extended to the non-integrable case.

REMARK 2.4. – Observe that on the Lagrangian side, the counterpart of these invariant tori $\Lambda_{p_0}^* \subset T^*\mathbb{T}^n$ is given by $\tilde{\Lambda}_{p_0} = \mathbb{T}^n \times \{\rho(p_0)\} \subset T\mathbb{T}^n$. It is trivial to deduce that they are also invariant and that they also foliate the whole tangent bundle.

We have recalled in Section 2.2 that the Euler-Lagrange flow can be equivalently defined in terms of a variational principle associated to the *Lagrangian action functional* A_L. We would like to study action-minimizing properties of these invariant manifolds; for this, it is much better to work in the Lagrangian setting. Moreover, instead of considering properties of single orbits, it would be more convenient to study "collection" of orbits, in the form of *invariant probability measures*(7) and consider their *average action*. If μ is an invariant probability measure for Φ^L – *i.e.*, $(\Phi_t^\ell)^*\mu = \mu$ for all $t \in \mathbb{R}$, where $(\Phi_t^\ell)^*\mu$ denotes the pull-back of the measure – then we define:

$$A_\ell(\mu) := \int_{T\mathbb{T}^n} \ell(v)\, d\mu.$$

Let us consider any invariant probability measure μ_0 supported on $\tilde{\Lambda}_{p_0}$ and compute its action. Observe that on the support of this measure $\ell(v) \equiv \ell(\rho(p_0))$. Then:

$$\begin{aligned} A_\ell(\mu_0) &= \int_{T\mathbb{T}^n} \ell(v)\, d\mu_0 = \int_{T\mathbb{T}^n} \ell(\rho(p_0))\, d\mu_0 = \\ &= \ell(p_0) = p_0 \cdot \rho(p_0) - \mathfrak{h}(p_0), \end{aligned} \tag{5}$$

(7) Actually, it is also possible study directly orbits. See Remark 2.17.

where in the last step we have used the Fenchel-Legendre duality between the h and ℓ.

Let us now consider a general invariant probability measure μ. In this case it is not true anymore that $\ell(v)$ is constant on the support of μ. However, using Fenchel-Legendre inequality (see (3)), we can conclude that $\ell(v) \geq p_0 \cdot v - \mathfrak{h}(p_0)$ for each $v \in \mathbb{R}^n$. Hence:

$$\begin{aligned} A_\ell(\mu) &= \int_{T\mathbb{T}^n} \ell(v)\, d\mu \geq \int_{T\mathbb{T}^n} (p_0 \cdot v - \mathfrak{h}(p_0))\, d\mu = \\ &= \int_{T\mathbb{T}^n} p_0 \cdot v\, d\mu - \mathfrak{h}(p_0) = p_0 \cdot \left(\int_{T\mathbb{T}^n} v\, d\mu \right) - \mathfrak{h}(p_0). \end{aligned} \tag{6}$$

We would like to compare expressions (5) and (6). However, in the case of a general measure, we do not know how to evaluate the term $\int_{T\mathbb{T}^n} v\, d\mu$. One possible trick to overcome this problem is the following: instead of considering the action of $\ell(v)$, let us consider the action of $\ell(v) - p_0 \cdot v$. It is easy to see that this "new" Lagrangian is also Tonelli (we have subtracted a linear term in v) and that it has the same Euler-Lagrange flow as ℓ! In this way we obtain from (5) and (6) that:

$$A_{\ell - p_0 \cdot v}(\mu_0) = -\mathfrak{h}(p_0) \qquad \text{and} \qquad A_{\ell - p_0 \cdot v}(\mu) \geq -\mathfrak{h}(p_0),$$

which are now comparable. Hence, we have just showed the following fact:

FACT 1. – *Every invariant probability measure supported on $\tilde{\Lambda}_{p_0}$ minimizes the action $A_{\ell - p_0 \cdot v}$ amongst all invariant probability measures of Φ^ℓ.*

In particular, we can characterize our invariant tori in a different way:

$$\tilde{\Lambda}_{p_0} = \bigcup \{\operatorname{supp} \mu : \ \mu \text{ minimizes } A_{\ell - p_0 \cdot v}\}. \tag{7}$$

Moreover, there is a relation between the energy (Hamiltonian) of the invariant torus and the minimal action of its invariant probability measures:

$$\min\{A_{\ell - p_0 \cdot v}(\mu) : \ \mu \text{ is an inv. prob. measure}\} = -\mathfrak{h}(p_0). \tag{8}$$

Observe that it was somehow expectable that we needed to modify the Lagrangian in order to obtain information on a specific invariant torus. In fact, in the case of an integrable system we have a foliation of the space made by these invariant tori and it would be hopeless to expect that they could all be obtained as extremals of the same action functional. In other words, what we did was to add a *weighting term* to our Lagrangian, in order to magnify some motions rather than others.

Is it possible to distinguish these motions in a different way? Let us go back to (5) and (6). The main problem in comparing these two expression was re-

presented by the term $\int_{T\mathbb{T}^n} v\,d\mu$. This can be interpreted as a sort of average rotation vector of orbits in the support of μ. Hence, let us define the *average rotation vector of* μ as:

$$\rho(\mu) := \int_{T\mathbb{T}^n} v\,d\mu \in \mathbb{R}^n.$$

We shall give a more precise definition of it (which is also meaningful on manifolds different from the torus) in subsection 2.4.

Let now μ be an invariant probability measure of Φ^ℓ with rotation vector $\rho(\mu) = \rho(p_0)$. It follows from (6) that:

$$A_\ell(\mu) \geq p_0 \cdot \left(\int_{T\mathbb{T}^n} v\,d\mu \right) - \mathfrak{h}(p_0) = p_0 \cdot \rho(\mu) - \mathfrak{h}(p_0) =$$
$$= p_0 \cdot \rho(p_0) - \mathfrak{h}(p_0) = \ell(\rho(p_0)).$$

Therefore, comparing with (5) we obtain another characterization of μ_0:

FACT 2. – *Every invariant probability measure supported on $\tilde{\Lambda}_{p_0}$ minimizes the action A_ℓ amongst all invariant probability measures of Φ^ℓ with rotation vector $\rho(p_0)$.*

In particular:

$$\tilde{\Lambda}_{p_0} = \bigcup \{\operatorname{supp} \mu : \mu \text{ minimizes } A_\ell \text{ amongst measures with rot. vect. } \rho(p_0)\}. \tag{9}$$

Moreover, there is a relation between the value of the Lagrangian at $\rho(p_0)$ and the minimal action of all invariant probability measures with rotation vector $\rho(p_0)$:

$$\min\{A_\ell(\mu) : \ \mu \text{ is an inv. prob. meas. with rot. vect. } \rho(p_0)\} = \ell(\rho(p_0)). \tag{10}$$

REMARK 2.5. – One could also study directly orbits on these tori and try to show that their action minimizes a modified Lagrangian action, in the same spirit as we already saw for measures. See [40] and Remark 2.17 for more details.

2.4 – *Mather's theory for Tonelli Lagrangian systems*

In this section we would like to discuss Mather's theory for general Tonelli Lagrangians on compact manifolds. We refer the reader to [40] (and references therein) for a more detailed presentation, which include proofs of the main results.

Let $\mathfrak{M}(L)$ be the space of probability measures μ on TM that are invariant under the Euler-Lagrange flow of L and such that $\int_{TM} L\, d\mu < \infty$ (finite action). We shall hereafter assume that $\mathfrak{M}(L)$ is endowed with the *vague topology*, *i.e.*, the weak*-topology induced by the space C^0_ℓ of continuous functions $f : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ having at most linear growth:

$$\sup_{(x,v)\in TM} \frac{|f(x,v)|}{1+\|v\|} < +\infty\,.$$

It is not difficult to check that $\mathfrak{M}(L) \subset \left(C^0_\ell\right)^*$.

In the case of an autonomous Tonelli Lagrangian, it is easy to see that $\mathfrak{M}(L)$ is non-empty. In fact, recall that because of the conservation of the energy $E(x,v) := H \circ \mathcal{L}(x,v) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(x,v),\, v \right\rangle_x - L(x,v)$ along the orbits, each energy level of E is compact (it follows from the superlinearity condition) and invariant under Φ^L_t. It is a classical result in ergodic theory (sometimes called Kryloff-Bogoliouboff theorem) that a flow on a compact metric space has at least an invariant probability measure.

To each $\mu \in \mathfrak{M}(L)$, we may associate its *average action*:

$$A_L(\mu) = \int_{TM} L\, d\mu\,.$$

The action functional $A_L : \mathfrak{M}(L) \longrightarrow \mathbb{R}$ is lower semicontinuous with the vague topology on $\mathfrak{M}(L)$ (this functional might not be necessarily continuous, see [17, Remark 2-3.4]).

In particular, this implies that there exists $\mu \in \mathfrak{M}(L)$, which minimizes A_L over $\mathfrak{M}(L)$.

DEFINITION 2.6. – *A measure $\mu \in \mathfrak{M}(L)$, such that $A_L(\mu) = \min_{\mathfrak{M}(L)} A_L$, is called an action-minimizing measure of L.*

As we have already seen in subsection 2.3, by modifying the Lagrangian (without changing the Euler-Lagrange flow) one can find many other "interesting" measures besides those found by minimizing A_L. A similar idea can be implemented for a general Tonelli Lagrangian. Observe, in fact, that if η is a 1-form on M, we can interpret it as a function on the tangent bundle (linear on each fibre)

$$\begin{aligned} \hat{\eta} : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,v) &\longmapsto \langle \eta(x),\, v\rangle_x \end{aligned}$$

and consider a new Tonelli Lagrangian $L_\eta := L - \hat{\eta}$. The associated Hamiltonian will be given by $H_\eta(x,p) = H(x, \eta(x) + p)$.

Observe that:

i) If η is closed, then L and L_η have the same Euler-Lagrange flow on TM. See [33].
ii) If $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ and $\eta = df$ is an exact 1-form, then $\int \widehat{df}\, d\mu = 0$. Thus, for a fixed L, the minimizing measures will depend only on the de Rham cohomology class $c = [\eta] \in H^1(M;\mathbb{R})$.

Therefore, instead of studying the action minimizing properties of a single Lagrangian, one can consider a family of such "modified" Lagrangians, parameterized over $H^1(M;\mathbb{R})$. Hereafter, for any given $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, we shall denote by η_c a closed 1-form with that cohomology class.

DEFINITION 2.7. – *Let η_c be a closed 1-form of cohomology class c. Then, if $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ minimizes $A_{L_{\eta_c}}$ over $\mathfrak{M}(L)$, we shall say that μ is a c-action minimizing measure (or c-minimal measure, or Mather's measure with cohomology c).*

Compare with Fact 1 in subsection 2.3.

REMARK 2.8. – Observe that the *cohomology class* of an action-minimizing invariant probability measure is not intrinsic in the measure itself nor in the dynamics, but it depends on the specific choice of the Lagrangian L. Changing the Lagrangian $L \longmapsto L - \eta$ by a closed 1-form η, we shall change all the cohomology classes of its action minimizing measures by $-[\eta] \in H^1(M;\mathbb{R})$. Compare also with Remark 2.10 (*ii*).

One can consider the following function on $H^1(M;\mathbb{R})$ (the *minus* sign is introduced for a convention that might probably become clearer later on):

$$\begin{aligned} \alpha : H^1(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto -\min_{\mu\in\mathfrak{M}(L)} A_{L_{\eta_c}}(\mu)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

This function α is well-defined (it does not depend on the choice of the representatives of the cohomology classes) and it is easy to see that it is convex. This is generally known as *Mather's α-function*. We have seen in subsection 2.3 that for an integrable Hamiltonian $H(x,p) = \mathfrak{h}(p)$, $\alpha(c) = \mathfrak{h}(c)$. For this and several other reasons that we shall see later on, this function is sometimes called *effective Hamiltonian*. In particular, it can be proven that $\alpha(c)$ is related to the energy level containing such c-action minimizing measures [16].

We shall denote by $\mathfrak{M}_c(L)$ the subset of c-action minimizing measures:

$$\mathfrak{M}_c := \mathfrak{M}_c(L) = \{\mu \in \mathfrak{M}(L) : \ A_L(\mu) < +\infty \text{ and } A_{L_{\eta_c}}(\mu) = -\alpha(c)\}.$$

We can now define a first important family of invariant sets: the *Mather sets*.

DEFINITION 2.9. – *For a cohomology class $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, we define the Mather set of cohomology class c as:*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c := \bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}_c} \operatorname{supp} \mu \subset TM\,. \tag{12}$$

The projection on the base manifold $\mathcal{M}_c = \pi\left(\widetilde{\mathcal{M}}_c\right) \subseteq M$ is called projected Mather set (with cohomology class c).

Properties of this set:

i) It is non-empty, compact and invariant [33].
ii) It is contained in the energy level corresponding to $\alpha(c)$ [16].
iii) In [33] Mather proved the celebrated *graph theorem*: *let $\pi : TM \longrightarrow M$ denote the canonical projection. Then, $\pi|\widetilde{\mathcal{M}}_c$ is an injective mapping of $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ into M, and its inverse $\pi^{-1} : \mathcal{M}_c \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_c$ is Lipschitz.*

Now, we would like to shift our attention to a related problem. As we have seen in section 2.3, instead of considering different minimizing problems over $\mathfrak{M}(L)$, obtained by modifying the Lagrangian L, one can alternatively try to minimize the Lagrangian L putting some "*constraints*", such as, for instance, fixing the *rotation vector* of the measures. In order to generalize this to Tonelli Lagrangians on compact manifolds, we first need to define what we mean by rotation vector of an invariant measure.

Let $\mu \in \mathfrak{M}(L)$. Thanks to the superlinearity of L, the integral $\int_{TM} \hat{\eta} d\mu$ is well defined and finite for any closed 1-form η on M. Moreover, if η is exact, then this integral is zero, *i.e.*, $\int_{TM} \hat{\eta} d\mu = 0$. Therefore, one can define a linear functional:

$$\begin{aligned} H^1(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto \int_{TM} \hat{\eta} d\mu\,, \end{aligned}$$

where η is any closed 1-form on M with cohomology class c. By duality, there exists $\rho(\mu) \in H_1(M;\mathbb{R})$ such that

$$\int_{TM} \hat{\eta}\, d\mu = \langle c, \rho(\mu) \rangle \qquad \forall\, c \in H^1(M;\mathbb{R})$$

(the bracket on the right-hand side denotes the canonical pairing between cohomology and homology). We call $\rho(\mu)$ the *rotation vector* of μ. This rotation vector is the same as the Schwartzman's asymptotic cycle of μ (see [38] and [20] for more details).

REMARK 2.10. – (*i*) It is possible to provide a more "geometric" interpretation of this. Suppose for the moment that μ is ergodic. Then, it is known that a generic orbit $\gamma(t) := \pi\Phi_t^L(x,v)$, where $\pi : TM \longrightarrow M$ denotes the canonical projection, will return infinitelyf often close (as close as we like) to its initial point $\gamma(0) = x$. We can therefore consider a sequence of times $T_n \to +\infty$ such that $d(\gamma(T_n), x) \to 0$ as $n \to +\infty$, and consider the closed loops σ_n obtained by "closing" $\gamma|[0, T_n]$ with the shortest geodesic connecting $\gamma(T_n)$ to x. Denoting by $[\sigma_n]$ the homology class of this loop, one can verify (see [38]) that $\lim_{n\to\infty} \frac{[\sigma_n]}{T_n} = \rho(\mu)$, independently of the chosen sequence $\{T_n\}_n$. In other words, in the case of ergodic measures, the rotation vector tells us how on average a generic orbit winds around TM. If μ is not ergodic, $\rho(\mu)$ loses this neat geometric meaning, yet it may be interpreted as the average of the rotation vectors of its different ergodic components.

(*ii*) It is clear from the discussion above that the rotation vector of an invariant measure depends only on the dynamics of the system (*i.e.*, the Euler-Lagrange flow) and not on the chosen Lagrangian. Therefore, it does not change when we modify our Lagrangian by adding a closed one form.

Using that the action functional $A_L : \mathfrak{M}(L) \longrightarrow \mathbb{R}$ is lower semicontinuous, one can prove that the map $\rho : \mathfrak{M}(L) \longrightarrow H_1(M;\mathbb{R})$ is continuous and surjective, *i.e.*, for every $h \in H_1(M;\mathbb{R})$ there exists $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ with $A_L(\mu) < \infty$ and $\rho(\mu) = h$ (see [33]).

Following Mather [33], let us consider the minimal value of the average action A_L over the probability measures with rotation vector h. Observe that this minimum is actually achieved because of the lower semicontinuity of A_L and the compactness of $\rho^{-1}(h)$ (ρ is continuous and L superlinear). Let us define

$$\begin{aligned} \beta : H_1(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \min_{\mu\in\mathfrak{M}(L):\,\rho(\mu)=h} A_L(\mu)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

This function β is what is generally known as *Mather's β-function* and it is immediate to check that it is convex. We have seen in subsection 2.3, that if we have an integrable Tonelli Hamiltonian $H(x,p) = \mathfrak{h}(p)$ and the associated Lagrangian $L(x,v) = \ell(v)$, then $\beta(h) = \ell(h)$. For this and several other reasons, this function is sometime called *effective Lagrangian*.

We can now define what we mean by action minimizing measure with a given rotation vector.

DEFINITION 2.11. – *A measure $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ realizing the minimum in* (13), *i.e., such that $A_L(\mu) = \beta(\rho(\mu))$, is called an action minimizing (or minimal, or Mather's) measure with rotation vector $\rho(\mu)$.*

Compare with Fact 2 in subsection 2.3.

We shall denote by $\mathfrak{M}^h(L)$ the subset of action minimizing measures with rotation vector h:

$$\mathfrak{M}^h := \mathfrak{M}^h(L) = \{\mu \in \mathfrak{M}(L) : \ A_L(\mu) < +\infty, \ \rho(\mu) = h \text{ and } A_L(\mu) = \beta(h)\}.$$

This allows us to define another important familty of invariant sets.

DEFINITION 2.12. – *For a homology class (or rotation vector) $h \in H_1(M;\mathbb{R})$, we define the Mather set corresponding to a rotation vector h as*

$$\widetilde{\mathcal{M}}^h := \bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}^h} \operatorname{supp} \mu \subset TM\,, \tag{14}$$

and the projected one as $\mathcal{M}^h = \pi\left(\widetilde{\mathcal{M}}^h\right) \subseteq M$.

Similarly to what we have already seen above, this set satisfies the following properties:

i) It is non-empty, compact and invariant.
ii) It is contained in a given energy level.
iii) It also satisfies the *graph theorem*: *let $\pi : TM \longrightarrow M$ denote the canonical projection. Then, $\pi|\widetilde{\mathcal{M}}^h$ is an injective mapping of $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ into M, and its inverse $\pi^{-1} : \mathcal{M}^h \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^h$ is Lipschitz.*

The above discussion leads to two equivalent formulations of the minimality of a measure μ:

- there exists a homology class $h \in H_1(M;\mathbb{R})$, namely its rotation vector $\rho(\mu)$, such that μ minimizes A_L amongst all measures in $\mathfrak{M}(L)$ with rotation vector h; *i.e.*, $A_L(\mu) = \beta(h)$.
- There exists a cohomology class $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, such that μ minimizes $A_{L_{\eta_c}}$ amongst all probability measures in $\mathfrak{M}(L)$; *i.e.*, $A_{L_{\eta_c}}(\mu) = -\alpha(c)$.

What is the relation between these two different approaches? Are they equivalent, *i.e.*, $\bigcup_{h \in H_1(M;\mathbb{R})} \mathfrak{M}^h = \bigcup_{c \in H^1(M;\mathbb{R})} \mathfrak{M}_c$?

In order to comprehend the relation between these two families of action-minimizing measures, we need to understand better the properties of these functions α and β. Let us start with the following trivial remark.

REMARK 2.13. – As we have seen in subsection 2.3, if we have an integrable Tonelli Hamiltonian $H(x,p) = \mathfrak{h}(p)$ and the associated Lagrangian $L(x,v) = \ell(v)$, then $\alpha(c) = \mathfrak{h}(c)$ and $\beta(h) = \ell(h)$. In this case, the cotangent bundle $T^*\mathbb{T}^n$ is foliated by invariant tori $\mathcal{T}^*_c := \mathbb{T}^n \times \{c\}$ and the tangent bundle $T\mathbb{T}^n$ by invariant tori $\widetilde{\mathcal{T}}^h := \mathbb{T}^n \times \{h\}$. In particular, we proved that

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{T}^*_c) = \widetilde{\mathcal{T}}^h = \widetilde{\mathcal{M}}^h,$$

where $\mathcal{L}$ denotes the Legendre transform and h and c are such that $h = \nabla\mathfrak{h}(c) = \nabla\alpha(c)$ and $c = \nabla\ell(h) = \nabla\beta(h)$.

We would like to investigate whether a similar relation holds or does not hold in the general case. Of course, one main difficulty is that in general the *effective Hamiltonian* α and the *effective Lagrangian* β, although being convex and superlinear, are not necessarily differentiable.

Before stating the main relation between these two functions, let us recall some definitions and results from classical convex analysis (see [37]). Given a convex function $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on a finite dimensional vector space V, one can consider a *dual* (or *conjugate*) function defined on the dual space V^*, via the so-called *Fenchel transform*: $\varphi^*(p) := \sup_{v\in V} \big(p \cdot v - \varphi(v)\big)$.

PROPOSITION 2.14. – *α and β are convex conjugate, i.e., $\alpha^* = \beta$ and $\beta^* = \alpha$. In particular, it follows that α and β have superlinear growth.*

Next proposition will allow us to clearify the relation (and duality) between the two minimizing procedures above. To state it, recall that, like any convex function on a finite-dimensional space, β admits a subderivative at each point $h \in H_1(M;\mathbb{R})$, *i.e.*, we can find $c \in H^1(M;\mathbb{R})$ such that

$$\forall h' \in H_1(M;\mathbb{R}), \quad \beta(h') - \beta(h) \geq \langle c, h' - h\rangle. \tag{15}$$

As it is usually done, we shall denote by $\partial\beta(h)$ the set of $c \in H^1(M;\mathbb{R})$ that are subderivatives of β at h, *i.e.*, the set of c which satisfy the inequality above. Similarly, we shall denote by $\partial\alpha(c)$ the set of subderivatives of α at c.

Fenchel's duality implies an easier characterization of subdifferentials: $c \in \partial\beta(h)$ *if and only if* $\langle c, h\rangle = \alpha(c) + \beta(h)$ (similarly for $h \in \partial\alpha$).

We can now prove that what was observed in Remark 2.13 continues to hold in the general case.

PROPOSITION 2.15. – *Let $\mu \in \mathfrak{M}(L)$ be an invariant probability measure. Then:*

(i) *$A_L(\mu) = \beta(\rho(\mu))$ if and only if there exists $c \in H^1(M;\mathbb{R})$ such that μ minimizes $A_{L_{\eta_c}}$ (i.e., $A_{L_{\eta_c}}(\mu) = -\alpha(c)$).*

(ii) *If μ satisfies $A_L(\mu) = \beta(\rho(\mu))$ and $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, then μ minimizes $A_{L_{\eta_c}}$ if and only if $c \in \partial\beta(\rho(\mu))$ (or equivalently $\langle c, h\rangle = \alpha(c) + \beta(\rho(\mu))$).*

REMARK 2.16. – (*i*) It follows from the above proposition that both minimizing procedures lead to the same sets of invariant probability measures:

$$\bigcup_{h\in H_1(M;\mathbb{R})} \mathfrak{M}^h = \bigcup_{c\in H^1(M;\mathbb{R})} \mathfrak{M}_c\,.$$

In other words, minimizing over the set of invariant measures with a fixed rotation vector or minimizing – globally – the modified Lagrangian (corresponding to a certain cohomology class) are dual problems, as the ones that often appear in linear programming and optimization.

(*ii*) In particular, we have the following inclusions between Mather sets:

$$c \in \partial\beta(h) \iff h \in \partial\alpha(c) \iff \widetilde{\mathcal{M}}^h \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_c\,.$$

Moreover, for any $c \in H^1(M;\mathbb{R})$:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c = \bigcup_{h\in\partial\alpha(c)} \widetilde{\mathcal{M}}^h\,. \tag{16}$$

REMARK 2.17. – (*i*) In the above discussion we have only discussed properties of invariant probability measures associated to the system. Actually, one could study directly orbits of the systems and look for orbits that *globally minimize* the action of a modified Lagrangian (in the same spirit as before). This would lead to the definition of two other families of invariant compact sets, the *Aubry sets* $\widetilde{\mathcal{A}}_c$ and the *Mañé sets* $\widetilde{\mathcal{N}}_c$, which is also parameterized by $H^1(M;\mathbb{R})$ (the parameter which describes the modification of the Lagrangian, exactly in the same way as before). For a given $c \in H^1(M;\mathbb{R})$, these sets contain the Mather set $\widetilde{\mathcal{M}}_c$, and this inclusion may be strict. In fact, while the motion on the Mather sets is *recurrent* (it is the union of the supports of invariant probability measures), the Aubry and the Mañé sets may contain non-recurrent orbits as well.

(*ii*) Differently from what happens with invariant probability measures, it will not be always possible to find *action-minimizing orbits* for any given rotation vector (not even possible define a rotation vector for every action minimizing orbit). For instance, an example due to Hedlund [21] provides the existence of a Riemannian metric on a three-dimensional torus, for which minimal geodesics exist only in three directions. This can be extended to any dimension larger than three.

3. – Weak Liouville-Arnol'd theorem and its implications

In this section we would like to discuss the main results stated in Section 1.1. Roughly speaking, the main idea behind our approach consists in studying how the existence of independent integrals of motion of a Tonelli Hamiltonian H relates to the structure and "size" of its Mather sets. Moreover, using the *symplectic invariance* of these sets, one is be able to recover the involution hypothesis at least *locally*. Hereafter we shall mainly work in the Hamiltonian setting. Let us denote by $\mathcal{M}_c^*$ the corresponding Mather set in the cotangent bundle, *i.e.*, $\mathcal{M}_c^* = \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{M}}_c)$, where $\mathcal{L}$ denotes the Fenchel-Legendre transform.

The key properties that we use, can be summarized as follows:

P1 - the Mather sets are invariant under the flow of any integral of motion of H;

P2 - the existence of k independent integrals of motion implies that the "size" of each Mather set is bigger or equal than k (in a sense that will be explained below);

P3 - the integrals of motion are locally in involution on the Mather sets.

Let us discuss these properties more in details.

P1 - Symplectic invariance of Mather sets. In [39] I proved the following result:

PROPOSITION 3.1. – *Let H be a Tonelli Hamiltonian on T^*M and F an integral of motion of H. Let us denote by Φ_H and Φ_F the respective flows. Then, the following holds:*

(i) *If μ is a c-action minimizing measure of H, then $\Phi^t_{F\,*}\mu$ is still a c-action minimizing measure of H, for each $t \in \mathbb{R}$, where the lower $*$ denotes the push-forward of the measure.*

(ii) *The Mather set $\mathcal{M}^*_c$ is invariant under the action of Φ^t_F, for each $t \in \mathbb{R}$ and for each $c \in H^1(M;\mathbb{R})$. In particular, for each $t \in \mathbb{R}$, Φ^t_F maps each connected component of $\mathcal{M}^*_c$ into itself.*

REMARK 3.2. – It is worthwhile to point out that this result can be also deduced from a result by Patrick Bernard [9, Theorem in Section 1.10, page 6] on the symplectic invariance of the Mather and Aubry sets. In fact for any fixed time t the Hamiltonian flow Φ^t_F is an exact symplectomorphism that preserves H.

Another related result is contained in [24], where the author considers the action of symmetries of the Hamiltonian, *i.e.,* C^1-diffeomorphisms of M that preserve H. One can deduce from the results therein that the Mather and Aubry sets of H are invariant under the action of the connected component of the identity in the group of such diffeomorphisms. From our point of view, these diffeomorphisms correspond to integrals of motion depending only on the x-variables.

P2 - Independent Integrals of motion and size of the Mather sets. As recalled in Section 1.1, Liouville-Arnol'd theorem is concerned with *independent* integrals of motion, *i.e.,* integrals of motion whose differentials are linearly independent, as vectors, at each point. Let us see how the existence of independent integrals of motion relates to the "size" of the Mather of H. In order to make clear what we mean by "size" of these sets, let us introduce some notion of tangent space. We shall call *generalized tangent space* to $\mathcal{M}^*_c$ at a point (x, p), the

set of all vectors that are tangent to curves in $\mathcal{M}_c^*$ at (x,p). We shall denote it by $T_{(x,p)}\mathcal{M}_c^*$ and we shall define its *rank* to be the largest number of linearly independent vectors that it contains. In particular, if the Mather set does not contain any fixed point (*i.e.*, $dH(x,p) \neq 0$ for all $(x,p) \in \mathcal{M}_c^*$), then rank $T_{(x,p)}\mathcal{M}_c^* \geq 1$; in fact, since these sets are invariant, the Hamiltonian vector field $X_H(x,p) \neq 0$ is tangent to them.

PROPOSITION 3.3. – *Let H be a Tonelli Hamiltonian on T^*M and suppose that there exist k independent integrals of motion. Then,* rank $T_{(x,p)}\mathcal{M}_c^* \geq k$ *at all points $(x,p) \in \mathcal{M}_c^*$ for each $c \in H^1(M;\mathbb{R})$.*

The proof of this result follows easily from Proposition 3.1. More specifically, it follows from the fact that $\mathcal{M}_c^*$ is invariant under the flows of the k independent integrals of motion. The linear independence of the corresponding vector fields (which are therefore tangent to this set) follows from the independence of the integrals of motion and the non-degeneracy of the symplectic form ω.

In particular, the existence of the maximum possible number of integrals of motion (*i.e.*, $k = n$) implies that these sets are invariant smooth Lagrangian graphs (see [39, Remark 3.5 and Lemmata 3.4 & 3.6]).

COROLLARY 3.4. – *Let H be a weakly integrable Tonelli Hamiltonian on T^*M. Then, for each $c \in H^1(M;\mathbb{R})$ such that $\mathcal{M}_c^* \subset \mathrm{reg}(F)$, then we have that $\mathcal{M}_c^*$ projects over the whole M and therefore it is an invariant Lipschitz Lagrangian graph.*

In particular, smoothness is a consequence of the fact that these graphs lie in level sets of the integral map, which is non-degenerate (see [39, Lemma 3.6]).

P3 - Local involution of the Mather sets. The most important peculiarity of these action-minimizing sets, firstly observed in [39], is that they force the integrals of motion to Poisson-commute on them. In fact, one can recover the involution property of the integrals of motion, at least locally (see [39, Proposition 27] for a detailed proof).

PROPOSITION 3.5. – *Let H be a Tonelli Hamiltonian on T^*M and let F_1 and F_2 be two integrals of motion. Then for each $c \in H^1(M;\mathbb{R})$ we have that $\{F_1, F_2\}(x, \hat{\pi}_c^{-1}(x)) = 0$ for all $x \in \overline{\mathrm{Int}(\mathcal{M}_c)}$, where $\hat{\pi}_c = \pi|\mathcal{M}_c^*$ and $\mathcal{M}_c = \pi(\mathcal{M}_c^*)$.*

REMARK 3.6. – Observe that the above set $\overline{\mathrm{Int}(\mathcal{M}_c)}$ may be empty. What the proposition says is that whenever it is non-empty, the integrals of motion are forced to Poisson-commute on it. In the cases that we shall be considering hereafter, $\mathcal{M}_c = M$ – since it corresponds to the projection of a Lagrangian graph – and therefore it is not empty.

Sketch of the proof of Theorem 1.4 (Weak Liouville-Arnol'd Theorem). *i*) The existence of these smooth Lagrangian graphs follows from Corollary 3.4. In fact, since $\mathcal{M}_c^*$ is contained in the set of regular points of F, it follows that the Mather set $\mathcal{M}_c^*$ is a C^1 invariant Lagrangian graph Λ_c of cohomology class c. Therefore, Λ_c supports an invariant probability measure of full support. Using upper semi-continuity([8]) of the Mather sets to deduce that the Mather sets corresponding to nearby cohomology classes must also lie in reg F. Hence, there exists an open neighbourhood $\mathcal{O}$ of c in $H^1(M;\mathbb{R})$ such that $\mathcal{M}_{c'}^* \subset \operatorname{reg} F$ for all $c' \in \mathcal{O}$ and applying the same arguments as above, we can conclude that each $\mathcal{M}_{c'}^*$ is a smooth invariant Lagrangian graph of cohomology class c'.

For the proof of the fact that such Lagrangian graphs admits the structure of a smooth $\mathbb{T}^d$-bundle over a parallelisable base B^{n-d}, for some $d > 0$, we refer the reader to [14, Proposition 2.7].

ii) It follows from above that these $\Lambda_{c'} = \mathcal{M}_{c'}^*$, therefore they coincide with the union of supports of invariant probability measures. The fact that these measures have all the same rotation vector and that the orbits in their supports are conjugate by a smooth diffeomorphism isotopic to the identity, is discussed in [14, Remark 3.1].

iii) We know from (*ii*) that these graphs are Schwartzman uniquely ergodic, *i.e.*, all invariant probability measures on $\Lambda_{c'}$ have the same rotation vector $h_{c'} \in H_1(M;\mathbb{R})$. The differentiability of α follows then from [20, Corollary 3.6]. The differentiability of β follows the disjointness of these graphs (see for instance [20, Theorem 3.3] or [40, Remark 4.26 (ii)]).

Now we discuss whether or not there are cases in which this weaker notion of integrability is equivalent to the classical one (in the sense of Liouville). As remarked in Section 1.1, the union of these Lagrangian graphs is not necessarily a foliation of the whole phase space. In fact, if the dimension of $H^1(M;\mathbb{R})$ is less than the dimension of M, this family of graphs is not sufficient to foliate T^*M or even to have non-empty interior (for instance, think about the case in which $H^1(M;\mathbb{R})$ is trivial). What we prove in Theorem 1.6 is that when this obstacle is removed, then the two notions coincide.

Sketch of the proof of Theorem 1.6. Let us denote $\Lambda_{c'} = \{(x, \lambda_{c'}(x)) : x \in M\}$ as usual. Observe that the map:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{O} \times M &\longrightarrow T^*M \\ (c', x) &\longmapsto \lambda_{c'}(x) \end{aligned}$$

([8]) Upper semicontinuity of the Mather sets does not hold in general. However, in this case it does, since it coincides with a Lipschitz Lagrangian graph (see for instance [3, Proposition 13]).

is continuous (see [14, proof of Theorem 1.2 (iii)]). If $\dim H^1(M;\mathbb{R}) \geq \dim M$, then the continuity of Ψ implies that these Lagrangian graphs $\Lambda_{c'}$ foliate an open neighbourhood of Λ_c. It follows from Proposition 3.5 that the components of F commute in this open region. Therefore, each $\Lambda_{c'}$ is an n-dimensional manifold which is invariant under the action of n commuting vector fields, which are linearly independent at each point. It is a classical result that $\Lambda_{c'}$ must be then diffeomorphic to an n-dimensional torus and that the motion on it is conjugate to a rotation (see for instance [5]).

4. – Minimal average action and Integrability

In Section 2.4 we have introduced the *minimal average action(s)*, namely the so-called Mather's α and β functions:

$$\alpha : H^1(M;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \beta : H_1(M;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

defined respectively in (11) and (13).

In Section 2 (more specifically in subsections 2.3 and 2.4) we have discussed the following results, which relate the differentiability of these functions (or lack thereof) to properties of the Mather sets:

i) if we have an integrable Tonelli Hamiltonian $H(x,p) = \mathfrak{h}(p)$ and the associated Lagrangian $L(x,v) = \ell(v)$, then $\alpha(c) = \mathfrak{h}(c)$ and $\beta(h) = \ell(h)$. In particular, we proved that

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c = \widetilde{\mathcal{M}}^h,$$

where h and c are such that $h = \nabla\alpha(c)$ and $c = \nabla\beta(h)$. See Remark 2.13.

ii) We have the following inclusions between Mather sets:

$$c \in \partial\beta(h) \iff h \in \partial\alpha(c) \iff \widetilde{\mathcal{M}}^h \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_c\,.$$

iii) For any $c \in H^1(M;\mathbb{R})$:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c = \bigcup_{h\in\partial\alpha(c)} \widetilde{\mathcal{M}}^h\,.$$

See Remark 2.16.

In particular, we can deduce immediately that:

- lack of differentiability of α at $c \Longrightarrow$ the Mather set $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ contains action-minimizing measures with different rotation vectors.
- lack of differentiability of β at $h \Longrightarrow$ two Mather sets $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ and $\widetilde{\mathcal{M}}_{c'}$ have non-trivial intersection (they must both contain $\widetilde{\mathcal{M}}^h$).

Hence, a necessary condition for the system to be completely integrable, is that α and β are C^1. One can weaken the assumption on the complete integrability of the system and consider C^0-*integrable systems* (this notion has been first introduced by Marie-Claude Arnaud in [2]):

DEFINITION 4.1. – *A Tonelli Hamiltonian $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ is said to be C^0-integrable, if there exists a foliation of T^*M made by invariant Lipschitz Lagrangian graphs, one for each cohomology class.*

REMARK 4.2. – (*i*) Let M be a compact manifold of any dimension, $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ a Tonelli Lagrangian and $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ the associated Hamiltonian. If H is C^0-integrable, then β is C^1. See [28, Lemma 5].

(*ii*) As we proved in Theorem 1.4 (iii), the notion of weak integrability also implies the differentiability of β and α in an open set.

(*iii*) The notion of C^0-integrability is conceptually weaker than the notions of Liouville integrability and Weak integrability. It is an open problem whether there exist systems that are C^0 integrable, but not Liouville integrable or weakly integrable.

These observations raise the following question, which is the starting point of the work in [28]: *is the converse true?* Namely, *is true that if β is C^1 then the system is C^0-integrable?*

The question stated in this form has clearly a negative answer. Examples of Lagrangians admitting a smooth β-function, but not integrable, are easy to construct:

- trivially, if the base manifold M is such that $\dim H_1(M;\mathbb{R}) = 0$ then β is a function defined on a single-point set and it is therefore smooth.
- if $\dim H_1(M;\mathbb{R}) = 1$ then a result by Carneiro [16] (namely, β is always differentiable in the radial direction, see Lemma 4.5) allows one to conclude that β is differentiable everywhere, except possibly at the origin.

Therefore, one should rephrase the question in the following way:

QUESTION. – *With the exception of the mentioned trivial cases (i.e, when $\dim H_1(M;\mathbb{R}) \leq 1$), does the regularity of β imply the integrability of the system?*

In [28] we addressed this question in the case of closed surfaces, not necessarily orientable (in this latter case, one considers the lifted Lagrangian to the orientable double cover).

Let us start by recalling some terminology:

- a homology class h is said to be k-irrational, if k is the dimension of the smallest subspace of $H_1(M;\mathbb{R})$ generated by integer classes and containing

h. In particular, 1-*irrational* means "on a line with rational slope", while *completely irrational* stands for "$\dim H_1(M;\mathbb{R})$-irrational".

- A homology h is said to be *singular* if its Legendre transform $\partial\beta(h)$ is a *singular flat*, *i.e.*, its Mather set $\widetilde{\mathcal{M}}(\partial\beta(h))$ contains fixed points. Observe that the set of singular classes, unless it is empty, contains the zero class and is compact.
- For $h \in H_1(M;\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, we define the *maximal radial flat* R_h of β containing h as the largest subset of the half-line $\{th : t \in [0,+\infty)\}$ containing h (not necessarily in its relative interior) in restriction to which β is affine.

In [27] Daniel Massart proved the following result.

THEOREM 4.3 (Massart [27, Theorem 3]). – *Let M be a closed surface and L be an autonomous Tonelli Lagrangian on TM. If h is a 1-irrational, nonsingular homology class, then $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ is a union of periodic orbits.*

REMARK 4.4. – This results does not hold anymore in dimension greater than two.

4.1 – *Differentiability of Mather's β-function on closed surfaces*

Let us now discuss some differentiability properties of Mather's β–function at 1-irrational homology classes. These will play a crucial role in the proof of the main results stated in subsection 1.2. First let us get the Klein bottle case out of the way. We shall use the following lemma from [16]:

LEMMA 4.5. – *If L is an autonomous Tonelli Lagrangian on a closed manifold M, then at every $h \in H_1(M;\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, β is differentiable in the radial direction, that is, the map*

$$\begin{array}{rcl} B_h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \beta(th) \end{array}$$

is C^1 on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

COROLLARY 4.6. – *If L is an autonomous Tonelli Lagrangian on the Klein bottle, then β is C^1, except possibly at 0.*

PROOF. – The first Betti number of the Klein bottle is one, that is, there exists $h_0 \in H_1(\mathbb{K};\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ such that for all $h \in H_1(\mathbb{K};\mathbb{R})$, there exists $t \in \mathbb{R}$ such that $h = th_0$. Then, we use Lemma 4.5. □

The meaning of the next theorem is that for an autonomous Lagrangian on a closed surface, at a 1-irrational, non-singular homology class, β is differentiable only in the directions where it is flat, and in the radial direction. Indeed, in the statement below, $\mathcal{V}(h_0)$ may be viewed as a measure of the non-differentiability of β at h_0, while $\partial\alpha(c_0)$ is the largest flat containing h_0 in its relative interior. See [28, Theorem 2] for a complete proof.

THEOREM 4.7. – *Let M be a closed surface and L an autonomous Tonelli Lagrangian on TM. If:*

- *h_0 is a 1-irrational, non-singular homology class,*
- *$(\gamma_i, \dot\gamma_i)_{i\in I}$ are the periodic orbits which comprise the supports of all action-minimizing measures with rotation vectors th, for all th in R_{h_0},*
- *c_0 is a cohomology class in the relative interior of $\partial\beta(h_0)$,*
- *$\mathcal{V}(h_0)$ is the vector subspace of $H^1(M;\mathbb{R})$ generated by the differences $c_1 - c_2$, where c_1, c_2 are elements of $\partial\beta(h_0)$,*

then we have:

- *either*
$$\mathcal{V}(h_0) = \partial\alpha(c_0)^\perp = \bigcap_{i\in J} h_i^\perp$$
where orthogonality is meant with respect to the duality between $H_1(M;\mathbb{R})$ and $H^1(M;\mathbb{R})$
- *or $M = \mathbb{T}^2$ and the closed curves γ_i, $i \in I$, foliate M; in this case $\mathcal{V}(h_0) = \{0\}$.*

From Theorem 4.7 we deduce that when M is oriented, β is never differentiable at any 1-irrational, non-singular homology class, unless $M = \mathbb{T}^2$ and M is foliated by periodic orbits. This proves Theorem 1.8 (i) (orientable case).

REMARK 4.8. – When M is not orientable, the situation is different because β may have flats of maximal dimension (that is, of dimension equal to the first Betti number of M). So β may well be differentiable at some 1-irrational, non-singular homology class. For instance, by [7, Theorem 1.3], there exists a Riemannian metric on M, whose stable norm has a (finite) polyhedron as its unit ball. Let L be the Lagrangian induced by this Riemannian metric, then the β-function of L is half the square of the stable norm. In particular β is differentiable everywhere but along a finite number of straight lines. So β is differentiable at most 1-irrational classes. Furthermore, since the Lagrangian is a Riemannian metric:

- no homology class other than zero is singular
- the β-function is quadratic (*i.e.*, 2-homogeneous) so radial faces are trivial, *i.e.*, $\forall h,\ R_h = \{h\}$.

On the other hand, for every homology class the Mather set is a finite union of closed geodesics, so its projection can never be the whole manifold M.

In the non-orientable case, in general, all we have is the following.

PROPOSITION 4.9. – *Let M be a closed, non-orientable surface other than the projective plane or the Klein bottle, and let $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ be a Tonelli Lagrangian. Then, there exists some homology class h such that β is not differentiable at h.*

See [28, Corollary 2]. This proves Theorem 1.8 (i) (non-orientable case).

4.2 – C^0–*Integrability on closed surfaces*

As defined in Definition 4.1, recall that a Tonelli Hamiltonian $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ is said to be C^0-integrable, if there exists a foliation of T^*M made by invariant Lipschitz Lagrangian graphs, one for each cohomology class.

In [28, Proposition 4], we proved the following result.

PROPOSITION 4.10. – *The torus is the only closed surface which admits a C^0-integrable Hamiltonian.*

Observe that this proves Theorem 1.8 (ii).

IDEAS OF THE PROOF.

- First, no Hamiltonian on the sphere can be C^0-integrable. Indeed, any Lagrangian graph is exact since the sphere is simply connected, and any two exact Lagrangian graphs intersect, because any C^1 function on the sphere has critical points.
- Likewise, no Hamiltonian on the projective plane can be C^0-integrable, otherwise its lift to the sphere would be C^0-integrable.
- Let $\mathbb{K}$ denote the Klein bottle. For each $x \in \mathbb{K}$, let us define

$$\begin{aligned} F_x : H^1(\mathbb{K};\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} &\longrightarrow T^*_x\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}^2 \\ c &\longmapsto \Lambda_c \cap T^*_x\mathbb{K}, \end{aligned}$$

  where Λ_c, for $c \in H^1(\mathbb{K};\mathbb{R})$, are the Lagrangian graphs foliating $T^*\mathbb{K}$. It is possible to check that F_x is continuous (see [2, Lemme 4.22]) and injective (as it follows from the disjointness of the Λ_c's). Moreover, if the Hamiltonian is C^0-integrable, the map F_x is surjective. Now there is no such thing as a continuous bijection from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}^2$, so there is no C^0-integrable Hamiltonian on the Klein bottle.
- The same argument can be used for any surface with first Betti number > 2.

- Finally, no Hamiltonian on the connected sum of three projective planes can be C^0-integrable, otherwise it would lift to a C^0-integrable Hamiltonian on a surface of genus two.

□

Finally, we can prove the part (iii) of Theorem 1.8.

THEOREM 4.11. – *Let $L : T\mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ be a Tonelli Lagrangian on the two-torus. Then, β is C^1 if and only if the system is C^0-integrable.*

SKETCH OF THE PROOF.(9) – [$\Longleftarrow$] See Remark 4.2 (*i*). [$\Longrightarrow$] For each homology class h, let us denote by $c_h := \partial\beta(h)$. If h is non-singular and 1-irrational, then Theorem 4.7 says that $\Lambda_{c_h} := \mathcal{M}^*_{c_h}$ is an invariant Lipschitz Lagrangian graph of cohomology class c_h, which is foliated by periodic orbits of homology h and same minimal period T_h. Since the dynamics on these Lipschitz Lagrangian graph is totally periodic, *i.e.*, $\Phi^H_{T_h}\big|\Lambda_{c_h} = \mathrm{Id}\big|\Lambda_{c_h}$, then it follows from the result in [2] (see for instance the proof of Théorème 4) that this graph is in fact C^1.

One can show that such cohomology classes c_h are dense in $H^1(\mathbb{T}^2;\mathbb{R})$. Using the semicontinuity of these action-minimizing sets, we can deduce that for each $c \in H^1(\mathbb{T}^2;\mathbb{R})$ there exists an invariant Lipschitz Lagrangian graph with cohomology class c, which we denote Λ_c. Observe that all these Λ_c's are disjoint (it is a straightforward consequence of the differentiability of β). For each $x_0 \in \mathbb{T}^2$, let us define

$$\begin{aligned} F_{x_0} : H^1(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow T^*_{x_0}\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \\ c &\longmapsto \Lambda_c \cap T^*_{x_0}\mathbb{T}^2. \end{aligned} \tag{17}$$

This map is injective (as it follows from the disjointness of the Λ_c's). Moreover, one can also prove that F_{x_0} is also continuous. Therefore, we can conclude that $F_{x_0}(\mathbb{R}^2)$ is open (see for instance [10]). In a similar way one can show that this image is also closed and hence that it is all of $\mathbb{R}^2$. Since this holds for all $x_0 \in \mathbb{T}^2$, we can conclude that $\bigcup_c \Lambda_c = T^*\mathbb{T}^2$, that is, the system is C^0-integrable. □

Summarizing, the proof of Theorem 1.8 is:

- the orientable case of (*i*) follows from Theorem 4.7 and the non-orientable one from Proposition 4.9;
- (*ii*) follows from Proposition 4.10;
- (*iii*) follows from Theorem 4.11.

Observe that in [28] we were able to deduce more information about the dynamics of a C^0-integrable system (see also [28, Corollary 3] and [2]).

(9) See [28, Theorem 3] for a complete proof.

COROLLARY 4.12. – *Let $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ be a C^0-integrable Hamiltonian on a two-dimensional closed manifold M. Then, M is diffeomorphic to $\mathbb{T}^2$. Moreover:*

(i) *for each 1-irrational homology class h, there exists an invariant Lagrangian graph foliated by periodic orbits with homology h and the same minimal period;*

(ii) *for each completely irrational homology class, there exists an invariant Lagrangian graph on which the motion is conjugate to an irrational rotation on the torus or to a Denjoy type homeomorphism;*

(iii) *there exists a dense G_δ set of (co)homology classes, for which the motion on the corresponding invariant torus is conjugate to a rotation;*

(iv) *as for the 0-homology class, there exists a C^1 invariant torus $\Lambda_{c(0)} = \left\{ \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,0) \right) : x \in \mathbb{T}^2 \right\}$ consisting of fixed points.*

The above results proves the C^0–integrable systems. An open question is if the differentiability of Mather's β function implies stronger properties, for example the integrability in the sense of Liouville. In the case of mechanical systems we can bridge this gap, using Burago and Ivanov's theorem on metrics without conjugate points [11]. Recall that a mechanical Lagrangian is $L(x,v) = 1/2\, g_x(v,v) + f(x)$, where g is a Riemannian metric and f is a C^2 function on $\mathbb{T}^2$ (see also subsection 2.2).

PROPOSITION 1.11. – *Let L be a mechanical Lagrangian on a 2-dimensional torus, whose β-function is C^1. Then the potential f is identically constant and the metric g is flat. In particular, L is integrable in the sense of Liouville.*

SKETCH OF THE PROOF.([10]) – In the mechanical case, the only fixed points of the Euler-Lagrange flow are the critical points of the potential f, and the only minimizing fixed points are the minima of f. Hence, if f is not constant, then the Lagrangian cannot be C^0-integrable (see Corollary 4.12 (iv)). Furthermore, since the Lagrangian is C^0-integrable, every orbit is minimizing, in particular, it can be proven that there are no conjugate points. So by Burago and Ivanov's proof of the Hopf Conjecture [11], the metric g is flat. This completes the proof.

Acknowledgements. The author is grateful to *Unione Matematica Italiana* (UMI) for the invitation to deliver this talk at *XIX Congresso dell'UMI* (session on *Nonlinear Analysis and dynamical systems*), held in Bologna (Italy) from 12th to 17th September 2011.

([10]) See [28, Proposition 6] for a complete proof.

REFERENCES

[1] IAN AGOL, *Criteria for virtual fibering*. J. Topol., **2** (1) (2008), 269-284.

[2] MARIE-CLAUDE ARNAUD, *Fibrés de Green et régularité des graphes C^0-Lagrangiens invariants par un flot de Tonelli*. Ann. Henri Poincaré, **9** (5) (2008), 881-926.

[3] MARIE-CLAUDE ARNAUD, *The tiered Aubry set for autonomous Lagrangian functions*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **58** (5) (2008), 1733-1759.

[4] VLADIMIR I. ARNOL'D, *Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian*. Uspehi Mat. Nauk, **18** (5) (1963), 13-40.

[5] VLADIMIR I. ARNOL'D, *Mathematical methods of classical mechanics* Graduate Texts in Mathematics, **60** (Springer-Verlag, New York, 1989).

[6] SERGE AUBRY - P. Y. LE DAERON, *The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions. I. Exact results for the ground-states*. Phys. D, 8 (3) (1983), 381-422.

[7] FLORENT BALACHEFF - DANIEL MASSART, *Stable norms of non-orientable surfaces*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58**, no. 4 (2008), 1337-1369.

[8] VICTOR BANGERT, *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*. Dyn. Rep. **1** (1988), 1-56.

[9] PATRICK BERNARD, *Symplectic aspects of Mather theory*. Duke Math. J., **136** (3) (2007), 401-420.

[10] LUITZEN E. J. BROUWER, *Zur invarianz des n-dimensionalen Gebiets*. Math. Ann., **72** (1) (1912), 55-56.

[11] DMITRI BURAGO - SERGEY IVANOV, *Riemannian tori without conjugate points are flat*. Geom. Funct. Anal, **4**, no. 3 (1994), 259-269.

[12] LEO T. BUTLER - GABRIEL P. PATERNAIN, *Collective geodesic flows*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **53** (1) (2003), 265-308.

[13] LEO T. BUTLER, *A weak Liouville-Arnol'd Theorem*. Talk at University of Pittsburgh, January 2011.

[14] LEO T. BUTLER - ALFONSO SORRENTINO, *Weak Liouville-Arnol'd Theorems and their implications*. Comm. Math. Phys., **315** (1) (2012), 109-133.

[15] CONSTANTIN CARATHEODORY, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichung erster Ordnung*. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner, 1935.

[16] MARIO J. DIAS CARNEIRO, *On minimizing measures of the action of autonomous Lagrangians*. Nonlinearity, 8 (6) (1995), 1077-1085.

[17] GONZALO CONTRERAS - RENATO ITURRIAGA, *Global minimizers of autonomous Lagrangians*. Preprint, 1999.

[18] NATHAN M. DUNFIELD - WILLIAM P. THURSTON, *The virtual Haken conjecture: experiments and examples*. Geom. Topol., **7** (2003), 399-441.

[19] ALBERT FATHI, *The Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics*. Cambridge University Press (to appear).

[20] ALBERT FATHI - ALESSANDRO GIULIANI - ALFONSO SORRENTINO, *Uniqueness of Invariant Lagrangian graphs in a homology or a cohomology class*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., Vol VIII (4) (2009), 659-680.

[21] GUSTAV A. HEDLUND, *Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients*. Ann. of Math. (2), **33** (4) (1932), 719-739.

[22] JOHN HEMPEL, *Homology of coverings*. Pacific J. Math., **112** (1) (1984), 83-113.

[23] ANDREY N. KOLMOGOROV, *On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function*. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), **98** (1954), 572-530.

[24] EZEQUIEL MADERNA, *Invariance of global solutions of Hamilton-Jacobi equation*. Bull. Soc. Math. France, **130** (4) (2002), 493-506.

[25] RICARDO MAÑÉ, *On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems*. Nonlinearity, **5** (3) (1992), 623-638.
[26] RICARDO MAÑÉ, *Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), **28** (2) (1997), 141-153.
[27] DANIEL MASSART, *Aubry sets vs Mather sets in two degrees of freedom*. Calculus of Variations and PDE, no. 3-4 (2011), 429-460.
[28] DANIEL MASSART - ALFONSO SORRENTINO, *Differentiability of Mather's average action and integrability on closed surfaces*. Nonlinearity, **24** (2011), 1777-1793.
[29] JOHN N. MATHER, *Existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*. Topology, **21** (4) (1982), 457-467.
[30] JOHN N. MATHER, *A criterion for the nonexistence of invariant circles*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **63** (1986), 153-204.
[31] JOHN N. MATHER - GIOVANNI FORNI, *Action minimizing orbits in Hamiltonian systems*. Transition to chaos in classical and quantum mechanics. Lectures given at the 3rd session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Montecatini Terme, Italy, July 6-13, 1991. Berlin: Springer-Verlag. Lect. Notes Math. 1589, 92-186, 1994.
[32] JOHN N. MATHER, *Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms*. J. Amer. Math. Soc., **4** (2) (1991), 207-263.
[33] JOHN N. MATHER, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*. Math. Z., **207** (2) (1991), 169-207.
[34] JOHN N. MATHER, *Variational construction of connecting orbits*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **43** (5) (1993), 1349-1386.
[35] JOHN N. MATHER, *Order structure on action minimizing orbits*. Symplectic topology and measure preserving dynamical systems. Papers of the AMS-IMS-SIAM joint summer research conference, Snowbird, UT, USA, July 1-5, 2007. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Contemporary Mathematics 512, 41-125, 2010.
[36] JÜRGEN MOSER, *Convergent series expansions for quasi-periodic motions*. Math. Ann., **169** (1967), 136-176.
[37] R. TYRELL ROCKAFELLAR, *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press (1970), xviii+451.
[38] SOL SCHWARTZMAN, *Asymptotic cycles*. Ann. of Math. (2), **66** (1957), 270-284.
[39] ALFONSO SORRENTINO, *On the integrability of Tonelli Hamiltonians*. Trans. Amer. Math. Soc., **363** (10) (2011), 5071-5089.
[40] ALFONSO SORRENTINO, *Lecture Notes on Mather's theory for Lagrangian systems*. Preprint, 2011.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma Tre
Largo S. Leonardo Murialdo 1, 00146 Rome (Italy)
E-mail: sorrentino@mat.uniroma3.it

Received October 17, 2012 and accepted April 28, 2013

Luca Spada: Dualità geometriche per la logica di Łukasiewicz

Luca Spada[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno.
email: lspada@unisa.it

Sunto

Le MV-algebre furono introdotte in [2] da C. C. Chang per studiare la logica infinito-valente di Łukasiewicz, con metodi puramente algebrici. In termini moderni diremmo che le MV-algebre compongono la *semantica algebrica equivalente* (si veda [1]) di tale logica. Una MV-algebra $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ è una struttura algebrica in cui $\langle A, \oplus, 0\rangle$ è un monoide commutativo, $\neg$ è un'involuzione (cioè $\neg\neg x = x$) e le seguenti due equazioni valgono per ogni coppia di elementi x, y:

$$\neg 0 \oplus x = \neg 0 \qquad\qquad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x \ .$$

Seppure le MV-algebre possano sembrare delle strutture algebriche alquanto astratte e generali, esse possiedono una teoria molto affascinante, con profondi legami con altri campi della matematica al di fuori dell'algebra e della logica. Scopo di questa comunicazione sarà investigare, con un approccio che privilegerà l'uso dell'algebra universale e della teoria delle categorie, uno dei legami tra MV-algebre e geometria. Il punto di partenza fondamentale sarà il seguente risultato generale.

Teorema. *Esiste una coppia di funtori aggiunti tra la categoria di tutte le MV-algebre con i loro omomorfismi e la categoria degli spazi topologici compatti e di Hausdorff e $\mathbb{Z}$-mappe*[2] *tra di essi.*

Si vedrà poi come tale aggiunzione si specializzi, restringendo gli oggetti nel dominio e co-dominio, in dualità categoriali sempre più concrete dal punto di vista geometrico. Infatti le MV-algebre semisemplici sono in dualità categoriale, sempre tramite la medesima coppia di funtori aggiunti, con i sottospazi chiusi di $[0,1]^\alpha$, per α cardinale qualsiasi. Infine, restringendo ulteriormente, il risultato è la dualità tra la categoria delle MV-algebre finitamente presentate e la categoria dei poliedri a vertici razionali; un risultato, questo, di cui già da vari anni è emersa la centralità, e che il presente lavoro contribuisce a collocare in maniera organica nella teoria delle MV-algebre.

Bibliografia

[1]Questa comunicazione è basata su un lavoro svolto in collaborazione con Vincenzo Marra (Università di Milano).

[2]Qui per $\mathbb{Z}$-mappe si intende funzioni continue, (affinemente) lineari a pezzi e a coefficienti interi.

[1] W. J. Blok and D. Pigozzi: *Algebraizable logics*, Mem. Amer. Math. Soc. **77**(396), pp. 78+v. 1989.

[2] C. C. Chang: *Algebraic analysis of many valued logics*, Trans. Amer. Math. Soc **88**, 467–490. 1958.

Intervento: Luca Spada,
Geometrical Dualities for Łukasiewicz Logic,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 749–763**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 749-763

Geometrical Dualities for Łukasiewicz Logic

LUCA SPADA

Abstract. – *This article develops a general dual adjunction between MV-algebras (the algebraic equivalents of Łukasiewicz logic) and subspaces of Tychonoff cubes, endowed with the transformations that are definable in the language of MV-algebras. Such a dual adjunction restricts to a duality between semisimple MV-algebras and closed subspaces of Tychonoff cubes. Further the duality theorem for finitely presented objects is obtained from the general adjunction by a further specialisation. The treatment is aimed at emphasising the generality of the framework considered here in the prototypical case of MV-algebras.*

1. – Introduction.

This is the transcript of a *featured talk* given on the 15th of September 2011 at the XIX Congeresso dell'Unione Matematica Italiana held in Bologna, Italy. It is based on a joint work with Vincenzo Marra of the University of Milan that was published in [11]. During the lecture proofs were given just as hints, so also this document does not carry any formal detail other than the complete statements of the results. When it is possible hints at the proof strategy as well as the concepts involved are given. For complete proofs of all unreferenced statements here, the reader should kindly refer to [11] and references therein.

This work was started with the hope of getting a better insight on relationship between finitely presented MV-algebras and rational polyhedra and how this can be framed in a more general perspective about geometric dualities. Indeed, in the last decade a number of results in the theory of MV-algebras were proved associating to each finitely presented structure an algebra of special functions (called McNaughton functions) restricted to a rational polyhedron contained in a hypercube $[0,1]^n$. It was already known to the practitioners of the field that this correspondence can be made functorial, but previous studies concentrated on its applications rather than on its own nature.

The outcomes of this study are:

(1) The relation between finitely presented MV-algebras and rational polyhedra is a categorical duality (see Theorem 8.5) which stems from a more

general categorical duality between semisimple MV-algebras and Tychonoff spaces with *definable maps* (see Corollary 6.2).

(2) This duality arises exactly in the same way as Stone's dualities and can be seen as a generalisation of the adjunction between affine varieties over an algebraically closed field, and their structure rings (see Lemma 3.8).

(3) The general adjunction from which this correspondence arises seems to be a quite more general phenomenon that can be formally carried out in any given variety of algebras, once some special element in this variety has been fixed (see Theorem 3.11). Depending on the properties enjoyed by this distinguished element the general adjunction can be strengthen to categorical duality.

We will start form item (3). Although we treat the particular case of MV-algebras, it will transpire that this is a completely abstract construction which can be carried out in any variety. As mentioned in item (2) the construction is formally identical to the classical adjunction between affine algebraic varieties and polynomial ideals.

In his two landmark papers [14, 15], Marshall Stone showed that the set of prime (=maximal) ideals of a Boolean algebra carries a natural topology, one in which the open sets correspond to arbitrary ideals. Spaces arising in this manner are known today as *Stone spaces*. The *clopen* sets, i.e. closed and open in the topology, correspond to principal ideals, and hence to elements of the algebra. Thus, the original algebra can be recovered from its space of prime ideals; the bridge is in fact a two-way road. It is a simple exercise to rephrase also Stone's dualities in the framework of this general adjunction.

To get to item (1) we will gradually involve results coming from the general theory of MV-algebras. Although we will not refrain from using technical lemmas specifically valid for these structures, it will again transpire that a handful of basic properties of the distinguished algebra $[0, 1]$ are all is needed to prove a characterisation of the fixed points of this adjunction, whence the duality will follow as an immediate corollary.

We then turn to the full subcategory of finitely presented MV-algebras. Using further advanced results about MV-algebras, we obtain a duality between the category of finitely presented MV-algebras and the category of *finitely definable* subspaces of Tychonoff cubes. Finally, we give a characterisation in geometrical terms of the abstract category of finitely definable sets. This yields the geometric duality between finitely presented MV-algebras and the category of *rational polyhedra* with $\mathbb{Z}$*-maps* as morphisms. The result that affords this characterisation is *McNaughton's Theorem*, which allows us to identify definable maps on rational polyhedra with piecewise linear maps having integer coefficients.

2. – Preliminaries.

MV-algebras are the equivalent algebraic semantics of *Łukasiewicz logic*, a many-valued propositional system going back to the 1920's. Chang [4] first singled out the axioms of *MV-algebras* by studying the structure of classes of equivalent formulas of Łukasiewicz logic (aka the Lindenbaum-Tarski algebra of the logic). Shortly thereafter, in his ground-breaking paper [5], he obtained an algebraic proof of the completeness theorem. The standard reference for the elementary theory of MV-algebras is [6], whereas [12] is a treatment at the frontier of current research.

Let us recall that an MV-algebra is an algebraic structure $(M, \oplus, \neg, 0)$, where $0 \in M$ is a constant, $\neg$ is a unary operation satisfying $\neg\neg x = x$, $\oplus$ is a unary operation making $(M, \oplus, 0)$ a commutative monoid, the element 1 defined as $\neg 0$ satisfies $x \oplus 1 = 1$, and the law

$$(*) \qquad *\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$$

holds. Any MV-algebra has an underlying structure of distributive lattice bounded below by 0 and above by 1. Joins are defined as $x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y$. Thus, the characteristic law (*) states that $x \vee y = y \vee x$. Meets are defined by the De Morgan condition $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$. Boolean algebras are precisely those MV-algebras that are idempotent, meaning that $x \oplus x = x$ holds, or equivalently, that satisfy the *tertium non datur* law $x \vee \neg x = 1$.

The interval (of truth values) $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ can be made into an MV-algebra, often called the *standard* MV-algebra. It has 0 as neutral element, $x \oplus y = \min\{x + y, 1\}$, and $\neg x = 1 - x$. The underlying lattice order of this MV-algebra coincides with the natural order that $[0, 1]$ inherits from the real numbers.

A key point in Stone's duality for Boolean algebra is that prime ideals are the kernels of the homomorphisms into the prototypical Boolean algebra $\{0, 1\}$. So Stone's duality asserts that the original structure of the Boolean algebra can be recovered from the information on the ways a Boolean algebra can be mapped homomorphically into $\{0, 1\}$. In MV-algebras a similar role is played by the algebra [0,1]. The analogy is not complete in that all Boolean algebras are semisimple while there are non semisimple MV-algebras. This is the reason why the general adjunction for MV-algebras needs to be restricted to semisimple algebras to become a duality while it is already so in the framework of Boolean algebras.

We will be concerned here with the category MV_p of *presented MV-algebras*, i.e. the category whose objects are MV-algebras of the form $\mathcal{F}_\mu/\theta$, where μ is a cardinal, $\mathcal{F}_\mu$ is the MV-algebra freely generated by the set $\{X_\alpha \mid \alpha < \mu$, α an ordinal$\}$, and θ is a congruence on $\mathcal{F}_\mu$; morphisms are homomorphisms of MV-algebras. Using the Axiom of Choice, it is an exercise to show that MV_p is equivalent to the category of all MV-algebras. Therefore, our duality results

extend to the category of abstract MV-algebras, too. It will transpire in the course of the development, however, that an extension obtained in this manner carries no genuine new mathematical information: we know of no way of associating to an abstract MV-algebra its dual object, as constructed in this paper, other than by arbitrarily choosing a presentation of the algebra. Thus, we opt for honesty and work with presented algebras throughout.

NOTATION – Throughout, μ and ν invariably denote cardinal numbers, whereas α and β invariably denote ordinal numbers. Although elements of $\mathcal{F}_\mu$ are equivalence classes of terms in the language of MV-algebras, we often use single terms as representatives for their equivalence classes. If s is a term, the notation $s\big((X_\alpha)_{\alpha<\mu}\big)$ means that the (finitely many) variables occurring in s are among those in the tuple $(X_\alpha)_{\alpha<\mu}$. If $s\big((X_\alpha)_{\alpha<\mu}\big) \in \mathcal{F}_\mu$ and $\{t_\alpha\}_{\alpha<\mu} \subseteq \mathcal{F}_\nu$, we denote by $s\big([X_\alpha \backslash t_\alpha]_{\alpha<\mu}\big)$ the term obtained from s by uniformly replacing each variable X_α with the term t_α. Obviously, $s\big([X_\alpha \backslash t_\alpha]_{\alpha<\mu}\big) \in \mathcal{F}_\nu$. We write $[0,1]^\mu$ for the Cartesian product of μ copies of $[0,1]$. If $p \in [0,1]^\mu$, then $s(p)$ denotes the evaluation of the term s in the MV-algebra $[0,1]$ under the assignment $X_\alpha \mapsto \pi_\alpha(p)$, where $\pi_\alpha\colon [0,1]^\kappa \to [0,1]$ is the projection onto the αth coordinate, for each ordinal $\alpha < \kappa$.

We finally introduce the arrows of all our dual categories. The reader will readily see how this definition is just a specific instance of a classical concept considered in mathematical logic.

DEFINITION 2.1. – *Given $S \subseteq [0,1]^\mu$ and $T \subseteq [0,1]^\nu$, a function $\lambda\colon S \to T$ is* definable *if there exists a ν-tuple of terms $(l_\beta)_{\beta<\nu}$, with $l_\beta \in \mathcal{F}_\mu$, such that*

$$\lambda\big((p_\alpha)_{\alpha<\mu}\big) = \big(l_\beta\big((p_\alpha)_{\alpha<\mu}\big)\big)_{\beta<\nu}$$

for every $(p_\alpha)_{\alpha<\mu} \in S$. We call any such ν-tuple a family of defining terms *for λ. In the special case that $\nu = 1$, the ν-tuple may be regarded as a single term $l \in \mathcal{F}_\mu$, called a* defining term *for λ.*

We will denote by $\mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ the category whose objects are subsets of $[0,1]^\mu$ as μ ranges over all cardinals and arrows are definable functions.

3. – The basic adjunction.

Our first aim is to construct a pair of adjoint functors

$$\mathscr{T}\colon \mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathsf{MV}_{\mathsf{p}}\ , \quad \mathscr{V}\colon \mathsf{MV}_{\mathsf{p}} \longrightarrow \mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}\ .$$

The construction of the functors as well the proof of the categorical adjunction is

completely universal-algebraic: nothing more is needed beyond picking up an algebra in the variety, which in our case will be the distinguished algebra $[0,1]$ with its own MV-algebraic structure.

DEFINITION 3.1 (The functor $\mathscr{T}$ on objects). – *Given $S \subseteq [0,1]^{\mu}$, let us define a relation $\mathbb{I}(S)$ on $\mathcal{F}_{\mu}$ by stipulating that, for arbitrary terms $s, t \in \mathcal{F}_{\mu}$,*

$$(s,t) \in \mathbb{I}(S) \textit{ if and only if } [0,1] \models s(p) \approx t(p)$$

for every $p \in S \subseteq [0,1]^{\mu}$.

When $S = \{p\}$ is a singleton, we write $\mathbb{I}(p)$ in place of $\mathbb{I}(\{p\})$. For any $S \subseteq [0,1]^{\mu}$, it is easy to check that $\mathbb{I}(S)$ is a congruence on $\mathcal{F}_{\mu}$. In view of this, for any subset $S \subseteq [0,1]^{\mu}$ we define

$$\mathscr{T}(S) = \mathcal{F}_{\mu}/\mathbb{I}(S) \ .$$

DEFINITION 3.2 (The functor $\mathscr{T}$ on arrows). – *Given $S \subseteq [0,1]^{\mu}$ and $T \subseteq [0,1]^{\nu}$, let $\lambda: S \to T$ be a definable map, and let $(l_{\beta})_{\beta<\nu}$ be a ν-tuple of defining terms for λ. Then there is an induced function*

$$\mathscr{T}(\lambda): \mathscr{T}(T) \to \mathscr{T}(S)$$

which acts on each $s \in \mathcal{F}_{\nu}$ by substitution as follows:

$$\frac{s\big((X_{\beta})_{\beta<\nu}\big)}{\mathbb{I}(T)} \in \mathscr{T}(T) \overset{\mathscr{T}(\lambda)}{\longmapsto} \frac{s\big([X_{\beta} \backslash l_{\beta}]_{\beta<\nu}\big)}{\mathbb{I}(S)} \in \mathscr{T}(S) \ .$$

REMARK 3.3. – *1*. There can be several distinct defining terms for a definable function $\lambda: S \to [0,1]$. However, when l defines λ for each $p \in S$ one has $\lambda(p) = l(p)$, hence any pair of defining terms for the same definable function belongs to $\mathbb{I}(S)$.

2. Since terms commute with substitutions, it is also clear that the definition of $\mathscr{T}(\lambda)$ above does not depend on the choice of the representing term s, for if s' is another term such that $(s, s') \in \mathbb{I}(T)$, then $s\big([X_{\beta} \backslash l_{\beta}]_{\beta<\nu}\big)$ is congruent to $s'\big([X_{\beta} \backslash l_{\beta}]_{\beta<\nu}\big)$ modulo $\mathbb{I}(S)$

3. The two items above together imply that the definition of $\mathscr{T}(\lambda)$ does not depend on the choice of the family of defining terms $(l_{\beta})_{\beta<\nu}$ either.

PROPOSITION 3.4 (Functoriality of $\mathscr{T}$). – *Let $\lambda_1: S_1 \to S_2$ and $\lambda_2: S_2 \to S_3$ be definable maps, where each S_i is a subset of $[0,1]^{\mu_i}$, for some cardinal μ_i, $i = 1,2,3$. Then*

(1) *$\mathscr{T}(\lambda_1): \mathscr{T}(S_2) \to \mathscr{T}(S_1)$ is a homomorphism of MV-algebras.*

(2) *If* λ_1 *is the identity map, then so is* $\mathscr{T}(\lambda_1)$.
(3) $\mathscr{T}(\lambda_2 \circ \lambda_1) = \mathscr{T}(\lambda_1) \circ \mathscr{T}(\lambda_2)$.

Therefore $\mathscr{T}$ *is a functor from* $\mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ *into* MV_{p}.

PROOF. – These are all consequences of simple universal algebraic arguments. □

DEFINITION 3.5 (The functor $\mathscr{V}$ on objects). – *Given* $R = \{(s_i, t_i) \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu$, *for* I *an index set, we define the set*

$$\mathbb{V}(R) = \{p \in [0,1]^\mu \mid [0,1] \models s_i(p) \approx t_i(p) \ \textit{for each } i \in I\}\,.$$

By the very definition of $\mathbb{V}$, for any congruence θ on $\mathcal{F}_\mu$ we have $\mathbb{V}(\theta) \subseteq [0,1]^\mu$. We therefore set

$$\mathscr{V}(\mathcal{F}_\mu/\theta) = \mathbb{V}(\theta)\,.$$

DEFINITION 3.6 (The functor $\mathscr{V}$ on arrows). – *Let* $h\colon \mathcal{F}_\mu/\theta_1 \to \mathcal{F}_\nu/\theta_2$ *be a homomorphism of MV-algebras. For each* $\alpha < \mu$, *let* π_α *be the projection term on the* α^{th} *coordinate, and let* π_α/θ_1 *denote the equivalence class of* π_α *modulo* θ_1. *Fix, for each* α, *an arbitrary* $f_\alpha \in h(\pi_\alpha/\theta_1)$. *For any* $(p_\beta)_{\beta<\nu} \in \mathbb{V}(\theta_2)$, *set*

$$\mathscr{V}(h)((p_\beta)_{\beta<\nu}) = \big(f_\alpha((p_\beta)_{\beta<\nu})\big)_{\alpha<\mu}\,.$$

Also in this case one observes that the definition of $\mathscr{V}(h)$ does not depend on the choices of the f_α's.

PROPOSITION 3.7 (Functoriality of $\mathscr{V}$). – *Let* $h\colon \mathcal{F}_\mu/\theta_1 \to \mathcal{F}_\nu/\theta_2$ *and* $i\colon \mathcal{F}_\nu/\theta_2 \to \mathcal{F}_\xi/\theta_3$ *be homomorphisms of MV-algebras. Then*

(1) *The function* $\mathscr{V}(h)$ *is a definable map from* $\mathbb{V}(\theta_2)$ *to* $\mathbb{V}(\theta_1)$.
(2) *If* h *is the identity map, then so is* $\mathscr{V}(h)$.
(3) $\mathscr{V}(i \circ h) = \mathscr{V}(h) \circ \mathscr{V}(i)$.

Just as happens in algebraic geometry the pair $\mathbb{V}$ and $\mathbb{I}$, seen as functions between the powersets of $\mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu$ and $[0,1]^\mu$, form a *Galois connection*.

LEMMA 3.8 (Basic Galois connection). – *For each* $S \subseteq [0,1]^\mu$ *and* $R \subseteq \mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu$,

$$R \subseteq \mathbb{I}(S) \ \textit{if, and only if}, \ S \subseteq \mathbb{V}(R)\,.$$

PROOF. – Direct inspection of the definitions. □

As an immediate corollary valid for any Galois connection (see [8] for further references), we get

COROLLARY 3.9. – *For* $\mathbb{V}$ *and* $\mathbb{I}$ *as above one has:*

(1) *For any* $S_1, S_2 \subseteq [0,1]^\mu$,
   a) $S_1 \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{I}(S_1))$,
   b) $S_1 \subseteq S_2$ *implies* $\mathbb{I}(S_2) \subseteq \mathbb{I}(S_1)$,
   c) $\mathbb{I}(\mathbb{V}(\mathbb{I}(S_1))) = \mathbb{I}(S_1)$, *and*
   d) $\mathbb{I}$ *reverses arbitrary unions:*

$$\mathbb{I}\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathbb{I}(S_i),$$

where S_i *is a subset of* $[0,1]^\mu$, *and* I *is an arbitrary index set.*

(2) *For any* $R_1, R_2 \subseteq \mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu$,
   a) $R_1 \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(R_1))$,
   b) $R_1 \subseteq R_2$ *implies* $\mathbb{V}(R_2) \subseteq \mathbb{V}(R_1)$,
   c) $\mathbb{V}(\mathbb{I}(\mathbb{V}(R_1))) = \mathbb{V}(R_1)$, *and*
   d) $\mathbb{V}$ *reverses arbitrary unions:*

$$\mathbb{V}\left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathbb{V}(R_i)\ ,$$

where R_i *is a subset of* $\mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu$, *and* I *is an arbitrary index set.*

REMARK 3.10. – A function $C\colon 2^A \to 2^A$, where 2^A is the powerset of a set A, is a *closure operator* on A [3, I.5.1] if it is *extensive* ($X \subseteq C(X)$ for each $X \in 2^A$), *isotone* ($X \subseteq Y$ implies $C(X) \subseteq C(Y)$ for each $X, Y \in 2^A$), and *idempotent* ($C(C(X)) = C(X)$ for each $X \in 2^A$). The preceding lemma shows that the composition $\mathbb{V} \circ \mathbb{I}$ is a closure operator on $[0,1]^\mu$, and the composition $\mathbb{I} \circ \mathbb{V}$ is a closure operator on $\mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu$.

Throughout the paper, we write $\mathbb{1}_O$ to denote the identity arrow on the object O of a category C, and $\mathbb{1}_{\mathsf{C}}$ to denote the identity functor on C. Further, we write composition as juxtaposition whenever convenient, e.g. we write $\mathscr{V}\mathscr{T}$ in place of $\mathscr{V} \circ \mathscr{T}$.

THEOREM 3.11 (The basic adjunction between MV-algebras and spaces). – *The functor* $\mathscr{V}\colon \mathsf{MV_p} \longrightarrow \mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{def}\,\mathbb{Z}}$ *is left adjoint to the functor* $\mathscr{T}\colon \mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{def}\,\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathsf{MV_p}$. *In symbols,* $\mathscr{V} \dashv \mathscr{T}$.

PROOF. – To prove the statement we must exhibit two natural transformations

$$\eta\colon \mathbb{1}_{\mathsf{MV_p}} \to \mathscr{T}\mathscr{V} \quad \text{and} \quad \varepsilon\colon \mathscr{V}\mathscr{T} \to \mathbb{1}_{\mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{def}\,\mathbb{Z}}}$$

called *unit* and *co-unit*. In the first case we need to exhibit components $\eta_{\frac{\mathcal{F}_\mu}{\vartheta_1}}$ and

$\eta_{\frac{\mathcal{F}_\nu}{\theta_2}}$ for any two objects $\mathcal{F}_\mu/\theta_1$ and $\mathcal{F}_\nu/\theta_2$ of MV_p such that the following diagram commutes.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}\mathscr{V}\left(\frac{\mathcal{F}_\mu}{\theta_1}\right) \arrow[r, "\mathscr{T}\mathscr{V}(h)"] & \mathscr{T}\mathscr{V}\left(\frac{\mathcal{F}_\nu}{\theta_2}\right) \\
\frac{\mathcal{F}_\mu}{\theta_1} \arrow[u, "\eta_{\frac{\mathcal{F}_\mu}{\theta_1}}"] \arrow[r, "h"] & \frac{\mathcal{F}_\nu}{\theta_2} \arrow[u, "\eta_{\frac{\mathcal{F}_\nu}{\theta_2}}"']
\end{tikzcd}$$

Note that $\mathscr{T}\mathscr{V}(\mathcal{F}_\mu/\theta_1) = \mathscr{T}(\mathbb{V}(\theta_1)) = \mathcal{F}_\mu/\mathbb{I}(\mathbb{V}(\theta_1))$. By *1c*) in Lemma 3.8, $\theta_1 \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(\theta_1))$, hence it is readily seen that the canonical homomorphism from $\mathcal{F}_\mu/\theta_1$ to $\mathscr{T}\mathscr{V}(\mathcal{F}_\mu/\theta_1)$, which sends a generic element s/θ_1 of $\mathcal{F}_\mu/\theta_1$ into $s/\mathbb{I}(\mathbb{V}(\theta_1))$ suits the task. The arrow $\eta_{\mathcal{F}_\nu/\theta_2}$ is defined in the same way.

In the second case we need to show that for any two objects S and T of $\mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ there are ε_S and ε_T such the following diagram commutes.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{V}\mathscr{T}(S) \arrow[r, "\mathscr{V}\mathscr{T}(\lambda)"] \arrow[d, "\varepsilon_S"'] & \mathscr{V}\mathscr{T}(T) \arrow[d, "\varepsilon_T"] \\
S \arrow[r, "\lambda"] & T
\end{tikzcd}$$

Recall that $\mathscr{V}\mathscr{T}(S) = \mathscr{V}(\mathcal{F}_\mu/\mathbb{I}(S)) = \mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$, so by 1a) in Lemma 3.8 we can take the dual of the inclusion arrow $S \hookrightarrow \mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$. The arrow ε_T is defined analogously.

Next, we need to show that for any $A \in \mathsf{MV}_\mathsf{p}$ the diagram below commutes.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{V}(A) \arrow[r, "\mathscr{V}(\eta_A)"] \arrow[rr, bend right, "\mathbb{1}_{\mathscr{V}(A)}"'] & \mathscr{V}\mathscr{T}\mathscr{V}(A) \arrow[r, "\varepsilon_{\mathscr{V}(A)}"] & \mathscr{V}(A)
\end{tikzcd}$$

If $A = \mathcal{F}_\mu/\theta$, then $\mathscr{V}\big(\mathcal{F}_\mu/\theta\big) = \mathbb{V}(\theta)$ and $\mathscr{V}\mathscr{T}\mathscr{V}\big(\mathcal{F}_\mu/\theta\big) = \mathscr{V}\mathscr{T}(\mathbb{V}(\theta)) = \mathscr{V}(\mathcal{F}_\mu/\mathbb{I}(\mathbb{V}(\theta))) = \mathbb{V}(\mathbb{I}(\mathbb{V}(\theta)))$. Again the claim is settled by Lemma 3.8 which asserts that $\mathscr{V}\big(\mathcal{F}_\mu/\theta\big) = \mathscr{V}\mathscr{T}\mathscr{V}\big(\mathcal{F}_\mu/\theta\big)$, the rest is a matter of checking the definitions of the arrows.

Finally, for any $K \in \mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$, the diagram below commutes.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}(K) \arrow[r, "\mathscr{T}(\varepsilon_K)"] \arrow[rr, bend right, "\mathbb{1}_{\mathscr{T}(K)}"'] & \mathscr{T}\mathscr{V}\mathscr{T}(K) \arrow[r, "\eta_{\mathscr{T}(K)}"] & \mathscr{T}(K) \end{tikzcd}$$

Again we have that $\mathscr{T}(K) = \mathbb{I}(\theta)$ and $\mathscr{T}\mathscr{V}\mathscr{T}(K) = \mathbb{I}(\mathbb{V}(\mathbb{I}(\theta)))$, which are equal by 2a) in Lemma 3.8.

4. – The co-Nullstellensatz.

Once an adjunction has been established it is natural to look for the fixed points of the adjunction, i.e. objects on which the unit and co-unit of the adjunction are isomorphisms. The reason is that the adjunction restricted to the above objects is a *categorical duality*, hence an explicit description of the fixed points affords a complete characterisation of two subcategories which are equivalent. In categorical terms this translates in an explicit description of the co-unit and unit of the adjunction in Theorem 3.11, which is our aim in this section.

We will see that the analogue of the Zariski topology on affine space now enters the picture. If we let the definable subsets (i.e. the sets $V(\theta)$ for some congruence θ) be the closed sets of a topology, the result is precisely the Tychonoff (product) topology on $[0,1]^{\mu}$. This is the content of Lemma 4.3; we call it co-Nullstellensatz in that it is the category-theoretic dual of the analogue of Hilbert's Nullstellensatz in algebraic geometry.

The analogy with classical algebraic geometry is not merely a category-theoretic formality. Several results in algebraic geometry compare the Zariski (definable) topology on an affine variety (over $\mathbb{C}$) with the complex-analytic topology the variety inherits from its embedding into $\mathbb{C}^n$; for irreducible varieties, for example, it is well known that every Zariski-open set is a dense open set in the complex-analytic topology. Lemma 4.3 is precisely a result of this sort: it compares the notion of algebraically definable closed set with the "natural" notion of closed set in a Tychonoff cube, to find out that they coincide.

Here and henceforth we follow Engelking's treatise on topology [7]. From now on, each Cartesian product $[0,1]^{\mu}$ will be endowed with its *Tychonoff*, or *product*, topology, where on $[0,1]$ we assume the usual Euclidean topology. Recall that a topological space X is *completely regular*, or *Tychonoff* (or $T_{3\frac{1}{2}}$) if it is T_1, and points and closed sets can be separated by continuous $[0,1]$-valued functions: if $x \in X$, $Y \subseteq X$ is closed, and $x \notin Y$, there is a continuous function $f\colon X \to [0,1]$ such that $Y \subseteq f^{-1}(0)$, and $f(x) > 0$. It is a standard fact that $[0,1]^{\mu}$ is a Tychonoff space. We are going to prove in Lemma 4.2 below the stronger result

that points and closed sets in $[0,1]^\mu$ can be separated by *definable* functions. As a final piece of notation, let us write $\overline{S}$, for $S \subseteq [0,1]^\mu$, to denote the closure of S in $[0,1]^\mu$, i.e. the intersection of all closed subsets of $[0,1]^\mu$ containing S.

REMARK 4.1. – Since the operations of the standard MV-algebra $[0,1]$ are continuos with respect to the Euclidean topology, it is clear that *any definable map* $\lambda: S \to T$ *is continuous*, where S and T are endowed with the subspace topology they inherit from the Tychonoff topology of $[0,1]^\mu$ and $[0,1]^\nu$, respectively. Thus, if we regard each object of $\mathsf{T}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ as a topological space with the subspace topology from $[0,1]^\mu$, $\mathsf{T}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ is a subcategory of the category of Tychonoff spaces and continuous maps.

LEMMA 4.2. – *[Complete regularity by definable functions] For any point* $p \in [0,1]^\mu$ *and any closed set* $K \subseteq [0,1]^\mu$ *with* $p \notin K$*, there is a definable function* $\lambda: [0,1]^\mu \to [0,1]$ *that takes value* 0 *over* K*, and value* > 0 *at* p*.*

PROOF. – It follows immediately from [1, Corollary 2.8], that for each open interval $(a,b) \subseteq [0,1]$ and each $p \in (a,b)$, there are terms s and t such that the function $\lambda: [0,1] \to [0,1]$ defined by the term $s \wedge \neg t$ satisfies $\lambda(p) > 0$ and $([0,1] \setminus (a,b)) \subseteq \lambda^{-1}(0)$. The statement then follows from this and the regularity of $[0,1]^\mu$. □

LEMMA 4.3 (Co-Nullstellensatz for MV-algebras). – *For any* $S \subseteq [0,1]^\mu$,

$$\mathbb{V}(\mathbb{I}(S)) = \overline{S}\ .$$

So the set $S \subseteq [0,1]^\mu$ *is closed if, and only if,* $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S)) = S$.

PROOF. – The inclusion $\overline{S} \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$ follows from the fact that $S \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$ always holds by Lemma 3.8, the fact that $[0,1]$ is Hausdorff and definable functions are continuous, hence the solution set of $f = g$ is a closed set.

The converse inclusion is an immediate consequence of Lemma 4.2 □

REMARK 4.4. – The co-Nullstellensatz implies in particular that $\mathbb{V} \circ \mathbb{I}$ is a topological closure operator, i.e. a closure operator satisfying $C\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) = \bigcup_{i \in I} C(X_i)$, because topological closure is.

5. – The Nullstellensatz.

As next step we are going to characterise the action of the components of the co-unit η on presented MV-algebras. In this case the parallel with Hilbert's Nullstellesatz will be plain.

Let us recall some terminology from universal algebra applied to our case (for details see [3]). An MV-algebra is *simple* if it has no proper congruence but the identity congruence, and it is *semisimple* if it is a subdirect product of simple MV-algebras. Equivalently, an MV-algebra A is semisimple if the intersection of its maximal congruences, called *radical congruence* and denoted by $\mathrm{Rad}(A)$, is the identity relation.

We will show that the fixed points in this case are the algebras presented by a *radical* congruence. A crucial ingredient in the proof will be the fact that every simple algebra can be embedded in our distinguished algebra $[0,1]$. This is a folklore result which goes under the name of Hölder's Theorem for MV-algebras.

LEMMA 5.1 (Hölder's Theorem for MV-algebras). – *Let C be a non-trivial, simple MV-algebra. Then there is a unique injective homomorphism $C \to [0,1]$.*

LEMMA 5.2 (Point = Maximal congruence). – *For any set $S \subseteq [0,1]^{\mu}$, and for any congruence θ on $\mathcal{F}_{\mu}$, the following hold.*

(1) *If θ is a maximal congruence then $\mathbb{V}(\theta)$ is a singleton.*
(2) *If S is a singleton then $\mathbb{I}(S)$ is a maximal congruence.*

PROOF. – Both items can be proved using (the topological!) Lemma 4.2 and the fact that $\mathbb{I}$ and $\mathbb{V}$ are a Galois adjunction (Lemma 3.8). Lemma 5.1 is crucial in the proof of item (1). □

Further, given $S \subseteq \mathcal{F}_{\mu} \times \mathcal{F}_{\mu}$, let us write $\langle S \rangle$ for the congruence on $\mathcal{F}_{\mu}$ generated by S, i.e. the intersection of all congruences containing S.

LEMMA 5.3 (Nullstellensatz for MV-algebras). – *For any $S \subseteq \mathcal{F}_{\mu} \times \mathcal{F}_{\mu}$,*

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(S)) = \bigcap \{\theta' \in (\mathcal{F}_{\mu})^2 \mid S \subseteq \theta' \textit{ and } \theta' \textit{ maximal congruence}\} = \mathrm{Rad}(\mathcal{F}_{\mu}/\langle S \rangle) \ .$$

So the algebra $\mathcal{F}_{\mu}/\theta$ is semisimple if, and only if, $\mathbb{I}(\mathbb{V}(\theta)) = \theta$.

PROOF. – This is proved by combining Lemma 3.8 and Lemma 5.2. □

6. – The categorical duality for semisimple MV-algebras.

The Nullstellensatz and co-Nullstellensatz above give an explicit characterisation of the fixed point of the categorical adjunction $\mathscr{T} \vdash \mathscr{V}$, we recapitulate them in the following.

THEOREM 6.1 (Co-unit & Unit as Closure & Radical).

(1) *The co-unit* $\varepsilon\colon \mathscr{V}\mathscr{T} \to \mathbb{1}_{\mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}}$ *acts as the closure operator associated to the Tychonoff topology of* $[0,1]^{\mu}$.
In other words, if $S \subseteq [0,1]^{\mu}$, *the component* $\varepsilon_S\colon \mathscr{V}\mathscr{T}(S) \to S$ *is (the dual of) the inclusion arrow* $S \hookrightarrow \overline{S}$ *that embeds* S *in its closure.*
(2) *The unit* $\eta\colon \mathbb{1}_{\mathsf{MV_p}} \to \mathscr{T}\mathscr{V}$ *acts by modding out radicals.*
In other words, if θ *is a congruence on* $\mathcal{F}_{\mu}$, *the component* $\eta_{\mathcal{F}_{\mu}/\theta}\colon \mathcal{F}_{\mu}/\theta \to \mathscr{T}\mathscr{V}(\mathcal{F}_{\mu}/\theta)$ *is the natural quotient map* $\mathcal{F}_{\mu}/\theta \twoheadrightarrow (\mathcal{F}_{\mu}/\theta)/\mathrm{Rad}(\mathcal{F}_{\mu}/\theta)$ *induced by the congruence* $\mathrm{Rad}(\mathcal{F}_{\mu}/\theta)$.

Hence,

(1) ε_S *is an isomorphism if, and only if,* S *is closed.*
(2) $\eta_{\mathcal{F}_{\mu}/\theta}$ *is an isomorphism if, and only if,* $\mathcal{F}_{\mu}/\theta$ *is semisimple.*

Let $\mathsf{MV}^{\mathsf{ss}}_{\mathsf{p}}$ be the full subcategory of $\mathsf{MV_p}$ whose objects are (presented) semisimple MV-algebras. Further, let $\mathsf{K}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ be the full subcategory of $\mathsf{T}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ whose objects are closed subsets of Tychonoff cubes.

As mentioned at the beginning of this section Theorem 6.1 entails at once a categorical duality:

COROLLARY 6.2 (Duality theorem for semisimple MV-algebras). – *The adjunction* $\mathscr{V} \dashv \mathscr{T}$ *in Theorem* 3.11 *restricts to an equivalence of categories between* $\mathsf{MV}^{\mathsf{ss}}_{\mathsf{p}}$ *and* $\mathsf{K}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$.

Let us conclude with an important remark. Each space in $\mathsf{K}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ is compact and Hausdorff [7, 3.1.2, 2.1.6]; conversely, each compact Hausdorff space can be embedded in some Tychonoff cube [7, 2.3.23]. It should be carefully noted, however, that the notion of definable map between compact Hausdorff spaces H and K only makes sense if H and K come endowed with a *specific* embedding into $[0,1]^{\mu}$ and $[0,1]^{\nu}$, respectively. In other words, an object of $\mathsf{K}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ cannot be conceived of as an abstract compact Hausdorff space K, but is rather a continuous embedding $K \hookrightarrow [0,1]^{\mu}$.

7. – The duality for finitely presented MV-algebras.

For the rest of this paper, we let m be a non-negative integer. The aim of this section is show that the adjunction given by the pair $\mathscr{T}, \mathscr{V}$ restricts to an equivalence for finitely presented algebras. To this end we introduce the full subcategory of $\mathsf{T}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ which is the $\mathscr{V}$-image of finitely presented algebras.

DEFINITION 7.1. – *A subset $S \subseteq [0,1]^\mu$ is called finitely definable if there is a finite index set I, along with a set of pairs $R = \{(s_i, t_i) \in \mathcal{F}_\mu \times \mathcal{F}_\mu \mid i \in I\}$, such that $S = \mathbb{V}(R)$. The full subcategory of $\mathsf{T}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ whose objects are finitely definable subsets of $[0,1]^m$, as m ranges over all natural numbers, is denoted $\mathsf{D}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$.*

REMARK 7.2. – In MV-algebras finitely generated and principal (= singly generated) congruences coincide.

Next Lemma shows that finitely definable sets coincide with the vanishing loci of compact congruences. The proof requires two related non-trivial results from the theory of MV-algebras: a geometrical characterisation of principally generated ideals, asserting that if s, t, u, v are elements of $\mathcal{F}_m$, then

$$(u, v) \in \langle (s, t) \rangle \text{ if, and only if,} \mathbb{V}(s, t) \subseteq \mathbb{V}(u, v) \ ,$$

and Wójcicki's Theorem

THEOREM 7.3 (Wójcicki's Theorem). – *Every finitely presented MV-algebra is semisimple.*

Putting these two results together we have

LEMMA 7.4 (Finitely definable set = Compact congruence)

(1) *If $D \subseteq [0,1]^m$ is a finitely definable set, then $\mathbb{I}(D) \subseteq \mathcal{F}_m \times \mathcal{F}_m$ is a finitely generated congruence.*
(2) *If $\theta \subseteq \mathcal{F}_m \times \mathcal{F}_m$ is a finitely generated congruence, then $\mathbb{V}(\theta) \subseteq [0,1]^m$ is a finitely definable set.*

As in the previous section, this immediately entails the following.

THEOREM 7.5. – *The adjunction $\mathscr{V} \dashv \mathscr{T}$ restricts to an equivalence of categories between $\mathsf{MV}_{\mathsf{fp}}$ and $\mathsf{D}^{\mathsf{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$.*

8. – Concrete description of the categorical dual of finitely presented MV-algebras.

The abstract category $\mathsf{D}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ can be characterised in purely geometrical terms. This yields the geometric duality between finitely presented MV-algebras and rational polyhedra. For the general background on polyhedra, see [13].

If $S \subseteq \mathbb{R}^m$ is any subset, we let $\mathsf{conv}\, S$ denote the *convex hull* of S. Recall that a *polytope* is a subset of $\mathbb{R}^m$ of the form $\mathsf{conv}\, S$, for some finite $S \subseteq \mathbb{R}^m$, and a (*compact*) *polyhedron* is a union of finitely many polytopes in $\mathbb{R}^m$. A polytope

$\mathsf{conv}\, S$ is *rational* if $S \subseteq \mathbb{Q}^m$. Similarly, a polyhedron is *rational* if it may be written as a union of finitely many rational polytopes.

DEFINITION 8.1. – *We call Z-map a continuous* piecewise linear function with integer coefficients *from a rational polyhedron* $P \subseteq [0,1]^m$ *into* $[0,1]^n$.

We denote the category of rational polyhedra and Z-maps by $P_{\mathbb{Z}}$. The key fact is that $\mathbb{Z}$-maps between rational polyhedra are precisely the definable maps.

LEMMA 8.2 (McNaughton's Theorem for rational polyhedra). – *Let* $P \subseteq [0,1]^m$ *be a rational polyhedron, and let* $\lambda\colon P \to [0,1]$ *be any function. Then* λ *is a* $\mathbb{Z}$*-map if, and only if,* λ *is a definable function.*

REMARK 8.3. – Lemma 8.1 may well fail for more general sets than rational polyhedra. Indeed, while definable maps are always $\mathbb{Z}$-maps, the converse inclusion does not hold in general.

LEMMA 8.4. – *The category* $\mathsf{D}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ *coincides with the category* $P_{\mathbb{Z}}$.

PROOF. – Notice preliminarily that S is a rational polyhedron if, and only if, there is a $\mathbb{Z}$-map $\zeta\colon [0,1]^m \to [0,1]$ vanishing precisely on S. By Remark 7.2, one has that any finitely definable set S is the solution set over $[0,1]^m$ of the equation $s = 0$. By Lemma 8.2, s is a $\mathbb{Z}$-map, and therefore, S is a rational polyhedron. Conversely, if S is a rational polyhedron in $[0,1]^m$, there is a $\mathbb{Z}$-map $\zeta\colon [0,1]^m \to [0,1]$ such that $\zeta^{-1}(0) = S$. By Lemma 8.2 there is a term $s \in \mathcal{F}_m$ such that ζ is the function defined by s, and therefore, since $S = \mathbb{V}(s,0)$, S is finitely definable. □

COROLLARY 8.5. – *[The duality theorem for finitely presented MV-algebras* (1)*. The adjunction* $\mathscr{V} \dashv \mathscr{T}$ *in Theorem* 3.11 *restricts to an equivalence of categories between* $\mathsf{MV}_{\mathsf{fp}}$ *and* $\mathsf{P}_{\mathbb{Z}}^{\mathsf{op}}$.

PROOF. – Immediate consequence of Theorem 7.5 and Lemma 8.4. □

Acknowledgements. The author gratefully acknowledges support from the Italian National Research Project 2010FP79LR and from the European FP7-IRSES project *MaToMUVI* (PIEF-GA-2009-247584).

(1) This result was already known to practitioners of the field, although we know of no detailed argument given in literature. An alternative proof was recently given in [10], although this aims at succinctness rather than investigating the origin of the correspondence.

REFERENCES

[1] AGUZZOLI S., *A note on the representation of McNaughton lines by basic literals*, Soft Comput., **2** (1998), 3, 111-115.

[2] BIGARD A., K. KEIMEL and S. WOLFENSTEIN, *Groupes et anneaux réticulés*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **608**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[3] BURRIS S. and H. P. SANKAPPANAVAR, *A course in universal algebra*, vol. **78** of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[4] CHANG, C. C., *Algebraic analysis of many valued logic*, Trans. Amer. Math. Soc, **88** (1958), 467-490.

[5] CHANG C. C., *A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms*, Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), 74-80.

[6] CIGNOLI R. L. O., I. M. L. D'OTTAVIANO and D. MUNDICI, *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, vol. 7 of *Trends in Logic—Studia Logica Library*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[7] ENGELKING R., *General topology*, vol. **6** of *Sigma Series in Pure Mathematics*, second edn., Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[8] ERNÉ M., J. KOSLOWSKI, A. MELTON and G. E. STRECKER, *A primer on Galois connections*, in *Papers on general topology and applications (Madison, WI, 1991)*, vol. 704 of *Ann. New York Acad. Sci.*, New York Acad. Sci., New York, 1993, pp. 103-125.

[9] JOHNSTONE P. T., *Stone spaces*, vol. 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[10] MARRA, V. and L. SPADA, *Duality, projectivity, and unification in Łukasiewicz logic and MV-algebras*. Annals of Pure and Applied Logic, **164** (2013), 192-210, doi: 10.1016/j.apal.2012.10.001.

[11] MARRA V., and L. SPADA, *The dual adjunction between MV-algebras and Tychonoff spaces*, Studia Logica, **100** (2012), 1-26.

[12] MUNDICI D., *Advanced Łukasiewicz Calculus and MV-algebras*, vol. **35** of *Trends in Logic—Studia Logica Library*, Springer, New York, 2011.

[13] ROURKE C. P. and B. J. SANDERSON, *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[14] STONE M. H., *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936), 1, 37-111.

[15] STONE M. H., *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., **41** (1937), 3, 375-481.

(Temporary) Institute for Logic, Language, and Computation - Universiteit van Amsterdam Science Park 107 - 1098 XG Amsterdam, The Netherlands

(Permanent, on leave) Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
Via Giovanni Paolo II, 132, 84084 Fisciano (SA), Italy
E-mail: lspada@unisa.it

Received December 1, 2012 and in revised form December 1, 2013

Antonio Tortora: L'applicazione che ad ogni elemento di un gruppo associa la sua potenza n-esima

Costantino Delizia
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

Antonio Tortora
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
email: antortora@unisa.it

Sunto

Fissato un intero n, sia $\mathfrak{E}_n$ (rispettivamente, $\mathfrak{A}_n$) la classe di tutti i gruppi G per cui l'applicazione $\phi_n : x \mapsto x^n$ è un endomorfismo (rispettivamente, un automorfismo) di G. Dualmente, fissato un gruppo G, sia $\mathbb{E}(G)$ (rispettivamente, $\mathbb{A}(G)$) l'insieme formato da tutti gli interi n tali che $\phi_n : x \mapsto x^n$ è un endomorfismo (rispettivamente, un automorfismo) di G.

Utilizzando risultati già noti per $\mathfrak{E}_n$ ([1], [2]) e per $\mathbb{E}(G)$ ([4], [5]), in collaborazione con C. Delizia ([3]), abbiamo descritto la struttura dei gruppi in $\mathfrak{A}_n$ e l'insieme $\mathbb{A}(G)$.

Bibliografia

[1] J. L. Alperin, *A classification of n-abelian groups*, Canad. J. Math. **21** (1969), 1238–1244.

[2] R. Baer, *Factorization of n-soluble and n-nilpotent groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 15–26.

[3] C. Delizia e A. Tortora, *Some special classes of n-abelian groups*, inviato a rivista.

[4] L.-C. Kappe, *On n-Levi groups*, Arch. Math. **47** (1986), 198–210.

[5] F. W. Levi, *Notes on group theory VII*, J. Indian Math. Soc. **9** (1945), 37–42.

Intervento: Antonio Tortora,
The Power Mapping as Endomorphism of a Group,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 379–387**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 379-387

The Power Mapping as Endomorphism of a Group

ANTONIO TORTORA

Abstract. – *Let $n \neq 0, 1$ be an integer. A group G is said to be n-abelian if the mapping $f_n : x \mapsto x^n$ is an endomorphism of G. Then $(xy)^n = x^n y^n$ for all $x, y \in G$, from which it follows $[x^n, y] = [x, y]^n = [x, y^n]$. In this paper we investigate groups G such that f_n is a monomorphism or an epimorphism of G. We also deal with the connections between n-abelian groups and groups satisfying the identity $[x^n, y] = [x, y]^n$ or $[x^n, y] = [x, y^n]$. Finally, we provide an arithmetic description of the set of all integers n such that f_n is an automorphism of a given group G.*

1. – Introduction

Let $n \neq 0, 1$ be an integer. A group G is said to be *n-abelian* if the mapping $f_n : x \mapsto x^n$ is an endomorphism of G. Then $(xy)^n = x^n y^n$ for all $x, y \in G$, from which it follows $[x^n, y] = [x, y]^n = [x, y^n]$. Clearly, every group of finite exponent dividing n or $n - 1$ is n-abelian. It is also easy to see that a group G is n-abelian if and only if it is $(1 - n)$-abelian. The structure of n-abelian groups has been described in [2] and [1] (see [7] for an account). If $n \neq 0, 1$ and G is an n-abelian group, then the quotient group $G/Z(G)$ has finite exponent dividing $n(n - 1)$. This implies that every torsion-free n-abelian group is abelian. Of course 2-abelian groups are precisely all abelian groups, whereas 3-abelian groups are all 2-Engel groups (i.e. groups satisfying the identity $[x, y, y] = 1$) with commutator subgroup of exponent 3 (Levi [13], Kappe and Morse [10]).

It is well-known that torsion abelian or nilpotent groups are direct products of their primary components. Our first result shows that a similar factorization is also valid for torsion n-abelian groups. Here and throughout the paper, except the last section, we assume that $n \neq 0, 1$ is an integer, π_n and π_{n-1} are the sets of all primes dividing n and $n - 1$, respectively, and $\mathbb{P}$ is the set of all primes. Moreover, we set $\pi'_{n-1} = \mathbb{P} \setminus \pi_{n-1}$ and $\pi'_{n(n-1)} = \mathbb{P} \setminus (\pi_n \cup \pi_{n-1})$.

THEOREM 1.1 (Baer [2]). – *The elements of finite order in any n-abelian group form a subgroup which is the direct product of a π_n-group, a π_{n-1}-group and an abelian $\pi'_{n(n-1)}$-group.*

For finite groups a stronger result holds: a finite group is n-abelian if and only if it is a homomorphic image of a subgroup of the direct product of a finite abelian

group, a finite group of exponent dividing n and a finite group of exponent dividing $n-1$ (see [1]). This is a consequence (but not immediate!) of the following characterization of n-abelian groups.

THEOREM 1.2 (Alperin [1]). – *A group is n-abelian if and only if it is a homomorphic image of a subgroup of the direct product of an abelian group, a group of exponent dividing n and a group of exponent dividing $n-1$.*

In this paper we are mainly concerned with some questions related to n-abelian groups. More precisely, in Section 2, we investigate groups G such that f_n is either a monomorphism or an epimorphism of G while, in Section 3, we deal with the connections between n-abelian groups and groups satisfying the identity $[x^n, y] = [x, y]^n$ or $[x^n, y] = [x, y^n]$. Finally, in Section 4, we provide an arithmetic description of the set of all integers n such that f_n is an automorphism of a given group G.

2. – Some classes of n-abelian groups

In this section, following [8], we denote by $\mathfrak{B}_n$ and $\mathfrak{C}_n$ the classes of all groups G for which $f_n : x \mapsto x^n$ is a monomorphism and an epimorphism of G, respectively. Since $\mathfrak{B}_{-1} = \mathfrak{C}_{-1}$ is the class of all abelian groups, we may assume $|n| > 1$. Then, $G \in \mathfrak{B}_n$ if and only if G is an n-abelian group without elements of order dividing n. Similarly, $G \in \mathfrak{C}_n$ if and only if G is n-abelian and for any $g \in G$ there exists an element $x \in G$ such that $g = x^n$. It follows that, if $G \in \mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{C}_n$, then $G^{n-1} \leq Z(G)$ and G is $(n-1)$-abelian [8, Proposition 2.2]. Hence, G' has finite exponent dividing $n-1$. We also set $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_n \cap \mathfrak{C}_n$. This class has been studied in [16], [18] and [15]. Of course, groups of exponent dividing $n-1$ are in $\mathfrak{A}_n$.

For all integers $n \neq 0$, every divisible abelian group is in $\mathfrak{C}_n$. In particular, the additive group $\mathbb{Q}$ of rational numbers is in $\mathfrak{A}_n$, as well as every Prüfer group $\mathbb{Z}(p^\infty)$, with $\gcd(p, n) = 1$. The class $\mathfrak{B}_n$ is subgroup closed, but the class $\mathfrak{C}_n$ is not: in fact the group $\mathbb{Z}$ of all integers is not in $\mathfrak{C}_n$. The class $\mathfrak{C}_n$ is quotient closed, but the class $\mathfrak{B}_n$ is not: for example $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is not in $\mathfrak{B}_n$. Each of these classes is closed under forming direct products of its members. However, they are both not closed under extensions. For example, let G be the wreath product of a cyclic group of order p by $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Then G is an extension of groups in $\mathfrak{A}_n$, for all integers n with $\gcd(p, n) = 1$. But $Z(G)$ is trivial and so G is not n-abelian when $n \neq 0, 1$.

Applying Theorem 1.1, we can characterize torsion groups in $\mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{C}_n$, as follows.

THEOREM 2.1 (Delizia, Tortora [8]). – *Let G be a torsion group. Then:*

(*i*) *$G \in \mathfrak{B}_n$ if and only if $G = A \times B$ where A is an n-abelian π_{n-1}-group and B is an abelian $\pi'_{n(n-1)}$-group;*
(*ii*) *$G \in \mathfrak{C}_n$ if and only if $G = A \times B$ where A is an n-abelian π_{n-1}-group and $B = B^n$ is an abelian π'_{n-1}-group.*

If $\mathfrak{T}$ denotes the class of all torsion groups, we deduce by Theorem 2.1 that

$$(*) \qquad \mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{B}_n \cap \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{C}_n \cap \mathfrak{T}$$

for all integers n, where the inclusion can be proper: for each prime p, the group $\mathbb{Z}(p^\infty)$ is in $\mathfrak{C}_p \setminus \mathfrak{B}_p$. Nevertheless, for groups of finite exponent we have:

PROPOSITION 2.2 (Delizia, Tortora [8]). – *Let $G \in \mathfrak{C}_n$ be a group of finite exponent. Then $G \in \mathfrak{A}_n$.*

Now we use Theorem 2.1 to obtain characterizations of groups in $\mathfrak{B}_n$ and in $\mathfrak{C}_n$.

THEOREM 2.3 (Delizia, Tortora [8]). – *Let G be a group. Then $G \in \mathfrak{B}_n$ if and only if G is isomorphic to a subgroup of the direct product of an n-abelian π_{n-1}-group by an abelian group without elements of order dividing n.*

PROOF. – Assume $G \in \mathfrak{B}_n$. Let V be a maximal torsion-free subgroup of $Z(G)$ and let W/V be the subgroup consisting of all π_n-elements of $Z(G)/V$. Notice that G/W is torsion because so are $G/Z(G)$ and $Z(G)/V$. Furthermore, if $x \in W \cap G'$, then there exists a π_n-number m such that $x^m \in V$. As $\gcd(m, n-1) = 1$ and $x^{n-1} = 1$, we get $x = 1$. So, W has trivial intersection with G'.

Let $x \in G$. First, suppose $(xW)^n = W$. Then $x^n V \in W/V$ and $x^{ns}V = V$ for some π_n-number s. But $x^{n-1} \in Z(G)$, so that $x \in Z(G)$. Thus $xV \in Z(G)/V$ is a π_n-element. Therefore $x \in W$ and G/W has no elements of order dividing n, that is $G/W \in \mathfrak{B}_n$. Suppose now $(xG')^n = G'$. Then $x^n \in G'$, so $x^{n(n-1)} = 1$. This implies $x^{n-1} = 1$. Hence $x \in G'$ and $G/G' \in \mathfrak{B}_n$.

Finally, since G is isomorphic to a subgroup of $G/W \times G/G'$, the claim follows by (*i*) of Theorem 2.1.

The converse is clear. □

THEOREM 2.4 (Delizia, Tortora [8]). – *Let G be an n-abelian group and denote by T its torsion group. Then $G \in \mathfrak{C}_n$ if and only if $T = A \times B$, where A is a π_{n-1}-group, $B = B^n$ is an abelian π'_{n-1}-group, and G/T is a p-divisible abelian group for any prime p dividing n.*

PROOF. – Assume $G \in \mathfrak{C}_n$ and let p be a prime dividing n. Then $n = ap$ for some integer a and, for all $g \in G$, there exists $x \in G$ such that $g = x^n = (x^a)^p \in G^p$. This means that G/T is in $\mathfrak{C}_p$. The rest follows by (ii) of Theorem 2.1.

Conversely, given $g \in G$, we have $gT = x^n T$ for some $x \in G$: in fact, G/T is n-divisible. Thus $g^{-1}x^n \in T$ and, by $(*)$, there exists $y \in T$ such that $g^{-1}x^n = y^n$. Therefore $g = x^n y^{-n} = (xy^{-1})^n$, that is $G = G^n$. □

Notice that in Theorem 2.4 one cannot replace the hypothesis that G is n-abelian by the weaker hypothesis that A is n-abelian. For example, consider the wreath product G of the cyclic group of order 2 by $\mathbb{Q}$. The torsion part T of G is the base group, that is an infinite group of exponent 2. Moreover, $G/T = \mathbb{Q}$. Finally $Z(G) = 1$ and so G is not n-abelian for all $n \neq 0, 1$. In particular, $G \notin \mathfrak{C}_n$.

3. – n-Levi and n-Bell groups

In [9], a group G is said to be *n-Levi* if $[x^n, y] = [x, y]^n$ for all $x, y \in G$, and *n-Bell* if $[x^n, y] = [x, y^n]$ for all $x, y \in G$. Following [5], we also say that G is a *Levi group* (resp. *Bell group*) if it is n-Levi (resp. n-Bell) for some integer $n \neq 0, 1$. The class of n-Levi groups clearly includes all 2-Engel groups, for any integer n, and all groups with n-abelian normal closures. Consequently, n-abelian groups are examples of n-Levi groups. The converse is not true in general: there exist n-Levi groups which are not m-abelian for any $m \neq 0, 1$. For example, if G is a (non-abelian) torsion-free 2-Engel group, then G is n-Levi for any n. On the other hand, if G were m-abelian for some $m \neq 0, 1$, the identity $(xy)^m = x^m y^m [y, x]^{m(m-1)/2}$ would imply $[x, y] = 1$ for all $x, y \in G$, which is impossible.

It is also obvious that any n-Levi group is n-Bell. Then, for a group G, each of the following conditions is a consequence of the previous one:

(i) *the normal closure x^G is n-abelian for all $x \in G$;*
(ii) *G is an n-Levi group;*
(iii) *G is an n-Bell group.*

If $n = 2$ it can be easily seen that these three conditions are equivalent, since each of them is equivalent to the 2-Engel condition. A similar result holds when $n = 3$.

THEOREM 3.1 (Kappe, Morse [10]). – *For a group G the following conditions are equivalent:*

(i) *x^G is 3-abelian for all $x \in G$;*
(ii) *G is 3-Levi;*
(iii) *G is 3-Bell;*
(iv) *G is 3-Engel (i.e. $[x, y, y, y] = 1$) and $[x, y, y]^3 = 1$ for all $x, y \in G$.*

In [11], Kappe and Morse proved that the equivalence is true even when $n = p$ is a prime and G is a metabelian p-group. However, in general, such conditions are not equivalent: Brandl and Kappe [4] constructed a metabelian 2-group in which the law $[x^4, y] = [x, y^4]$ does not imply $[x^4, y] = [x, y]^4$. An easier counterexample is then $SL(2, 5)$. It has a 6-Bell subgroup which is not 6-Levi and it is 30-Bell but not 30-Levi [9, Kappe]. We also point out that Delizia, Moravec and Nicotera showed in [6] that there exist n-Bell groups which are not m-Levi for any $m \neq 0, 1$. Therefore the class of Levi groups is properly contained in the class of Bell groups. Nevertheless, these two classes coincide if we consider only locally graded groups [6].

Recall that a group is locally graded if every non-trivial finitely generated subgroup has a non-trivial finite image. The class of locally graded groups is rather wide, since it includes locally (soluble-by-finite) groups, as well as residually finite groups. In the realm of locally graded groups, every torsion n-Bell groups is locally finite.

THEOREM 3.2 (Delizia, Moghaddam, Rhemtulla [5]). – *If G is a locally graded n-Bell group, then the elements of finite order in G form a locally finite subgroup. In particular, G is an extension of a locally finite group by a torsion-free nilpotent group of class at most* 2 (see also [3]).

In any group G the set $R_2(G) = \{x \in G : [x, y, y] = 1 \text{ for any } y \in G\}$ of all right 2-Engel elements of G is always a characteristic subgroup [12]. It plays the same role for n-Bell groups as the centre does for n-abelian groups.

THEOREM 3.3 (Kappe [9] and Brandl, Kappe [4]). – *Let G be an n-Bell group. Then $G/R_2(G)$ has finite exponent dividing $n(n-1)$.*

The question then arises whether $R_2(G)$ can be replaced by the second centre in Theorem 3.3. In fact, given an n-Bell group, the exponent of $G/Z_2(G)$ is always finite [5, Delizia, Moghaddam, Rhemtulla]. It divides $3n^2(n-1)^2/2$, and $3n(n-1)$ when the group is n-Levi [17, Tortora]. But, in this latter case, the bound is also the best possible [5]. Notice also that, if G is a torsion-free nilpotent group of class two, then G is an n-Levi group such that $G/Z(G)$ is torsion-free [17].

The next result shows that locally finite n-Bell groups can be represented similarly to torsion n-abelian groups (compare with Theorem 1.1).

THEOREM 3.4 (Brandl, Kappe [4] and Tortora [17]). – *Let G be a locally finite n-Bell group. Then $G = A \times B \times C$ where A is a π_n-group, B is a π_{n-1}-group and C is a 2-Engel $\pi'_{n(n-1)}$-group. Furthermore, $A^n \leq R_2(G)$ and $B^{n-1} \leq R_2(G)$*

As a consequence of Theorem 3.4 we obtain structural results about n-Bell groups for special values of n.

COROLLARY 3.5. – *Let G be an n-Bell group.*

(*i*) *If $n = 3$, then G is nilpotent of class at most* 4 (Kappe, Morse [10]).
(*ii*) *If $n = 4$, then G is locally nilpotent* (Brandl, Kappe [4]).

COROLLARY 3.6 (Tortora [17]). – *Let G be a locally graded n-Bell group.*

(*i*) *If $|n|$ and $|n-1|$ are both prime powers, then G is locally nilpotent.*
(*ii*) *If either $|n|$ or $|n-1|$ is equal to $2^a p^b$ where p is a prime and a, b are non-negative integers, then G is locally soluble.*

4. – An arithmetic approach

We begin this section with some information on the sets $\mathbb{E}(G), \mathbb{L}(G)$ and $\mathbb{B}(G)$ of all integers n for which a given group G is n-abelian, n-Levi or n-Bell respectively, i.e.:

$$\mathbb{E}(G) = \{n \in \mathbb{Z} \mid (xy)^n = x^n y^n \text{ for all } x, y \in G\},$$

$$\mathbb{L}(G) = \{n \in \mathbb{Z} \mid [x^n, y] = [x, y]^n \text{ for all } x, y \in G\},$$

$$\mathbb{B}(G) = \{n \in \mathbb{Z} \mid [x^n, y] = [x, y^n] \text{ for all } x, y \in G\}.$$

These subsets of $\mathbb{Z}$ are multiplicative semigroups containing 0 and 1. It is also easy to see that if n belongs to one of them, then so does $1 - n$.

The set $\mathbb{E}(G)$ is called the *exponent semigroup* of G. An arithmetic characterization of $\mathbb{E}(G)$ for an arbitrary group G was obtained by Levi ([14], see also [9]). Following [9], we have that $\mathbb{E}(G)$ is either $\{0, 1\}$ or a *Levi system*, that is a subset W of $\mathbb{Z}$ satisfying the following conditions (here $[n]_w$ denote the residue class of n modulo w):

(*i*) $n, m \in W$ implies $nm \in W$;
(*ii*) $n \in W$ implies $1 - n \in W$;
(*iii*) $0 \in W$;
(*iv*) there exists $w \in W, w > 0$, such that for all $n \in W$ we have $n^2 \equiv n \ (mod\ w)$ and $[n]_w \subseteq W$;
(*v*) $[n]_w, [n+1]_w \subseteq W$ implies $[n]_w = [0]_w$.

In other words, $\mathbb{E}(G)$ is either $\{0, 1\}$ or $\mathbb{Z}$ or a set of residue classes modulo some integers depending on G. More precisely, let $q_1, q_2, \ldots, q_t$ be integers with $q_i > 1$ and $\gcd(q_i, q_j) = 1$ for $i \neq j$. Let $B(q_1, q_2, \ldots, q_t)$ be the subset of $\mathbb{Z}$ which is the union of 2^t residue classes modulo q_i satisfying each a system of congruences $m \equiv \delta_i \ (mod\ q_i)$, where $i = 1, \ldots, t$ and $\delta_i \in \{0, 1\}$. Then $\mathbb{E}(G) = \{0, 1\}$, or $\mathbb{Z}$, or $B(q_1, \ldots, q_t)$ with $q_i > 2$ (see [9]).

Concerning $\mathbb{L}(G)$ and $\mathbb{B}(G)$, they were introduced by Kappe in [9] and are called respectively the *Levi semigroup* and the *Bell semigroup* corresponding to G. Surprisingly, their characterization is the same as the one that we have for $\mathbb{E}(G)$.

THEOREM 4.1 (Kappe [9]). – *Let W be a subset of $\mathbb{Z}$. Then the following statements are equivalent:*

(*i*) $W = \mathbb{L}(H)$ *for some group H;*
(*ii*) $W = \mathbb{B}(K)$ *for some group K;*
(*iii*) $W = \{0, 1\}$ *or a Levi system;*
(*iv*) $W = \{0, 1\}, \mathbb{Z}$ *or* $B(q_1, \ldots, q_t)$ *with* $q_i > 2$.

Following [8], with $f_n : x \in G \mapsto x^n \in G$, now we introduce the set

$$\mathbb{A}(G) = \{n \in \mathbb{Z} : f_n \in \mathrm{Aut}(G)\}.$$

This is a subsemigroup of $\mathbb{E}(G)$ containing 1. Obviously $0 \in \mathbb{A}(G)$ if and only if $G = \{1\}$; in that case $\mathbb{A}(G) = \mathbb{Z}$. We may therefore assume $G \neq \{1\}$ in the sequel.

LEMMA 4.2 (Delizia, Tortora [8]). – *Let G be a group and suppose that $\mathbb{A}(G)$ satisfies one of the following conditions:*

(*i*) $2 \in \mathbb{A}(G)$;
(*ii*) $3 \in \mathbb{A}(G)$;
(*iii*) $n \in \mathbb{A}(G)$ *and* $-n \in \mathbb{A}(G)$ *for some* $n \neq 0$;
(*iv*) $n \in \mathbb{A}(G)$ *and* $m \in \mathbb{A}(G)$ *with* $\gcd(n-1, m-1) \leq 2$.

Then G is abelian.

Notice that $\mathbb{E}(G) = \mathbb{Z}$ if and only if G is abelian. On the other hand, it is easy to show that $\mathbb{A}(G) = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ if and only if G is isomorphic to a direct sum of copies of $\mathbb{Q}$. However, G is abelian if and only if $-1 \in \mathbb{A}(G)$. So, in that case, $-n \in \mathbb{A}(G)$ for all $n \in \mathbb{A}(G)$. Furthermore, if G is abelian, $n \in \mathbb{A}(G)$ if and only if $p \in \mathbb{A}(G)$ for all primes p dividing n. The semigroup $\mathbb{A}(G)$ is thus generated by -1 and all primes in $\mathbb{A}(G)$. Therefore, if $\pi(G)$ denotes the set of all primes involved in the decomposition of orders of elements of G, and $\delta(G)$ denotes the set of all primes p such that G is p-divisible, one can easily realize that:

THEOREM 4.3 (Delizia, Tortora [8]). – *Let G be an abelian group. Then $\mathbb{A}(G)$ is the multiplicative subsemigroup of $\mathbb{Z}$ generated by $(\delta(G) \setminus \pi(G)) \cup \{-1\}$. In particular:*

(*i*) *if G is torsion, then $\mathbb{A}(G)$ is generated by $(\mathbb{P} \setminus \pi(G)) \cup \{-1\}$;*
(*ii*) *if G is torsion-free, then $\mathbb{A}(G)$ is generated by $\delta(G) \cup \{-1\}$.*

By Theorem 4.3, $\mathbb{A}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\} = \mathbb{A}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ and, if G is a torsion abelian group, then $\mathbb{A}(G) = \mathbb{Z} \setminus \cup_{p \in \pi(G)} p\mathbb{Z}$. We also point out that, given a set π of primes, there always exists a torsion-free abelian group G such that $\mathbb{A}(G)$ is the multiplicative subsemigroup of $\mathbb{Z}$ generated by $\pi \cup \{-1\}$. For example, the additive group of all rational numbers with a π-number as denominator has the above properties.

Finally, let G be a non-abelian group and suppose that G is n-abelian for some $n \neq 0, 1$, so $\{0, 1\} \subset \mathbb{E}(G) \subset \mathbb{Z}$. By [14] (see also [9]), the set $\mathbb{E}_0(G)$ of all integers n such that G is n-abelian and $G^n \leq Z(G)$ is an ideal of $\mathbb{Z}$. Let $\mathbb{E}_0(G) = w\mathbb{Z}$. Thus $w > 2$, G is w-abelian, $G^w \leq Z(G)$ and w is the least positive integer with such properties. Moreover, if $w = q_1 q_2 \dots q_t$ is a factorization of w (with $t \geq 1$, $q_i > 2$ for all $i = 1, 2, \dots, t$ and $\gcd(q_i, q_j) = 1$ for $i \neq j$), then $\mathbb{E}(G) = B(q_1, q_2, \dots, q_t)$. Since $n, n-1 \in \mathbb{E}(G)$ for all $n \in \mathbb{A}(G)$, we have $n - 1 \equiv 0 \pmod{w}$. Hence:

THEOREM 4.4 (Delizia, Tortora [8]). – *For each group G, $\mathbb{A}(G) \subseteq [1]_w$.*

In general, the equality does not hold in the theorem above. For example, consider a non-abelian group H of exponent 3, and the direct product G of H by the cyclic group of order 4. Clearly, $\mathbb{E}_0(G) = 3\mathbb{Z}$. But, $4 \notin \mathbb{A}(G)$ since G has an element of order 4. Thus $\mathbb{A}(G) \neq [1]_3$.

REFERENCES

[1] J. L. ALPERIN, *A classification of n-abelian groups*, Canad. J. Math. **21** (1969), 1238-1244.

[2] R. BAER, *Factorization of n-soluble and n-nilpotent groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 15-26.

[3] R. BRANDL, *Infinite soluble groups with the Bell property: a finiteness condition*, Monatsh. Math. **104** (1987), 191-197.

[4] R. BRANDL - L.-C. KAPPE, *On n-Bell groups*, Comm. Algebra, **17** (1989), 787-807.

[5] C. DELIZIA - M. R. R. MOGHADDAM - A. RHEMTULLA, *The structure of Bell groups*, J. Group Theory, **9** (2006), 117-125.

[6] C. DELIZIA - P. MORAVEC - C. NICOTERA, *Locally graded Bell groups*, Publ. Math. Debrecen, **71** (2007), 1-9.

[7] C. DELIZIA - A. TORTORA, *On n-abelian groups and their generalizations*, Groups St Andrews 2009 in Bath, Volume I, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **387** (Cambridge University Press, Cambridge, 2011), 244-255.

[8] C. DELIZIA - A. TORTORA, *Some special classes of n-abelian groups*, International J. Group Theory, **1** no. 2 (2012), 19-24.

[9] L.-C. KAPPE, *On n-Levi groups*, Arch. Math. **47** (1986), 198-210.

[10] L.-C. KAPPE - R. F. MORSE, *Groups with 3-abelian normal closure*, Arch. Math. **51** (1988), 104-110.

[11] L.-C. KAPPE - R. F. MORSE, *Levi-properties in metabelian groups*, Contemp. Math. **109** (1990), 59-72.

[12] W. P. KAPPE, *Die A-Norm einer Gruppe*, Illinois J. Math. **5** (1961), 187-197.

[13] F. W. Levi, *Notes on Group Theory I, II*, J. Indian Math. Soc. **8** (1944), 1-9.
[14] F. W. Levi, *Notes on group theory VII*, J. Indian Math. Soc. **9** (1945), 37-42.
[15] D. MacHale, *Power mappings and group morphisms*, Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A **74** (1974), 91-93.
[16] E. Schenkman - L. I. Wade, *The mapping which takes each element of a group onto its nth power*, Amer. Math. Monthly, **65** (1958), 33-34.
[17] A. Tortora, *Some properties of Bell groups*, Comm. Algebra, **37** (2009), 431-438.
[18] H. F. Trotter, *Groups in which raising to a power is an automorphism*, Canad. Math. Bull. **8** (1965), 825-827.

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
Via Giovanni Paolo II, 132 - 84084 - Fisciano (SA), Italy
E-mail: antortora@unisa.it

Received November 30, 2012 and accepted April 26, 2013

Andrea Tosin: Un approccio multiscala alla dinamica delle folle mediante misure che evolvono nel tempo

Andrea Tosin[1]
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
email: andrea.tosin@polito.it

Sunto

Le dinamiche di una folla sono determinate principalmente dalle interazioni tra i pedoni. Ciò dipende dal fatto che questi ultimi, anziché essere passivamente soggetti alle leggi dell'inerzia, sono in grado di sviluppare attivamente strategie comportamentali in funzione della presenza di altri individui nell'ambiente. Ad esempio, essi deviano dai loro percorsi preferenziali quando incontrano altri pedoni.

A causa dell'intrinseca granularità (discretezza) del sistema (il numero N di pedoni può anche essere elevato, tuttavia l'approssimazione $N \to \infty$ non è solitamente coerente), le interazioni si descrivono meglio a livello individuale. D'altra parte, una rappresentazione d'insieme della folla è spesso preferibile rispetto ad una focalizzata sui singoli soggetti, al fine di cogliere il comportamento medio di gruppo che emerge spontaneamente dalle interazioni (auto-organizzazione). L'approccio stocastico basato sulla teoria della misura, che sarà discusso in questa comunicazione, offre strumenti concettuali utili allo scopo. Esso consente infatti una descrizione euleriana della folla, in cui i pedoni sono assimilati alla distribuzione di probabilità delle loro posizioni nello spazio. Allo stesso tempo, fa discendere la modellizzazione delle interazioni da ragionamenti lagrangiani (stocastici) sui singoli individui. Infine, permette di trattare modelli discreti e continui in modo unitario, nonché di dedurre modelli a scale intermedie con implicazioni interessanti sulle dinamiche risultanti.

Bibliografia

[1] L. Bruno, A. Tosin, P. Tricerri, F. Venuti: "Non-local first-order modelling of crowd dynamics: A multidimensional framework with applications", Appl. Math. Model., 35, 426–445, 2011.

[2] E. Cristiani, B. Piccoli, A. Tosin: "Multiscale modeling of granular flows with applications to crowd dynamics", Multiscale Model. Simul., 9, 155–182, 2011.

[3] B. Piccoli, A. Tosin: "Time-evolving measures and macroscopic modeling of pedestrian flow", Arch. Ration. Mech. Anal., 199, 707–738, 2011.

[1]Borsista post-dottorato INdAM-Compagnia di San Paolo

[4] E. Cristiani, B. Piccoli, A. Tosin: "Modeling self-organization in pedestrians and animal groups from macroscopic and microscopic viewpoints", in G. Naldi, L. Pareschi, G. Toscani (Eds.), Mathematical Modelling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences, 337–364, Birkhäuser, 2010.

[5] B. Piccoli, A. Tosin: "Pedestrian flows in bounded domains with obstacles", Contin. Mech. Thermodyn., 21, 85–107, 2009.

Intervento: Andrea Tosin,
Un approccio multiscala alla dinamica delle folle mediante misure che evolvono nel tempo,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 531–548**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 531-548

Un approccio multiscala alla dinamica delle folle mediante misure che evolvono nel tempo

ANDREA TOSIN

Sunto. – *Questo articolo riguarda la modellizzazione matematica di sistemi complessi viventi, in particolare le folle, mediante leggi di conservazione e metodi della teoria della misura. Introdurremo un quadro modellistico che permette di trattare sistemi dinamici discreti e continui mediante idee fenomenologiche e strumenti matematici comuni, nonché di accoppiare le due descrizioni in un'ottica multiscala. Inoltre presenteremo una teoria qualitativa di buona positura e approssimazione numerica dei problemi ai valori iniziali e discuteremo le sue implicazioni sulla modellistica.*

Abstract. – *This paper deals with models of living complex systems, chiefly human crowds, by methods of conservation laws and measure theory. We introduce a modeling framework which enables one to address both discrete and continuous dynamical systems in a unified manner using common phenomenological ideas and mathematical tools as well as to couple these two descriptions in a multiscale perspective. Furthermore, we present a basic theory of well-posedness and numerical approximation of initial-value problems and we discuss its implications on mathematical modeling.*

1. – Introduzione

Per *sistemi complessi viventi* intendiamo sistemi multi-agente costituiti da individui animati che partecipano a *dinamiche di gruppo* mentre cercano di raggiungere *obiettivi individuali*. Nello specifico, in questo articolo ci occuperemo di folle. Assimileremo i pedoni a *particelle attive*, essendo l'*attività* la capacità di stabilire autonomamente uno o più obiettivi intermedi e finali (ad esempio evitare collisioni con altre particelle, raggiungere una meta) e agire direttamente sulla propria dinamica per raggiungerli, senza essere soggette passivamente a influenze esterne. Ciò origina dinamiche *collettive* basate prevalentemente sulle decisioni e sulle regole di comportamento *individuali*. Talvolta le particelle attive cooperano per raggiungere un obiettivo di gruppo, come nei problemi di *consensus* e di *rendez-vous* [3]. Altre volte, invece, esse non cooperano consapevolmente, il che rende le dinamiche di gruppo più difficili da prevedere e, ciononostante, spesso sorprendentemente ordinate e coordinate: è la cosiddetta *auto-organizzazione* [7].

Per modellizzare simili sistemi è necessario mettere a punto schemi matematici che consentano di gestirne la complessità, in parte dovuta al fatto che la dinamica complessiva è, in definitiva, *multiscala*. Essa si origina dai comportamenti individuali alla scala *microscopica* delle singole particelle. Questi comportamenti, poi, sono "amplificati" dalle interazioni tra le particelle, fino al punto che essi ne inducono di collettivi alla scala *macroscopica* del gruppo non direttamente deducibili dalla conoscenza di quelli individuali. Peraltro, lo stato del gruppo può incidere localmente sulle regole comportamentali adottate dalle singole particelle.

Un'ampia classe di modelli matematici utilizza le cosiddette *leggi di conservazione* o di *bilancio*, che esprimono il fatto che alcune quantità fisiche, quali la massa, la quantità di moto, l'energia del sistema, non variano durante l'evoluzione oppure cambiano per via di specifici meccanismi di produzione/distruzione. Tuttavia i sistemi viventi sono difficilmente confinabili entro stretti principî di bilancio. Ad esempio, la loro capacità di perseguire obiettivi, e di conseguenza di elaborare *strategie comportamentali*, fa sì che essi immettano e rimuovano continuamente energia dal sistema in modi non convenzionali. Non a caso, i principî di entropia normalmente legati all'equiprobabilità degli stati sono messi in discussione dal fatto che l'auto-organizzazione induce configurazioni speciali, tipicamente disomogenee, a discapito di altre più generiche e omogenee [15]. Inoltre è difficile ascrivere le variazioni di quantità di moto a forze "generalizzate" (in qualche senso), perché le dinamiche dei sistemi viventi non sono regolate unicamente dall'inerzia. Beninteso, le particelle attive non sfuggono alle usuali leggi della Fisica, ma possono influenzarle mediante decisioni personali i cui effetti non sono necessariamente assimilabili a quelli di campi di forza esterni. In altre parole, non sarebbe corretto applicare direttamente le stesse idee che permettono di descrivere con successo altri tipi di sistemi passivi, poiché attraverso una simile analogia si perderebbe gran parte delle caratteristiche che differenziano i sistemi viventi dalla materia inerte.

Tra tutti i principî di bilancio classici summenzionati, probabilmente quello meno discutibile è la conservazione della massa: nel descrivere l'evoluzione spazio-temporale di una folla, ha senso assumere che non si verifichino fenomeni di proliferazione o distruzione di pedoni. Si noti che ciò non implica di per sé alcuna specifica dinamica di interazione tra gli individui, ma richiede semplicemente l'invariabilità del loro numero. Quindi le interazioni possono ancora essere meccaniche o non-meccaniche, locali o non-locali, binarie o multiple, e così via.

A partire dal principio di conservazione della massa, in questo articolo sviluppiamo uno schema matematico unificato che permette di modellizzare una folla integrando la descrizione discreta dei pedoni individuali e quella continua del gruppo collettivo. Il punto chiave è la reinterpretazione dell'equazione di continuità in termini di misure astratte caratterizzate da una parte singolare (delte di Dirac), che rappresenta il livello discreto, e una assolutamente continua

(rispetto alla misura di Lebesgue), che rappresenta il livello continuo. In dettaglio, nella Sezione 2 dapprima introduciamo l'equazione astratta e successivamente la particolareggiamo nel caso di modelli di interazione pedonale. Nella Sezione 3 discutiamo l'utilizzo della formulazione con le misure per ottenere modelli discreti, continui e multiscala, mettendo in relazione la struttura della misura con la strategia comportamentale dei pedoni. Nella Sezione 4 esponiamo i risultati qualitativi di base su buona positura e approssimazione numerica del problema di Cauchy per le strutture matematiche multiscala dedotte nelle sezioni precedenti. Infine, nella Sezione 5 discutiamo come questi risultati qualitativi possano fornire utili linee guida per la costruzione di modelli specifici non solo fisicamente realistici ma anche matematicamente solidi.

2. – Modelli matematici con misure che evolvono nel tempo

Dal punto di vista matematico, la *massa* di un sistema d-dimensionale ($d = 1, 2, 3$ per scopi pratici) al tempo t è una misura positiva di Radon $\mu_t : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ definita sulla σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nello spazio fisico $\mathbb{R}^d$. Nel nostro caso, per ogni insieme misurabile $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ il numero $\mu_t(E) \geq 0$ fornisce una stima dell'affollamento della regione spaziale $E \subseteq \mathbb{R}^d$ all'istante t (idealmente, possiamo pensarlo come il numero "medio" di pedoni che occupano la regione E al tempo t). In particolare, se consideriamo una folla composta da un numero totale N di pedoni allora, in base al principio di conservazione della massa, dovrà essere $\mu_t(\mathbb{R}^d) = N$ per ogni t. Ciò si può esprimere, in termini dinamici, dicendo che la misura μ_t soddisfa l'equazione:

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_t v_t) = 0, \tag{1}$$

dove $v_t = v_t(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è, al tempo t, un campo di velocità di trasporto. Chiaramente, la scrittura (1) è solo formale e va intesa nell'opportuno senso debole delle distribuzioni. Per ogni funzione test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $t \in (0, T_{\max}]$, essendo $T_{\max} > 0$ un tempo finale, essa significa:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, d\mu_t(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, d\mu_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} v_s(x) \cdot \nabla\phi(x)\, d\mu_s(x)\, ds, \tag{2}$$

dove μ_0 è una misura positiva di Radon da assegnare, che rappresenta la distribuzione iniziale della folla. Se la velocità di trasporto è limitata, ossia esiste una costante $V_{\max} > 0$ tale che

$$|v_t(x)| \leq V_{\max}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0, T_{\max}],$$

non è difficile mostrare che la (2) implica effettivamente $\mu_t(\mathbb{R}^d) = \mu_0(\mathbb{R}^d)$ per ogni

$t \in (0, T_{\max}]$, quindi di fatto la conservazione del numero totale di pedoni così come fissato all'istante iniziale. Basta infatti prendere una successione $\{\phi_m\}_{m\geq 1} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ di funzioni test tali che $0 \leq \phi_m(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e ogni $m \geq 1$, con inoltre $\phi_m(x) \to 1$ e $\nabla\phi_m(x) \to 0$ puntualmente per $m \to \infty$, e usare il teorema della convergenza dominata (l'esistenza di una tale successione è garantita dal lemma di Urysohn).

2.1 – *Modelli di interazione tra i pedoni*

Le equazioni (1), (2) forniscono l'evoluzione nel tempo della distribuzione μ_t della folla purché sia assegnata una velocità di trasporto. Per quanto detto nell'Introduzione, data l'assenza di un bilancio di quantità di moto da accoppiare alla conservazione della massa, è necessario modellizzare direttamente il campo v_t.

Altri modelli di folla disponibili in letteratura seguono un'idea simile, si vedano ad esempio [4, 5]. Tipicamente, la velocità dei pedoni è ricavata da una relazione costitutiva empirica, detta *diagramma fondamentale*, che la esprime come una funzione nota della distribuzione spaziale della folla in condizioni (localmente) stazionarie omogenee. Qui, invece, proponiamo una modellizzazione di v_t maggiormente incentrata sulle interazioni tra i pedoni, cercando di fondare la dinamica del sistema direttamente sull'idea di comportamento attivo discussa nell'Introduzione. A questo scopo, scriviamo la velocità come la somma di due contributi:

$$v_t(x) := v_{\mathrm{d}}(x) + v_{\mathrm{i}}[\mu_t](x), \tag{3}$$

dove la notazione con le parentesi quadre indica una dipendenza funzionale dalla misura μ_t.

La funzione $v_{\mathrm{d}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è la *velocità desiderata*, cioè la velocità con cui un pedone isolato si dirigerebbe verso la propria destinazione. Essa non dipende dalla dinamica del sistema, ma è determinata a priori sulla base della geometria del dominio, inclusa la presenza di eventuali ostacoli intesi come buchi in $\mathbb{R}^d$, ovvero zone non accessibili ai pedoni (vedi Figura 1a). Viceversa, la funzione $v_{\mathrm{i}}[\mu_t] : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è la *velocità di interazione*, cioè la correzione che i pedoni apportano alla velocità desiderata a causa delle interazioni reciproche. Essa tiene conto del fatto che gli individui cercano generalmente di evitare le zone troppo affollate, dunque ha un carattere essenzialmente *repulsivo* (vedi Figure 1b-c). Inoltre il suo effetto è *non locale*, perché i pedoni anticipano le proprie decisioni sintetizzando l'informazione sulla distribuzione di folla nelle immediate vicinanze. In base a queste considerazioni, poniamo:

$$v_{\mathrm{i}}[\mu_t](x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)\eta_{\mathcal{S}(x)}(y)\, d\mu_t(y), \tag{4}$$

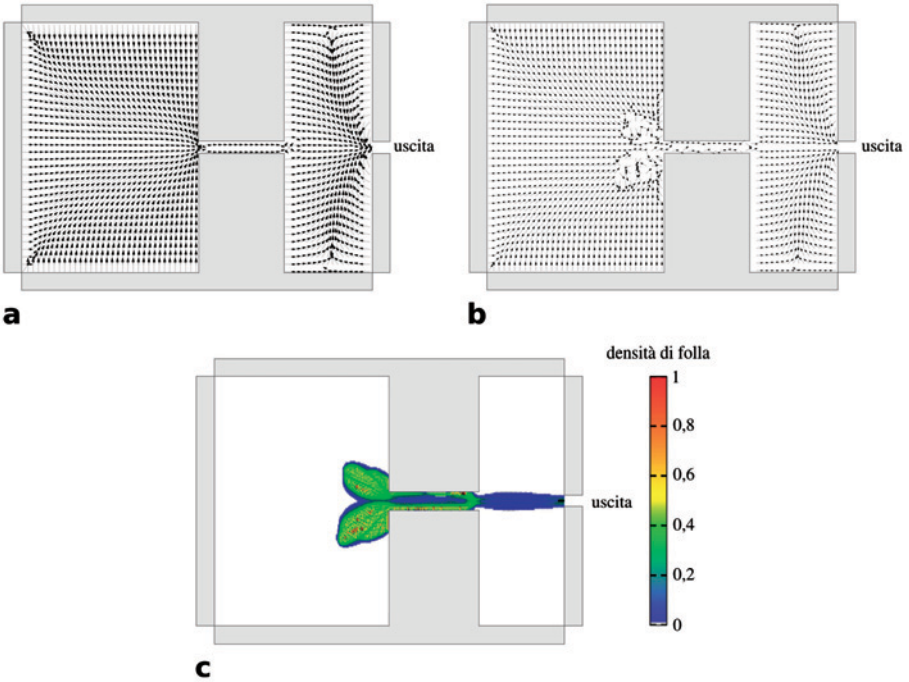


Fig. 1. – **a.** Esempio di campo di velocità desiderata v_{d} in un dominio costituito da due aree comunicanti mediante un corridoio stretto. **b.** Velocità "vera" v (cfr. l'equazione (3)) quando alla velocità desiderata si sovrappone la velocità di interazione v_{i} tra i pedoni. **c.** Campo di densità di folla che genera la velocità vera illustrata in (b).

dove:

- $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è il *nucleo di interazione*, che descrive come l'individuo in x, detto *pedone test*, è repulso da un individuo in y, detto *pedone campo*. Solitamente, anche in virtù del principio di invarianza galileiana, la funzione K dipende da x e y attraverso la loro distanza $|y - x|$ lungo la linea che congiunge i due punti. Un prototipo è:

$$K(x, y) \sim -\frac{1}{|y - x|} \cdot \frac{y - x}{|y - x|}$$

per $|y - x|$ "non troppo" piccola, mentre per $y \to x$ è necessario introdurre una regolarizzazione che eviti la singolarità sia del modulo sia del versore;

- $\eta_{\mathcal{S}(x)} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ è una *funzione di taglio*, che limita l'influenza sul pedone test in x ai pedoni campo contenuti all'interno della *regione di sensibilità* $\mathcal{S}(x) \subset \mathbb{R}^d$ del primo. Tipicamente, $\eta_{\mathcal{S}(x)}$ è regolare e ha supporto compatto in $\mathcal{S}(x)$ (ad esempio, può essere un'opportuna mollificata della funzione caratteristica dell'insieme $\mathcal{S}(x)$). Il prototipo di regione di sensibilità è un

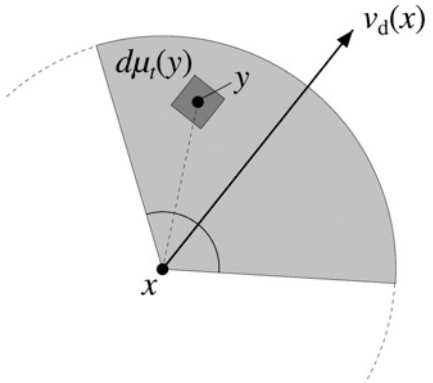


Fig. 2. – Regione di sensibilità del pedone test in x.

settore circolare centrato in x, simmetrico rispetto alla direzione locale della velocità desiderata $v_d(x)$ e orientato nel verso di quest'ultima (vedi Figura 2). Ciò traduce l'*anisotropia* delle interazioni tra i pedoni: il pedone test è sensibile ai pedoni campo che ha davanti a sé ma non a quelli che ha dietro. Il raggio del settore circolare corrisponde alla massima distanza alla quale un pedone campo può esercitare un'influenza sul pedone test, mentre l'angolo di apertura del settore identifica il cono visivo di quest'ultimo.

3. – Approccio multiscala

Le equazioni (1), (3), (4) forniscono un quadro modellistico unificato all'interno del quale rientrano sia *dinamiche discrete* sia *dinamiche continue*. Il punto chiave è la *struttura spaziale* della misura μ_t.

Si hanno dinamiche discrete se la struttura spaziale di μ_t è discreta:

$$\mu_t = \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i(t)}, \tag{5}$$

essendo $\{x_i(t)\}_{i=1}^{N} \subset \mathbb{R}^d$ l'insieme di tutti e soli i punti su cui sono distribuiti i pedoni al tempo t. Inserendo la (5) nelle equazioni (2), (4) si ottiene il sistema:

$$\dot{x}_i = v_d(x_i) + \sum_{j=1}^{N} K(x_i, x_j)\eta_{S(x_i)}(x_j) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{6}$$

che caratterizza completamente l'evoluzione della distribuzione dei pedoni.

Si hanno invece dinamiche continue se la struttura spaziale di μ_t è continua, cioè se vale la proporzionalità tra massa e volume (nel senso del teorema di

Radon-Nikodym):

$$d\mu_t(x) = \rho_t(x)\,dx, \tag{7}$$

essendo ora $\rho_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ la *densità di massa* della distribuzione dei pedoni al tempo t, tale che $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_t(x)\,dx = N$ (quindi, in particolare, $\rho_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$ per ogni t). In questo contesto, il supporto in $\mathbb{R}^d$ di ρ_t è concettualmente l'analogo dell'insieme $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$ visto sopra. Inserendo la (7) nelle equazioni (2), (4) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(x) + \nabla \cdot \left[\rho_t(x)\left(v_{\mathrm{d}}(x) + \int_{\mathbb{R}^d} K(x,\, y)\eta_{\mathcal{S}(x)}(y)\rho_t(y)\,dy\right)\right] = 0, \tag{8}$$

cioè una legge di conservazione con flusso non locale che caratterizza a sua volta completamente l'evoluzione della distribuzione dei pedoni.

Le equazioni (6), (8) descrivono lo stesso sistema e le stesse dinamiche? Sì e no. Esse esprimono due modelli matematici diversi dello stesso sistema fisico, che tuttavia discendono dalla struttura comune astratta (1)-(4). Come tali, essi sono accomunati dalla descrizione fenomenologica delle *interazioni microscopiche individuali*, espresse dal nucleo K e dalla funzione di taglio $\eta_{\mathcal{S}(\cdot)}$, ma si differenziano per l'*effetto macroscopico collettivo* predetto, che dipende dalla struttura spaziale della misura μ_t nell'equazione (4).

Più precisamente, è utile interpretare la struttura spaziale di μ_t come l'equivalente modellistico della *percezione* del pedone test, la quale condiziona il modo in cui quest'ultimo reagisce agli individui intorno a sé. Ciò corrisponde all'espressione di una *strategia comportamentale*, che può avere un impatto rilevante sulle leggi classiche del moto (si veda anche [2] per una traduzione modellistica diversa del concetto di percezione, comunque sempre legata all'espressione di una strategia comportamentale dei pedoni). Perciò, anche se le regole elementari di interazione sono sempre le stesse, il loro effetto può essere estremamente diverso a causa del "filtro" della percezione. Una simile fenomenologia è possibile perché una folla è un sistema *vivente* e *granulare*: il numero di individui coinvolti, per quanto complessivamente elevato, è localmente sempre finito e "piccolo" (almeno rispetto all'ordine di grandezza del numero di Avogadro nella gasdinamica classica), per cui le dinamiche collettive su larga scala possono essere molto sensibili alle scelte individuali su scale inferiori.

Il concetto di percezione si può formalizzare modellisticamente mediante un parametro $\theta \in [0,\, 1]$ da utilizzare per determinare una *scala* di strutture spaziali della misura μ_t:

$$\mu_t = \theta \sum_{j=1}^{N} \delta_{x_j(t)} + (1-\theta)\rho_t \mathcal{L}^d, \tag{9}$$

dove $\mathcal{L}^d$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$. Inserendo questa rappresentazione

nell'equazione (4) si vede come la velocità di trasporto (3):

$$v_t(x) = v_{\mathrm{d}}(x) + \theta \sum_{j=1}^{N} K(x, x_j)\eta_{S(x)}(x_j) + (1-\theta)\int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)\eta_{S(x)}(y)\rho_t(y)\,dy \tag{10}$$

dipenda ora da un contributo pesato di dinamiche discrete e continue. Chiaramente, le due scelte discusse in precedenza corrispondono ai casi particolari $\theta = 0$ (per le dinamiche continue) e $\theta = 1$ (per le dinamiche discrete). Tuttavia, se $0<\theta<1$ il formalismo introdotto consente di trattare, più in generale, dinamiche ibride né completamente discrete né completamente continue [8]. Inoltre, il trasporto della misura (9) mediante l'equazione (1) con il campo di velocità (10) permette addirittura di dare una rappresentazione puramente continua della distribuzione dei pedoni che evolve in base a dinamiche genuinamente discrete o, viceversa, una rappresentazione puramente discreta che evolve in base a dinamiche genuinamente continue. Infine, se il parametro di percezione θ è reso variabile in spazio il modello introdotto permette di differenziare i due tipi di dinamiche in zone diverse del dominio (si veda ad esempio [9], dove quest'idea è utilizzata nel caso del traffico veicolare per privilegiare dinamiche continue lungo tratti di strada rettilinei e dinamiche discrete agli incroci, dove la percezione dei guidatori è maggiormente sensibile alle auto provenienti da direzioni confluenti).

4. – Teoria di base

Una volta che sia assegnata una misura iniziale, diciamo $\bar{\mu}$, il modello basato sull'equazione (1) con il campo di velocità del tipo (3)-(4) dà luogo ad un problema di Cauchy che rientra nella seguente classe:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_t v[\mu_t]) = 0 & x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0, T_{\max}] \\ \mu_0 = \bar{\mu}, \end{cases} \tag{11}$$

dove con $v[\mu_t]$ abbiamo indicato un generico campo di velocità completamente determinato dalla misura μ_t (incognita).

In generale μ_t nasce come misura finita su $\mathbb{R}^d$ ma non come misura di probabilità. Infatti sappiamo che se $\bar{\mu}(\mathbb{R}^d) = N$ allora $\mu_t(\mathbb{R}^d) = N$ per ogni istante $t \leq T_{\max}$ successivo a quello iniziale, ma ovviamente dovrà essere $N > 1$ affinché il modello descriva situazioni interessanti. Tuttavia, per la trattazione analitica del problema (11) conviene immaginare che, a prescindere dalla sua derivazione modellistica, μ_t sia riscalata rispetto al numero totale N di pedoni in modo che sia formalmente una probabilità. In questo modo è possibile individuare più agevolmente gli spazi funzionali e le metriche giuste per inquadrare il problema (11).

Pertanto d'ora in avanti supporremo di aver implicitamente effettuato il suddetto riscalamento (continuando peraltro a chiamare μ_t la misura riscalata) ([1]).

Un opportuno senso debole in cui il problema (11) può essere inteso è quello specificato dall'equazione (2) (in cui si ponga $\mu_0 = \bar{\mu}$). In particolare, la (2) è ben definita se $t \mapsto \mu_t$ è continua come mappa dall'intervallo $(0, T_{\max}]$ in qualcuno degli spazi metrici $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ delle misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$ con momento p-esimo finito ($p \geq 1$, si veda [1] come riferimento tecnico). Senza perdita di generalità fisseremo $p = 1$, cioè considereremo lo spazio $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$, che è completo con la metrica

$$W_1(\mu, \nu) := \sup_{\varphi \in \mathrm{Lip}_1(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d(\mu - \nu) \qquad (\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)),$$

detta (*prima*) *distanza di Wasserstein*. In questa definizione, $\mathrm{Lip}_1(\mathbb{R}^d)$ indica l'insieme delle funzioni lipschitziane su $\mathbb{R}^d$ con costante di Lipschitz non superiore a 1.

In definitiva, diremo che:

DEFINIZIONE 4.1. – *Una curva $\mu_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ è soluzione (debole) del problema* (11) *se essa soddisfa l'equazione* (2), *con $\mu_0 = \bar{\mu}$, per ogni $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $t \in (0, T_{\max}]$.*

La teoria di base per il problema (11) dipende essenzialmente dalle proprietà del campo di velocità. Formuliamo ora in proposito alcune ipotesi, valide per campi v sufficientemente generici (cioè non riferite esplicitamente alla struttura (3)-(4)), dalle quali seguono sia la buona positura del problema di Cauchy sia la convergenza di un opportuno schema numerico, basato sul trasporto di misure, per l'approssimazione delle soluzioni.

IPOTESI 4.2. – *Supponiamo che il campo di velocità v verifichi le seguenti proprietà:*

(i) limitatezza uniforme: *esiste una costante $V_{\max} > 0$ tale che*

$$|v[\mu](x)| \leq V_{\max}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \forall \mu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d);$$

([1]) Osserviamo che se μ_t è riscalata ad una misura di probabilità allora la velocità di interazione (4) dev'essere coerentemente riscritta come

$$v_{\mathrm{i}}[\mu_t](x) = N \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \eta_{S(x)}(y) \, d\mu_t(y)$$

per effetto del riscalamento.

(ii) lipschitzianità: *esiste una costante* $\mathrm{Lip}(v) > 0$ *tale che*

$$|v[\nu](y) - v[\mu](x)| \leq \mathrm{Lip}(v)(|y - x| + W_1(\mu, \nu)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \ \forall \mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d);$$

(iii) linearità debole: *per ogni* $a \in [0, 1]$ *e ogni coppia di misure* $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ *si ha*

$$v[a\mu + (1-a)\nu] = av[\mu] + (1-a)v[\nu].$$

Osservazione. – Abbiamo chiamato l'ipotesi 4.2(iii) *linearità debole* in quanto essa richiede la linearità della mappa $\mu \mapsto v[\mu]$ limitatamente alle sole combinazioni lineari *convesse*.

È importante tenere presente che le Ipotesi 4.2 non intendono essere strettamente minimali dal punto di vista analitico tecnico. Esse sono prima di tutto pensate per modelli da applicare a casi studio realistici; in questo senso, hanno il pregio di essere verificabili in modo relativamente agevole in casi concreti. Inoltre, esse consentono dimostrazioni che non richiedono tecniche sofisticate di trasporto ottimo.

4.1 – *Buona positura del problema* (11)

Usando la sola ipotesi 4.2(ii) è possibile provare la seguente stima a priori sulle soluzioni del problema (11): se $\mu^1_\bullet, \mu^2_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ sono due soluzioni corrispondenti a due dati iniziali $\bar{\mu}^1, \bar{\mu}^2 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ esiste una costante $\mathcal{C} > 0$ tale che

$$W_1(\mu^1_t, \mu^2_t) \leq \mathcal{C} W_1(\bar{\mu}^1, \bar{\mu}^2), \qquad \forall t \in (0, T_{\max}]. \tag{12}$$

Dunque la soluzione di (11), se esiste, è unica e inoltre dipende con continuità dal dato iniziale. La costante $\mathcal{C}$ dipende dalla costante di Lipschitz $\mathrm{Lip}(v)$ della velocità e dal tempo finale $T_{\max}$.

Per la dimostrazione della (12) si veda, ad esempio, [6]. Qui ci limitiamo a precisare che la tecnica classica fa uso della seguente *formula di rappresentazione* delle soluzioni del problema (11): se $\mu_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ è una soluzione corrispondente al dato iniziale $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ allora, introdotta la *mappa di flusso* $\gamma_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definita da:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\gamma_t(x) = v[\mu_t](\gamma_t(x)), & x \in \mathbb{R}^d, \ t \in (0, T_{\max}] \\ \gamma_0(x) = x, & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{13}$$

risulta $\mu_t = \gamma_t \# \bar{\mu}$, dove $\#$ è l'operatore di trasporto o *push forward* (cioè $\mu_t(E) = \bar{\mu}(\gamma_t^{-1}(E))$ per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$). Questa formula di rappresentazione si verifica facilmente usando l'equazione (2).

Grazie poi alle ulteriori ipotesi 4.2(i) e 4.2(iii) si dimostra anche l'esistenza di soluzioni del problema (11) per dati iniziali $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$, si veda [16]. La richiesta che il dato iniziale appartenga a $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, cioè abbia momenti primo e secondo finiti, è prevalentemente tecnica. Tuttavia, dal punto di vista delle applicazioni essa non costituisce affatto una limitazione perché i dati iniziali avranno tipicamente supporto *compatto* (in effetti non sarebbe molto realistico immaginare una folla sparpagliata su tutto $\mathbb{R}^d$), dunque i loro momenti di *qualsiasi* ordine p saranno automaticamente finiti. Infatti:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^p \, d\bar{\mu}(x) = \int_{\mathrm{supp}(\bar{\mu})} |x|^p \, d\bar{\mu}(x) \leq R^p < +\infty,$$

essendo R il raggio di una delle palle centrate nell'origine che contengono $\mathrm{supp}(\bar{\mu})$.

In definitiva, si può quindi stabilire il seguente risultato di buona positura del problema di Cauchy (11):

TEOREMA 4.3. – *Valgano le Ipotesi* 4.2. *Per ogni* $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ *esiste ed è unica la soluzione* $\mu_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ *del problema* (11) *nel senso della Definizione* 4.1. *Inoltre, essa dipende con continuità dal dato iniziale secondo la stima* (12).

4.2 – *Schema numerico e sua convergenza*

Per l'approssimazione della soluzione del problema (11) si può utilizzare lo schema numerico introdotto in [13, 14], poi ulteriormente dettagliato per modelli multiscala in [8] e adottato anche in [3, 11]. In breve, l'idea è di approssimare μ_t con una misura *assolutamente continua* rispetto a Lebesgue, costante a tratti su una partizione disgiunta di $\mathbb{R}^d$. Quest'ultima, anche detta *griglia di calcolo*, è formata da celle E_i di dimensione caratteristica $h > 0$ tale che $\mathcal{L}^d(E_i) \to 0$ quando $h \to 0^+$:

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^d} E_i, \qquad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j.$$

Per $d = 2$ (che è il caso di dimensione spaziale più interessante per simulazioni di folle) le celle E_i possono essere quadrati di lato h. La generalizzazione più naturale ad una dimensione qualsiasi si ottiene usando ipercubi di lato h, cosicché $\mathcal{L}^d(E_i) = h^d$.

Detta $\tilde{\mu}_n$ l'approssimazione di μ_t all'istante di tempo discreto $t_n = n\Delta t$, essendo $\Delta t > 0$ un passo di tempo fissato, risulta per costruzione $d\tilde{\mu}_n = \tilde{\rho}_n \, dx$, dove $\tilde{\rho}_n = \tilde{\rho}_n(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ è la densità che lo schema numerico deve determinare.

Essa, ancora per costruzione, è costante a tratti sulla griglia $\{E_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$, perciò si può rappresentare come

$$\tilde{\rho}_n(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \rho_i^n \chi_{E_i}(x) \tag{14}$$

con χ_{E_i} funzione caratteristica della cella E_i. Le incognite sono pertanto i coefficienti $\rho_i^n \geq 0$.

Lo schema si costruisce imponendo dapprima che, in un passo di tempo, la misura $\tilde{\mu}_n$ sia trasportata nella nuova misura $\tilde{\mu}_{n+1}$ da un'opportuna discretizzazione della mappa di flusso (13): $\tilde{\mu}_{n+1} = \tilde{\gamma}_n \# \tilde{\mu}_n$ e poi testando questa relazione sulle sole celle della griglia di calcolo: $\tilde{\mu}_{n+1}(E_i) = \tilde{\mu}_n(\tilde{\gamma}_n^{-1}(E_i))$. Riscritta mediante la densità numerica (14), quest'uguaglianza permette di ricavare la seguente relazione ricorsiva tra i coefficienti ρ_i^n e quelli al passo di tempo successivo ρ_i^{n+1}:

$$\rho_i^{n+1} = \frac{1}{h^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \rho_j^n \mathcal{L}^d(E_i \cap \tilde{\gamma}_n(E_j)) \qquad (i \in \mathbb{Z}^d). \tag{15}$$

Essa esprime il fatto che in un passo di tempo la densità numerica è ridistribuita sulla griglia di calcolo in modo proporzionale alla misura (di Lebesgue) delle intersezioni tra la celle mosse dalla mappa di flusso discreta $\tilde{\gamma}_n$ (si veda la Figura 3). In particolare, quest'ultima è ottenuta cella per cella come:

$$\tilde{\gamma}_n(x) = x + v[\tilde{\mu}_n](x_i)\Delta t \quad \text{per } x \in E_i\,,$$

dove x_i denota un punto qualsiasi di E_i, ad esempio il suo centro. Di fatto, $\tilde{\gamma}_n$ agisce in ogni cella come una traslazione rigida di velocità costante $v[\tilde{\mu}_n](x_i)$, ovvero la velocità v del problema esatto (11) calcolata in $x = x_i$ rispetto alla misura approssimata $\tilde{\mu}_n$.

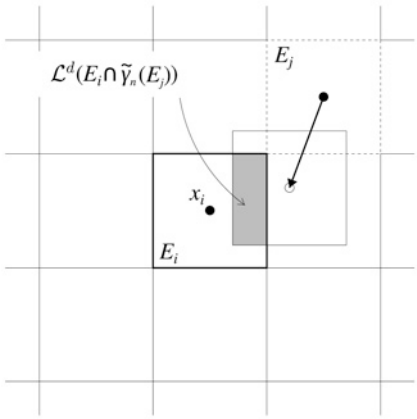


Fig. 3. – Azione dello schema numerico (15) sulle celle di calcolo.

Nonostante la misura numerica $\tilde{\mu}_n$ sia scelta assolutamente continua rispetto a Lebesgue, lo schema (15) può approssimare soluzioni del problema (11) aventi struttura spaziale generica. Vale infatti il seguente risultato:

TEOREMA 4.4. – *Si consideri una successione di griglie spazio-temporali indicizzate da* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *con parametri di griglia* h_k, $\Delta t_k \to 0$ *per* $k \to \infty$. *Sia* $\tilde{\mu}_t^k$ *l'interpolata lineare a tratti delle soluzioni numeriche* $\tilde{\mu}_n^k$ *calcolate sulla k-esima griglia mediante lo schema* (15):

$$\tilde{\mu}_t^k = \sum_{n=0}^{N_{\max}^k - 1} \left[\left(1 - \frac{t - t_n^k}{\Delta t_k} \right) \tilde{\mu}_n^k + \frac{t - t_n^k}{\Delta t_k} \tilde{\mu}_{n+1}^k \right] \chi_{[t_n^k,\, t_{n+1}^k]}(t),$$

dove $t_n^k = n\Delta t_k$ *ed* $N_{\max}^k$ *è il numero di passi di tempo discreti sulla k-esima griglia temporale necessari per raggiungere il tempo finale* $T_{\max}$.

Supponiamo che valgano le Ipotesi 4.2, *che il dato iniziale sia discretizzato ponendo:*

$$(\rho_i^0)^k = \frac{\bar{\mu}(E_i^k)}{h_k^d} \qquad (i \in \mathbb{Z}^d)$$

e inoltre che le griglie spazio-temporali siano scelte in modo che $h_k = o(\Delta t_k)$ *per* $k \to \infty$.

Se $\tilde{\mu}_\bullet^k$ *converge in* $C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$ *ad una* $\mu_\bullet$ *quando* $k \to \infty$ *nel senso seguente:*

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{t \in [0,\, T_{\max}]} W_1(\tilde{\mu}_t^k, \mu_t) = 0$$

allora $\mu_\bullet$ *è una soluzione (debole) del problema* (11) *nel senso della Definizione* 4.1.

Si noti che questo teorema non garantisce, bensì *assume*, la convergenza della soluzione numerica ad una curva $\mu_\bullet \in C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$. Per questo, esso ricorda nella sostanza il teorema di Lax-Wendroff relativo agli schemi numerici per le leggi di conservazione iperboliche [10]. Tuttavia è possibile integrarlo con un semplice criterio che assicura la suddetta convergenza:

PROPOSIZIONE 4.5. – *Supponiamo che esista un insieme compatto* $K \subset \mathbb{R}^d$ *tale che* $\operatorname{supp}(\tilde{\mu}_n^k) \subseteq K$ *per ogni n e ogni k. Allora la successione* $\{\tilde{\mu}_\bullet^k\}_{k \geq 0}$ *è convergente in* $C([0, T_{\max}]; \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d))$.

È intuitivo immaginare che un simile insieme K esista soprattutto quando il dato iniziale $\bar{\mu}$ ha supporto compatto. Infatti, stante l'ipotesi 4.2(i), il problema (11) descrive un trasporto a velocità *finita*, perciò $\operatorname{supp}(\bar{\mu})$ non può espandersi indefinitamente entro un tempo finito $T_{\max}$.

Per la dimostrazione del Teorema 4.4 e della Proposizione 4.5 si veda [16]. Inoltre, il lettore interessato può consultare [12] per una trattazione approfondita di ulteriori schemi numerici per l'approssimazione della soluzione del problema (11).

4.3 – *Struttura della soluzione*

La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti non dà alcuna informazione sulla struttura spaziale delle soluzioni del problema (11), che è invece importante soprattutto per i modelli multiscala discussi nella Sezione 3.

Peraltro, usando la formula di rappresentazione introdotta nella Sezione 4.1 è abbastanza facile vedere che se il dato iniziale $\bar{\mu}$ ha una struttura discreta del tipo ([2]) $\bar{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\bar{x}_i}$ allora anche la soluzione μ_t ha struttura discreta per ogni $t > 0$. Infatti, per ogni boreliano $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ risulta:

$$\mu_t(E) = (\gamma_t \# \bar{\mu})(E) = \bar{\mu}(\gamma_t^{-1}(E)) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\bar{x}_i}(\gamma_t^{-1}(E)) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\gamma_t(\bar{x}_i)}(E),$$

perciò, definendo $x_i(t) := \gamma_t(\bar{x}_i)$, abbiamo $\mu_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i(t)}$. Si noti che ciò è vero indipendentemente dalla regolarità della mappa di flusso γ_t, quindi, in ultima istanza, del campo di velocità $v[\mu_t]$.

Se invece il dato iniziale ha una struttura continua, $d\bar{\mu}(x) = \bar{\rho}(x)\,dx$, la questione è più delicata, perché μ_t potrebbe sviluppare singolarità in tempo finito se la mappa di flusso tende a concentrare "troppa" densità su strutture spaziali troppo "piccole". Il seguente risultato dà una condizione sufficiente affinché ciò non accada (per la dimostrazione si vedano [6, 8, 14]):

TEOREMA 4.6. – *Supponiamo che $\bar{\mu}$ sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e che ad ogni tempo $t \in (0, T_{\max}]$ fissato esista una costante $\mathcal{C}_t > 0$, eventualmente variabile con t, tale che*

$$\mathcal{L}^d(\gamma_t^{-1}(E)) \le \mathcal{C}_t \mathcal{L}^d(E), \qquad \forall\, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \tag{16}$$

Allora anche $\mu_t = \gamma_t \# \bar{\mu}$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue per ogni $t \in (0, T_{\max}]$.

([2]) Rispetto all'equazione (5) qui compare il fattore $\frac{1}{N}$ per coerenza con il riscalamento a misure di probabilità introdotto all'inizio della sezione.

La condizione (16) richiede sostanzialmente che la mappa di flusso non restringa troppo i boreliani. Infatti, leggendo la disuguaglianza da destra a sinistra, la misura di Lebesgue di E dev'essere controllabile *dal basso* dalla misura della sua pre-immagine secondo γ_t. Facilmente si intuisce che questa condizione non è di verifica immediata in casi concreti. Tuttavia, almeno per mappe di flusso regolari, è possibile dare un criterio allo stesso tempo sufficiente al suo soddisfacimento e più pratico da controllare (dimostrazione in [6]):

PROPOSIZIONE 4.7. – *Se la mappa di flusso γ_t è un diffeomorfismo con costante di Lipschitz* $\mathrm{Lip}(\gamma_t)$ *tale che*

$$\mathrm{Lip}(\gamma_t) < \frac{1}{\mathrm{Lip}(v)T_{\max}} \tag{17}$$

allora essa verifica la condizione (16).

In particolare, è utile sapere che sotto l'ipotesi 4.2(ii) la costante di Lipschitz di γ_t si può stimare come $\mathrm{Lip}(\gamma_t) \leq 1 + \mathrm{Lip}(v)T_{\max}e^{\mathrm{Lip}(v)T_{\max}}$ (cfr. [6]), perciò la (17) è sicuramente verificata se

$$1 + \mathrm{Lip}(v)T_{\max}e^{\mathrm{Lip}(v)T_{\max}} < \frac{1}{\mathrm{Lip}(v)T_{\max}},$$

che, in ultima analisi, diventa una condizione direttamente sulla costante di Lipschitz della velocità. Ciò è più comodo perché, come visto nella Sezione 2.1, è la velocità, e non la mappa di flusso, a giocare un ruolo di primo piano nella costruzione dei modelli.

Infine, se il dato iniziale ha una struttura ibrida del tipo (9) è sufficiente richiamare la linearità dell'operatore di trasporto # per concludere che i risultati precedenti si applicano separatamente alle parti discreta e continua. Di conseguenza, facendo in modo che la mappa di flusso (ovvero il campo di velocità) verifichi le condizioni espresse dal Teorema 4.6 e dalla Proposizione 4.7 si ottiene per il problema (11) la conservazione della struttura multiscala della misura ad ogni tempo $t > 0$.

5. – Ritorno ai modelli di folla

I risultati esposti nella Sezione 4 valgono per un campo di velocità "astratto" caratterizzato essenzialmente dalle Ipotesi 4.2. Al fine di costruire modelli di folla non solo fisicamente coerenti ma anche matematicamente robusti è perciò importante studiare come le strutture introdotte nella Sezione 2 si pongano rispetto a queste ipotesi e quali accortezze siano necessarie nella modellizzazione di specifici termini per garantire che esse le soddisfacciano.

Precisiamo subito che, come ricordato nella Sezione 2.1, il nucleo di interazione K deve dipendere dalla *posizione relativa* $y - x$ dei pedoni interagenti affinché la descrizione delle interazioni sia invariante per cambiamenti rigidi (ovvero trasformazioni isometriche) del sistema di riferimento. Dunque si potrà porre

$$K(x, y) = k(y - x),$$

con $k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione da modellizzare opportunamente (che continueremo a chiamare *nucleo di interazione*). Ciò detto, la velocità dei pedoni (3)-(4) assume la forma:

$$v[\mu_t](x) = v_{\mathrm{d}}(x) + N \int_{\mathbb{R}^d} k(y - x)\eta_{\mathcal{S}(x)}(y)\, d\mu_t(y), \tag{18}$$

dove ricordiamo che il coefficiente N (numero totale di pedoni) davanti all'integrale delle interazioni compare in seguito alla reinterpretazione di μ_t come misura di probabilità (si veda la nota 1 a pagina 539).

È immediato verificare che il campo (18) soddisfa, senza bisogno di ulteriori assunzioni, l'ipotesi 4.2(iii). Basta infatti scrivere $v_{\mathrm{d}} = \alpha v_{\mathrm{d}} + (1 - \alpha)v_{\mathrm{d}}$ ed effettuare gli opportuni raccoglimenti. Peraltro, è fondamentale che l'ipotesi 4.2(iii) richieda solo la linearità *debole*, perché la mappa $\mu \mapsto v[\mu]$ che risulta dall'equazione (18) non è in generale lineare (se non quando la velocità desiderata è nulla, il che non è tuttavia sensato dal punto di vista modellistico).

Per il soddisfacimento delle ipotesi 4.2(i) e 4.2(ii) sono invece necessari alcuni dettagli tecnici, da considerarsi come linee guida modellistiche, sulla struttura dei termini v_{d}, k, $\mathcal{S}(\,\cdot\,)$ ed $\eta_{\mathcal{S}(\cdot)}$. Per semplicità ci limitiamo al caso bidimensionale ($d = 2$), che è comunque ampiamente sufficiente per trattare modelli di folla realistici.

IPOTESI 5.1. – (Struttura del campo di velocità (18) in due dimensioni).

(i) Velocità desiderata: $x \mapsto v_{\mathrm{d}}(x)$ *sia lipschitziziana e limitata su* $\mathbb{R}^2$.

(ii) Regione di sensibilità: *per ogni* $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{S}(x)$ *sia un boreliano limitato contenuto in una palla di raggio fissato* $R > 0$ *indipendente da* x *(ad esempio quella centrata proprio in* x*:* $\mathcal{S}(x) \subseteq B_R(x)$*) e isometrico ad un insieme di riferimento* $\mathcal{S}(0) \subseteq B_R(0)$.

(iii) Nucleo di interazione: $r \mapsto k(r)$ *sia lipschitziziana nella palla* $B_R(0)$ *di centro l'origine e raggio* R *definito al precedente punto* (ii).

(iv) Funzione di taglio: *per ogni* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $x \mapsto \eta_E(x)$ *sia lipschitziziana e limitata tra* 0 *e* 1 *su* $\mathbb{R}^2$ *con* $\mathrm{supp}(\eta_E) \subset\subset E$.

OSSERVAZIONE. – L'ipotesi 5.1(ii) significa di fatto che la regione di sensibilità $\mathcal{S}(x)$ del punto x si ottiene per traslazione e rotazione dell'insieme di riferimento $\mathcal{S}(0)$. Il vettore di traslazione è evidentemente x. Inoltre, in base a quanto detto nella Sezione 2.1, l'angolo di rotazione è individuato dalla direzione del vettore $v_{\mathrm{d}}(x)$.

Se la velocità pedonale è costruita conformemente a quanto fin qui discusso, è possibile garantire una certa solidità matematica al modello di folla (1)-(18). Infatti (dimostrazione in [16]):

PROPOSIZIONE 5.2. – *Se, in due dimensioni spaziali ($d = 2$), valgono le Ipotesi* 5.1 *il campo di velocità* (18) *verifica le Ipotesi* 4.2.

e quindi al modello si applica la teoria di buona positura e approssimazione numerica presentata nella Sezione 4.

REFERENCES

[1] L. AMBROSIO - N. GIGLI - G. SAVARÉ, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2008.

[2] L. BRUNO - A. TOSIN - P. TRICERRI - F. VENUTI, *Non-local first-order modelling of crowd dynamics: A multidimensional framework with applications*, Appl. Math. Model., **35** (1) (2011), 426-445.

[3] C. CANUTO - F. FAGNANI - P. TILLI, *An Eulerian approach to the analysis of Krause's consensus models*, SIAM J. Control Optim., **50** (1) (2012), 243-265.

[4] R. M. COLOMBO - M. D. ROSINI, *Existence of nonclassical solutions in a pedestrian flow model*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **10** (5) (2009), 2716-2728.

[5] V. COSCIA - C. CANAVESIO, *First-order macroscopic modelling of human crowd dynamics*, Math. Models Methods Appl. Sci., **18** (2008), 1217-1247.

[6] E. CRISTIANI - B. PICCOLI - A. TOSIN, *Multiscale Modeling of Pedestrian Dynamics*. In preparazione.

[7] E. CRISTIANI - B. PICCOLI - A. TOSIN, *Modeling self-organization in pedestrians and animal groups from macroscopic and microscopic viewpoints*. In G. Naldi, L. Pareschi and G. Toscani, editors *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences*, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, pages 337-364. Birkhäuser, Boston, 2010.

[8] E. CRISTIANI - B. PICCOLI - A. TOSIN, *Multiscale modeling of granular flows with application to crowd dynamics*, Multiscale Model. Simul., **9** (1) (2011), 155-182.

[9] E. CRISTIANI - B. PICCOLI - A. TOSIN, *How can macroscopic models reveal self-organization in traffic flow?*, Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control, pages 6989-6994, Maui, HI, USA, December 2012.

[10] R. J. LEVEQUE,*Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 1992.

[11] B. MAURY - A. ROUDNEFF-CHUPIN - F. SANTAMBROGIO, *Handling congestion in crowd motion modeling*, Netw. Heterog. Media, **6** (3) (2011), 485-519.

[12] B. Piccoli - F. Rossi, *Transport equation with nonlocal velocity in Wasserstein spaces: convergence of numerical schemes*, Acta Appl. Math., **124** (1) (2013), 73-105.
[13] B. Piccoli - A. Tosin, *Time-evolving measures and macroscopic modeling of pedestrian flow*, Arch. Ration. Mech. Anal., **199** (3) (2011), 707-738.
[14] B. Piccoli - A. Tosin, *Pedestrian flows in bounded domains with obstacles*, Contin. Mech. Thermodyn., **21** (2) (2009), 85-107.
[15] E. Schröedinger, *What is Life? Mind and Matter*,Cambridge University Press, 1967.
[16] A. Tosin - P. Frasca, *Existence and approximation of probability measure solutions to models of collective behaviors*, Netw. Heterog. Media, **6** (3) (2011), 561-596.

Istituto per le Applicazioni del Calcolo "M. Picone"
Consiglio Nazionale delle Ricerche, Via dei Taurini 19, 00185 Roma
E-mail: a.tosin@iac.cnr.it

Received November 27, 2012 and in revised form September 4, 2013

Maria Vallarino: Spazi di Hardy su gruppi a crescita esponenziale di volume

Maria Vallarino[1]
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
email: maria.vallarino@polito.it

Peter Sjögren
University of Gothenburg and Chalmers University of Technology

Sunto

In ambito euclideo lo spazio di Hardy è un utile strumento per dimostrare risultati di limitatezza per operatori integrali singolari e operatori integrali di Fourier. Un attivo filone di ricerca si occupa dello studio di spazi di Hardy in spazi metrici di misura più generali di quello euclideo.

In questo seminario, consideriamo il gruppo di Lie $G = \mathbb{R}^d \ltimes \mathbb{R}^+$ munito della metrica iperbolica e della misura di Haar destra. Si tratta di uno spazio a crescita esponenziale di volume, in cui la teoria classica degli spazi di Hardy non si applica, poiché la misura non soddisfa la proprietà di raddoppio. Sul gruppo G consideriamo il Laplaciano $\Delta = -\sum_{i=0}^{d} X_i^2$, dove $X_0, ..., X_d$ sono una base di campi vettoriali invarianti sinistri dell'algebra di Lie di G.

In [2] abbiamo introdotto uno spazio di Hardy atomico H^1 adattato al gruppo G e allo studio di integrali singolari associati a Δ, quali trasformate di Riesz [1] e moltiplicatori spettrali del Laplaciano.

In questo seminario richiameremo la definizione dello spazio di Hardy H^1 e mostreremo che esso soddisfa proprietà analoghe a quelle dello spazio di Hardy classico. Mostreremo inoltre che l'operatore massimale associato al nucleo del calore del Laplaciano è limitato da H^1 a L^1. Tuttavia, in contrasto con quanto avviene per lo spazio di Hardy classico, l'operatore massimale del calore non consente di ottenere una caratterizzazione massimale dello spazio atomico H^1.

Bibliografia

[1] P. Sjögren, M. Vallarino: "Boundedness from H^1 to L^1 of Riesz transforms on a Lie group of exponential growth", Ann. Inst. Fourier 58 (2008), 1117–1151.

[2] M. Vallarino: "Spaces H^1 and BMO on exponential growth groups", Collect. Math. 60 (2009), 277–295.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto GNAMPA 2011 "Analisi armonica su gruppi di Lie e varietà"

Intervento: Maria Vallarino,
Spazi di Hardy su gruppi a crescita esponenziale di volume,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 673–684**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 673-684

Spazi di Hardy su gruppi a crescita esponenziale di volume

MARIA VALLARINO

Sommario. – *Questa è una rassegna di alcuni risultati recenti su spazi di Hardy nel contesto di gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume, che ho presentato nella conferenza da me tenuta a Bologna in occasione del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana.*

Faremo un breve cenno alla teoria degli spazi di Hardy in ambito euclideo e al ruolo svolto da tali spazi nell'analisi armonica su $\mathbb{R}^n$. *La parte cruciale della nostra presentazione consisterà nell'introduzione di una nuova teoria di spazi di Hardy nel contesto dei cosiddetti gruppi* $ax+b$, *che sono una classe di gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume in cui la teoria classica non si applica. Metteremo in luce analogie e differenze tra la nuova teoria e quella classica.*

I risultati presentati sono pubblicati in un articolo in collaborazione con L. Liu e D. Yang [14], *in due articoli in collaborazione con P. Sjögren* [22, 23] *e in* [28, 29].

1. – Introduzione

La teoria degli spazi di Hardy sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ gioca un ruolo importante in analisi armonica (vedi, ad esempio, [24, 25]). In particolare, lo spazio di Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ è un sottospazio proprio dello spazio $L^1(\mathbb{R}^n)$ che si è rivelato un buon "sostituto" di $L^1(\mathbb{R}^n)$ in diversi problemi. Interessanti applicazioni di $H^1(\mathbb{R}^n)$ si trovano nella teoria dell'interpolazione, nello studio della limitatezza di operatori integrali singolari, e nello studio di operatori integrali oscillanti di Fourier. Per precisare meglio il ruolo dello spazio di Hardy nei suddetti problemi, richiamiamo la sua definizione.

Sono note diverse definizioni equivalenti dello spazio di Hardy, delle quali ricorderemo quella atomica e quella massimale.

DEFINIZIONE 1.1. – *Si definisce* atomo *una funzione* a *in* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) $supp(a) \subset B$, *dove* B *è una palla euclidea;*

(ii) $\int_B a(x)\,dx = 0$ *(proprietà di* cancellazione*);*

(iii) $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |B|^{-1/2}$, *dove* $|\cdot|$ *denota la misura di Lebesgue (proprietà di* taglia*).*

Lo spazio di Hardy atomico $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n)$ è definito come l'insieme delle funzioni f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ che ammettono una decomposizione della forma $f = \sum_j c_j\, a_j$, dove c_j sono numeri complessi tali che $\sum_j |c_j| < \infty$ e le funzioni a_j sono atomi. La norma atomica di una funzione f in $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n)$ è definita da

$$\|f\|_{H^1_{\mathrm{at}}} = \inf\left\{ \sum_j |c_j| : f = \sum_j c_j\, a_j,\ a_j \ \text{ atomo}\right\}.$$

Lo spazio $H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n)$ munito della suddetta norma è uno spazio di Banach.

Lo spazio di Hardy massimale $H^1_{\max}(\mathbb{R}^n)$ è definito come l'insieme delle funzioni f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ tali che $\mathscr{M}_\phi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dove

$$\mathscr{M}_\phi f(x) = \sup_{t>0} \left| f * \phi_t(x)\right| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

e ϕ è una funzione di Schwartz tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \phi_t(x) = t^{-n}\, \phi(t^{-1}\, x) \qquad \forall t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\,.$$

La norma massimale di una funzione f in $H^1_{\max}(\mathbb{R}^n)$ è definita da

$$\|f\|_{H^1_{\max}} = \|\mathscr{M}_\phi f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Lo spazio $H^1_{\max}(\mathbb{R}^n)$ munito di tale norma è uno spazio di Banach. È ben noto che lo spazio di Hardy massimale non dipende dalla funzione test ϕ scelta per definire la funzione massimale.

Gli spazi di Hardy precedentemente definiti coincidono, ossia

$$H^1_{\mathrm{at}}(\mathbb{R}^n) = H^1_{\max}(\mathbb{R}^n)\,,$$

e le norme $\|\cdot\|_{H^1_{\mathrm{at}}}$ e $\|\cdot\|_{H^1_{\max}}$ sono equivalenti [24]. Nel seguito denoteremo semplicemente con $H^1(\mathbb{R}^n)$ lo spazio di Hardy euclideo: conoscere definizioni equivalenti dello stesso oggetto lo rende più facile da trattare in problemi diversi. Ad esempio, la definizione atomica è operativamente molto utile quando si voglia studiare la limitatezza di un operatore definito su $H^1(\mathbb{R}^n)$, mentre quella massimale risulta più utile nel caso in cui si voglia verificare l'appartenenza di una funzione allo spazio di Hardy.

Ricordiamo ora alcune interessanti proprietà dello spazio $H^1(\mathbb{R}^n)$:

(i) il duale di $H^1(\mathbb{R}^n)$ si identifica con lo spazio $BMO(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a oscillazione media limitata [6].

(ii) Per ogni θ in $(0,1)$, si ha che $\left(H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\right)_\theta = L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$, dove $\dfrac{1}{p_\theta} = 1 - \dfrac{\theta}{2}$ e $\left(\cdot,\cdot\right)_\theta$ denota lo spazio di interpolazione tra due spazi di Banach di indice θ ottenuto mediante il metodo complesso [6].

(iii) Se T è un operatore lineare limitato su $L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\sup\{\|Ta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} : \ a \text{ atomo}\} < \infty\,, \tag{1.1}$$

allora T è limitato da $H^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$ [16, 19] e quindi, per la proprietà di interpolazione (ii), T è limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in (1,2]$.

(iv) Gli operatori integrali singolari di Calderón-Zygmund verificano la condizione (1.1) e sono limitati da $H^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$ e su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in (1,2]$. Senza entrare nei dettagli della definizione di operatore di Calderón-Zygmund, ricordiamo che prototipo di integrali singolari sono le trasformate di Riesz $R_i = \partial_{x_i} \circ \Delta^{-1/2}, i = 1, ..., n,$ che sono limitate da $H^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^1(\mathbb{R}^n)$ (ma non sono limitate su $L^1(\mathbb{R}^n)$).

(v) Gli operatori integrali di Fourier aventi simbolo di ordine $-(n-1)/2$ sono limitati da $H^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ [21, 24]. Questo consente di ottenere per interpolazione stime ottimali per la limitatezza L^p di operatori integrali di Fourier. In particolare, l'operatore $(I+\Delta)^{-(n-1)/2}\cos(t\sqrt{\Delta}),\ t \in \mathbb{R},$ è limitato da $H^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Questo risultato ha interessanti conseguenze sulla regolarità delle soluzioni dell'equazione delle onde sullo spazio euclideo.

Le proprietà (iv) e (v) mettono in luce il ruolo cruciale svolto da $H^1(\mathbb{R}^n)$ in sostituzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$ nello studio della limitatezza di operatori: lo spazio di Hardy è un sottospazio proprio di $L^1(\mathbb{R}^n)$ "sufficientemente grande" da godere di buone proprietà di interpolazione, ma "sufficientemente piccolo" affinché un'ampia classe di operatori integrali singolari che sono illimitati su $L^1(\mathbb{R}^n)$ siano limitati su $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Viste le interessanti proprietà e applicazioni dello spazio di Hardy classico, negli ultimi quarant'anni molti sforzi sono stati fatti per sviluppare una teoria di spazi di Hardy in contesti diversi da quello euclideo.

I primi risultati in tal senso sono stati ottenuti nel contesto di spazi metrici di misura $(\mathbb{X}, d, \mu)$ in cui vale la *proprietà di raddoppio* delle palle, ossia

$$\sup_B \frac{\mu(2B)}{\mu(B)} < \infty\,, \tag{1.2}$$

dove l'estremo superiore è calcolato rispetto a tutte le palle della metrica e $2B$ denota la palla concentrica con B di raggio doppio. In tale contesto R.R. Coifman e G. Weiss [2, 3] hanno introdotto uno spazio di Hardy atomico $H^1_{\text{at}}(\mathbb{X})$, definito in modo analogo a quello euclideo, dove le palle della metrica sostituiscono le palle euclidee nella definizione di atomo. Con alcune ipotesi addizionali sullo spazio, diverse caratterizzazioni massimali di $H^1_{\text{at}}(\mathbb{X})$ sono state ottenute da R.A. Macías e C. Segovia [15], W.M. Li [13], L. Grafakos, L. Liu e D. Yang [10, 11].

Successivi risultati sono stati ottenuti in contesti in cui la proprietà di raddoppio (1.2) fallisce. La disuguaglianza (1.2) può fallire per le palle di raggio piccolo, oppure può valere localmente (ossia per palle di raggio piccolo), ma non essere valida per palle il cui raggio tende all'infinito.

Sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ munito di una misura di Radon μ a crescita polinomiale in cui la (1.2) fallisce per palle piccole, X. Tolsa [27] ha definito uno spazio di Hardy atomico $H^1_{\mathrm{at}}(\mu)$ e dimostrato che esso ammette una caratterizzazione massimale come nel contesto classico.

Nell'ambito di varietà Riemanniane non compatte a geometria limitata a crescita esponenziale di volume la (1.2) fallisce per palle di raggio grande: in tale contesto sono stati recentemente introdotti diversi spazi di Hardy adattati alla geometria della varietà [1, 17, 18, 26] che godono di buone proprietà di interpolazione e hanno applicazioni allo studio di operatori integrali singolari, tra i quali interessanti funzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla varietà.

Lo scopo di questa esposizione è di introdurre un opportuno spazio di Hardy atomico su una classe di gruppi di Lie a crescita esponenziale di volume, che goda di proprietà analoghe a quelle valide nel contesto classico e che ben si adatti allo studio della limitatezza di operatori integrali singolari associati a un Laplaciano naturale definito sui gruppi. Ci occuperemo anche di discutere una caratterizzazione massimale di tale spazio.

2. – I gruppi $ax + b$ e lo spazio di Hardy atomico

Sia G il gruppo di Lie $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}^+$ munito del prodotto

$$(x, a) \cdot (x', a') = (x + a\,x', a\,a') \qquad \forall (x, a),\ (x', a') \in G\,.$$

In letteratura G viene chiamato *gruppo* $ax + b$. Consideriamo su G la metrica Riemanniana invariante sinistra $\mathrm{d}s^2 = a^{-2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}a^2)$, che coincide con la metrica dello spazio iperbolico $(n + 1)$-dimensionale.

Il gruppo G non è unimodulare: le misura di Haar destra e sinistra sono date rispettivamente da

$$\mathrm{d}\rho(x, a) = a^{-1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}\lambda(x, a) = a^{-(n+1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}a\,.$$

È ben noto che la misura della palla B_r centrata nell'identità e di raggio r si comporta come

$$\rho(B_r) = \lambda(B_r) \sim \begin{cases} r^{n+1} & \text{if } r < 1 \\ \mathrm{e}^{nr} & \text{if } r \geq 1\,. \end{cases}$$

Questo mostra che lo spazio (G, d, ρ) è a *crescita esponenziale di volume*. In particolare,

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\rho(B_{2r})}{\rho(B_r)} = +\infty\,,$$

quindi lo spazio (G, d, ρ) non verifica la proprietà di raddoppio (1.2).

L'analisi armonica sullo spazio (G, d, ρ) è stata oggetto di studio negli ultimi trent'anni, perché esso rappresenta un modello di spazio a crescita esponenziale, dove l'assenza della proprietà di raddoppio non consente di applicare la teoria classica degli operatori integrali singolari di Calderón-Zygmund e la teoria classica degli spazi di Hardy di Coifman e Weiss [2, 3]. L'analisi di diversi operatori massimali, operatori integrali singolari, moltiplicatori spettrali di Laplaciani è stata oggetto di studio in [5, 8, 7, 9, 12, 20].

Uno dei risultati più significativi riguardanti l'analisi sui gruppi $ax + b$ è stato ottenuto da W. Hebisch e T. Steger in [12]. Essi hanno costruito una nuova teoria di Calderón-Zygmund che si applica allo spazio (G, d, ρ), utilizzando una famiglia di insiemi opportuni, che sono legati alla struttura geometrica e algebrica dello spazio e sono così definiti [9, 12].

DEFINIZIONE 2.1. – *Un insieme di Calderón-Zygmund è un parallelepipedo*

$$R = \prod_{i=1}^{n} [x_i - L/2, x_i + L/2] \times [a\, e^{-r}, a\, e^{r}]\,,$$

dove $L > 0$, $r > 0$ e $(x_1, ..., x_n, a) \in G$ verificano le seguenti disuguaglianze:

$$e^2 a\, r \le L < e^8 a\, r \qquad \text{if } r < 1\,,$$

$$a\, e^{2r} \le L < a\, e^{8r} \qquad \text{if } r \ge 1\,.$$

Indichiamo con $\mathscr{R}$ la famiglia di tutti gli insiemi di Calderón-Zygmund.

La famiglia $\mathscr{R}$ è invariante per traslazioni sinistre, ossia il traslato sinistro mediante la legge di gruppo di un insieme di Calderón-Zygmund è un insieme di Calderón-Zygmund. Dato un insieme $R \in \mathscr{R}$, definiamo il suo dilatato come $R^* = \{x \in G : \ d(x, R) < r\}$. Esiste una costante positiva $C_0 > 0$ tale che

$$\rho(R^*) \le C_0\, \rho(R) \qquad \text{e} \qquad R \subset B\big((x_1, ..., x_n, a), C_0 r\big)\,. \tag{2.1}$$

La proprietà precedente può essere pensata come il sostituto della proprietà di raddoppio (1.2) in questo contesto. Sostituendo le palle metriche con i suddetti insiemi Hebisch e Steger hanno sviluppato una teoria di Calderón-Zygmund sul gruppo G, che ha interessanti applicazioni allo studio di operatori integrali singolari.

Lo scopo di questa esposizione è quello di definire uno spazio di Hardy atomico sullo spazio (G, d, ρ). Introduciamo innanzitutto una nozione di atomo in analogia alla definizione di atomo classico.

DEFINIZIONE 2.2. – *Si definisce atomo sul gruppo G una funzione a in $L^2(\rho)$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) *supp*$(a) \subset R$, *dove* $R \in \mathscr{R}$;

(ii) $\int_R a \, d\rho = 0$ *(proprietà di cancellazione);*

(iii) $\|a\|_{L^2(\rho)} \leq \rho(R)^{-1/2}$ *(proprietà di taglia).*

Osserviamo che due sono le differenze tra questa definizione di atomo e quella classica: l'atomo non è supportato in una palla della metrica ma in un insieme di Calderón-Zygmund e nelle condizioni di cancellazione e di taglia interviene la misura destra del gruppo.

DEFINIZIONE 2.3. – *Lo spazio di Hardy atomico* $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ *è definito come l'insieme delle funzioni* f *in* $L^1(\rho)$ *che ammettono una decomposizione della forma* $f = \sum_j c_j \, a_j$, *dove* c_j *sono numeri complessi tali che* $\sum_j |c_j| < \infty$ *e* a_j *sono atomi. Data una funzione* f *in* $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ *la sua norma atomica è definita come segue:*

$$\|f\|_{H^1_{\mathrm{at}}} = \inf \left\{ \sum_j |c_j| : f = \sum_j c_j \, a_j, \; a_j \text{ atomo} \right\}.$$

Lo spazio $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ munito della suddetta norma è uno spazio di Banach. Lo spazio di Hardy atomico così definito gode di alcune proprietà analoghe a quelle valide nel caso classico.

In [28] abbiamo provato che il duale di $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ si identifica con un opportuno spazio di funzioni a oscillazione media limitata definito come segue.

DEFINIZIONE 2.4. – *Lo spazio* $\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}(G)$ *è lo spazio delle funzioni* g *in* $L^1_{\mathrm{loc}}(\rho)$ *tali che*

$$\sup_{R \in \mathscr{R}} \frac{1}{\rho(R)} \int_R |g - g_R| \, \mathrm{d}\rho < \infty \,,$$

dove g_R *denota la media di* g *sull'insieme* R. *Lo spazio* $BMO(G)$ *è* $\mathscr{B}\mathscr{M}\mathscr{O}(G)$ *modulo il sottospazio delle funzioni costanti. Esso è uno spazio di Banach munito della norma*

$$\|g\|_{BMO} = \sup \left\{ \frac{1}{\rho(R)} \int_R |g - g_R| \, \mathrm{d}\rho : \; R \in \mathscr{R} \right\}.$$

Per ogni g in BMO il funzionale ℓ_g definito su ogni atomo a dalla formula

$$\ell_g(a) = \int g \, a \, \mathrm{d}\rho \,, \tag{2.2}$$

si estende a un funzionale limitato su $H^1_{\mathrm{at}}(G)$. Inoltre ogni funzionale nel duale di $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ è di questo tipo, e $\|\ell_g\|_{(H^1_{\mathrm{at}})^*} \sim \|g\|_{BMO}$.

In collaborazione con Liu e Yang abbiamo provato che lo spazio di Hardy atomico gode di buone proprietà di interpolazione [14]. Più precisamente, per ogni θ in $(0,1)$

$$\left(H^1_{\mathrm{at}}(G), L^2(\rho)\right)_{[\theta]} = L^{p_\theta}(\rho) \qquad \frac{1}{p_\theta} = 1 - \frac{\theta}{2}\,.$$

È pertanto utile studiare la limitatezza $H^1_{\mathrm{at}}(G)$–$L^1(\rho)$ di operatori lineari che sono limitati su $L^2(\rho)$, perché per interpolazione essa implica la limitatezza di tali operatori su $L^p(\rho)$, $\forall p \in (1,2)$. In particolare, lo spazio di Hardy si è rivelato utile per studiare la limitatezza di operatori integrali singolari associati a un Laplaciano speciale sul gruppo G, che ora definiamo.

Siano $X_0, X_1, \ldots, X_n$ i campi vettoriali invarianti sinistri

$$X_0 = a\,\partial_a \qquad X_i = a\,\partial_{x_i} \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

che generano l'algebra di Lie di G. Il Laplaciano $\Delta = -\sum_{i=0}^{n} X_i^2$ è invariante sinistro e essenzialmente autoaggiunto su $L^2(\rho)$. Lo spettro di Δ su $L^2(\rho)$ coincide con la semiretta $[0, +\infty)$. In [22] abbiamo mostrato che le trasformate di Riesz del primo ordine della forma $X_i\Delta^{-1/2}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, sono limitate da $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ in $L^1(\rho)$, mentre le trasformate di Riesz della forma $\Delta^{-1/2}X_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, non sono limitate da $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ in $L^1(\rho)$. Quest'ultimo risultato mette in luce una differenza rispetto al caso classico: le trasformate di Riesz $\Delta^{-1/2}X_i$ sono operatori integrali singolari limitati su $L^p(\rho)$ per $p \in (1,2]$, ma che nel caso limite $p = 1$ non sono limitati né su $L^1(\rho)$ né sullo spazio di Hardy.

Infine, in collaborazione con D. Müller abbiamo ottenuto il seguente risultato non ancora pubblicato: l'operatore $(I + \Delta)^{-(n-1)/2} \cos(t\sqrt{\Delta})$, $t \in \mathbb{R}$, è limitato da $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ in $L^1(\rho)$. Questo risultato può essere pensato come un analogo per il Laplaciano Δ dei risultati di limitatezza per operatori integrali di Fourier euclidei.

3. – Lo spazio di Hardy massimale

In questa sezione ci proponiamo di indagare una caratterizzazione massimale dello spazio di Hardy atomico definito in precedenza. In particolare, studieremo una caratterizzazione massimale mediante il nucleo del calore del Laplaciano Δ. È ben noto che il semigruppo del calore $\left(e^{-t\Delta}\right)_{t>0}$ si realizza mediante la convoluzione con un nucleo che denoteremo h_t, ossia $e^{-t\Delta}f = f * h_t$, per funzioni f opportune.

Sia $\mathscr{M}_h$ l'operatore massimale corrispondente, definito da

$$\mathscr{M}_h f(x) = \sup_{t>0} |f * h_t(x)| \qquad \forall x \in G\,. \tag{3.1}$$

M. Cowling, G. Gaudry, S. Giulini e G. Mauceri [4] hanno dimostrato che $\mathscr{M}_h$ è di tipo debole $(1,1)$ e limitato su $L^p(\rho)$ per ogni $p > 1$. Definiamo uno spazio di Hardy massimale sul gruppo G utilizzando la funzione massimale del calore.

DEFINIZIONE 3.1. – *Lo spazio di Hardy massimale $H^1_{\max}(G)$ è lo spazio delle funzioni f in $L^1(\rho)$ tali che $\mathscr{M}_h f$ è in $L^1(\rho)$. La norma di una funzione f in $H^1_{\max}(G)$ è definita come*

$$\|f\|_{H^1_{\max}} = \|\mathscr{M}_h f\|_{L^1(\rho)} \qquad \forall f \in H^1_{\max}(G)\,.$$

Lo spazio $H^1_{\max}(G)$ munito della norma così definita è uno spazio di Banach.

È naturale chiedersi quale relazione sussista tra lo spazio di Hardy atomico e quello massimale, per comprendere se essi coincidano come avviene nel caso classico. Il primo risultato in tale direzione è il seguente:

TEOREMA 3.2. – *La funzione massimale del calore $\mathscr{M}_h$ è limitata da $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ in $L^1(\rho)$.*

La dimostrazione del teorema è piuttosto tecnica e fa utilizzo di una formula del nucleo del calore h_t e delle sue derivate che discende dall'analisi armonica sferica sui gruppi $ax + b$. Il precedente risultato non è sorprendente, in quanto valido anche nella teoria classica, e da esso segue che esiste una costante positiva C tale che per ogni f in $H^1_{\mathrm{at}}(G)$

$$\|f\|_{H^1_{\max}} = \|\mathscr{M}_h f\|_{L^1(\rho)} \le C\,\|f\|_{H^1_{\mathrm{at}}}\,.$$

Pertanto

$$H^1_{\mathrm{at}}(G) \subseteq H^1_{\max}(G)\,.$$

Quello che sorprende è il fatto che l'inclusione precedente, in contrasto con il caso classico, non è un'uguaglianza: questo risultato, che ora presenteremo, è apparso in un lavoro recente in collaborazione con Sjögren [23] nel caso particolare del gruppo $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}^+$ di dimensione 3.

Consideriamo dunque nel seguito il caso particolare del gruppo $ax + b$ di dimensione 3: questa scelta è motivata dal fatto che in tale caso è nota una formula esplicita del nucleo del calore del Laplaciano che consente di ottenere stime precise della funzione massimale del calore.

Costruiamo una famiglia di funzioni $\{f_L\}_{L>2}$ in $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ tali che

$$\lim_{L\to+\infty} \frac{\|f_L\|_{H^1_{\mathrm{at}}}}{\|f_L\|_{H^1_{\max}}} = +\infty\,.$$

Per ogni $L>2$ consideriamo gli insiemi di Calderón-Zygmund $R_0=[-1,1]\times[-1,1]\times[\frac{1}{e},e]$ e $R_L=[L-1,L+1]\times[-1,1]\times[\frac{1}{e},e]$ e definiamo $f_L=\chi_{R_L}-\chi_{R_0}$. La funzione f_L è multiplo di un atomo ed appartiene quindi a $H^1_{\mathrm{at}}(G)$.

LEMMA 3.3. – *Esiste una costante positiva C tale che*

(i) $\|f_L\|_{H^1_{\mathrm{at}}} \geq C\log L \qquad \forall L>2\,;$
(ii) $\|f_L\|_{H^1_{\max}} \leq C\,\log\log L \qquad \forall L>2\,.$

Diamo un'idea della dimostrazione della stima (i), che si basa sulla dualità tra $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ e $BMO(G)$. Definiamo $g(x_1,x_2,a)=\log|x_1|$. Si vede facilmente che la funzione g appartiene allo spazio $BMO(G)$. Pertanto, utilizzando la (2.2), otteniamo che

$$\|f_L\|_{H^1_{\mathrm{at}}} \geq C\frac{|\langle g,f_L\rangle|}{\|g\|_{BMO}} \geq C\left|\int g f_L\,\mathrm{d}\rho\right| \geq C\log L\,,$$

come richiesto.

La dimostrazione della stima (ii) è più tecnica e si basa sulla seguente formula esplicita del nucleo del calore [4, Theorem 5.3]:

$$h_t(x)=\frac{1}{8\pi^{3/2}}\,\delta^{1/2}(x)\,\frac{|x|}{\sinh|x|}\,t^{-3/2}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \forall x\in G,\ t>0\,,$$

dove $|x|$ denota la distanza iperbolica del punto x dall'identità del gruppo e δ denota la funzione modulare del gruppo G. Rinviamo il lettore a [23] per i dettagli della dimostrazione del Lemma 3.3.

Dal Lemma 3.3 segue che

$$\lim_{L\to+\infty} \frac{\|f_L\|_{H^1_{\mathrm{at}}}}{\|f_L\|_{H^1_{\max}}} = +\infty\,.$$

Ciò implica che non esiste una costante positiva C tale che $\|f_L\|_{H^1_{\mathrm{at}}} \leq C\,\|f_L\|_{H^1_{\max}}$ e pertanto

$$H^1_{\mathrm{at}}(G) \subsetneq H^1_{\max}(G)\,.$$

Possiamo esibire un esempio esplicito di funzione che appartiene allo spazio di Hardy massimale ma non a quello atomico.

ESEMPIO 3.4. – *Definiamo* $f(x_1, x_2, a) = \dfrac{1}{x_1(\log x_1)^{3/2}}$ *nell'insieme* $\{(x_1, x_2, a) : x_1 > 3, |x_2| < 1, e^{-1} < a < e\}$, $f = c_0$ *nell'insieme* R_0 *e* $f = 0$ *altrove, dove la costante* c_0 *è scelta in modo tale che la media di* f *sia nulla. Si dimostra che la funzione* f *appartiene allo spazio* $H^1_{\max}(G)$ *ma non appartiene a* $H^1_{\mathrm{at}}(G)$.

In conclusione, nel nostro contesto non vale una caratterizzazione massimale dello spazio di Hardy atomico mediante l'operatore massimale del calore. Questo fatto rappresenta una sostanziale differenza tra la teoria degli spazi di Hardy sui gruppi $ax + b$ e la teoria degli spazi di Hardy classica.

Concludiamo con alcune osservazioni e problemi aperti.

- Abbiamo osservato che $H^1_{\mathrm{at}}(G) \subsetneq H^1_{\max}(G) \subsetneq L^1(\rho)$. Questo implica che lo spazio di Hardy massimale eredita le stesse proprietà di interpolazione di $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ e $L^1(\rho)$.
- È naturale chiedersi se sia possibile trovare una caratterizzazione massimale dello spazio di Hardy atomico, in termini di una funzione massimale che non sia quella del calore. In [29] abbiamo considerato il nucleo di Poisson p_t associato al Laplaciano Δ, ossia il nucleo di convoluzione del semigruppo di Poisson $(e^{-t\sqrt{\Delta}})_{t>0}$, e la corrispondente funzione massimale $\mathscr{M}_p$ definita come

$$\mathscr{M}_p f(x) = \sup_{t>0} \left| f * p_t(x) \right| \qquad \forall x \in G\,.$$

Definiamo lo spazio di Hardy massimale di Poisson $H^1_{\max,p}(G)$ come lo spazio delle funzioni in $L^1(\rho)$ tali che $\mathscr{M}_p f$ appartenga a $L^1(\rho)$ munito della norma

$$\|f\|_{H^1_{\max,p}} = \|\mathscr{M}_p f\|_{L^1(\rho)} \qquad \forall f \in H^1_{\max,p}(G)\,.$$

Abbiamo provato che anche $H^1_{\max,p}(G)$ contiene strettamente $H^1_{\mathrm{at}}(G)$. Dunque non vale una caratterizzazione massimale dello spazio di Hardy atomico neppure in termini della funzione massimale di Poisson.

- $H^1_{\max,p}(G) = H^1_{\max}(G)$? In altri termini, gli spazi di Hardy massimali del calore e di Poisson coincidono come nel caso classico?
- Nel contesto euclideo è nota una caratterizzazione dello spazio di Hardy in termini di trasformate di Riesz del primo ordine. È possibile caratterizzare lo spazio $H^1_{\mathrm{at}}(G)$ oppure lo spazio $H^1_{\max}(G)$ in termini delle trasformate Riesz $X_i\Delta^{-1/2}$, $i = 0, \ldots, n$? In un lavoro in corso in collaborazione con Sjögren abbiamo osservato che lo spazio di Hardy atomico non ammette una caratterizzazione in termini delle trasformate Riesz $X_i\Delta^{-1/2}$. La domanda per lo spazio di Hardy massimale è ancora aperta.

REFERENCES

[1] A. Carbonaro, G. Mauceri, S. Meda, *H^1 and BMO for certain locally doubling metric measure spaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 8 (2009), 543-582.

[2] R.R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Mathematics 242. Springer (1971).

[3] R.R. Coifman, G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in Analysis*, Bull. Am. Math. Soc. **83** (1977), 569-645.

[4] M. Cowling, G. Gaudry, S. Giulini, G. Mauceri, *Weak type* $(1,1)$ *estimates for heat kernel maximal functions on Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 637-649.

[5] M. Cowling, S. Giulini, A. Hulanicki, G. Mauceri, *Spectral multipliers for a distinguished laplacian on certain groups of exponential growth*, Studia Math. **111** (1994), 103-121.

[6] C. Fefferman, E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[7] G. Gaudry, P. Sjögren, *Singular integrals on Iwasawa NA groups of rank 1*, J. Reine Angew. Math. **479** (1996), 39-66.

[8] G. Gaudry, T. Qian, P. Sjögren, *Singular integrals associated to the Laplacian on the affine group $ax + b$*, Ark. Mat. **30** (1992), 259-281.

[9] S. Giulini, P. Sjögren, *A note on maximal functions on a solvable Lie group*, Arch. Math. (Basel) **55** (1990), 156-160.

[10] L. Grafakos, L. Liu, D. Yang, *Maximal function characterizations of Hardy spaces on RD-spaces and their applications*, Sci. China Ser. A **51** (2008), 2253-2284.

[11] L. Grafakos, L. Liu, D. Yang, *Radial maximal function characterizations for Hardy spaces on RD-spaces*, Bull. Soc. Math. France **13** (2009), 225-251.

[12] W. Hebisch, T. Steger, *Multipliers and singular integrals on exponential growth groups*, Math. Z. **245** (2003), 37-61.

[13] W.M. Li, *A maximal function characterization of Hardy spaces on spaces of homogeneous type*, Approx. Theory Appl. (N. S.) **14** (1998), 12-27.

[14] L. Liu, M. Vallarino, D. Yang, *Dyadic sets, maximal functions and applications on $ax + b$-groups*. Math. Z. **270** (2012), 515-529.

[15] R.A. Macías, C. Segovia, *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), 271-309.

[16] G. Mauceri, S. Meda, *Equivalence of norms on finite linear combinations of atoms*, Math. Z. **269** (2011), 253-260.

[17] G. Mauceri, S. Meda, M. Vallarino, *Hardy type spaces on certain noncompact manifolds and applications*, J. London Math. Soc. **84** (2011), 243-268.

[18] G. Mauceri, S. Meda, M. Vallarino, *Atomic decomposition of Hardy type spaces on certain noncompact manifolds*, J. Geom. Anal. **22** (2012), 864-891.

[19] S. Meda, P. Sjögren, M. Vallarino, *On the H^1-L^1 boundedness of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 2921-2931.

[20] D. Müller, C. Thiele, *Wave equation and multiplier estimates on $ax + b$ groups*, Studia Math. **179** (2007), 117-148.

[21] A. Seeger, C. Sogge, E.M. Stein, *Regularity properties of Fourier integral operators*, Ann. of Math. **134** (1991), 231-251.

[22] P. Sjögren, M. Vallarino, *Boundedness from H^1 to L^1 of Riesz transforms on a Lie group of exponential growth*, Ann. Inst. Fourier **58** (2008), 1117-1151.

[23] P. Sjögren, M. Vallarino, *Heat maximal function on a Lie group of exponential growth*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **37** (2012), 491-507.

[24] E.M. STEIN, *Harmonic Analysis*. Princeton University Press (1993).
[25] E.M. STEIN, G. WEISS, *On the theory of harmonic functions of several variables.I. The theory of H^p-spaces*, Acta Math. **103** (1960), 25-62.
[26] M. TAYLOR, *Hardy spaces and BMO on manifolds with bounded geometry*, J. Geom. Anal. **19** (2009), 137-190.
[27] X. TOLSA, *The space H^1 for nondoubling measures in terms of a grand maximal operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 315-348.
[28] M. VALLARINO, *Spaces H^1 and BMO on exponential growth groups*, Collect. Math. **60** (2009), 277-295.
[29] M. VALLARINO, capitolo 16 in *Trends in Harmonic Analysis*, Springer INdAM Series, Vol. **3** - M. Picardello (Editor) (2013).

Maria Vallarino
Dipartimento di Scienze Matematiche "Giuseppe Luigi Lagrange"
Politecnico di Torino
Corso Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italy
E-mail: maria.vallarino@polito.it

Received November 27, 2012 and in revised form October 25, 2013

Flavia Ventriglia: Un approccio unificante per operatori nonlineari di tipo Kantorovich

Flavia Ventriglia[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
email: ventriglia@dmi.unipg.it

Gianluca Vinti
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia

Sunto

In [3] presentiamo alcuni risultati relativi all'approssimazione di operatori nonlineari di tipo Kantorovich della forma

$$(T_w f)(s) = \int_H K_w \left(s - h_w(t), \frac{1}{\mu_G(B_w(t))} \int_{B_w(t)} f(u) d\mu_G(u) \right) d\mu_H(t) \quad (*)$$

$w > 0, s \in G$, dove G e H sono gruppi topologici di Hausdorff localmente compatti, μ_G, μ_H le loro rispettive misure di Haar, $h_w : H \to G$, $w > 0$, è una famiglia di omeomorfismi di H in $h_w(H) \subset G$ e $K_w : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una famiglia di nuclei soddisfacenti opportune condizioni. Inoltre, per ogni $w > 0$, $\mathcal{B}_w = (B_w(t))_{t \in H}$ è un opportuno ricoprimento di G e $f : G \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile.

La forma generale di tali operatori permette, tramite opportune scelte dei gruppi G e H, delle loro rispettive misure di Haar e della famiglia $\{h_w\}_{w>0}$, di ottenere come casi particolari alcune famiglie di operatori nonlineari noti in teoria dell'approssimazione come, ad esempio, gli operatori sampling lineari e nonlineari alla Kantorovich studiati in [2] e [4], gli operatori di convoluzione alla Kantorovich, gli operatori di tipo Mellin-Kantorovich, e loro versioni multidimensionali.

I principali risultati ottenuti riguardano la convergenza puntuale, uniforme e quella modulare negli spazi di Orlicz degli operatori $(*)$.

I risultati ottenuti si possono applicare a particolari spazi di Orlicz quali, ad esempio, gli spazi L^p, gli spazi di tipo Zygmund $L^\alpha \log^\beta L$ e gli spazi di tipo esponenziale.

Bibliografia

[1] C. Bardaro, J. Musielak, G. Vinti, "Nonlinear integral operators and applications", in: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol.9, Walter de Gruyter and Co., Berlin, (2003).

[2] C. Bardaro, P.L. Butzer, R.L. Stens, G. Vinti, "Kantorovich-type generalized sampling series in the setting of Orlicz spaces", Sampling Theory in Signal and Image Processing 6(1) (2007), 29-52.

[1]Lavoro svolto nell'ambito dell'assegno di ricerca cofinanziato dalla Fondazione Cassa di Risparmio di Perugia

[3] F. Ventriglia, G. Vinti, "A unified approach for nonlinear Kantorovich-type operators", Preprint (2011).

[4] G. Vinti, L. Zampogni, "Approximation by means of nonlinear Kantorovich sampling type operators in Orlicz spaces", Journal of Approximation Theory, **161** (2009), 511-528.

Intervento: Flavia Ventriglia, Gianluca Vinti,
A Unified Approach for Nonlinear Kantorovich-Type Operators,
***Bollettino U. M. I. (9)* VI (2013), 715–724**

Bollettino U. M. I.
(9) **VI** (2013), 715-724

A Unified Approach for Nonlinear Kantorovich-Type Operators

FLAVIA VENTRIGLIA - GIANLUCA VINTI

Abstract. – *In this paper we introduce some important results on the approximation by series and their generalizations for integral operators. In particular, we show some new results for nonlinear Kantorovich-type operators, contained in a recent publication, and several graphical examples*

1. – Introduction

In the last century, one of the most important results in signal processing is the famous Whittaker-Kotel'nikov-Shannon sampling Theorem which allows the reconstruction of a signal/function f, continuous with finite energy and band-limited in the whole real axis, by means of a cardinal series which takes into account the sample values of the signal/function uniformly distributed on $\mathbb{R}$. Precisely

THEOREM 1.1. – *Let $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ be a function (being $C^0(\mathbb{R})$ the space of all continuous functions on $\mathbb{R}$) such that the support of its Fourier transform is contained in an interval $[-\pi w, \pi w]$, for $w > 0$. Then it is possible to reconstruct f on the whole real time-axis from the sequence $f\left(\frac{k}{w}\right)$ of its sample values, by means of the interpolation series*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{w}\right) sinc[\pi(wt-k)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

For further information on the approximation by series see [1]. The next figure shows the approximation of a function by means of an interpolation series. It makes visible how the function envelops the graphs which are, for a fixed k, the terms of the interpolation series.

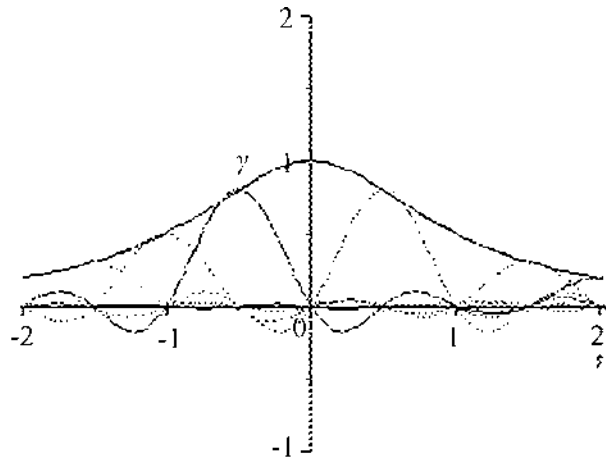


Fig. 1. – Sampling series.

However, the Theorem 1.1 has some disadvantages. First of all, in order to reconstruct the signal/function completely, the number of sample values should be infinite, which in practice does not occur. Furthermore, a signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ cannot have limited duration, and in practice the signals have this property.

In order to avoid the above and other disadvantages, P. L. Butzer and his school (see [2]) replaced in the formulas of Theorem 1.1 the *sinc* function by a function φ, which is continuous with compact support. In this way, it is sufficient to know a finite number of sample values contained in the support of φ, obtaining a family of discrete operators, called generalized sampling operators, of the form

$$(S_w^\varphi f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{w}\right)\varphi[(wt-k)], \quad t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z},\ w > 0.$$

For generalized sampling operators the following convergence results hold.

THEOREM 1.2. – *Let φ be an uniformly continuous and bounded function with compact support such that*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(u-k) = 1, \quad u \in \mathbb{R}$$

then

- *if $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a bounded and continuous function at $s \in \mathbb{R}$, then $(S_w^\varphi f)(s) \to f(s), w \to +\infty$;*
- *if $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a bounded and uniformly continuous function, then $\|S_w^\varphi f - f\|_\infty \to 0, w \to +\infty$.*

In the 2007, C. Bardaro, P.L. Butzer, R.L. Stens and G. Vinti (see [4]) introduced the Kantorovich-type generalized sampling series. In this way, they extended the approximation results obtained by Butzer and his school to functions belonging to Orlicz spaces. Therefore, they enlarged the class of signals/functions which can be to reconstruct by approximation, also incorporating not necessarily continuous functions. They defined the Kantorovich sampling operators

$$(S_w^\varphi f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi[(wx - t_k)] \left\{ \frac{w}{(t_{k+1} - t_k)} \int_{\frac{t_k}{w}}^{\frac{t_{k+1}}{w}} f(u)du \right\},$$

with $x \in \mathbb{R}, \{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a suitable sequence of real numbers, $w > 0$ and where $\chi \in L^1(\mathbb{R})$ is a suitable kernel function.

We observe that, with respect to generalized sampling operators, the sample values $f\left(\frac{k}{w}\right)$ are replaced with the integral means $\frac{w}{(t_{k+1} - t_k)} \int_{\frac{t_k}{w}}^{\frac{t_{k+1}}{w}} f(u)du$, mimicking what was done by Kantorovich with the Bernestein polynomials. This approach, at the same time, reduces the "time jitter errors", that incur since, generally, it is not possible to evaluate the function precisely in the node $\frac{k}{w}$.

Vinti-Zampogni, in [6], extended the theory given in [4] to the more general case of nonlinear Kantorivich sampling series of the form

$$(S_w^\varphi f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi\left(wx - t_k, \left\{ \frac{w}{(t_{k+1} - t_k)} \int_{\frac{t_k}{w}}^{\frac{t_{k+1}}{w}} f(u)du \right\} \right),$$

with $x \in \mathbb{R}, \{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a suitable sequence of real numbers, $w > 0$ and where $\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is a function satisfying suitable property.

The importance of this operators lies in their application to the image reconstruction. In fact, it is possible to prove that the Kantorovich sampling operators represent a good algorithm for the reconstruction and image enhancement. Their application to function belonging to Orlicz spaces allows to reconstruct the discontinuities, which are the points where the images have the greatest contrast (shades of gray), as in the edges. This is very useful, for example, in the medical field, where the images are now used not only for diagnostic purposes but also in the surgery, during which the detail of the edges is often crucial.

2. – Definitions

Following the line of generalization of C. Bardaro, J. Musielak and G. Vinti, see [3], considering functions defined in locally compact topological groups, we introduced, with G. Vinti, new operators, that give a unifying approach to the theory concerning the Kantorovich nonlinear operators.

Let $f : G \to \mathbb{R}$ be a measurable function, we defined the family of nonlinear operators

$$(T_w f)(s) = \int_H K_w \left(s - h_w(t), \frac{1}{\mu_G(B_w(t))} \int_{B_w(t)} f(u) d\mu_G(u) \right) d\mu_H(t),$$

with $w > 0, s \in G$, where

1. H and G are locally compact and σ-compact Hausdorff topological groups and, for the sake of simplicity, we assumed G to be abelian. Moreover, G and H are provided with their respective Haar measures on the class of Borel sets;
2. $\{h_w\}_{w>0}$, is a family of homeomorphisms of H into G;
3. $\{K_w\}_{w>0}$, with $K_w : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w > 0$, is a family of measurable kernels satisfying suitable conditions.

Moreover, $\forall w > 0$, we defined a cover of G, $\mathcal{B}_w = (B_w(t))_{t \in H}$, such that:

(i) $0 < \mu_G(B_w(t)) < +\infty$ for every $t \in H$ e $w > 0$;
(ii) for every $w > 0$ and $t \in H, h_w(t) \in B_w(t)$;
(iii) if $U \in \mathcal{U}$, there exists $\overline{w} > 0$ such that for every $w > \overline{w}$ we have $h_w(t) - B_w(t) \subset U$, for $t \in H$.

We require, as is usually used in approximation theory (see [3]), that the following properties are satisfied:

K_w.1) $K_w(s - h_w(\,\cdot\,), u) \in L^1_{\mu_H}(H)$ for every $u \in \mathbb{R}, s \in G$ and $K_w(s, 0) = 0$, for every $s \in G$;

K_w.2) let K_w be an (L_w, ψ)-Lipschitz kernel, i.e. there exists a family of measurable functions $L_w : G \to \mathbb{R}_0^+$, such that

$$|K_w(s, u) - K_w(s, v)| \leq L_w(s)\psi(|u - v|),$$

for every $s \in G, u, v \in \mathbb{R}$ and some φ-function $\psi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, i.e. a continuous, non decreasing function, such that $\psi(0) = 0$, $\psi(u) > 0$ for every $u > 0$ and $\psi(u) \to +\infty$ as $u \to +\infty$;

K_w.3) for every $n \in \mathbb{N}$ end $w > 0$, putting

$$r_n^w(s) = \sup_{\frac{1}{n} \leq |u| \leq n} \left| \frac{1}{u} \int_H K_w(s - h_w(t), u) d\mu_H(t) - 1 \right|, \quad s \in G,$$

we have $\lim_{w \to +\infty} r_n^w(s) = 0$ uniformly with respect to $s \in G$.

Moreover, we assume that the family $\{L_w\}_{w>0}$ satisfies the following conditions:

L_w.1) $L_w(s - h_w(\,\cdot\,)) \in L^1_{\mu_H}(H)$ for every $s \in G$;

L_w.2) there exists $M > 0$ such that

$$\int_H L_w(s - h_w(t)) d\mu_H \leq M,$$

for every $s \in G$ and $w > 0$;

L_w.3) for every $U \in \mathcal{U}$, if we put $U_{s,w} = \{t \in H : s - h_w(t) \in U\}$, we have

$$\lim_{w \to +\infty} \int_{H \setminus U_{s,w}} L_w(s - h_w(t)) d\mu_H = 0,$$

uniformly with respect to $s \in G$.

Now we show that, choosing suitable topological groups and functions, we find, as a particular case of our operators, the nonlinear sampling operators of Zampogni-Vinti. Let $G = (\mathbb{R}, +)$, provided with its Lebesgue measure, $H = (\mathbb{Z}, +)$ provided with its counting measure, $h_w(k) = \dfrac{t_k}{w}$, for every $k \in \mathbb{Z}$, where $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of real numbers, such that there exist $\delta, \Delta > 0$ with $\delta < t_{k+1} - t_k < \Delta < +\infty$, and $B_w(k) = \left[\dfrac{t_k}{w}, \dfrac{t_{k+1}}{w}\right]$. Then for every measurable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, our operators become

$$(T_w f)(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_w \left(s - \frac{t_k}{w}, \frac{w}{\Delta_k} \int_{\frac{t_k}{w}}^{\frac{t_{k+1}}{w}} f(u) du \right),$$

which, for the kernels $K_w(s, \cdot) = K(ws, \cdot)$, are the nonlinear Kantorovich sampling operators studied in [6]. Moreover, as we will see in what follows, further suitable choices of the groups G and H, of their Haar measures and of the family $\{h_w\}_{w>0}$, allow to obtain, as particular case of our operators, the nonlinear Kantorovich convolution operators and nonlinear Kantorovich-Mellin type operators, widely used in approximation theory.

3. – Results

Before introducing our results, we give some definitions useful in what follows. It is well known that, if $f : G \to \mathbb{R}$ is a measurable function, then

$$I_\varphi^G(f) = \int_G \varphi(|f(u)|) d\mu_G(u)$$

denote, for every φ-function φ, a modular functional, which generates the Orlicz space $L^\varphi(G)$ defined by

$$L^\varphi(G) = \{f : G \to \mathbb{R} \quad \text{measurable} : I_\varphi^G(\lambda f) < +\infty, \quad \text{for some} \quad \lambda > 0\}.$$

Finally, we introduce on $L^\varphi(G)$ the norm of Luxemburg

$$\|f\|_\varphi := \inf \left\{ \lambda > 0 : I_\varphi^G\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\},$$

and given $f, (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\varphi(G)$ we define two types of convergence:

1. the modular convergence, i.e. $\exists\lambda > 0$ such that
$$\lim_{n\to+\infty} I_\varphi^G(\lambda(f_n - f)) = 0, \quad \text{and}$$
2. the Luxemburg's norm convergence, i.e. $\forall\lambda > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\varphi := \lim_{w\to+\infty} I_\varphi^G(\lambda(f_n - f)) = 0.$$

In [5] we proved the following results.

THEOREM 3.1. – *Let $f : G \to \mathbb{R}$ be bounded and uniformly continuous. Then*
$$\lim_{w\to+\infty} \|(T_w f) - f\|_\infty = 0.$$

THEOREM 3.2. – *Let $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ be a convex φ-function and $f \in C_C(G)$, where $C_C(G)$ is the set of continuous functions with compact support on G. Then*
$$\lim_{w\to+\infty} \|(T_w f) - f\|_\varphi = 0.$$

THEOREM 3.3. – *For every $f \in L^\varphi(G) \cap \mathcal{Y}$, there exists $\mu > 0$ such that*
$$\lim_{w\to+\infty} I_\varphi^G[\mu(T_w f - f)] = 0,$$
where φ and η are two convex φ-functions such that for every $\lambda \in]0,1[$ there exists $C_\lambda \in]0,1[$ such that
$$\varphi(C_\lambda \psi(u)) \le \eta(\lambda u) \tag{1}$$
for every $u \in \mathbb{R}_0^+$, and we suppose that

L_w.4) *$L_w \in L^1_{\mu_G}(G)$, for every $w > 0$, and*

L_w.5) *given $N > 0$, there exists a subspace $\mathcal{Y} \subset L^\eta(G)$ with $\mathcal{Y} \supset C_C^\infty(G)$ such that for every $f \in \mathcal{Y}$,*
$$\limsup_{w\to+\infty} \alpha_w I_\eta^H \left[\frac{\lambda}{\mu(B_w(\,\cdot\,))} \int_{B_w(\cdot)} f(z)\,d\mu_G(z) \right] \le N I_\eta^G[\lambda f],$$
for every $\lambda > 0$.

In particular, in the proof of previous theorem we use the property of the Orlicz spaces, of the functions K_w and L_w, the result of norm convergence for functions with compact support and the density of the set $C_C^\infty(G)$ in $L^\varphi(G)$ with respect to the modular convergence. Moreover, we remark that condition L_w.5) is

not assured in general: however, when H and G are subgroups of $\mathbb{R}$, as in the applications shown in the next section, the "Kantorovich" nature of the operators considered here allows us to discharge $L_w.5)$ on the kernels $L_w, w > 0$.

4. – Applications

As application of this theory we now consider the Orlicz space defined by the function $\varphi(u) = u^p, u \geq 0$, $p \geq 1$; in this case the space $L^\varphi(G)$ coincides with the space $L^p(G)$. If we consider, for example, $\psi(u) = u$, we can take $\eta(u) = \varphi(u)$, and $C_\lambda = \lambda$, in this way the condition (1) is satisfied and condition $L_w.5)$ becomes:

$$\limsup_{w \to +\infty} \alpha_w \left\| \frac{1}{\mu_G(B_w(\,\cdot\,))} \int_{B_w(\cdot)} f(u) d\mu_G(u) \right\|^p_{L^p(H)} \leq N \|f\|^p_{L^p(G)},$$

In this context our result is stated as follows.

THEOREM 4.1. – *For every $f \in \mathcal{Y}$, we have*

$$\lim_{w \to +\infty} \|T_w f - f\|_{L^p(G)} = 0.$$

We observe that it is possible to make analogue considerations for other Orlicz spaces as $L^\alpha \log^\beta L$-spaces (where $\varphi_{\alpha,\beta}(u) = u^\alpha \log^\beta(u+e)$, $u \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$) or exponential spaces (where $\varphi_\alpha(u) = e^{u^\alpha} - 1, u \geq 0, \alpha > 0$).

Finally, we consider some graphical representations.
In order to obtain graphical examples of nonlinear Kantorovich-Mellin operators for a function $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < +\infty$, we consider $G = H = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ provided with logarithmic measure, $h_w(t) = t$ and $B_w(t) = \left[\frac{tw}{w+1}, \frac{t(w+1)}{w}\right]$. So, our operators take now the form:

$$(M_w f)(s) = \int_0^{+\infty} K_w \left(\frac{s}{t}, \frac{1}{2\log\left(\frac{w+1}{w}\right)} \int_{\frac{(tw)}{w+1}}^{\frac{t(w+1)}{w}} f(u) \frac{du}{u} \right) \frac{dt}{t}.$$

As kernels we use the functions

$$K_w(s,u) = L_w(s) g_w(u), \quad w > 0, s \in \mathbb{R}^+, u \in \mathbb{R},$$

where our assumption $K_w.i), i = 1, \ldots, 3$ and $L_w.i), i = 1, \ldots, 4$ are satisfied if we consider

$$\mathbf{L} := L_w(x) = w x^w \chi_{]0,1[}(x), \quad w > 0, x \in \mathbb{R}^+,$$

and

$$g_w(x) = \begin{cases} x^{1-\frac{1}{w}} & \text{if } 0 < \quad x < \quad 1 \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We consider, in order to obtain its approximation with previous operators, the function

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2 \\ -\dfrac{3}{x^3} & x \geq 2 \end{cases}$$

The next graph show as, for different w, we obtain a more precise approximation of the function f.

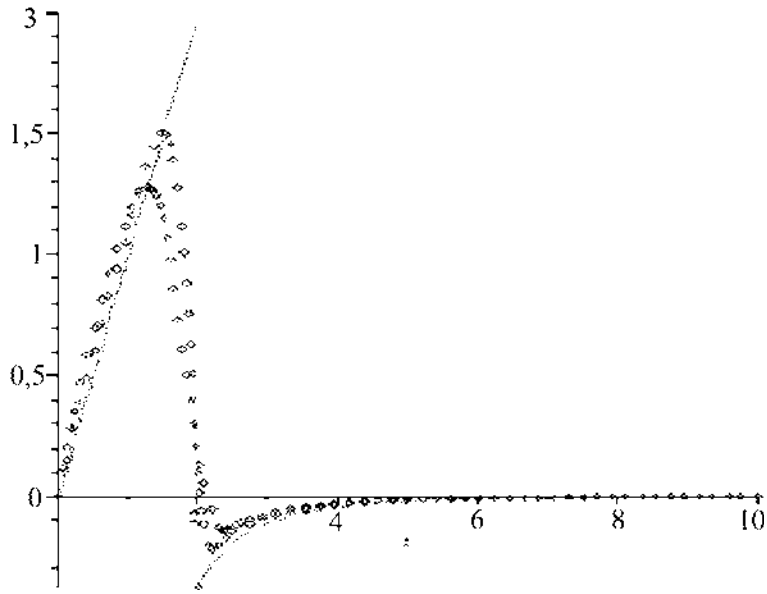


Fig. 2. – The nonlinear Kantorovich Mellin type operators $(M_w^{\mathbf{L}} f)(x)$ for $w = 5, 10$.

Analogously, in the case of Kantorovich convolution sampling operators, our operators take the form

$$(S_w^G f)(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(ws - k) g_w \left(\frac{w}{\Delta_k} \int_{\frac{k}{w}}^{\frac{k+1}{w}} f(u) du \right), \quad w > 0,$$

or

$$(C_w^G f)(s) = \int_{\mathbb{R}} G(ws - k) g_w \left(\frac{w}{2} \int_{\frac{(k-1)}{w}}^{\frac{(k+1)}{w}} f(u) du \right) dk, \quad w > 0,$$

where we use as kernel function G, for example, Fejer's kernel

$$F(x) = \frac{1}{2} sinc^2 \left(\frac{x}{2} \right),$$

or combination of positive B-splines

$$M_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left(\frac{n}{2} + x - j \right)_+^{n+1}.$$

In particular, if we consider the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 2 \\ -\dfrac{3}{x^3} & x \geq 2, \end{cases}$$

and as kernel G a combination of positive B-splines we obtain the following graph.

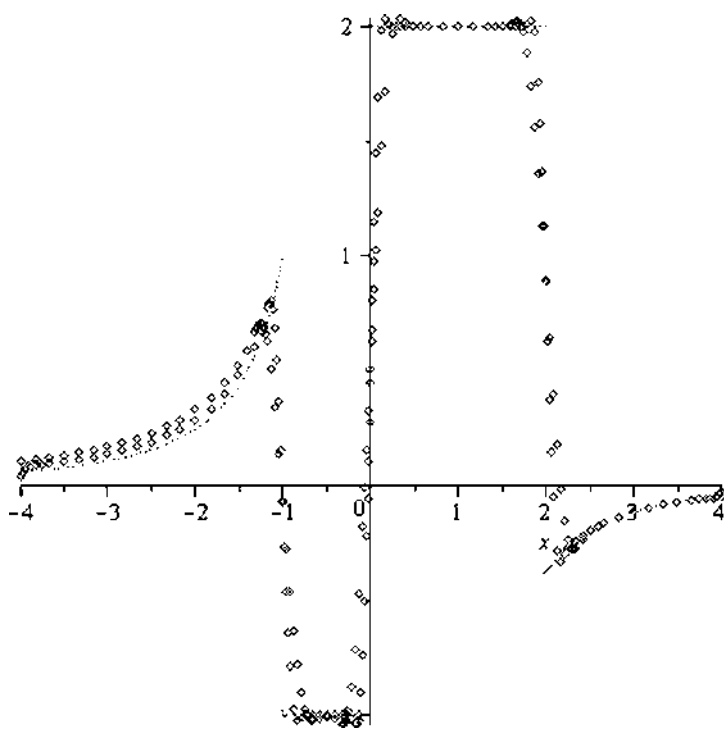


Fig. 3. – The nonlinear Kantorovich convolution operators are $(C_w^G f)(x)$ with $G(x) = 3M_4(x) - 4M_3(x)$ per $w = 5, 10, 15$.

REFERENCES

[1] J.R. Higgins, *Five short stories about the cardinal series,* Bull. Amer. Math. Soc., **12** (**1**) (1985), 45-89.

[2] P.L. Butzer, *A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extentions,* J. Math. Res. Exposition, **3** (1983), 185-212.

[3] C. Bardaro - J. Musielak, G. Vinti, *Nonlinear integral operators and applications*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 9, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2003.

[4] C. Bardaro - P.L. Butzer - R.L. Stens - G. Vinti, *Kantorovich-type generalized sampling series in the setting of Orlicz spaces,* Sampling Theory in Signal and Image Processing, **6** (**1**) (2007), 29-52.

[5] F. Ventriglia - G. Vinti, *A unified approach for the convergence on nonlinear Kantorovich-Type operators, to appear.*

[6] G. Vinti, L. Zampogni, *Approximation by means of nonlinear Kantorovich sampling type operators in Orlicz spaces,* J. of Approximation Theory, **161** (2009), 511-528.

Flavia Ventriglia, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Universita degli Studi di Napoli "Federico II"
Via Cintia, Complesso Monte S. Angelo, 80126, Napoli, Italy
E-mail: flavia.ventriglia@unina.it

Gianluca Vinti, Dipartimento di Matematica e Informatica,
Universita degli Studi di Perugia, Via Vanvitelli 1, 06123 Perugia, Italy
E-mail: mategian@unipg.it

Received November 28, 2012 and in revised form November 30, 2013

Luigi Vezzoni: L'equazione di Calabi-Yau in Nilvarietà

Luigi Vezzoni
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
email: `luigi.vezzoni@unito.it`

Sunto

In questa comunicazione verranno presentati alcuni risultati ottenuti in [2].

L'equazione di Calabi-Yau nelle varietà Kähleriane è l'equazione su cui essenzialmente si basa la congettura di Calabi. A seguito dell'importante lavoro di Yau in [4] è noto che tale equazione ha sempre un unica soluzione. In [1] Donaldson estende l'equazione di Calabi-Yau al caso simplettico e congettura l'esistenza delle soluzioni nel caso 4-dimensionale. In [3] Tosatti e Weinkove dimostrano la congettura di Donaldson nel caso esplicito della varietà di Kodaira-Thurston per dati iniziali invarianti rispetto all'azione di un toro. In [2] viene esteso questo risultato ad ogni nilvarietà compatta. Precisamente viene dimostrato il seguente

Teorema (Fino, Li, Salamon,–). *Sia $M = \Gamma\backslash X$ una nilvarietà con $X = \mathrm{Nil}^3 \times \mathbb{R}$ o Nil^4. Si assuma che M ammetta una struttura quasi Kähleriana invariante (g, J, Ω) ed una fibrazione in tori in cui le fibre siano lagrangiane. Allora per ogni forma di volume $\sigma = \mathrm{e}^F \Omega^2$ con F invariante per l'azione di T^2, esiste un'unica $\tilde{\omega} \in [\Omega]$ tale che*

$$\tilde{\omega}^2 = \sigma\,.$$

Bibliografia

[1] S. K. Donaldson, Two-forms on four-manifolds and elliptic equations. *Inspired by S.S. Chern*, 153–172, Nankai Tracts Math. 11, World Scientific, Hackensack NJ, 2006.

[2] A. Fino, Y.Y. Li, S. M. Salamon, L. Vezzoni, The Calabi–Yau equation on 4-manifolds over 2-tori, `arXiv:1103.3995`

[3] V. Tosatti, B. Weinkove, The Calabi-Yau equation on the Kodaira-Thurston manifold, in corso di stampa in *J. Inst. Math. Jussieu*, `arXiv:0906.0634`

[4] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), no. 3, 339–411.

Parte 3

Conferenze a cura della CIIM

Anna Baccaglini-Frank: Micromondi e "Mathematical Habits of Mind"

Anna Baccaglini-Frank[1]
email: abaccaglinifrank@gmail.com

Sunto

Una delle difficoltà maggiori da superare nell'insegnamento della matematica è portare gli studenti ad una comprensione di che cosa sia una struttura matematica. Per sviluppare una tale comprensione può essere utile mettere gli studenti nelle condizioni di esercitare, in maniera sempre più consapevole, "mathematical habits of mind" (*modi di pensare matematici*). Negli ultimi quarant'anni la ricerca in questa direzione ha messo in luce il contributo di particolari ambienti informatici, *micromondi*, il cui design mette a disposizione degli studenti "an easy-to-understand set of operations that students can use to engage tasks of value to them, and in doing so, they come to understanding powerful underlying principles." [1].

Ma qual è il rapporto tra il design di un micromondo e la concezione di attività al suo interno e l'obiettivo didattico di chi lo ha progettato? Infine cosa fanno davvero gli allievi nelle attività in classe? Presenteremo degli esempi di lavoro di studenti in due diversi micromondi, Cabri ed eXpresser, rispettivamente per la geometria e per l'algebra, raccolti e analizzati durante studi recenti ([2], [3], [4]). Emergerà il problema della possibile distanza tra lo sviluppo "modi di pensare situati", che ha origine nei micromondi, e lo sviluppo di "mathematical habits of mind", presupposto nel design dei micromondi. Dunque sottolineeremo l'esigenza di integrare ed ampliare il quadro di riferimento iniziale, di ispirazione costruttivista, per tener conto del ruolo dell'insegnante, non solo come organizzatore dell'ambiente di apprendimento per l'allievo, ma anche come co-attore nel processo collettivo di insegnamento-apprendimento.

Bibliografia

[1] diSessa A. A. (2000): *Changing minds: Computers, learning, and literacy.* Cambridge, MA: MIT Press.

[2] Baccaglini-Frank A. (2010): Conjecturing in Dynamic Geometry: A Model for Conjecture-Generation through Maintaining Dragging. *Doctoral dissertation.* University of New Hampshire, Durham, NH.

[3] Baccaglini-Frank A., Mariotti M.A. (2010): Generating Conjectures through Dragging in Dynamic Geometry: the Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(3), 225-253.

[1]Lavoro svolto nell'ambito della tesi di dottorato presso l'Università degli Studi di Siena e la University of New Hampshire (USA), e nell'ambito del *MiGen Project* (www.migen.org).

[4] Noss R., Hoyles H., Mavrikis M., Geraniou E., Gutierrez-Santos S., Pearce D. (2009): Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalization. *ZDM, 41*(4), 493-503.

Claudio Bernardi: La dimostrazione nelle matematiche elementari: tipologie ed esempi

Claudio Bernardi
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma
email: claudio.bernardi@uniroma1.it

Sunto

La dimostrazione è uno dei punti caratteristici dell'attività matematica, tanto a livello di ricerca quanto sul piano didattico. Spesso si sentono lamentele da parte di docenti, sia delle Superiori sia universitari, sulla scarsa familiarità che molti studenti sembrano avere con l'idea stessa di dimostrazione.

Tuttavia, non è facile precisare che cosa noi docenti vorremmo che gli studenti sapessero riguardo alla dimostrazione in generale; del resto, non è nemmeno facile spiegare che cos'è una dimostrazione. Anzi, in certi casi, ci possono essere problemi e differenze di opinioni nel riconoscere le dimostrazioni corrette.

Verranno proposti e discussi esempi di dimostrazioni nelle matematiche elementari con strutture diverse: dimostrazioni "senza parole", dimostrazioni "a ritroso", dimostrazioni "concrete", ...

Intervento: Claudio Bernardi,
La dimostrazione nelle matematiche elementari: tipologie ed esempi

La dimostrazione nelle matematiche elementari: tipologie ed esempi

Claudio Bernardi
Dipartimento di Matematica, *Sapienza* - Università di Roma

La dimostrazione è uno dei punti caratteristici dell'attività matematica, tanto a livello di ricerca quanto sul piano didattico. Spesso si sentono lamentele da parte di docenti, sia delle Superiori sia universitari, sulla scarsa familiarità che molti studenti sembrano avere con l'idea stessa di dimostrazione. Tuttavia, non è facile precisare che cosa noi docenti vorremmo che gli studenti sapessero riguardo alla dimostrazione in generale; del resto, non è nemmeno facile spiegare *che cos'è* una dimostrazione.
La domanda di partenza di questo intervento è proprio: *quando una dimostrazione è rigorosa*?
In proposito sono stati scritti dialoghi divertenti ([DH], [D], [H]), in cui studenti chiedono inutilmente a matematici esperti risposte chiare alla domanda precedente.

Piuttosto che discutere il problema in generale, ritengo più interessante trovare esempi in cui ci possono essere differenze di opinioni nel riconoscere la correttezza di una dimostrazione. In quest'ottica, vedremo esempi di dimostrazioni in matematica elementare con strutture diverse: dimostrazioni "*senza parole*", dimostrazioni con "*metafora*", dimostrazioni "*concrete*", dimostrazioni "*a ritroso*".
Anche se questo intervento non vuole essere una proposta didattica, disporre di strategie e di metodi diversi di dimostrazione risulta utile, a mio parere, in vari momenti della pratica dell'insegnamento, sia per facilitare la comprensione degli studenti (un docente che sa spiegare in un solo modo non è un buon docente), sia per capire un errore o il procedimento di chi ha iniziato una risoluzione ma non è arrivato in fondo.

dimostrazioni senza parole

Una figura o uno schema aiutano molto spesso nel corso di un ragionamento, ma in alcuni casi una figura opportuna è addirittura sufficiente per arrivare alla conclusione. Nei due libri di Nelsen [N1, N2] sono riportati molti esempi, alcuni dei quali complessi ed eleganti; qui ci limitiamo a poche semplici figure, che tuttavia offrono lo spunto per discutere alcuni aspetti di questa tipologia.

È facile verificare che

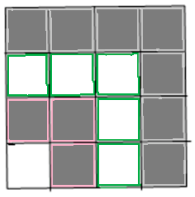
$$1+2+1 = 4 = 2^2, \qquad 1+2+3+2+1 = 3^2, \qquad 1+2+3+4+3+2+1 = 4^2.$$

Per dimostrare in generale l'uguaglianza

$$1 + 2 +\ldots+ (n-1) + n + (n-1) +\ldots+ 1 = n^2$$

si può procedere per induzione.
Oppure, si può dividere un quadrato in n^2 quadratini. Pensiamo il quadrato composto da "colonne" parallele ad una diagonale come nella figura a fianco: le colonne contengono rispettivamente 1, 2, …, n, …, 2, 1 quadratini. Otteniamo direttamente l'uguaglianza.

Questa figura è accettabile come dimostrazione?
Ci possono essere diverse opinioni, ma la mia risposta è sì. È chiaro che si fa riferimento solo a un caso particolare, ma l'uguaglianza si stabilisce non contando i quadretti, ma controllando una struttura generale.



La seconda figura illustra il fatto che la somma dei primi n numeri dispari è n^2, cioè $1 + 3 + 5 + ... + (2n–1) = n^2$.

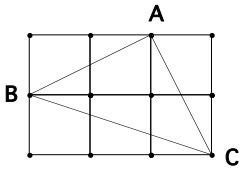
Proprio osservando queste figure e i vari modi in cui si può scomporre un quadrato, si può affermare che ci sono poche altre somme ragionevolmente semplici con risultato n^2 (figure meno naturali corrispondono ad espressioni aritmetiche o algebriche più artificiose).

Per situazioni analoghe nello spazio (e in dimensioni superiori), rimando a [Ba]: il discorso diventa più complesso, ma molto interessante.

Vediamo un altro esempio. Per dimostrare l'uguaglianza

$$arctg\left(\frac{1}{2}\right) + arctg\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

basta osservare le due parti in cui è scomposto l'angolo in B del triangolo rettangolo isoscele ABC.

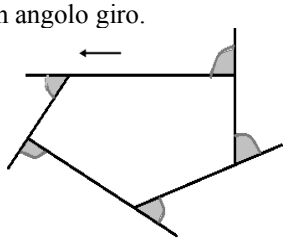


La stessa uguaglianza di dimostra applicando la formula che fornisce la tangente di una somma: quest'ultimo calcolo (più formale) è forse più facile da ripetere, mentre la dimostrazione visiva è più convincente e più facile da ricordare; inoltre si generalizza in modo spontaneo.

dimostrazioni per metafora

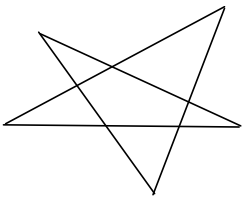
Sono convinto che una metafora azzeccata sia didatticamente più efficace della pretesa concretezza di certi problemi.

Consideriamo il classico teorema sulla somma degli angoli di un triangolo; nella dimostrazione usuale si applica l'assioma delle parallele (e così si collega l'argomento alle rette parallele - in effetti, nelle geometrie non euclidee il teorema non vale).
Procediamo in un modo diverso. Ricorrendo alla metafora del *volante*, dimostriamo che la somma degli angoli esterni di un poligono convesso P è uguale a un angolo giro.
Immaginiamo di percorrere il contorno di P: in ogni vertice di P dobbiamo "girare il volante", ruotando di un angolo (orientato) uguale all'angolo esterno in quel vertice. Quando torniamo al punto di partenza, abbiamo fatto un giro completo: la somma degli angoli esterni è un angolo giro (2 angoli piatti). Di conseguenza, visto che la somma di tutti gli angoli interni ed esterni è n piatti, la somma degli angoli interni è uguale a n−2 angoli piatti.



La dimostrazione non è formale, ma è convincente per la sua immediatezza *visiva*. Il ragionamento si applica anche a poligoni *concavi* (il tal caso qualche angolo esterno va considerato negativo) e a poligoni "*intrecciati*".

Per esempio, per calcolare la somma degli angoli nelle 5 punte della stella a fianco, basta osservare che, percorrendo il contorno della stella, si fanno 2 giri che corrispondono alla somma degli angoli esterni. Si conclude facilmente che la somma richiesta è un angolo piatto.

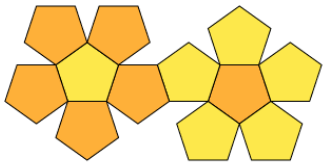


Fino a che punto le dimostrazioni viste sono *accettabili* come dimostrazioni?
Un mio criterio è il seguente: una dimostrazione è "accettabile" quando la si può formalizzare, anche se formalizzandola si perde l'immediatezza percettiva, o la suggestione di una metafora.

dimostrazioni concrete

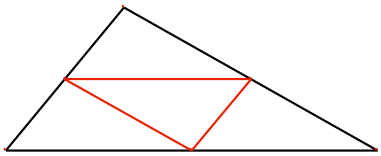
In questo caso, proporrò una dimostrazione sbagliata, proprio per sottolineare la necessità di una cautela particolare quando si ha a che fare con dimostrazioni non standard.

Fin dalle Scuole Medie si dimostra che ci sono solo 5 *poliedri regolari*, a meno di similitudine; tuttavia, con la dimostrazione usuale (richiesta anche in un quesito all'esame di Stato dello Scientifico pochi anni fa) si conclude solo che esistono *al più* 5 poliedri. Per costruire effettivamente i 5 poliedri, un metodo semplice consiste nel considerare gli sviluppi e controllare l'uguaglianza delle coppie dei lati che devono essere "incollati" fra loro.



Consideriamo ora il problema seguente: *sono dati* 4 *triangoli uguali; è possibile costruire un tetraedro che abbia per facce i triangoli dati?*
Il problema non è affatto facile. Anche limitandosi a triangoli isosceli, sembra che la risposta sia negativa (tranne che nel caso particolare dei triangoli equilateri).

La figura chiave per arrivare alla risposta si ottiene unendo i punti medi dei lati di un triangolo: è ben noto che il triangolo è così scomposto in 4 triangoli uguali. Tutto allora diventa semplice: la figura, pensata come sviluppo di un tetraedro, "si chiude" sempre, perché le coppie di lati da incollare sono ovviamente uguali.



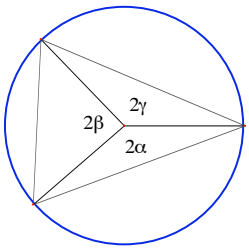
Si conclude che la risposta alla domanda iniziale è sempre positiva: comunque siano dati 4 triangoli uguali, è possibile costruire un tetraedro con quei triangoli.

Il guaio è che ... non è vero; o, meglio, che la costruzione è possibile se e solo se i 4 triangoli sono acutangoli. La precedente "dimostrazione" è sbagliata: si tratta dello sviluppo di un tetraedro solo se sono rispettate certe condizioni sugli angoloidi. Ma è molto più convincente un semplice modellino di carta, che non si chiude in presenza di un angolo ottuso.

dimostrazioni a ritroso

In quest'ultima tipologia di dimostrazione si parte ... dalla fine. È uno stile ad alto rischio, nel senso che è facile commettere errori logici.

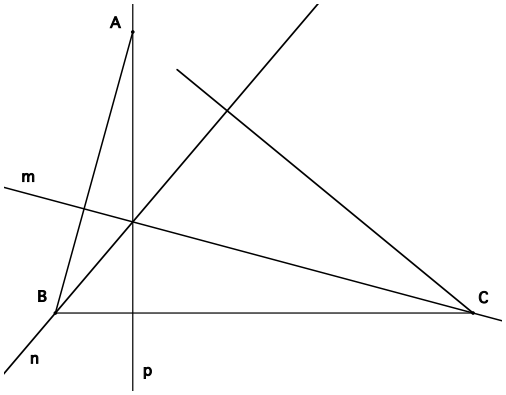
Vediamo, come primo esempio, come si dimostra a ritroso che *ogni triangolo è inscrivibile in un cerchio*.
Invece che partire da un triangolo ... si parte da un cerchio e si costruiscono tre angoli al centro di ampiezze 2α, 2β, 2γ (con $\alpha + \beta + \gamma$ = angolo piatto). Congiungendo gli estremi dei raggi si trova un triangolo con gli angoli di ampiezza α, β, γ.



Abbiamo così inscritto in un cerchio un triangolo di angoli α, β, γ. Per similitudine, il ragionamento si applica a tutti i triangoli.

La dimostrazione è molto semplice. Forse lascia un po' insoddisfatti perché non ci dice come costruire il centro del cerchio (che invece si trova con la dimostrazione usuale), ma fornisce direttamente altre informazioni: per esempio, il circocentro è esterno al triangolo se e solo se il triangolo è ottusangolo. Passiamo ad un altro dei punti "notevoli" dei triangoli.

Vogliamo dimostrare che *in ogni triangolo le tre rette che contengono le altezze si incontrano in un punto* (ortocentro).



Partiamo da tre rette *m*, *n*, *p* che passano per uno stesso punto e pensiamo che si tratti appunto delle rette su cui giacciono le altezze di un triangolo *ABC*.
Si tratta ora di ricostruire i lati del triangolo: fissato a piacere il vertice *A* ad esempio sulla retta *p*, tracciamo la perpendicolare da *A* ad *m* fino ad incontrare la retta *n* in un punto *B*; quindi tracciamo la perpendicolare da *B* a *p* fino ad incontrare la retta *m* in un punto *C* e, infine, la perpendicolare da *C* ad *n*.

Per concludere la dimostrazione occorre dimostrare due cose:
- l'ultima perpendicolare tracciata incontra *p* nel punto *A*, ossia il triangolo "si chiude";
- per questa via si ottengono *tutti* i triangoli (la cosa non è affatto scontata, perché abbiamo supposto fin dall'inizio che le rette delle altezze concorrano in un punto).

Il primo fatto si dimostra a partire dall'osservazione che i sei triangoli rettangoli che si vengono a formare sono simili a due a due (per i dettagli rimando a [Be2]). Per quanto riguarda il secondo punto, detti α, β, γ gli angoli di un qualsiasi triangolo *T*, disegniamo le tre rette *m*, *n*, *p* in modo che formino angoli uguali ad α, β, γ (la somma è un angolo piatto!); con la costruzione vista troviamo un triangolo *ABC* che ha gli angoli uguali a quelli di *T* e, quindi, è simile a *T*. Ora, le tre altezze di *ABC* passano per uno stesso punto (le abbiamo costruite così!); ma *T* è simile ad *ABC* e, di conseguenza, la stessa conclusione vale per *T*.

Spesso un teorema dice che: se si parte da un certo oggetto *F* (figura, numero, ecc.) che gode di certe proprietà e si eseguono certe costruzioni (operazioni, ecc.), si trova un oggetto *G* per cui valgono altre proprietà. L'idea generale di una dimostrazione a ritroso è che, invece di partire da *F*, si parte da un oggetto *G* che ha già le proprietà volute e si ricostruisce *F*; naturalmente (e questo è un punto caratteristico) si deve dimostrare che si ritrovano *tutti* i possibili *F*.
Per inciso, osservo che, da un punto di vista strettamente didattico, una dimostrazione passo per passo e priva di idee originali, talvolta è noiosa, ma spesso è più efficace di una dimostrazione con un'idea brillante.

Vediamo un altro esempio di carattere aritmetico. Dimostriamo che *il prodotto di* 4 *interi consecutivi, aumentato di* 1, *è un quadrato*. In altre parole, si tratta di mostrare che l'espressione $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ è un quadrato.
La cosa non è difficile, ma non è nemmeno immediata, anche perché qualche esempio non aiuta a capire il legame fra i 4 numeri consecutivi e la base del quadrato.
Procediamo a ritroso. Prima di iniziare, vorrei sottolineare che l'enunciato è del tipo «per ogni *n* esiste un *a* tale che ... ». Il procedimento usuale consiste nel trovare *a* partendo da *n*; ma è più facile ricostruire *n* partendo da *a* (dimostrazione a ritroso), anche se *non* è vero che per

ogni a esiste un n nelle condizioni descritte. Il procedimento a ritroso *non* corrisponde a dimostrare il teorema inverso: del resto, in questo caso, il teorema inverso non vale, perché non è vero che ogni quadrato è delle forma considerata.
Partiamo dunque dalla fine, cioè da un quadrato a^2 e togliamo 1: abbiamo $a^2 - 1$, che è facile scomporre nel prodotto $(a-1)(a+1)$.
Supponiamo ora che $a+1$ sia il prodotto di due numeri consecutivi: $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$; ma se $a + 1 = n^2 + 3n + 2$, allora $a - 1 = n^2 + 3n = n(n+3)$.
In definitiva, possiamo scrivere:

$$a^2 - 1 = (a-1)(a+1) = n(n+3)(n+1)(n+2).$$

L'ultima uguaglianza vale ovviamente per ogni n, il che conclude la dimostrazione.

La dimostrazione a ritroso fornisce suggerimenti per trovare altri enunciati analoghi: per esempio, una semplice generalizzazione è «il prodotto di 4 numeri in progressione aritmetica, di differenza h, sommato ad h^4 è un quadrato».

Vari altri teoremi si possono dimostrare a ritroso: alludo sia a teoremi semplici (come il fatto che ogni triangolo sia circoscrivibile), sia a teoremi più complessi (come il teorema di Morley). Spesso si dimostra a ritroso la formula di Eulero per i poliedri: si parte da un punto (per il quale vale la relazione $v - s + f = 1$) e poi si costruisce il poliedro; ma, al solito, è necessaria molta attenzione (ho visto spesso "dimostrazioni" in cui non si considerano tutti i casi).
Fra i teoremi che si possono dimostrare a ritroso cito, infine, il teorema di Napoleone: dato un qualunque triangolo ABC, i centri dei triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di ABC, sono i vertici di un triangolo equilatero.

Bibliografia

[A] F. ARZARELLO, *Provare se, vedere che, sapere perché: la dimostrazione in classe*, Atti del XIX Congresso UMI, in corso di stampa
[Ba] M. BARRA, *Insegnamento dinamico del calcolo delle probabilità seguendo le indicazioni di Bruno de Finetti*, XXVI Convegno UMI – CIIM, 2006, pubblicato in rete in www.ciim26.unimore.it/abstract/abs_barra.pdf
[Be1] C. BERNARDI, *How formal should a proof be in teaching mathematics*?, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, suppl. vol. 5, n. 5 (november 1998), pag. 7-18
[Be2] C. BERNARDI, *Un problema da discutere – L'ortocentro di un triangolo*, Archimede, LXI (2009), pag. 28-34
[C] H.S.M. COXETER, S.L. GREITZER, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, 1967
[DH] P.J. DAVIS, R. HERSCH, *L'esperienza matematica*, (trad. ital.), Edizioni di Comunità, 1985
[D] K. DEVLIN, *Computers and Mathematics*, Notices of the AMS, vol. 39 (1992), pag. 1065-1066
[F] P. FRANCINI, *Cercare, mostrare, dimostrare*, Archimede, LXII (2010), pag. 67-73
[H] R. HERSH, *Dialogo fra un Matematico di Successo e uno Studente Testardo*, (trad. ital.), Archimede, LXII (2010), n. 4
[N] R.B. NELSEN, *Proofs without words* I, II, The Mathematical Association of America, 1993 - 2000

Paolo Boero: I "comportamenti razionali" secondo Habermas in matematica e in altri ambiti culturali

Paolo Boero
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova
email: boero@dima.unige.it

Sunto

Che cosa distingue le attività (degli studenti, ma anche degli esperti) in ambito geometrico da quelle in ambito algebrico, o in ambito probabilistico? Che cosa distingue le attività in ambito matematico da quelle (ad esempio) in astrofisica, o in genetica? E cosa distingue le attività in ambito scientifico da quelle (ad esempio) in ambito filosofico? Rispondere a queste domande risulta di un certo interesse per la progettazione e l'analisi didattica per quanto riguarda:

- l'analisi a priori delle competenze che devono essere sviluppate affinché uno studente possa divenire davvero "competente" in un certo ambito della matematica (o di altre discipline);
- l'analisi delle attività degli studenti (confrontando i loro comportamenti reali con i comportamenti "ideali" ipotizzati per un dato compito);
- l'analisi epistemologica e cognitiva delle sinergie possibili e delle differenziazioni necessarie tra ambiti di una stessa disciplina, o tra discipline diverse, ai fini di una formazione sufficientemente equilibrata e completa del cittadino.

Il mio intervento riguarda un adattamento del costrutto teorico di Habermas del "comportamento razionale" per fornire alcune risposte alle domande poste all'inizio, nella prospettiva didattica ora indicata. Habermas definisce "razionale" un comportamento discorsivo se soddisfa tre tipi di requisiti:

- requisiti "epistemici", riguardanti l'accertamento della verità delle affermazioni con metodi condivisi in un dato contesto socio-culturale;
- requisiti "teleologici", riguardanti la scelta consapevole degli strumenti per raggiungere lo scopo dell'attività;
- requisiti "comunicativi", riguardanti la scelta consapevole dei mezzi per comunicare con gli altri in un dato contesto socio-culturale.

Riferendomi a lavori già pubblicati da Boero, Douek, Morselli dopo il 2006 e a ricerche in corso, mostrerò come il costrutto di Habermas può essere adattato per l'analisi e il confronto di comportamenti discorsivi (reali o "ideali") di risolutori di problemi in varie discipline e culture, in quanto consente:

- analisi su scala diversa (dal settore, ad esempio l'algebra, di una disciplina alla disciplina, ad esempio la matematica o la fisica, fino all'analisi e al confronto tra "culture" diverse);
- possibilità di tener conto, nell'analisi di una attività di problem solving, sia della soluzione ottenuta che dei processi che portano ad essa.

Francesca Morselli: Argomentare e dimostrare nella scuola secondaria di primo grado: teoria e pratica

Francesca Morselli
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova
email: fraemme@libero.it

Sunto

Il ruolo cruciale dell'argomentazione e l'approccio alla dimostrazione in matematica sono un tema di ricerca quanto mai attuale in didattica della matematica. L'importanza dell'argomentazione come competenza centrale nelle attività matematiche e, più in generale, come obiettivo importante della formazione intellettuale del cittadino è anche riconosciuta nelle recenti "indicazioni per il curricolo".

Il modello di razionalità proposto da Habermas, opportunamente adattato, fornisce un quadro comprensivo per meglio comprendere la complessità dei processi di insegnamento-apprendimento dell'argomentazione e dimostrazione.

Nel presente contributo, l'adattamento del modello di Habermas è descritto e situato in rapporto ad altri costrutti presenti in didattica della matematica.

Successivamente, in un'ottica di rapporto dialettico tra teoria e pratica, si illustra l'utilizzo del modello per la messa a punto, gestione e analisi a posteriori di esperienze in classe, e come l'analisi di tali esperienze ha portato ad un progressivo affinamento del modello e alla produzione di nuove domande di ricerca.

Nello specifico, si farà riferimento ad un percorso volto a favorire l'attività argomentativa nella scuola secondaria di primo grado, nell'ambito della Teoria Elementare dei Numeri. Tale percorso si inserisce nel progetto "Linguaggio e argomentazione nello studio della matematica dalla scuola primaria all'Università", avviato nel 2008 e tuttora in corso nel quadro del Piano Lauree Scientifiche. Il progetto, sviluppato in collaborazione tra ricercatori universitari ed insegnanti, ha come scopo quello di mettere a punto e proporre in classe percorsi ed attività ad ampio respiro, in campi di esperienza significativi, attorno al "nodo" dell'argomentazione in campo matematico. Tali percorsi ed attività sono finalizzati allo sviluppo di competenze che intervengono nella dimostrazione matematica. I percorsi sono caratterizzati da attività ad alta componente argomentativa (confronto di ipotesi, confronto di strategie, confronto di testi, produzione di argomentazioni a supporto di un'ipotesi). Le attività vedono l'alternarsi di lavoro individuale, lavoro in piccoli gruppi e discussioni collettive. Il progetto è rivolto agli insegnanti, in quanto mira alla diffusione di buone pratiche, e agli studenti, che attraverso i percorsi proposti dovrebbero sviluppare un atteggiamento argomentativo e arrivare a cogliere le prerogative dell'argomentazione in campo matematico.

Parte 4

Comunicazioni

Sezione 1 Analisi non lineare e sistemi dinamici

Alberto Abbondandolo: Fenomeni di squeezing e non-squeezing nelle dimensioni intermedie

Alberto Abbondandolo
Dipartimento di Matematica L. Tonelli, Università di Pisa
email: abbondandolo@dm.unipi.it

Slava Matveyev
Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Sunto. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^{2n}$, munito delle coordinate $(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)$ e della forma simplettica standard $\Omega = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j$. Un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^{2n}$ si dice *simplettico* se conserva la 2-forma Ω. Nel 1985 M. Gromov ha dimostrato il seguente risultato, noto come *teorema non-squeezing*, [1]: nessun diffeomorfismo simplettico può mandare la palla di raggio r nel cilindro

$$\{(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q_1^2 + p_1^2 < s^2\}$$

se $s < r$. Equivalentemente, il teorema non-squeezing può essere riformulato nel modo seguente: se P_1 è il projettore canonico sul piano corrispondente alle coordinate q_1, p_1 e ϕ è un diffeomorfismo simplettico, allora

$$\operatorname{area}\big(P_1\phi(B_r)\big) \geq \pi r^2,$$

per ogni palla B_r di raggio r contenuta nel dominio di ϕ. Così riformulato, il teorema non-squeezing induce a porsi la seguente domanda: se P_k è il proiettore canonico sul $2k$-sottospazio corrispondente alle coordinate $q_1, p_1, \ldots, q_k, p_k$ e ϕ è un diffeomorfismo simplettico, è vero che

$$\operatorname{vol}_{2k}\big(P_k\phi(B_r)\big) \geq \omega_{2k} r^{2k}, \tag{4}$$

dove ω_{2k} indica il volume della palla unitaria di dimensione $2k$? La (1) è vera per $k = 1$, grazie al teorema di Gromov, e per $k = n$, dove vale l'uguaglianza per il teorema di Liouville. In un recente lavoro, [2], abbiamo studiato la domanda (1) nelle dimensioni intermedie, ossia per $1 < k < n$. Abbiamo dimostrato che la risposta è affermativa se il diffeomorpfismo simplettico ϕ è lineare e abbiamo esibito un controesempio non lineare. A metà strada tra il lineare ed il non lineare, è interessante chiedersi cosa accada localmente, per esempio, fissato ϕ, per r piccolo. Su questa domanda abbiamo risultati parziali, che legano il fenomeno di non-squeezing all'integrabilità di opportune distribuzioni $2k$-dimensionali.

Bibliografia

[1] M. Gromov: "Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds", Invent. Math. 82 (1985), 307–347.

[2] A. Abbondandolo, S. Matveyev: "Middle-dimensional squeezing and non-squeezing behavior of symplectomorphisms", preprint 2011.

Pietro Baldi: Soluzioni periodiche di equazioni di Benjamin-Ono

Pietro Baldi[1]
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" Università di Napoli Federico II
email: pietro.baldi@unina.it

Sunto. I risultati presentati si inseriscono nell'ambito dello studio di soluzioni periodiche per equazioni differenziali e pseudo-differenziali alle derivate parziali che hanno una struttura di sistema dinamico hamiltoniano di dimensione infinita. In particolare, si considerano equazioni del tipo

$$\omega u_t + \mathcal{H} u_{xx} + \partial_x(f(x,u)) = 0,$$

con condizioni periodiche per tempo e spazio $(t,x) \in \mathbb{T}^2$, dove ω è un parametro reale (frequenza), f è una funzione di classe C^k non-lineare nell'incognita $u(t,x)$, e $\mathcal{H}$ è la trasformata di Hilbert su $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, cioè l'operatore pseudo-differenziale rappresentato dal moltiplicatore di Fourier

$$\mathcal{H} : e^{ijx} \mapsto -i\,\mathrm{sign}(j)\, e^{ijx}\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,.$$

Per $f = u^2$ si ha l'equazione di Benjamin-Ono, equazione hamiltoniana completamente integrabile che descrive il problema di fluidodinamica del moto del profilo che separa due fluidi di diversa densità in un oceano bidimensionale con profondità infinita.

Nelle equazioni considerate sono presenti due difficoltà tipiche dei sistemi hamiltoniani completamente risonanti: (i) un problema di biforcazione con nucleo di dimensione infinita, e (ii) un problema di piccoli divisori.

Viene provata l'esistenza di soluzioni periodiche di piccola ampiezza per frequenze ω in un insieme di misura di Lebesgue positiva.

Buona parte dell'interesse di questo lavoro risiede nel metodo della dimostrazione, che è una combinazione di vari ingredienti, in parte classici e in parte meno usuali, presentati da Iooss, Plotnikov e Toland in [1] per le equazioni di Eulero dell'idrodinamica. Gli ingradienti principali sono l'iterazione di Nash-Moser in spazi di Sobolev, il "descent method" di [1] (inversione dell'operatore linearizzato tramite coniugazione con un nuovo operatore che è somma di una parte diagonale più un resto regolarizzante), la decomposizione di Liapunov-Schmidt (fatta all'interno dello schema Nash-Moser ad ogni passo dell'iterazione, secondo lo schema in [1]).

Bibliografia

[1] G. Iooss, P. Plotnikov e J. Toland: "Standing waves on an infinitely deep perfect fluid under gravity", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2005.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di ERC FP7, *New connections between dynamical systems and Hamiltonian PDEs with small divisors phenomena.*

Sara Barile: Sistemi ellittici di tipo Lane-Emden con peso in domini non limitati

Sara Barile[1]
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"
email: s.barile@dm.uniba.it

Addolorata Salvatore
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"

Sunto. Lo scopo della presente comunicazione è quello di esporre alcuni recenti risultati, ottenuti in [1], sull'esistenza e molteplicità di soluzioni per un sistema ellittico non lineare di tipo Lane-Emden

$$\begin{cases} -\Delta u = sgn(v)|v|^{p-1} & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v = -\rho(x) sgn(u)|u|^{\frac{1}{p-1}} + f(x,u) & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u, v \to 0 \quad \text{per } |x| \to +\infty, \end{cases}$$

dove $N \geq 3$, $1 < p \leq 2$, $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile secondo Lebesgue, positiva e soddisfacente una ulteriore ipotesi asintotica ed $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica opportune ipotesi di crescita nell'origine ed all'infinito. La ricerca delle soluzioni deboli per il suddetto sistema è ricondotto allo studio dei punti critici del funzionale dell'energia associato al problema ellittico quasilineare del quarto ordine equivalente

$$\begin{cases} -\Delta(-\Delta u)^{\frac{1}{p-1}} + \rho(x) u^{\frac{1}{p-1}} = f(x,u) & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u, \Delta u \to 0 \quad \text{per } |x| \to +\infty. \end{cases}$$

Per superare la mancanza di compattezza del problema, a partire da un risultato ottenuto da V. Benci e D. Fortunato in [2], si provano alcune immersioni compatte di opportuni spazi di Sobolev pesati. Una diretta applicazione del Teorema del Passo Montano permette quindi di stabilire l'esistenza di una soluzione del sistema. Sotto ulteriori ipotesi di simmetria su f, è possibile poi provare un risultato di molteplicità mediante la versione simmetrica del Teorema del Passo Montano. Tale lavoro estende i risultati di esistenza e molteplicità ottenuti da A.M. Candela e A. Salvatore in [3] quando $\rho(x) = 1$ e $f(x,u) = f(u)$ utilizzando la simmetria radiale del problema.

Bibliografia

[1] S. Barile, A. Salvatore: "Weighted elliptic systems of Lane-Emden type in unbounded domains", sottoposto per la pubblicazione.

[2] V. Benci, D. Fortunato, "Discreteness conditions of the spectrum of Schrödinger operators", J. Math. Anal. Appl. 64 (1978), 695-700.

[3] A.M. Candela, A. Salvatore, "Elliptic systems in unbounded domains", Complex Var. Elliptic Equ. (2010).

[1] Lavoro svolto nell'ambito di un Assegno di ricerca INDAM

Massimiliano Berti: Soluzioni quasi-periodiche di EDP Hamiltoniane

Massimiliano Berti[1]
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" Università di Napoli Federico II
email: m.berti@unina.it

Sunto. Molte equazioni alle derivate parziali (EDP) della fisica sono sistemi Hamiltoniani infinito dimensionali. Tra gli esempi principali ricordiamo le equazioni nonlineari di Schrödinger (NLS), delle onde, le equazioni di Eulero dell'idrodinamica e i loro modelli approssimati quali KdV, Benjamin-Ono, etc...

Negli ultimi anni sono stati ottenuti importanti risultati nello studio di queste EDP di evoluzione adottando la filosofia dei "sistemi dinamici", focalizzando l'attenzione, in particolare, sulla ricerca di tori invarianti che supportano soluzioni periodiche e quasi-perodiche, in uno spazio delle fasi infinito dimensionale.

La difficoltà principale per provarne l'esistenza è la presenza di "*piccoli divisori*" nello sviluppo in serie perturbativo, dovuti a complessi fenomeni di risonanza tra le frequenze normali del sistema. Le strategie principali che sono state sviluppate per questi tipi di problemi sono:

(1) la teoria KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) inizialmente estesa alla EDP all'inizio degli anni '90 da Kuksin, Wayne, Pöschel, ...
(2) teoremi di funzione implicita alla Nash-Moser introdotti per EDP (nel contesto di riduzioni di Lyapunov-Schmidt) da Craig-Wayne e Bourgain.

Scopo di questa comunicazione è di presentare nuovi risultati e tecniche in questo campo di ricerca in rapida espansione.

Bibliografia

[1] D. Bambusi, M. Berti, E. Magistrelli: "Degenerate KAM theory for partial differential equations", J. Differential Equations, 250, 3379-3397, 2011.

[2] M. Berti, "Nonlinear Oscillations of Hamiltonian PDEs", Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 74, H. Brézis ed., Birkhäuser, Boston, 1-181, 2008.

[3] M. Berti, L. Biasco: "Branching of Cantor manifolds of elliptic tori and applications to PDEs", in corso di stampa in Comm. Math. Phys.

[4] M. Berti, P. Bolle: "Sobolev Periodic solutions of nonlinear wave equations in higher spatial dimension", Arch. Rational Mech. Analysis, 195, 609-642, 2010.

[5] M. Berti, P. Bolle: "Quasi-periodic solutions with Sobolev regularity of NLS on $\mathbb{T}^d$ with a multiplicative potential", preprint 2010 (e Rend. Mat. Acc. Lincei)

[6] M. Berti, M. Procesi: "Nonlinear wave and Schrödinger equations on compact Lie groups and homogeneous spaces", in corso di stampa in Duke Math. Journal.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del Progetto ERC-Ideas-Starting Grants: "New connections between dynamical systems and Hamiltonian PDEs with small divisors phenomena".

Luca Biasco: Soluzioni quasi-periodiche per l'equazione delle onde con derivate spaziali nella nonlinearità

Luca Biasco
Dipartimento di Matematica, Università di "Roma Tre"
email: biasco@mat.uniroma3.it

Massimiliano Berti, Michela Procesi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Napoli "Federico II"

Sunto. Si considera l'equazione delle onde

$$u_{tt} - u_{xx} + mu + f(u, u_x) = 0\,, \qquad t, x \in \mathbb{R}$$

con condizioni periodiche $u(t, x) = u(t, x + 2\pi)$, $m > 0$ ed f analitica, $f(0, 0) = 0$.

Tramite un'analisi KAM, si trovano soluzioni quasi-periodiche, corrispondenti a tori ellittici finito dimensionali nello spazio delle fasi infinito dimensionale del sistema dinamico (reversibile) associato. Si fornisce anche una forma normale attorno a tali tori, garantendo stabilità lineare.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di European Research Council under FP7 "New Connections between dynamical systems and Hamiltonian PDEs with small divisors phenomena".

Serena Dipierro: Concentrazione di soluzioni per un problema singolarmente perturbato con condizioni di Neumann in domini non regolari

Serena Dipierro[1]
SISSA
email: dipierro@sissa.it

Sunto. Consideriamo il seguente problema singolarmente perturbato:

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

dove Ω è un dominio limitato di R^3 la cui frontiera $\partial\Omega$ ha un numero finito di spigoli, e $1 < p < 5$. Il caso Ω dominio con frontiera regolare è stato ampiamente studiato in numerosi lavori, tra i quali si possono citare [1, 2, 3, 4, 5]; uno dei risultati ottenuti è il seguente: le soluzioni di passo montano di (1) si concentrano sulla frontiera nei punti di massimo della curvatura media di $\partial\Omega$.

L'obiettivo di questo lavoro è quello di ottenere un risultato analogo per domini non regolari. Fissiamo uno spigolo Γ di $\partial\Omega$ e consideriamo la funzione $\alpha : \Gamma \to R$ che associa ad ogni punto $Q \in \Gamma$ l'angolo di apertura dello spigolo in Q, $\alpha(Q)$. Usando un metodo perturbativo variazionale che consente di ridurre il problema allo studio di un funzionale definito su R, dimostriamo che se $Q \in \Gamma$ è un punto di massimo o di minimo locale stretto per la funzione α, con $\alpha(Q) \neq \pi$, allora, per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, il problema (1) ammette una soluzione che si concentra in Q.

Bibliografia

[1] M. Del Pino, P. Felmer, J. Wei, *On the role of the mean curvature in some singularly perturbed Neumann problems*, S.I.A.M. J. Math. Anal. 31 (1999), 63-79.

[2] M. Grossi, A. Pistoia, J. Wei, *Existence of multipeak solutions for a semilinear Neumann problem via non smooth critical point theory*, Calc. Var. Partial Differential Equations 11 (2000), no. 2, 143-175.

[3] C. Gui, *Multipeak solutions for a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J. 84 (1996), no. 3, 739-769.

[4] W.M. Ni, I. Takagi, *On the shape of least-energy solution to a semilinear Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1991), 819-851.

[5] W.M. Ni, I. Takagi, *Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J. 70 (1993), 247-281.

[1] Lavoro svolto nell'ambito di FIRB-Ideas Analysis and Beyond

Veronica Felli: Metodi di monotonia per la classificazione dell'andamento asintotico locale di soluzioni di equazioni ellittiche e paraboliche

Veronica Felli
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
email: `veronica.felli@unimib.it`

Sunto. Si descrive l'effetto delle singolarità sul profilo delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico e parabolico, considerando sia singolarità generate da potenziali omogenei sia singolarità dovute ad irregolarità del dominio. Si presenta un approcio allo studio dell'andamento asintotico delle soluzioni basato sulla formula di monotonia di Almgren combinata con un'analisi di "blow-up" e separazione di variabili. Tale metodo consente la classificazioni dell'andamento asintotico locale vicino alle singolarità di soluzioni di problemi ellittici del tipo

$$-\Delta u - \frac{a(x/|x|)}{|x|^2}\, u = h(x)u + f(x,u)$$

tramite il limite per $r \to 0^+$ della *funzione di frequenza alla Almgren*

$$N(r) = \frac{r \int_{B_r} \left(|\nabla u(x)|^2 - \frac{a(\theta)}{|x|^2}|u(x)|^2 - h(x)|u(x)|^2 - f(x,u(x))u(x) \right) dx}{\int_{\partial B_r} |u(x)|^2 dS}.$$

L'andamento asintotico di soluzioni di problemi parabolici singolari del tipo

$$u_t + \Delta u + \frac{a(x/|x|)}{|x|^2}\, u + f(x,t,u(x,t)) = 0,$$

viene descritto in modo analogo con un'opportuna *funzione di frequenza* parabolica.

Bibliografia

[1] V. Felli, A. Ferrero, S. Terracini: *Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations near an isolated singularity of the electromagnetic potential*, J. Eur. Math. Soc., 13 (2011), 119-174.

[2] V. Felli, A. Ferrero, S. Terracini: *On the behavior at collisions of solutions to Schrödinger equations with many-particle and cylindrical potentials*, Preprint 2010.

[3] V. Felli, A. Ferrero, S. Terracini: *A note on local asymptotics of solutions to singular elliptic equations via monotonicity methods*, Preprint 2011.

[4] V. Felli, A. Primo: *Classification of local asymptotics for solutions to heat equations with inverse-square potentials*, Discrete Contin. Dynam. Systems - A, in via di pubblicazione.

Davide L. Ferrario: Coreografie multiple di n-corpi, simmetrie e costellazioni di satelliti

Davide L. Ferrario
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
email: `davide.ferrario@unimib.it`

Sunto. Una classe di soluzioni periodiche per il problema degli n-corpi è costituita dalle *coreografie*, cioè dalle soluzioni $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ delle equazioni di Newton $\dot{x} = \nabla U(x)$ in $\mathbb{R}^{dn}$ (dove U è una funzione potenziale, come per esempio il potenziale gravitazionale Newtoniano, omogenea o asintoticamente omogenea) che soddisfano l'ulteriore vincolo di simmetria che esista $\delta >$ tale che $x_i(t+\delta) = x_{i+1}(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $i = 1, \ldots, n$ (dove si intende che $x_{n+1} = x_1$). Una coreografia è quindi una soluzione periodica di periodo $n\delta$ in cui gli n corpi puntiformi percorrono la stessa traiettoria in tempi diversi. La prima coreografia non banale è la orbita a otto per tre corpi di masse uguali di Chenciner e Montgomery [1]. Teoremi di esistenza per orbite di questo tipo sono stati dimostrati, in genere con metodi variazionali, per n corpi con masse uguali.

Utilizzando le proprietà di decomposizione del gruppo di simmetria delle equazioni del moto in componenti transitive [2], dimostriamo alcuni teoremi di esistenza di coreografie multiple, cioè di soluzioni in cui k orbite coreografiche di ciascuna costituita da $n_1, \ldots, n_k$ corpi di masse $m_1, \ldots m_k$ interagiscono con il medesimo potenziale U. Queste orbite sono minimi per il funzionale di azione Lagrangiana ristretto allo spazio dei loop simmetrici rispetto all'azione di estensioni finite di opportuni sottogruppi di $SO(3)$. È possibile poi utilizzare questo modello per studiare dal punto di vista variazionale il problema delle costellazioni di satelliti [3]. Mostriamo poi il legame tra coreografie multiple e certe costellazioni simmetriche di satelliti nel campo gravitazionale che sono ottimali rispetto ad un ulteriore funzione di energia/costo.

Bibliografia

[1] A.Chenciner and R.Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, Ann. of Math. (2) 152 (2000), no. 3, 881–901.

[2] D.L.Ferrario, Transitive decomposition of symmetry groups for the n-body problem. Adv. Math. 213 (2007), no. 2, 763–784.

[3] K.C.Chen, Variational constructions for some satellite orbits in periodic gravitational force fields, Amer. J. Math. 132 (2010), no. 3, 681–709.

Alberto Ferrero: Esistenza e stabilità di soluzioni intere per equazioni ellittiche del secondo e del quart'ordine

Alberto Ferrero
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
email: alberto.ferrero@unimib.it

Elvise Berchio
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Filippo Gazzola
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Alberto Farina
Faculté de Mathématiques et d'Informatique, Université de Picardie Jules Verne

Sunto. L'argomento di questo seminario riguarda lo studio delle proprietà di stabilità delle soluzioni globali per equazioni ellittiche del tipo

$$Lu = f(u) \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{6}$$

con $L = -\Delta$ oppure $L = \Delta^2$. Particolare risalto verrà dato al caso della non linearità $f(u) = e^u$. Dopo aver enunciato i risultati già noti sulla stabilità globale e fuori da un compatto per l'equazione $-\Delta u = e^u$, dimostrati rispettivamente in [3] e [1], si passerà a esaminare l'equazione

$$\Delta^2 u = e^u \qquad \text{in } \mathbb{R}^N. \tag{7}$$

Per il problema (2) è noto (si veda [4]) che in dimensione $2 \leq N \leq 4$ non esistono soluzioni globalmente stabili; a completamento di questo risultato in [2] dimostriamo che in dimensione $N = 1$ non solo (2) non ammette soluzioni globalmente stabili ma che non ammette alcuna soluzione (globale). Meno chiara risulta essere la problematica dell'esistenza di soluzioni stabili in dimensione $N \geq 5$. In [2] dimostriamo che in dimensione $N \geq 13$ tutte le soluzioni radiali di (2) sono globalmente stabili. D'altra parte dimostriamo che per $5 \leq N \leq 12$ esiste almeno una soluzione radiale instabile ma risulta essere un problema ancora aperto stabilire se le altre soluzioni radiali siano stabili o instabili. Infine sempre in [2] viene affrontato e risolto il problema della stabilità fuori da un compatto per le soluzioni radiali di (2).

Bibliografia

[1] E.N. Dancer, A. Farina, "On the classification of solutions of $-\Delta u = e^u$ on $\mathbb{R}^N$: stability outside a compact set and applications", Proc. Amer. Math. Soc. 137, 2009.

[2] E. Berchio, A. Farina, A. Ferrero, F. Gazzola, "Existence and stability of entire solutions to a semilinear fourth order elliptic problem", preprint 2011.

[3] A. Farina, "Stable solutions of $-\Delta u = e^u$ on $\mathbb{R}^N$", C.R.A.S. Paris 345, 2007.

[4] G. Warnault, "Liouville theorems for stable radial solutions for the biharmonic operator", Asymptotic Analysis 69, 2010.

Gabriella Pinzari: Riduzione simplettica nel problema degli N corpi

Gabriella Pinzari[1]
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli Federico II
email: gabriella.pinzari@unina.it

Sunto.

Teorema. *Lo spazio delle fasi del problema planetario degli* $(1+n)$ *corpi è foliato in varietà* $\pi \to M_\pi^{6n-2}$ *di dimensione* $(6n-2)$*, parametrizzate della direzione* π *del momento angolare iniziale, invarianti ed indistinguibili per il flusso di fase. Su ogni varietà* M_π^{6n-2} *si consideri l'insieme* $S_{\pi,\epsilon}$ *dei punti di fase corrispondente a semiassi maggiori* a_i *ben separati, eccentricità* e_i *e mutue inclinazioni* ι_j *minori di* ϵ*. Se le masse dei pianeti sono sufficientemente piccole, tale insieme contiene un insieme* $K_{\pi,\epsilon}$ *di misura* $|K_{\pi,\epsilon}| \geq (1-\sqrt{\epsilon})|S_{\pi,\epsilon}|$*, che è la sospensione dello stesso insieme di Komogorov* K*, costituito da tori Lagrangiani con* $n+(2n-1)$ *frequenze razionalmente indipendenti* $\omega = (f, \nu)$*, dove* f *sono le frequenze imperturbate del problema di Keplero e le frequenze* ν *tendono a zero con le masse planetarie.*

Dimostrazione. Si introduce un nuovo insieme di coordinate di Darboux globali ottenute regolarizzando un insieme di coordinate azione–angolo introdotte da A. Deprit [4]. Si mostra che la degenerazione rotazionale è rimossa attaraverso l'introduzione di due coordinate coniugate e cicliche $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ che realizzano la foliazione. In tali coordinate, la configurazione co–planare e co–circolare è un punto di equilibrio ellittico per il problema secolare. Si mostra che gli invarianti di Birkhoff del primo ordine sono non risonanti ad ogni ordine e che la matrice degli invarianti di Birkhoff del secondo ordine è non singolare. Questo permette di applicare una teoria KAM propriamente degenere, con condizione di non degenerazione di Kolmogorov, dimostrata da Arnold [1] e raffinata in [3] per la costruzione diretta di K, la stima della sua misura e la descrizione delle frequenze dei tori di K. $\square$

Bibliografia

[1] V.I. Arnold. "Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics". Russian Math. Surveys, 18(6):85–191, 1963.

[2] L. Chierchia and G. Pinzari "The planetary N–body problem: Symplectic foliation, reductions and invariant tori", *Inventiones Mathematicae* 2011; doi: 10.1007/s00222-011-0313-z.

[3] L. Chierchia and G. Pinzari. Properly–degenerate KAM theory (following V.I. Arnold). Discrete Contin. Dyn. Syst. S, 3(4):545–578, 2010.

[4] A. Deprit. Elimination of the nodes in problems of n bodies. Celestial Mech., 30(2):181–195, 1983.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di *European Research Council under FP7 project "New connections between dynamical systems and Hamiltonian PDEs with small divisors phenomena".*

Alessandro Portaluri: Dinamica globale per un problema singolare con vincolo di simmetria diedrale

Francesco Paparella
Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi", Università del Salento

Alessandro Portaluri[1]
Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi", Università del Salento
email: alessandro.portaluri@unisalento.it

Sunto. In questa comunicazione presenteremo alcuni risultati ottenuti recentemente sul problema dello studio analitico della dinamica globale per 4 punti nel piano che interagiscono attraverso un potenziale singolare di tipo logaritmico e sono soggetti ad un vincolo di simmetria diedrale (il gruppo di Klein D_2): piú precisamente supporremo che ad ogni istante i quattro punti formino un'orbita del gruppo diedrale di ordine 4. Potenziali singolari di tipo logaritmico compaiono in modo naturale nello studio di problemi di dinamica delle galassie nonché come potenziale di interazioni tra filamenti vorticosi quasi paralleli nell'approssimazione LIA.

Dopo aver imposto il vincolo di simmetria, posto $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ ci siamo ricondotti allo studio del sistema piano

$$\ddot{q} = \frac{\partial U}{\partial q}, \qquad \text{dove } \; U(q) = -\frac{1}{\pi} \log(8\|q\|q_1 q_2).$$

L'idea principale è quella di utilizzare un opportuno cambiamento di variabili nello spirito del lavoro originale di McGehee (per lo studio della dinamica nel problema dei tre corpi collineari con potenziale Kepleriano) che permetta di estendere il flusso in modo regolare fino alla collisione totale. (Cfr.[1], [2]).

Utilizzando metodi tipici di sistemi dinamici e di topologia in dimensione bassa abbiamo dimostrato l'esistenza di 4 configurazioni centrali le quali danno luogo ad una classe speciale di soluzioni dette *soluzioni auto-similari*. Abbiamo inoltre provato l'esistenza di 2 varieta' invarianti dette *varieta' delle collisioni totali* e *varieta' a velocita' nulla.* Piú precisamente si è stabilita l'esistenza di 4 famiglie di punti fissi per il flusso, la loro stabilita', la dimensione della varieta' stabile, instabile e centrale e infine l'esistenza di orbite eterocline. Utilizzando questi risultati abiiamo ottenuto informazioni qualitative e quantitative sulla dinamica globale del problema.

Bibliografia

[1] Ferrario, Davide L., Portaluri, Alessandro, *On the dihedral n-body problem.* Nonlinearity 21, (2008), 6 1307–1321.

[2] Stoica, Cristina; Font, Andreea, *Global dynamics in the singular logarithmic potential.* J. Phys. A, 36 (2003), 7693–7714.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del PRIN "Variational Methods and Nonlinear Differential Equations"

Michela Procesi: Forma normale e soluzioni quasi-periodiche per l'equazione di Schrödinger non lineare

Michela Procesi[1]
Dipartimento di Matematica e Applicazioni Renato Caccioppoli, Università di Napoli Federico II
email: michela.procesi@unina.it

Claudio Procesi
Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo, Università di Roma La Sapienza

Sunto. Studiamo l'equazione di Schrödinger non–lineare (NLS in breve) su di un toro $\mathbb{T}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$iu_t - \Delta u = \kappa |u|^2 u + \partial_{\bar{u}} G(|u|^2), \quad q \geq 1 \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

dove $u := u(t, \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{T}^n$ e $G(a)$ è una funzione analitica reale la cui serie di Taylor ha grado minimo 3.

Per prima cosa analizziamo l'equazione NLS dopo un passo di forma normale di Birkhoff e diamo condizioni di genericità sui "*siti tangenziali*" in modo da rendere la forma normale il piú semplice possibile.

In questo contesto dimostriamo che si possono scegliere coordinate simplettiche in cui la forma normale è integrabile. Inoltre, nelle variabili " normali", la forma normale è una forma quadratica diagonale a blocchi, con blocchi di dimensione al piú $n+1$ e coefficienti costanti. Infine dimostriamo l'esistenza di regioni dello spazio delle fasi in cui la forma normale è ellittica.

Quindi affrontiamo la questione della costruzione di soluzioni quasi–periodiche, utilizzando un algoritmo di KAM adattato da [1]. Qui il punto principale è quello di dimostrare le stime in "misura", vale a dire che le condizioni necessarie per eseguire l'algoritmo d KAM sono verificate per un insieme di dati iniziali di misura positiva. Ci sono due questioni principali: 1. dimostrare la seconda condizione di non–degenerazione di Melnikov, 2. dimostrare che la perturbazione gode della proprietà quasi - Töplitz, introdotta in [4].

Bibliografia

[1] M. Berti, L. Biasco, Branching of Cantor manifolds of elliptic tori and applications to PDEs, preprint 2010

[2] C. Procesi, M. Procesi, A Normal Form for the Schrödinger equation with analytic non–linearities, preprint 2010

[3] C. Procesi, M. Procesi, A KAM algorithm for the non–linear Schrödinger equation, preprint 2011

[4] M. Procesi, X. Xu, Quasi-Töplitz Functions in KAM Theorem, preprint 2011

[1] supported by ERC under FP7

Enrico Valdinoci: Transizioni di fase e superfici minime (non)locali

Enrico Valdinoci[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
email: enrico.valdinoci@uniroma2.it

Sunto. Vorremmo considerare alcuni modelli di transizioni di fase in cui l'interazione tra particelle presenta un comportamento nonlocale, con l'intento di dimostrare alcune stime geometriche e di comprendere il comportamento asintotico delle soluzioni.

In un contesto di analisi funzionale, il problema può essere definito tramite la minimizzazione di un'opportuna seminorma in uno spazio di Sobolev frazionario, accoppiata con un potenziale a due pozzi, che induce le soluzioni minimizzanti a esibire una transizione di fase.

In particolare, l'interfaccia limite corrisponde a una superficie minima, locale oppure nonlocale (a seconda del parametro frazionario).

Le proprietà di rigidità e simmetria dell'interfaccia possono essere ereditate dalle soluzioni della transizione di fase.

[1]Supportato da FIRB e GNAMPA.

Sezione 2 Equazioni alle derivate parziali

Maria Emilia Amendola: Proprietà delle soluzioni di viscosità di alcune equazioni ellittiche

Maria Emilia Amendola
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno
email: emamendola@unisa.it

Sunto. Scopo della comunicazione è di dimostrare un Principio di Comparazione per soluzioni di viscosità di alcune equazioni ellittiche non lineari. Considereremo equazioni del tipo $F(M,p,r)+H(p)=0$ dove sia F che H saranno funzioni continue nel loro dominio di definizione. Inoltre F sarà uniformemente ellittica e non crescente in r, mentre H soddisferà le seguenti ipotesi:
Esistono $\gamma>0$ *ed* $m\in(1,2]$ *tali che* $\mid H(p)-H(q)\mid\leq\gamma g(p,q)\mid p-q\mid \quad p,q\in\mathbb{R}^n$
dove g è una funzione positiva tale che, date comunque due funzioni $u,v\in C(\overline{\Omega})\cap W^{1,\infty}(\Omega)$, si abbia

$$\int_{\zeta_\delta}\frac{(trace(M^1-M^2)(x))^-}{g(Du,Dv)|Du-Dv|}=+\infty.$$

dove M^1 ed M^2 sono date dal lemma seguente

Lemma. *([J]) Sia* $w\in C(\overline{\Omega})\cap W^{1,\infty}(\Omega)$ *e assmiamo che* $D^2_\lambda w\geq -K_0$ *(nel senso delle distribuzioni) per ogni direzione* λ. *Allora esistono una funzione* $M\in L^1(\Omega;\mathcal{S}(n))$ *e una misura a valori matriciali* $\Gamma\in\mathfrak{M}(\Omega;\mathcal{S}(n))$ *tali che* $D^2w=M+\Gamma$ *(nel senso delle distribuzioni) con* Γ *singolare rispetto alla misura di Lebesgue*

In questo caso si prova

Teorema. *Siano* $u,v\in C\left(\overline{\Omega}\right)$. *Assumiamo che* u *sia una supersoluzione e* v *una sottosoluzione di viscosità di* $F\left(D^2w(x),Dw(x),w(x)\right)+H\left(Dw(x)\right)$. *Supponiamo che* $u\geq v$ *su* $\partial\Omega$. *Allora* $u\geq v$ *su* Ω.

Bibliografia

CC Caffarelli L.A., Cabrè X., *Fully Nonlinear Elliptic Equations* AMS, Colloquium Publications, vol **43** (1995)

CCKS L. Caffarelli, M. G. Crandall, M. Kocan, and A. Swiech. *On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients.*, Comm. Pure Appl. Math., **49** (4) (1996), 365 397.

J Jensen R., *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations*, Arch. Rational Mech Anal **101** (1988), n.1, 1-27

JLS Jensen R., Lions P.L., Souganidis P.E., *A uniqueness result for viscosity solutions of second order fully nonlinear partial differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (Aprile 1988), n.4, 975-978

Alessia Ascanelli: Il problema di Cauchy per equazioni di p-evoluzione

Alessia Ascanelli
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
email: `alessia.ascanelli@unife.it`

Chiara Boiti
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Luisa Zanghirati
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Sunto. Ci interessiamo alla buona positura in spazi di Sobolev del problema di Cauchy per equazioni di p-evoluzione, $p \geq 2$, con coefficienti in (t, x), $t \in [0; T]$, $x \in \mathbb{R}$. Precisamente, consideriamo il problema di Cauchy

$$(CP) \begin{cases} P(t, x, D_t, D_x)u(t, x) = f(t, x), \\ u(0, x) = g(x), \end{cases}$$

$$P(t, x, D_t, D_x) = D_t + a_p(t)D_x^p + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(t, x)D_x^j,$$

dove $a_p \in C([0; T]; \mathbb{R})$, $a_p(t) \geq 0 \, \forall t \in [0; T]$, ed $a_j \in C([0; T]; \mathcal{B}^\infty)$, $0 \leq j \leq p - 1$, con $\mathcal{B}^\infty$ lo spazio delle funzioni C^∞ con tutte le derivate uniformemente continue e limitate. Si osservi che:

- per $p = 1$ ritroviamo una equazione iperbolica;
- per $p = 2$ abbiamo a che fare con una equazione di tipo Schrödinger;
- per $p = 3$ abbiamo la stessa parte principale (nel senso della p-evoluzione) di una equazione di Korteweg de Vries.

Vari autori hanno studiato la buona positura in spazi di Sobolev del problema (CP) per equazioni di questo tipo:

- per $p = 2$ sono note condizioni necessarie o sufficienti (cfr. Baba, Kajitani-Baba, Doi, Ichinose, Mizohata, Takeuchi,...);
- per $p \geq 2$ sono noti risultati di buona positura nell'ipotesi in cui $\Im a_j = 0$, $1 \leq j \leq p - 1$ ed $a_j = a_j(t)$, $2 \leq j \leq p - 1$, anche con estensioni ad equazioni di ordine $m \geq 2$ (cfr. Agliardi, Agliardi-Mari, Agliardi-Zanghirati, Ascanelli-Cicognani, ...).

Noi abbiamo ottenuto un risultato di buona positura in spazi di Sobolev nel caso in cui $\Im a_j(t, x) \neq 0$, $1 \leq j \leq p - 1$, imponendo opportune condizioni di tipo Levi su $\Im a_j$, $\Re a_j$, e sulle loro derivate.

Paolo Baroni: Risultati di tipo Calderón-Zygmund per equazioni paraboliche non lineari

Paolo Baroni
Scuola Normale Superiore
email: paolo.baroni@sns.it

Jens Habermann
Universität Erlangen-Nuremberg

Sunto. In questa comunicazione si presentano dei nuovi risultati di regolarità circa le soluzioni di equazioni paraboliche non lineari con dati misura μ del tipo $\partial_t u - \operatorname{div} a(x,t,Du) = \mu$ in un dominio cilindrico del tipo $\Omega_T := \Omega \times (-T,0)$, dove Ω sia un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Assumiamo che il campo vettoriale a sia di Carathéodory e verifichi le classiche condizioni di crescita ed ellitticità del tipo Ladyzhenskaya e Uraltseva (si veda per esempio [4]), mentre μ sia nel caso più generale una misura di Borel di massa finita, $|\mu|(\Omega_T) < \infty$. Il primo risultato, ottenuto in [1] sotto l'ipotesi imprescindibile che la dipendenza da x del campo vettoriale $a(\cdot)$ sia Lipschtziana, riguarda la differenziabiltà frazionaria del gradiente, ed è ottimale nella scala di spazi considerati:

$$Du \in W^{1-\varepsilon,\frac{1-\varepsilon}{2};1}_{\mathrm{loc}}(\Omega_T;\mathbb{R}^n) \qquad \text{per ogni } \varepsilon \in (0,1).$$

Nel caso μ goda di proprietà di integrabilità di tipo Morrey, abbiamo i seguenti teoremi di tipo Adams per equazioni paraboliche non lineari ([2]):

$$\mu \in L^{\gamma,\theta}(\Omega_T) \quad \Rightarrow \quad Du \in L^{\frac{\theta\gamma}{\theta-\gamma},\theta}_{\mathrm{loc}}(\Omega_T,\mathbb{R}^n), \quad \text{per } 1 < \gamma \leq \frac{2\theta}{\theta+2},\ 2 < \theta \leq n+2\,.$$

Ulteriori casi limiti vengono considerati quando $\gamma = 1$ imponendo la condizione naturale di tipo $L\log L$, $\mu \in L^{1,\theta}(\Omega_T) \cap L\log L(\Omega_T)$, e ottenendo $Du \in L^{\frac{\theta}{\theta-1}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_T,\mathbb{R}^n)$ per $2 \leq \theta \leq n+2$.

Questi risultati costituiscono una prima estensione parabolica della teoria di tipo Calderón-Zygmund non lineare per dati misura sviluppata da G. Mingione in [3,4].

Bibliografia

[1] P. Baroni, J. Habermann, Calderón-Zygmund estimates for parabolic measure data equations, preprint.

[2] P. Baroni, J. Habermann, New gradient estimates for parabolic equations *Houston J. Math.*, in corso di stampa.

[3] G. Mingione, Gradient estimates below the duality exponent, *Math. Ann.*, **346**:571–627, 2010.

[4] G. Mingione, The Calderón-Zygmund theory for elliptic problems with measure data, *Ann Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **5(6)**:195–261, 2007.

Serena Boccia: Stime di tipo Schauder per soluzioni di sistemi parabolici di ordine alto

Serena Boccia[1]
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno
email: seboccia@unisa.it

Sunto. Obiettivo della nostra ricerca è quello di provare stime di tipo Schauder per le soluzioni di un sistema parabolico di equazioni lineari alle derivate parziali. Più precisamente, consideriamo il seguente sistema

$$u_t + (-1)^m \sum_{|\gamma| \leq 2m} A^\gamma(t,x) D^\gamma u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

di ordine $2m$, con m intero positivo. Le funzioni u e f sono funzioni a valori vettoriali definite su $(-\infty, T) \times \mathbb{R}^d$ se $T \in (-\infty, \infty)$ e su $\mathbb{R}^{d+1}$ se $T = \infty$. Tutti i coefficienti A^γ sono supposti Hölder continui nella variabile spaziale e solo misurabili nella variabile temporale. In più, si richiede che i coefficienti di ordine $2m$ verifichino una condizione di ellitticità di tipo Legendre-Hadamard. Dimostriamo che, analogamente a quanto già osservato nel caso scalare (cfr. [2], [3]), le derivate spaziali delle soluzioni di (1) presentano regolarità di tipo Hölder, non solo rispetto alla variabile spaziale ma anche rispetto alla variabile temporale. La dimostrazione è fatta per passi. Si parte dal caso di sistemi con coefficienti principali dipendenti solo da t e coefficienti di ordine inferiore nulli. Il metodo usato (che estende al caso vettoriale una tecnica usata in [4] per equazioni del secondo ordine) si basa su stime dell'oscillazione media delle soluzioni di (1). Con una tecnica di "freezing" dei coefficienti e utilizzando alcune disuguaglianze di interpolazione si passa poi al caso generale. La stima a priori ottenuta e alcuni risultati classici ci consentono, poi, di risolvere un problema di Cauchy. I risultati sopra citati sono contenuti in [1].

Bibliografia

[1] Boccia S., Schauder estimates for solutions of higher order parabolic systems, sottoposto per la pubblicazione.

[2] Knerr B., Parabolic interior Schauder estimates by the maximum principle, *A*rch. Rational Math. Anal. **75**, 51-58 (1980).

[3] Lieberman G. M., Intermediate Schauder theory for second order parabolic equations IV. Time irregularity and regularity, *Differential Integral Equations* **5**, 1219-1236 (1992).

[4] Krylov N. V., Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. Firenze, 1632.

[1]Lavoro svolto mentre l'Autore era ospite del prof. N. Krylov, presso l'Università del Minnesota.

Marco Bramanti: Campi di Hörmander non regolari e disuguglianza di Poincaré

Marco Bramanti
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: marco.bramanti@polimi.it

Luca Brandolini
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Metodi Matematici, Università di Bergamo

Marco Pedroni
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Metodi Matematici, Università di Bergamo

Sunto. Nello studio degli operatori ellittico-parabolici degeneri, una classe importante è costituita dagli operatori di Hörmander

$$L = \sum_{i=1}^{q} X_i^2 + X_0$$

espressi mediante campi vettoriali $X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)\,\partial_{x_j}$ $(i = 0, 1, 2, ..., q;\ q < n)$ definiti in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che vale la condizione di Hörmander al passo r se in ogni punto di Ω i campi X_i e i loro commutatori $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$, $[[X_i, X_j], X_k]$, e così via fino ai commutatori di lunghezza r, generano tutto $\mathbb{R}^n$. Sotto questa condizione, un teorema di Hörmander del 1967 stabilisce che l'operatore L è ipoellittico in Ω, cioè ogni soluzione distribuzionale in $A \subset \Omega$ di $Lu = f \in C^\infty(A)$ è $C^\infty(A)$. Molte altre importanti proprietà sono state stabilite per gli operatori e i sistemi di campi di Hörmander, ed è naturale chiedersi quanta parte della teoria si possa estendere al caso in cui i campi X_i non siano C^∞, ma derivabili solo il numero di volte necessario a verificare la condizione di Hörmander al passo r. I risultati noti in questa direzione finora riguardavano campi con una struttura particolare, oppure supponevano assiomaticamente la validità di certi teoremi che finora erano stati stabiliti per poche classi di campi. In questo lavoro, sotto l'ipotesi che, per un certo $r \geq 2$, i campi $X_1, ..., X_q$ siano $C^{r-1,1}(\Omega)$ e soddisfino la condizione di Hörmander al passo r, stabiliamo le proprietà di base della distanza indotta dai campi, tra cui il "teorema di Chow" di connettività, la proprietà di *doubling* e la disuguaglianza di Poincaré rispetto ai campi. Questi risultati permettono tra l'altro di stabilire una disuguaglianza di Harnack e l'hölderianità locale delle soluzioni per gli operatori $\sum_{i,j=1}^{q} X_i^* (a_{ij}(x) X_j u)$ con $\{a_{ij}\}$ matrice uniformemente definita positiva e $L^\infty(\Omega)$.

Bibliografia

[1] M. Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni, Basic properties of nonsmooth Hörmander's vector fields and Poincaré's inequality. In corso di stampa in Forum Mathematicum.

Raffaela Capitanelli: Problemi di rinforzo per strutture frattali

Raffaela Capitanelli[1]
Dipartimento di di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria Sezione di Matematica Università di Roma "Sapienza"
email: raffaela.capitanelli@uniroma1.it

Sunto. I problemi di rinforzo sono stati largamente affrontati nell'ambito classico dei domini regolari (vedere, per esempio, [1], [2] e [3]). In questa comunicazione presenterò alcuni risultati relativi a problemi di rinforzo per **strutture frattali**. Tali strutture frattali potranno costituire il bordo di un dominio limitato in $\mathbb{R}^2$ oppure essere inserite in un dominio poligonale in $\mathbb{R}^2$. Essendo l'auto-similarità una proprietà molto stringente per le applicazioni, le strutture frattali considerate sono misture $K^{(\xi)}$ (deterministiche o stocastiche) di curve di Koch: infatti, tali misture, pur essendo spazialmente omogenee, non sono necessariamente auto-similari. In questo contesto, i problemi di rinforzo vengono affrontati con la costruzione di opportuni $\varepsilon-$intorni $\Sigma_\varepsilon^{(\xi),n}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$, per le curve prefrattali $K^{(\xi),n}$, approssimanti $K^{(\xi)}$, e di opportuni funzionali pesati $F_\varepsilon^n[u]$ a coefficienti discontinui a_ε^n dipendenti dalla geometria degli $\varepsilon-$intorni e dalle costanti strutturali delle misture.

I risultati ottenuti riguardono lo studio della convergenza asintotica dei funzionali F_ε^n quando simultaneamente lo spessore $\varepsilon = \varepsilon(n)$ degli intorni $\Sigma_\varepsilon^{(\xi),n}$ e i coefficienti a_ε^n su $\Sigma_\varepsilon^{(\xi),n}$ convergono a zero per $n \to +\infty$. È stato anche studiato il comportamento asintotico dei minimizzanti delle forme di energia complete, fornendo in questo modo un nuovo approccio ai problemi di Robin su strutture frattali (affrontati in [4]). Parte dei risultati di questa comunicazione sono stati presentati in [5].

Bibliografia

[1] E. Acerbi, G. Buttazzo, Reinforcement problems in the calculus of variations, Ann. Inst. H. Poincaré 3 (1986), no. 4, 273–284.

[2] H. Attouch, Variational Convergence for Functions and Operators, Eds. Pitman Advanced Publishing Program, London 1984.

[3] H. Brezis, L. A. Caffarelli, A. Friedman, Reinforcement problems for elliptic equations and variational inequalities, Ann. Mat. Pura Appl. 123 (4) (1980), 219–246.

[4] R. Capitanelli, Robin boundary condition on scale irregular fractals, Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010), no. 5, 1221–1234.

[5] R. Capitanelli, M. A. Vivaldi, Insulating layers and Robin Problems on Koch mixtures, Journal of Differential Equations. doi:10.1016/j.jde.2011.02.003

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Programma di Ricerca "Frattali e strutture degeneri: studio di problemi di diffusione e trasmissione"; Responsabile Scientifico: Maria Agostina Vivaldi.

Pierluigi Colli: Sistemi di Cahn-Hilliard viscosi per modelli di diffusione di fase

Pierluigi Colli
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100 Pavia
email: pierluigi.colli@unipv.it

Sunto. Si considera un modello di diffusione di tipo campo di fase, che consiste in un sistema di due equazioni alle derivate parziali risultanti da un bilancio di micro-forze e micro-energia [5]. Le due incognite sono il parametro d'ordine e il potenziale chimico. Esistenza, unicità e regolarità della soluzione del relativo problema ai limiti e ai valori iniziali sono dimostrate in [3] con l'aiuto di opportune maggiorazioni a priori e stime L^∞ per le variabili coinvolte. Viene studiato anche l'omega-limite del sistema evolutivo. I risultati qui presentati nascono da un recente progetto di ricerca [1-4] portato avanti con Gianni Gilardi, Paolo Podio-Guidugli e Jürgen Sprekels, che ringrazio per la collaborazione.

Bibliografia

[1] P. Colli, G. Gilardi, P. Podio-Guidugli, J. Sprekels, Existence and uniqueness of a global-in-time solution to a phase segregation problem of the Allen-Cahn type, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **20** (2010) 519-541.

[2] P. Colli, G. Gilardi, P. Podio-Guidugli, J. Sprekels, A temperature-dependent phase segregation problem of the Allen-Cahn type, *Adv. Math. Sci. Appl.* **20** (2010) 219-234.

[3] P. Colli, G. Gilardi, P. Podio-Guidugli, J. Sprekels, Well-posedness and long-time behavior for a nonstandard viscous Cahn-Hilliard system, preprint arXiv:1103.4585v1 [math.AP] (2011), pp. 1-24.

[4] P. Colli, G. Gilardi, P. Podio-Guidugli, J. Sprekels, An asymptotic analysis for a nonstandard viscous Cahn-Hilliard system, manoscritto (2011), pp. 1-18.

[5] P. Podio-Guidugli, Models of phase segregation and diffusion of atomic species on a lattice, *Ric. Mat.* **55** (2006) 105-118.

Giovanni Cupini: Limitatezza locale di soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari

Giovanni Cupini
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: cupini@dm.unibo.it

Paolo Marcellini
Dipartimento di Matematica "U.Dini", Università di Firenze

Elvira Mascolo
Dipartimento di Matematica "U.Dini", Università di Firenze

Sunto. Come suggerito da un famoso esempio di De Giorgi, e al contrario di quanto succede per le equazioni ellittiche, per ottenere la regolarità di soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari è necessario richiedere qualche condizione di struttura, altrimenti anche la limitatezza locale delle soluzioni viene a mancare. Mostreremo che con una condizione di struttura suggerita dai risultati ottenuti da Ladyzhenskaya-Ural'tseva per i sistemi lineari è possibile un approccio unificato allo studio della limitatezza delle soluzioni per una classe di sistemi ellittici quasi lineari e per generali equazioni ellittiche. Il risultato di limitatezza è ottenuto con condizioni di crescita anisotropa con condizioni ottimali sugli esponenti.

Bibliografia

[1] E. De Giorgi: "Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico", Boll. Un. Mat. Ital. (4) 1 (1968) 135-137.

[2] O. Ladyzhenskaya, N. Ural'tseva: "Linear and quasilinear elliptic equations", Academic Press, New York and London (1968).

[3] G. Cupini, P. Marcellini, E. Mascolo: "Local boundedness of solutions to quasilinear elliptic systems".

Marcello D'Abbicco: Alcuni risultati di Blow-up per Sistemi 2 per 2

Marcello D'Abbicco
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari
email: dabbicco@dm.uniba.it

Michael Reissig
Fakultät für Mathematik und Informatik, TU Bergakademie Freiberg

Sunto. L'obbiettivo della comunicazione è presentare alcuni recenti risultati (si veda [2]) di blow-up per $t \to \infty$ per soluzioni di sistemi 2 per 2,

$$\partial_t U - \lambda(t)\, A(t)\, \partial_x U = 0, \qquad U(0,x) = U_0(x)\,, \tag{9}$$

in corrispondenza di una classe molto ampia di dati iniziali. La matrice $A(t)$ è a valori reali e limitata, $\mathcal{C}^2$ e uniformemente strettamente iperbolica, cioè

$$\Delta(t) = \big(a(t) - d(t)\big)^2 + 4b(t)\, c(t) \geq c > 0\,, \qquad \text{dove} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

La funzione $\lambda(t)$ è strettamente positiva, $\mathcal{C}^1$ e ha oscillazioni *molto lente*, cioè $|\lambda'(t)|\Lambda(t) \leq C\lambda^2(t)$, dove $\Lambda(t)$ è una primitiva di $\lambda(t)$. Un ruolo fondamentale è svolto dalla funzione

$$\psi(t) = \frac{(c-b)((a-d)(b+c)' - (a-d)'(b+c))}{2\sqrt{\Delta}((b+c)^2 + (a-d)^2)}\,,$$

che descrive le interazioni fra i coefficienti di $A(t)$. In [1] è stato provato come la soluzione rimanga limita da una costante se $\psi(t)$ è integrabile, scopo della comunicazione è provare che se $A(t)$ ha oscillazioni *molto lente* e

$$m_1\, \nu(t) \leq \left| \int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \right| \leq m_2\, \nu(t)\,, \tag{10}$$

dove $\nu(t)$ è strettamente positiva, crescente, con $\lim_{t\to\infty} \nu(t) = +\infty$, allora esiste un insieme M di dati U_0 equipotente a $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, tale che

$$\|U(t,\cdot)\|_{L^2} \geq C \exp\big(m_1\, \nu(t)\big)\, \|U_0\|_{L^2}\,, \tag{11}$$

per $t \geq T(U_0)$.

Bibliografia

[1] M. D'Abbicco, M. Reissig, *Long Time Asymptotics for 2 by 2 Hyperbolic Systems*, J. Differential Equations **250** (2011), 752–781. doi:10.1016/j.jde.2010.08.001.

[2] M. D'Abbicco, M. Reissig, *Blow-up of the Energy at Infinity for 2 by 2 Systems*, 26A4, inviato a rivista internazionale per pubblicazione.

Roberta D'Ambrosio: Risultati di immersione e compattezza in alcuni spazi di funzioni

Loredana Caso
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

Sara Monsurrò
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

Roberta D'Ambrosio
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
email: `rodambrosio@unisa.it`

Sunto. Si intende approfondire lo studio di alcuni spazi di tipo Morrey, denotati con $M^{p,\lambda}(\Omega)$, definiti su aperti non limitati Ω di $\mathbb{R}^n$. In particolare, si costruiscono opportune decomposizioni per funzioni appartenenti a due sottospazi di $M^{p,\lambda}(\Omega)$, denotati con $\widetilde{M}^{p,\lambda}(\Omega)$ e $M_o^{p,\lambda}(\Omega)$, definiti, rispettivamente, come la chiusura di $L^\infty(\Omega)$ e di $C_0^\infty(\Omega)$ in $M^{p,\lambda}(\Omega)$. Come applicazione, si provano risultati di limitatezza e compattezza per il seguente operatore di moltiplicazione

$$u \longrightarrow g\,u \qquad (i)$$

definito su un classico spazio di Sobolev e a valori in uno spazio di Lebesgue, dove g appartiene ad un opportuno spazio di tipo Morrey. In tali risultati, l'utilizzo delle decomposizioni consente, in particolare, di migliorare alcune stime di [4]. Si introduce, inoltre, uno spazio pesato di tipo Morrey che si colloca tra lo spazio $M_o^{p,\lambda}(\Omega)$ e lo spazio $\widetilde{M}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Allo scopo di ottenere risultati più generali di quelli contenuti in [3], relativi a teoremi di immersione e compattezza sull'operatore di moltiplicazione (i) definito tra spazi di Sobolev con peso, si approfondisce lo studio di una classe di spazi funzionali pesati, denotata con $K_s^p(\Omega)$ ($p \in [1, +\infty[, s \in \mathbb{R}$), dove il peso è una funzione di tipo distanza da un fissato sottoinsieme della frontiera dell'aperto Ω di $\mathbb{R}^n$. In particolare si determinano decomposizioni per funzioni g appartenenti a tali spazi.

Si precisa che i risultati ottenuti possono essere utili, ad esempio, per provare stime a priori sulle soluzioni di problemi di Dirichlet per equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo ellittico.

Bibliografia

[1] L. Caso - R. D'Ambrosio: "Weighted spaces and weighted norm inequalities on irregular domains", sottoposto per la pubblicazione.

[2] L. Caso - R. D'Ambrosio - S. Monsurrò: "Some remarks on spaces of Morrey type", Abstract and Applied Analysis, 2010.

[3] L. Caso - M. Transirico: "Some remarks on a class of weight functions", Comment. Math. Univ. Carolin., 1996.

[4] P. Cavaliere - M. Longobardi - A. Vitolo: "Imbedding estimates and elliptic equations with discontinuous coefficients in unbounded domains", Matematiche (Catania), 1996.

Francesco Della Pietra: Problemi ellittici fortemente degeneri all'infinito

Francesco Della Pietra
Dipartimento S.A.V.A., Università degli studi del Molise
email: francesco.dellapietra@unimol.it

Ireneo Peral
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

Sunto. In [1] si ottengono risultati di esistenza per soluzioni di alcuni problemi ellittici fortemente degeneri. L'obiettivo è quello di studiare la competizione tra la degenerazione all'infinito di un operatore ellittico, l'effetto regolarizzante di un termine dipendente dal gradiente e l'effetto di un termine di reazione lineare. Più precisamente, si considera il seguente problema:

$$\text{(P)} \quad -\operatorname{div}\left(\frac{Du}{(1+u)^\theta}\right)+\alpha|Du|^q=\lambda g(x)u+f \ \text{ in } \Omega, \quad u=0 \text{ su } \partial\Omega, \quad u\geq 0 \text{ in } \Omega,$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\alpha \geq 0$, $1 < q \leq 2$, $\theta \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $f, g \geq 0$, ed f e g sono funzioni misurabili per cui valgono appropriate ipotesi di sommabilità.

L'equazione in (P) rappresenta un modello di tipo reazione-diffusione che produce un effetto di saturazione, vale a dire che la diffusione va a zero quando u va all'infinito. In particolare, ci si è interessati all'analisi dell'effetto di assorbimento del termine di ordine uno.

L'operatore degenere considerato in (P) è stato studiato da molti autori con differenti termini d'ordine inferiore. Se $\alpha = \lambda = 0$, il comportamento di (P) per $0 \leq \theta \leq 1$ e $\theta > 1$ è molto differente. Ad esempio, in [A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina, G. Trombetti, Ann. Mat. Pura Appl., 2003] si mostra che per $\theta > 1$ e f abbastanza grande in $L^\infty(\Omega)$, le soluzioni di problemi approssimanti vanno all'infinito su un insieme di misura positiva. D'altra parte, è possibile provare che per $\theta < 1$ esistono soluzioni anche quando $f \in L^1$ (cfr. [A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1998], [L. Boccardo, A. Dall'Aglio, L. Orsina, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1998], [A. Alvino et al., 2003]). In presenza del termine di ordine zero, ossia $\lambda \neq 0$ e $\alpha = 0$, in [1] si dimostra che, per un opportuno coefficiente g, il problema (P) non ammette soluzioni qualunque siano $\lambda > 0$ e $\theta > 0$. Tuttavia, se g è sufficientemente regolare, sotto opportune ipotesi di piccolezza dei dati si prova che esiste una soluzione di (P).

Il contributo principale consiste nel dimostrare l'esistenza di soluzioni per il problema (P) quando $\alpha > 0$. In tal caso, infatti, qualunque siano $\theta \geq 0$ e $\lambda \geq 0$, la presenza del termine dipendente dal gradiente produce un effetto regolarizzante che impedisce il blow up delle soluzioni dei problemi approssimanti.

Bibliografia

[1] F. Della Pietra, I. Peral, Comm. Pure Appl. Anal., 2011.

Giuseppina di Blasio: Disuguaglianze tipo Szegö-Weinberger per il primo autovalore dell'operatore di Hermite

Francesco Chiacchio
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Giuseppina di Blasio
Dipartimento di Matematica, Seconda Università degli Studi di Napoli
email: giuseppina.diblasio@unina2.it

Sunto. Consideriamo un problema agli autovalori per il laplaciano con condizioni al contorno di tipo Neumann. È ben noto che il cerchio massimizza il primo autovalore non nullo tra tutti i sottoinsiemi piani semplicemente connessi di misura fissata. Tale congettura, dimostrata nel 1954 da Szegö, fu generalizzata nel 1956 da Weinberger a qualsiasi dominio limitato regolare di $\mathbb{R}^N$. In [2] noi proviamo alcune disuguaglianze isoperimetriche relative al primo autovalore non banale $\mu_1(\Omega)$ del problema:

$$\text{(P)} \qquad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi_N(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \mu\varphi_N(x)\,u \ \text{ in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ su } \partial\Omega,$$

dove $\varphi_N(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\prod_{i=1}^N e^{-\frac{x_i^2}{2}}$ è la densità della misura di Gauss $d\gamma_N = \varphi_N(x)\,dx$ normalizzata e Ω è un dominio regolare di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, non necessariamente limitato. È noto che la misura di Gauss può essere vista come limite di alcune misure invarianti per rotazioni e normalizzate sulla sfera. Tale processo di limite permette allo spazio $(\mathbb{R}^N, d\gamma_N)$ di ereditare molte delle proprietà che valgono sulla sfera. In particolare, è possibile ottenere la disuguaglianza isoperimetrica gaussiana come versione limite di quella sulla sfera, in cui le calotte sono gli insiemi estremali. Vale, infatti, che tra tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ con fissata misura di Gauss, il semispazio minimizza il perimetro. In [1] si dimostra che tra tutti i domini di $\mathbb{S}^N$, contenuti in una semisfera a misura fissata, le calotte massimizzano $\mu_1(\Omega)$. Alla luce di tale risultato e per le proprietà delle calotte di "convergere" ai semispazi, unitamente alla proprietà delle stesse di essere gli insiemi estremali sulla sfera, è naturale pensare che i semispazi massimizzano $\mu_1(\Omega)$. Contrariamente, in [2] dimostriamo che l'insieme estremale non massimizza $\mu_1(\Omega)$, bensì vale il seguente risultato:

Teorema. *La sfera massimizza il primo autovalore non nullo di (P) tra tutti gli insiemi di $\mathbb{R}^N$ aperti centrosimmetrici rispetto l'origine, lipschitziani a misura gaussiana fissata. Inoltre la sfera è l'unico insieme massimizzante in questa classe.*

Bibliografia

[1] M.S. Ashbaugh, J. Benguria, London Math. Soc. (2) 52 (1995), no. 2, 402–416.

[2] F. Chiacchio, G. di Blasio, preprint (2011), http://arxiv.org/abs/1104.1101.

Angelo Favini: Metodi perturbativi e problemi di identificazione per equazioni differenziali degeneri

Angelo Favini
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: `favini@dm.unibo.it`

Sunto. Viene descritto un nuovo metodo per trattare problemi di identificazione relativi ad equazioni differenziali degeneri in spazi di Banach.

A tal fine, sia regolarità massimale spaziale delle soluzioni e risultati di perturbazione per operatori lineari multivoci di tipo debolmente parabolico sono utilizzati.

Fausto Ferrari: Sulla regolarità delle soluzioni di problemi a due fasi per operatori parabolici

Fausto Ferrari
Dipartimento di Matematica dell'Università, Piazza di Porta S. Donato 5, 40126 Bologna
email: `ferrari@dm.unibo.it`

Sandro Salsa
Dipartimento di Matematica del Politecnico, Via Bonardi 7, 20133 Milano

Sunto. Verrà presentato un risultato di regolarità interna delle soluzioni di problemi a due fasi per operatori parabolici a coefficienti variabili con frontiera libera grafico di una funzione Lipschitz continua.

Il risultato, contenuto in [2], prova che le soluzioni di questi problemi a due fasi sono funzioni Lipschitz continue ed estende l'analogo risultato provato in [1], valido per operatori parabolici a coefficienti costanti (e.g. problema di Stefan).

Uno dei punti cruciali della dimostrazione si basa sulla possibilità di controllare puntualmente il valore assoluto della derivata rispetto al tempo della soluzione con la norma del gradiente spaziale della soluzione stessa, quando la soluzione si annulla sulla frontiera libera

In effetti, nel caso delle soluzioni di problemi a due fasi con coefficienti costanti, se la frontiera libera è il grafico di una funzione Lipschitz, allora tale limitazione è soddisfatta fino alla frontiera libera stessa.

In realtà questo risultato che di fatto implica una stima di tipo Schauder migliore di quella classica per la derivata rispetto al tempo dipende dalla geometria dell'insieme ovvero dal considerare una frontiera data dal grafico di una funzione Lipschitz.

Nel caso di operatori a coefficienti variabili la prova di questa stima sembra non potersi ricavare applicando direttamente la strategia ideata in [1] per l'operatore del calore. Tuttavia, il risultato continua ad essere vero anche per gli operatori a coefficienti variabili, anche se la dimostrazione richiede qualche considerazione in più, vedi [2] per i dettagli.

Bibliografia

[1] I. Athanasopoulos, L. Caffarelli, S. Salsa: "Caloric functions in Lipschitz domains and the regularity of solutions to phase transition problems", Ann. of Math., 143 (1996), 413-434.

[2] F. Ferrari, S. Salsa: "Regularity of the solutions for parabolic two-phase free boundary problems", Comm. Partial Differential Equations, 35 (2010), 1095-1129.

Roberto Guglielmi: Stabilizzazione di sistemi di equazioni iperboliche con condizioni al bordo miste mediante un unico feedback

Piermarco Cannarsa
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata

Roberto Guglielmi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
email: guglielm@mat.uniroma2.it

Fatiha Alabau-Boussouira
Dipartimento di Matematica, Università di Metz Paul Verlaine

Sunto. A partire da un lavoro di F. Alabau, P. Cannarsa e V. Komornik [4], analizziamo le proprietà di stabilità indiretta di sistemi di equazioni d'evoluzione debolmente e internamente accoppiate su spazi di Hilbert, ovvero studiamo la possibilità di stabilizzare l'intero sistema, essendo smorzata una sola delle equazioni, tramite un feedback che agisce su una sola componente del sistema. Sotto opportune condizioni di compatibilità tra gli operatori differenziali del sistema, proviamo che l'energia delle soluzioni decresce polinomialmente, grazie ad un risultato generale ottenuto da F. Alabau [1]. Utilizzando alcune tecniche d'interpolazione, deduciamo un insieme continuo di ordini di dissipazione dell'energia di tipo polinomiale, ottenendo stime esplicite della velocità di decrescita dell'energia rispetto ai dati iniziali. Presentiamo numerose applicazioni a sistemi di equazioni iperboliche con condizioni al bordo miste, ad esempio un sistema onda—onda con condizioni Dirichlet—Robin, rispettivamente, o un sistema onda—Petrovsky con condizioni Robin—Dirichlet+Neumann, rispettivamente.

Bibliografia

[1] F. Alabau, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 328 (1999), 1015–1020.

[2] F. Alabau-Boussouira, *Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems.* SIAM J. Control Optim. 41 (2002), no. 2, 511–541.

[3] F. Alabau-Boussouira, *Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 14 (2007), no. 5-6, 643–669.

[4] F. Alabau, P. Cannarsa, V. Komornik, *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*, J. evol. equ. 2 (2002), 127–150.

[1]Gli autori ringraziano l'Istituto Poincaré (Parigi, Francia) per le favorevoli condizioni di lavoro fornite durante il trimestre su "Control of Partial and Differential Equations and Applications" nel periodo Ottobre-Dicembre 2010. Lavoro svolto nell'ambito del progetto GDRE CONEDP, per ulteriori informazioni consultare http://www.ceremade.dauphine.fr/ glass/GDRE/index.php.

Annunziata Loiudice: Comportamento asintotico delle soluzioni di problemi critici singolari su gruppi di Carnot

Annunziata Loiudice
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: loiudice@hotmail.it

Sunto. Si considera un'ampia classe di problemi critici con nonlinearità singolari ambientati su gruppi di Carnot. I problemi affrontati sono della forma

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{G}} u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i(\xi)|u|^{p_i-2}u, \\ \qquad u \in S_0^1(\Omega) \end{cases}$$

dove $\Delta_{\mathbb{G}}$ denota l'operatore Sublaplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$, Ω è un dominio illimitato di $\mathbb{G}$, N è un intero positivo, $2 < p_i \leq 2^*$ per $i = 1, \dots N$, ove 2^* denota l'esponente critico in questo contesto, i.e. $2^* = 2Q/(Q-2)$, essendo Q la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$, ed $S_0^1(\Omega)$ è l'appropriato spazio di Sobolev, definito come il completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|u\| = \|\nabla_{\mathbb{G}} u\|_2$.

Riguardo i coefficienti a_i, si richiede che essi soddisfino unicamente la seguente condizione di sommabilità debole: $a_i \in L_w^{q_i}(\Omega)$, dove $\dfrac{1}{q_i} + \dfrac{p_i}{2^*} = 1$, per $i = 1, \dots N$.

Per tali problemi, si prova la regolarità ottimale delle soluzioni negli spazi L^p-deboli, adattando l'approccio introdotto in ambito euclideo in [1], e se ne deduce l'esatto comportamento asintotico all'infinito, estendendo al caso singolare i risultati ottenuti nel caso autonomo in [3].

I nostri risultati, oggetto del lavoro [2], si applicano, ad esempio, allo studio del comportamento asintotico delle funzioni estremali di alcune interessanti disuguaglianze di tipo Hardy-Sobolev in ambito subellittico.

Bibliografia

[1] E. Jannelli, S. Solimini, "Concentration estimates for critical problems", Ricerche Mat. 48 (1999), 233-257.

[2] A. Loiudice: "L^p-weak regularity and asymptotic behavior of solutions for critical equations with singular potentials on Carnot groups", NoDEA 17 (2010), 575-589.

[3] E. Lanconelli, F. Uguzzoni, "Non-existence results for semilinear Kohn-Laplace equations in unbounded domains", Comm. Partial Differential Equations 25 (2000), 1703-1739.

Sandra Lucente: Equazioni quasilineari di tipo onde in dominio esterno bidimensionale

Sandra Lucente
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: lucente@dm.uniba.it

Hideo Kubo
Tohoku University

Sunto. Si presentano risultati di esistenza relativi al problema delle onde con condizione di Neumann al bordo

$$\begin{array}{ll} (\partial_t^2 - \Delta)u = G, & (t,x) \in [0,\infty) \times \Omega, \\ \partial_\nu u(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = \phi(x) & x \in \Omega, \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) & x \in \Omega, \end{array}$$

essendo Ω un dominio esterno ad un compatto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ e G nonlineare nelle derivate di u.

Sotto opportune ipotesi su $\mathcal{O}$, G, ϕ, ψ, si determina una stima del tempo di vita per la soluzione del suddetto problema misto con dati iniziali piccoli.

Sara Monsurrò: Una stima a priori per operatori ellittici in spazi di Sobolev con peso su aperti non limitati

Sara Monsurrò
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno
email: smonsurro@unisa.it

Maria Salvato
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno

Maria Transirico
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno

Sunto. La rilevanza degli spazi di Sobolev con peso nello studio della teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali con condizioni al bordo su aperti non limitati è ben nota. Qualora si considerino aperti di questo tipo è, infatti, necessario imporre non solo delle condizioni sulla frontiera dell'aperto ma anche delle condizioni che controllino il comportamento della soluzione all'infinito. In quest'ordine di idee, dato un aperto non limitato e sufficientemente regolare Ω di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sono stati considerati in Ω l'operatore differenziale lineare del secondo ordine uniformemente ellittico

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a \,,$$

con coefficienti $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \cdots, n$, ed il problema di Dirichlet ad esso associato

$$\begin{cases} u \in W_s^{2,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_s^{1,2}(\Omega) \,, \\ \\ Lu = f \,, \quad f \in L_s^2(\Omega) \,, \end{cases}$$

dove $s \in \mathbb{R}$ e $W_s^{2,2}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_s^{1,2}(\Omega)$ e $L_s^2(\Omega)$ sono spazi di Sobolev pesati, laddove il peso ρ^s è potenza di una funzione $\rho : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}_+$, di classe $C^2(\bar{\Omega})$ e tale che

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{|\partial^\alpha \rho(x)|}{\rho(x)} < +\infty, \quad \forall \, |\alpha| \leq 2,$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(\rho(x) + \frac{1}{\rho(x)} \right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\rho_x(x) + \rho_{xx}(x)}{\rho(x)} = 0.$$

Per fissare le idee, si può pensare alla funzione

$$\rho(x) = (1 + |x|^2)^t, \quad t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Sotto opportune ipotesi di regolarità sui coefficienti dell'operatore, provata una stima $W^{2,2}$ per un problema analogo nel caso non pesato, è stato possibile dedurre la seguente stima a priori nel caso pesato

$$\|u\|_{W_s^{2,2}(\Omega)} \leq c \|Lu\|_{L_s^2(\Omega)}, \quad \forall \, u \in W_s^{2,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_s^{1,2}(\Omega)$$

ed un conseguente risultato di esistenza ed unicità della soluzione del problema considerato.

Marco Mughetti: Ipoellitticità e non Ipoellitticità per una somma di quadrati di campi complessi

Marco Mughetti[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: mughetti@dm.unibo.it

Sunto. In questa comunicazione si intende discutere, attraverso un operatore modello, l'ipoellitticità (C^∞, Gevrey, analitica) di una somma P di quadrati di campi vettoriali $X_j = \sum_{k=1}^n a_{j,k}(x)\partial_{x_k}$, a coefficienti complessi $a_{j,k}(x) \in C^w(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$:

$$P = \sum_{j=1}^r X_j^* X_j + X_0 \tag{12}$$

Si dice che P è ipoellittico C^∞, Gevrey, analitico se conserva, rispettivamente, il supporto singolare C^∞, Gevrey, analitico di ogni distribuzione: sing supp$(Pu) =$ sing supp(u), $\forall u \in \mathcal{D}'$.

Se i campi vettoriali X_j in (1) sono reali, i.e. $a_{j,k}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, è ben noto da Hörmander [1] il seguente:

Teorema ([1]). *Se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ l'algebra Lie$\{X_0, X_1, ..., X_r\}(x)$ genera $\mathbb{R}^n$ (Ipotesi di Hörmander), allora P è $C^\infty-$ipoellittico e, più precisamente, subellittico.*

Nel caso in cui i campi vettoriali X_j in (1) siano complessi, l'ipotesi di Hörmander non è più sufficiente a garantire l'ipoellitticità, così come mostra il seguente risultato:

Teorema (Bove-M.-Tartakoff, 2011). *Si consideri la seguente somma di quadrati di campi vettoriali complessi in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ (Cfr. Kohn [2]) con $\ell, k, q \in \mathbb{N}, q$ pari:*

$$P = \left(t^\ell L^+\right)^* t^\ell L^+ + \left(L^-\right)^* L^- + \left(x^k L^+\right)^* x^k L^+,$$

dove $L^- = D_x - ix^{q-1}D_t$, $\quad L^+ = D_x + ix^{q-1}D_t$, $\quad D = \frac{1}{i}\partial$. Allora P non è mai ipoellittico analitico, mentre risulta essere $C^\infty-$ipoellittico se e solo se $\ell > k/q$. In tal caso P è $s-$Gevrey ipoellittico se e solo se $s \geq \frac{\ell q}{\ell q - k} = 1 + \frac{k}{\ell q - k}$.

Si noti che P soddisfa l'ipotesi di Hörmander grazie ai soli campi $L^-, x^k L^+$; tuttavia, la sua ipoellitticità dipende in modo determinante dal campo $t^\ell L^+$.

Bibliografia

[1] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* (1967) 119, 147-171.

[2] J.J. Kohn, Hypoellipticity and loss of derivatives. With an appendix by Makhlouf Derridj and David S. Tartakoff. *Ann. of Math.* (2) 162 (2005), n. 2, 943–986.

[1] Lavoro in collaborazione con A.Bove - D.S.Tartakoff.

Benedetta Noris: Soluzioni radiali positive di equazioni ellittiche supercritiche con condizioni al bordo di Neumann

Benedetta Noris[1]
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano-Bicocca
email: benedetta.noris1@unimib.it

Denis Bonheure
Département de mathématique, Université Libre de Bruxelles

Massimo Grossi
Dipartimento di Matematica Castelnuovo, Università di Roma Sapienza

Tobias Weth
Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt

Sunto. Studiamo l'esistenza di soluzioni positive di equazioni ellittiche della forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = a(|x|)f(u) & \text{in } B \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on } \partial B, \end{cases}$$

dove B è una palla di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ e $V(|x|), a(|x|), f(s)$ sono regolari e positive.

Nel caso in cui la nonlinearità sia una potenza pura $f(s) = s^p$, in [2] troviamo una condizione sul potenziale $V(|x|)$ sufficiente all'esistenza di soluzioni per p abbastanza grande. In particolare, se $V \not\equiv 0$ esiste sempre almeno una soluzione per p abbastanza grande, a differenza del caso di condizioni al bordo di Dirichlet. Si supera la mancanza di compattezza tramite l'uso di un vincolo ispirato a [3].

In [1] ci concentriamo sul caso $V(|x|) = 1$ e $a(|x|), f(s)$ nondecrescenti, con ipotesi molto generali sulla nonlinearità. Seguendo [4] superiamo la mancanza di compattezza cercando soluzioni nel cono delle funzioni nonnegative, nondecrescenti di $H^1(B)$. Il nostro approccio combina metodi topologici e variazionali.

Bibliografia

[1] D. Bonheure, B. Noris and T. Weth: "Increasing radial solutions for supercritical Neumann problems", in preparazione.

[2] M. Grossi and B. Noris: "Positive constrained minimizers for supercritical problems in the ball", in corso di stampa in *Proc. Amer. Math. Soc.*

[3] D. Passaseo: "Existence and multiplicity of positive solutions for elliptic equations with supercritical nonlinearity in contractible domains", *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. 16* (1992), 77–98.

[4] E. Serra and P. Tilli: "Monotonicity constraints and supercritical Neumann problems", *Ann. I. H. Poincaré - AN*, 28:63–74, 2011.

[1] Il lavoro è stato parzialmente finanziato dal progetto MIUR "Metodi Variazionali ed Equazioni Differenziali Non Lineari."

Alessio Porretta: Sulla costruzione di funzioni p-armoniche in un cono

Alessio Porretta
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
email: porretta@mat.uniroma2.it

Laurent Véron
LMPT, Université François Rabelais, Tours (Francia)

Sunto. Se (r, σ) sono coordinate sferiche e S è un dominio regolare nella sfera N-dimensionale, si considerano funzioni positive nella forma di variabili separate $u = r^\alpha \omega(\sigma)$ che siano p-armoniche in un cono C_S con vertice nell'origine e apertura S, ovvero

$$\Delta_p(u) := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0 \qquad \text{in } C_S \setminus \{0\}$$

con una condizione di Dirichlet sulla superficie laterale del cono. Tali funzioni svolgono un ruolo cruciale nello studio delle singolarità di problemi ellittici associati al p–laplaciano in domini con punti angolosi al bordo. In [3], P. Tolksdorf ha dimostrato che, per ogni dominio regolare S della sfera, esiste un unico esponente $\alpha_S > 0$ e un'unica funzione ω (a meno di omotetie) per cui $u = r^{\alpha_S}\omega(\sigma)$ è p-armonica in C_S. Similmente, esiste un unico $\tilde{\alpha}_S < 0$ che dà luogo a una funzione p-armonica singolare. Un calcolo esplicito mostra che u è p–armonica se e solo se ω, α soddisfano il seguente problema (intrinseco) sulla sfera:

$$-div\left(\left(\alpha^2\omega^2 + |\nabla\omega|^2\right)^{(p-2)/2}\nabla\omega\right) = \alpha((p-1)\alpha + p - N)\omega\left(\alpha^2\omega^2 + |\nabla\omega|^2\right)^{(p-2)/2}.$$

La dimostrazione di P. Tolksdorf non chiarisce il ruolo di α, ω e del problema intrinseco di autovalori nonlineare associato sulla sfera. In [1] forniamo una dimostrazione completamente diversa del risultato di Tolksdorf attraverso lo studio (su generali varietà Riemanniane) dell'esistenza e unicità di α, ω sottolineando il legame con alcuni problemi "ergodici" quasilineari. In [2] usiamo questa costruzione, unitamente a metodi di grado topologico, per studiare esistenza o nonesistenza di soluzioni positive del tipo $u = r^\alpha\omega(\sigma)$ per l'equazione di Lane-Emden quasilineare

$$\Delta_p(u) = \varepsilon u^q \qquad \text{in } C_S \setminus \{0\}$$

in entrambi i casi $\varepsilon = \pm 1$ (assorbimento o reazione).

Bibliografia

[1] A. Porretta, L. Véron: "Separable p-harmonic functions in a cone and related quasilinear equations on manifolds", J. Europ. Math. Soc (2009).

[2] A. Porretta, L. Véron: "Separable solutions of quasilinear Lane-Emden equations", preprint.

[3] P. Tolksdorff: "On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points", Comm. Part. Diff. Equ. 8 (1983), 773-817.

Enrico Priola: L'effetto regolarizzante per equazioni paraboliche completamente non lineari con coefficienti singolari

Alessio Porretta
Dipartimento di Matematica Università di Roma Tor Vergata

Enrico Priola[1]
Dipartimento di Matematica Università di Torino
email: `enrico.priola@unito.it`

Sunto. Si mostrano stime uniformi sul gradiente spaziale di soluzioni di problemi parabolici di Cauchy del secondo ordine aventi coefficienti singolari su $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ e dato iniziale continuo.

Usualmente tali stime richiedono la continuità e la limitatezza dei coefficienti (caso classico) o addizionali ipotesi di regolarità se si stanno considerando coefficienti illimitati. Nel presente lavoro si provano le stime sul gradiente con i coefficienti che possono essere sia illimitati che singolari (i coefficienti in generale possono non soddisfare la condizione di Dini). Le stime dipendono esplicitamente dalla costante di ellitticità e dal modulo di continuità dei coefficienti (ma non dalla loro norma L^∞). Il metodo usato fornisce una controparte analitica del metodo probabilistico di coupling usato in [2] per provare stime del tipo

$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_\infty \le \frac{c}{\sqrt{t}}\,\|u_0\|_\infty, \quad t\in(0,T),$$

per soluzioni limitate u di equazioni lineari paraboliche non degeneri con coefficienti possibilmente illimitati e irregolari e dato iniziale u_0 limitato. Rispetto a [2] le ipotesi sui coefficienti vengono ulteriormente indebolite e nelle stime del gradiente si permette anche al dato iniziale di essere illimitato.

Si estendono i risultati alle soluzioni di viscosità di equazioni non lineari paraboliche del secondo ordine (cf. [1]). In particolare, si provano stime del gradiente per soluzioni di viscosità di equazioni paraboliche di Isaacs aventi coefficienti singolari.

Bibliografia

[1] H. Ishii, P.L. Lions: "Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations", J. Differential Equations 83 (1990), 26-78.

[2] E. Priola, F. Y. Wang, "Gradient estimates for diffusion semigroups with singular coefficients", J. Funct. Anal. 236 (2006), 244-264.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto di ricerca PRIN 2008 "Deterministic and stochastic methods in the study of evolution problems" e del progetto GNAMPA 2010 "Proprietà di regolarità in EDP nonlineari legate a problemi di controllo."

Giovanni Taglialatela: Propagazione dell'analiticità per le soluzioni di un sistema debolmente iperbolico non lineare

Sergio Spagnolo
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Giovanni Taglialatela
Dipartimento di Scienze Economiche e Metodi Matematici, Università di Bari
email: taglia@dse.uniba.it

Sunto. Il problema della regolarità analitica delle soluzioni dei sistemi iperbolici, può esser formulato nel modo seguente.

Sia U una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t U(t,x) = f(t,x,U,\partial_x U) \\ U(0,x) = U_0(x) \end{cases}$$

con $U_0(x)$ analitica in un certo dominio del piano iniziale. Sotto quali ipotesi $U(t,x)$ conserva l'analiticità per $t > 0$?

In collaborazione con Spagnolo si è mostrata la propagazione dell'analiticità nel caso unidimensionale, sotto l'ipotesi che $U(t,x)$ sia in uno spazio di Gevrey d'indice s, con $s < \dfrac{m}{m-1}$, dove m è la massima molteplicità delle radici caratteristiche.

Cristina Tarsi: Casi limite nelle immersioni di Sobolev: immersioni in spazi di Zygmund e la disuguaglianza di Adams

Cristina Tarsi
Dipartimento di Matematica, Università di Milano
email: `Cristina.Tarsi@unimi.it`

Sunto. Scopo di questa comunicazione è mettere in luce il legame tra la disuguaglianza di Adams e opportune immersioni degli spazi di Sobolev associati in spazi di Zygmund. Esibiremo inoltre le migliori costanti di immersione, evidenziandone la relazione con le costanti ottimali di Moser e di Adams. In particolare, presenteremo il seguente

Teorema. *Sia $m \geq 2$, $n > m$ e sia Ω un dominio limitato in $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $W^{n,\frac{n}{m}}_{\mathcal{N}}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u \in W^{n,\frac{n}{m}}(\Omega)$ con condizioni al bordo di tipo Navier $u = \Delta u = ... = \Delta^{[(m-1)/2]}u = 0$ su $\partial\Omega$. Allora*

$$\|u\|_{Z^{\frac{n-m}{n}}} \leq \gamma_{n,m} \|\nabla^m u\|_{\frac{n}{m}}$$

per ogni $u \in W^{m,\frac{n}{m}}_{\mathcal{N}}(\Omega)$, dove

$$\gamma_{n,m} = \begin{cases} \omega_n^{\frac{n-m}{n}} \cdot \dfrac{\Gamma(\frac{n-m+1}{2})}{2^m \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2})}, & m \text{ dispari} \\ \omega_n^{\frac{n-m}{n}} \cdot \dfrac{\Gamma(\frac{n-m}{2})}{2^m \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})}, & m \text{ pari.} \end{cases}$$

La costante $\gamma_{n,m}$ è ottimale.

La dimostrazione è basata su tecniche di simmetrizzazione e su un procedimento "a cascata": la costante $\gamma_{n,m}$, infatti, risulta essere il prodotto delle costanti ottimali per opportune immersione intermedie. Un controesempio dimostra l'ottimalità della costante. Come corollario otteniamo, inoltre, una nuova dimostrazione della disuguaglianza di Adams, ed una sua estensione al caso di funzioni con condizioni al bordo di tipo Navier:

Teorema. *Sia $n > 2$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato. Esiste una costante $C = C(n) > 0$ tale che per ogni $u \in W^{n,\frac{n}{m}}_{\mathcal{N}}(\Omega)$, soddisfacente $\|\nabla^m u\|_{\frac{n}{m}} \leq 1$,*

$$\int_\Omega e^{\beta |u|^{\frac{n}{n-m}}} dx \leq C|\Omega| \qquad \forall\ \beta \leq \beta_{n,m}, \qquad \text{dove} \qquad \beta_{n,m} = \gamma_{n,m}^{-\frac{n}{n-m}}$$

Bibliografia

[1] C. Tarsi: "Adams' inequality and limiting Sobolev embeddings into Zygmund spaces", sottoposto per la pubblicazione.

[2] D. Cassani, B. Ruf, C. Tarsi, "Best constants for Moser type inequalities in Zygmund spaces", Mat. Contemp. **36** (2009), 79-90.

Maria Carla Tesi: Un modello qualitativo elementare per la diffusione e l'aggregazione della β-amiloide nella malattia di Alzheimer

Yves Achdou
UFR de Mathématiques, Université Paris-Diderot

Bruno Franchi
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Maria Carla Tesi
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: `tesi@dm.unibo.it`

Norina Marcello
UO Neurologia, ASMN Reggio Emilia

Sunto. In questa comunicazione vogliamo descrivere un modello matematico elementare per la diffusione e l'agglomerazione della β-amiloide (Aβ) nel cervello affetto dalla malattia di Alzheimer (AD).

Nell'approccio qui presentato abbiamo scelto di utilizzare la seguente scala spaziale: consideriamo una porzione dell'ippocampo della corteccia celebrale (la regione del cervello principalmente affetta da AD) di dimensioni comparabile ad un multiplo della taglia del soma del neurone, trascuriamo quindi sia la descrizione di fenomeni intracellulari sia le manifestazioni cliniche della malattia "in largo". Questa porzione di tessuto celebrale è rappresentata da un dominio regolare $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ limitato e connesso, mentre i neuroni sono rappresentati da una famiglia di aperti regolari e connessi tali che: 1) $\bar{\Omega}_j \subset \Omega_0$ if $j = 1, \dots, M$; 2) $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset$ if $i \neq j$. Consideriamo poi la funzione a valori vettoriali $u = (u_1, \dots, u_N)$, dove $N \in \mathbb{N}$: $u_m = u_m(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ (il tempo) e $x \in \Omega$, descrive la concentrazione (molare) di agglomerati Aβ costituiti da m monomeri, per $1 \leq m < N - 1$, mentre u_N contiene gli agglomerati Aβ con più di $N - 1$ monomeri.

Risulta naturale descrivere il fenomeno di agglomerazione della Aβ tramite l'equazione di Smoluchowski, alla quale si aggiunge il classico termine di diffusione di Fourier. Siamo quindi condotti a studiare un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} u_m = d_m \Delta_x u_m - u_m \sum_{j=1}^{N} a_{m,j} u_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} a_{j,m-j} u_j u_{m-j}$$

dove $d_m > 0$, $m = 1, \dots, N$ e $a_{i,j} = a_{j,i} > 0$, $i, j = 1, \dots, N$, con opportune condizioni di Neumann non omogenee al bordo.

Per tale sistema abbiamo dimostrato l'esistenza globale di soluzioni regolari e fornito delle stime asintotiche di tali soluzioni.

Abbiamo poi affettuato delle simulazioni numeriche del modello che hanno prodotti risultati in buon accordo con i più recenti dati clinici.

Bruno Volzone: Metodi di simmetrizzazione per operatori ellittici con Laplaciano frazionario

Bruno Volzone
Dipartimento per le Tecnologie, Università degli Studi di Napoli "Parthenope"
email: `bruno.volzone@uniparthenope.it`

Sunto. In questa comunicazione verranno esposte alcune applicazioni di tecniche di simmetrizzazione, utili alla determinazione di stime ottimali per soluzioni di problemi al contorno ellittico associati al Laplaciano frazionario, che si presentino nella forma

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\alpha/2} u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

ove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $\alpha \in (0,2)$ ed $f \in L^p(\Omega)$, con $p \geq 2N/(N+\alpha)$. L'interpretazione del Laplaciano frazionario come operatore di Dirichlet-Neumann, introdotta in [1] e successivamente in [2], [3], risulterà fondamentale per ricondurre lo studio del problema (1) a quello di un opportuno problema di "estensione" in un cilindro illimitato $\mathcal{C}_\Omega := \Omega \times (0, +\infty)$ nel semispazio $\mathbb{R}^{N+1}_+ := \mathbb{R}^N \times (+, \infty)$. Inoltre, tali metodi di simmetrizzazione avranno come naturale conseguenza l'ottenimento di opportuni risultati di regolarità per la soluzione u di (1) in termini del dato f, che generalizzano i corrispondenti risultati per il Laplaciano classico.

I risultati qui discussi saranno oggetto del lavoro [4] di prossima pubblicazione.

Bibliografia

[1] L. Caffarelli, Luis and L. Silvestre, Luis: "An extension problem related to the fractional Laplacian", Comm. Partial Differential Equations, 2007.

[2] X. Cabré, J. Tan: "Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian", 2010

[3] C. Brändle, E. Colorado, A. de Pablo: "A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian", 2010

[4] G. Di Blasio, V. Ferone, B. Volzone: "Symmetrization methods for some elliptic equations involving the fractional Laplacian", 2011

Gabriella Zecca: Sulla continuità di soluzioni di equazioni ellittiche degeneri nel piano

Tonia Ricciardi
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Gabriella Zecca
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" Università degli Studi di Napoli "Federico II"
email: `g.zecca@unina.it`

Sunto. Si studiano le proprietà di regolarità di *certe soluzioni deboli con energia finita* per equazioni ellittiche del tipo

$$div(A(x)\nabla u(x)) = 0,$$

dove $A(x) = [a_{i,j}(x)]_{i,j=1,2}$ è una matrice simmetrica a coefficienti misurabili definita in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la quale verifica la relazione

$$\frac{|\xi|^2}{K(x)} \leqslant \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leqslant K(x)|\xi|^2 \qquad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ e per quasi ogni } x \in \Omega.$$

Supponendo che la funzione $K : \Omega \to [1, \infty]$ sia esponenzialmente integrabile, si dimostra che tali soluzioni risultano continue. Una stima del modulo di continuità è ottenuta in termini delle ipotesi su K. Il risultato viene utilizzato per studiare la regolarità delle mappe planari a distorsione finita.

Bibliografia

[1] T. Ricciardi, G. Zecca, "On the continuity of solutions to degenerate elliptic equations in two dimensions", (2011), sottoposto per la pubblicazione.

Sezione 3 Equazioni differenziali ordinarie

Irene Benedetti: Inclusioni differenziali semilineari senza ipotesi di compattezza

Irene Benedetti[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
email: irene.benedetti@dmi.unipg.it

Sunto. La comunicazione verte sullo studio di inclusioni differenziali semilineari del seguente tipo

$$\begin{cases} x'(t) \in A(t)x(t) + F(t, x(t)), & \text{for a.a. } t \in [a, b], \\ Lx = M(x) \end{cases}$$

in uno spazio di Banach riflessivo E. Si assume che $\{A(t)\}_{t\in[a,b]}$ sia una famiglia di operatori lineari tali che $A(t) : D(A) \subset E \to E$, con $D(A)$ denso in E, sia il generatore di un operatore di evoluzione. Consideriamo il termine non lineare F misurabile in t e semicontinuo superiormente in x rispetto alla topologia debole di E. Inoltre assumiamo che $L : C([a, b]; E) \to E$ ed $M : C([a, b]; E) \to E$ siano due operatori, il primo lineare ed il secondo sublineare, entrambi continui rispetto alla topologia debole di $C([a, b]; E)$.

Osserviamo che queste condizioni al bordo sono molto generali e comprendono casi tipici quali il problema di Cachy, condizioni al bordo di tipo periodico ed anti periodico, condizioni al bordo di tipo Floquet e di tipo non locale.

I risultati proposti, contenuti in [1], si basano su teoremi di punto fisso classici. L'originalità è contenuta principalmente nell'introduzione della topologia debole. Contrariamente a una larga parte dei lavori presenti in letteratura, ciò ci permette di evitare di imporre ipotesi di compattezza sia per quanto riguarda il termine non lineare, sia per quanto riguarda l'operatore di evoluzione generato dalla parte lineare e sia per quanto riguarda gli operatori L ed M.

Verranno in aggiunta illustrati alcune applicazioni di questi risultati allo studio di equazioni alle derivate parziali. Dal punto di vista delle applicazioni esistono, inoltre, esempi significativi con termini non lineari semicontinui superiormente da E in E_w, dove con E_w si è indicato lo spazio E dotato della topologia debole. A tale proposito, mostreremo teoremi di punto fisso originali, contenuti in [2], basati su un'ipotesi di tipo midpoint convessità, che permettono di affrontare questi tipi di problemi.

Bibliografia

[1] I. Benedetti, L. Malaguti, V. Taddei, Semilinear differential inclusions with noncompact evolutions systems and applications, in preparazione;

[2] I. Benedetti, S. Bolognini, A. Martellotti, Generalization of midpoint convexity for multivalued maps and applications to fixed point theorems, in preparazione.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del Progetto Prin Equazioni Differenziali Ordinarie e Applicazioni

Gabriele Bonanno: Analisi Variazionale ed Applicazioni a Problemi Differenziali Non Lineari

Gabriele Bonanno[1]
Dipartimento di Scienze per l'Ingegneria e per l'Architettura, Università di Messina
email: `bonanno@unime.it`

Sunto. Viene presentata una caratterizzazione della geometria del passo montano per funzionali limitati inferiormente. Precisamente, si osserva che tale geometria, in questo caso, è equivalente all'esistenza di almeno due minimi locali per il funzionale considerato. Ne segue che il classico Teorema di *Ambrosetti* e *Rabinowitz*, quando il funzionale è limitato inferiormente, assicura in effetti l'esistenza di tre punti critici. Viene inoltre presentato un teorema di esistenza di un minimo locale per una certa classe di funzionali e vengono evidenziate alcune sue conseguenze. Dalla combinazione delle precedenti osservazioni si determina un teorema di tre punti critici di cui riportiamo il seguente caso particolare:

Teorema 5. *Sia X uno spazio di Banach, $\Phi, \Psi : X \to \mathbb{R}$ due funzionali di classe C^1 con Φ limitato inferiormente e tali che $I = \Phi - \Psi$ è limitato inferiormente e soddisfa la condizione di Palais-Smale. Assumiamo che $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ e che esistano $r \in \mathbb{R}$, $\overline{u} \in X$ tali che $\sup_{u \in \Phi^{-1}(]-\infty, r])} \Psi(u) < r < \Phi(\overline{u}) < \Psi(\overline{u})$. Allora I ammette almeno tre punti critici distinti.*

Vengono infine date alcune applicazioni a problemi differenziali non lineari di cui riportiamo il seguente esempio:

Teorema 6. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa tale che $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$ e $f(0) \neq 0$. Posto $F(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, assumiamo che esistano due costanti positive c, d con $c < \sqrt{2}d$, tali che $\frac{F(c)}{c^2} < \frac{1}{4}\frac{F(d)}{d^2}$. Allora per ogni $\lambda \in \left]\frac{8d^2}{F(d)}, \frac{2c^2}{F(c)}\right[$ il problema*

$$(D_\lambda) \qquad \begin{cases} -u'' = \lambda f(u) & \text{in} \quad]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

ammette almeno tre soluzioni classiche positive.

Bibliografia

[1] G. Bonanno: "A characterization of the mountain pass geometry for functionals bounded from below", preprint.

[2] G. Bonanno: "A critical point theorem via the Ekeland variational principle", preprint.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del PRIN2007 "'Equazioni differenziali ordinarie e applicazioni"'.

Alessandro Calamai: Oscillazioni forzate per equazioni di moto vincolato con ritardo infinito e applicazioni al pendolo sferico

Alessandro Calamai
Dipartimento di Scienze Matematiche, Università Politecnica delle Marche
email: calamai@dipmat.univpm.it

Pierluigi Benevieri
Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Firenze

Massimo Furi
Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Firenze

Maria Patrizia Pera
Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Firenze

Sunto. Consideriamo un'equazione con ritardo infinito (*retarded functional differential equation*) del secondo ordine, T-periodica e dipendente da un parametro, su una varietà compatta senza bordo con caratteristica di Eulero-Poincaré diversa da zero. Usando metodi topologici, basati sulla teoria dell'indice di punto fisso per applicazioni localmente compatte negli ANR, dimostriamo un risultato di continuazione globale di soluzioni T-periodiche di tale equazione (cfr. [1]). Come applicazione, proviamo l'esistenza di oscillazioni forzate per equazioni con ritardo infinito sulle sfere di dimensione pari (cfr. [2]). Illustreremo infine le difficoltà che si incontrano rimuovendo l'ipotesi di compattezza della varietà (cfr. [3]).

Le equazioni con ritardo finito in $\mathbb{R}^n$ sono state studiate da diversi punti di vista e da vari autori, si veda la monografia [5]. Ad esempio in [6] sono studiate le proprietà generali delle equazioni con ritardo su varietà, mentre in [4] sono studiate le equazioni con ritardo infinito in $\mathbb{R}^n$. Per quanto ne sappiamo, non ci sono in letteratura risultati generali per equazioni con ritardo infinito su varietà non compatte.

Bibliografia

[1] P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera: "A continuation result for forced oscillations of constrained motion problems with infinite delay", accettato per la pubblicazione su *Advanced Nonlinear Studies*.

[2] P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera: "On the existence of forced oscillations for the spherical pendulum acted on by a retarded periodic force", accettato per la pubblicazione su *Journal of Dynamics and Differential Equations*.

[3] P. Benevieri, A. Calamai, M. Furi e M.P. Pera: "On general properties of retarded functional differential equations on manifolds", preprint, 2011.

[4] J.K. Hale e J. Kato: "Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay", *Funkc. Ekvac.* **21** (1978), 11–41.

[5] J.K. Hale e S.M. Verduyn Lunel: "Introduction to Functional Differential Equations", New York, 1993.

[6] W.M. Oliva: "Functional differential equations on compact manifolds and an approximation theorem", *J. Differential Equations* **5** (1969), 483–496.

Pasquale Candito: Un nuovo approccio nello studio della molteplicità di soluzioni per un problema non lineare

Pasquale Candito[1]
Dipartimento DIMET, Università degli Studi Mediterranea di Reggio Calabria
email: pasquale.candito@unirc.it

Sunto. Considerato il problema

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda f(u) \quad \text{in } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0, \tag{14}$$

dove $p > 1$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e λ è un parametro positivo, la presente comunicazione si propone di illustrare un nuovo approccio [1], basato su metodi variazionali [2] e di sopra e sotto soluzioni [3], per lo studio di problemi ellittici quasilineari dipendenti da un parametro positivo. In particolare, viene stabilita l'esistenza di un ben preciso intervallo di parametri Λ tale che, per ogni $\lambda \in \Lambda$ il problema (1) ammette almeno una soluzione positiva, una negativa e un'altra di segno variabile le cui norme in C^0 si possono stimare a priori, uniformemente rispetto a λ.

Bibliografia

[1] P. Candito, S. Carl e R. Livrea, "Muliple solutions for a quasilinear elliptic problems via critical points in open level sets and truncation principle", sottoposto per la pubblicazione.

[2] G. Bonanno e P. Candito, "Nonlinear difference equations through varitional methods". In: D.Y. GAO, D. MOTREANU. Handbook of Nonconvex Analysis and Applications. Iternational Press of Boston, 2010.

[3] S. Carl e D. Motreanu, "Constant-sign and sign-changing solutions for nonlinear eigenvalue problems", Nonlinear Anal. **68** (2008), 2668–2676.

[1] Lavoro svolto nell'ambito dei progetti GNAMPA 2010

Anna Capietto: Alcune osservazioni sul teorema di Mather e sugli insiemi di Aubry-Mather

Anna Capietto
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
email: anna.capietto@unito.it

Nicola Soave
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano Bicocca

Sunto. Si illustrano il teorema di Mather e le sue applicazioni alla classificazione degli insiemi di Aubry-Mather. Si discute l'equivalenza di differenti nozioni di insieme di Aubry-Mather presenti in letteratura. Infine, vengono presentate applicazioni ad alcune classi di equazioni differenziali ordinarie in risonanza.

Bibliografia

[1] A. Capietto e N. Soave: "Some remarks on Mather's theorem and Aubry-Mather sets", Commun. Appl. Anal., in stampa.

Antonia Chinnì: Esistenza di tre soluzioni per un problema di Dirichlet ordinario con $p(x)$-Laplaciano

Antonia Chinnì
Dipartimento di Scienze per l'Ingegneria e l'Architettura, sezione di Matematica, Università di Messina
email: `chinni@dipmat.unime.it`

Sunto. Viene preso in esame un problema di Dirichlet ordinario del tipo:

$$(D_\lambda) \qquad \begin{cases} -(|u'|^{p(x)-2}u')' = \lambda f(x,u) \ \text{ in } \ ]0,1[\\ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dove $f :]0,1[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di Carathéodory e $p \in C([0,1])$. Posto

- $F(x,\xi) := \int_0^\xi f(x,t)\,dt$ per ogni $(x,\xi) \in]0,1[\times\mathbb{R}$,
- $1 < p^- := \min_{x\in[0,1]} p(x) \le p(x) \le p^+ := \max_{x\in[0,1]} p(x) < +\infty$,
- $\gamma_r := \max\{(p^+ r)^{\frac{1}{p^-}}, (p^+ r)^{\frac{1}{p^+}}\}$ per ogni $r > 0$,

e indicata con c_0 la costante di immersione dello spazio $W^{1,p(x)}(]0,1[)$ in $C^0([0,1]$, si prova il seguente risultato:

Teorema. *Siano verificate le seguenti condizioni:*

(f_1) *esistono* $s \in [1, p^-[$ *e* $c > 0$ *tali che*

$$|f(x,t)| \le c(1 + |t|^{s-1}) \text{ per ogni } (x,t) \in]0,1[\times\mathbb{R};$$

(f_2) $essinf_{x\in\Omega} F(x,\xi) \ge 0$ *per ogni* $\xi \in \mathbb{R}$*;*

(f_3) *esistono* r *ed* h *in* $]0,+\infty[$ *con* $r < \frac{1}{2p^+}\min\{(4h)^{p^-}, (4h)^{p^+}\}$*,tali che*

$$\alpha_r := \frac{1}{r}\int_0^1 \sup_{|\xi|\le c_0\gamma_r} F(x,\xi)\,dx < \frac{2p^- \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} F(x,h)\,dx}{\max\{(4h)^{p^-}, (4h)^{p^+}\}} := \beta_h.$$

Allora, per ogni $\lambda \in]\frac{1}{\beta_h}, \frac{1}{\alpha_r}[$*, il problema* (D_λ) *possiede almeno tre soluzioni deboli.*

Bibliografia

[1] G. Bonanno, A. Chinnì: "Multiple solutions for elliptic problems involving the $p(x)$- Laplacian", in corso di stampa su *Le Matematiche*.

[2] G. Bonanno, A. Chinnì: "Discontinuous elliptic problems involving the $p(x)$-Laplacian", *Math. Nachr.*, **284**, No. 5,6, pp.639 - 652 (2011)

[3] G. Bonanno. S.A. Marano,: "On the structure of the critical set of non-differentiable functions with a weak compactness condition",*Appl. Anal.*, **89**, 1-10 (2010).

Maurizio Garrione: Risultati di esistenza e molteplicità per sistemi nonlineari piani in risonanza

Maurizio Garrione
SISSA - International School for Advanced Studies, Trieste
email: garrione@sissa.it

Alberto Boscaggin
SISSA - International School for Advanced Studies, Trieste

Alessandro Fonda
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste

Sunto. Verranno presentati recenti risultati di esistenza e molteplicità di soluzioni di un problema in $\mathbb{R}^2$ del tipo

$$\begin{cases} Ju' = F(t,u) \\ u(0) = u(T), \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, si considererà il caso in cui $F(t,u)$ può essere "confrontata" asintoticamente con gradienti di Hamiltoniane positivamente omogenee e positive (una cui esauriente trattazione è stata data in [2]). Il più semplice modello è dato da

$$F(t,u) = \nabla H_1(u) + o(|u|), \quad |u| \to 0,$$
$$F(t,u) = \nabla H_2(u) + o(|u|), \quad |u| \to +\infty.$$

Saremo interessati a situazioni in cui si verificano fenomeni di risonanza.
Nella prima parte del talk, verranno presentati i risultati di esistenza ottenuti in [3] nel caso generale di doppia risonanza all'infinito (senza ipotesi a 0). Tali risultati si basano sull'introduzione e sull'utilizzo di un'opportuna condizione di Landesman-Lazer.
Nella seconda parte, verranno brevemente analizzati i legami tra alcune condizioni di nonrisonanza (tra cui tale condizione di Landesman-Lazer) e i rotation numbers di soluzioni "piccole" e/o "grandi" (in norma euclidea) di $Ju' = F(t,u)$. Con opportune combinazioni di tali condizioni, sarà possibile utilizzare il teorema di Poincaré-Birkhoff per fornire risultati fini di molteplicità (si veda [1]).

Bibliografia

[1] A. Boscaggin and M. Garrione, *Resonance and rotation numbers for planar Hamiltonian systems: Multiplicity results via the Poincaré-Birkhoff theorem*, in corso di stampa in Nonlinear Analysis TMA.

[2] A. Fonda, *Positively homogeneous Hamiltonian systems in the plane*, J. Differential Equations **200** (2004), 162–184.

[3] A. Fonda and M. Garrione, *Double resonance with Landesman-Lazer conditions for planar systems of ordinary differential equations*, J. Differential Equations **250** (2011), 1052–1082.

Roberto Livrea: Esistenza e molteplicità di soluzioni periodiche per una classe di sistemi Hamiltoniani

Roberto Livrea[1]
Dipartimento di P.A.U., Università "Mediterranea" di Reggio Calabria
email: roberto.livrea@unirc.it

Sunto. La presente comunicazione si propone di presentare alcuni risultati dedicati allo studio della seguente classe di sistemi Hamiltoniani

$$\begin{cases} -\ddot{u} + A(t)u = \lambda b(t)\nabla G(u) \quad \text{q.o. in } [0,T] \\ u(T) - u(0) = \dot{u}(T) - \dot{u}(0) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

dove $T > 0$, $N \geq 1$, $A(t) \in \mathcal{S}_N(\mathbf{R})$, per ogni $t \in [0,T]$, $b \in L^1([0,T])$, $G \in C^1(\mathbf{R}^N)$ e λ è un parametro positivo.

In particolare, sfruttando la struttura variazionale del problema (1), attraverso differenti gruppi di ipotesi sulla funzione G, si studierà l'esistenza ovvero la molteplicità di soluzioni periodiche (eventualmente infinite). In taluni casi, le soluzioni saranno garantite senza fare ricorso ad alcuna condizione asintotica all'infinito su G. L'approccio adottato si basa su alcuni teoremi di punto critico per funzionali regolari.

Bibliografia

[1] G. Bonanno e P. Candito: "Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities", J. Differential Equations, **244** (2008), 3031–3059.

[2] G. Bonanno e R. Livrea, "Multiple periodic solutions for Hamiltonian systems with not coercive potential", J. Math. Anal. Appl., **244** (2010), 3031–3059.

[3] G. Bonanno e G. Molica Bisci, "Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities", Bound. Value Probl. **2009** (2009), 1–20.

[4] G. Bonanno e A. Sciammetta, "An Existence Result of One Nontrivial Solution for Two Point Boundary Value Problems", Bull. Aust. Math. Soc., in stampa.

[1] Lavoro svolto nell'ambito dei progetti GNAMPA 2010

Luisa Malaguti: Equazioni di evoluzione multivoche semilineari con argomenti ritardati contenuti nel termine nonlineare

Luisa Malaguti
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria, Università di Modena e Reggio Emilia
email: `luisa.malaguti@unimore.it`

Simone Cecchini[1]
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria, Università di Modena e Reggio Emilia

Sunto. Questa comunicazione verte sullo studio di equazioni di evoluzione multivoche semilineari del tipo

$$x'(t) + A(t)x(t) \in F(t, x_t), \quad t \in [a, b],\, x \in E$$

in un arbitrario spazio di Banach E. Si assume che il termine non lineare F sia misurabile in t e, nella maggior parte dei casi, semi-continuo superiormente e dipendente da un argomento ritardato nel secondo argomento. Si suppone, inoltre, che F verifichi una ipotesi di crescita molto generale che le permette, in particolare, di essere superlineare nel suo secondo argomento. Quando si prende una parte lineare $A(t) : D(A) \to E$ con $D(A) \subset E$ denso in E e tale che $\{A(t)\}_{t\in[a,b]}$ sia il generatore di un operatore di evoluzione fortemente continuo viene discussa la presenza di soluzioni del tipo *mild*. Nel caso, invece, in cui $A(t) : E \to E$ sia lineare e limitata per ogni t e Bochner integrabile in $[a, b]$, si mostra l'esistenza di soluzioni classiche cioè assolutamente continue. I risultati proposti, contenuti in [1], si basano, principalmente, su un principio di continuazione per mappe condensanti e sono nuovi anche in assenza di termini di ritardo all'interno del processo. Il metodo di indagine utilizzato richiede il verificarsi di una proprietà di trasversalità, che viene qui ottenuta mostrando l'esistenza di opportuni *bound set* nello spazio E. La discussione si completa con l'illustrazione di alcune applicazioni allo studio di soluzioni del tipo Filippov di equazioni alle derivate parziali di reazione-diffusione che contengono discontinuità del tipo salto.

Bibliografia

[1] S. Cecchini, L. Malaguti, *Multivalued semilinear evolution equations with Carathéodory retarded nonlinearities*, preprint.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del Progetto Prin "*Equazioni Differenziali Ordinarie e Applicazioni*"

Serena Matucci: Esistenza e sviluppo asintotico delle soluzioni decrescenti per sistemi di equazioni differenziali nonlineari del secondo ordine accoppiate

Serena Matucci
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni, Università di Firenze
email: serena.matucci@unifi.it

Sunto. Si considerano sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine, nonlineari, del tipo

$$\begin{cases} (p(t)|y'|^{\alpha-1}y')' = \varphi(t)F(z) \\ (q(t)|z'|^{\beta-1}z')' = \psi(t)G(y), \end{cases} \tag{16}$$

dove α, β sono costanti positive, p, q, φ, ψ sono funzioni continue e positive definite su $[a, \infty)$, $a \geq 0$, e F, G sono funzioni continue su $\mathbb{R}$ tali che $uF(u) > 0$, $uG(u) > 0$ per ogni $u \neq 0$. Sotto l'ipotesi che F e G siano funzioni a variazione regolare in zero, di indici rispettivamente λ e μ, con $\alpha\beta > \lambda\mu$ (caso sub-omogeneo), mediante un approccio topologico ed opportune disuguaglianze integrali, si prova l'esistenza di soluzioni singolari e si determinano condizioni per l'esistenza di soluzioni proprie positive decrescenti, distinguendo i casi di limite zero e non zero per le componenti. Nel caso di una soluzione con entrambe le componenti positive e decrescenti a zero, mediante la teoria delle funzioni di Karamata, si determina inoltre la formula asintotica per le componenti, assumendo che i coefficienti φ, ψ in (1) siano funzioni a variazione regolare in zero. Tali risultati sono stati ottenuti in collaborazione con Pavel Řehák, dell'Istituto di Matematica dell'Accademia delle Scienze della Rep. Ceca.

Bibliografia

[1] T. Kusano, T. Tanigawa, On the structure of positive solutions of a class of fourth order nonlinear differential equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 185 (2006), 521–536.

[2] S. Matucci, P. Řehák, Asymptotic formula for decreasing solutions to coupled nonlinear differential systems, sottoposto per la pubblicazione.

[3] M. Naito, Existence of positive solutions of higher-order quasilinear ordinary differential equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 186 (2007), 59–84.

Giovanni Molica Bisci: Alcuni risultati di esistenza per certe classi di problemi variazionali

Giovanni Molica Bisci
Università *Mediterranea* di Reggio Calabria
email: gmolica@unirc.it

Sunto. Nella comunicazione verranno presentati alcuni recenti risultati ottenuti in collaborazione con G. Bonanno e V. Rădulescu sull'esistenza e molteplicità di soluzioni per alcune classi di problemi differenziali non-lineari. Precisamente si considereranno:

a) Problemi coinvolgenti operatori sotto forma di divergenza; v. [3], [5] e [6].
b) Risultati di esistenza per equazioni su varietà Riemanniane compatte senza bordo con applicazioni ad equazioni di tipo Emden-Fowler; v. [4].
c) Equazioni su domini frattali coinvolgenti il laplaciano debole; v. [7].

L'approccio adottato è di tipo variazionale ed è prevalentemente basato su teoremi di punto critico contenuti nei lavori [1] e [2].

Bibliografia

[1] G. Bonanno e S.A. Marano, *On the structure of the critical set of non-differentiable functions with a weak compactness condition*, Appl. Anal. **89** (2010), 1–10.

[2] G. Bonanno e G. Molica Bisci, *Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities*, Bound. Value Probl. **2009** (2009), 1–20.

[3] G. Bonanno, G. Molica Bisci e V. Rădulescu, *Infinitely many solutions for a class of nonlinear eigenvalue problems in Orlicz-Sobolev spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 263–268.

[4] G. Bonanno, G. Molica Bisci e V. Rădulescu, *Multiple solutions of generalized Yamabe equations on Riemannian manifolds and applications to Emden-Fowler problems*, Nonlinear Anal. Real World Appl. (2011), 1–10, DOI 10.1016/jonrwa.2011.03.012.

[5] G. Bonanno, G. Molica Bisci e V. Rădulescu, *Arbitrarily small weak solutions for a nonlinear eigenvalue problem in Orlicz-Sobolev spaces*, Monatsh Math. (2011), 1–14, DOI 10.1007/s00605-010-0280-2.

[6] G. Bonanno, G. Molica Bisci e V. Rădulescu, *Existence of three solutions for a non-homogeneous Neumann problem through Orlicz-Sobolev spaces*, Nonlinear Anal. (2011), in corso di stampa.

[7] G. Bonanno, G. Molica Bisci e V. Rădulescu, *Variational analysis for a nonlinear elliptic problem on the Sierpiński gasket*, (preprint), 2011, 1–16.

Franco Obersnel[1]: Soluzioni eterocline per l'equazione della curvatura prescritta

Denis Bonheure
Département de Mathématique, Université Libre de Bruxelles

Franco Obersnel[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste
email: obersnel@units.it

Pierpaolo Omari[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste

Sunto. Si discute l'esistenza di soluzioni eterocline dell'equazione delle curvatura prescritta

$$-\left(u'/\sqrt{1+u'^2}\right)' = f(t,u)$$

per mezzo di tecniche variazionali nello spazio delle funzioni a variazione localmente limitata, sotto varie configurazioni del secondo membro f dell'equazione.

Bibliografia

[1] F. Obersnel, P. Omari: Multiple bounded variation solutions of a periodically perturbed sine-curvature equation, Comm. Contemporary Math. (2011), in stampa.

[2] D. Bonheure, F. Obersnel and P. Omari: Heteroclinic solutions of the prescribed curvature equation (2011), preprint.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto di ricerca GNAMPA "Soluzioni periodiche di equazioni differenziali non lineari"

Pierpaolo Omari: Soluzioni periodiche dell'equazione della curvatura prescritta

Franco Obersnel
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste

Pierpaolo Omari[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste
email: omari@units.it

Sunto. Si discute l'esistenza, la molteplicità e la regolarità delle soluzioni periodiche dell'equazione delle curvatura prescritta

$$-\left(u'/\sqrt{1+u'^2}\right)' = f(t,u),$$

sotto varie configurazioni del secondo membro f dell'equazione.

In particolare si studia il caso in cui f interagisce con il principio dello spettro dell'operatore 1-Laplaciano con condizioni di periodicità.

Bibliografia

[1] F. Obersnel, P. Omari: Multiple bounded variation solutions of a periodically perturbed sine-curvature equation, Comm. Contemporary Math. (2011), in stampa.

[2] F. Obersnel, P. Omari: The periodic problem for curvature-like equations with asymmetric perturbations (2011), preprint.

[3] F. Obersnel, P. Omari: Existence, regularity and stability properties of periodic solutions of the prescribed curvature equation in the presence of lower and upper solutions (2011), preprint.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Progetto G.N.A.M.P.A.,"Soluzioni periodiche di alcune classi di equazioni differenziali ordinarie" e del P.R.I.N. "Equazioni differenziali ordinarie e applicazioni".

Duccio Papini: Soluzioni periodiche di equazioni differenziali non-lineari con condizioni al bordo oblique

Walter Allegretto
Department of Mathematical and Statistical Sciences, University of Alberta, Canada

Duccio Papini
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università degli Studi di Siena
email: papini@dii.unisi.it

Sunto. Si studia l'esistenza di soluzioni periodiche positive di equazioni differenziali ellittiche e paraboliche con condizioni al bordo oblique e dinamiche e con termini non lineari di tipo non-locale. I risultati sono ottenuti attraverso teoremi di punto fisso, l'uso del grado topologico e delle proprietà di problemi ellittici lineari ausiliari con condizioni al bordo naturali e parte principale non necessariamente simmetrica. Come ulteriore conseguenza dello studio effettuato si ottengono anche stime dell'autovalore principale per operatori ellittici non simmetrici.

Pasquale F. Pizzimenti: Soluzioni positive per problemi differenziali non lineari

Pasquale F. Pizzimenti
Dipartimento di Matematica, Università di Messina
email: ppizzimenti@unime.it

Sunto. Si presentano alcuni recenti risultati di esistenza di soluzioni non banali per problemi differenziali non lineari, ottenuti utilizzando un approccio basato su un teorema di minimo locale per funzionali differenziabili, senza richiedere alcuna condizione asintotica sul termine non lineare né in zero né all'infinito. Come conseguenza, viene enunciato un risultato di molteplicità di soluzioni per i problemi considerati.

Come caso particolare del Teorema principale si enuncia il seguente.

Teorema. *Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua non negativa e si ponga $G(t) = \int_0^t g(\xi)d\xi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si assuma che*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{G(t)}{t^p} = +\infty.$$

Allora, per ogni $\lambda \in]0, \lambda_0[$,

dove $\lambda_0 = k_0 \sup_{c\in]0,+\infty[} \dfrac{c^p}{G(c)}$ *e* $k_0 = \dfrac{N\pi^{\frac{p}{2}}}{p\left[m(\Omega)\Gamma(1+\frac{N}{2})\right]^{\frac{p}{N}}}\left(\dfrac{p-N}{p-1}\right)^{p-1}$, *il problema*

$$(AD_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda g(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato e non vuoto dello spazio $(\mathbb{R}^N, |\cdot|), N \geq 1$, con frontiera di classe C^1, $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, con $p > N$ e λ è un parametro reale positivo, ammette almeno una soluzione debole positiva. Inoltre, si assuma che $g(0) \neq 0$ e $0 < \mu G(t) \leq tg(t)$ per ogni $|t| \geq r$, per qualche $r > 0$ e per qualche $\mu > p$. Allora, per ogni $\lambda \in]0, \lambda_0[$, il problema (AD_λ) ammette almeno due soluzioni deboli positive.

Bibliografia

[1] G. Bonanno, *A critical point theorem via the Ekeland variational principle*, preprint.

[2] G. Bonanno and P. F. Pizzimenti, *Neumann boundary value problems with not coercive potential*, Mediterr. J. of Math., in corso di stampa.

[3] G. Bonanno and P. F. Pizzimenti, *Existence results for nonlinear elliptic problems*, preprint.

[4] P. F. Pizzimenti and A. Sciammetta, *Existence results for a quasi-linear differential problem*, "Le matematiche", 2011, in corso di stampa.

Paola Rubbioni: Inclusioni differenziali lineari con condizioni nonlocali in spazi di Banach

Paola Rubbioni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
email: rubbioni@dmi.unipg.it

Tiziana Cardinali
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia

Sunto. In uno spazio di Banach E, consideriamo l'inclusione differenziale semilineare

$$x'(t) \in A(t)x(t) + F(t, x(t))$$

soggetta alla condizione nonlocale

$$x(0) \, + \, \theta(x) \, = \, x_0 \in E \ ,$$

ove $\{A(t)\}_{t\in[0,b]}$ è una famiglia di operatori lineari che genera un sistema d'evoluzione, $F : [0, b] \times E \multimap E$ è una mappa multivoca che verifica la proprietà di Scorza-Dragoni nel senso della semicontinuità inferiore e $\theta : C([0, b], E) \to E$ è un'opportuna funzione.

In questa comunicazione discutiamo l'esistenza di soluzioni mild e la controllabilità per il suddetto problema. Affrontiamo inoltre il problema dell'esistenza di soluzioni mild nel caso impulsivo, richiedendo cioè che dette soluzioni verifichino l'ulteriore proprietà

$$x(t_i^+) := \lim_{s\to t^+} x(s) = x(t_i) + I_i(x(t_i)) \ , \ i = 1, \cdots, p \ ,$$

ove $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p < t_{p+1} = b$ e $I_i : E \to E$, $i = 1, \cdots, p$.

Nelle dimostrazioni facciamo uso di teoremi di esistenza di punti fissi e di teoremi di esistenza di selettori; fra questi ultimi un ruolo rilevante è svolto dal teorema di selezione provato in [3].

I risultati esposti sono contenuti negli articoli [1] e [2].

Bibliografia

[1] T. Cardinali, P. Rubbioni: "Impulsive mild solutions for semilinear differential inclusions with nonlocal conditions in Banach spaces", sottoposto per la pubblicazione.

[2] T. Cardinali, F. Portigiani, P. Rubbioni: "Nonlocal Cauchy problems and their controllability for semilinear differential inclusions with lower Scorza-Dragoni nonlinearities", Czech. Math. Jour. 61, 1, 225-245 (2011).

[3] T. Cardinali, F. Portigiani, P. Rubbioni: "Local mild solutions and impulsive mild solutions for semilinear Cauchy problems involving lower Scorza-Dragoni multifunctions", Topol. Methods Nonlinear Anal. 32, 247-259 (2008).

Angela Sciammetta: Su problemi di Neumann con p-Laplaciano

Angela Sciammetta
Dipartimento di Matematica, Università di Messina
email: asciammetta@unime.it

Sunto. Nella presente comunicazione vengono esaminati alcuni risultati di esistenza e molteplicità di soluzioni per problemi differenziali non lineari con condizioni di Neumann. Precisamente, siano: $\alpha \in L^1([0,1])$ tale che $\alpha(x) \geq 0$ per q.o. $x \in [0,1]$, $\alpha \not\equiv 0$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa, $p > 1$ e λ un parametro reale positivo. Si studia il problema

$$(AN_\lambda) \qquad \begin{cases} -(|u'|^{p-2}\,u')' + |u|^{p-2}\,u = \lambda\alpha(x)g(u) & \text{in } [0,1] \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

L'approccio si basa sui metodi variazionali. Un caso particolare è il seguente.

Teorema. *Assumiamo che*

$$\limsup_{\xi\to 0^+} \frac{G(\xi)}{\xi^p} = +\infty, \qquad \limsup_{\xi\to +\infty} \frac{G(\xi)}{\xi^p} = 0,$$

dove $G(\xi) = \int_0^\xi g(t)dt$, *per ogni* $\xi \in \mathbb{R}$. *Inoltre supponiamo che esistano due costanti positive* $\bar{c}$, $\bar{d}$, *con* $\bar{c} < 2^{\frac{p-1}{p}}\,\bar{d}$, *tale che*

$$\frac{G(\bar{c})}{\bar{c}^p} < \frac{1}{2^{p-1}}\frac{G(\bar{d})}{\bar{d}^p}.$$

Allora, per ogni $\lambda \in \left]\frac{1}{p\|\alpha\|_1}\frac{\bar{d}^p}{G(\bar{d})}, \frac{1}{p2^{p-1}\|\alpha\|_1}\frac{\bar{c}^p}{G(\bar{c})}\right[$, *il problema* (AN_λ) *ammette almeno tre soluzioni deboli positive.*

Bibliografia

[1] G. Bonanno, *A critical point theorem via the Ekeland variational principle*, preprint.

[2] G. Bonanno, P. Pizzimenti, *Neumann boundary value problems with not coercive potential*, Mediterr. J. Math., in corso di stampa.

[3] G. Bonanno, A. Sciammetta, *An existence result of one non-trivial solution for two point boundary value problems*, Bull. Aust. Math. Soc., in corso di stampa.

[4] G. Bonanno, A. Sciammetta, *Existence resuls to Neumann problems for elliptic equations involving the p-Laplacian*, preprint.

[5] P. Pizzimenti, A. Sciammetta, *Existence results for a quasi-linear differential problem*, Le Matematiche, in corso di stampa.

Marco Spadini: Oscillazioni forzate su una classe di varietà differenziabili definite implicitamente

Marco Spadini
Dipartimento di Sistemi e Informatica, Università degli Studi di Firenze
email: `marco.spadini@unifi.it`

Sunto. Talvolta, nello studio delle soluzioni armoniche di perturbazioni periodiche di equazioni differenziali ordinarie e funzionali autonome su varietà differenziabili, entra in gioco il *grado* (detto anche *caratteristica* o *rotazione*) di un campo vettoriale associato all'equazione non perturbata. (Si vedano ad esempio [4, 5, 6] ed i riferimenti ivi contenuti.) Quando la varietà non è conosciuta esplicitamente o risulta difficile da esplicitare, il computo di tale grado può risultare non immediato. Nel caso in cui la varietà ambiente sia definita implicitamente come l'insieme di zeri di una funzione liscia dotata di opportune proprietà, esiste una formula, ottenuta in [7], che permette di semplificare questo problema riducendo il calcolo del grado di un campo vettoriale a quello del grado di Brouwer di una certa mappa costruita esplicitamente. Questa formula trova naturale applicazione ai problemi di oscillazioni forzate in varie situazioni. Descriverò brevemente alcune di queste nel caso di equazioni del primo ordine con e senza ritardo [1, 2, 3, 7], e del secondo ordine (attuale soggetto di studio in collaborazione con A. Calamai).

Bibliografia

[1] L. Bisconti, M. Spadini, *On a class of differential-algebraic equations with infinite delay.* Preprint, arXiv:1104.0141v1 [math.CA].

[2] A. Calamai, *Branches of harmonic solutions for a class of periodic differential-algebraic equations.* Apparirà in Comm. App. Analysis.

[3] A. Calamai, M. Spadini, *Branches of forced oscillations for a class of constrained ODEs: a topological approach.* Sottoposto per la pubblicazione.

[4] M. Furi, M. P. Pera, M. Spadini, *The fixed point index of the Poincaré operator on differentiable manifolds*, Handbook of topological fixed point theory, Brown R. F., Furi M., Górniewicz L., Jiang B. (Eds.), Springer, 2005.

[5] M. Furi, M. P. Pera, M. Spadini, *Periodic solutions of functional differential perturbations of autonomous differential equations on manifolds.* Apparirà in Comm. Appl. Analysis.

[6] M. Furi, M. Spadini, *Branches of forced oscillations for periodically perturbed autonomous second order ODE's on manifolds*, J. of Differential Equations 154 (1999), 96–106.

[7] M. Spadini, *A note on topological methods for a class of Differential-Algebraic Equations.* Nonlinear Analysis 73 (2010), 1065–1076.

Valentina Taddei: Inclusioni semilineari di evoluzione con regolarità debole: teoremi di esistenza e applicazioni

Irene Benedetti
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia

Luisa Malaguti
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria, Università di Modena e Reggio Emilia

Valentina Taddei
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Modena e Reggio Emilia
email: `valentina.taddei@unimore.it`

Sunto. Studiamo l'esistenza di soluzioni classiche per problemi di Cauchy e di Floquet associati ad un'inclusione di evoluzione semilinare in uno spazio di Banach riflessivo e separabile del seguente tipo

$$x' \in A(t,x)x + F(t,x), \quad \text{for a.a. } t \in [a,b].$$

Assumiamo ipotesi di regolarità nella variabile di stato di tipo debole, sia per il termine lineare che per quello non lineare. I risultati che otteniamo si basano su un metodo originale che fa uso della topologia debole dello spazio di Sobolev $W^{1,p}([a;b];E)$ e di teoremi di punto fisso e principi di continuazione in spazi di Fréchet. Ciò permette di evitare completamente l'uso di misure di non compattezza, di trattare il caso di soluzioni multiple del problema omogeneo associato e di considerare ipotesi di crescita rispetto alla variabile di stato piú generali. Alcune applicazioni ad equazioni integro-differenziali provenienti da modelli di dispersione della popolazione completano la discussione.

Bibliografia

[1] I.Benedetti-L.Malaguti-V.Taddei: " Multivalued semilinear equations with weak upper semicontinuous superlinear nonlinearities", Jour. Math. An. Appl. 368 (2010), 90-102.

[2] I.Benedetti-L.Malaguti-V.Taddei: "B.v.p. for differential inclusions in Fréchet spaces with multiple solutions of the homogeneous problem", Math. Bohem. (2011).

[3] I.Benedetti-L.Malaguti-V.Taddei: "Two-points b.v.p. for multivalued equations with weakly regular r.h.s. ", Nonlin. An. (2011).

Elisabetta Tornatore: Esistenza e molteplicità di soluzioni per problemi differenziali non lineari con condizioni miste

Diego Averna
Dipartimento di Matematica ed Informatica, Università di Palermo

Elisabetta Tornatore
Dipartimento di Elettrica, Elettronica e delle Telecomunicazioni, Università di Palermo
email: `elisa@math.unipa.it`

Sunto. Usando recenti teoremi di punto critico, si esamina il seguente problema di Sturm-Liouville con le condizioni miste al bordo

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda f(t,u) \ \text{ in } \ \mathrm{I} =]\mathrm{a}, \mathrm{b}[\\ u(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

dove λ è un parametro positivo, $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione L^2-Carathéodory e $p, q \in L^\infty([a,b])$ tali che

$$p_0 = ess \inf_{t\in[a,b]} p(t) > 0, \ \ q_0 = ess \inf_{t\in[a,b]} q(t) \geq 0.$$

Assumendo un opportuno comportamento oscillante all'infinito del termine nonlineare f si prova l'esistenza di infinite soluzioni per ogni λ appartenente ad un opportuno intervallo, inoltre sotto un altro set di ipotesi sul termine non lineare si prova l'esistenza di almeno tre soluzioni.

Bibliografia

[1] D. Averna - N. Giovannelli - E. Tornatore, *Existence of three solutions for a mixed boundary value problem*, preprint.

[2] D. Averna - S. M. Buccellato - E. Tornatore, *On a mixed boundary value problem involving the p-Laplacian*, Matematiche (Catania) **66** (2011) , n. 1.

[3] G. Bonanno - G. Molica Bisci, *Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities*, *Bound. Value Probl.* **2009** (2009), 1-20.

[4] G. Bonanno - S. A. Marano, *On the structure of the critical set of non-differentiable functions with a weak compactness condition*, Appl. Anal. **89** (2010) n. 1, 1 – 10.

[5] G. Bonanno - E. Tornatore, *Infinitely many solutions for a mixed boundary value problem*, Ann. Polon. Math. **99** (2010) n. 3, 285–293.

Fabio Zanolin: Punti fissi per funzioni della corona circolare e applicazioni a sistemi piani non conservativi

Anna Pascoletti
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Fabio Zanolin
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
email: `fabio.zanolin@uniud.it`

Sunto. Si presentano alcuni risultati recenti che riguardano lo studio delle "twist maps" definite su insiemi piani omeomorfi ad una corona circolare (anello)

$$A := \{(x, y) \,|\, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}.$$

Un risultato classico in tale ambito è il teorema di Poincaré-Birkhoff che afferma l'esistenza di almeno due punti fissi per un omeomorfismo di A che preserva le aree e ruota la circonferenza interna e quella esterna di A in direzioni opposte. Tipiche applicazioni di tale teorema riguardano l'esistenza di soluzioni periodiche (armoniche e sub-armoniche) per sistemi Hamiltoniani piani a coefficienti periodici. Si presentano alcune recenti varianti di tale teorema che permettono di fornire applicazioni anche a sistemi piani non conservativi e che sono basate sull'esistenza di punti fissi che sono stabili per piccole perturbazioni. In tale direzione si esamineranno anche alcune possibili connessioni con il problema della biforcazione di orbite periodiche e l'esistenza di dinamiche caotiche.

Sezione 4 Calcolo delle variazioni, teoria del controllo e ottimizzazione

Fabio Bagagiolo: Su di un problema di visita ottima

Fabio Bagagiolo
Dipartimento di Matematica, Università di Trento
email: bagagiol@science.unitn.it

Sunto. In questa comunicazione si considera un problema di controllo ottimo che consiste nel minimizzare il tempo per raggiungere (visitare) un numero fissato di insiemi targets distinti, in particolare più di un target. Tale problema è ovviamente reminiscente del famoso problema del "commesso viaggiatore" e porta con sé tutte le sue difficoltà computazionali. Il nostro scopo è quello di applicare tecniche di programmazione dinamica per poter caratterizzare la funzione valore del problema come l'unica soluzione di viscosità di un'opportuna equazione di Hamilton-Jacobi. A tal fine introduciamo alcune "variabili esterne" (una per target) che, in un qualche senso, tengono in memoria il fatto se il corrispondente target sia già stato visitato oppure no. Trasformiamo poi il problema in un problema del tipo di Mayer per le nuove variabili estese. Questo permette di superare la difficoltà dovuta al fatto che per il problema iniziale non vale il Principio della Programmazione Dinamica. Le variabili esterne evolvono secondo un'opportuna legge di isteresi e l'equazione di Hamilton-Jacobi risulta essere discontinua.

I risultati qui riportati sono ottenuti in collaborazione con Michela Benetton.

Bibliografia

[1] F. Bagagiolo, M. Benetton: "About an optimal visiting problem", Preprint UTM 743 Matematica, University of Trento, 2010 (http://eprints.biblio.unitn.it/archive/00001963/).

Annalisa Baldi: Un approccio variazionale alle forme differenziali in gruppi di Carnot

Annalisa Baldi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: baldi@dm.unibo.it

Bruno Franchi
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Sunto. Recentemente M. Rumin, in una serie di lavori (si veda ad esempio [5]), ha sviluppato una teoria delle forme differenziali intrinseche in gruppi di Carnot, definendo un opportuno sottocomplesso del complesso di de Rham, e un operatore differenziale d_c che agisce tra queste classi, che sono, in senso opportuno, associate in modo naturale con la struttura di gruppo di Carnot.

L'operatore d_c è, in generale, un operatore differenziale di ordine più alto di 1 (ad esempio, quando d_c agisce sulle 1-forme intinseche nel primo gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ è un operatore di ordine 2). Questa proprietà può essere letta come la controparte, in termini di forme differenziali, del "gap" tra la dimensione omogenea del gruppo e la dimensione di $\mathbb{R}^n$ come varietà.

In un gruppo di Carnot libero di passo κ, sia le 1-forme differenziali intrinseche che il loro differenziale intrinseco d_c appaiono naturalmente come limiti di "usuali" differenziali riemanniani d_ε, $\varepsilon > 0$. Più in dettaglio, nel lavoro [1] proviamo che l'energia L^2 associata $\varepsilon^{-\kappa} d_\varepsilon$ sulle 1-forme Γ-converge all'energia associata al differenziale di Rumin d_c, per $\varepsilon \to 0$ e nel lavoro [2] estendiamo questo risultato e mostriamo che il funzionale dell'energia associato alle equazioni di Maxwell classiche in $\mathbb{R}^n$ Γ-converge all'energia associata ad un'equazione di Maxwell "intrinseca" in un gruppo di Carnot.

Bibliografia

[1] A. Baldi, B. Franchi: "Differential Forms in Carnot groups: a Γ-convergence approach", sottoposto per la pubblicazione o in Calculus of Variations and Partial Differential Equations, DOI: 10.1007/s00526-011-0409-8 (2011).

[2] A. Baldi, B. Franchi: "A variational approach to Maxwell's equations in Carnot groups", in preparazione.

[3] G. "An introduction to Γ-convergence", Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8, Birkhäuser Boston Inc. 1993.

[4] E. De Giorgi, T. Franzoni: "Su un tipo di convergenza variazionale", Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. vol. 58 (1975), no. (6), 842–850.

[5] M. Rumin: " Around heat decay on forms and relations of nilpotent Lie groups", Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 19, Année 2000–2001 (2001), 123–164.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto europeo EC: DICE

Luigi D'Onofrio: Mappe di Sobolev Anisotrope

Luigi D'Onofrio
Dipartimento di Statistica e Matematica per la Ricerca Economica, Università degli Studi di Napoli Parthenope
email: `luigi.donofrio@uniparthenope.it`

Sunto. Siano Ω e Ω' domini di $\mathbb{R}^2$ diremo che un omemorfismo $f\colon \Omega \xrightarrow{\text{onto}} \Omega'$ appartenente allo spazio $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ è un $W^{1,1}$-omeorfismo. Se anche l'inversa f^{-1} è un $W^{1,1}$-omeorfismo, diremo che f è una mappa bi-Sobolev. Per il Teorema di Gehring-Lehto osserviamo che un $W^{1,1}$-omeomorfismo è differenziabile q.o.. Adottando le notazioni:

$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ con$(x,y) \in \Omega f^{-1}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ con $(u,v) \in \Omega'$

allora f mappa bi-Sobolev equivale a richiedere che:

$$u_x, u_y, v_x, v_y \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \text{ e } x_u, x_v, y_u, y_v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega'). \tag{17}$$

In [2] e [3] è contenuto il seguente risultato per le mappe bi-Sobolev:

Teorema 7. *Se $f\colon \Omega \xrightarrow{onto} \Omega'$ è una mappa bi-Sobolev, allora*

$$\int_\Omega |Df|\, dz = \int_{\Omega'} \left|Df^{-1}\right| dw. \tag{18}$$

Nello stesso spirito in [1], lavoro in collaborazione con Patrizia Di Gironimo, Carlo Sbordone e Roberta Schiattarella, abbiamo dimostrato alcune identità per mappe che appartengono a $W^{1,1}$. Più precisamente

Teorema 8. *Sia $f = (u,v)\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{onto} \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ un omeomorfismo la cui inversa è $f^{-1} = (x,y)$. Se $u, v \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$, allora $x, y \in \mathrm{BV}_{\text{loc}}(\Omega')$ e*

$$|\nabla y|\,(\Omega') = \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x}(z)\right| dz \tag{19}$$

$$|\nabla x|\,(\Omega') = \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right| dz. \tag{20}$$

Bibliografia

[1] P. De Gironimo, L. D'Onofrio, C. Sbordone, R. Schiattarella: *Anisotropic Sobolev Homeomorphisms* accettato per la pubblicazione su Annales Academiae Scientiarum Fennicae.

[2] S. Hencl, P. Koskela: *Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism*, Arch. Ration. Mech. Anal. 180, 2006, 75-95.

[3] S. Hencl, G. Moscariello, A. Passarelli di Napoli, C. Sbordone: *Bi-Sobolev mappings and elliptic equations in the plane*, J. Math. Anal. Appl. 355, 2009, 22-32.

Roberta De Asmundis: Modelli matematici per l'apprendimento supervisionato con applicazione alla classificazione incrementale

Roberta De Asmundis
Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistica Applicata, Università "La Sapienza" di Roma
email: robertadeasmundis@gmail.com

Mario Rosario Guarracino
Istituto di Calcolo e Reti ad Alte Prestazioni, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Napoli

Gerardo Toraldo
Dipartimento di Ingegneria Agraria e Agronomia del Territorio, Università "Federico II" di Napoli

Sunto. I modelli di apprendimento supervisionato per la classificazione di dati sono applicabili in molti campi scientifici e tecnologici, tra i quali l'economia, l'ingegneria e la medicina. Tra i vari algoritmi per l'apprendimento supervisionato ci sono le così dette Support Vector Machines (SVM) [1], che presentano a loro vantaggio delle performance accurate e tempi di addestramento molto brevi. Le SVM si basano sulla teoria dell'apprendimento statistico e forniscono una soluzione ad un problema di classificazione mediante la risoluzione di un problema di ottimizzazione quadratica vincolato. Esse sono inoltre applicabili a problemi in cui i dati non sono linearmente separabili attraverso l'uso di funzioni kernel.

Una delle principali limitazioni delle SVM risiede nella gestione di set di dati soggetti a modifiche nel tempo; le tecniche attualmente in uso non sono in grado di gestire dinamicamente tali modifiche per le quali è necessario ripetere da capo il processo di apprendimento. E' chiara la necessità di usare tecniche capaci di estrarre il nuovo contenuto informativo derivante da un eventuale upgrade dei dati. A tale riguardo è di interesse l'utilizzo di modelli incrementali [2,3] i quali saranno oggetto di questa comunicazione sia dal punto di vista teorico che da quello applicativo.

Bibliografia

[1] V. Vapnik: "The Nature of Statistical Learning Theory", Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] B. Schölop, A. J. Smola: "Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond", MIT Press, Cambridge MA, 2001.

[3] C. Cifarelli, M. R. Guarracino, O. Seref, S. Cuciniello, P. M. Pardalos: "Incremental Classification with Generalized Eigenvalues", Journal of Classification, 2007.

Giuseppe Floridia: Controllabilità moltiplicativa approssimata di equazioni paraboliche degeneri con applicazioni alla climatologia

Piermarco Cannarsa
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"

Giuseppe Floridia[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania
email: `floridia@dmi.unict.it`

Sunto. In questa comunicazione siamo interessati allo studio delle proprietà di controllabilità del problema non-lineare di Cauchy-Neumann

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x = \alpha(t,x)u + f(t,x,u) & \text{in} \quad Q_T = (0,T)\times(-1,1) \\ a(x)u_x(t,x)|_{x=\pm 1} = 0 & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (-1,1)\ , \end{cases}$$

con controlli bilineari $\alpha(t,x) \in L^\infty(Q_T)$, dato iniziale $u_0 \in L^2(-1,1)$ e con $f(t,x,u)$ funzione di Carathéodory su $Q_T \times \mathbb{R}$ con andamento superlineare in u. Il problema è fortemente degenere, nel senso che il coefficiente di diffusione $a \in C^1([-1,1])$, a è positivo su $(-1,1)$ e si annulla in ± 1; inoltre $\frac{1}{a}$ è supposto ammettere primitive integrabili in $(-1,1)$. Si può osservare che nel caso particolare in cui $a(x) = 1 - x^2$, la parte principale dell'operatore del precedente problema coincide con quella del modello climatologico unidimensionale di Budyko-Sellers. Recentemente abbiamo ottenuto risultati che garantiscono la globale non negativa controllabilità approssimata del sistema. È stato quindi provato che il precedente sistema può essere portato in $L^2(-1,1)$ da un qualsiasi stato iniziale non nullo e non negativo in un qualsiasi intorno di un qualunque stato finale (target-state) non negativo, mediante controlli bilineari statici. Inoltre, il precedente risultato è stato esteso rilassando la condizione di segno sullo stato iniziale u_0.

Parole chiave: controllabilità approssimata, equazioni paraboliche degeneri, controllo bilineare

AMS classificazione: 35K65, 93B05, 34B24

Bibliografia

[1] P. Cannarsa, G. Floridia: "Approximate controllability for linear degenerate parabolic problems with bilinear control", preprint.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del GDRE CONEDP. Gli autori ringraziano l'Institut Henri Poincaré (Parigi, Francia) per aver fornito un'ambiente molto stimolante durante il trimestre intensivo "Control of Partial and Differential Equations and Applications" (Ottobre-Dicembre 2010).

Nunzia Gavitone: La disuguaglianza isoperimetrica relativa nel piano: il caso anisotropo

Francesco Della Pietra
Dipartimento S.A.V.A., Università degli studi del Molise

Nunzia Gavitone
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" Università degli studi di Napoli "Federico II"
email: nunzia.gavitone@unina.it

Sunto. Sia Ω un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^2$, con frontiera Lipschitziana. La classica disuguaglianza isoperimetrica relativa afferma che per ogni insieme misurabile $E \subseteq \Omega$

$$P^2(E;\Omega) \geq C \min\{|E|, |\Omega \setminus E|\}, \tag{P}$$

dove $|E|$ denota la misura di Lebesgue di E e $P(E;\Omega)$ è l'usuale perimetro di E relativo a Ω. Alcuni problemi naturali collegati a (P) sono quelli di determinare la costante ottimale $C(\Omega)$, provare che essa è assunta e caratterizzare i minimi. Se Ω è un cerchio, in [V.G. Maz'ja, Springer, 1985] è provato che $C(\Omega) = 8/\pi$ ed è assunta sui semicerchi. Più in generale, in [A. Cianchi, B.U.M.I., 1989] è provato che se Ω è convesso, $C(\Omega)$ è assunta ed esiste un minimo convesso di misura $|\Omega|/2$; inoltre ogni minimo E è tale che $\partial E \cap \Omega$ è un arco di circonferenza o un segmento ortogonale a $\partial\Omega$. In [1] abbiamo generalizzato tali risultati quando in (P) si considera un perimetro "anisotropo", definito per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ con frontiera regolare come $P_H(E;\Omega) = \int_{\partial E \cap \Omega} H(\nu_E) d\mathcal{H}^1$, dove H è una norma in $\mathbb{R}^2$ e ν_E è la normale esterna a ∂E. Sotto opportune ipotesi su H in [1] abbiamo provato una disuguaglianza tipo (P) per il perimetro anisotropo. Inoltre, denotando con $C_H(\Omega)$ la migliore costante, e ricordando che il Wulff shape è l'insieme $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon H^o(x,y) < 1\}$, dove H^o è la polare di H, i risultati ottenuti possono essere riassunti nel seguente

Teorema. *Sia Ω una aperto limitato e convesso del piano. Allora $C_H(\Omega)$ è un minimo, esiste un minimo convesso con misura uguale a $|\Omega|/2$ e ogni altro minimo E ha le seguenti proprietà:*
(a) *$\partial E \cap \Omega$ è omotetico a un arco di Wulff (ossia un arco di ∂W) o è un segmento e né E né $\Omega \setminus E$ sono omotetici al Wulff shape;*
(b) *Sia T uno dei punti terminali di $\partial E \cap \Omega$. Allora T è un punto regolare per $\partial\Omega$ e in T vale la condizione d'angolo $\langle DH(\nu_E), \nu_\Omega \rangle = 0$;*
(c) *Se $|E| < |\Omega|/2$, allora E è omotetico a un settore di Wulff avente lati su $\partial\Omega$. In tal caso è possibile determinare un altro minimo F che è ancora un settore di Wulff avente lati su $\partial\Omega$ ma che ha misura uguale a $|\Omega|/2$.*

Bibliografia

[1] F. Della Pietra, N. Gavitone: preprint (2011), sottoposto per la pubblicazione.

Luca Lussardi: Sui limiti di perimetri non locali

Luca Lussardi
Fakultät für Mathematik,Technische Universität Dortmund
email: `luca.lussardi@math.tu-dortmund.de`

Sunto. Lo scopo di questo seminario è quello di presentare un risultato raggiunto in collaborazione con Antonin Chambolle (École Polytechnique, France) e Alessandro Giacomini (Università di Brescia) circa lo studio asintotico di perimetri discreti non locali mediante Γ-convergenza: tali problemi hanno notevole interesse in segmentazione e ricostruzione delle immagini. Più precisamente, ci siamo occupati di funzionali del tipo

$$J_h(u,\Omega) := \begin{cases} h^{N-1} \displaystyle\sum_{x\in I^h(\Omega)\cap h\mathbb{Z}^N} F(u[x+h\Sigma]) & \text{if } u \in V_h(\Omega) \\ +\infty & \text{if } u \in L^1(\Omega)\setminus V_h(\Omega), \end{cases}$$

essendo $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ un insieme finito fissato, $I^h(\Omega)$ l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}^N$ tali che $x+h\Sigma \subset \Omega$, $u[x+h\Sigma]$ è il vettore $(u(x+hy)_{y\in\Sigma})$ di $\mathbb{R}^\Sigma$, $F : \{0,1\}^\Sigma \to [0,+\infty)$ è non-negativa, sottomodulare ed estesa per coarea a tutto $\mathbb{R}^\Sigma$ e V_h è lo spazio delle funzioni $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ costanti a tratti su una quadrettatura di passo h.

Si dimostra in [1] il seguente Teorema:

Teorema. *La famiglia $(J_h)_{h>0}$, Γ-converge, per $h \to 0$, nella topologia forte di $L^1(\Omega)$, al funzionale*

$$J(u,\Omega) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega F\left(\frac{Du}{|Du|}\cdot\Sigma\right) d|Du| & \textit{se } u \in BV(\Omega) \\ +\infty & \textit{se } u \in L^1(\Omega)\setminus BV(\Omega), \end{cases} \tag{21}$$

dove per ogni $u \in BV(\Omega)$ la funzione $Du/|Du|$ rappresenta la derivata di Radon-Nikodym di Du rispetto alla sua variazione torale $|Du|$. In particolare

$$J(\chi_E,\Omega) = \int_{\partial^* E\cap\Omega} F(\nu_E\cdot\Sigma)\, d\mathcal{H}^{N-1}$$

per ogni insieme E di perimetro finito in Ω.

Bibliografia

[1] A. Chambolle, A. Giacomini and L. Lussardi: "Continuous limits of discrete perimeters". M2AN Math. Model. Numer. Anal. **44** (2) (2010) 207-230.

Daniele Morbidelli: Disuguaglianza di Poincaré per famiglie s-involutive di campi vettoriali

Annamaria Montanari
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Daniele Morbidelli
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: `daniele.morbidelli@unibo.it`

Sunto. Data una famiglia $\mathcal{H} = \{X_1, \dots, X_m\}$ di campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$, ci domandiamo sotto quali condizioni sia possibile descrivere la struttura delle palle della distanza di Carnot–Carathéodory ad essi associate e provare una disuguaglianza di Poincaré. Il caso più noto è quello in cui i campi soddisfano la condizione di Hörmander di passo s. In questa comunicazione, ispirandoci al recente lavoro [2] e utilizzando i risultati ottenuti in [1], mostriamo che la condizione di Hörmander può essere sostituita con la seguente ipotesi di "s-involutività".

Condizione $\mathcal{B}_s$ Sia $s \in \mathbb{N}$. Diciamo che una famiglia $\mathcal{H}$ soddisfa la condizione $\mathcal{B}_s$ se i campi sono di classe C^s e se, indicato con $\{Y_1, \dots, Y_q\}$ l'insieme dei commutatori di lunghezza $\leq s$, esistono funzioni $c_{ij}^k \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tali che per ogni $i, j \in \{1, \dots, q\}$ si possa scrivere

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{1 \leq k \leq q} c_{ij}^k Y_k.$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $\mathcal{O}^{x_0}$ l'insieme dei punti raggiungibili a partire da x_0 attraverso cammini che siano a tratti curve integrali dei campi, definiamo $p := \dim(\operatorname{span}\{Y_j(x_0) : j \in \{1, \dots, q\}\})$ e indichiamo con σ^p la misura p-dimensionale.

Teorema. *Se $\mathcal{H}$ è una famiglia di classe $\mathcal{B}_s$ per qualche $s \in \mathbb{N}$ allora:*

(1) *ogni orbita $\mathcal{O}^{x_0}$ dei campi è una sottovarietà ("immersed" submanifold) di classe C^2 di $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti i punti che hanno distanza di Carnot–Carathéodory finita da x_0;*

(2) *per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esistono $C > 0$ e $r_0 > 0$ tali che:*

$$\sigma^p(B(x, 2r)) \leq C\sigma^p(B(x, r)) \quad \textit{per ogni } x \in K \cap \mathcal{O}^{x_0} \quad r \leq r_0$$

$$\int_{B(x,r)} |u - u_B| \, \mathrm{d}\sigma^p \leq C \int_{B(x,Cr)} \sum_j |X_j u| \, \mathrm{d}\sigma^p \quad \textit{per ogni } x \in K \cap \mathcal{O}^{x_0} \quad u \in C^1.$$

Bibliografia

[1] A. Montanari, D. Morbidelli : "Nonsmooth Hörmander vector fields and their control balls", Trans. Amer. Math. Soc. (in stampa).

[2] B. Street: "Multi-parameter Carnot–Carathéodory balls and the theorem of Frobenius", Rev. Mat. Iberoam. (in stampa).

Elvira Zappale: Riduzione di dimensione per funzionali supremali

Jean François Babadajian
Université Pierre et Marie Curie – Paris 6, CNRS, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris, F-75005 France

Francesca Prinari
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Elvira Zappale[1]
Dipartimento di Ingegneria Elettronica ed Ingegneria Informatica, Università di Salerno
email: `ezappale@unisa.it`

Sunto. Facendo uso della Γ^*-convergenza, si è ottenuto un risultato di riduzione dimensionale da 3 a 2 dimensioni, per funzionali supremali. Si dimostra che il funzionale limite ammette una rappresentazione supremale e si fornisce una rappresentazione esplicita della sua densità in casi particolari. I risultati sono stati ottenuti a partire da un teorema astratto di rappresentazione supremale per Γ^*-limiti di famiglie di funzionali supremali.

Bibliografia

[1] J-F. Babadjian, F. Prinari, E. Zappale: "Dimensional reduction for supremal functionals", DCDS-A, sottoposto per la pubblicazione.

[2] P. Cardaliaguet, F. Prinari, non pubblicato.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Progetto GNAMPA 2009 coordinato dal professore Luigi De Pascale

Sezione 5 Analisi reale

Laura Angeloni: Su un nuovo concetto di variazione multidimensionale e alcuni risultati di convergenza

Laura Angeloni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia
email: angeloni@dmi.unipg.it

Gianluca Vinti
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia

Sunto. Un'importante estensione del concetto classico di variazione è la $\varphi-$variazione introdotta da L.C. Young e ampiamente studiata da J. Musielak e W. Orlicz ([4]) per funzioni $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. In [3] è stata fornita una nuova definizione di $\varphi-$variazione in assetto multidimensionale, ispirata all'approccio di L. Tonelli e C. Vinti. Utilizzando tale concetto di $\varphi-$variazione, sono stati ottenuti risultati di convergenza per una famiglia di operatori integrali lineari della forma

$$(T_w f)(\mathtt{s}) = \int_{\mathbb{R}^N} K_w(\mathtt{t}) f(\mathtt{s} - \mathtt{t})\, d\mathtt{t}, \quad w > 0, \quad \mathtt{s} \in \mathbb{R}^N,$$

dove $\{K_w\}_{w>0}$ è un'identità approssimata e $f \in BV^\varphi(\mathbb{R}^N)$, dove $BV^\varphi(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N) : \exists \lambda > 0 \text{ t.c. } V^\varphi[\lambda f] < +\infty\}$ indica lo spazio delle funzioni a $\varphi-$variazione limitata in $\mathbb{R}^N$. Utilizzando una caratterizzazione del modulo di continuità nel caso multidimensionale ([1]), il principale risultato di convergenza ottenuto dimostra che

$$\lim_{w \to +\infty} V^\varphi[\mu(T_w f - f)] = 0$$

per qualche $\mu > 0$, se f è $\varphi-$assolutamente continua. Sono stati anche forniti risultati sull'ordine di approssimazione e, nel caso di nuclei di tipo Fejér, risultati che migliorano la velocità di convergenza. In [2] tutta la teoria è stata estesa al caso di operatori integrali nonlineari.

Bibliografia

[1] L. Angeloni, "A characterization of a modulus of smoothness in multidimensional setting", Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie IX, **4**(1) (2011), 79–108.

[2] L. Angeloni, "Approximation results with respect to multidimensional φ-variation for nonlinear integral operators", preprint (2011).

[3] L. Angeloni, G. Vinti, "Convergence and rate of approximation for linear integral operators in $BV^\varphi-$spaces in multidimensional setting", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **349**(2) (2009), 317–334.

[4] J. Musielak, W. Orlicz, "On generalized variations (I)", Studia Math., **18** (1959), 11–41.

Giuseppina Barbieri: Il teorema di Dieudonné

Giuseppina Barbieri
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
email: giuseppina.barbieri@uniud.it

Sunto. La comunicazione riguarda una generalizzazione dei teoremi di Dieudonné.

Un famoso teorema di Dieudonné asserisce che per spazi metrici compatti la limitatezza sugli aperti di una famiglia di misure di Borel regolari implica l'uniforme limitatezza su tutti gli insiemi di Borel. Questo teorema è stato esteso a spazi localmente compatti e successivamente a spazi di Hausdorff regolari. È da osservare come questo teorema generalizzi il teorema di uniforme limitatezza dovuto a Nikodym per misure a valori reali.

Sempre Dieudonné nel 1951 provò: "Se una successione di misure regolari di Borel a valori in uno spazio metrico compatto converge sugli aperti, allora converge ovunque. In questo caso, la successione è uniformemente regolare".

Questo teorema generalizza il teorema di Nikodym secondo cui una successione di misure di Borel converge a una misura di Borel: basta sostituire la puntuale convergenza con l'analoga condizione sugli aperti purché una ipotesi di regolarità e una condizione topologica sul codominio vengano soddisfatte.

Entrambe le versioni dei teoremi di Dieudonné (quello relativo alla convergenza e l'altro relativo alla limitatezza) vengono estese a misure definite su strutture che generalizzano le algebre booleane.

Loredana Biacino: Densità del grafico di una funzione hölderiana

Loredana Biacino
D.M.A. "R.Caccioppoli", Università di Napoli Federico II
email: `loredana.biacino2@unina.it`

Sunto. Dati $E \subseteq R^k$, $P \in R^k$ e $s > 0$, si chiamano *densità superiore* e *densità inferiore s-dimensionali di E in P* i due numeri: $\overline{D^s}(E,P) = \overline{lim}_{r\to 0}(2r)^{-s}H^s(E \bigcap B_r(P))$ e $\underline{D^s}(E,P) = \underline{lim}_{r\to 0}(2r)^{-s}H^s(E \bigcap B_r(P))$, dove H^s denota la misura di Hausdorff s-dimensionale e $B_r(P) \subseteq R^k$ la sfera di centro P e raggio $r > 0$. Se i due valori precedenti coincidono, il loro valore comune è detto *densità* di E in P ed è denotato con $D^s(E,P)$. Se le densità sono definite relativamente alla packing measure ristretta ad un insieme $E : P^s \lfloor E(F) = P^s(E \bigcap F)$ per ogni $F \subseteq R^k$, sono indicate con i simboli $\Theta^{s*}(P^s \lfloor E, P)$ e $\Theta^s_*(P^s \lfloor E, P)$. Nella presente comunicazione si studiano in generale i due tipi di densità precedenti relativamente a diagrammi, G, di funzioni holderiane e li si collega al comportamento locale della funzione. Per questo tipo di indagine è di notevole interesse la seguente definizione. *Dato* $0 < \alpha \leq 1$, *una funzione* $f : [a,b] \to R$ *che sia* α*-holderiana (per cui cioè esista* $M > 0$ *per cui risulti:* $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$ *per ogni* x *e* $y \in [a,b]$*), è detta uniformemente essenzialmente* α*-Holderiana se esistono* $\lambda > 0$*, una successione decrescente infinitesima di numeri positivi* $(\delta_n)_{n\in N}$ *ed una successione crescente di insiemi* $(E_n)_{n\in N}$*, dove* $E_n = x_0^n, ..., x_{i_n}^n$, $\delta_n = x_j^n - x_{j-1}^n, j = 1, ..., i_n$*, tali che* $\omega(\delta_n, f, x) \geq \lambda\delta_n^\alpha$, essendo, per ogni $\delta > 0$, $\omega(\delta, f, x) = sup|f(x') - f(x")| : |x - x'| < \delta, |x - x"| < \delta$. Sarà dimostrato il seguente teorema:

Teorema. *Sia* $f : [a,b] \to R$ *una funzione* α*-holderiana,* $0 < \alpha < 1$, $x_0 \in]a,b[$, $P = (x_0, f(x_0))$, *e sia*

$$\underline{lim}_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} > 0,$$

oppure $ord_{x\to x_0}|f(x) - f(x_0)| > \alpha$ *ma minore di* $\frac{1}{2-\alpha}$, *allora*

$$D^{2-\alpha}(G,P) = 0.$$

Se poi f *è uniformemente essenzialmente* α*-holderiana e se* $ord_{x\to x_0}|f(x) - f(x_0)| > \frac{1}{2-\alpha}$ *allora*

$$\Theta^{2-\alpha}(P^{2-\alpha}_{\lfloor G}, P) = +\infty,$$

mentre se $ord|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{2-\alpha}$ *allora si ha:*

$$0 < \Theta^{2-\alpha}_*(P^{2-\alpha}_{\lfloor G}, P); \overline{D^{2-\alpha}}(G,P) < +\infty.$$

Bibliografia

[1] L.Biacino: "Density and tangential properties of the graph of Holder functions", Bollettino U.M.I., (9), III (2010), 493-503.

Ingrid Carbone: Successioni di punti uniformemente distribuiti in $[0,1]$ aventi bassa discrepanza

Ingrid Carbone
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
email: `i.carbone@unical.it`

Sunto. Se ρ denota una qualsiasi partizione dell'intervallo $[0,1]$, attraverso successivi ρ-raffinamenti della partizione banale di [0,1] si ottiene una famiglia di successioni di partizioni uniformemente distribuite su $[0,1]$, denotate con $\{\rho^n\}$. Tali successioni sono state introdotte e studiate in [3] e rappresentano una generalizzazione del procedimento di suddivisione alla Kakutani [2].

In [1] abbiamo considerato una classe particolare di ρ-raffinamenti.

Definizione. Fissiamo due interi positivi L e S e consideriamo il numero reale $0 < \beta < 1$ tale che $L\beta + S\beta^2 = 1$. Denotiamo con $\rho_{L,S}$ la partizione determinata da L intervalli "lunghi" di lunghezza β, e da S intervalli "corti" di lunghezza β^2. Chiamiamo *successione di partizioni di tipo LS* la successione $\{\rho^n_{L,S}\}$ dei successivi $\rho_{L,S}$-raffinamenti della partizione banale di $[0,1]$.

Ad ogni successione di tipo LS associamo, tramite esplicito algoritmo, una successione di punti $\{\xi^n_{L,S}\}$ uniformemente distribuita nell'intervallo $[0,1]$, che chiamiamo *successione di punti di tipo LS* e ne stimiamo la discrepanza.

Teorema. *i) Se $S < L+1$ esiste $k_1 > 0$ tale che $D(\{\xi^1_{L,S}, \xi^2_{L,S}, \dots, \xi^N_{L,S}\}) \leq k_1 \frac{\log N}{N}$ per ogni $N \in I\!N$*

ii) Se $S = L+1$ esiste $k_2 > 0$ tale che $D(\{\xi^1_{L,S}, \xi^2_{L,S}, \dots, \xi^N_{L,S}\}) \leq k_2 \frac{\log^2 N}{N}$ per ogni $N \in I\!N$

iii) Se $S > L+1$ esiste $k_3 > 0$ tale che $D(\{\xi^1_{L,S}, \xi^2_{L,S}, \dots, \xi^N_{L,S}\}) \leq k_3 \frac{\log N}{N^\gamma}$ per ogni $N \in I\!N$, dove $\gamma = 1 + \frac{\log(S\beta)}{\log \beta} < 1$.

Bibliografia

[1] I.Carbone, Discrepancy of LS sequences of partitions and points, in corso di stampa in *Annali Mat. Pura Appl.*

[2] S. Kakutani, A problem on equidistribution on the unit interval $[0,1[$, *Measure theory (Proc. Conf., Oberwolfach, 1975)*, pp. 369–375. *Lecture Notes in Math.* **541**, Springer, Berlin, 1976.

[3] A. Volčič, A generalization of Kakutani's splitting procedure. *Annali Mat. Pura e Appl.*, Nuova Serie **190** (2011), no. 1, 45-54.

Danilo Costarelli: Operatori Sampling-Kantorovich multidimensionali e applicazioni all'Image Processing

Danilo Costarelli
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma Tre
email: `costarel@mat.uniroma3.it`

Gianluca Vinti
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia

Sunto. In [3] vengono presentati alcuni risultati di approssimazione per funzioni di piú variabili mediante operatori di tipo Sampling-Kantorovich ed alcune applicazioni relative al trattamento delle immagini. Gli operatori presi in considerazione, estendono al caso multidimensionale quelli studiati in [1] e sono della forma:

$$(S_w^\chi f)(\underline{x}) \;=\; \sum_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \chi(w\underline{x}-t_{\underline{k}}) \left[\frac{w^n}{A_{\underline{k}}}\int_{R_{\underline{k}}^w} f(\underline{u})\; d\underline{u}\right] \qquad (\underline{x}\in\mathbb{R}^n,\; w>0), \qquad \text{(I)}$$

dove $\chi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è un nucleo soddisfacente opportune ipotesi, $t_{\underline{k}}=(t_{k_1},...,t_{k_n})$ è tale che $(t_{k_i})_{k_i\in\mathbb{Z}}$, $i=1,2,...,n$, è una opportuna successione di numeri reali strettamente crescente e dove $A_{\underline{k}}=\Delta_{k_1}\cdot\Delta_{k_2}\cdot...\cdot\Delta_{k_n}$ con $\Delta_{k_i}=t_{k_i+1}-t_{k_i}$, $i=1,2,...,n$. Inoltre

$$R_{\underline{k}}^w \;=\; \left[\frac{t_{k_1}}{w},\frac{t_{k_1+1}}{w}\right]\times\left[\frac{t_{k_2}}{w},\frac{t_{k_2+1}}{w}\right]\times...\times\left[\frac{t_{k_n}}{w},\frac{t_{k_n+1}}{w}\right] \qquad (w>0).$$

Infine $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è una funzione localmente integrabile tale che la serie (I) risulti convergente per ogni $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$. La forma multidimensionale di tali operatori li rende adatti per lo studio e la loro applicazione al caso dell'elaborazione delle immagini. I principali risultati ottenuti riguardano sia la convergenza puntuale e uniforme che la convergenza modulare per le famiglie $(S_w^\chi f)_{w>0}$, dove f appartiene ad uno spazio di Orlicz ([2]). L'approccio trattato permette di ricoprire i casi particolari degli spazi L^p, gli spazi di Zygmund e gli spazi di tipo esponenziale a cui la teoria è applicabile.

Bibliografia

[1] C. Bardaro - P.L. Butzer - R.L. Stens - G. Vinti, *Kantorovich-Type Generalized Sampling Series in the Setting of Orlicz Spaces*, Sampling Theory in Signal and Image Processing, **6** No. 1 (2007), 29-52.

[2] C. Bardaro - J. Musielak - G. Vinti, *Nonlinear Integral Operators and Applications,* De Gruyter Series in Nonlin. Anal. and Appl. **9**, 2003.

[3] D. Costarelli - G. Vinti, *Approximation by Multivariate Generalized Sampling Kantorovich Operators in the Setting of Orlicz Spaces*, in corso di stampa in B.U.M.I. special volume dedicated to Prof. Giovanni Prodi.

Margherita Fochi: Equazioni funzionali su dominio ristretto negli spazi normati

Gabriella Viola
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Margherita Fochi
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
email: `margherita.fochi@unito.it`

Sunto. Sia X uno spazio normato con $\dim(X) > 2$ e $f : X \to \mathbb{R}$ un funzionale reale. Prendendo spunto dai lavori di Gy. Szabò riguardanti l'equazione funzionale di Cauchy condizionata sui vettori con norma uguale, cioè l'equazione

$$\|x\| = \|y\| \quad \Rightarrow \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

ci siamo proposte di proseguire in tale studio e considerare l'equazione quadratica e l'equazione di d'Alembert su tale dominio ristretto.

Precisamente, si considerano le equazioni

$$\|x\| = \|y\| \quad \Rightarrow \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y),$$

e

$$\|x\| = \|y\| \quad \Rightarrow \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Viene provata l'equivalenza fra le precedenti equazioni e le corrispondenti equazioni richieste valide in tutto lo spazio utilizzando, nelle dimostrazioni, alcuni vettori la cui esistenza è garantita in particolari spazi normati.

Vengono infine segnalati problemi aperti riguardanti la struttura degli spazi normati coinvolti e la caratterizzazione degli spazi con prodotto interno utilizzando le equazioni funzionali su dominio ristretto.

Bibliografia

[1] J. Rätz: "On orthogonally additive mappings", Aequationes Mathematicae, 28, (1985), 35-49.

[2] Gy. Szabò: "A conditional Cauchy equation on normed spaces", Publicationes Math. Debrecen, 42, (1993), 265-271.

[3] Gy. Szabò: "Isosceles orthogonally additive mappings and inner product spaces", Publicationes Math. Debrecen, 46, (1995), 373-384.

Maria Infusino: Discrepanza di successioni di Kakutani generalizzate

Maria Infusino
Department of Mathematics, University of Reading
email: infusino@mat.unical.it

Sunto. Il concetto di successione di partizioni uniformemente distribuite (u.d.) fu introdotto nel 1976 da Kakutani, che propose una tecnica per costruire un'ampia classe di successioni di partizioni u.d. dell'intervallo unitario [2]. Tale procedura è stata recentemente generalizzata tramite il concetto di $\rho-$raffinamento di una partizione, che consente di ottenere nuove famiglie di successioni di partizioni u.d. al variare della partizione ρ fissata inizialmente [3].

Il problema che si pone in maniera naturale è stimare il comportamento asintotico della discrepanza delle successioni ottenute tramite $\rho-$raffinamenti successivi e in particolare delle successioni di Kakutani. In questa comunicazione viene presentato un nuovo approccio a tale problema, basato su una rappresentazione ad albero dei $\rho-$raffinamenti successivi che produce lo stesso albero costruito secondo l'algoritmo di Khodak. Questa corrispondenza tra i due algoritmi consente di ricavare stime della discrepanza delle successioni generate dai successivi $\rho-$raffinamenti dell'intervallo unitario, quando ρ è una partizione costituita da m intervalli di lunghezza $p_1, \ldots, p_m$ tali che $\log(1/p_1), \ldots, \log(1/p_m)$ siano razionalmente correlati. Questo caso include una classe numerabile di successioni di Kakutani classiche, per la quale si hanno dunque stime della discrepanza finora non presenti in letteratura.

Per quanto concerne il caso irrazionale, cioè quando almeno uno dei rapporti $(\log p_i)/(\log p_j)$ non è razionale, le stime della discrepanza ottenute sono più deboli in quanto dipendono fortemente dalle proprietà di approssimazione diofantea dei rapporti irrazionali (cfr. [1]).

Bibliografia

[1] M. Drmota, M. Infusino: "On the discrepancy of some generalized Kakutani's sequences of partitions", sottoposto per la pubblicazione.

[2] S. Kakutani, "A problem of equidistribution on the unit interval $[0, 1]$", Measure theory (Proc. Conf. Oberwolfach 1975), Springer LNM, vol. 541: 369–375, 1976.

[3] A. Volčič, "A generalization of Kakutani's splitting procedure", Annali di Mat. Pura e Appl., vol. 190 (no.1): 45–54, 2011.

Ilaria Mantellini: Formule asintotiche per operatori di convoluzione alla Mellin

Ilaria Mantellini
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
email: `mantell@dmi.unipg.it`

Sunto. Gli operatori di convoluzione alla Mellin hanno grande importanza nella teoria della trasformata di Mellin e nelle sue applicazioni, giocando lo stesso ruolo dei classici operatori di convoluzione nell'analisi di Fourier. Gli operatori sono del tipo

$$(T_w f)(s) = \int_0^{+\infty} K_w(t) f(ts) \frac{dt}{t},$$

con $\{K_w\}$ opportuna famiglia di nuclei.

Nel classico lavoro [5] viene ampiamente trattato lo studio della convergenza in L^p e delle applicazioni alla trasformata di Mellin.

Usando le nozioni di derivata alla Mellin e di momento logaritmico, si ottengono formule asintotiche alla Voronovskaja per la convergenza puntuale e stime quantitative per operatori del tipo di Mellin-Fejer (ad esempio Mellin-Gauss-Weierstrass, momento, Mellin-Poisson-Cauchy) e alcuni tipi di operatori alla Mellin-Picard (vedi [1], [2] e [3]).

Nella formula di Voronovskaja la funzione $f \in C^2$ e l'ordine di approssimazione puntuale non supera $\mathcal{O}(w^{-2})$ anche se esistono le derivate di Mellin di ordine superiore. Questo fatto dipende essenzialmente dal Teorema di Korovkin per operatori positivi. Per migliorare l'ordine di approssimazione si considerano quindi opportune combinazioni lineari.

Inoltre, per la classe di operatori di Mellin-Fejer si studiano anche espansioni asintotiche, seguendo classici risultati ottenuti in [4].

Bibliografia

[1] C. Bardaro-I. Mantellini: "A quantitative Voronovskaja formula for Mellin convolution operators", Mediterr. J. Math. 7(4) (2010) 483-501.

[2] C. Bardaro-I. Mantellini: "Asymptotic behaviour of Mellin-Fejer convolution operators", sottoposto per la pubblicazione, 2011.

[3] I. Mantellini: "On the asymptotic behaviour of linear combinations of Mellin-Picard type operators", sottoposto per la pubblicazione, 2011.

[4] P.L. Butzer: "Representation and approximation of functions by general singular integrals. IA, IB", Indag. Math. 22, (1960), 1-24.

[5] P.L. Butzer-S. Jansche: "A direct approach to the Mellin transform", J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997) 325-375.

Calogero Vetro: Sulle condizioni contrattive di tipo integrale

Calogero Vetro[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo
email: cvetro@math.unipa.it

Sunto. A partire da un classico teorema di esistenza ed unicità di punto fisso per una funzione che soddisfa una condizione contrattiva di tipo integrale, presenteremo alcuni recenti risultati nell'ambito degli spazi metrici completi. Procederemo indebolendo la condizione contrattiva, lavorando con una o due coppie di funzioni e considerando anche spazi parzialmente ordinati. Se necessario, le funzioni saranno supposte esplicitamente continue. Ogni altra proprietà aggiuntiva verrà opportunamente discussa.

Bibliografia

[1] A. Branciari: "A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type", Int. J. Math. Math. Sci., 29 (2002), 531–536.

[2] B. Samet: "A fixed point theorem in a generalized metric space for mappings satisfying a contractive condition of integral type", Int. Journal of Math. Analysis, 3 (2009), 1265–1271.

[3] B. Samet and C. Vetro: "An integral version of Ćirić's fixed point theorem", Mediterr. J. Math., doi:10.1007/s00009-011-0120-1.

[4] C. Vetro: "On Branciari's theorem for weakly compatible mappings", Appl. Math. Lett., 23 (2010), 700–705.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di progetto di Ateneo ex 60 &, Università degli Studi di Palermo.

Gianluca Vinti: Un approccio unificante per la convergenza di operatori lineari di tipo "sampling"

Gianluca Vinti
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia
email: mategian@unipg.it

Luca Zampogni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia

Sunto. In [4] viene fornito un approccio unificante per lo studio della convergenza di una famiglia generale di operatori lineari di tipo "sampling" che include, come casi particolari, diversi operatori molto utilizzati nella teoria della ricostruzione dei segnali. L'importanza di questo approccio consiste nella possibilità di studiare la convergenza sia per gli operatori di tipo sampling ([1]), che per gli operatori di tipo sampling-Kantorovich ([2]), oltre ad altri tipi di operatori che tengono conto di possibili errori (time jitter error, round-off error, etc.) che si verificano nel processo di ricostruzione dei segnali e che quindi rivestono un ruolo importante nelle applicazioni.
Gli operatori introdotti in [4] sono della forma:

$$(\mathcal{V}_w f)(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(ws-k) L_{t_k/w} f, \ s \in \mathbb{R}, \ w > 0, \tag{22}$$

dove $\left\{L_{t_k/w}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono opportuni funzionali lineari e limitati agenti su uno spazio funzionale al quale appartiene la f e, $\{t_k\}_k$ e $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sono rispettivamente una successione di numeri reali ed un nucleo soddisfacenti opportune proprietà.

Si forniscono risultati di convergenza puntuale, uniforme e di convergenza modulare in un generico spazio di Orlicz ([3]). Questo assetto generale consente di applicare la teoria agli spazi L^p, agli spazi di interpolazione, agli spazi di tipo esponenziale e ad altri.

Bibliografia

[1] C. Bardaro, P. L. Butzer, R. L. Stens and G. Vinti, "Approximation error of the Whittaker cardinal series in terms of an averaged modulus of smoothness covering discontinuous signals", J. Math. Anal. Appl. **316** No. 1 (2006), 269–306.

[2] C. Bardaro, P. L. Butzer, R. L. Stens and G. Vinti, "Kantorovich-type generalized sampling series in the setting of Orlicz spaces", Sampling Theory in Signal and Image Processing, **6** No. 1 (2007), 29–52.

[3] C. Bardaro, J. Musielak and G. Vinti, "Nonlinear Integral Operators and Applications", de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 9, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003.

[4] G. Vinti, L. Zampogni, "A unifying approach to convergence of linear sampling type operators in Orlicz spaces", Advances in Differential Equations, **16** (2011), 573–600.

Paolo Vitolo: Misure su strutture non-booleane

Paolo Vitolo
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Basilicata
email: paolo.vitolo@unibas.it

Sunto. L'argomento della comunicazione riguarda lo studio di misure definite su strutture più deboli delle algebre di Boole, come D-reticoli e pseudo-D-reticoli, che si incontrano sia nell'ambito della logica quantistica sia in modelli matematici dell'economia.

Sviluppando metodi topologici analoghi a quelli utilizzati da Drewnowski, Weber e altri nel contesto booleano, si estendono a misure modulari su tali strutture teoremi di decomposizione del tipo Hahn, Lebesgue, Hewitt–Yosida e Hammer–Sobczyk, teoremi del tipo Lyapunov sulla convessità della chiusura del codominio di misure a valori in spazi di Banach con la proprietà di Radon–Nikodym o B-convessi, teoremi di estensione del tipo Carathéodory, teoremi di esistenza del controllo del tipo Rybakov e Bartle–Dunford–Schwartz, teoremi di limitatezza del tipo Nikodym e teoremi di convergenza del tipo Vitali–Hahn–Saks.

Aljoša Volčič: Sul problema di Gruber riguardante la distribuzione uniforme sulla sfera

Aljoša Volčič
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
email: volcic@unical.it

Sunto. Denotiamo con S^{n-1} la sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$. Una *calotta* è una porzione della sfera sezionata da un iperpiano. Se P è la probabilità correspondente alla misura di Hausdorff normalizzata $(n-1)$-dimensionale su S^{n-1}, diciamo che una successione di vettori unitari $\{u_j\}$ è uniformemente distribuita su S^{n-1}, se si ha

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \chi_A(u_j) = P(A)$$

per tutti gli insiemi di A la cui frontiera relativa è P-nulla.

Peter Gruber ha riproposto nel 2009 il seguente

Problema *Supponiamo che $C \subset \mathbb{R}^n$ sia una calotta avente una dimensione fissata, ad esempio $P(C) = a$, con $0 < a < \frac{1}{2}$. Se vale la condizione*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \chi_{\rho C}(u_j) = a$$

per ogni rotazione ρ della calotta C, si può concludere che $\{u_j\}$ è uniformemente distribuita su S^{n-1}?

Si presenta una soluzione completa del problema per $n = 2$ e, utilizzando il "freak theorem" di Ungar [1], si dimostra nel caso $n \geq 3$ che la risposta è negativa per un'infinità numerabile e densa di valori di a.

Si mostra la connessione di questo problema con quello della determinazione di una misura definita su una classe di boreliani (cfr. [3]) e con il problema di Pompeiu (cfr. [4]).

Bibliografia

[1] Ungar P., "Freak theorem about functions on a sphere". *J. London Math. Soc.* **29** (1954), 100-103.

[2] Volčič A., "On Gruber's problem concerning uniform distribution on the sphere." Sottoposto per la pubblicazione.

[3] Davies R. O., "Measures not approximable or not specifiable by means of balls". Mathematika, **18** (1971), 157–160 .

[4] Ulrich D. C., "More on the Pompeiu Problem". *Amer. Mat. Monthly* **101** no. 2 (1994), 165–168.

Hans Weber: Decomposizione di misure a valori in l-gruppi

Hans Weber
Dipartimemto di Matematica e Informatica, Università di Udine
email: `hans.weber@uniud.it`

Sunto. Presento alcuni teoremi di decomposizione di misure a valori in l-gruppi. Il mezzo cruciale è il teorema di decomposizione di un l-gruppo Dedekind completo per bande ($G = B \oplus B^{\perp}$). Come risultato principale viene mostrato che si può ottenere anche una versione della decomposizione di Hammer-Sobczyk con questo metodo. (Ricordiamo che il classico teorema di Hammer-Sobczyk dice che ogni misura finitamente additiva di probabilità μ si può scrivere come $\mu = \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n$ dove δ_n sono misure a valori in $\{0, 1\}$ e μ_0 è fortemente continua, cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, ogni elemento a del dominio di μ_0 ammette una decomposizione $a_1, \ldots, a_n$ con $\mu_0(a_i) < \varepsilon$ per $i = 1, \ldots, n$.) Infine viene accennato a come generalizzare i teoremi di decomposizione per "misure modulari" definite su D-lattices, una struttura che generalizza sia le MV-algebra sia i reticoli ortomodulari.

I risultati nuovi presentati sono basati su un preprint scritto in collaborazione con G. Barbieri e A. Valente.

Luca Zampogni: Risultati di convergenza per operatori lineari di tipo Kantorovich

Gianluca Vinti
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia

Luca Zampogni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
email: `zampoglu@dmi.unipg.it`

Sunto. In [3] introduciamo la seguente famiglia di operatori lineari:

$$(S_w f)(z) = \int_H \chi_w(z - h_w(t)) \left[\frac{1}{\mu_G(B_w(t))} \int_{B_w(t)} f(u) d\mu_G(u) \right] d\mu_H(t), \tag{23}$$

dove H e G sono gruppi topologici di Hausdorff localmente compatti, μ_H e μ_G sono le loro rispettive misure di Haar, $h_w : H \to G$ è una famiglia di omeomorfismi di H in $h_w(H) \subset G$ e $\chi_w : G \to \mathbb{R}$ è una famiglia di nuclei soddisfacenti opportune condizioni ($w > 0$). Per ogni $w > 0$, la famiglia $\{B_w(t)\}_{t \in H}$ è un ricoprimento di G che soddisfa determinate condizioni e $f : G \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile per cui abbia senso l'espressione (1).

La formulazione generale di tali operatori permette di scegliere oppurtunamente i gruppi H e G, le loro rispettive misure di Haar e la famiglia $\{h_w\}_w$ cosí da ottenere come casi particolari alcune famiglie di operatori noti nella letteratura come, ad esempio, gli operatori lineari di tipo Kantorovich (si veda [1]). Inoltre, è possibile introdurre versioni *alla Kantorovich* dei classici operatori di convoluzione e degli operatori di Mellin. Si forniscono anche applicazioni in ambiti multidimensionali.

I risultati ottenuti riguardano la convergenza puntuale, uniforme e la convergenza modulare in spazi di Orlicz [2] per gli operatori (1). I risultati di convergenza negli spazi di Orlicz vengono applicati negli spazi L^p, negli spazi di Zygmund ($L^\alpha \log^\beta L$) e negli spazi di tipo esponenziale.

Bibliografia

[1] C. Bardaro, P.L. Butzer, R.L. Stens, G. Vinti, "Kantorovich-type generalized sampling series in the setting of Orlicz spaces", Sampling Theory in Signal and Image Processing **6** (2007), 29–52.

[2] C. Bardaro, J. Musielak, G. Vinti, "Nonlinear integral operators and applications", in: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol.9, Walter de Gruyter and Co., Berlin, (2003).

[3] G. Vinti, L. Zampogni, "Convergence results for linear Kantorovich-type operators", Preprint (2011).

Sezione 6 Analisi armonica e analisi funzionale

Nicola Arcozzi: Capacità d'insiemi: diadica e non

Nicola Arcozzi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: arcozzi@dm.unibo.it

Richard Rochberg
Washington University in St. Louis

Eric Sawyer
McMaster University

Brett Wick
Georgia Insitute of Technology

Sunto. È ben noto che la teoria del potenziale su un albero è un caso particolare di teorie più generali, su spazi metrici, comprendenti anche la classica teoria newtoniana. È forse meno noto che la capacità logaritmica di un sottoinsieme chiuso della retta reale è confrontabile con la capacità di quello stesso insieme, quando lo si interpreti come parte del bordo dell'albero associato alla decomposizione diadica della stessa retta [3]. Nel lavoro [2] estendiamo questa equivalenza a sottoinsiemi di spazi metrici Ahlfors-regolari, per capacità d'insiemi associate a potenziali generalizzati (lineari e non) di tipo Bessel. L'utilità è che le capacità sugli alberi possono essere effettivamente calcolate mediante un algoritmo ricorsivo. Il risultato è nuovo anche nel caso di $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, e della capacità lineare. Alcune applicazioni alla capacità di condensatori, la distanza tra le cui piastre tende a zero, sono in [1].

Il risultato principale in [2] viene mostrato in tre passi. (i) Lo spazio metrico X viene discretizzato a ogni scala, dando così origine a un grafo G di cui lo spazio è il bordo, $X = \partial G$. (ii) Rimuovendo i "lati orizzontali" in G si ottiene un albero T e, di conseguenza, una mappa suriettiva $\Lambda : \partial T \to X$ dal bordo dell'albero a X: attraverso la mappa Λ possiamo far passare misure di Borel tra ∂T e X. (iii) Una versione *ad hoc* della disuguaglianza di Muckenhoupt-Wheeden e Wolff mostra che i potenziali di Bessel delle misure su X e ∂T sono confrontabili; l'equivalenza delle capacità su X e ∂T segue facilmente dalla teoria del potenziale su spazi metrici.

Bibliografia

[1] N. Arcozzi. "Capacity of shrinking condensers." (2010) Preprint.

[2] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, B. Wick. "Potential Theory on Trees, Graphs and Ahlfors Regular Metric Spaces." (2010) Inviato a rivista, disponibile a http://arxiv.org/abs/1010.4788.

[3] I. Benjamini, Y. Peres. "Random walks on a tree and capacity in the interval." Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 28 (1992), no. 4, 557-592.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto COFIN "Analisi Armonica"

Andrea Carbonaro: Funzione di Bellman e stime lineari indipendenti dalla dimensione in un teorema di D. Bakry

Andrea Carbonaro
School of Mathematics, University of Birmingham
email: A.Carbonaro@bham.ac.uk

Oliver Dragičević
Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana

Sunto. In un celebre risultato D. Bakry [1] ha dimostrato che su una varietà riemanniana pesata, completa, e avente curvatura di Bakry-Emery limitata dal basso, le trasformate di Riesz locali associate al Laplaciano sono limitate su L^p per ogni p in $(1, \infty)$, con una norma che non dipende dalla dimensione. La dimostrazione di Bakry utilizza tecniche probabilistiche e non dà alcuna informazione sulla crescita delle norme rispetto a p. Recentemente X.D. Li [4], usando ancora tectiche probabilistiche, ha migliorato il risultato di D. Bakry dimostrando che la norma delle trasformate di Riesz locali cresce al più quadraticamente in p quando p tende all'infinito. Utilizzando una funzione di Bellman esplicita [2,3,5], dimostreremo un'immersione bilineare per il Laplaciano su una varietà pesata $(M, e^{\phi}\mu)$ avente curvatura di Bakry-Emery $\mathrm{Ric} + \nabla^2\phi$ limitata dal basso. L'immersione agisce sul prodotto cartesiano di $L^p(M, e^{\phi}\mu)$ e $L^q(T^*M, e^{\phi}\mu)$, $1/p+1/q = 1$, e coinvolge stime che non dipendono dalla dimensione e sono lineari in p. Come conseguenza otterremo stime lineari e indipendenti dalla dimensione delle norme L^p delle corrispondenti trasformate di Riesz locali. Tutte le nostre dimostrazioni sono analitiche.

Bibliografia

[1] D. Bakry: "Étude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes a courbure de Ricci minorée", Séminaire de probabilités de Strasbourg n. 21 (1987), 137–172.

[2] O. Dragičević, A. Volberg: "Bellman functions and dimensionless estimates of Littlewood-Paley type", J. Oper. Theory **56** (2006), no. 1, 167–198.

[3] O. Dragičević, A. Volberg: "Linear dimension-free estimates in the embedding theorem for Schrödinger operators", accettato in London Math. Soc.

[4] X.-D. Li: "Martingale transforms and L^p norm estimates of Riesz transforms on complete Riemannian manifolds", Probab. Theory Relat. Fields **141** (2008), 247–281.

[5] F. Nazarov, S. Treil: "The Hunt for a Bellman function: applications to estimates of singular integral operators and to other classical problems in harmonic analysis", St. Petersburg Math. J. **8** (1997), no. 5, 721–824.

Fabrizio Colombo: Un nuovo calcolo funzionale per n-uple di operatori non necessariamente commutanti

Fabrizio Colombo
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: `fabrizio.colombo@polimi.it`

Sunto. In questa comunicazione vengono presentati recenti risultati relativi ad un nuovo calcolo funzionale, chiamato S-calcolo funzionale, che si applica a n-uple di operatori non necessariamente commutanti e vale anche per operatori illimitati, si vedano ad esempio [1, 2, 3, 5]. Questo calcolo si basa sulla teoria delle funzioni slice monogene e slice regolari introdotte in [4, 6] e si inquadra nel filone di ricerche sviluppato da B. Jefferies, A. McIntosh, A. Pryde e dai loro coautori, e basato sulle funzioni a valori ipercomplessi per definire funzioni di operatori, [7, 8]. L'S-calcolo funzionale richiede una nuova nozione di spettro, chiamato S-spettro, associato alla n-upla di operatori e un operatore risolvente, chiamato S-risolvente, che gioca il medesimo ruolo che il classico risolvente gioca nel caso di Riesz-Dunford. La maggior parte delle proprietà che valgono per il calcolo di Riesz-Dunford si estende all'S-calcolo funzionale. È da notare inoltre che nel caso in cui si consideri un unico operatore, l'S-calcolo funzionale si ricuce al calcolo di Riesz-Dunford.

Bibliografia

[1] F. Colombo, I. Sabadini, "On some properties of the quaternionic functional calculus", J. Geom. Anal., **19** (2009), 601-627.

[2] F. Colombo, I. Sabadini, "The quaternionic evolution operator", Adv. Math., (2011).

[3] F. Colombo, I. Sabadini, D.C. Struppa, "A new functional calculus for noncommuting operators", J. Funct. Anal., **254** (2008), 2255–2274.

[4] F. Colombo, I. Sabadini, D.C. Struppa: "Slice monogenic functions", Israel J. Math., **171** (2009), 385–403.

[5] F. Colombo, I. Sabadini, D. C. Struppa, "Noncommutative Functional Calculus. Theory and Applications of Slice Hyperholomorphic Functions", Progress in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2011.

[6] G. Gentili, D.C. Struppa, "A new theory of regular functions of a quaternionic variable", Adv. Math., **216** (2007), 279–301.

[7] B. Jefferies, "Spectral properties of noncommuting operators", Lecture Notes in Mathematics, 1843, Springer-Verlag, Berlin 2004.

[8] A. McIntosh, A. Pryde, "A functional calculus for several commuting operators", Indiana U. Math. J. **36** (1987), 421–439.

Fausto di Biase: Sulla ottimalità delle regioni di Stolz nel teorema di Fatou

Fausto di Biase
Dipartimento di Scienze, Università "G. D'Annunzio" di Chieti e Pescara
email: fdibiase@unich.it

Sunto. Esaminiamo il problema della ottimalità delle regioni di Stolz per la convergenza quasi ovunque di funzioni nella classe di Hardy nel disco. Nel caso in cui si abbia invarianza per rotazioni, il problema è stato risolto da Littlewood nel 1927 e, sotto ipotesi meno stringenti, di tipo quantitativo, da H. Aikawa nel 1991. Introduciamo una nuova condizione di regolarità, di tipo qualitativo, per dimostrare un teorema di tipo Littlewood in cui le regioni di approccio sono tangenziali e cambiano forma da punto a punto. La nostra condizione di regolarità può essere estesa a contesti in cui è del tutto assente una struttura di gruppo che agisca sullo spazio. Mostriamo in che senso la nostra condizione di regolarità è ottimale. Lavoro in collaborazione con Alexander Stokolos, Olof Svensson e Tomasz Weiss.

Bibliografia

[1] J.E. Littlewood: "Mathematical notes (4): On a theorem of Fatou", J. London Math. Soc. 2 (1927), 172-176.

[2] H. Aikawa: "Harmonic functions and Green potentials having no tangential limits", J. London Math. Soc. (2) 43 (1991), 125-136.

Giacomo Gigante: Formule di quadratura e distribuzioni di punti su varietà compatte

Luca Brandolini
Dip. di Ingegneria dell'Informazione e Metodi Matematici, Università di Bergamo

Giacomo Gigante
Dip. di Ingegneria dell'Informazione e Metodi Matematici, Università di Bergamo
email: giacomo.gigante@unibg.it

Christine Choirat
Department of Economics, Universidad de Navarra

Leonardo Colzani
Dipartimento di Matematica, Università di Milano Bicocca

Raffaello Seri
Dipartimento di Economia, Università dell'Insubria

Giancarlo Travaglini
Dipartimento di Statistica, Università di Milano Bicocca

Sunto. Sia $\mathcal{M}$ una varietà compatta d dimensionale. Un problema classico è l'approssimazione di un integrale $\int_{\mathcal{M}} f(x)dx$ con somme di Riemann $N^{-1}\sum_{j=1}^{N} f(z_j)$, o con analoghi pesati $\sum_{j=1}^{N} \omega_j f(z_j)$. In questo lavoro si studia la discrepanza tra integrali e somme per funzioni in classi di Sobolev $\mathbb{W}^{\alpha,p}(\mathcal{M})$. Il risultato principale è:

Teorema. *(i) Se $1 \le p \le +\infty$ e $\alpha > d/p$, allora esistono $c > 0$ e successioni di punti $\{z_j\}_{j=1}^{N}$ e pesi positivi $\{\omega_j\}_{j=1}^{N}$ con*

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \omega_j f(z_j) - \int_{\mathcal{M}} f(x)dx \right| \le cN^{-\alpha/d} \|f\|_{\mathbb{W}^{\alpha,p}} .$$

(ii) Per ogni $1 \le p \le +\infty$ e $\alpha > d/p$ esiste $c > 0$ tale che per ogni distribuzione di punti $\{z_j\}_{j=1}^{N}$ e numeri $\{\omega_j\}_{j=1}^{N}$ esiste una funzione $f(x)$ in $\mathbb{W}^{\alpha,p}(\mathcal{M})$ con

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \omega_j f(z_j) - \int_{\mathcal{M}} f(x)dx \right| \ge cN^{-\alpha/d} \|f\|_{\mathbb{W}^{\alpha,p}} .$$

Si dimostra anche che una quadratura ottimale per $\mathbb{W}^{\alpha,2}(\mathcal{M})$ lo è anche per $\mathbb{W}^{\beta,2}(\mathcal{M})$ con $d/2 < \beta < \alpha$, e che esiste una relazione tra regole di quadratura e discrepanza geometrica.

Bibliografia

[1] D.P. Hardin and E. B. Saff, *Discretizing manifolds via minimum energy points*, Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), 1186-1194.

[2] A. B. J. Kuijlaars and E. B. Saff, *Distributing many points on a sphere*, Math. Intelligencer **19** (1997), 5-11.

Davide Guidetti: Determinazione del termine di sorgente in un'equazione parabolica astratta da un integrale nella variabile temporale della soluzione

Davide Guidetti
Dipartimento di matematica, Università di Bologna
email: `guidetti@dm.unibo.it`

Sunto. Saranno presentati alcuni risultati relativi allo studio del seguente problema inverso di determinazione del termine di sorgente:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t)\xi + g(t), \quad t \in [0,T], \\ \\ u(0) = u_0, \\ \\ \int_{[0,T]} u(t)d\mu(t) = y. \end{cases} \tag{24}$$

Qui A è un generico operatore settoriale in uno spazio di Banach complesso X. I dati del problema sono f e g (supposti a valori in $\mathbb{C}$ e X, rispettivamente), u_0 e y, appartenenti al dominio $D(A)$ di A, e μ, che è una misura di Borel (scalare) in $[0,T]$. I termini incogniti sono la funzione u, assieme all'elemento ξ di X. Se consideriamo il sistema dato dalle prime due equazioni in (1), otteniamo un problema di Cauchy astratto di tipo parabolico. Poiché ξ è incognita (questo implica che il termine di sorgente non è completamente noto), è necessario assegnare un'informazione supplementare per determinare u. Questa è data dall'ultima condizione in (1).

Si osservi che il problema è stato studiato soprattutto nel caso particolare $\mu = \delta_T$.

I risultati, di natura astratta, sono applicabili a problemi misti per equazioni paraboliche.

Bibliografia

[1] D. Guidetti, "Determining the Source Term in an abstract parabolic Problem from a Time Integral of the Solution", di prossima pubblicazione in Med. J. Math..

[2] A. I. Prilepko, I. V. Tikhonov, "Recovery of the nonhomogeneous term in an abstract evolution equation", Russian Acad. Sc. Izv. Math. **44** (1995), 373-394.

[3] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, Methods for solving inverse problems in mathematical physics, Marcel Dekker (1999).

M. Gabriella Kuhn: Rappresentazioni di gruppi iperbolici

M. Gabriella Kuhn
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
email: mariagabriella.kuhn@unimib.it

Alessandra Iozzi
Departement Mathematik, ETH Zürich

Tim Steger
Struttura Dipartimentale di Matematica e Fisica, Università di Sassari

Sunto. Sia G un gruppo discreto, finitamente generato e iperbolico secondo Gromov. In questo lavoro ci occupiamo di una classe di rappresentazioni di G: quelle *debolmente contenute nella regolare*. Queste sono esattamente le rappresentazioni π di G che risultano estendibili alla C^*-algebra $C^*_{\mathrm{red}}(G)$, cioè tali per cui si ha

$$\|\pi(f)\| \leq \|\lambda(f)\| \qquad \text{per ogni funzione } f \text{ a supporto finito}$$

(dove $\lambda(f)$ indica l'operatore di convoluzione a sinistra con f definito su $\ell^2(G)$). Dimostriamo che, salvo alcuni gruppi eccezionali, tutte le rappresentazioni debolmente contenute nella regolare si ottengono tramite una costruzione universale che coinvolge la frontiera di G.

Passiamo poi ad uno studio dettagliato del caso in cui G sia un reticolo *non uniforme* in $PSL(2,\mathbb{R})$. Tali gruppi risultano virtualmente liberi. Adoperando una serie di risultati ottenuti per un gruppo libero non commutativo nei lavori [4] e [5], costruiamo una nuova classe di rappresentazioni debolmente contenute nella regolare che, per il risultato precedente, risultano anche realizzabili su $L^2(\Omega, d\nu)\otimes H$ dove Ω è la frontiera di Martin di G e H è uno spazio di Hilbert separabile.

Bibliografia

[1] M. Bekka, M. Cowling, P. de la Harpe: "Some groups whose reduced C^*-algebra is simple", Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 80 (1994), pp. 117–134.

[2] M Gromov: "Hyperbolic groups", Essays in group theory (ed. S. M. Gersten), MSRI Publications 8, Springer-Verlag, 1987, pp. 75–265.

[3] V.A. Kaimanovich: "Boundary amenability of hyperbolic spaces", Discrete geometric analysis, 347 Contemp. Math., Amer. Math. Soc., 83–111.

[4] M. G. Kuhn, T. Steger: "More irreducible boundary representations of free groups", Duke Math. J., 82 (1996), 381–436.

[5] M. G. Kuhn, T. Steger: "Free group representations from vector-valued multiplicative functions, I. Israel J. Math. 144 (2004), 317–341.

[6] K. Ohshika: "Discrete Groups", Translations of Mathematical Monographs, 207. Iwanami Series in Modern Mathematics. Amer. Math. Soc.

Roberta Schiattarella: Composizione di mappe bi-Sobolev

Roberta Schiattarella
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" Università Via Cintia, 80126 Napoli, Italy
email: roberta.schiattarella@unina.it

Luigi Greco
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" Università Via Cintia, 80126 Napoli, Italy

Carlo Sbordone
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" Università Via Cintia, 80126 Napoli, Italy

Sunto. In questo articolo affrontiamo il problema della composizione di due omeomorfismi di distorsione finita.

Dati Ω, Ω', Ω'' domini di $\mathbb{R}^n$ e $f\colon \Omega \to \Omega'$, $g\colon \Omega' \to \Omega''$ omeomorfismi di distorsione finita, troviamo condizioni ottimali affinché la mappa composta $h = g \circ f\colon \Omega \to \Omega''$ sia di distorsione finita.

Inoltre, mostriamo un risultato di integrabilità per la distorsione della mappa composta h, mediante ipotesi di integrabilità sulle distorsioni delle mappe f e g.

Bibliografia

[1] L. Greco, C. Sbordone, R. Schiattarella: *Composition of Bi-Sobolev Homeomorphisms*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, in corso di stampa.

Marianna Tavernise: Compattezza in spazi di funzioni F-seminormati

Marianna Tavernise
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
email: `tavernise@mat.unical.it`

Alessandro Trombetta
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria

Giulio Trombetta
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria

Sunto. Siano $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio F-normato, Ω un insieme non vuoto, $\mathcal{A}$ un'algebra di sottoinsiemi di Ω, $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ una submisura, ed $\eta_0 : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ la submisura definita da $\eta_0(B) := \inf\{\eta(A) : B \subset A \text{ and } A \in \mathcal{A}\}$. Sia E^Ω lo spazio lineare delle funzioni $f : \Omega \longrightarrow E$, allora la funzione $\|\cdot\|_0 : E^\Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$\|f\|_0 := \inf\{a > 0 : \eta_0(\{x \in \Omega : \|f(x)\|_E \geq a\}) \leq a\}$$

è una pseudonorma di gruppo di Riesz su E^Ω, (cioè, $\|0\|_0 = 0, \|f+g\|_0 \leq \|f\|_0 + \|g\|_0$ $\|f\|_E \leq \|g\|_E \Longrightarrow \|f\|_0 \leq \|g\|_0$ per ogni $f, g \in E^\Omega$).

In questo lavoro si introduce, in una classe $\mathcal{C}$ di sottospazi F-seminormati di E^Ω, un parametro che misura il grado di non equiassoluta continuità di un sottoinsieme M di un dato spazio $L \in \mathcal{C}$. Dal confronto tra tale parametro e la classica misura di non compattezza di Hausdorff si ottengono alcune disuguaglianze contenenti, come casi particolari, condizioni sufficienti alla totale limitatezza di M. Inoltre, negli spazi $L \in \mathcal{C}$ che soddisfano la *W-property*, come ad esempio gli spazi di Orlicz definiti rispetto a misure finitamente additive, si ottiene un criterio di compattezza alla Vitali.

Bibliografia

[1] M.Tavernise, A.Trombetta, G.Trombetta: "Total boundedness in vector-valued F-seminormed function spaces", *Le Matematiche*, Vol. 66, Fasc.1, 2011.

[2] M.Tavernise, A.Trombetta, G.Trombetta: "Compactness criteria in vector-valued F-seminormed function spaces", preprint.

E. Terraneo: Limite per collisioni radenti per il modello di Kac inelastico

A. Pulvirenti
Università di Pavia

G. Furioli
Università di Bergamo

E. Terraneo
Università di Milano
email: `elide.terraneo@unimi.it`

G. Toscani
Università di Pavia

Sunto. In questo lavoro ci interessiamo al limite per collisioni radenti per l'equazione di Kac inelastica la cui soluzione di equilibrio è una distribuzione di tipo Levy con varianza infinita e decrescita polinomiale all'infinito. Dimostriamo che le soluzioni, per dati iniziali in un opportuno dominio di attrazione della distribuzione di equilibrio, convergono alle soluzioni di un'equazione di Fokker-Planck con operatore di diffusione frazionario.

Bibliografia

[1] A. Pulvirenti e G. Toscani: " Asymptotic properties of the inelastic Kac model." J. Statist. Phys., 114(5-6):1453–1480, 2004.

[2] G. Toscani: " The grazing collisions asymptotics of the non-cut-off Kac equation." RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 32(6):763–772, 1998.

[3] C. Villani: " Mathematics of granular materials." J. Stat. Phys., 124(2-4):781–822, 2006.

Veronica Umanità: Decoerenza per semigruppi positivi su $M_2(\mathbb{C})$

Veronica Umanità
Dipartimento di Matematica, Università di Genova
email: umanita@dima.unige.it

Emanuela Sasso
Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Raffaella Carbone
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Sunto. Quando un sistema quantistico associato ad uno spazio di Hilbert h complesso e separabile interagisce con l'esterno, la sua evoluzione diventa irreversibile ed è approssimativamente descritta da un particolare semigruppo debole* continuo $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ di operatori limitati su $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, l'algebra degli operatori lineari e continui su h. Tale semigruppo è chiamato *semigruppo quantistico Markoviano* (QMS) e $\mathcal{T}_t(x)$ descrive l'evoluzione di un osservabile x al tempo t. È stato verificato sperimentalmente ([4]) che in questo regime si ha una perdita di coerenza delle fasi, cioè per tempi grandi l'evoluzione degli stati quantistici diventa descritta da matrici densità che sono diagonali o diagonali a blocchi rispetto ad una certa base selezionata o dall'interazione con l'esterno o da una misurazione effettuata sul sistema. Diventa quindi importante selezionare i settori dello spazio degli stati che sono immuni dal processo di decoerenza, cioè evolvono in modo unitario. Sebbene il fenomeno della decoerenza sia diffusamente studiato dal punto di vista fisico, ne manca ancora un'adeguata formalizzazione matematica e le definizioni proposte recentemente da esperti del settore non sono equivalenti ([1], [3]). La definizione data da Blanchard e Olkiewicz ([1]) per QMS sembra quella che meglio traduce l'idea intuitiva del fenomeno, in quanto si basa sulla decomposizione di $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ nella somma diretta di due sottospazi invarianti, tali che la dinamica sia unitaria su uno e si annulli nel tempo sull'altro. Questa definizione è il punto di partenza del nostro lavoro ([2]): prima di tutto ne diamo una caratterizzazione alternativa che ci permette di estenderla a semigruppi più generali di operatori. In secondo luogo risolviamo completamente il caso $\mathsf{h} = \mathbb{C}^2$, identificando il più grande sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$ immune da tale processo attraverso lo spettro del generatore infinitesimo del semigruppo.

Bibliografia

[1] Ph. Blanchard, R. Olkiewicz: "Decoherence induced transition from quantum to classical dynamics", Rev. Math. Phys. 15, 217–243, 2003.

[2] R. Carbone, E. Sasso, V. Umanità: "Decoherence for positive semigroups on $M_2(C)$", J. Math. Phys. 52, 2011.

[3] R. Rebolledo: 'Decoherence of quantum Markov semigroups", Ann. I. H. Poincarè 41, 349–373, 2005.

[4] W. G. Unruh, W. H. Zurek: " Reduction of a wave packet in quantum Brownian motion", Phys. Rev. D, 40, 1071–1094, 1989.

Sara Volpi: Convergenza puntuale delle medie di Bochner-Riesz in spazi di Sobolev

Sara Volpi
Dipartimento di Matematica e applicazioni, Università di Milano Bicocca
email: sara_volpi@yahoo.it

Leonardo Colzani
Dipartimento di Matematica e applicazioni, Università di Milano Bicocca

Sunto. Il problema della convergenza degli integrali e delle serie di Fourier in una dimensione è un argomento classico. In più variabili, invece, sono più i risultati parziali di quelli definitivi.

Le medie di Bochner-Riesz di ordine α di funzioni su $\mathbf{R}^d$ sono definite da

$$S_R^\alpha * f(x) = \int_{\mathbf{R}^d} \Big(1 - \Big|\frac{\xi}{R}\Big|^2\Big)_+^\alpha \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i \xi\cdot x}\, d\xi.$$

Lo studio della convergenza in norma e puntuale di questi operatori presenta numerosi problemi ancora aperti. È comunque noto che l'operatore massimale di Bochner-Riesz $S_*^\alpha f(x) = \sup_{R>0} |S_R^\alpha * f|(x)$ è limitato su $L^p(\mathbf{R}^d)$, con $1 < p < +\infty$ e $\alpha > (d-1)|1/p - 1/2|$. Dalla limitatezza dell'operatore massimale segue la convergenza quasi ovunque.

In questa comunicazione consideriamo la convergenza puntuale di funzioni più regolari, in particolare funzioni con β derivate in $L^p(\mathbf{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Più precisamente, otteniamo condizioni su α, β, p e d che assicurano la convergenza puntuale a meno di insiemi di dimensione di Hausdorff al più $d - \beta\, p$. Poiché le funzioni che stiamo considerando possono essere infinite precisamente in insiemi di dimensione $d - \beta\, p$, la stima ottenuta per la dimensione dell'insieme di divergenza è la migliore possibile.

Dimostriamo questo risultato in due casi: quando $\alpha > (d-1)|1/p - 1/2|$ e quando $\alpha + \beta \geq (d-1)/2$. La prima condizione coinvolge p e α ma non β, mentre la seconda condizione coinvolge α e β ma non p. È chiaro che in questo contesto generale la nostra analisi non è completa e che ci sono casi ancora aperti. Tuttavia, nel caso di funzioni radiali otteniamo un risultato esaustivo ed ottimale per tutti gli indici α, β, p e d.

Sezione 7 Calcolo delle probabilità e statistica matematica

Federico Bassetti: Vettori di misure aleatorie dipendenti per inferenza Bayesiana

Federico Bassetti
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Pavia
email: `federico.bassetti@unipv.it`

Roberto Casarin
Dipartimento di Economia, Università Ca' Foscari di Venezia

Fabrizio Leisen
Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid

Sunto. Vengono presentati alcuni risultati e alcune applicazioni all'inferenza Bayesiana di una particolare classe di vettori di densità di probabilità aleatorie dipendenti. I vettori considerati sono costruiti con una procedura di tipo "stick-breaking". Nello specifico si considera un vettore di densità aleatorie su $\mathbb{R}$, $(f_1, \ldots, f_d)$, definito da

$$f_i(y) := \sum_{k>1} W_{ik}\ K_i(y|\Phi_{ik}) \qquad i = 1, \ldots, r, \quad y \in \mathbb{R}$$

con

- $K_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ $(i = 1, \ldots, r)$ nuclei di transizione fissati;
- $W_k = (W_{1k}, \ldots, W_{rk})$ e $\Phi_k = (\Phi_{1k}, \ldots, \Phi_{rk})$ tali che:
  - $(\Phi_k)_{k\geq 1}$ sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite a valori in $\mathbb{R}^{d\times r}$;
  - i pesi aleatori $(W_{ik})_{k\geq 1}$ $i = 1, \ldots, r$ sono definiti tramite una successione di vettori aleatori indipendenti e identicamente distribuiti $S_k = (S_{1k}, \ldots, S_{rk})$ a valori in $[0, 1]^r$, ponendo
  $$W_{ik} := S_{ik} \prod_{j<k} (1 - S_{ij}), \quad i = 1, \ldots, r.$$
  - $(\Phi_k)_{k\geq 1}$ e $(S_k)_{k\geq 1}$ sono stocasticamente indipendenti;

Il vettore S_k ha distribuzione Beta multidimensionale, in questo modo ogni f_i risulta una densità mistura di processi di Dirichlet.

Particolare attenzione verrà dedicata alla descrizione di un algoritmo MCMC (di tipo "slice sampling") per la simulazione delle distribuzioni finali.

Patrizia Berti: Misure martingala equivalenti finitamente additive

Patrizia Berti
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Modena e Reggio Emilia
email: patrizia.berti@unimore.it

Luca Pratelli
Accademia Navale di Livorno

Pietro Rigo
Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi, Università di Pavia

Sunto. Sia L uno spazio lineare di variabili aleatorie reali limitate su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P_0)$. Si indichi con $\mathbb{P}$ l'insieme delle probabilità finitamente additive su $\mathcal{A}$. (Si noti che P_0 è σ-additiva). Ci proponiamo di studiare l'esistenza di $P \in \mathbb{P}$ tale che

$$P \sim P_0 \quad \text{ed} \quad E_P(X) = 0 \text{ per ogni } X \in L, \tag{25}$$

oppure tale che

$$P \ll P_0 \quad \text{ed} \quad E_P(X) = 0 \text{ per ogni } X \in L. \tag{26}$$

La comunicazione si articola nei seguenti quattro punti (con particolare attenzione agli ultimi due).

(a) Discussione (breve ed informale) delle ragioni che ci hanno condotto ad analizzare (1)-(2) e legami con la condizione di non arbitraggio:
$P_0(X > 0) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P_0(X < 0) > 0 \quad$ per ogni $X \in L$.

(b) Alcuni (classici) esempi nei quali (1) o (2) valgono per qualche $P \in \mathbb{P}$, ma non esistono leggi σ-additive che soddisfano tali condizioni.

(c) Esiste $P \in \mathbb{P}$ soddisfacente (1) se e solo se esistono una costante $c > 0$ ed una legge σ-additiva $Q \sim P_0$ tali che $c\, E_Q(X) \leq \text{ess sup}(-X) \quad$ per ogni $X \in L$. In particolare, esiste $P \in \mathbb{P}$ soddisfacente (1) qualora $\text{ess sup}\,(X) \leq c^* \text{ess sup}(-X), \quad X \in L$, $||X||_\infty = 1$, per qualche $c^* > 0$. Inoltre, esiste $P \in \mathbb{P}$ soddisfacente (2) se e solo se $\text{ess sup}(X) \geq 0 \quad$ per ogni $X \in L$.

(d) Relazione tra la (1) ed alcuni teoremi di separazione. Ad esempio, una condizione necessaria per l'esistenza di $P \in \mathbb{P}$ soddisfacente (1) è

$$\overline{L - L_\infty^+} \cap L_\infty^+ = \{0\}$$

dove $L_\infty = L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P_0)$ e la chiusura è nella norma L_∞. Tale condizione è anche sufficiente se P_0 è atomica. (Per inciso, un problema aperto è se la condizione sia sufficiente in generale, quando P_0 è una qualsiasi legge σ-additiva). Si noti che la condizione precedente, con la chiusura nella topologia $\sigma(L_\infty, L_1)$, è necessaria e sufficiente per l'esistenza di una misura martingala equivalente (ovvero, per l'esistenza di una legge σ-additiva P soddisfacente (1)).

Alessandra Cretarola: Minimizzazione locale del rischio sotto l'approccio benchmark

Francesca Biagini
Department of Mathematics, LMU, Munich

Alessandra Cretarola
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia
email: alessandra.cretarola@dmi.unipg.it

Eckhard Platen
School of Finance & Economics, University of Technology, Sydney

Sunto. Uno degli approcci più competitivi per affrontare il problema della valutazione e della copertura di derivati nei mercati finanziari incompleti è il *local risk-minimization* (LRM), caratterizzato da un criterio quadratico di hedging, si veda e.g. [3]. L'obiettivo è di studiare il LRM nella prospettiva del *benchmark approach*, una modellizzazione generale e realistica dei mercati finanziari che richiede solo l'esistenza di un prezzo di riferimento, il cosiddetto *numéraire portfolio*. Inanzitutto si considera il caso in cui i prezzi dei titoli, quando espressi in unità del numéraire portfolio, risultano delle martingale locali. Questo è sempre il caso in cui i prezzi dei titoli sono rappresentati da semimartingale continue ed accade anche in un'ampia classe di modelli di diffusione con salti, si veda e.g. [2]. In tale contesto il metodo LRM coincide con il *risk-minimization* (RM) come originariamente introdotto in [1]. L'approccio RM non presenta le stesse difficoltà tecniche del LRM, formalizza in modo matematico ed immediato l'intuizione economica del rischio e fornisce sempre una strategia ottimale per un dato *contingent claim* $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, ottenuta calcolando la decomposizione di Galtchouck-Kunita-Watanabe (GKW) di H sotto $\mathbb{P}$. Allora non si ha più il problema di trovare la misura minimale $\widehat{\mathbb{P}}$, che potrebbe non esistere, e di verificare che per (sufficienti) condizioni di integrabilità la decomposizione di GKW di H sotto $\widehat{\mathbb{P}}$ sia la decomposizione di Föllmer-Schweizer di H sotto $\mathbb{P}$. Successivamente viene studiato il caso più generale in cui i prezzi dei titoli, quando espressi in unità del numéraire portfolio, risultano delle supermartingale.

Bibliografia

[1] H. Föllmer, D. Sondermann: "Hedging of non-redundant contingent claims". In: *Contributions to Mathematical Economics*, North Holland, 205–223, 1986.

[2] E. Platen, D. Heath: *A Benchmark Approach to Quantitative Finance.* Springer Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[3] M. Schweizer: "A guided tour through quadratic hedging approaches". In: *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, Cambridge University Press, 538–574, 2001.

Stefano Favaro: Sul concetto di σ-diversità per partizioni aleatorie scambiabili di tipo Ewens-Pitman

Stefano Favaro[1]
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata, Università di Torino
email: stefano.favaro@unito.it

Sunto. Il concetto di σ-diversità è stato introdotto in Pitman (2003) nell'ambito dello studio dei modelli di tipo Gibbs per partizioni aleatorie scambiabili; si veda anche Pitman (2006) e riferimenti ivi contenuti. In particolare, sia Π una partizione aleatoria scambiabile di $\mathbb{N}$ e sia Π_n la corrispondente restrizione all'insieme $\{1, \ldots, n\}$; indicando con K_n il numero aleatorio dei blocchi distinti di Π_n, diciamo che la partizione Π ha σ-diversità S_σ se e solo se esiste una variabile aleatoria S_σ positiva e finita quasi certamente tale che

$$\frac{K_n}{n^\sigma} \xrightarrow{\text{q.c.}} S_\sigma$$

per $n \to +\infty$. Nel presente contributo verrà presa in considerazione la σ-diversità caratterizzante un modello di tipo Gibbs noto in letteratura come partizione aleatoria scambiabile di Ewens-Pitman. Per tale modello verrà introdotta e caratterizzata una versione condizionata della σ-diversità e ne verranno discussi gli aspetti applicativi nell'ambito dell'inferenza Bayesiana nonparametrica per problemi di campionamento di specie.

Bibliografia

[1] Pitman, J. (2003). Poisson-Kingman partitions. *Science and Statistics: A Festschrift for Terry Speed.* Lecture Notes Monograph Series 40. IMS Beachwood, OH.

[2] Pitman, J. (2006). *Combinatorial stochastic processes.* Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXII. Lecture Notes in Mathematics 1875, Springer, New York.

[1] Affiliato al Collegio Carlo Alberto, Torino

Alberto Lanconelli: Prodotto di Wick, convoluzione e somme di variabili aleatorie indipendenti

Alberto Lanconelli
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: lanconelli@dm.uniba.it

Sunto. Nell'articolo [4] del 1950 il fisico italiano Gian Carlo Wick introdusse una procedura per rinormalizzare certe espressioni della teoria quantistica dei campi contenenti quantità divergenti. Tale metodo si basa sul concetto di "ordine normale" per un prodotto di operatori agenti sullo spazio di Fock. Mettendo in ordine normale le potenze dell'operatore di posizione otteniamo i polinomi di Hermite calcolati nell'operatore stesso. Questa corrispondenza, ottenuta mediante le relazioni di commutazione fra gli operatori di creazione e distruzione, induce in maniera naturale una regola di moltiplicazione (prodotto di Wick gaussiano) fra i polinomi di Hermite e quindi fra funzioni definite su spazi gaussiani.

Negli ultimi anni il prodotto di Wick ed il calcolo ad esso associato hanno conosciuto un crescente interesse in alcuni ambiti dell'analisi stocastica e della teoria delle equazioni differenziali stocastiche a derivate parziali. Questo è dovuto da un lato al ruolo centrale che il prodotto di Wick riveste nell'integrazione stocastica secondo Itô e dall'altro al suo impiego nella formalizzazione di alcune equazioni non lineari che non ammettono soluzione in senso classico ([2]).

In questo seminario ci proponiamo di mostrare come il prodotto di Wick possa essere considerato un equivalente gaussiano del classico prodotto di convoluzione per funzioni ([1]) e come tale corrispondenza sia più o meno preservata per misure non gaussiane ([3]).

Bibliografia

[1] Da Pelo P., Lanconelli A., Stan A. "Holder-Young-Lieb inequalities for norms of Gaussian Wick products", In corso di stampa su IDAQP 2011 .

[2] Holden H., Øksendal B., Ubøe J. and Zhang T.S. "Stochastic Partial Differential Equations - A Modeling, White Noise Functional Approach". Birkhauser, II ed., 2010.

[3] Lanconelli A., Sportelli L. "On a connection between the Wick product for the Poisson distribution and the law of the sum of independent random variables", preprint 2011.

[4] Wick, G. C. "The evaluation of the collision matrix". Physical Rev. 80 (2), 268-272, 1950.

Antonio Lijoi: Inferenza bayesiana con misure di probabilità aleatorie dipendenti

Ilenia Epifani
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Fabrizio Leisen
Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid

Antonio Lijoi[1]
Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi, Università di Pavia
email: `lijoi@unipv.it`

Sunto. Un'area di ricerca particolarmente vivace e ricca di contributi recenti in ambito bayesiano riguarda la definizione di misure di probabilità aleatorie dipendenti. Una prima proposta è suggerita da Cifarelli e Regazzini (1978) e si basa sull'impiego di misture di prodotti di processi di Dirichlet. I contributi successivi, invece, mirano a formulare estensioni della costruzione di tipo "stick-breaking" che caratterizza il processo di Dirichlet. In questa comunicazione viene presentato un approccio diverso basato sull'impiego di processi a incrementi indipendenti con traiettorie quasi certamente crescenti. La dipendenza tra le misure di probabilità aleatorie è indotta da una copula di Lévy (cfr. Cont and Tankov, 2004). Questo consente di ottenere versioni bivariate del processo di Poisson-Dirichlet a due parametri e dei processi neutrali a destra. Oltre a evidenziare alcuni risultati analitici utili per valutare inferenze finali, viene descritta un'applicazione a un insieme di dati di sopravvivenza, censurati a destra, generati da due campioni.

Bibliografia

[1] Cifarelli, D.M. and Regazzini, E. (1978). Problemi statistici non parametrici in condizioni di scambiabilità parziale. *Quaderni Istituto Matematica Finanziaria, Università di Torino* Serie III, **12**.

[2] Cont, R. and Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

[3] Epifani, I. and Lijoi, A. (2010). Nonparametric priors for vectors of survival functions. *Statistica Sinica* **20**, 1455-1484.

[4] Leisen, F. and Lijoi, A. (2011). Vectors of two–parameter Poisson–Dirichlet processes. *J. Mult. Anal.* **102**, 482–495.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del PRIN '08: *Metodi bayesiani: sviluppi teorici e nuove applicazioni*

Valentina Mameli: Una generalizzazione della distribuzione *skew-normal*: la *Beta skew-normal*

Valentina Mameli
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari
email: vmameli@unica.it

Monica Musio
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari

Sunto. La distribuzione *skew-normal* (SN), introdotta da Azzalini (1985), è stata stu-diata e generalizzata da numerosi autori. Lo scopo del presente lavoro è l'introduzione di una nuova famiglia di distribuzioni che generalizzi la SN e sia unimodale e bimodale. Tale famiglia, chiamata *Beta skew-normal* (BSN), deriva naturalmente quando si considerano le distribuzioni delle statistiche d'ordine della SN. La BSN può essere ottenuta anche come caso speciale della *Beta generated distribution* definita da Jones (2004). In questo lavoro focalizziamo l'attenzione su tre estensioni della distribuzione *skew-normal*: la distribuzione *Balakrishnan skew-normal* (SNB) (Ba-lakrishnan (2002)), una generalizzazione della *Balakrishnan skew-normal* (GBSN) (Yadegari e altri (2008)) e una generalizzazione a due parametri della *Balakrishnan skew-normal* (TBSN) (Bahrami e altri (2009)). Queste tre estensioni sono legate alla BSN per particolari valori dei parametri. Presentiamo alcune proprietà di questa nuova distribuzione, alcuni casi speciali e un caso limite. Analizziamo le proprietà di forma, deriviamo la sua funzione generatrice dei momenti e calcoliamo numericamente, tramite il pacchetto statistico R, i suoi primi quattro momenti. Inoltre presentiamo due metodi differenti che ci permettono di simulare da essa.

Bibliografia

[1] Azzalini, A. (1985). A Class of Distributions Which Includes the Normal Ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, **12(2)**, 171–178.

[2] Bahrami, W., Agahi, H., Rangin, H. (2009). A Two-parameter Balakrishnan Skew-normal Distribution. *J. Statist. Res. Iran*, **6**, 231–242.

[3] Balakrishnan, N. (2002). Discussion of "Skewed multivariate models related to hidden truncation and/or selective reporting". *Test*, **11**, 37–39.

[4] Jones, M. C. (2004). Families of distributions of order statistics. *Test*, **13(1)**, 1–43.

[5] Mameli, V., Musio, M. (2011). A generalization of the skew-normal distribution: the Beta skew-normal. Manoscritto.

[6] Yadegari, I., Gerami, A., Khaledi, M.J. (2008). A generalization of the Balakrishnan skew-normal distribution. *Statistics and Probabilty Letters*, **78**, 1165–1167.

Domenico Marinucci: Il comportamento asintotico per gli "excursion sets" di autofunzioni Gaussiane del Laplaciano sulla sfera

Domenico Marinucci
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
email: marinucc@mat.uniroma2.it

Igor Wigman
Department of Mathematics, Cardiff University

Sunto. Il comportamento asintotico delle autofunzioni aleatorie del Laplaciano sulla sfera è stato recentemente oggetto di notevole attenzione, anche a causa di importanti motivazioni che emergono dalla Fisica e dalla Cosmologia. In questo lavoro, ci occupiamo del comportamento asintotico delle regioni sopra-soglia (*excursion sets*); equivalentemente, dimostriamo un teorema del limite centrale funzionale per la misura empirica, cioè la misura della parte di sfera in cui le autofunzioni Gaussiane sono al di sotto di un determinato valore z.

Le dimostrazioni utilizzano alcune tecniche derivate dalla letteratura sui processi stazionari con integrazione frazionaria; in particolare, si espande la misura empirica in polinomi di Hermite e si dimostra che il comportamento asintotico è dominato da un singolo termine della serie. Il processo limite risulta quindi con una struttura particolarmente semplice, corrispondente ad una singola variabile aleatoria che moltiplica una funzione deterministica, esprimibile in termini della densitâĂą gaussiana.

Bibliografia

[1] Marinucci, D.; G. Peccati, G. Ergodicity and Gaussianity for Spherical Random Fields, J. Math. Phys., 51 (2010), 043301, 23 pp.

[2] Marinucci, D.; Peccati, G. (2011) Random Fields on the Sphere: Representations, Limit Theorems and Cosmological Applications, London Mathematical Society Lecture Notes, Cambridge University Press.

[3] Marinucci, D.; Wigman, I. (2011) On the Area of Excursion Sets of Spherical Gaussian Eigenfunctions, J. Math. Phys., in corso di stampa.

[4] Marinucci, D.; Wigman, I. (2011) The Defect Variance of Random Spherical Harmonics, in corso di revisione per J. Phys. A.

[5] Wigman, I. On the Distribution of the Nodal Sets of Random Spherical Harmonics. J. Math. Phys. 50 (2009), 1, 013521, 44 pp.

[6] Wigman, I. Fluctuation of the Nodal Length of Random Spherical Harmonics, Comm. Math Phys., Volume 298 (2010), 3, 787–831

Monica Musio: Un approccio geometrico alla sensitività locale bayesiana

Monica Musio
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari
email: mmusio@unica.it

Sunto. Nella teoria nota come *Information Geometry* un modello statistico parametrico può essere considerato come una varietà differenziabile, e la sua struttura geometrica può risultare utile per sviluppare ed esplorare alcune proprietà di procedure inferenziali. In questo lavoro ci si propone di usare tale approccio, in un contesto bayesiano, per caratterizzare la sensitività della distribuzione a posteriori $\psi(\Pi) = E_{\Pi^x}\{f(\theta)\}$ di una funzione del parametro, rispetto a piccole variazioni della distribuzione a priori Π in un intorno di Π_0. Introdotta la varietà $\mathcal{M}$ di tutte le distribuzioni a priori, la sensitività è determinata dal vettore tangente alla varietà in Π_0 e il suo effetto è misurato dalla derivata direzionale ad esso associata $\psi(\Pi)$. Se inoltre $\mathcal{M}$ è dotato di una metrica, possiamo normalizzare i vettori tangenti. La sensitività è allora massima nella direzione del vettore gradiente ed è uguale alla sua lunghezza $\nabla\psi$, denominata *indice di sensitività locale*. Nel contesto decisionale bayesiano, la funzione di perdita, che dipende dal valore di θ, può essere espressa attraverso uno *scoring rule* proprio $S(\theta, \Pi)$, al quale è associata una metrica in $\mathcal{M}$. Inoltre, una misura naturale della sensitività delle decisioni rispetto a variazioni della distribuzione a priori è data da $S(\Pi^x, \Pi_0^x)$, che è della forma sopra menzionata per $f(\theta) = S(\theta, \Pi_0^x)$.

Particolarmente interessanti, tra le metriche derivanti da adeguate regole di scoring sono la metrica di Informazione, associata al log *score*, e la metrica di Hyvärinin, associata a un problema decisionale predittivo. L'indice di sensibilità locale viene calcolato in questi due casi.

Bibliografia

[1] Amari, S. and Nagaoka, H. (2000). *Methods of Information Geometry*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 191. American Mathematical Society and Oxford University Press, Providence, Rhode Island.

[2] Dawid, A. P. (2007). The geometry of proper scoring rules. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 59, 77-93.

[3] Dawid, A. P. and Lauritzen, S. L. (2006). The geometry of decision theory. *In Proceedings of the Second International Symposium on Information Geometry and its Applications*, pp. 22-8. University of Tokyo. 12-16 December 2005.

[4] Dawid, A. P. and Musio, M. (2011). A geometric approach to Bayesian local sensitivity. Manoscritto non pubblicato.

Bernardo Nipoti: Una costruzione di vettori di hazard rate aleatori dipendenti

Bernardo Nipoti[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
email: bernardo.nipoti@unipv.it

Antonio Lijoi
Dipartimento di Economia e Metodi Quantitativi, Università di Pavia

Sunto. Definiamo un vettore di hazard rate aleatori $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ che, in un contesto Bayesiano nonparametrico, può essere usato per modellare due campioni di tempi di sopravvivenza. Nella costruzione proposta, le componenti del vettore sono definite come misture di nuclei governate da misure completamente aleatorie dipendenti $\tilde{\mu}_1$ e $\tilde{\mu}_2$. A loro volta le misure completamente aleatorie sono ottenute come funzionali lineari di processi di Poisson dipendenti costruiti seguendo l'approccio di Griffiths e Milne (1978). Il vettore $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$ risulta avere componenti identicamente distribuite e, congiuntamente, incrementi indipendenti. Quest'ultima proprietà gioca un ruolo chiave nella dimostrazione di un risultato che fornisce una caratterizzazione della distribuzione finale di $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$, o equivalentemente di $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$, dati i due campioni di dati eventualmente censurati. A posteriori, la distribuzione di $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$ coincide con quella di un vettore di misure completamente aleatorie aggiornato e con punti di salto fissati. Tale risultato può essere pensato come l'analogo bivariato della caratterizzazione ottenuta da James (2005) nel caso unidimensionale. Come caso particolare, con un'opportuna scelta di nuclei e misure completamente aleatorie, otteniamo una caratterizzazione della distribuzione finale di un vettore di processi gamma estesi, come definiti da Dykstra e Laud (1981). Con un esempio illustrativo mostriamo come la caratterizzazione ottenuta risulti utile nella costruzione un algoritmo per la stima di funzioni di sopravvivenza dipendenti, dati due campioni.

Bibliografia

[1] Dykstra, R. L. e Laud, P.: "A Bayesian nonparametric approach to reliability". Ann. Statist., 1981.

[2] Griffiths, R. C. e Milne, R. K.: "A class of bivariate Poisson processes". J. Multivariate Anal., 1978.

[3] James, L. F.: "Bayesian Poisson process partition calculus with an application to Bayesian Lévy moving averages". Ann. Statist., 2005.

[1] affiliato anche al Collegio Carloalberto, Moncalieri (TO)

Barbara Pacchiarotti: Grandi deviazioni per ponti di processi Gaussiani condizionati

Lucia Caramellino
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"

Barbara Pacchiarotti
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"
email: pacchiar@mat.uniroma2.it

Simone Salvadei
SEFEMEQ, Università di Roma "Tor Vergata"

Sunto. Questo lavoro tratta il comportamento asintotico del ponte di un processo Gaussiano condizionato a stare in n punti fissati in n istanti passati. Viene considerato il caso in cui gli istanti passati sono fissati e quello in cui gli istanti passati dipendono da un piccolo parametro. In entrambi i casi viene stabilito un principio di grandi deviazioni.

Più precisamente, sia X un processo Gaussiano. Sia $\varepsilon > 0$ e siano $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ le osservazioni per X negli istanti $0 < T_1 < \cdots < T_n < T_{n+1} = T_n + \varepsilon$. Si consideri il processo $\bar{X}^n$, definito dalla seguente uguaglianza in legge

$$\bar{X}^n_{T_n+\cdot} = \left[X_{T_n+\cdot} \,\middle|\, X_{T_1} = x_1, \ldots, X_{T_n} = x_n\right]$$

e sia $\bar{Y}^{n,\varepsilon}$ il ponte di $\bar{X}^n$, cioè il processo che fornisce il comportamento futuro di $\bar{X}^n$ data l'osservazione futura x_{n+1} all'istante $T_{n+1} = T_n + \varepsilon$, che è

$$\begin{aligned} \bar{Y}^{n,\varepsilon}_{T_n+\cdot} &= \left[\bar{X}^n_{T_n+\cdot} \,\middle|\, \bar{X}^n_{T_n+\varepsilon} = x_{n+1}\right] \\ &= \left[X_{T_n+\cdot} \,\middle|\, X_{T_1} = x_1, \ldots, X_{T_n} = x_n, X_{T_n+\varepsilon} = x_{n+1}\right]. \end{aligned}$$

Viene stabilito un principio di grandi deviazioni su $C([0,1])$ per $\{\bar{Y}^{n,\varepsilon}_{T_n+\varepsilon\cdot}\}_\varepsilon$ nel caso $0 < T_1 < \cdots < T_n$ fissati e nel caso $T_j = \varepsilon j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Le stime risultanti per la probabilità di uscita, vengono poi usate per correggere lo schema classico per il calcolo numerico della probabilità che X raggiunga una barriera prima di un istante fissato. Vengono proposti molti esempi: moto Browniano frazionario, moto Browniano frazionario integrato, moto Browniano integrato m volte. Come applicazione viene studiato il comportamento asintotico della probabilità di uscita.

Bibliografia

[1] L. Caramellino, B. Pacchiarotti (2008). "Large deviation estimates of the crossing probability for pinned Gaussian processes". *Advances in Applied Probability*, **40**, 424-453.

[2] L. Caramellino, B. Pacchiarotti, S. Salvadei (2011). "A note on large deviations for pinned Gaussian processes" sottoposto per la pubblicazione.

Andrea Pascucci: Equazioni di Kolmogorov nella valutazione di derivati finanziari di tipo Asiatico

Andrea Pascucci
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: andrea.pascucci@unibo.it

Sunto. In questa conferenza presentiamo alcuni risultati recenti della teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo Kolmogorov che intervengono in fisica e in finanza matematica. Queste equazioni evolutive, che sono generalmente non uniformemente paraboliche, sono naturalmente associate a modelli stocastici con memoria: i derivati finanziari con dipendenza dal passato forniscono un tipico esempio. Tratteremo in particolare il caso delle opzioni Asiatiche di stile Europeo ed Americano. Nell'ultima parte della presentazione introduciamo un metodo perturbativo che consente di ricavare formule di approssimazione per la densità di transizione relativa all'opzione Asiatica aritmetica. Consideriamo infine anche alcuni modelli a volatilità stocastica e con salti di tipo jump-diffusion.

Igor Prünster: Modelli mistura per *hazard rates*: alcuni risultati limite

Pierpaolo De Blasi
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata, Università di Torino

Giovanni Peccati
Unité de Recherche en Mathématiques, Université du Luxembourg

Igor Prünster
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata, Università di Torino
email: `igor.pruenster@unito.it`

Sunto. Un popolare approccio bayesiano non parametrico all'analisi della sopravvivenza consiste nel modellare gli *hazard rates* come misture dirette da una misura completamente aleatoria. In questa comunicazione viene analizzato il comportamento asintotico di tali modelli. Si studia la consistenza della distribuzione a posteriori e, inoltre, si forniscono teoremi centrali del limite per funzionali sia lineari sia quadratici del *hazard rate* a posteriori. I risultati generali sono successivamente specializzati a casi particolari di nuclei e di misure misturanti garantendo la consistenza sotto condizioni minimali e derivando utili approssimazioni asintotiche per le distribuzioni di funzionali.

Pietro Rigo: Successioni scambiabili guidate da una misura aleatoria assolutamente continua

Patrizia Berti
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Modena e Reggio Emilia

Luca Pratelli
Accademia Navale di Livorno

Pietro Rigo
Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi, Università di Pavia
email: `prigo@eco.unipv.it`

Sunto. Sia S uno spazio Polacco e $(X_n : n \geq 1)$ una successione scambiabile di variabili aleatorie a valori in S. Sia α una misura di probabilità aleatoria su S tale che $\alpha(B) = P\big(X_1 \in B \mid \mathcal{T}\big)$ q.c. per ogni Boreliano $B \subset S$, dove $\mathcal{T}$ è la σ-algebra terminale di (X_n). Equivalentemente, α può vedersi come il limite debole quasi certo delle misure empiriche. Si noti anche che α garantisce l'usuale rappresentazione $P\big((X_1, X_2, \ldots) \in \cdot\big) = \int \alpha^\infty(\cdot)\, dP$, dove $\alpha^\infty = \alpha \times \alpha \times \ldots$

Data una misura di Borel σ-finita λ su S, si affrontano due problemi tra loro collegati.

Il *primo problema* è di dare condizioni per $\alpha \ll \lambda$ q.c.. Tali condizioni dovrebbero riguardare soltanto le distribuzioni a dimensione finita $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$. Tra l'altro, condizioni ragionevoli per $\alpha \ll \lambda$ q.c. sono utili in statistica Bayesiana non parametrica. In questo ambito, la distribuzione iniziale è precisamente la distribuzione di probabilità di α. Quindi, $\alpha \ll \lambda$ q.c. significa che l'iniziale è concentrata sulle leggi assolutamente continue (rispetto a λ). Si noti anche che una condizione necessaria per $\alpha \ll \lambda$ q.c. è

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n) \ll \lambda^n \quad \text{per ogni } n \geq 1. \tag{27}$$

Il *secondo problema* è di investigare se $||\alpha_n - \alpha|| \xrightarrow{q.c.} 0$, dove $|| \cdot ||$ è la norma della variazione totale e $\alpha_n(\cdot) = P\big(X_{n+1} \in \cdot \mid X_1, \ldots, X_n\big)$ la misura predittiva. Sorprendentemente, nonostante l'interesse teorico e le connessioni con la consistenza Bayesiana, questo problema è stato finora trascurato. Sono stati ottenuti vari risultati, dei quali ci limitiamo ad elencare i principali.

(a) $\alpha \ll \lambda$ q.c. se e solo se $||\alpha_n - \alpha|| \xrightarrow{q.c.} 0$ e vale la condizione (1).

(b) $||\alpha_n - \alpha|| \xrightarrow{q.c.} 0$ quando $\alpha_c \ll \lambda$ q.c., dove α_c è la parte diffusa di α.

(c) La condizione (1) non basta affinché $\alpha \ll \lambda$ q.c..

(d) Si supponga che valga la condizione (1). Allora $\alpha \ll \lambda$ q.c. se, per ogni compatto $K \subset S$, vale $\sup_n \frac{\int_K g_{n+1}\big(X_1, \ldots, X_n, x\big)^p \, \lambda(dx)}{g_n(X_1, \ldots, X_n)^p} < \infty$ q.c. dove $p > 1$ è una costante (indipendente da K) e g_n una densità di $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n)$ rispetto a λ^n.

Emanuela Rosazza Gianin: Misure di rischio di Haezendonck e quantili di Orlicz

Fabio Bellini
Dipartimento di Metodi Quantitativi, Università di Milano Bicocca

Emanuela Rosazza Gianin
Dipartimento di Metodi Quantitativi, Università di Milano Bicocca
email: emanuela.rosazza1@unimib.it

Sunto. Le misure di rischio di Haezendonck sono state introdotte e discusse in Haezendonck e Goovaerts [6] e in Goovaerts et al. [5] e studiate più tardi anche in Bellini e Rosazza Gianin [1], [2]. Negli ultimi due lavori, ne abbiamo dimostrato la coerenza, fornito la rappresentazione duale su L^∞ e, grazie al loro legame con gli M-functionals, abbiamo ricavato alcune proprietà statistiche dei premi di Orlicz.

In questo lavoro consideriamo le misure di rischio di Haezendonck nell'ambito più ampio e naturale degli Orlicz hearts M^Φ. Applicando alcuni risultati di Cheridito e Li [3] e di Filipovic e Kupper [4] sui cash-additive hulls, siamo in grado di estenderne la rappresentazione duale all'intero M^Φ e di caratterizzare gli scenari ottimi.

Inoltre, in analogia con il caso del CVaR nella formulazione di Rockafellar e Uryasev [8], analizziamo le proprietà dei *quantili di Orlicz* definiti come

$$x^* \in \arg\min \left\{ \alpha H(X-x)^+ + (1-\alpha) H(X-x)^- \right\},$$

dove $H(\cdot)$ rappresenta il premio di Orlicz e $\alpha \in (0,1)$.

Utilizzando alcuni risultati di statistica robusta riguardanti la M-stima (si veda Huber [7]), infine, calcoleremo in alcuni casi particolari la funzione di influenza di x^* e della misura di rischio di Haezendonck.

Bibliografia

[1] Bellini, F., Rosazza Gianin, E. (2008a): "On Haezendonck risk measures", Journal of Banking and Finance 32, 986-994.

[2] Bellini, F., Rosazza Gianin, E. (2008b): "Optimal Portfolios with Haezendonck Risk Measures", Statistics and Decisions 26, 89-108.

[3] Cheridito, P., Li, T. (2009): "Risk measures on Orlicz hearts", Mathematical Finance 19/2, 189-214.

[4] Filipovic, D., Kupper, M. (2007): "Monotone and cash-invariant convex functions and hulls", Insurance: Mathematics and Economics 41, 1-16.

[5] Goovaerts, M.J., Kaas, R., Dhaene, J., Tang, Q. (2004): "Some new classes of consistent risk measures", Insurance: Mathematics and Economics 34/3, 505-516.

[6] Haezendonck, J., Goovaerts, M. (1982): "A new premium calculation principle based on Orlicz norms", Insurance: Mathematics and Economics 1, 41-53.

[7] Huber, P.J., 2009: "Robust Statistics", Second Edition, Wiley, New York.

[8] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2002): "Conditional value-at-risk for general loss distributions", Journal of Banking and Finance 26/7, 1443-1471.

Matteo Ruggiero: Processi di α-diversità e diffusioni Gaussiane inverse normalizzate

Matteo Ruggiero[1]
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata, Università di Torino
email: matteo.ruggiero@unito.it

Stefano Favaro[1]
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata, Università di Torino

Stephen G. Walker
Institute of Mathematics Statistics and Actuarial Science, University of Kent

Sunto. Il processo ad infiniti alleli neutrali (Ethier e Kurtz, 1981) è una diffusione infinito-dimensionale che descrive l'evoluzione temporale delle frequenze delle specie presenti in una popolazione idealmente infinita, soggetta a mutazione e deriva genetica. Questo è stato recentemente esteso al caso di due parametri (Petrov, 2009), che influiscono in modo diverso sul tasso di mutazione totale. Tali modelli sono inoltre associati ai processi di Poisson-Dirichlet, sottoclasse delle misure di probabilità aleatorie (MPA) indotte da partizioni di tipo Gibbs (Gnedin e Pitman, 2006).

In questo lavoro viene introdotta una famiglia di diffusioni infinito-dimensionali, associata ad un'altra sottoclasse di distribuzioni Gibbs data dalle MPA Gaussiane inverse normalizzate (Lijoi, Mena e Prünster, 2005), che descrivono l'evoluzione di infinite frequenze e del tasso di mutazione. Quest'ultimo è anch'esso un processo di diffusione, denominato di α-diversità, derivato come estensione in tempo continuo della corrispondente nozione introdotta da Pitman per le MPA di tipo Gibbs.

La classe di diffusioni è caratterizzata mediante il suo generatore infinitesimale che agisce su un dominio appropriato, e si mostra essere il limite in distribuzione di una successione, opportunamente trasformata, di processi di particelle di tipo Moran, dove le particelle sono campioni estratti da una MPA Gaussiana inversa normalizzata. Sarà inoltre discussa la relazione di non pura inclusione tra le diffusioni associate ai processi di Poisson-Dirichlet e la classe di processi introdotta.

Bibliografia

[1] Ethier, S.N. and Kurtz, T.G. (1981). The infinitely-many-neutral-alleles diffusion model. *Adv. Appl. Probab.* **13**, 429–452.

[2] Gnedin, A. and Pitman, J. (2006). Exchangeable Gibbs partitions and Stirling triangles. *J. Math. Sciences* **138**, 5674–5685.

[3] Lijoi, A., Mena, R.H. and Prünster, I. (2005). Hierarchical mixture modeling with normalized inverse-gaussian priors. *J. R. Statist. Soc. Ser. B* **69**, 715–740.

[4] Petrov, L. (2009). Two-parameter family of diffusion processes in the Kingman simplex. *Funct. Anal. Appl.* **43**, 279–296.

[1]Affiliati inoltre al Collegio Carlo Alberto, Moncalieri (TO).

Carlo Sempi: Teorema di Sklar: una nuova dimostrazione

Fabrizio Durante
School of Economics and Management Free University of Bozen-Bolzano, Bolzano

Juan Fernández-Sánchez
Grupo de Investigación de Análisis Matemático Universidad de Almería, La Cañada de San Urbano, Almería, Spain

Carlo Sempi
Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi", Università del Salento, Lecce
email: carlo.sempi@unisalento.it

Sunto. Il teorema di Sklar rappresenta il fondamento della teoria delle distribuzioni multivariate. A causa della sua importanza, tale teorema ha ricevuto grande attenzione ed è stato dimostrato numerose volte. Fu introdotto, ma non dimostrato da Sklar (1959).

Qui si presenta una nuova dimostrazione basata sul metodo dei mollificatori, usuale nella teoria delle equazioni alle derivate parziali. Dato $\epsilon > 0$, si introduce il mollificatore

$$\varphi_\epsilon(\mathbf{x}) := k \exp\left(\frac{1}{|\mathbf{x}/\epsilon|^2 - 1}\right) \mathbf{1}_{B_1(\mathbf{0})}(\mathbf{x}/\epsilon)\,,$$

la costante k è tale che la norma L^1 sia eguale a 1 e $B_1(\mathbf{0})$ è la sfera unitaria (chiusa) di raggio 1.

Per ogni f.r. $H : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ la convoluzione

$$H_n(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} H(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\varphi_{1/n}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{1/n}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,H(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

definisce una f.r. continua che converge a $H(\mathbf{x})$ in ogni punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ in cui H sia continua.

Una *d–copula* è la restrizione al cubo unitario $\mathbb{I}^d$ della legge di un vettore aleatorio le cui componenti sono distribuite uniformemente in $\mathbb{I}$.

Teorema. *Per ogni f.r.* $H : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ *con marginali* F_1, F_2, ..., F_d *esiste una d–copula* C *tale che*

$$H(\mathbf{x}) = C\left(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)\right).$$

Se le marginali F_1, F_2, ..., F_d *sono continue la copula* C *è unica.*

Bibliografia

[1] A. Sklar, Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8: 229–231 (1959).

Giulio Trombetta: Curve di aggiustamento per responsi binari associati a processi stocastici

Giulio Trombetta
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
email: trombetta@unical.it

Sunto. I risultati che presento, ottenuti in collaborazione con G.D. Costanzo, S. De Bartolo e F. Dell'Accio, riguardano il problema di anticipare un responso binario associato a un processo stocastico. A tal fine si considerano una classe $\mathcal{S}$ di processi stocastici le cui realizzazioni sono funzioni $\varphi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue e lineari a tratti, che soddisfano una particolare condizione geometrica, e la famiglia $\mathcal{R}$ di tutti i responsi binari Y associati ad un processo $X \in \mathcal{S}$. Si introduce la nozione di curva di aggiustamento $\gamma_a : [0,T] \longrightarrow [0,1]$ per il responso binario Y associato al processo stocastico X, che è un utile strumento per predire Y in ogni istante $t \in [0,T]$. Nel caso di processi industriali, che possono essere simulati da una coppia (X,Y), tale curva permette di monitorare e predire la qualità del risultato.

Bibliografia

[1] G.D. Costanzo, S. De Bartolo, F. Dell'Accio, G. Trombetta: " Using observed functional data to simulate a stochastic process via a random multiplicative cascade model "; Proceedings of *COMPSTAT'2010*, Springer 2010.

[2] G.D. Costanzo, F. Dell'Accio, G. Trombetta: " Prediction of an industrial kneading process via the adjustment curve "; atti del convegno *CLADAG 2009*, Springer 2009.

Sezione 8 Fisica matematica

Paolo Aschieri: Quantizzazione per deformazione e geometria differenziale Riemanniana noncommutativa

Paolo Aschieri
Dipartimento di Scienze e Tecnologie avanzate, Università del Piemonte Orientale, Alessandria, Viale T. Michel 11, 15121 INFN sezione di Torino, gruppo collegato di Alessandria
email: `aschieri@to.infn.it`

Sunto. Studiamo connessioni su deformazioni noncommutative di varietà Riemanniane con metrica arbitraria. Questo caso è meno noto del caso in cui la deformazione è compatibile con la metrica (deformazione isospettrale). È rilevante anche perché nella formulazione di teorie di gravità noncommutativa la metrica è appunto un campo dinamico.

I nostri risultati sono nell'ambito della quantizzazione per deformazione, in particolare la noncommutatività è ottenuta tramite twist di Drinfeld triangolare. Data un'algebra di Lie g, denotiamo con $Ug[[\hbar]]$ l'algebra universale di inviluppo sull'anello $\mathbb{C}[[\hbar]]$ delle serie formali nel parametro $\hbar$ a coefficienti in $\mathbb{C}$. Un twist $\mathcal{F} \in Ug[[\hbar]] \otimes Ug[[\hbar]]$ è un elemento invertibile del (completamento del) prodotto tensore di $Ug[[\hbar]]$ che soddisfa certe condizioni di 2-cociclo.

In questo contesto una struttura noncommutativa su una varietà liscia M è un twist $\mathcal{F} \in Ug[[\hbar]] \otimes Ug[[\hbar]]$ dove g è sottoalgebra dei campi vettoriali su M.

L'algebra delle funzioni liscie su M diventa noncommutativa definendo lo star-prodotto $f \star g = \mu \circ \mathcal{F}^{-1}(f \otimes g)$, dove $\mu(f \otimes g) = fg$ è l'usuale prodotto di funzioni.

Se $M = \mathbb{R}^2$ e g è l'algebra di Lie delle traslazioni infinitesime, abbiamo per esempio il twist $\mathcal{F} = e^{\frac{i}{2}\hbar(\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x})}$. Si ottiene così lo star-prodotto di Moyal-Weyl su $\mathbb{R}^2$.

Sollevando l'azione di $\mathcal{F}$ tramite la derivata di Lie si definisce similmente un'algebra tensoriale e un'algebra esterna noncommutativa. Piu' in generale questo formalismo permette di costruire una geometria differenziale (derivata esterna, connessioni,...) e Riemanniana noncommutativa.

Se l'algebra di Lie g è abeliana abbiamo [1]:

Teorema. *Una struttura noncommutativa $\mathcal{F} \in Ug[[\hbar]] \otimes Ug[[\hbar]]$ su una varietà M che è (pseudo)Riemanniana determina un'unica connessione noncommutativa di Levi-Civita (ovvero compatibile con la metrica e a torsione nulla).*

Presentiamo questo teorema e discutiamo la sua generalizzazione al caso in cui l'algebra di Lie g non sia abeliana.

Bibliografia

[1] P. Aschieri, L. Castellani: "Noncommutative gravity solutions", J. Geom. Phys. 60 (2010) 375-393

Sandra Carillo: Equazioni non lineari di evoluzione in spazi di Banach e trasformazioni di Bäcklund

Sandra Carillo[1]
Dipartimento S.B.A.I. - Sez. Matematica, Sapienza Università di Roma
email: carillo@dmmm.uniroma1.it e sandra.carillo@uniroma1.it

Sunto. L'importanza delle trasformazioni di Bäcklund nello studio di equazioni non lineari di evoluzione è ben noto e in particolare testimoniato dalla monografia [13] e dalle referenze ivi incluse. Infatti, sia proprietà quali la struttura Hamiltoniana e/o bi-Hamiltoniana, e gruppi di simmetria ammessi possono essere dimostrati con l'aiuto di tali trasformazioni. I risultati ottenuti per quanto riguarda gerarchie di equazioni non lineari di evoluzione che ammettono un *membro base* del terzo e del quinto ordine sono stati studiati in [8], [2], [9], [11], [12] anche con estensioni al caso di equazioni di evoluzione in due variabili spaziali [10]. Recentemente, si è affrontato, in collaborazione con C. Schiebold, lo studio delle gerarchie di equazioni di Korteweg-de Vries e di Korteweg-de Vries modificata, in forma non commutativa sia in caso scalare che matriciale [3], [4], [5]. Lo studio condotto, e tuttora in corso, si basa su un approccio operatoriale [6], [7], [1], [14] cioè si considerano equazioni operatoriali in opportuni spazi di Banach. Si illustra come le reti di legami mediante trasformazioni di Bäcklund, da un lato, e l'approccio operatoriale, dall'altro, inducano ai risultati ottenuti. Nuove prospettive e problemi attualmente allo studio sono, infine, elencati.

Bibliografia

[1] H. Aden, B. Carl, J. Math. Phys. **37**, 1833–1857, (1996);

[2] S. Carillo, B. Fuchssteiner, J. Math. Phys., **30**, 1606–1613, (1989);

[3] S. Carillo, C. Schiebold J. Math. Phys., **50**, 12pp., (2009),073510;

[4] S. Carillo, C. Schiebold J. Math. Phys., **52** n. 4, 21 pp., (2011);

[5] S. Carillo, C. Schiebold in A. Greco,et al.Ed.s, World Scientific, 74–80, (2010);

[6] B. Carl, C. Schiebold. Nonlinearity **12**, 333–364, (1999);

[7] B. Carl, C. Schiebold. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **102**, 102 (2000);

[8] B. Fuchssteiner, S. Carillo, Physica A, **154**, 467–510, (1989);

[9] B. Fuchssteiner, T. Schulze, S. Carillo, J.Phys.A, **25**, 223, (1992);

[10] W. Oevel, S. Carillo, J. Math. Anal. and Appl., **217**, 161–178, (1998);

[11] W. Oevel, S. Carillo, J. Math. Anal. and Appl., **217**, 179–199, (1998);

[12] C. Rogers, S. Carillo, Physica Scripta, **36**, 865-869, (1987);

[13] C.Rogers, W.K.Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations"*, 2002;

[14] C. Schiebold, Glasgow Math. J. **51**, 147–155, (2009);

[1]Lavoro svolto nell'ambito di G.N.F.M.-I.N.D.A.M. e Sapienza Università di Roma

Claudio Giberti: Stabilità per perturbazioni nei vetri di spin

Claudio Giberti[1]
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria, Università di Modena e Reggio Emilia
email: claudio.giberti@unimore.it

Pierluigi Contucci
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Cristian Giardinà
Dipartimento di Comunicazione e Economia, Università di Modena e Reggio Emilia

Sunto. La teoria della risposta lineare a piccole perturbazioni è un metodo fondamentale in fisica statistica. Perturbando opportunamente l'energia di un sistema esso permette, calcolando semplicemente una derivata, di ottenere relazioni (identità strutturali) fra le quantità fisiche. Queste identità identificano i parametri d'ordine della teoria riducendone i gradi di libertà. Un celebre esempio di questo approccio è la teoria di campo medio della fase ferromagnetica nella quale l'unico parametro d'ordine è rappresentato dalla magnetizzazione. Lo scopo del presente lavoro è, in modo analogo, di introdurre una nuova stabilità per la risposta lineare nella teoria dei vetri di spin. Una precedente teoria di stabilità lineare (stabilità stocastica) introdotta in [1] ha permesso di ricavare una famiglia infinita di identità strutturali polinomiali (identità di Aizenman-Contucci). D'altra parte una classe più ampia di identità, note come le identità di Ghirlanda-Guerra, [2] sono state ottenute dal controllo delle fluttuazioni dell'energia nello stato di equilibrio dello spin glass, prima nell'approssimazione di campo medio, poi per i modelli a corta portata [3],[4]. In questo lavoro dimostriamo la stabilità dei vetri di spin rispetto ad una nuova perturbazione dello stato di equilibrio da cui si ricava l'intera famiglia delle identità di Ghirlanda-Guerra.

Bibliografia

[1] M. Aizenman, P. Contucci, *J. Stat. Phys.*, **92**, N. 5/6, 765–783, (1998).

[2] S. Ghirlanda, F. Guerra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**, 9149–9155 (1998).

[3] P. Contucci, C. Giardinà, *Annales Henri Poincaré*, **6**, No. 5, 915–923 (2005).

[4] P. Contucci, C. Giardinà, *J. Stat. Phys.*, **126**, 917–931 (2007).

[5] P. Contucci, C. Giardinà, C.Giberti, arXiv:1101.2858v1

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Progetto di Internazionalizzazione 2010 *"Competition and Cooperation in Social and Biological Systems"* finanziato dalla Fondazione Cassa di Risparmio di Modena

Annalisa Marzuoli: Algoritmi quantistici per invarianti geometrici

Annalisa Marzuoli[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
email: annalisa.marzuoli@unipv.it

Sunto. Il calcolo di invarianti polinomiali dei nodi (il cui prototipo è il polinomio di Jones) è un problema considerato computazionalmente 'intrattabile', nel senso che non esiste alcun algoritmo classico efficiente (polinomiale in funzione della lunghezza della stringa che rappresenta l'input) che lo possa risolvere. Da una decina di anni è stato introdotto (da M. Freedman e collaboratori) un nuovo schema per la computazione quantistica – basato sulle teorie di campo topologiche con azione di Chern-Simons – che ha permesso di affrontare in una prospettiva del tutto innovativa questo tipo di problemi algoritmici.

Si presenteranno qui risultati recenti riguardanti la costruzione esplicita di algoritmi quantistici efficienti per calcolare (con una precisione arbitrariamente piccola e in tempo polinomiale rispetto alla complessità dell'input) invarianti polinomiali dei nodi che generalizzano il polinomio di Jones nonché invarianti topologici delle 3–varietà chiuse.

Verranno anche analizzate le implicazioni di tali risultati in riferimento alle relazioni tra i concetti di 'solubilità' di modelli fisico–matematici di tipo geometrico e l' 'effettiva' calcolabilità dei funzionali associati.

Bibliografia

[1] S Garnerone, A Marzuoli, M Rasetti "Efficient quantum processing of 3-manifold topological invariants" Adv. Theor. Math. Physics **13** 1601-1652 (2009)

[2] A Marzuoli "Toy models in Physics and the reasonable effectiveness of Mathematics" in *Deduction, Computation, Experiment: Exploring the Effectivess of Proof* R Lupacchini, G Corsi Eds. (Springer–Verlag Italia) (2008), pp. 49-64

[1]Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2008 Metodi Geometrici nella teoria delle onde non lineari

Valter Moretti: Radiazione di Hawking ed effetto tunnel: un approccio basato sulla teoria algebrica dei campi

Valter Moretti
Dipartimento di Matematica, Università di Trento
email: moretti@science.unitn.it

Nicola Pinamonti
Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Sunto. Si prova come la recente intepretazione della radiazione di hawking in termini di effetto tunnel abbia un senso rigoroso in teoria algebrica dei campi quantistici in riferimento a stati di Hadamard e generalizzando alcuni ben noti risultati dovuti a Fredenhagen-Haag e Kay-Wald.

Bibliografia

[1] M. K. Parikh, F. Wilczek, *"Hawking Radiation as Tunneling",* Phys. Rev. Lett. **85** 5042 (2000).

[2] V. Moretti, N. Pinamonti: State independence for tunneling processes through black hole horizons. arXiv:1011.2994v1 [gr-qc]

[3] K. Fredenhagen and R. Haag, *"On the derivation of Hawking radiation associated with the formation of a black hole,"* Commun. Math. Phys. **127** 273 (1990).

[4] B. S. Kay, R. M. Wald, *"Theorems On The Uniqueness And Thermal Properties Of Stationary, Nonsingular, Quasifree States On Space-Times With A Bifurcate Killing Horizon"*, Phys. Rept. **207** 49 (1991).

Chiara Pagani: Fibrati ed istantoni in geometria non-commutativa

Chiara Pagani
Dipartimento di Matematica, Università di Lussemburgo
email: chiara.pagani@uni.lu

Sunto. Negli anni cinquanta Yang e Mills elaborarono una teoria fisica volta a descrivere le interazioni forti tra le particelle. Tale teoria, oggi nota come teoria di gauge non-abeliana, prevedeva una Lagrangiana con potenziale a valori nell'algebra di Lie di $SU(2)$ e un particolare comportamento di tale potenziale sotto l'azione del gruppo delle simmetrie interne. Una prima soluzione ad equazioni di campo di una teoria di Yang-Mills fu data da Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin e oggi ci si riferisce ad essa come *istantone BPST* (e più in generale ad *istantoni* per soluzioni auto-duali delle equazioni di Yang-Mills).

Se inizialmente fu ignorato il legame fra la teoria di Yang-Mills e la teoria matematica dei fibrati e connessioni su di essi, a partire dagli anni '70 tale rapporto venne riconosciuto e portò a notevoli sviluppi sia in fisica che in matematica. Un potenziale di Yang-Mills su $\mathbb{R}^4$ si identifica allora con l'espressione locale di una connessione su di un $SU(2)$-fibrato principale sulla sfera S^4 e la 'carica' k dell'istantone corrisponde ad un invariante topologico del fibrato. Soluzioni autoduali delle equazioni di Yang-Mills furono costruite da Atiyah, Drinfeld, Hitchin e Manin (*costruzione ADHM*) e la loro classificazione fu ottenuta tramite l'utilizzo della teoria dei twistori sviluppata nel frattempo da Penrose. Fu dimostrato che lo spazio dei moduli di $SU(2)$-istantoni è una varietà di dimensione reale $8k-3$ e lo studio di tale spazio dei moduli ha portato a notevoli progressi in topologia, quali il teorema di Donaldson.

Negli ultimi anni molta attenzione è stata rivolta al problema di sviluppare una teoria dei fibrati e connessioni nell'ambito della geometria non-commutativa. Quest'ultima è basata sulla rilettura algebrica della geometria e sta acquisendo sempre più interesse anche per i suoi possibili utilizzi in fisica.

Nel presente seminario verranno presentati alcuni aspetti base della teoria dei fibrati in geometria non-commutativa e in particolare deformazioni in tale ambito del fibrato di Hopf $S^7 \to S^4$ corrispondente all'istantone BPST. Considereremo la costruzione di istantoni su diverse classi di sfere noncommutative: le 'quantiche' e le 'isospettrali'. Tempo permettendo discuteremo anche dello spazio dei moduli e di recenti sviluppi nello studio di istantoni non-commutativi.

Bibliografia

[1] G. Landi, C. Pagani, C. Reina: "A Hopf bundle over a quantum four-sphere from the symplectic group", Commun. Math. Phys. 263 (1), 65–88, 2006.

[2] G. Landi, C. Pagani, C. Reina, W. van Suijlekon: " Noncommutative families of instantons." Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. 12.

Fabio Perroni: Orbifolds in Geometria ed in Fisica

Fabio Perroni
Dipartimento di Matematica, Università di Bayreuth
email: `fabio.perroni@uni-bayreuth.de`

Sunto. In due articoli apparsi nel 1985 e 1986 Dixon, Harvey, Vafa e Witten hanno introdotto un metodo generale per studiare la propagazione delle stringhe sul quoziente di una varietà complessa liscia per un gruppo finito di automorfismi allo scopo di fornire modelli realistici di teorie di stringhe. Di fatto tali modelli sono risultati essere più appropriati rispetto al modello toroidale studiato in precedenza in quanto permettono di ridurre le extra dimensioni da dieci a quattro ed inoltre presentano notevoli vantaggi dal punto di vista computazionale.

Dall'altro lato questi studi hanno condotto ad importanti sviluppi in ambito geometrico ed all'introduzione di nuovi invarianti geometrici per gli *orbifolds*, questi ultimi sono spazi localmente modellati dal quoziente di varietà liscie per gruppi finiti. Di particolare rilievo sono gli invarianti di Gromov-Witten e la coomologia orbifold; essi sono stati definiti da Chen e Ruan per orbifolds simplettici e da Abramovich, Graber e Vistoli per stacks di Deligne-Mumford lisci. Inoltre sono state formulate diverse congetture che mettono in relazione alcuni aspetti della geometria degli orbifolds con quelli della geometria di ogni risoluzione delle loro singolarità. In questo ambito, nel 2001 Ruan ha congetturato che, sotto opportune ipotesi, l'anello di coomologia orbifold $H^*_{\mathrm{orb}}(\mathcal{X})$ di un orbifold $\mathcal{X}$ è isomorfo all'anello $QH^*_{q=c}(Y)$ che si ottiene dalla coomologia quantistica di ogni risoluzione crepante Y dello spazio dei moduli *coarse* X di $\mathcal{X}$ per particolari valori c dei parametri quantistici q. Questa congettura è nota come *Cohomological Crepant Resolution Conjecture* (CCRC in breve).

Nel seminario presenterò alcuni risultati ottenuti dallo studio della CCRC nel caso in cui $\mathcal{X}$ sia localmente isomorfo a $\mathbb{C}^k \times [\mathbb{C}^2/G]$, con $G \leq SL(2,\mathbb{C})$ sottogruppo finito [1]. Questi includono il fatto che la congettura così come è stata formulata non può valere ed una modifica della CCRC. Darò anche alcuni cenni delle dimostrazioni della validità di tale modifica per $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ [1] e per alcuni spazi proiettivi pesati di dimensione tre e di tipo Gorenstein [2], [3].

Bibliografia

[1] F. Perroni: "Chen-Ruan cohomology of ADE singularities", Int. J. Math. 18 (2007), 1009–1059.

[2] S. Boissière, É. Mann, F. Perroni: "The cohomological crepant resolution conjecture for $\mathbb{P}(1,3,4,4)$", Int. J. Math. 20 (2009), no. 6, 791–801.

[3] S. Boissière, É. Mann, F. Perroni: "Computing certain Gromov-Witten invariants of the crepant resolution of $\mathbb{P}(1,3,4,4)$", Nagoya Math. J. 201 (2011), 1–22.

Eugenio Regazzini: Proprietà asintotiche di soluzioni di equazioni cinetiche e teorema centrale del limite

Eugenio Regazzini
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia
email: eugenio.regazzini@unipv.it

Emanuele Dolera
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata "G. Vitali", Università di Modena

Sunto. Si riassumono alcuni risultati relativi al comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni cinetiche spazialmente omogenee *à la* Boltzmann, dimostrati sulla base di argomentazioni riconducubili alla formulazione generale del teorema centrale del calcolo delle probabilità. Si pongono in evidenza alcuni miglioramenti, rispetto ai risultati ottenuti con impostazioni prevalentemente analitiche, conseguenti all'uso dei metodi probabilistici.

Bibliografia

[1] F. Bassetti, L. Ladelli, D. Matthes, (2010): "Central limit theorem for a class of one-dimensional kinetic equations", *Probab. Theory Relat. Fields*

[2] E. Dolera, (2010): "Rapidity of convergence to equilibrium of the solution of the Boltzmann equation for Maxwellian molecules". Ph.D. thesis, Università degli Studi di Pavia.

[3] E. Dolera, E. Gabetta, E. Regazzini, (2009): "Reaching the best possible rate of convergence to equilibrium for solutions of Kac's equation via central limit theorem", *Ann. Appl. Probab.* **19** 186-201.

Alessandro Tanzini: Quantizzazione del sistema di Hitchin e modelli di matrice generalizzati

Alessandro Tanzini
Settore di Fisica Matematica, SISSA
email: tanzini@sissa.it

Sunto. Definiamo un modello di matrici generalizzato la cui curva spettrale coincide con quella del sistema integrabile di Hitchin. Studiamo la quantizzazione del sistema di Hitchin in termini della beta deformazione della misura del modello di matrici generalizzato e mostriamo come questo riproduca in un particolare limite le Hamiltoniane quantistiche del sistema di Hitchin sulla sfera e sul toro con punture. Discutiamo infine le motivazioni e applicazioni di questi risultati nel contesto delle teorie di gauge supersimmetriche.

Sezione 9 Modelli matematici e applicazioni

Gian Luigi Agnoli: Aspetto lagrangiano per alcuni problemi della biologia matematica

Gian Luigi Agnoli
Università di Bologna
email: umi@dm.unibo.it

Sunto. Nello studio di fenomeni ecologici e biologici è fondamentale conoscere soluzioni e proprietà del sistema autonomo,

$$\dot{X} = A \cdot X. \tag{28}$$

In realtà le equazioni che governano i suddetti fenomeni sono assai più complicate ma le inevitabili semplificazioni (è questa una scelta obbligata data la complessità del problema) portano sempre a considerare il sistema (1).

In biologia, la matematica deve affrontare lo studio di modelli governati da equazioni di questo tipo:

$$\dot{q}_i = f_i(q, \dot{q}, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{29}$$

ove le funzioni f dipendono dal modello in esame e sono **non lineari**.

Cercheremo di dare un aspetto **lagrangiano** a questi problemi.

Il primo fu **Kerner** che introdusse la lagrangiana per lo studio dei sistemi biologici.

Kerner dimostra che la funzione hamiltoniana è un integrale del moto per il sistema di equazioni differenziali (2).

I lavori precedenti nella biologia matematica secondo la formulazione lagrangiana fallirono mentre furono affrontate le due questioni:

i) quali sono le proprietà che un sistema di equazioni differenziali ordinarie deve verificare per assicurare l'esistenza di una funzione lagrangiana;
ii) esiste un algoritmo capace di costruire la funzione lagrangiana di equazioni dinamiche.

Tali questioni furono considerate nel campo della meccanica classica. In effetti, le condizioni per l'esistenza di una lagrangiana per un sistema dinamico furono formulate per la prima volta da **Helmholtz** il quale affermò che una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una lagrangiana per un sistema di equazioni differenziali ordinarie è che il sistema

$$F_i(q, \dot{q}, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

sia **autoaggiunto** da un punto di vista variazionale.

Carlo Banfi: Un'ipotesi alternativa per la conduzione del calore

Carlo Banfi
Facoltà di Scienze M.F.N., Università Cattolica del S. Cuore, Brescia
email: carlo.banfi@dmf.unicatt.it

Sunto. Il ponderoso testo di H. Fuchs (The dynamics of Heat 1996) e i lavori della scuola di Karlsrue (Falk, Hermann, Schmid) danno una trattazione della Termofisica in cui sostanzialmente si introduce l'entropia come grandezza primitiva, rifacendosi anche alle idee di Callendar (1911) e di Trusdell. La scuola di Karlsruhe ha prodotto anche un interessantissimo corso di fisica a livello liceale disponibile in rete anche in italiano (Karlsruer Physikkurs). In questa trattazione si sviluppa l'idea dell'entropia come portatore dell'energia termica (Falk, Herrmann, Schmid; Energy forms or energy carriers? Am. J. Phys. 1983).

Da queste trattazioni nasce l'idea di introdurre per la conduzione del calore una ipotesi alternativa alla legge di Fourier: $\vec{q} = -k_1 \text{ grad } \theta$, dove θ è la temperatura assoluta e $\vec{q}$ il vettore densità di flusso dell'energia termica. La nuova ipotesi può essere formulata nel modo seguente

$$\vec{h} = -k_2 \text{ grad } \theta$$

dove $\vec{h}$ è il vettore densità di flusso di entropia. Tenendo presente la relazione $\vec{q} = \theta\ \vec{h}$, partendo dal bilancio termico, analogamente a quanto si fa nel caso della legge di Fourier, con alcuni passaggi si arriva facilmente all'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \triangle \theta^2.$$

Questo risultato è particolarmente interessante perché l'equazione trovata rientra nel tipo delle cosiddette PME (porous medium equations), equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, ampiamente studiate (vedi J. L. Vasquez, The Porous Medium Equation, 2007). Sostanzialmente con questa equazione la trasmissione del calore segue leggi analoghe a quella della propagazione di un fluido in un mezzo poroso. In particolare si ha una velocità di propagazione finita (vedi cap. 14 del Vasquez).

Bibliografia

[1] C. Banfi: "Modello matematico per lo studio della Termofisica", Quaderni del Seminario Matematico di Brescia n. 13/2008

Marzia Bisi: Modelli cinetici per l'analisi di economie di mercato

Marzia Bisi
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: marzia.bisi@unipr.it

Sunto. Negli ultimi anni sono state proposte varie tipologie di modelli per lo studio dell'evoluzione della distribuzione della ricchezza in una semplice economia di mercato. Mentre negli anni settanta l'attenzione era stata rivolta a modelli di tipo Lotka–Volterra nell'ambito della teoria dei sistemi dinamici, in tempi più recenti sono stati proposti modelli cinetici in cui si prendono in considerazione i singoli individui, che interagiscono fra loro scambiandosi frazioni della propria ricchezza. L'analisi scende pertanto al livello microscopico dei singoli agenti e delle loro mutue interazioni, proponendosi di determinare il numero atteso di individui che posseggono una ben precisa assegnata ricchezza, cioè la distribuzione del reddito nella popolazione. L'evoluzione temporale di tale distribuzione di ricchezza può essere descritta da un'equazione di tipo Boltzmann, analoga a quella solitamente utilizzata per descrivere la dinamica dei gas rarefatti, ovviamente quando le ipotesi di validità di tale equazione cinetica sono soddisfatte.

I modelli sono costruiti a partire dall'assegnazione delle leggi di interazione microscopiche, che variano a seconda delle assunzioni fatte. Il più semplice è un modello conservativo e deterministico, per il quale le transazioni tra gli agenti portano asintoticamente a una distribuzione in cui tutti gli individui detengono la medesima ricchezza. Sono stati sviluppati anche modelli più complessi, in cui vengono introdotte variabili aleatorie, che descrivono la possibilità di speculazione nel mercato, con i rischi ad essa annessi. Per questi modelli, pur se conservativi in media, non è più possibile determinare univocamente le caratteristiche della distribuzione della ricchezza per tempi grandi; in alcuni casi limite particolari è tuttavia possibile dimostrare l'esistenza di distribuzioni asintotiche con "code di Pareto", cioè tali che non tutti i momenti esistono finiti [1]. Recentemente abbiamo cercato di generalizzare i modelli cinetici sopra citati, con l'inserimento di altri fenomeni caratteristici delle principali economie di mercato: i meccanismi di tassazione ed eventuale ridistribuzione delle ricchezze prelevate [2]. Ci proponiamo di tradurre questi fenomeni in termini matematici e di valutarne gli effetti sulla distribuzione globale della ricchezza tra la popolazione.

Bibliografia

[1] B. Düring, D. Matthes, G. Toscani, A Boltzmann type approach to the formation of wealth distribution curves, *Riv. Mat. Univ. Parma*, Serie 8, **1** (2009), 199–261.

[2] M. Bisi, G. Spiga, G. Toscani, Kinetic models of conservative economies with wealth redistribution, *Commun. Math. Sci.*, **4** (2009), 901–916.

Margherita Carletti: Analisi di incertezza e sensitività per un modello stocastico di risposta immunitaria con memoria nell'uomo

Margherita Carletti
Dipartimento di Scienze di Base e Fondamenti, Università di Urbino "C. Bo"
email: margherita.carletti@uniurb.it

Gaetano Zanghirati
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Sunto. In questa comunicazione si considera un modello retto da equazioni differenziali con memoria (SDDEs) che descrive, in contesto stocastico, la dinamica della Risposta Immunitaria nell'uomo. Il modello stocastico è un'estensione del modello deterministico introdotto nel 2007 da Beretta, Carletti, Marino e Kirschner [1]. Del modello stocastico, un ampio studio sulla stabilità dell'equilibrio positivo è stato svolto da Notarangelo e Buckwar in [2].

Nella comunicazione verranno presi in esame gli aspetti computazionali dello studio del modello. Mediante un'indagine con simulazioni numeriche delle soluzioni delle SDDEs che caratterizzano il modello stesso, si indagheranno le condizioni sufficienti per l'asintotica stabilità in media quadratica dell'equilibrio positivo previste nei risultati analitici in [2]. Verrà inoltre condotta un'analisi di incertezza e sensitività del modello stocastico di risposta immunitaria umana. L'incertezza dell'output sarà studiata rispetto all'incertezza sui parametri del sistema e verranno fornite soglie sui ritardi mediante le quali si possono predire gli switch di stabilità dell'equilibrio positivo [3]. I risultati della sperimentazione verranno infine discussi anche dal punto di vista biologico.

Bibliografia

[1] E. Beretta, M. Carletti, D.E. Kirschner, S. Marino: "Stability analysis of a mathematical model of the immune response with delays", in *Mathematics for Life Science and Medicine*, Chapter 8, 177-206, Springer, 2007.

[2] G. Notarangelo, E. Buckwar: "Asymptotic mean-square stability analysis of a stochastic model for the human immune response with memory", in preparation.

[3] M. Carletti, G. Zanghirati, "Numerical simulation and sensitivity analysis of a stochastic model for the human immune response with memory", in preparation.

Andrea Cerri: Un nuovo algoritmo sul calcolo della distanza di matching 2-dimensionale per il confronto di forme

Silvia Biasotti
IMATI, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Genova

Daniela Giorgi
IMATI, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Genova

Andrea Cerri[1]
Pattern Recognition and Image Processing Group, Faculty of Informatics, Vienna University of Technology, Vienna, Austria
email: `acerri@prip.tuwien.ac.at,cerri@dm.unibo.it`

Patrizio Frosini
ARCES e Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Sunto. La Teoria della Taglia si è recemente dimostrata un promettente approccio geometrico/topologico per l'analisi ed il confronto di forme. Inizialmente introdotta per lo studio di proprietà di forma 1-dimensionali, descritte da funzioni continue a valori nei reali (ad esempio la funzione distanza dal baricentro o la funzione distanza geodetica), la Teoria della Taglia è stata successivamente generalizzata al caso di proprietà di forma multi-dimensionali, modellizzabili con funzioni continue a valori in $\mathbb{R}^k$ (ad esempio, la rappresentazione del colore nel modello RBG o le coordinate di un punto nello spazio Euclideo 3-dimensionale). Una tale generalizzazione del setting teorico ha portato alla formalizzazione di un nuovo descrittore di forma, denominato *funzione di taglia k-dimensionale*, e alla definizione di una distanza per confrontare differenti funzioni di taglia k-dimensionali, cioè la *distanza di matching k-dimensionale.* La definizione di questa distanza dipende da un certo estremo superiore calcolato su un insieme di cardinalità infinita. Dal punto di vista computazionale, questo implica la necessità di sostituire il calcolo dell'estremo superiore con quello di un massimo, e quindi considerare una approssimazione della distanza di matching k-dimensionale.

Questo contributo propone un nuova soluzione algoritmica per il caso $k = 2$. Più precisamente, verranno presentati alcuni risultati teorici sull'approssimazione della distanza di matching 2-dimensionale, sui quali si fonderà la formulazione di un algoritmo per il calcolo della detta distanza, a meno di un errore di approssimazione scelto arbitratriamente. Verrano inoltre illustrati alcuni risultati sperimentali allo scopo di validare il nuovo algoritmo. Per ulteriori dettagli si rimanda a [1].

Bibliografia

[1] S. Biasotti, A. Cerri, P. Frosini, e D. Giorgi: "A new algorithm for computing the 2-dimensional matching distance between size functions", rapporto tecnico n. 2821, Università di Bologna (2010), http://amsacta.cib.unibo.it/2821/.

[1]Lavoro parzialmente supportato dalle attività CNR DG.RSTL.050.008, ICT.P10.009.001 e dall'Austrian Science Fund(FWF) grant n. P20134-N13.

Fernanda D'Ippoliti: Valutazione di opzioni Europee ed Americane con dividendi discreti in un modello a volatilità stocastica e salti

Fernanda D'Ippoliti
Dipartimento di Scienze, Università di Chieti-Pescara
email: dippolit@sci.unich.it

Carl Chiarella
University of Techonology, Sidney

Enrico Moretto
Dipartimento di Economia, Università dell'Insubria, Varese

Sara Pasquali
CNR-IMATI, Milano

Sunto. Nei mercati finanziari la maggioranza degli strumenti derivati è scritta su titoli che pagano almeno un dividendo discreto ed inoltre sono di tipo Americano. Molti approcci finora seguiti presentano diverse problematiche che possono condurre ad arbitraggi. Il più recente lavoro di Haug et al. [3] segna un passo avanti nella valutazione di opzioni in presenza di dividendi discreti grazie a: (i) la distinzione tra il prezzo di mercato del titolo e quello del titolo in cui il dividendo viene reinvestito, di solito un fondo, e (ii) l'introduzione di una nuova politica per i dividendi che prevede la possibilità di pagare il dividendo dichiarato solo se l'azienda è in grado, vale a dire solo una percentuale del dividendo dichiarato in precendenza. Purtroppo tale approccio soffre della mancanza di un modello a volatilità stocastica con salti sia per il prezzo del titolo che per la volatilità, il quale è considerato da tempo come la descrizione dinamica più completa per gli strumenti derivati sovra citati. Oltre a sopperire a tale mancanza, in questo lavoro si propongono due approcci di soluzione, uno con una rappresentazione integrale della soluzione stessa e il secondo risolvendo numericamente (metodo "sparse grid" proposto da Chiarella e Kang [2]) l'equazione integro-differenziale legata alla valutazione del titolo.

Bibliografia

[1] C. Chiarella e B. Kang: "The evaluation of American coumpound option prices under stochastic volatility using the sparse grid approach", Quantitative Finance Research Paper No. 245, 2009.

[2] E. G. Haug, J. Haug, A. Lewis: "Back to Basics: a new approch to the discrete dividend problem", Wilmott Magazine, pp. 37-47, 2003.

Giulia Deolmi: Studio di un problema inverso parabolico di convezione-diffusione-reazione

Giulia Deolmi
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università degli studi di Padova
email: gdeolmi@math.unipd.it

Fabio Marcuzzi
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università degli studi di Padova

Sunto. Dati $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $[0, t_f] \subset \mathbb{R}$, sia $C: \ [0, t_f] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare sufficientemente regolare che modella la concentrazione di una sostanza S in un mezzo fluido M. Si consideri il seguente modello diretto di convezione-diffusione-reazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} - \mu \Delta C + \nabla \cdot (\mathbf{u} C) + \sigma C = 0, & in \quad \Omega \\ C = C_0, & on \quad \{0\} \times \partial\Omega \\ \mu \frac{\partial C}{\partial n} = C_{in}, & on \quad [0, t_f] \times \Gamma_{in} \\ C = C_f, & on \quad [0, t_f] \times \Gamma_{up} \\ \mu \frac{\partial C}{\partial n} = 0, & on \quad [0, t_f] \times \Gamma_{down} \\ C = 0, & on \quad [0, t_f] \times \Gamma_r \end{cases}$$

dove $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{up} \cup \Gamma_{down} \cup \Gamma_r$. S viene rilasciata in M attraverso Γ_{in}. Si supponga noto il campo di velocità $\mathbf{u}$: esso può essere simulato numericamente (usando per esempio le equazioni di Navier Stokes incomprimibile o di Eulero, a seconda che M sia un liquido o un gas rispettivamente) o misurato sperimentalmente (per esempio utilizzando la Particle Image Velocimetry (PIV)). Il problema consiste nella stima del flusso C_{in} di S, supponendo di conoscere C_s tale che

$$C = C_s, \qquad on \quad [0, t_f] \times \Gamma_{down}.$$

Questo problema inverso ha due possibili applicazioni: se si suppone che C_s sia noto da *misure sperimentali*, lo scopo è determinare numericamente il flusso di S emesso in Γ_{in} tale che la concentrazione in Γ_{down} approssimi C_s; se invece C_s è una *concentrazione massima ammissibile* di S in Γ_{down}, lo stesso problema si traduce nella ricerca del flusso massimo di S rilasciabile in Γ_{in} [3].

Per la minimizzazione della funzione di costo, confronteremo un algoritmo di Gauss Newton [2] con tecniche che utilizzano il modello aggiunto [3]. Adotteremo inoltre metodi di riduzione di modello [1] per diminuire il costo computazionale.

Bibliografia

[1] A.C. Antoulas, "Approximation of large-scale dynamical systems", SIAM, 2005

[2] B. Kaltenbacher, A. Neubauer, O. Scherzer "Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems", Walter de Gruyter, 2008

[3] N. Zabaras, G. Z. Yang, "A functional optimization formulation and implementation of an inverse natural convection problem", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **144**, 1997, 245-274

Michela Eleuteri: Il modello di Souza-Auricchio... si fa in tre!

Michela Eleuteri[1]
Dipartimento di Matematica di Trento
email: eleuteri@science.unitn.it

Sunto. Le leghe con memoria di forma (Shape Memory Alloys - SMA) sono una classe molto particolare di leghe metalliche che hanno la proprietà di ricordare la loro forma originaria dopo essere state piegate o distorte; il loro largo impiego in molti campi è stata la motivazione per un crescente interesse nella direzione di una corretta ed esaustiva modellizzazione del loro comportamento macroscopico. Molti modelli considerano trasformazioni di fase completamente reversibili; il più significativo tra questi è il *modello di Souza-Auricchio* (SA) che rispetto ai modelli precedenti mostra indubbi vantaggi dal punto di vista della semplicità e della robustezza. All'interno di questa comunicazione accenneremo a tre lavori che hanno come punto di partenza il modello di SA. Nel lavoro [1] ci siamo occupati della parte analitica di un nuovo modello tri-dimensionale, che migliora il modello di SA includendo effetti di non elasticità permanente. Abbiamo provato l'esistenza di soluzioni energetiche e convergenza delle stesse (nel senso della Γ-Convergenza). Nel lavoro [2] invece, ci siamo interessati al problema del controllo termico: da un lato, abbiamo formulato un nuovo risultato di esistenza per determinare l'evoluzione meccanica quasistatica della lega a temperatura fissata (chiedendo per essa minore regolarità); dall'altro abbiamo provato l'esistenza di un controllo ottimo per una opportuna larga classe di funzionali costo. Un altro approccio è stato usato nel lavoro [3]. Infatti i classici modelli per SMA possono essere anche descritti usando una relazione costitutiva che usi un operatore di isteresi; per esempio la relazione stress-strain nel modello di SA usa un operatore di tipo *play*. L'analisi matematica del modello di SA mostra che anche nel caso quasistatico il bilancio dell'energia è mal posto e una regolarizzazione della funzione della temperatura è necessaria per avere consistenza termodinamica. Noi abbiamo proposto una regolarizzazione ispirata dal modello di Preisach, mostrando che l'intero modello è consistente dal punto di vista termodinamico.

Bibliografia

[1] M. Eleuteri, L. Lussardi, U. Stefanelli: *"A rate-independent model for permanent inelastic effects in shape memory materials"*, Netw. Heter. Media, **6** (1), (2011), 145-165.

[2] M. Eleuteri, L. Lussardi, U. Stefanelli: *"Thermal control of the Souza-Auricchio model for shape memory alloys"*, preprint (2011).

[3] M. Eleuteri, J. Kopfová, P. Krejčí: *"Solutions to balance laws in materials with temperature driven memory"*, in preparation.

[1]Con il supporto dei progetti: *"Mathematical Modelling of Processes in Hysteresis Materials"* e *"BioSMA: Mathematics for Shape Memory Technologies in Biomechanics"*

Giulia Giantesio: Moto obliquo con un punto di ristagno per un fluido Newtoniano immerso in un campo elettromagnetico

Giulia Giantesio
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
email: giulia.giantesio@unife.it

Alessandra Borrelli
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Maria Cristina Patria
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Sunto. Come è ben noto, essendo le equazioni di Navier Stokes non lineari, solo in casi molto particolari è possibile ottenerne soluzioni espresse in termini di funzioni elementari. Tuttavia, se la geometria del problema è particolarmente semplice, per alcuni moti, si possono trovare trasformazioni di similarità che riducono le equazioni di Navier Stokes ad un sistema non lineare di equazioni differenziali ordinarie, più facile da studiare. Ciò avviene ovviamente anche per le equazioni della Magnetoidrodinamica. Un esempio è costituito dai moti con un punto di ristagno. Questi moti si osservano ogni volta che un fluido colpisce un ostacolo. In letteratura sono studiati moti piani ortogonali ed obliqui ([1], [2]), moti tridimensionali, moti con particolari simmetrie, ecc.

Durante la comunicazione verrà analizzato il moto stazionario bidimensionale obliquo con un un punto di ristagno per un fluido Newtoniano elettricamente conduttore, qualora sia presente un campo elettromagnetico esterno. L'ostacolo è rappresentato da una parete piana, rigida, fissa che viene colpita dal fluido con un arbitrario angolo di incidenza. Saranno esaminate alcune interessanti situazioni fisiche. In particolare si dimostrerà che se il campo elettrico esterno è nullo ed il campo magnetico esterno giace nel piano del moto, con una direzione non parallela alla frontiera, allora, nell'ipotesi di trascurabilità del campo magnetico indotto, il moto obliquo con un punto di ristagno è possibile se e solo se il campo magnetico esterno è parallelo alla dividing streamline. In tutti i casi considerati verrà provato che le equazioni della Magnetoidrodinamica ammettono soluzioni di similarità e si mostrerà che lo studio del moto è ricondotto ad un problema ai valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie, di cui si fornisce la soluzione numerica. Infine sarà descritto il comportamento del fluido nello strato vicino alla frontiera in cui la viscosità ha un effetto rilevante.

Bibliografia

[1] P. Drazin, N. Riley : "The Navie-Stokes equations. A classification of flows and exact solutions", London Mathematical Society, Lecture notes series 334, Cambridge University Press, 2007.

[2] R.M. Tooke, M.G. Blyth : "A note on oblique stagantion-point flow", Phys. Fluids 20 (2008), 1-3.

Rosanna Manzo: Un modello continuo-discreto di reti di produzione

Ciro D'Apice
Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Informatica, Università degli studi di Salerno

Rosanna Manzo
Dipartimento di Ingegneria Elettronica e Informatica, Università degli studi di Salerno
email: rmanzo@unisa.it

Benedetto Piccoli
Department of Mathematical Sciences, Rutgers University, New Jersey, U.S.A.

Sunto. La modellazione delle catene di produzione è caratterizzata da diversi approcci: simulazioni ad eventi discreti e modelli continui (ad esempio ODE), in particolare modelli basati su PDE che descrivono quantità medie come densità e velocità media. Scopo della comunicazione è presentare alcuni risultati su un modello continuo-discreto descritto da un sistema di leggi di conservazione per la densità di parti in lavorazione e per la frequenza di servizio. Il modello evolve in modo continuo su intervalli contigui, mentre ai nodi il problema viene risolto conservando la densità delle parti ma non la frequenza di servizio. In [1] si sono definiti alcuni Riemann solver ai nodi con opportune caratteristiche. Il modello per catene di produzioni sequenziali è stato esteso a reti di produzione, [2], considerando due algoritmi di instradamento: il primo massimizza i flussi tenendo conto della destinazione finale delle merci, mentre il secondo massimizza i flussi senza vincoli. Sono state analizzate le onde prodotte ai nodi. In particolare, è stato mostrato come il modello sia in grado di riprodurre il ben noto Bullwhip effect. L'esistenza e l'unicità delle soluzioni ai problemi di Cauchy sia per catene di produzione che per reti è stata ottenuta fissando la regola che le merci sono processate in un nodo al fine di massimizzare il flusso, con produzione di onde nella sola densità, se possibile, altrimenti di onde minime nella frequenza di produzione [3]. L'unicità è stata provata ricavando stime sulla variazione totale del flusso, densità e frequenza di produzione lungo soluzioni approssimate basate sul metodo del wave-front tracking.

Bibliografia

[1] G. Bretti, C. D'Apice, R. Manzo, B. Piccoli: "A continuum-discrete model for supply chains dynamics", Networks and Heterogeneous Media, Vol. 2, No. 4, pp. 661-694, 2007.

[2] C. D'Apice, R. Manzo, B. Piccoli: "Modelling supply networks with partial differential equations", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 67, No. 3, 419-440, 2009.

[3] C. D'Apice, R. Manzo, B. Piccoli: "Existence of solutions to Cauchy problems for a mixed continuum-discrete model for supply chains and networks", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 362, No. 2, 374-386, 2010.

Filippo Notarnicola: Simulazione di un modello per la biodegradazione di inquinanti nel sottosuolo

Filippo Notarnicola
Consiglio Nazionale delle Ricerche Istituto per le Applicazioni del Calcolo - sede di Bari
email: f.notarnicola@ba.iac.cnr.it

Sunto. La rimozione di alcuni tipi di inquinanti presenti nel sottosuolo può essere effettuata con tecniche basate sulla bonifica biologica. Viene sfruttata la capacità di alcune specie batteriche - già presenti nel sottosuolo oppure appositamente introdotte - di metabolizzare l'inquinante trasformandolo in sostanze non tossiche.

Tale processo, però, è limitato dalla concentrazione spaziale di ossigeno e può essere favorito immettendo aria nel sottosuolo: questa tecnica è denominata *bioventig*.

Il modello matematico descrive l'evoluzione spazio-temporale delle concentrazioni nel sottosuolo dell'inquinante e delle altre componenti del sistema fisico al fine di fornire indicazioni di progetto, previsioni sui tempi e sull'andamento della bonifica.

Si utilizzano le equazioni per il moto dei fluidi nei mezzi porosi e le equazioni descriventi la dinamica di popolazioni batteriche; i pozzi di immissione di aria compaiono nel modello come termini sorgenti.

Saranno presentati i risultati di alcune simulazioni numeriche relative ad un modello semplificato.

Bibliografia

[1] J. Bear, Y. Bachmat: "Introduction to modeling of transport phenomena in porous media", Kluwer, Dordrecht, 1991.

[2] R. Helmig: "Multiphase flow and transport processes in the subsurface", Springer, Berlin, 1997.

[3] F. I. Khan, T. Husain, R. Hejazi: "An overview and analysis of site remediation techologies", Journal of Environmental Management, 71(2004), p. 95-122

[4] F. Notarnicola: "Mathematical modeling and design experiments in bioventing subsoil decontamination", Proceedings of the CMWR 2010, XVIII International Conference on Computational Methods in Water Resources, June 21-24, 2010, Barcelona, Spain

[5] J. A. Tindall, J. R. Kunkel: "Unsaturated zone hydrology", Prentice Hall, London, 1999

Giovanni Pallotti: Modellistica di circolazione cardiovascolare

Giovanni Pallotti
Università di Bologna e Clare Hall, Cambridge, U.K.
email: giovanni.pallotti@unibo.it

Gian Luigi Agnoli
Università di Bologna

Sunto. Nel presente lavoro gli AA. hanno studiato i problemi della dinamica del sangue nelle grandi arterie del sistema cardiovascolare. Queste vengono considerate in prima approssimazione come dei condotti in cui circola un fluido di viscosità **non-newtoniana**; mentre c'è da tenere conto come la parete delle grandi arterie abbia delle caratteristiche di elasticità, che **non sono lineari**. Vengono studiati soprattutto i vari problemi che si generano nel sistema cardiovascolare per effetto delle proprietà dei tessuti presi in esame e vengono discussi i risultati sia a livello teorico che quelli a livello fisiologico e clinico.

Bibliografia

[1] Knopoff L., Mac Donald, G.J.F.: Attenuation of small amplitude stress waves in solid. Reviews of modern phisics, 1958.

[2] Newman D., Greenwald S.E., Denyer H.T.: Impulse propagation in normal and stenosed vessels. Cardiovascular Research, 1981.

[3] Alvisi C., Bigi A., Pallotti G., Pettazzoni P., Roveri, N.: Carotid wall as an isotropic mechanical system. Neurological Research, 1982.

[4] Agnoli G.L.: Modello biomeccanico per la stenosi delle arterie percorse da fluidi non-Newtoniani. Atti e Memorie della Acc. Naz. di Scienze, Lettere e Atti di Modena, 1984.

Matteo Pischiutta: Un modello matematico per il movimento di dune desertiche formate da una mistura di sabbie

Luca Formaggia
Laboratorio di Modellistica e Calcolo Scientifico MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Fabio Nobile
Laboratorio di Modellistica e Calcolo Scientifico MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Matteo Pischiutta
Laboratorio di Modellistica e Calcolo Scientifico MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: `matteo.pischiutta@mail.polimi.it`

Sunto. Negli ultimi anni si è sviluppata in letteratura una modellistica matematica e numerica capace di riprodurre qualitativamente l'evoluzione delle dune sabbiose soffiate dal vento in ambienti desertici. Questa modellistica si basa su una legge di conservazione della massa di sedimenti, la quale bilancia la variazione temporale dell'elevazione della superficie sabbiosa con la divergenza dei flussi di sabbia in saltazione (dovuto, attraverso un meccanismo di saturazione, allo sforzo di taglio esercitato dal vento sulla superficie) e in rotolamento (dovuto alla generazione spontanea di valanghe qualora la pendenza della superficie sabbiosa ecceda l'angolo di riposo della sabbia).

In questo lavoro siamo interessati allo studio dell'evoluzione di dune formate da una mistura di sabbie con caratteristiche differenti.

Per approcciare questo problema è necessario adottare l'ipotesi che lo scambio di sedimenti tra la colonna sabbiosa e i due meccanismi di trasporto superficiale sia limitato in uno strato superficiale di spessore dato (*active layer*). La legge di conservazione della massa nell'active layer, scritta per ogni classe di sedimenti considerata, porta a dover caratterizzare la divergenza del flusso di sabbia superficiale per ogni classe di sedimenti considerata.

Considerando l'evoluzione di dune bidimensionali, mostreremo come sia possibile semplificare questo problema passando ad una formulazione che sostituisce la divergenza del flusso con il bilancio tra i tassi di erosione e deposito di sabbia, dove il tasso di deposito si lega a quanto viene eroso sopravento assumendo una densità di probabilità per la lunghezza di salto e di rotolamento dei granelli di sabbia. Mostreremo alcuni risultati numerici ottenuti con questa formulazione che dimostrano che il modello riproduce dinamiche di dispersione della mistura di sabbie fisicamente plausibili. Infine, mostreremo come sia possibile approcciare il problema nel caso tridimensionale.

Maria Alessandra Ragusa: Regolarità per i flussi di cristalli liquidi nematici

Sadek Gala
Department of Mathematics, University of Mostaganem, Algeria

Liu Qao
Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, China

Maria Alessandra Ragusa
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania
email: `maragusa@dmi.unict.it`

Sunto. I cristalli liquidi, ovvero le proprietà liquido-cristalline possedute da alcuni composti organici, furono scoperti nel 1888 da Friedrich Reinitzer il quale si accorse che riscaldando del benzoato di colesterile questo dapprima diventava opaco, per poi schiarirsi al progressivo alzarsi della temperatura. Una volta raffreddato, il liquido diventava bluastro e poi cristallizzava. Pertanto tali sostanze non passano direttamente dallo stato liquido a quello solido, ma in particolari condizioni sono in grado di organizzarsi in fasi intermedie che vengono denominate mesofasi, che presentano caratteristiche sia dello stato liquido cristallino che di quello solido. Questo dualismo giustifica il termine con cui si indicano questi composti: cristalli liquidi. Gli autori stabiliscono dei criteri di regolarità di tipo Serrin per flussi di cristalli liquidi nematici (NLC). Un flusso nematico ÃŃ uno stato di aggregazione intermedio tra il liquido e il cristallino, caratterizzato da bassa viscosità e struttura filamentosa. Il criterio usato può essere considerato come un'estensione del risultato recente di Liu-Cui [1].

Teorema. *Siano $u = u(x;t) \in R^3$ la velocità del flusso, π la funzione scalare che rappresenta la pressione, $d = d(x;t) \in R^3$ la media degli orientamenti molecolari, $f(d) = \big(|d|^2 - 1\big)\, d$, $(u_0; d_0) \in H^1(R^3) \times H^2(R^3)$, $\operatorname{div} u_0 = 0$, $(u;d)$ soluzione del sistema, e $(\nabla d \odot \nabla d)$ la matrice 3×3 di componenti $\nabla_i d \cdot \nabla_j d$, per $1 \le i, j \le 3$,*

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u + \nabla\pi - \Delta u = -\nabla\cdot(\nabla d \odot \nabla d)\,, \\ d_t + u\cdot\nabla d = \Delta d - f(d), \\ \operatorname{div} u = 0, \\ (u,\, d)|_{t\,=\,0} = (u_0, d_0) \quad in \quad \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Se $\dot{X}_r = \{f(x) \in L^2_{loc}\big(\mathbb{R}^3\big) : \|f\|_{\dot{X}_r} = \sup\limits_{\|g\|_{\dot{H}^r} \le 1} \|fg\|_{L^2} < \infty\}$ ed u soddisfa una delle condizioni $u \in L^{\frac{2}{1-r}}(0,T;\dot{X}_r(R^3))$ oppure $\omega = \operatorname{curl} u \in L^{\frac{2}{1-r}}(0,T;\dot{X}_r(R^3))$, $0 \le r < 1$, allora $u \in L^\infty(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^2)$ e $d \in L^\infty(0,T;H^2) \cap L^2(0,T;H^3)$.

Bibliografia

[1] Q. Liu, S. Cui, "Regularity of solutions to 3-D nematic liquid crystal flows", Electron. J. Diff. Equ., (2010), vol. n. 173, pp. 1-5.

Sezione 10 Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

Dimitri Breda: Discretizzazione numerica di famiglie di evoluzione per equazioni differenziali con ritardo non autonome

Dimitri Breda
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
email: dimitri.breda@uniud.it

Stefano Maset
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste

Rossana Vermiglio
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Sunto. In questa comunicazione tratteremo l'approssimazione numerica degli autovalori di famiglie di evoluzione per sistemi di equazioni differenziali funzionali con ritardo lineari e non autonome. Lo schema di discretizzazione è basato sulla riduzione a dimensione finita attraverso una collocazione pseudospettrale. Verrà presentato il relativo algoritmo, accompagnato dall'analisi dell'errore e dalle proprietà di convergenza. Si mostrerà inoltre come applicazioni di fondamentale interesse, quali la determinazione della stabilità asintotica di equilibri e soluzioni periodiche per la classe di equazioni analizzate, possono essere trattate con la medesima tecnica. Si accennerà, infine, alla possibile estensione del metodo al calcolo di esponenti di Lyapunov ed alla determinazione, quindi, di comportamenti caotici, dopo una riscrittura del modello su spazi prodotto di Hilbert.

Angelamaria Cardone: Metodi Generali Lineari di tipo Nordsieck con stabilità quadratica

Angelamaria Cardone
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno
email: ancardone@unisa.it

Sunto. I Metodi Generali Lineari (GLM) per la risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie includono come sottoclassi i metodi numerici classici, ma sono dotati di un numero più elevato di parametri liberi, i quali permettono di ottenere proprietà di accuratezza e stabilità ottimali. In tal modo i GLM possono divenire candidati privilegiati per lo sviluppo di software matematico affidabile e robusto. Tuttavia, la costruzione di GLM ottimali è un compito non semplice ed in particolare ancora non sono noti criteri di tipo generale per la costruzione di GLM con ottime proprietà di stabilità. L'obiettivo della nostra ricerca è la costruzione di GLM che soddisfino la condizione di Quadratic Stability (QS), ossia la cui funzione di stabilità abbia solo due radici non nulle. La proprietà QS semplifica notevolmente lo studio della stabilità, e permette di stabilire quali sono i parametri del metodo ottimali. La proprietà QS à stata introdotta per la prima volta nell'ambito dei metodi two-step Runge-Kutta in [3,4]. In questa comunicazione verranno descritte le condizioni che garantiscono la proprietà di QS e la costruzione di GLM espliciti di tipo Nordsieck con QS. Inoltre sarà illustrata la ricerca numerica di metodi con QS e regioni di assoluta stabilità di area massima. Infine saranno mostrate le regioni di stabilità di alcuni metodi costruiti e confrontate con quelle dei metodi di tipo Runge-Kutta e GLM con Inherent Runge-Kutta Stability. I risultati presentati sono stati ottenuti in collaborazione con i Proff. Z. Jackiewicz e H.D. Mittelmann dell'Arizona State University e sono in parte oggetto dei lavori [1,2].

Bibliografia

[1] A. Cardone, Z. Jackiewicz, Explicit Nordsieck methods with quadratic stability, sottoposto per la pubblicazione.

[2] A. Cardone, Z. Jackiewicz, H.D. Mittelmann, Optimization-based search for Nordsieck methods of high order with quadratic stability, in preparazione.

[3] D. Conte, R. D'Ambrosio, and Z. Jackiewicz. Two-step Runge-Kutta methods with quadratic stability functions. J. Sci. Comput., 44 .(2010), pp. 191–218.

[4] Z. Jackiewicz. General Linear Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley, Hoboken, New Jersey, 2009.

Raffaele D'Ambrosio: Metodi Generali Lineari altamente stabili e conservativi per la risoluzione numerica di Equazioni Differenziali Ordinarie

Raffaele D'Ambrosio
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno
email: rdambrosio@unisa.it

Sunto. Bibliografia

[1] J. C. Butcher, R. D'Ambrosio, *Partitioned general linear methods for separable Hamiltonian problems*, sottoposto per la pubblicazione.

[2] D. Conte, R. D'Ambrosio, Z. Jackiewicz, *Two-Step Runge-Kutta Methods with Quadratic Stability Functions*, J. Sci. Comput. 44, 2 (2010), 191-218.

[3] R. D'Ambrosio, M. Ferro, Z. Jackiewicz, B. Paternoster, *Two-step almost collocation methods for ordinary differential equations*, Numer. Algor. 53 (2-3), 195-217 (2010).

[4] R. D'Ambrosio, Z. Jackiewicz, *Construction and implementation of highly stable two-step continuous methods for stiff differential systems*, Math. Comput. Simul., doi: 10.1016/j.matcom.2011.01.005 (2011).

Nicoletta Del Buono: Localizzazione delle aree di crossing e di sliding in sistemi dinamici discontinui

Nicoletta Del Buono[1]
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"
email: delbuono@dm.uniba.it

Luciano Lopez
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"

Sunto. Molti sistemi fisici, quali ad esempio sistemi con attrito o impatto, circuiti elettrici con diodi, ecc., sono matematicamente rappresentati da sistemi di equazioni differenziali con discontinuità nel campo vettoriale (di tipo Filippov). Caratteristica fondamentale di un sistema di Filippov è la presenza di superfici di discontinuità che dividono lo spazio degli stati in sottoregioni disgiunte, al cui interno il campo vettoriale è continuo.

La conoscenza di quali porzioni della superficie di discontinuità risultano essere aree di sliding o di crossing consente uno studio completo del sistema dinamico discontinuo.

La localizzazione delle diverse regioni di attraversamento o di scivolamento presenti sulla superficie di discontinuità è basata sull'analisi delle proprietà geometriche del campo vettoriale e sull'osservazione del suo comportamento locale su un insieme finito di punti della superficie. L'uso di tecniche di continuazione permette di inferire il comportamento del sistema in opportuni intorni dei punti localizzati senza la necessità di integrare numericamente il sistema dinamico.

Bibliografia

[1] V. Acary, B. Brogliato: "Numerical methods for nonsmooth dynamical systems: applications in mechanics and electronics", Lecture Notes in Applied and Computations Mechanics, Vol. 35, Springer-Verlag, 2008.

[2] N. Del Buono, L. Lopez: "Detecting crossing and sliding areas in non-smooth dynamical systems", in preparazione, 2011.

[3] M. Di Bernardo, C.J. Budd, R. Champneys: "Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications", Springer, 2007.

[4] A. F. Filippov, "Differential equations with discontinuity righthand sides", Kluwer Academic Publishers, 1988.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto GNCS 2011 "Metodi numerici per sistemi differenziali con discontinuità del campo vettoriale"

Elena Esposito: Metodi Generali Lineari per Equazioni Differenziali Ordinarie del Secondo Ordine

Raffaele D'Ambrosio
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

Elena Esposito
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
email: elesposito@unisa.it

Beatrice Paternoster
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

Sunto. In questo talk verrà presentata la nuova famiglia dei Metodi Generali Lineari (GLMs) per la risoluzione numerica di Equazioni Differenziali Ordinarie (ODEs) del secondo ordine di tipo speciale. La classe dei GLMs per ODEs del secondo ordine include propriamente tutti i metodi classici considerati nella letteratura per problemi siffatti, come i metodi lineari multistep, i metodi Runge-Kutta-Nyström, i metodi ibridi a due passi e i metodi Runge-Kutta-Nyström a due passi come casi speciali. La famiglia dei GLMs è più ampia e generale rispetto alle famiglie di metodi noti in letteratura: infatti, essa dipende da più parametri che possono essere sfruttati, ad esempio, al fine di fornire un migliore equilibrio tra ordine di convergenza e proprietà di stabilità. Inoltre, la teoria dei GLMs per $y'' = f(x, y)$ permette di fornire un approccio unificante per l'analisi delle proprietà di convergenza, consistenza e stabilità. Verrà presentata la riformulazione dei metodi classici secondo il nuovo approccio e la generalizzazione al caso dei GLMs dei principali risultati riguardanti la consistenza, la zero-stabilità, la convergenza, le condizioni di ordine e la teoria della stabilità lineare. Verranno forniti, inoltre, nuovi esempi di metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. L'approccio utilizzato è l'estensione naturale della teoria sviluppata da Butcher e Jackiewicz (cfr. [1, 2]) per le ODEs del primo ordine.

Bibliografia

[1] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Chichester, 2008.

[2] Z. Jackiewicz, *General Linear Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2009.

Roberto Garrappa: Integratori di tipo esponenziale per problemi frazionari

Roberto Garrappa
Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Bari
email: garrappa@dm.uniba.it

Marina Popolizio
Dipartimento di Matematica, Università del Salento, Lecce

Sunto. Recentemente, equazioni differenziali di ordine frazionario sono state utilizzate, con crescente interesse, in differenti ambiti tra cui la biologia, la chimica, la fisica, l'ingegneria, ecc. In particolare, è stato osservato che fenomeni caratterizzati da diffusione anomala vengono meglio descritti e modellizzati per mezzo di operatori differenziali di ordine non intero. Nella teoria del controllo, inoltre, si è potuto constatare come i sistemi di ordine frazionario presentino una minore sensibilità rispetto alla variazione dei parametri, risultando pertanto maggiormente robusti.

In questa comunicazione presentiamo alcuni risultati conseguiti nell'approssimazione numerica di sistemi lineari e semilineari di equazioni differenziali frazionarie

$$D^\alpha y(t) = Ay(t) + g(t, y(t)),$$

dove D^α è l'operatore di derivazione frazionaria secondo l'approccio di Caputo, $y(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^m$, A è una matrice in $\mathbb{R}^{m\times m}$ e $g : [0, T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una funzione sufficientemente regolare. Nel caso lineare assumiamo $g(t, y(t)) = g(t)$.

Le tecniche studiate mirano a generalizzare formule di quadratura esponenziale ed integratori esponenziali sviluppati per equazioni differenziali di ordine intero [1].

Due sono le principali difficoltà che si incontrano nel generalizzare questi approcci al caso frazionario: la gestione di una memoria persistente che rende più costoso il calcolo della soluzione numerica e la presenza, al posto della più semplice funzione esponenziale, di una funzione di tipo Mittag–Leffler, la quale deve essere approssimata mediante apposite tecniche numeriche.

Oltre ad aspetti implementativi, vengono discusse e studiate alcune propietà di convergenza e stabilità dei metodi proposti.

Bibliografia

[1] M. Hochbruck, A. Ostermann, Exponential integrators, Acta Numer. 19 (2010), 209–286.

[2] R. Garrappa, M. Popolizio, On accurate product integration rules for linear fractional differential equations, J. Comput. Appl. Math. 235 (5) (2011) 1085–1097.

[3] R. Garrappa, M. Popolizio, Generalized Exponential Time Differencing methods for fractional order problems, Comput. Math. Appl. in corso di stampa.

Stefano Maset: Risoluzione numerica di problemi al contorno per equazioni differenziali funzionali neutrali

Stefano Maset
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste
email: `maset@units.it`

Sunto. Si considera la risoluzione numerica di problemi al contorno per equazioni differenziale funzionali neutrali

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y, y', p), \ t \in [a, b], \\ B(y, y', p) = 0, \end{cases}$$

dove $F : [a, b] \times \mathcal{C} \times U \times \mathbb{R}^{d_0} \to \mathbb{R}^d$ e $B : \mathcal{C} \times U \times \mathbb{R}^{d_0} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d_0}$ sono funzionali assegnati, con $\mathcal{C}$ lo spazio di Banach delle funzioni continue $[a, b] \to \mathbb{R}^d$ e U un idoneo spazio di Banach di funzioni integrabili $[a, b] \to \mathbb{R}^d$. Il parametro $p \in \mathbb{R}^{d_0}$ è incognito e deve essere determinato insieme alla soluzione $y \in \mathcal{C}$.

Dopo aver riscritto il problema in una forma più conveniente, si introdurrà e si analizzerà la convergenza di una forma generale di discretizzazione che include i tre più importanti tipi di discretizzazione per equazioni differenziali, vale a dire il metodo degli elementi finiti, il metodo degli elementi spettrali e il metodo spettrale.

Sezione 11 Teoria dell'approssimazione

Vittoria Bruni: Alcune proprietà della trasformata wavelet discreta razionale e sue applicazioni

Vittoria Bruni[1]
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate, Università di Roma - La Sapienza
email: bruni@dmmm.uniroma1.it

Sunto. La Trasformata Wavelet Discreta Razionale (RDWT) è uno strumento utile ed efficace nell'analisi di segnali fortemente oscillanti quali, per esempio, i segnali vocali o musicali. La RDWT risulta, da un lato, particolarmente flessibile grazie alla suddivisione del dominio delle frequenze del segnale in intervalli la cui ampiezza non necessariamente è multiplo di una potenza negativa di 2 (multirisoluzione diadica), dall'altro facilmente implementabile mediante schemi di subband coding (banchi di filtri), come nel caso della multirisoluzione classica.

Si presenteranno alcune proprietà della trasformata wavelet discreta con parametro di dilatazione razionale e fattore di qualità variabile, implementata usando un banco di filtri con risposta all'impulso infinita, e si mostreranno alcune applicazioni nell'elaborazione di segnali vocali. In particolare, si confronterà l'approssimazione prodotta mediante alcuni coefficienti della RDWT del segnale con quella ottenuta mediante l'uso dei coefficienti Mel-cepstrali (MFCC), comunemente utilizzati nello speech processing, evidenziando aspetti quali: *i)* affinità col sistema uditivo umano; *ii)* robustezza al rumore; *iii)* complessità di calcolo.

Bibliografia

[1] I. Bayram, I. W. Selesnick: "Frequency-Domain Design of Overcomplete Rational-Dilation Wavelet Transforms", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 57, No. 8, August, 2009.

[2] V. Bruni, S. Marconi, D. Vitulano: "Time-Scale Atoms Chains for Transients Detection in Audio Signals", IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, Vol. 18, No. 3, March, 2010.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del Programma di Ricerca - Fondi per la Ricerca dell'Ateneo

Mirella Cappelletti Montano: C_0-semigruppi associati ad una generalizzazione degli operatori di Kantorovich sull'ipercubo

Francesco Altomare
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"

Mirella Cappelletti Montano
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"
email: montano@dm.uniba.it

Vita Leonessa
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi della Basilicata

Sunto. In questa comunicazione, si intende focalizzare l'attenzione su una successione $(C_n)_{n\geq 1}$ di operatori lineari positivi su $L^1([0,1]^N)$, ove con $[0,1]^N$ si denota l'ipercubo in $\mathbf{R}^N$ $(N \geq 1)$ (cfr. [1]). Gli operatori C_n costituiscono una generalizzazione degli operatori di Kantorovich multidimensionali; in particolare, essi consentono di ricostruire una funzione integrabile secondo Lebesgue attraverso i suoi valori medi su un numero finito di plurintervalli di $[0,1]^N$, che possono non costituire una suddivisione di $[0,1]^N$.

Oltre a presentare le principali proprietà di approssimazione dei C_n, si intende mettere in evidenza il profondo legame esistente tra particolari C_0-semigruppi su $\mathcal{C}([0,1]^N)$ e su $L^p([0,1]^N)$ $(1 \leq p < +\infty)$ e le iterate degli operatori C_n. Infatti (cfr. [2]), esiste un semigruppo di Markov $(T(t))_{t\geq 0}$ su $\mathcal{C}([0,1]^N)$ tale che

$$T(t)(f) = \lim_{n\to+\infty} C_n^{[nt]}(f) \qquad \text{in } \mathcal{C}([0,1]^N) \tag{1}$$

per ogni $f \in \mathcal{C}([0,1]^N)$ e $t \geq 0$, ove il simbolo $[nt]$ indica la parte intera di nt.

Inoltre, il generatore $(A, D(A))$ del semigruppo $(T(t))_{t\geq 0}$ coincide su $\mathcal{C}^2([0,1]^N)$ con l'operatore differenziale ellittico

$$V_l(u)(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i(1-x_i)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{l}{2} - x_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

$(u \in \mathcal{C}^2([0,1]^N), x = (x_i)_{1\leq i\leq N} \in [0,1]^N)$, ove $l \in [0,2]$.

Infine, sotto particolari ipotesi, è possibile estendere il semigruppo $(T(t))_{t\geq 0}$ ad un C_0-semigruppo $(\widetilde{T}(t))_{t\geq 0}$ su $L^p([0,1]^N)$ $(1 \leq p < +\infty)$ e si può provare che per $(\widetilde{T}(t))_{t\geq 0}$ è ugualmente valida, in $L^p([0,1]^N)$, la formula di approssimazione (1).

Bibliografia

[1] F. Altomare, M. Cappelletti Montano and V. Leonessa: "On a generalization of Kantorovich operators on simplices and hypercubes", Adv. Pure Appl. Math. **1** (3) (2010), 359-385.

[2] F. Altomare, M. Cappelletti Montano and V. Leonessa: "Iterates of multidimensional Kantorovich-type operators and their associated positive C_0-semigroups", Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. **56** (2011) n. 2, 219-235.

Costanza Conti: Schemi di suddivisione stazionari e non-stazionari per la generazione di curve

Costanza Conti[1]
Dipartimento di Energetica "Sergio Stecco", Università di Firenze
email: costanza.conti@unifi.it

Lucia Romani
Dipartimento di Matematica, Università di Milano Bicocca

Sunto. Gli *schemi di suddivisione* sono metodi iterativi, basati su regole di raffinamento, che consentono di generare sequenze sempre più dense di punti che, sotto opportune ipotesi, convergono ad una funzione continua ed eventualmente regolare. Le regole di raffinamento sono semplici medie i cui coefficienti costituiscono la cosiddetta maschera di suddivisione, sequenza finita di numeri reali. Gli schemi di suddivisione possono essere raggruppati in due grandi categorie: gli schemi di suddivisione *stazionari* (quando le regole di raffinamento non dipendono dall'iterazione) e gli schemi di suddivisione *non-stazionari*. All'interno di queste due classi, gli schemi possono poi variare da scalari (quando la maschera è costituita da numeri reali) a vettoriali (nel caso in cui la maschera sia costituita da matrici di numeri reali); da uniformi (quando le regole non variano da punto a punto) a non-uniformi; da binari (quando il numero di punti è "raddoppiato" ad ogni iterazione) ad una diversa a-rità; da interpolatori (quando i punti generati ad ogni iterazione sono mantenuti per l'iterazione successiva) a non-interpolatori. La potenza e popolarità degli algoritmi di suddivisione è ormai assodata in molti contesti, fra cui quello della costruzione di curve e superfici, il CAGD, l'animazione, la generazione di funzioni raffinabili e la costruzione di funzioni wavelets, l'analisi isogeometrica.

Nell'ambito della modellizzazione geometrica, sono particolarmente importanti algoritmi in grado di generare curve e superfici che, approssimando (o interpolando) un insieme iniziale di punti, riproducono specifiche tipologie di curve quali curve polinomiali, coniche, spirali o curve trigonometriche, quando i dati originano da queste primitive. Sebbene i polinomi possano essere generati utilizzando schemi di suddivisione stazionari, negli altri casi è necessario considerare schemi di suddivisione non-stazionari.

Lo scopo di questa presentazione è quello di mostrare che le proprietà analitiche di uno schema di suddivisione (proprietà di convergenza, regolarità, interpolazione, riproduzione) sono traducibili in condizioni algebriche sui *simboli* dello schema, polinomi di Laurent associati alle maschere di suddivisione. In particolare saranno analizzate le condizioni algebriche sui simboli di uno schema di suddivisione non-stazionario che garantiscono la riproduzione di *polinomi esponenziali*.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto GNCS "Schemi di suddivisione scalari e vettoriali: teoria e applicazioni"

Filomena Di Tommaso: Su una combinazione dell'operatore di Shepard con polinomi di interpolazione di Hermite

Francesco A. Costabile
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, via P. Bucci 30A, 87036 Rende (Cs) Italy

Francesco Dell'Accio
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, via P. Bucci 30A, 87036 Rende (Cs) Italy

Filomena Di Tommaso[1]
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, via P. Bucci 30A, 87036 Rende (Cs) Italy
email: `ditommaso@mat.unical.it`

Sunto. Recentemente, una serie di lavori [1]-[7] è stata incentrata sul problema dell'incremento del grado di precisione di schemi di approssimazione univariata e multivariata utilizzando dati derivati supplementari. La procedura più famosa, proposta da X. Han [3], per uno schema di approssimazione di ordine m e un insieme di dati derivati fino all'ordine r, risulta in un grado di precisione $m+r$. Nel caso in cui sono forniti dati derivati supplementari fino all'ordine r il grado di precisione dell'operatore di Shepard può essere incrementato fino a r considerando l'operatore di Shepard combinato con il polinomio di Taylor di ordine r [8]. In questo talk mostriamo come aumentare ulteriormente il grado di precisione dell'operatore di Shepard, mantenendo allo stesso tempo le proprietà di interpolazione dell'operatore di Shepard-Taylor nei punti di campionamento e una buona accuratezza nell'approssimazione.

Bibliografia

[1] C. de Boor: An asymptotic expansion for the error in a linear map that reproduces polynomials of a certain order, JAT, 134 (2005) 171-174.

[2] A. Guessab, O. Nouisser, and G. Schmeisser: Multivariate approximation by a combination of modified Taylor polynomials, JCAM 196 (2006) 162-179.

[3] X. Han: A degree by degree recursive construction of Hermite spline interpolants, JCAM 225 (2009) 113-123.

[4] X. Han: Multi-node higher order expansions of a function, JAT 124 (2003), 242-253.

[5] D. Kraaijpoel, T. van Leeuwen: Raising the order of multivariate approximation schemes using supplementary derivative data, Procedia CS, 1 (2010) 307-316.

[6] S. Waldron: Increasing the polynomial reproduction of a quasi-interpolation operator, JAT 161 (2009) 114-126.

[7] C. Zuppa: Modified Taylor reproducing formulas and h-p clouds, Math. Comp. 77 (2008) 243-264.

[8] R. Farwig: Rate of convergence of Shepard's global interpolation formula, Math. Comp. 46 (1986) 577-590.

[1] "La presente comunicazione è cofinanziata con il sostegno della Commissione Europea, Fondo Sociale Europeo e della Regione Calabria. L'autore è il solo responsabile di questa comunicazione e la Commissione Europea e la Regione Calabria declinano ogni responsabilità sull'uso che potrà essere fatto delle informazioni in essa contenute."

Francesca Pitolli: Uno schema numerico efficiente per la localizzazione di sorgenti neuroelettriche

Francesca Pitolli[1]
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria Università di Roma "La Sapienza"
email: pitolli@dmmm.uniroma1.it

Sunto. L'elettroencefalografia (EEG) e la magnetoencefalografia (MEG) hanno lo scopo di identificare le zone di attività cerebrale attraverso la misura non invasiva dei segnali generati dalle sorgenti neurali distribuite all'interno del cervello. L'EEG e la MEG non sono vere e proprie tecniche di neuroimaging funzionale in quanto la localizzazione delle sorgenti neurali richiede la ricostruzione dell'immagine del flusso di corrente a partire dai dati elettrici e/o magnetici, misurati, rispettivamente, sullo scalpo e nello spazio circostante la testa. Pertanto, il problema di localizzazione consiste nel risolvere un problema inverso che risulta altamente mal posto e mal condizionato a causa dei pochi dati a disposizione e dell'elevato rumore da cui sono affetti. La soluzione numerica del problema inverso neuroelettromagnetico richiede l'utilizzo di tecniche di regolarizzazione e schemi numerici sofisticati.

In questo lavoro presenteremo uno schema numerico veloce ed efficiente per la soluzione del problema inverso accoppiato EEG/MEG. Prima di tutto la matrice di discretizzazione associata al problema diretto, che risulta di grandi dimensioni e piena, viene compressa utilizzando la trasformata wavelet. Quindi il problema inverso viene risolto utilizzato un algoritmo iterativo che utilizza ad ogni passo un operatore di soglia; in questo modo vengono privilegiate soluzioni localizzate in piccole regioni spaziali. Infine, viene utilizzata una tecnica di accelerazione per aumentare la velocità di convergenza.

Verranno presentati alcuni esperimenti numerici che mettono in evidenza come lo schema proposto permetta di localizzare con una buona accuratezza spaziale sorgenti concentrate.

Il lavoro è svolto in collaborazione con C. Filardo, M. Muzi e L. Paulon.

Bibliografia

[1] M.S. Hamalainen, R. Hari, R.J. Ilmoniemi, J. Knuuttila, O.V. Lounasmaa: "Magnetoencephalography - Theory, Instrumentation and Applications to Non Invasive Studies of the Working Buman brain", Rev. Mod. Phys. 65, 413–497 (1993).

[2] L. Paulon, C. Filardo, M. Muzi, F. Pitolli: "An efficient numerical algorithm for neuroelectric source localization", sottoposto per la pubblicazione.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Progetto di Ateneo "Metodi Numerici e Probabilistici per l'Ingegneria", Università di Roma "La Sapienza"

Lucia Romani: Schemi di suddivisione interpolatori e loro strategie costruttive

Costanza Conti
Dipartimento di Energetica "Sergio Stecco", Università di Firenze

Luca Gemignani
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Lucia Romani[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Milano Bicocca
email: `lucia.romani@unimib.it`

Sunto. Gli schemi di suddivisione sono algoritmi iterativi per generare curve e superfici come limite di un processo di raffinamento di un insieme discreto di punti. In particolare, gli schemi di suddivisione interpolatori sono caratterizzati dalla proprietà di generare curve e superfici che non solo interpolano l'insieme di punti assegnato, ma tutte le sequenze ottenute nelle varie iterazioni. Gli schemi di suddivisione interpolatori risultano molto utili nelle applicazioni CAGD per il legame estremamente intuitivo fra la curva/superficie limite e l'insieme iniziale di punti "sketch" dell'oggetto che si intende rappresentare. Inoltre, gli schemi interpolatori consentono di generare funzioni raffinabili cardinali utilizzate per la costruzione di wavelets.

Negli ultimi anni in letteratura sono apparse molte proposte di schemi di suddivisione approssimanti, mentre molto meno è stato fatto nell'ambito dell'interpolazione. Obiettivo di questa presentazione è descrivere recenti risultati riguardanti strategie algebriche per costruire uno schema interpolante a partire da un approssimante [1,2]. Tali strategie risultano essere uno strumento potente e versatile per la progettazione di nuovi algoritmi interpolatori che spaziano dalla classe degli schemi stazionari ai non-stazionari, dal caso binario al caso di arità maggiore di 2. Estensioni all'ambito multivariato sono attualmente in corso di studio.

Bibliografia

[1] C. Conti, L. Gemignani, L. Romani: *From approximating to interpolatory non-stationary subdivision schemes with the same generation properties.* In corso di stampa in Advances in Computational Mathematics.

[2] C. Conti, L. Gemignani, L. Romani: *From symmetric subdivision masks of Hurwitz type to interpolatory subdivision masks.* Linear Algebra and its Applications 431(10), 1971-1987 (2009).

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto GNCS "Schemi di suddivisione scalari e vettoriali: teoria e applicazioni"

Sezione 12 Algebra lineare numerica e ottimizzazione

Antonio Aricò: Un solutore veloce per sistemi lineari con struttura di displacement

Antonio Aricò[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari
email: `arico@unica.it`

Giuseppe Rodriguez
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari

Sunto. Descriveremo un solutore veloce per sistemi lineari con matrice Cauchy-like ricostruibile. Il solutore richiede $O(rn^2)$ operazioni aritmetiche e $O(rn)$ locazioni di memoria, dove n ed r sono, rispettivamente, la dimensione ed il "rango di displacement" della matrice. Il solutore si basa sull'applicazione dell'algoritmo di Schur generalizzato ad un'opportuna matrice, sotto alcune ipotesi sui nodi della matrice Cauchy-like. Il solutore include alcune tecniche di pivoting già presenti in letteratura ed un nuovo algoritmo che richiede solo la ricostruibilità della matrice Cauchy-like.

È stato sviluppato sviluppato un pacchetto software, `drsolve`, scritto in Matlab e in C-MEX, che contiene un'implementazione dei metodi descritti. Tale software include anche solutori per sistemi lineari con matrice Toeplitz(+Hankel)-like e Vandermonde-like, i quali possono essere ridotti a Cauchy-like mediante trasformazioni veloci e stabili. Presenteremo alcuni esperimenti numerici a conferma della bontà del codice.

Bibliografia

[1] I. Gohberg, T. Kailath, V. Olshevsky: "Fast Gaussian elimination with partial pivoting for matrices with displacement structure" Mathematics of Computation, Vol. 64, No. 212, pp. 1557-1576

[2] F. Poloni: "A note on the $O(n)$-storage implementation of the GKO algorithm and its adaptation to Trummer-like matrices", Numerical Algorithms, Volume 55, Number 1, 115-139.

[3] A. Aricò, G. Rodriguez: "A fast solver for linear systems with displacement structure", Numerical Algorithms, Volume 55, Number 4, 529-556.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2008 N. 20083KLJEZ

Paola Boito: Proprietà di decadimento di funzioni di matrici: un'applicazione al calcolo di strutture elettroniche

Michele Benzi
Department of Mathematics and Computer Science, Emory University

Paola Boito[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, XLIM, Università di Limoges
email: paola.boito@unilim.fr

Nader Razouk
Emory University, Ernst & Young GmbH

Sunto. La motivazione del presente lavoro proviene dai metodi di *linear scaling*, ampiamente usati in chimica quantistica e in fisica dello stato solido per il calcolo di strutture elettroniche. Tali metodi si basano sul fenomeno noto come localizzazione: per opportune scelte delle funzioni di base, la matrice hamiltoniana che descrive un sistema fisico ha tipicamente una struttura a banda o, più in generale, sparsa. Nella matrice densità corrispondente, che è una funzione dell'hamiltoniana, si osserva un comportamento di decadimento degli elementi all'aumentare della distanza dalla diagonale principale; questa proprietà permette di approssimare la matrice densità con una matrice a banda e di rendere più veloce il calcolo delle strutture elettroniche.

Il nostro obiettivo è dare una dimostrazione matematica rigorosa di tale fenomeno. Per mezzo di tecniche di algebra lineare e di approssimazione polinomiale, formuliamo dei bound asintotici sugli elementi della matrice densità e di altre funzioni di matrici. In particolare, dimostriamo sotto opportune ipotesi che gli elementi della matrice densità P decrescono con andamento esponenziale, ovvero si ha

$$|P_{ij}| \leq Ke^{-\alpha|i-j|},$$

dove K e α sono costanti positive che non dipendono dalla dimensione di P. Risultati di questo tipo permettono di stimare l'errore commesso durante l'approssimazione a banda o sparsa di funzioni di matrici.

Le applicazioni, tuttavia, non si limitano alla fisica computazionale. Nel corso del talk sarà presentato un esempio di come i bound sulle funzioni di matrici risultino utili anche in teoria delle reti per quantificare determinate proprietà di connettività.

[1]Lavoro svolto nell'ambito dell'NSF grant DMS-0810862 e del progetto PRIN 2008 n. 20083KLJEZ.

Silvia Bonettini: Un metodo extragradiente per la ricostruzione di immagini mediante regolarizzazione con la funzione di Variazione Totale

Silvia Bonettini
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
email: silvia.bonettini@unife.it

Valeria Ruggiero[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Sunto. La ricostruzione di immagini è un problema comune a molti ambiti, come l'astronomia, la microscopia elettronica e la tomografia, dove i dati sono soggetti a effetti di degradazione di tipo sia deterministico che statistico. Esso consiste in un problema inverso mal posto che, nell'approccio Bayesiano [1], viene riformulato come

$$\min_{x \in X} f_0(x) + \beta f_1(x)$$

dove $f_0(x)$ è una funzione convessa che misura la discrepanza dai dati; $f_1(x)$ è il termine di regolarizzazione; $\beta > 0$ rappresenta il peso relativo dei due termini; $X \subseteq \mathbb{R}^n$ definisce opportuni vincoli (per esempio la non negatività delle componenti).

La funzione di discrepanza dipende dalla natura statistica dei dati: nel caso Poissoniano, $f_0(x)$ è la nota divergenza di Kullback-Leibler, mentre una scelta conveniente del termine di regolarizzazione, quando si vuole preservare la nitidezza dei contorni, è la funzione di Variazione Totale (TV), $f_1(x) = \sum_{k=1}^{n} \|(\nabla x)_k\|_2$, dove $(\nabla x)_k$ indica un'approssimazione discreta del gradiente dell'immagine x nel pixel k [3].

Poiché la funzione TV non è differenziabile ovunque, i metodi standard di ottimizzazione non si possono applicare. Tuttavia, mediante noti risultati di analisi convessa, il problema di minimo si può riformulare come problema di punto sella

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} F(x, y)$$

dove $F(x, y)$ è una funzione differenziabile convessa-concava.

Osservando che il problema di punto sella è un particolare tipo di disequazione variazionale [2], in questo lavoro proponiamo un metodo extragradiente modificato, in cui le iterate sono aggiornate in modo alternato rispetto alle componenti x e y e la lunghezza del passo viene calcolata in modo adattivo. Per il nuovo metodo si prova la convergenza globale, mentre la sperimentazione numerica su problemi di ricostruzione di immagini con rumore Poissoniano ne mostra la stabilità numerica.

Bibliografia

[1] S. Geman, D. Geman, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 1984.

[2] G. Korpelevich, *Ekonomika i Matematicheskie Methody*, 1976.

[3] T. Le et al., *J. Math Imaging Vis.*, 2007.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN 2008T5KA4L *Optimization Methods and Software for Inverse Problems*

Enrico Bozzo: Una relazione tra Singular Spectrum Analysis ed analisi di Fourier

Enrico Bozzo[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
email: enrico.bozzo@uniud.it

Roberto Carniel
Dipartimento di Georisorse e Territorio, Università di Udine

Dario Fasino
Dipartimento di Chimica, Fisica e Ambiente, Università di Udine

Sunto. La Singular Spectrum Analysis (SSA) è un'interessante tecnica per l'analisi delle serie temporali [1,2]. Nella SSA gli elementi dei una serie temporale diventano elementi di una matrice di Hankel rettangolare, detta matrice di traiettoria, di cui viene calcolata la decomposizione ai valori singolari (SVD). La SVD viene utilizzata, per esempio, per individuare trend, estrarre componenti stagionali, eliminare eventuale rumore dalla serie temporale. Recentemente, la SSA è stata applicata a serie temporali legate a fenomeni di natura fisica, economica, sociale. In particolare, in [3] si considerano serie temporali di natura sismica legate al monitoraggio dell'attività vulcanica.

In questa comunicazione prospettiamo un legame tra SSA ed analisi di Fourier. In effetti, il comportamento dei valori singolari della matrice di traiettoria rispecchia certi andamenti qualitativi dei coefficienti di Fourier della serie temporale. Più precisamente, i valori singolari possono essere approssimati da opportune medie calcolate sullo spettro della serie.

Il legame prospettato può essere giustificato sulla base della teoria di Szegö circa la distribuzione asintotica degli autovalori delle matrici di Toeplitz.

Bibliografia

[1] N. Golyandina, V. Nekrutkin, A. Zhigljavsky, *Analysis of time series structure. SSA and related techniques.* Chapman & Hall/CRC, 2001.

[2] H. Hassani, Singular Spectrum Analysis: Methodology and Comparison. *Journal of data science*, 5 (2007), 239–257.

[3] E. Bozzo, R. Carniel, D. Fasino, Relationship between Singular Spectrum Analysis and Fourier analysis: Theory and application to the momitoring of volcanic activity. *Comp. Math. Appl.*, 60 (2010), 812–820.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2008 n. 20083KLJEZ "Problemi di algebra lineare numerica strutturata: analisi, algoritmi e applicazioni".

Valentina De Simone: Precondizionatori paralleli multilivello per problemi di controllo ottimo

Alfio Borzì
Institut für Mathematik, Universität Würzburg, Würzburg

Valentina De Simone
Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Napoli, Caserta
email: `valentina.desimone@unina2.it`

Daniela di Serafino
Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Napoli, Caserta

Sunto. La risoluzione di problemi di controllo ottimo retti da equazioni differenziali alle derivate parziali richiede la disponibilità sia di metodi numerici accurati ed efficienti sia di risorse di calcolo ad alte prestazioni. In questa presentazione ci si sofferma sulla risoluzione iterativa di sistemi lineari, sparsi e di grandi dimensioni, derivanti dalla discretizzazione delle condizioni di ottimalità associate a problemi di controllo ottimo di tipo ellittico. In particolare, è presentata una classe di precondizionatori multivello algebrici paralleli, basati su metodi di Schwarz e su una variante della tecnica di "smoothed aggregation". Tale variante utilizza un opportuno ordinamento delle incognite del sistema per costruire operatori di restrizione e prolungamento indipendenti dal parametro di regolarizzazione della funzione di costo. I precondizionatori così ottenuti sono stati implementati nell'ambito del package MLD2P4 (MultiLevel Domain Decomposition Parallel Preconditioners Package based on PSBLAS). Si riportano i risultati di esperimenti numerici che mostrano l'efficacia dei precondizionatori e la loro scalabilità.

Bibliografia

[1] A. Borzì and V. Schulz, *Multigrid methods for PDE optimization*, SIAM Review, 51, 2 (2009), pp. 361–395.

[2] P. D'Ambra, D. di Serafino, and S. Filippone, *MLD2P4: A Package of Parallel Algebraic Multilevel Domain Decomposition Preconditioners in Fortran 95*, ACM Trans. Math. Software, 37, 3 (2010), article n. 30.

Gianna M. Del Corso: Riduzioni unitarie a forme compatte: una trattazione unificante

Gianna M. Del Corso[1]
Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
email: delcorso@di.unipi.it

Raf Vandebril
Dept. of Computer Science, KULeuven, Belgium

Sunto. Recentemente sono apparsi molti lavori che propongono la riduzione di una matrice in forma semiseparabile come valida alternativa alla riduzione in forma di Hessenberg quando vogliamo approssimarne gli autovalori. Infatti, il costo di un passo di QR su una matrice semiseparabile è lo stesso di quello su una matrice in forma di Hessenberg, ed alcune volte abbiamo una migliore convergenza e quindi un risparmio computazionale.

In questa comunicazione presenteremo, sotto un aspetto generale ed unificante, gli algoritmi per trasformare per via unitaria, una matrice a forma di Hessenberg, a forma semiseparabile o a una combinazione di queste. In particolare, le differenti trasformazioni possono essere viste come diverse istanze di uno stesso algoritmo. Questo nuovo algoritmo si basa sulla rappresentazione della matrice di partenza in forma QR. Grazie a manipolazioni che coinvolgono trasformazioni elementari di Givens, viene eliminato un opportuno insieme di matrici elementari, ottenendo in questo modo una matrice simile alla matrice di partenza e con le desiderate proprietà strutturali. A partire da questo nuovo processo di riduzione di una generica matrice a varie forme compatte (Hessemberg, semiseparabili e combinazioni di queste), abbiamo stabilito risultati di unicità e dimostrato legami con i metodi di Krylov (razionali). I procedimenti di trasformazione per similitudine unitaria per la riduzione di una matrice in forma semiseparabile che presentiamo differiscono significativamente da quelli proposti in lavori precedenti [1, 2]. Infatti, il nuovo approccio necessita di circa metà delle trasformazioni di Givens utilizzate dai metodi precedenti, ed inoltre mostra un diverso tipo di convergenza ai valori di Ritz, che non era stata osservato in precedenza.

Bibliografia

[1] R. Bevilacqua, G. M. Del Corso, *Structural properties of matrix unitary reduction to semiseparable form.* Calcolo, Vol. 41 (4), (2004) pp. 177–202

[2] M. Van Barel, R. Vandebril, R. and N. Mastronardi, *An orthogonal similarity reduction of a matrix into semiseparable form*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol. 27 (1), (2005) pp. 176–197

[1]Questa ricerca è stata parzialmente finanziata dal MIUR- PRIN 2008: 20083KLJEZ

Marco Donatelli: Operatori di aggregazione per metodi multigrid

Matthias Bolten
Department of Applied Computer Science, Bergische Universität Wuppertal

Marco Donatelli
Dipartimento di Fisica e Matematica, Università dell'Insubria
email: marco.donatelli@uninsubria.it

Thomas Huckle
Institut für Informatik, Technische Universität München

Sunto. Nella definizione di operatori di trasferimento di griglia per metodi multigrid una tecnica semplice ed efficace si basa sull'aggregazione dei nodi vicini. Risultati teorici recenti hanno mostrato che per metodi a due griglie tali operatori permettono di ottenere un fattore di convergenza indipendente dal numero dei punti di discretizzazione (ottimalità). Purtroppo nel caso di metodi a più griglie tale proprietà non è preservata [1] e per recuperarla solitamente si ricorre a tecniche di smoothing del proiettore [2].

In questo seminario si fornisce uno studio algebrico degli operatori di aggregazione nel caso di griglie strutturate. Preliminarmente si estende l'analisi di convergenza classica per metodi multigrid introducendo proiezioni in griglie più rade con fattori di contrazione interi maggiori di due. Le nuove condizioni di convergenza ottenute permettono di verificare l'ottimalità degli operatori di aggregazione per metodi a due griglie e contemporaneamente di mostrare perché tali operatori non sono sufficienti ad ottenere l'ottimalità nel caso di più griglie. Si passa quindi ad analizzare tecniche di smoothing del proiettore basate su metodi iterativi con rilassamento. Il parametro di rilassamento ottimo, che permette di avere una convergenza indipendente dal numero dei punti di discretizzazione, sarà ottenuto sfruttando proprio lo studio precedente sugli operatori di aggregazione [3]. Per concludere si presentano dei risultati numerici a conferma dell'analisi teorica proposta.

Bibliografia

[1] A. Napov e Y. Notay, "Algebraic analysis of aggregation-based multigrid", Numer. Linear Algebra Appl., 18–3 (2011), pp. 539–564.

[2] P. Vanvek, M. Brezina e J. Mandel, "Convergence of algebraic multigrid based on smoothed aggregation", Numer. Math., 88–3 (2001), pp. 559–579.

[3] M. Bolten, M. Donatelli, and T. Huckle, "Analysis of smoother aggregation-based multigrid methods", sottoposto per la pubblicazione.

Claudio Estatico: Regolarizzazione nonlineare in spazi di Banach nella ricostruzione di immagini

Paola Brianzi
Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Fabio Di Benedetto
Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Claudio Estatico[1]
Dipartimento di Fisica e Matematica, Università dell'Insubria
email: `claudio.estatico@uninsubria.it`

Sunto. Consideriamo un generico problema inverso del tipo $Ax = y$, dove $A : X \to Y$ è un operatore tra due spazi funzionali X e Y. In tale problema, l'incognita da determinare $x \in X$ è la "causa" che dà luogo agli "effetti" $y \in Y$, che rappresentano i dati a disposizione.

La teoria classica della regolarizzazione di Tikhonov, in cui X e Y sono entrambi spazi di Hilbert (generalmente $X = Y = L^2$) e $\lambda > 0$ è il parametro di regolarizzazione, conduce alla minimizzazione del funzionale quadratico $\Phi_\lambda(x) = ||Ax - y||_Y^2 + \lambda||x||_X^2$, che risulta molto agevole in quanto equivale alla risoluzione dell'equazione lineare di Eulero $(A^*Ax + \lambda I)x = A^*y$. Tuttavia, i metodi di regolarizzazione negli spazi di Hilbert dànno luogo a soluzioni estremamente regolari (over-smoothness), poco adatte a fenomeni quali la ricostruzione di immagini, dove i bordi di un oggetto rappresentano discontinuità "naturalmente" presenti.

Più recentemente, il funzionale di Tikhonov è stato studiato nel contesto più generale in cui X e Y sono solo spazi di Banach. L'esempio più significativo sono gli spazi L^p, con $1 < p < +\infty$ [1]. In tal modo, in Φ_λ sia il residuo $Ax - y$ che la soluzione x vengono misurati mediante le norme dei rispettivi spazi di Banach Y e X (ad esempio, per $1 < p < 2$, le componenti piccole della funzione acquistano un peso maggiore nel calcolo della norma). La nuova "geometria" degli spazi di Banach X e Y, se opportunamente scelti, permette di ottenere soluzioni meno soggette al fenomeno di over-smoothness. Nella ricostruzione di immagini il contrasto e la risoluzione dei bordi degli oggetti risulta migliore.

In questa comunicazione, riferita a una ricerca ancora in progress, analizzeremo e illustreremo tecniche di regolarizzazione iterativa in spazi di Banach. Queste verranno applicate a problemi di ricostruzione di immagini (in particolare, image deblurring e microwave inverse scattering). Sebbene la minimizzazione di Φ_λ in spazi di Banach risulti più complessa (il problema diviene intrinsecamente nonlineare), mostreremo che la risoluzione non comporta un aumento della complessità computazionale.

Bibliografia

[1] F. Schöpfer, A.K. Louis, T. Schuster *Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces*, Inverse Problems, 22 (2006/01), 311-329.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN 20083KLJEZ

Stefano Fanelli: Metodi di Tipo-Gradiente: un Approccio Unificato per la Scienza del Calcolo e l'Analisi Numerica

Stefano Fanelli[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
email: fanelli@mat.uniroma2.it

Sunto. Nel presente lavoro si introduce un'interpretazione unificata dei Metodi di Ottimizzazione e degli Algoritmi della Scienza del Calcolo tramite un nuovo approccio.

In particolare, viene mostrato come, sia i Metodi Diretti che i Metodi Iterativi dell'Analisi Numerica, sia gli Algoritmi della Scienza del Calcolo appartengano ad una ben definita e generale *Classe di Procedimenti Iterativi Finiti ed Infiniti*, caratterizzati da opportune *Direzioni di Discesa*.

In tal modo, la classica dicotomia tra la Scienza del Calcolo, fondata su Procedure Finite su Insiemi Discreti, ed i Metodi Iterativi dell'Analisi Numerica, fondati sull'Approssimazione della Soluzione Ottima di un problema definito nel Continuo per mezzo di una Successione Convergente ad un Punto di Accumulazione, può essere superata. In effetti, i Metodi Iterativi dell'Analisi Numerica nella maggioranza dei casi sono basati sul Principio del Punto Fisso e quindi su procedure convergenti in un *Numero Infinito di Passi*.

I Metodi di Tipo-Gradiente, descritti nel presente lavoro, rappresentano lo strumento fondamentale di calcolo per affrontare un ampio insieme di Problemi di Ottimizzazione Continua, essendo fondati su di un principio unitario, riferito sia ad Algoritmi (Finiti) che a Procedimenti Iterativi Infiniti. Un ruolo fondamentale viene svolto dalle proprietà di opportune *Matrici Strutturate*, associate ai Metodi di Ottimizzazione. Le tecniche basate su *Trasformate Veloci* sono infatti essenziali per costruire procedimenti di bassa complessità [1].

In tal modo, è possible risolvere efficientemente Problemi di Ottimizzazione Locale Non Vincolata e Vincolata [2]. Inoltre, con un tale approccio si possono affrontare analogamente Problemi di Ottimizzazione Globale [3].

Bibliografia

[1] C. Di Fiore, S. Fanelli, F. Lepore, P. Zellini, Matrix algebras in Quasi-Newton methods for unconstrained optimization, *Numer. Math.*, 94, 479-500, 2003.

[2] S. Fanelli, Gradient-type Methods: a Unified Perspective in Computer Science and Numerical Analysis, sottoposto per la pubblicazione.

[3] S. Fanelli, A New Algorithm for Box-Constrained Global Optimization, *J. Optim. Theory Appl.*, 149, 175-196, 2011.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN 2008 N. 20083KLJEZ

Ivan Gerace: Metodi di regolarizzazione per il problema della separazione cieca di componenti da fronte-retro di documenti

Ivan Gerace[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
email: gerace@dmi.unipg.it

Sunto. Migliorare la leggibilità umana ed automatica di documenti a stampa o scritti a mano è una necessità comune nelle biblioteche e negli archivi. Infatti, specialmente quando sono antichi, i documenti sono spesso affetti da vari tipi di artefatti. Le interferenze fronte-retro (*bleed-through* e *show-through*) sono forse le più comuni degradazioni osservabili nei manoscritti antichi. Il bleed-through è intrinseco al documento fisico ed è dovuto alle infiltrazioni di inchiostro dal lato opposto di una pagina. Mentre, lo show-through appare principalmente nell'immagine del documento per effetto del processo di scansione, unito alla parziale trasparenza della carta. Per questo motivo, tale tipo di degradazione colpisce spesso le scansioni anche di documenti moderni ben conservati. Le tecniche dell'elaborazione d'immagine per rimuovere queste interferenze hanno recentemente acquisito un grande interesse, dal momento che sono necessarie per consentire di analisi automatica o per migliorare la leggibilità degli studiosi [1].

Attraverso un'analisi fisica dell'effetto di show-through che uno scanner introduce nell'immagine digitale di un documento fronte-retro, Sharma [2] propose un modello che tiene conto dei parametri di riflessione, trasmissione e dispersione della carta. Utilizzando tale modello, tramite le tecniche di regolarizzazione, è possibile definire la soluzione del nostro problema come il minimo di una opportuna funzione energia, data dalla somma di due termini: il primo rappresenta la consistenza con i dati mentre il secondo è un termine di regolarizzazione. Il termine di consistenza con i dati, differentemente dal problema analogo di ricostruzione di immagine sfocate, risulta in questo caso essere non convesso. In questo lavoro vengono analizzate le possibili approssimazioni convesse di tale termine e viene determinata l'approssimazione piú adatta da essere inserita in uno schema GNC (*Graduated Non-Convesity*) per la minimizzazione della funzione energia.

Bibliografia

[1] A. Tonazzini, I. Gerace, F. Martinelli, "Multichannel blind separation and deconvolution of images for document analysis", IEEE Trans. on Image Processing, n. 4, pp. 912–925, 2010.

[2] G. Sharma, "Show-through cancellation in scans of duplex printed documents", IEEE Trans. on Image Processing, n. 10, pp. 736–754, 2001.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2008 n.20083KLJEZ

Bruno Iannazzo: Tecniche di shift per equazioni matriciali

Bruno Iannazzo
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
email: bruno.iannazzo@dmi.unipg.it

Dario Bini
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Beatrice Meini
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Federico Poloni
TU Berlin, Germany

Sunto. La tecnica di shift è utilizzata nell'ambito della risoluzione numerica di equazioni matriciali, come passo preliminare da effettuare prima che un opportuno risolutore sia applicato alle equazioni. Può essere intesa come una tecnica di accelerazione della convergenza ma anche come un modo per migliorare il condizionamento della soluzione cercata e quindi un modo per migliorare l'accuratezza nella risoluzione numerica.

Verrà discussa la nuova tecnica del "subspace shift" che può essere usata in alcuni problemi in cui la tecnica di shift non fornisce risultati accettabili. Verrà discusso inoltre il problema dell'applicabilità senza breakdown di algoritmi di tipo doubling a problemi a cui sono state applicate le tecniche di shift. Ci concentreremo principalmente sulle equazioni di Riccati non simmetriche.

Germana Landi: Metodi numerici per problemi di minimo vincolato nella ricostruzione di immagini

Germana Landi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: landig@dm.unibo.it

Sunto. Il problema della ricostruzione di immagini è notoriamente un problema inverso mal posto secondo Hadamard nel senso che la sua soluzione può non esistere, non essere unica e non dipendere con continuità dai dati. Una soluzione stabile di tale problema può essere determinata attraverso l'uso di opportune tecniche di regolarizzazione che richiedono di riformulare il problema della ricostruzione di immagini come il problema di minimo vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathcal{F}(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{31}$$

la cui funzione obiettivo esprime consistenza con i dati e può eventualmente contenere un termine di regolarizzazione, mentre il vincolo esprime qualche conoscenza a priori sull'immagine da ricostruire. Ad esempio, il vincolo può contenere informazioni sul livello di rumore presente sui dati, sulla regolarità della soluzione o sulla sua positività. Scopo di questa comunicazione è presentare alcune tecniche numeriche recentemente sviluppate per risolvere efficientemente ed efficacemente il problema di minimo vincolato (1) che sorge nell'ambito della regolarizzazione dei problemi di ricostruzione di immagini. In particolare, saranno presi in considerazione metodi del Lagrangiano, delle direzioni ammissibili e di tipo Newton proiettato. Particolare rilievo sarà dato alla presentazione dei risultati numerici ottenuti applicando tali tecniche a problemi di ricostruzione di immagini mediche.

Bibliografia

[1] G. Landi, E. Loli Piccolomini. An iterative Lagrange method for the regularization of discrete ill-posed inverse problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 60:1723-1738, 2010.

[2] G. Landi, E. Loli Piccolomini. An algorithm for image denoising with automatic noise estimate. Journal of *Mathematical Imaging and Vision*, 34(1):98-106, 2009

[3] G. Landi, E. Loli Piccolomini. A projected Newton-CG method for nonnegative astronomical image deblurring. *Numerical Algorithms*, 48:279-300, 2008.

[4] G. Landi, E. Loli Piccolomini. An efficient method for nonnegatively constrained Total Variation-based denoising of medical images corrupted by Poisson noise, 2011, sottoposto per la pubblicazione.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN 2008: "Optimization methods and software for inverse problems"

Jacopo Lanzoni: Crescita della norma e pseudospettri per discretizzazioni di tipo PML di sistemi aperti

Timo Betcke
Dipartimento di Matematica, University College of London

Jacopo Lanzoni
Dipartimento di Matematica, University College of London
email: `lanzoni@math.ucl.ac.uk`

Sunto. Una tecnica standard per la soluzione dei problemi di diffusione acustica in sistemi aperti consiste nell'uso di uno strato perfettamente combaciante (perfectly matched layer, PML) per limitare il dominio computazionale. Nonostante l'operatore corrispondente abbia inverso limitato per valori reali del numero d'onda, capita tuttavia che esso possa esibire una rapida crescita della norma sull'asse reale nell'intorno di risonanze complesse. In questa comunicazione espongo i risultati dello studio di tale crescita della norma nell'intorno di autovalori della discretizzazione PML. A tal fine calcoliamo i pseudospettri generalizzati del problema discreto, definiti per ogni $\epsilon > 0$, $\epsilon << 1$, come

$$\sigma_\epsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \ \|(A - zI)^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}\}.$$

Dal momento che le discretizzazioni PML portano a matrici sparse di grandi dimensioni, utilizzeremo tecniche di riduzione per rendere realizzabile il calcolo degli pseudospettri. Applichiamo tale tecnica ad alcuni problemi interessanti, dove le risonanze sono vicine all'asse reale, e studiamo anche l'influenza dei parametri dello strato sui pseudospettri dei problemi discretizzati.

Bibliografia

[1] F. Collino, P. Monk: "The perfectly matched layer in curvilinear coordinates", SIAM J. Sci. Comput., Vol. 19, No. 6, pp. 2061-2090, Nov 1998.

[2] S. Hein, T. Hohage, W. Koch: "On resonances in open systems", J. Fluid Mech., vol. 506, pp. 255-284, 2004.

[3] S. Kim, J. Pasciak: "The computation of resonances in open systems using a perfectly matched layer", Math. of comp., Vol. 78, No. 267, pp. 1375-1398, Jul 2008.

[4] L. Trefethen, M. Embree: "Spectra and pseudospectra", Princeton University Press, Princeton, 2005.

Serena Morigi: Metodi di alternanza basati su sottospazi di Krylov per la ricostruzione di immagini

Serena Morigi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Bologna, Italia
email: morigi@dm.unibo.it

Sunto. Recentemente sono stati presentati metodi di alternanza per il deblurring e denoising delle immagini digitali. I piú semplici di questi metodi sono i metodi a due passi che ricostruiscono l'immagine contaminata alternando tra una correzione di deblurring e una di denoising. Questo lavoro descrive un metodo a due passi che si basa su metodi iterativi in sottospazi di Krylov che permettono l'applicazione di operatori di regolarizzazione in entrambi i passi. Esempi numerici mostrano che questa strategia può migliorare la qualità delle ricostruzioni. I metodi presentati risultano particolarmente interessanti quando il prodotto matrice-vettore, con un operatore di blurring discreto e la sua trasposta possono essere valutati efficientemente, ma la struttura di tali operatori non permette semplici diagonalizzazioni.

Lavoro in collaborazione con:
J. Orlando
(Inst. de Ciencia y Tecnologia de Materiales, Univ. de La Habana, Habana, Cuba),
L. Reichel
(Dept. of Math. Sciences, Kent State University, Kent, OH 44242, USA),
F. Sgallari
CIRAM-Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Bologna, Italia

[1]PRIN 2008: Metodi numerici innovativi per problemi discreti di grandi dimensioni

Vanni Noferini: L'applicazione del metodo di Ehrlich-Aberth a problemi polinomiali agli autovalori

Vanni Noferini[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
email: noferini@mail.dm.unipi.it

Dario A. Bini
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Luca Gemignani
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Sunto. Il problema generalizzato polinomiale agli autovalori è definito come segue: per $j = 0, \ldots, k$ siano P_j matrici quadrate di dimensione n e con elementi in $\mathbb{C}$, con $P_k \neq 0$. Un numero $z \in \mathbb{C}$ e un vettore $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ sono, rispettivamente, un autovalore e un autovettore per il polinomio di matrici $P(x) = \sum_{j=0}^{k} P_j x^j$ se $P(z)\vec{y} = \vec{0}$.

Un polinomio di matrici il cui determinante non sia identicamente nullo viene detto *regolare*. Per un polinomio regolare x è autovalore se e solo se esso è uno zero per il polinomio scalare $p(x) := \det(P(x))$.

Il metodo di Ehrlich-Aberth è un metodo iterativo di tipo Newton che approssima simultaneamente tutti gli zeri di un polinomio scalare: ne esistono implementazioni che lo rendono un metodo estremamente robusto ed efficiente per il calcolo degli zeri di un polinomio scalare. Al fine dell'applicazione del metodo al problema polinomiale agli autovalori, si rende necessaria una tecnica per valutare indirettamente la quantità $p'(x)/p(x)$ senza valutare esplicitamente i coefficienti di $p(x)$, generalmente mal condizionati rispetto agli elementi dei coefficienti matriciali di $P(x)$.

A questo scopo proponiamo diverse strategie basate sulla formula di Jacobi per la derivata del determinante di una matrice. Saranno discussi i dettagli del metodo che ne deriva, la cui complessità computazionale risulta, nel caso di elevato grado k del polinomio, vantaggiosa rispetto ai metodi matriciali di uso comune per il calcolo degli autovalori. Si porrà particolare attenzione alla possibilità di adattare il metodo di Ehrlich-Aberth per polinomi con particolari strutture che inducano una struttura nello spettro degli autovalori. In molte situazioni, l'adattamento di Ehrlich-Aberth consente di recuperare esattamente la struttura indotta nello spettro, ottenendo contemporaneamente un ulteriore vantaggio computazionale.

Bibliografia

[1] L. Gemignani, V. Noferini: "The Ehrlich-Aberth method for palindromic matrix polynomials represented in the Dickson basis", sottoposto per la pubblicazione, 2011.

[2] D. A. Bini, V. Noferini: "Solving polynomial eigenvalue problems by means of Ehrlich-Aberth method", in preparazione.

[1] PhD student

Margherita Porcelli: Regole di aggiornamento del parametro di penalità nei metodi di ottimizzazione con modelli regolarizzati

Nick I. M. Gould
Rutherford Appleton Laboratory, UK

Margherita Porcelli
Dipartimento di Matematica, FUNDP-Università di Namur, Belgio
email: `margherita.porcelli@fundp.ac.be`

Philippe L. Toint
Dipartimento di Matematica, FUNDP-Università di Namur, Belgio

Sunto. Consideriamo la risoluzione numerica del seguente problema di ottimizzazione non vincolato

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione con derivate seconde differenziabili con continuità. È ben noto che il metodo di Newton applicato al sistema $\nabla f(x) = 0$ non è sempre ben definito e che, in generale, può non convergere globalmente. Per garantirne la convergenza globale, sono state proposte in letteratura opportune strategie di globalizzazione basate ad ogni iterazione, sulla risoluzione di sottoproblemi regolarizzati. In particolare, tali regolarizzazioni consistono nel controllare la norma del passo da calcolare per aggiornare le iterate. La strategia di trust-region, per esempio, impone una limitazione esplicita sulla norma del passo minimizzando un modello quadratico per la funzione obiettivo f in un intorno, detto trust-region, dell'iterata corrente.

Recentemente, sono state proposte nuove tecniche di globalizzazione basate sulla minimizzazione di un modello quadratico o cubico della funzione obiettivo in un intorno implicitamente definito da un termine di regolarizzazione che penalizza l'ampiezza del passo. In particolare, ci occupiamo del metodo ARC proposto in [Cartis, Gould, Toint, Math. Program., 2009] in cui la funzione obiettivo viene localmente approssimata da un modello cubico in cui i termini nello sviluppo di Taylor superiori al terz'ordine vengono sostituiti da un termine di penalità che comprende una stima adattiva locale della costante di Lipschitz dell'Hessiana di f. Il metodo ARC ha proprietà di convergenza globale e locale confrontabili con quelle del metodo di trust-region e possiede proprietà di complessità superiori.

L'aggiornamento ad ogni iterazione del parametro di penalità riveste un ruolo cruciale dal punto di vista pratico. Proponiamo nuove regole di aggiornamento per tale parametro basate su tecniche di interpolazione che sfruttano proprietà caratteristiche del modello cubico utilizzato nel metodo ARC. Inoltre, presentiamo i risultati di un'ampia sperimentazione numerica volta sia a validare le nuove tecniche di aggiornamento che a studiare il comportamento pratico del nuovo metodo ARC. In particolare, il nuovo metodo viene confrontato con il classico metodo di trust-region nella risoluzione di problemi reali di grandi dimensioni.

Giuseppe Rodriguez: Identificazione di parametri nella inversione numerica della trasformata di Laplace con dati reali

Claude Brezinski
Laboratoire Paul Painlevé, Université des Sciences et Technologies de Lille, France

Giuseppe Rodriguez[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari
email: `rodriguez@unica.it`

Sebastiano Seatzu
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari

Sunto. L'inversione numerica della trasformata di Laplace con dati reali, di rilevante importanza in molte applicazioni, è un problema fortemente malcondizionato. È questo il motivo per il quale la qualità dei risultati è fortemente dipendente dai valori attribuiti ad alcuni parametri, caratteristici degli algoritmi utilizzati. In questa comunicazione verrà illustrata una tecnica per la valutazione ottimale dei menzionati parametri, basata sui criteri di stima a posteriori dell'errore recentemente introdotti in [1,2].

Bibliografia

[1] C. Brezinski, G. Rodriguez, and S. Seatzu, *Error estimates for linear systems with applications to regularization*, Numer. Algorithms, 49(1-4):85-104, 2008.

[2] C. Brezinski, G. Rodriguez, and S. Seatzu, *Error estimates for the regularization of least squares problems*, Numer. Algorithms, 51(1):61-76, 2009.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del PRIN n. 20083KLJEZ-003 e parzialmente finanziato dalla Regione Autonoma della Sardegna attraverso il Programma Visiting Professor 2010.

Valeria Simoncini: Metodi avanzati di tipo proiettivo per la risoluzione dell'equazione algebrica di Lyapunov

Valeria Simoncini[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: valeria@dm.unibo.it

Sunto. I metodi proiettivi basati sugli spazi di Krylov di tipo razionale stanno emergendo come una classe di nuovi approcci altamente competitivi per la risoluzione iterativa dell'equazione algebrica di Lyapunov (continua nel tempo)

$$AX + XA^T + BB^T = 0,$$

con A matrice quadrata di grandi dimensioni ($O(10^5 - 10^6)$), e B matrice di rango (colonna) basso. Questo tipo di equazione ha grande rilevanza nello studio della stabilità di sistemi dinamici, nella riduzione d'ordine dei modelli associati (MOR), ed in problemi di teoria del controllo in generale. Anche quando A è sparsa, la matrice soluzione X è solitamente piena e quindi impossibile da memorizzare esplicitamente. I metodi proiettivi permettono di determinare una buona approssimazione della soluzione con un costo computazionale non elevato, mediante una matrice di rango basso, $\widetilde{X} = ZZ^T$, in cui è possibile determinare Z senza prima calcolare $\widetilde{X}$.

Durante l'intervento discuteremo varie proprietà di questi nuovi metodi risolutivi, e proporremo una strategia per la determinazione adattativa e completamente automatica dei parametri usati durante l'iterazione. Inoltre, riporteremo i risultati di un confronto teorico tra questa classe di metodi e l'iterazione classica ADI (Alternating Direction Implicit), largamente usata in letteratura. I nostri risultati confermano l'evidenza sperimentale attestante la superiorità di metodi di tipo proiettivo rispetto ad ADI, sotto ipotesi molto generali.

Questa attività è parzialmente in collaborazione con Vladimir Druskin e Leonid Knizhnerman, Schlumberger-Doll Research, Boston.

Bibliografia

[1] V. Simoncini. A new iterative method for solving large-scale Lyapunov matrix equations. SIAM J. Scient. Computing, v.29, n.3 (2007), pp. 1268-1288.

[2] V. Druskin and V. Simoncini. Adaptive rational Krylov subspaces for large-scale dynamical systems. pp.1-20 (2010). Systems & Control Letters. In stampa.

[3] V. Druskin, L. Knizhnerman and V. Simoncini. Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation. pp.1-21, (2010).

[1] Lavoro parzialmente svolto nell'ambito del Progetto PRIN 2008 N. 20083KLJEZ

Riccardo Zanella: Metodi di ottimizzazione vincolata per la ricostruzione di immagini su sistemi multicore

Roberto Cavicchioli
Dip. di Matematica Pura ed Applicata, Univ. di Modena e Reggio Emilia

Luca Zanni
Dip. di Matematica Pura ed Applicata, Univ. di Modena e Reggio Emilia

Gaetano Zanghirati
Dip. di Matematica, Univ. di Ferrara

Riccardo Zanella[1]
Laboratorio per le Tecnologie delle Terapie Avanzate (LTTA), Univ. di Ferrara
email: riccardo.zanella@unife.it

Sunto. La necessità di modellare matematicamente il processo di acquisizione dei dati di osservazione non invasiva di un oggetto o di un fenomeno è comune a molti campi e ha grande rilevanza per le applicazioni. Nell'ambito dei problemi di imaging, lo scopo è ottenere una stima ragionevolmente accurata dell'oggetto osservato. La formulazione di tali problemi porta a dover risolvere problemi di ottimizzazione vincolata con vincoli semplici. In questa comunicazione illustriamo le caratteristiche principali di un metodo del gradiente proiettato per la risoluzione di problemi di imaging mediante approcci del tipo massima verosimiglianza [1]. Le operazioni richieste dal metodo consentono una efficiente implementazione dell'algoritmo in ambienti di calcolo parallelo di ultima generazione, come quelli basati su GPU [2]. In particolare verranno proposte tecniche di parallelizzazione su diversi tipi di architetture multiprocessore, utilizzando i paradigmi CUDA ed MPI. Questo consente una efficace risoluzione di problemi sia di medie che di grandi dimensioni, inclusi quelli 3D, mediante il paradigma più adeguato sia al problema che all'architettura disponibile. La flessibilità dell'approccio permette di integrare anche strategie di scelta dei parametri del modello, basate ad esempio sul criterio della discrepanza [3]. Le prestazioni del software che implementa l'algoritmo saranno valutate su problemi di deconvoluzione di immagini e di rimozione del rumore.

Bibliografia

[1] S. Bonettini, R. Zanella, L. Zanni: "A scaled gradient projection method for constrained image deblurring", Inv. Prob. **25**, 2009.

[2] V. Ruggiero, T. Serafini, R. Zanella, L. Zanni: "Iterative regularization algorithms for constrained image deblurring on graphics processors" J. Glob. Optim., 2010.

[3] M. Bertero, P. Boccacci, G. Talenti, R. Zanella, L. Zanni: "A discrepancy principle for Poisson data", Inv. Prob. **26**, 2010.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del PRIN 2008 "Optimization methods and software for inverse problems", www.unife.it/prisma

Sezione 13 Metodi numerici per le equazioni alle derivate parziali

Alessandra Aimi: Un metodo BEM energetico di tipo Galerkin per problemi di propagazione di onde

Alessandra Aimi
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: alessandra.aimi@unipr.it

Chiara Guardasoni
Dipartimento di Matematica, Università di Parma

Stefano Panizzi
Dipartimento di Matematica, Università di Parma

Attilio Frangi
Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano

Sunto. Molti problemi dipendenti dal tempo modellati da equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) di tipo iperbolico possono essere riformulati mediante equazioni integrali di contorno (BIE) e quindi discretizzate attraverso il classico metodo degli elementi di contorno (BEM). Interessanti applicazioni sono già state realizzate, per esempio, in sismologia, acustica ed elettromagnetismo, sfruttando in particolare il soddisfacimento implicito delle condizioni di radiazione all'infinito.

Per problemi di propagazione di onde, diversi sono i contributi relativi a formulazioni BEM nel dominio delle frequenze che utilizzano la trasformata di Laplace. Recentemente, è stato introdotto un metodo BEM di tipo Galerkin direttamente in spazio-tempo per la discretizzazione di BIE relative a problemi 2D di propagazione di onde, basato sulla naturale identità dell'energia soddisfatta dalla soluzione del corrispondente problema differenziale, che conduce ad una formulazione debole delle BIE con precise proprietà di continuità e coercività [1,2].

Qui illustriamo l'estensione dell'approccio energetico alla risoluzione numerica di problemi esterni 3D di propagazione di onde con condizioni al bordo di Neumann, riformulati in termini di BIE ipersingolari. Mentre in lavori precedenti la forma bilineare energetica era discretizzata direttamente con il suo nucleo ipersingolare, qui consideriamo una forma bilineare equivalente ottenuta con un approccio di regolarizzazione già utilizzato in [3] e quindi la discretizzazione di un nucleo debolmente singolare. Saranno inoltre discussi alcuni schemi di calcolo degli integrali, nelle variabili spaziali e temporali, che costituiscono gli elementi della matrice di Galerkin.

Bibliografia

[1] A. Aimi, M. Diligenti and S. Panizzi, Energetic Galerkin BEM for wave propagation Neumann exterior problems, CMES, 58, (2010), 185-219.

[2] A. Aimi, M. Diligenti, C. Guardasoni, On the energetic Galerkin boundary element method applied to interior wave propagation problems, J. Comp. Appl. Math., 235, (2011), 1746-1754.

[3] A. Frangi, Elastodynamics by BEM: a new direct formulation, Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 45, (1999), 721–740.

Francesca Bonizzoni: Equazioni dei momenti per la formulazione mista del problema dell'Hodge Laplacian con forzante stocastica

Fabio Nobile
MOX - Dipartimento di Matematica, Politecnico di MIlano

Francesca Bonizzoni[1]
MOX - Dipartimento di Matematica, Politecnico di MIlano
email: `francesca1.bonizzoni@mail.polimi.it`

Annalisa Buffa
Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche - CNR Pavia

Sunto. Si studia la formulazione mista dell'equazione $\delta \mathrm{du} + \mathrm{d}\delta \mathrm{u} = \mathrm{f}$ definita su un dominio n-dimensionale D con forzante f dipendente dalla variabile spaziale $x \in D$ e dalla variabile $\omega \in \Omega$, dove $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità. L'operatore $\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta$, che mappa k-forme differenziali in k-forme differenziali, è noto in bibliografia come operatore di Hodge-Laplace. Poiché il dato forzante f è un campo stocastico, la soluzione dell'equazione precedente sarà essa stessa dipendente da ω.

Dopo aver introdotto gli opportuni spazi di Sobolev stocastici, si derivano le equazioni deterministiche soddisfatte dalla media e dalle correlazioni dei due campi u e $p = \delta u$ e si stabiliscono risultati di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati delle soluzioni. Si sottolinea che mentre la struttura del problema della media rispecchia la struttura del problema stocastico di partenza, le equazioni per le correlazioni dei campi u e p sono definite sul prodotto cartesiano $D \times D$ e si ottengono tensorizzando l'operatore coinvolto nel problema di partenza.

Utilizzando gli strumenti del calcolo esterno si individuano discretizzazioni agli elementi finiti stabili. Si trattano con particolare attenzione le equazioni della magnetostatica e il problema di Darcy.

Bibliografia

[1] Douglas N. Arnold, Richard S. Falk e Ragnar Winther, "Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications". *Acta Numerica*, **15** (2006), pp. 1-155.

[2] Tobias Von Petersdorff, Christoph Schwab, "Sparse finite element methods for operator equations with stochastic data". *Applications of mathematics*, Vol. **2**, pp. 145-180.

[3] Christoph Schwab, Radu-Alexandru Todor, "Sparse finite elements for elliptic problems with stochastic loading". *Numerische Mathematik*, Vol. **95** (2003), pp.707-734.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto NUMQES - Advanced Numerical Techniques for Uncertainty Quantification in Engineering and Life Science Problems

Sebastiano Boscarino: Metodi Impliciti-Espliciti (IMEX) Runge-Kutta per sistemi iperbolici con rilassamento diffusivo *stiff*

Sebastiano Boscarino
Dipartimento di Matematica ed Informatica, Università di Catania
email: boscarino@dmi.unict.it

Giovanni Russo
Dipartimento di Matematica ed Informatica, Università di Catania

Lorenzo Pareschi
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Sunto. Molti modelli matematici sono descritti da sistemi iperbolici con rilassamento *stiff*, definiti da un tempo di rilassamento piccolo ε. In un rilassamento di tipo diffusivo, quando $\varepsilon \to 0$, il sistema rilassa a una equazione di tipo parabolica oppure a una equazione di convezione e diffusione. Inoltre, risolvere sistemi iperbolici con rilassamento diffusivo è abbastanza complicato da un punto di vista numerico poiché le velocità caratteristiche della parte iperbolica dipendono da ε e divergono non appena $\varepsilon \to 0$. Classici metodi IMEX Runge-Kutta sviluppati per sistemi iperbolici con rilassamento *stiff* ([2], [3]), applicati a tali sistemi falliscono perché la condizione CFL richiederebbe $\Delta t = \mathcal{O}(\varepsilon \Delta x)$. In precedenti lavori, [1], questo problema è stato superato introducendo degli schemi *asymptotic preserving* che nel limite diffusivo si riducono a consistenti schemi espliciti per l'equazione diffusiva (oppure di convezione e diffusione). In questa comunicazione presentiamo due diverse tecniche per la costruzione di schemi IMEX Runge-Kutta che catturano il corretto comportamento asintotico nel limite diffusivo senza la restrizione classica di stabilità per equazioni di tipo diffusivo sul passo temporale, $\Delta t = \mathcal{O}(\Delta x^2)$. Il primo approccio, in collaborazione con L. Pareschi, si basa sul trattamento in modo implicito di alcuni termini iperbolici, mentre il secondo approccio, che tratta i termini iperbolici in modo esplicito, è ottenuto applicando delle condizioni aggiuntive sui coefficienti del metodo IMEX Runge-Kutta. Vari test numerici verranno presentati per confermare la validità dei due approcci.

Bibliografia

[1] G. Naldi, L. Pareschi: "Numerical Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws with Stiff Diffusive Relaxation", J. on Numer. Anal., 37, 1246-1270 (2000).

[2] L. Pareschi, G. Russo: "Implicit-Explicit Runge-Kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxations", J. Scientific Computing 25, 129-155 (2005).

[3] S. Boscarino, G. Russo: "On a class of uniformly accurate IMEX Runge-Kutta schemes and application to hyperbolic systems with relaxation", J. Scientific Computing, 31, 3, 1926-1945, (2009).

Elisabetta Carlini: Uno schema Semi-Lagrangiano per l'equazione AMSS

Elisabetta Carlini
Dipartimento di Matematica, Università di Roma, La Sapienza
email: carlini@mat.uniroma1.it

Roberto Ferretti
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tre

Sunto. Il modello Affine Morphological Scale Space (AMSS), introdotto da Alvarez et al. in [1], è un modello multiscala per processi di immagini basato sull'equazione della curvatura media alla 1/3:

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= \operatorname{div}\left(\frac{Du(x,t)}{|Du(x,t)|}\right)^{1/3} |Du(x,t)| \quad \text{for } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{32}$$

Tale equazione ammette un'unica soluzione viscosità continua, se il dato inziale è limitato e uniformemente continuo.

Il modello AMSS fu introdotto perché verifica, oltre le proprietà di invarianza standard come monotonia, invarianza di scale di grigio e invarianza per traslazioni, la proprietà di invarianza affine, ovvero risulta invariante rispetto proiezione planari di forme piane.

Presentiamo uno schema Semi-Lagrangiano per l'approssimazione della soluzione dell'equazione (1). Lo schema è ottenuto in modo simile allo schema presentato in [3] per il moto per curvatura media.

Analizziamo le proprietà di consistenza, monotonia e presentiamo un risultato di convergenza, seguendo la teoria sviluppata in [2].

La caratteristica principale di questo schema è verificare la proprietà di convergenza con passi in tempo relativamente lunghi, pur essendo uno schema completamente esplicito. Lo schema non verifica la proprietà di invarianza affine, tuttavia la proprietà è verificata asintoticamente, come si mostra in un test numerico.

Infine, mostriamo un'applicazione dello schema al filtraggio di immagini.

Bibliografia

[1] L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions, J. M. Morel, *Axioms and Fundamental Equations og Image-Processing*, Arch. for Rational Mechanics, Springer-Verlag, (1993), 199–257.

[2] G. Barles, P.E. Souganidis, *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second-order equations*, Asymp. Anal., **4** (1991), 271–283.

[3] E.Carlini, M.Falcone, R. Ferretti, *Convergence of a large time step scheme for Mean Curvature Motion*, Interfaces and Free Boundaries, **12** (2011), 409–441.)

Nicola Cavallini: Approccio agli Elementi Finiti per l'Immersed Boundary Method

Nicola Cavallini
Dipartimento di Matematica "F.Casorati", Università di Pavia
email: nicola.cavallinin@unipv.it

Sunto. Problemi di interazione fluido-struttura rappresentano temi di crescente interesse sia dal punto di vista applicativo, sia dal punto di vista teorico. Fra le molte situazioni che vedono l'interagire di una fase fluida e di una solida ci concentriamo su quelle che coinvolgono fluidi viscosi e strutture viscoelastiche. In questa categoria di problemi, rientrano le applicazioni di bio-ingegneria dell'apparato vascolare (umano).

Il calcolo scientifico si occupa da diversi decenni di questi temi. Molti autori hanno contribuito allo sviluppo di diverse tecniche di indagine, fra questi ricordiamo A. Quarteroni, J.-F. Gerbeau, W. A. Wall e R. Glowinski. Ciascuno di questi approcci vede il fluido e la struttura occupare porzioni distinte del domino. Un approccio radicalmente diverso fu proposto da C. S. Peskin negli anni settanta. Qui la struttura è immersa nel fluido e lo sforzo elastico viene esercitato dalla fase solida verso la fase fluida. Il metodo è chimato *Immersed Boundary Method*.

Un significativo miglioramento dell'IBM viene intodotto da D. Boffi e L. Gastaldi negli anni duemila. Qui l'originale approccio alle differenze finite viene sostituito da una formulazione debole del problema. Di qui la possibilità di tenere conto in maniera variazionale dell'interfaccia fluido struttura e delle relative condizioni di trasmissione.

In questa presentazione ci soffermiamo sulle prestazioni di diversi elementi finiti. In particolare analizzeremo spazi di soluzione classici come *Bercovier–Pironneau* e *Hood–Taylor*. Inoltre prenderemo in considerazione gli spazi di soluzione per le pressioni arricchiti di funzioni costanti a tratti. Gli esperimenti numerici mostrano come le prestazioni degli spazi arricchiti siano significativamente superiori agli spazi standard.

Bibliografia

[1] D. Boffi, N. Cavallini, F. Gardini, and L. Gastaldi. "Local mass conservation of Stokes finite elements." in fase di revisione.

[2] D. Boffi, N. Cavallini, F. Gardini, and L. Gastaldi. "Immersed boundary method: performance analysis of popular finite element spaces." in fase di revisione.

Alessio Fumagalli: Modelli ridotti per flussi in mezzi porosi fratturati con griglie di calcolo non conformi

Carlo D'Angelo
Laboratorio MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Anna Scotti
Laboratorio MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Alessio Fumagalli
Laboratorio MOX, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: `alessio.fumagalli@mail.polimi.it`

Sunto. Simulazioni numeriche del movimento di fluidi in mezzi porosi, quali rocce o terreni inconsolidati, risultano molto complesse a causa delle forti eterogeneità nelle proprietà fisiche dei mezzi porosi. In numerose applicazioni geofisiche, come ad esempio dispersione di inquinanti in falde acquifere, stoccaggio di scorie nucleari, sequestro di CO_2 oppure migrazione di idrocarburi, i domini di interesse risultano molto vasti e omogenei, in contrasto con le eterogeneità, quali fratture, faglie e orizzonti, che risultano di dimensione ridotta e creano complesse interconnessioni.

In questa presentazione esporremo alcuni modelli ridotti per il trattamento di tali eterogeneità, in modo tale da rendere accettabile lo sforzo computazionale necessario per la simulazione e, al tempo stesso, rappresentare correttamente tutti i fenomeni. Tali modelli approssimano oggetti n dimensionali con superfici immerse, $n-1$ dimensionali, in un mezzo poroso n dimensionale, accoppiandoli con opportune condizioni di interfaccia [1].

Le attuali metodologie per la risoluzione di modelli accoppiati sono basate essenzialmente su griglie di calcolo conformi, ovvero le griglie delle fratture sono composte da facce della griglia del mezzo poroso. In contesto geofisico tale conformità può rappresentare un ostacolo che degrada la qualità della griglia di calcolo, con conseguente perdita di accuratezza. Il metodo proposto permetterà di trattare griglie di calcolo non conformi, ottenendo inoltre vantaggio nell'analisi di scenari multipli in presenta di incertezza sui parametri [2]. Per rappresentare le superfici immerse è stato utilizzato un metodo di tipo XFEM, come proposto in [3], in modo da permettere un completo disaccoppiamento geometrico delle griglie di calcolo.

Bibliografia

[1] V. Martin, J. Jaffré and J.E. Roberts, "Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media", SIAM J. Sci. Comput. 26 (2005), no. 5, 1667–1691

[2] C. D'Angelo, A. Scotti, "A Mixed Finite Element Method for Darcy Flow in Fractured Porous Media with Non-Matching Grids", MOX tech. report, Mathematical Department, Politecnico di Milano, 2010.

[3] A. Hansbo and P. Hansbo, "An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002), no. 47-48, 5537–5552

Francesca Gardini: Conservazione della massa per l'approssimazione agli elementi finiti del problema di Stokes

Daniele Boffi
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Nicola Cavallini
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Francesca Gardini
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
email: `francesca.gardini@unipv.it`

Lucia Gastaldi
Dipartimento di Matematica, Università di Brescia

Sunto. In questa presentazione studiamo la stabilità di alcuni elementi finiti per il problema di Stokes ottenuti dagli schemi classici arricchendo localmente lo spazio delle pressioni. In particolare, consideriamo una modifica degli schemi di Hood–Taylor e di Bercovier–Pironneau che consiste nell'aggiungere funzioni costanti a tratti allo spazio delle pressioni.

Gli spazi classici di Hood–Taylor e di Bercovier–Pironneau, essendo caratterizzati da pressioni continue, assicurano la proprietà di conservazione della massa solo sull'intero dominio. D'altra parte, schemi che prevedono pressioni discontinue assicurano la proprietà di conservazione delle massa a livello locale poiché la media della divergenza è nulla elemento per elemento.

Utilizzando la tecnica dei macroelementi si dimostra che se ogni elemento della mesh ha almeno un vertice interno, allora gli elementi di Hood–Taylor arricchiti con pressioni costanti a tratti soddisfano la condizione di *inf-sup* su mesh triangolari e tetraedriche in dimensione due e tre, rispettivamente.

Lo stesso approccio si applica anche agli spazi di Bercovier–Pironneau arrichiti in due dimensioni e la stabilità viene dimostrata sotto la stessa ipotesi sulla mesh. Ovviamente, il risultato non può valere per gli spazi arricchiti in dimensione tre dal momento che lo spazio delle velocità degli elementi di Bercovier–Pironneau non ha gradi di libertà interni alle facce.

I risultati numerici confermano la stabilità degli elementi presentati e dimostrano che la condizione sulla mesh è essenziale. Inoltre negli esperimenti numerici si osserva chiaramente la proprietà di conservazione della massa a livello degli elementi.

Bibliografia

[1] D. Boffi, N. Cavallini, F. Gardini, L. Gastaldi: "Local mass conservation of Stokes finite elements", sottoposto per la pubblicazione.

[2] D. Boffi, N. Cavallini, F. Gardini, L. Gastaldi: "Immersed boundary method: performance analysis of popular finite element spaces", sottoposto per la pubblicazione.

Annamaria Mazzia: Metodi meshless di tipo radiale-tensoriale applicati alla risoluzione del problema di Poisson

Annamaria Mazzia
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate, Università di Padova
email: mazzia@dmsa.unipd.it

Giorgio Pini
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate, Università di Padova

Flavio Sartoretto
DAIS, Università "Ca' Foscari" Venezia

Sunto. I metodi meshless per la risoluzione di Equazioni alle Derivate Parziali (PDE) stanno ricevendo un'attenzione sempre maggiore. La maggior parte delle strategie che si trovano in letteratura utilizzano Funzioni Base Radiali (RBF) per generare appropriati spazi di funzioni test e trial per risolvere forme variazionali delle PDE. Uno dei principali problemi da affrontare con questo tipo di approccio è quello di trovare efficaci e accurate formule di integrazione numerica su cerchi (per problemi 2D) o sfere (in 3D). In questa comunicazione viene proposta una tecnica che utilizza RBF per generare lo spazio delle funzioni trial, combinate con funzioni che sono prodotti tensoriali, per generare lo spazio delle funzioni test. Questo approccio permette di ottenere risultati più efficienti e accurati, grazie al fatto che utilizza domini di integrazione che sono rettangoli (in 2D) o parallelepipedi (in 3D). In questa comunicazione vengono documentati i buoni risultati numerici ottenuti su problemi test 2D di Poisson. Viene inoltre analizzata la performance dell'estensione a problemi test 3D, considerando sia griglie uniformi che mesh pseudo–casuali.

Bibliografia

[1] G. Pini, A. Mazzia, F. Sartoretto, Accurate MLPG solutions of 3D Potential Problems. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 36 (1), 2008, pp. 43-63

[2] A. Mazzia, G. Pini, Product Gauss quadrature rules vs. cubature rules in the meshless local Petrov-Galerkin method. *Journal of Complexity*, 26, 2010, pp.82-101

[3] A. Mazzia and F. Sartoretto, Meshless Solution of Potential Problems by Combining Radial Basis Functions and Tensor Product ones, *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 68 (1), 2010, pp.95–112

Marco Restelli: Metodi semi-Lagrangiani agli elementi discontinui

Luca Bonaventura
MOX- Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Marco Restelli
MOX- Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: `marco.restelli@polimi.it`

Giovanni Tumolo
Abdus Salam International Center of Theoretical Physics

Sunto. Saranno presentati risultati ottenuti nell'applicazione di tecniche di discretizzazione temporale semi-Lagrangiane a discretizzazioni spaziali agli elementi discontinui di problemi evolutivi di tipo iperbolico. Si mostrerà come l'uso di metodi semi-Lagrangiani permetta di superare le forti restrizioni di stabilità delle usuali discretizzazioni temporali esplicite per i metodi agli elementi discontinui. Proposto per la prima volta in [1], tale approccio è stato combinato in [2] con discretizzazioni semi-implicite e con un criterio di p-adattività che permettono di ridurre ulteriormente il costo computazionale della soluzione numerica di problemi ad avvezione dominante.

Bibliografia

[1] M. Restelli, L. Bonaventura, R. Sacco: A semi-Lagrangian Discontinuous Galerkin method for scalar advection by incompressible flows, Journal of Computational Physics, **216**, pp. 195-215, 2006

[2] G. Tumolo, A semi-implicit, semi-Lagrangian, p-adaptive Discontinuous Galerkin method for the shallow water equations, Tesi di Dottorato, Università di Trieste, 2011

Matteo Semplice: La produzione numerica di entropia: un indicatore d'errore per leggi di conservazione

Gabriella Puppo
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino

Matteo Semplice[1]
Dipartimento di Fisica e Matematica, Università dell'Insubria
email: `matteo.semplice@uninsubria.it`

Sunto. Consideriamo un sistema iperbolico di leggi di conservazione definito da un flusso $f(u)$ e con entropia $(\eta(u), \psi(u))$, i.e. le cui soluzioni $u(t,x)$ soddisfano

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{33a}$$

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) \leq 0. \tag{33b}$$

Consideriamo lo schema numerico ai volumi finiti

$$\overline{U}_j^{n+1} = \overline{U}_j^n - \lambda_j \left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2} \right),$$

dove U è la soluzione numerica, $\overline{U}_j^n$ la sue medie di cella in I_j (che ha dimensione h_j), $F_{j+1/2}$ sono flussi numerici consistenti con il flusso esatto e $\lambda_j = \Delta \mathrm{t}_j / h_j$ è il rapporto di griglia (locale). Scegliendo flussi numerici di entropia $\Psi_{j+1/2}$ (consistenti con ψ) calcoliamo anche la *produzione numerica di entropia*, definita come

$$S_j^n = \frac{1}{\Delta t_j} \left(\overline{\eta(U^{n+1})}_j - \overline{\eta(U^n)}_j + \lambda_j [\Psi_{j+1/2} - \Psi_{j-1/2}] \right).$$

La quantità S_j^n, essendo calcolata con la soluzione numerica, non è nulla nemmeno in regioni ove la soluzione esatta è regolare e la (1b) è soddisfatta come uguaglianza. Tuttavia S_j^n converge a zero con la stessa velocità dell'errore di troncamento locale dello schema ai volumi finiti, e diverge come $O(1/h)$ su uno shock. Tale quantità, può dunque essere impiegata come indicatore d'errore in uno schema adattivo.

Nel seminario discuterò applicazioni in una dimensione spaziale di questo indicatore d'errore ad algoritmi p-adattivi e h-adattivi. In particolare, gli schemi h-adattivi, al contrario di altre tecniche AMR diffuse per le leggi di conservazione, usano una unica griglia non uniforme e la tecnica del "timestepping locale" che permette notevoli risparmi computazionali.

Bibliografia

[1] G. Puppo and M. Semplice: "Numerical entropy and adaptivity for finite volume schemes", Comm. Comput. Phys., in stampa.

[1]Lavoro parzialmente finanziato dal progetto PRIN *Modellistica numerica per il calcolo scientifico ed applicazioni avanzate*

Lorenzo Tamellini: Approssimazione polinomiale di EDP ellittiche con coefficienti stocastici

Fabio Nobile
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Lorenzo Tamellini
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: lorenzo.tamellini@mail.polimi.it

Jöakim Back
Applied Mathematics and Computational Science Department, KAUST - Thuwal, Saudi Arabia

Raul Tempone
Applied Mathematics and Computational Science Department, KAUST - Thuwal, Saudi Arabia

Sunto. Si consideri una EDP ellittica della forma

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{y})) = f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{34}$$

dove $a(\mathbf{x},\mathbf{y})$ è un coefficiente di diffusione che dipende dalla variabile spaziale $\mathbf{x}$ e da un vettore di N parametri $\mathbf{y}$, il cui valore non sia noto con precisione (errori di misura, osservazioni limitate). Per tenere conto di tale incertezza i parametri $\mathbf{y}$ vengono modellizzati come variabili aleatorie a supporto $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$; di conseguenza anche la soluzione del problema dipenderà da tali variabili aleatorie, $u = u(\mathbf{x},\mathbf{y})$, e l'equazione (1) deve essere soddisfatta per quasi ogni $\mathbf{y} \in \Gamma$.

Per ottenere una approssimazione di u considereremo due metodi di approssimazione polinomiale di ordine elevato (Galerkin Stocastico e Collocazione Stocastica). Poiché è possibile dimostrare che, per equazioni come (1), u è una funzione analitica dei parametri $\mathbf{y}$, i metodi considerati sono efficaci nel caso in cui il numero di parametri sia moderato. D'altra parte, per limitare il peggioramento delle prestazioni di questi metodi all'aumentare del numero di parametri considerati (*curse of dimensionality*), occorre scegliere attentamente lo spazio polinomiale in cui cercare l'approssimazione di u [1]. In questo lavoro [2] approfondiremo l'analisi teorica della struttura del problema e della dipendenza di u dai parametri $\mathbf{y}$, formalizzando una strategia per costruire spazi polinomiali e griglie di collocazione "ottimali"; la bontà dell'approccio proposto è supportata da esempi numerici.

Bibliografia

[1] BNTT-optimal J. Bäck, F. Nobile, L. Tamellini, and R. Tempone. Implementation of optimal Galerkin and collocation approximations of PDEs with random coefficients. *Proceedings of CANUM 2010.* In corso di st. in ESAIM Proceeding.

[2] BNTT-comparison J. Bäck, F. Nobile, L. Tamellini, and R. Tempone. Stochastic spectral Galerkin and collocation methods for PDEs with random coefficients: a numerical comparison. In *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations*, J.S. Hesthaven and E.M. Ronquist editors, volume 76 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering, pages 43–62. Springer, 2011.

Francesca Tantardini: La proiezione L^2 nella discretizzazione dell'equazione del calore

Francesca Tantardini
Dipartimento di Matematica F. Enriques, Università degli Studi di Milano
email: francesca.tantardini1@unimi.it

Andreas Veeser
Dipartimento di Matematica F. Enriques, Università degli Studi di Milano

Sunto. Si considera la discretizzazione dell'equazione del calore, approfondendo un aspetto della discretizzazione spaziale. L'H^1-stabilità della proiezione L^2-ortogonale è stata sfruttata, ad esempio in [3], [6], [7], per derivare delle stime a priori dell'errore in norme che permettono di limitare l'operatore differenziale associato. Nel caso si scelgano elementi finiti per la discretizzazione del dominio spaziale, questa condizione impone dei vincoli sulla mesh, si veda ad esempio [2], [4]. Scopo di questa comunicazione è chiarire il ruolo di questa ipotesi, facendo uso della teoria inf-sup. A differenza di [1] e [5], si adotta l'ambiente funzionale standard per il metodo di Faedo-Galerkin e si dimostra che l'H^1-stabilità della proiezione L^2-ortogonale è condizione necessaria e sufficiente per la quasi-ottimalità della soluzione di Petrov-Galerkin. Questo risultato si estende alla discretizzazione di un'equazione parabolica lineare astratta.

Bibliografia

[1] C. Baiocchi, F. Brezzi, "Optimal error estimates for linear parabolic problems under minimal regularity assumptions", Calcolo 20 (1983), 143-176.

[2] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, O. Steinbach, "On the stability of the L^2 projection in $H^1(\Omega)$", Math. Comp. 71 (2002), 147-156.

[3] K. Chrysafinos, L.S. Hou, "Error estimates for semidiscrete finite element approximations of linear and semilinear parabolic equations under minimal regularity assumptions", SIAM J. Numer. Anal. 40 (2002), 282-306.

[4] M. Crouzeix, V. Thomée, "The stability in L_p and W_p^1 of the L_2-projection onto finite element function spaces", Math. Comp. 48 (1987), 521-532.

[5] T. Dupont, "Mesh modification for evolution equations", Math. Comp. 39 (1982), 85-107.

[6] W. Hackbusch, "Optimal $H^{p,p/2}$ error estimates for a parabolic Galerkin method", SIAM J. Numer. Anal. 18 (1981), 681-692.

[7] F. Tomarelli, "Regularity theorems and optimal error estimates for linear parabolic Cauchy problems", Numer. Math. 45 (1984), 23-50.

Sezione 14 Algebra

Paolo Bravi: La classificazione delle varietà magnifiche

Paolo Bravi
Dipartimento di Matematica, Università di Roma La Sapienza
email: bravi@mat.uniroma1.it

Sunto. Sia G un gruppo algebrico lineare riduttivo, sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Una G-varietà si dice sferica se è normale e contiene una B-orbita aperta (densa), dove B è un sottogruppo di Borel (un sottogruppo di G connesso risolubile massimale). Il programma di classificazione delle varietà sferiche è stato completato di recente.

Nel 1983 D. Luna e T. Vust, generalizzando la teoria delle varietà toriche, hanno classificato le varietà sferiche che contengono una fissata G-orbita aperta.

Nel 2001 D. Luna, utilizzando risultati di M. Brion, F. Knop e B. Wasserman, ha ridotto la classificazione degli spazi omogenei sferici alla classificazione delle varietà magnifiche.

Una G-varietà X si dice magnifica se è completa, non-singolare, contiene una G-orbita aperta il cui complementare è unione di (un numero finito di) G-divisori primi ad incroci normali e non vuoti tali che, per ogni $x \in X$, l'intersezione dei G-divisori primi che contengono x è uguale alla chiusura della G-orbita di x.

D. Luna ha inoltre congetturato che le varietà magnifiche sono classificate da certi invarianti combinatorici detti sistemi sferici.

La dimostrazione di tale congettura è stata ora completata e si basa sui recenti risultati di: D. Luna, G. Pezzini, I.V. Losev, S. Cupit-Foutou e l'autore di questa comunicazione.

Bibliografia

[1] D. Luna e T. Vust, "Plongements d'espaces homogènes", Comment. Math. Helv. 58 (1983), 186–245.

[2] D. Luna, "Variétés sphériques de type A", Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 94 (2001), 161–226.

[3] I.V. Losev, "Uniqueness property for spherical homogeneous spaces", Duke Math. J. 147 (2009), 315–343.

[4] P. Bravi, "Primitive spherical systems", Trans. Amer. Math. Soc., in corso di stampa, arXiv:0909.3652 .

[5] S. Cupit-Foutou, "Wonderful varieties: a geometrical realization", arXiv:0907.2852 .

[6] P. Bravi e G. Pezzini, "A constructive approach to the classification of wonderful varieties", arXiv:1103.0380 .

Giovanni Cerulli Irelli: Positività nelle algebre cluster

Giovanni Cerulli Irelli[1]
Mathematical Institute, Bonn
email: cerulli.math@googlemail.com

Sunto. Le algebra cluster sono anelli commutativi introdotti da Sergei Fomin e Andrei Zelevinsky nel 2001 allo scopo di creare un modello algebrico/combinatorico per lo studio della positività totale e delle basi canoniche duali di gruppi algebrici semisemplici. Infatti molti anelli di coordinate sono stati scoperti avere una struttura di algebra cluster. Dopo la loro introduzione, la teoria delle algebre cluster ha trovato applicazioni in diversi campi della matematica, dalla teoria tilting al calcolo tropicale, dalla teoria di Lie alla geometria di Poisson alla teoria degli invarianti.

Io ho svolto la tesi di dottorato all'Università di Padova, sotto la guida (esterna) di Andrei Zelevinsky. Il mio problema di tesi era il seguente: in un'algebra cluster $\mathcal{A}$ esiste una naturale nozione di positività e il mio problema era di descrivere esplicitamente il semianello degli elementi positivi di $\mathcal{A}$, per particolari algebre cluster. Per risolvere il problema ho dato la seguente definizione: una base lineare $\mathbf{B}$ di $\mathcal{A}$ si dice *atomica* se gli elementi positivi di $\mathcal{A}$ sono precisamente le combinazioni lineari non-negative degli elementi di $\mathbf{B}$. Gli elementi di $\mathbf{B}$ giocano quindi un ruolo simile a quello delle radici semplici: una radice è positiva se e solo se è combinazione lineare a coefficienti non-negativi di radici semplici. In particolare gli elementi della base atomica devono essere *positivi indecomponibili*: cioè devono essere positivi e non si devono scrivere come somma di elementi positivi distinti. Il problema iniziale si è cosi ridotto a descrivere esplicitamente gli elementi positivi indecomponibili di $\mathcal{A}$. È importante notare che in generale non ci si aspetta che gli elementi positivi indecomponibili siano linearmente indipendenti, anche se al momento non ci sono controesempi.

In questo seminario parleremo brevemente di questo problema e delle tecniche che si possono usare per risolverlo.

Bibliografia

[1] G. Cerulli Irelli: "Cluster Algebras of type $A_2^{(1)}$", Algebras and Representation Theory, 2011.

[2] G. Cerulli Irelli: "Quiver Grassmannians associated with string modules", Journal of Algebraic Combinatorics, 2011.

[3] G. Cerulli Irelli, F. Esposito: "Geometry of quiver Grassmannians of Kronecker type and canonical basis of cluster algebras", Algebra and Number Theory, 2011.

[4] G. Cerulli Irelli: "Positivity in skew-symmetric cluster algebras of finite type", Preprint: ArXiv: math/1102.3050, 2011.

[1] Lavoro svolto presso l'Università di Padova, la "Sapienza" di Roma e l'HIM di Bonn

Vincenzo De Filippis: Identità con α-Derivazioni Generalizzate in Anelli Primi e Semiprimi

Vincenzo De Filippis
Dipartimento di Scienze per l'Ingegneria e l'Architettura, Università di Messina
email: defilippis@unime.it

Sunto. Siano: $\mathcal{R}$ un anello associativo, α un automorfismo di $\mathcal{R}$. Una mappa additiva $d : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ è detta *α-derivazione* di $\mathcal{R}$ se $d(xy) = d(x)y + \alpha(x)d(y)$, per ogni $x, y \in \mathcal{R}$. Una mappa additiva $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ è detta *α-derivazione generalizzata* (*Generalized Skew-Derivation*) di $\mathcal{R}$ se esiste una α-derivazione d di $\mathcal{R}$, tale che $\mu(xy) = \mu(x)y+\alpha(x)d(y)$, per ogni $x, y \in \mathcal{R}$. Si noti che il concetto di α-derivazione generalizzata estende simultaneamente quelli di derivazione e derivazione generalizzata. Un polinomio generalizzato α-differenziale (in breve polinomio-GSD) è un polinomio generalizzato $\Phi(x_i^{\Delta_j})$ con coefficienti in $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ (l'anello dei quozienti di Martindale di $\mathcal{R}$), in n variabili non commutative, sulle quali agiscano le parole Δ_j, ciascuna delle quali sia una composizione di α-derivazioni generalizzate μ_k. In particolare, se $\alpha = id_{\mathcal{R}}$ allora ogni μ_k è una derivazione generalizzata usuale; in tale caso $\Phi(x_i^{\Delta_j})$ è detto polinomio generalizzato differenziale (polinomio-GD). Se $\Phi(r_i^{\Delta_j}) = 0$ per ogni $r_1, r_2, \cdots, r_n \in \mathcal{R}$, allora $\Phi(x_i^{\Delta_j})$ è detta identità-GSD di $\mathcal{R}$ (rispettivamente identità-GD, nel caso $\alpha = id_{\mathcal{R}}$ e $\Phi(x_i^{\Delta_j})$ sia un polinomio-GD). In [2] e [3] vengono proposti una serie di risultati relativi alla analisi della struttura di anelli primi soddifacenti particolari identità-GD. Nella presente comunicazione si intendono presentare alcune estensioni di tali risultati, per anelli primi e semiprimi soddisfacenti identità-GSD ([1], [4], [5], [6]).

Bibliografia

[1] E. Albas, N. Argac, V. De Filippis, C. Demir, An Engel condition with generalized skew derivation on Lie ideals, inviato per la pubblicazione.

[2] V. De Filippis, An Engel condition with generalized derivations on multilinear polynomials, Israel Journal of Mathematics vol. 162, (2007) 93-108

[3] V. De Filippis, Generalized derivations with Engel condition on multilinear polynomials, Israel Journal of Mathematics vol. 171, (2009) 325-348.

[4] V. De Filippis, F. Wei, Identities with Generalized Skew Derivations, inviato per la pubblicazione.

[5] V. De Filippis, F. Wei, Posner's second theorem for Skew Derivations on left ideals, inviato per la pubblicazione.

[6] V. De Filippis, F. Wei, Posner's second theorem and annihilator conditions with generalized skew derivations, inviato per la pubblicazione.

Alice Fabbri: Domini Vacanti

Alice Fabbri
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma Tre
email: afabbri@mat.uniroma3.it

Sunto. Le operazioni *star*, introdotte da Krull in una serie di lavori pubblicati dal 1936, sono operazioni di chiusura sull'insieme degli ideali (frazionari) non nulli di un dominio. Il completamento di ideali in un dominio integralmente chiuso ne è un esempio.

Tra le operazioni star di un dominio è possibile isolare quelle cancellative, rispetto ad una opportuna moltiplicazione, sugli ideali finitamente generati. Tali operazioni star sono dette *endlich arithmetisch brauchbar* (in breve, *e.a.b.*). Ad ogni operazione star e.a.b., $\star$, su un dominio R, è canonicamente associato *l'anello di funzioni di Kronecker di* R:

$$\mathrm{Kr}(R,\star) := \{0\} \cup \{f/g : 0 \neq f, g \in R[X], c(f)^\star \subseteq c(g)^\star\},$$

dove $c(f)$ denota il *contenuto di* f, i.e. l'ideale di R generato dai coefficienti di $f(X)$.

È ben noto che un dominio integralmente chiuso può essere rappresentato come intersezione dei suoi sopra anelli di valutazione. Tale rappresentazione, eccetto per casi molto particolari, non è unica, in particolare è ridondante. Il numero delle rappresentazioni di un dominio è legato al numero di operazioni star e.a.b. da esso ammesse e conseguentemente al numero di anelli di funzioni di Kronecker, come dimostrato da R. Gilmer e W. Heinzer.

Definizione. Un dominio integralmente chiuso R si dice *vacante* se date comunque due operazioni star e.a.b. $\star_1$ e $\star_2$ su R, si ha $\mathrm{Kr}(R,\star_1) = \mathrm{Kr}(R,\star_2)$.

Partendo dai risultati presenti in letteratura, dovuti a R. Gilmer, ovvero che ogni dominio di Prüfer è vacante e che esistono domini di pseudo valutazione (non di Prüfer) vacanti, abbiamo dimostrato che per gran parte dei domini maggiormente studiati nell'ambito della teoria moltiplicativa degli ideali (e.g. i domini di Krull, i PvMD, i domini gcd), la proprietà di essere vacante induce la proprietà più forte di essere di Prüfer. Per i domini di pseudo valutazione, invece, abbiamo fornito una classificazione, quasi completa, in relazione alla proprietà di essere vacante. Attraverso tale classificazione e costruzioni di tipo pullback è stato inoltre possibile produrre nuovi esempi di domini vacanti che non siano di Prüfer, né di pseudo valutazione.

Bibliografia

[1] R. Gilmer: "Multiplicative Ideal Theory", Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 1992.

[2] R. Gilmer, W. Heinzer: "Irredundant intersections of valuation rings", Math. Z., 103, 1968.

Carmela Ferrò: Funzioni di Hilbert e numeri di Betti di ideali lessicografici inversi nell'algebra esterna

Carmela Ferrò
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Messina
email: cferro@unime.it

Marilena Crupi
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Messina

Sunto. Un problema fondamentale in Algebra commutativa è quello di determinare limiti superiori e inferiori per i numeri di Betti di classi di ideali graduati. Mentre sono diversi i risultati interessanti relativi ai limiti superiori [1,2,5], non sono molti quelli relativi ai limiti inferiori. Uno tra tali risultati è dovuto a Deery [4], che ha provato che gli ideali lessicografici inversi hanno i "piú piccoli" numeri di Betti tra tutti gli ideali fortemente stabili aventi la stessa funzione di Hilbert in un anello dei polinomi.

Siano K un campo, V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia E l'algebra esterna su V. Un ideale graduato $I = \oplus_{j\geq 0} I_j$ di E è detto ideale lessicografico inverso se I è un ideale monomiale e se ogni componente graduata I_j è generata come K-spazio vettoriale da un segmento lessicografico inverso di grado j.

In [3] si studia il comportamento della funzione di Hilbert degli ideali lessicografici inversi e si dimostra che i numeri di Betti di tali ideali hanno numeri di Betti minimali per funzioni di Hilbert assegnate nell'algebra esterna.

Precisamente:

Teorema. *Sia $I \subsetneq E$ un ideale strongly stable e $J \subsetneq E$ un ideale lessicografico inverso tale che $H_{E/J}(d) = H_{E/I}(d)$, per ogni d. Allora $\beta_{i,j}(E/I) \geq \beta_{i,j}(E/J)$, per ogni i e j.*

Bibliografia

[1] Aramova, A., Herzog, J., Hibi, T.: "Gotzman Theorems for Exterior algebra and combinatorics", J. of Algebra 191, 174-211 (1997).

[2] Bigatti, A. : "Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function." Comm. in Algebra 21, 2317–2334 (1993).

[3] Crupi, M., Ferrò, C.: "Hilbert functions and Betti numbers of reverse lexicographic ideals in the exterior algebra." In corso di stampa in Turkish Journal Of Mathematics (2011).

[4] Deery, T.: "Revlex segment ideals and minimal Betti numbers", Queen's Papers 129, 194–219 (1996).

[5] Hulett, H.: "Maximum Betti numbers for a given Hilbert function", Comm. in Algebra 21, 2335–2350 (1993).

Gabriele Fusacchia: Moduli iniettivi e star-operazioni

Gabriele Fusacchia
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
email: gabfus@math.unipd.it

Sunto. L'uso delle star-operazioni (e più in generale delle semistar-operazioni), speciali operatori di chiusura definiti sugli ideali di un dominio di integrità, permette di caratterizzare e studiare sotto un'unica teoria una vasta gamma di classi di domini. In [1] viene proposto un approccio alla teoria dei moduli, su domini di integrità, basato sulle star-operazioni. Il primo passo consiste nel fissare una star-operazione $\star$ su un dominio R. Tale operazione determina tre sottoclassi fondamentali all'interno della classe dei moduli di R, che possono essere usate per descrivere la struttura di un modulo generico. Questo è evidente in particolare per i moduli iniettivi, come mostra il seguente Teorema:

Teorema. *Data una star-operazione $\star$ sul dominio R, ogni modulo iniettivo di R è esprimibile in modo unico come somma diretta di tre sottomoduli, ciascuno appartenente ad una delle tre sottoclassi fondamentali indotte da $\star$.*

Questo risultato va ad arricchire ed estendere la nozione di teoria di torsione, che può essere interpretata come un caso particolare, associato alle star-operazioni che soddisfano l'ulteriore ipotesi di distribuzione sulle intersezioni finite.

Di particolare interesse è lo studio della prima delle tre sottoclassi fondamentali indotte da una star-operazione $\star$, la classe dei moduli co-$\star$. Assumendo che la Condizione della Catena Ascendente (CCA) valga sugli ideali chiusi rispetto a $\star$, è infatti possibile dare una classificazione completa dei moduli iniettivi co-$\star$:

Teorema. *Se R soddisfa la* (CCA) *sugli ideali chiusi rispetto a $\star$, allora ogni R-modulo iniettivo co-$\star$ è esprimibile in modo unico come somma diretta di moduli indecomponibili. Inoltre, ogni somma diretta di moduli iniettivi co-$\star$ è ancora iniettiva.*

Bibliografia

[1] G. Fusacchia: "Injective modules and semistar operations", 2011. Accettato per la pubblicazione sul *J. Pure Appl. Algebra*

[2] G. Fusacchia: "Strong semistar Noetherian domains", 2010. Di prossima pubblicazione sullo *Houston J. Math.*

[3] L. Fuchs: "Injective modules over Mori domains", 2003. *Studia Sci. Math. Hungar.*

[4] M. Fontana, J.A. Huckaba: "Localizing systems and semistar operations", 2000. In *Non-Noetherian commutative ring theory*

Maurizio Imbesi: Grafi con cappi e invarianti

Maurizio Imbesi
Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze, Università di Messina
email: imbesim@unime.it

Monica La Barbiera
Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze, Università di Messina

Sunto. Sia $\mathcal{G}$ un grafo con n vertici $v_1, \ldots, v_n$, e sia $I(\mathcal{G})$ l'ideale dei lati di $\mathcal{G}$, un ideale monomiale dell'anello dei polinomi in n indeterminate $R = K[X_1, \ldots, X_n]$, K un campo. Quando $\mathcal{G}$ non possiede cappi, $I(\mathcal{G})$ è generato da monomi squarefree di grado 2 in R, $I(\mathcal{G}) = \big(X_iX_j \mid \{v_i, v_j\}$ lato di $\mathcal{G}\big)$, ma se $\mathcal{G}$ ha cappi $\{v_i, v_i\}$, tra i generatori di $I(\mathcal{G})$ vi sono anche monomi quadratici X_i^2, $i = 1, \ldots, n$.

Si introduce una significativa e ampia classe di grafi connessi senza cappi $\mathcal{G}$ per cui si prova, sulla base delle caratterizzazioni di ideali monomiali con quozienti lineari contenute in [1] e [3], che gli ideali dei lati di $\mathcal{G}$ hanno risoluzioni lineari; e se si aggiungono cappi in opportuni vertici di $\mathcal{G}$, gli ideali dei lati della nuova classe di grafi $\mathcal{G}'$ conservano risoluzioni lineari.

Se I è un ideale di un anello R che ha quozienti lineari, allora è possibile determinare invarianti algebrici standard per R/I quali dimensione di Krull, dimensione proiettiva, profondità, regolarità di Castelnuovo-Mumford, ecc.

Per le classi di grafi connessi $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ vengono ricavate le formule di tali invarianti.

Vengono inoltre esaminati i grafi quasi-bipartiti, cioè grafi bipartiti con cappi.

Si mostra che un grafo quasi-bipartito che ha cappi in tutti i suoi vertici è Cohen-Macaulay, quindi unmixed.

Tenendo conto delle descrizioni combinatoriche dei grafi bipartiti Cohen-Macaulay e unmixed considerate in [2] e [5], vengono caratterizzati i grafi quasi-bipartiti Cohen-Macaulay e unmixed. In particolare, se $\mathcal{G}$ è un grafo bipartito C.-M. (risp. unmixed) senza vertici isolati, si fa vedere che il grafo quasi-bipartito ottenuto a partire da $\mathcal{G}$ inserendo coppie di cappi è ancora C.-M. (risp. unmixed).

Bibliografia

[1] A. Conca, J. Herzog: Castelnuovo-Mumford regularity of product of ideals, Collect. Math. **54**, 2003, 137–152.

[2] J. Herzog, T. Hibi: Distributive lattices, bipartite graphs and Alexander duality, J. Alg. Combin. **22**, 2005, 289–302.

[3] J. Herzog, T. Hibi: Monomial Ideals, Springer, GTM **260**, 2011.

[4] M. Imbesi, M. La Barbiera: Algebraic properties of non-squarefree graph ideals, preprint 2011.

[5] R.H. Villarreal: Unmixed bipartite graphs, Rev. Col. Mat. **41**, 2007, 393–395.

Monica La Barbiera: Algebra simmetrica di ideali associati a grafi

Monica La Barbiera
Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze, Università di Messina
email: monicalb@dipmat.unime.it

Maurizio Imbesi
Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze, Università di Messina

Sunto. Siano $M = Rf_1 + Rf_2 + \cdots + Rf_q$ un modulo finitamente generato su un anello noetheriano R e $Sym_R(M) = R[T_1, T_2, \ldots, T_q]/J$ la sua algebra simmetrica. Si vogliono studiare i principali invarianti di $Sym_R(M)$, quali la dimensione, la molteplicità, la regolarità di Castelnuovo-Mumford. Se $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ è un anello di polinomi a coefficienti in un campo K, la teoria delle basi di Groebner interviene in modo determinante per lo studio di tali invarianti poiché possono essere controllati passando da J al suo ideale iniziale $in_{\prec}(J)$. Per definire $in_{\prec}(I)$ si introduce un ordine monomiale $\prec$ in $R[T_1, \ldots, T_q]$ relativo alle variabili $T_1, \cdots, T_q$ e si ha $in_{\prec}(J) = (in_{\prec}(f) | f \in J)$ ideale monomiale con $in_{\prec}(f)$ termine iniziale di f. In generale $(I_1T_1, I_2T_2, \ldots, I_qT_q) \subseteq in_{\prec}(J)$, dove $I_1, I_2, \ldots, I_q$ sono gli ideali annullatori della successione $f_1, f_2, \ldots, f_q$ che genera M con $I_i = M_{i-1} :_R f_i$ per ogni $i = 1, \ldots, q$ e $M_{i-1} = Rf_1 + \cdots + Rf_{i-1}$.

$f_1, f_2, \ldots, f_q$ è una s-successione per M se $(I_1T_1, I_2T_2, \ldots, I_qT_q) = in_{\prec}(J)$. In tal caso $in_{\prec}(J)$ si calcola in termini degli ideali annullatori della successione $f_1, f_2, \ldots, f_q$.

Questo nuovo approccio al problema, considerato in [1] e [5], applica la nozione di s-successione e consente di calcolare gli invarianti di $Sym_R(M)$ in termini dei corrispondenti invarianti di speciali quozienti di R modulo gli ideali annullatori.

Recenti risultati riguardano lo studio dell'algebra simmetrica di classi di ideali monomiali generati da una s-successione ([2], [3], [4]). In particolare si determinano classi di ideali associati a grafi generati da s-successioni. Come applicazione si calcolano gli invarianti della loro algebra simmetrica.

Bibliografia

[1] J. Herzog, G. Restuccia, Z. Tang: s-sequences and symmetric algebras, Manuscripta Math. **104**, 2001, 479–501.

[2] M. Imbesi, M. La Barbiera: s-sequences and connection problems, Communications in Applied and Industrial Mathematics **1**(2), 2010, 127-134.

[3] M. Imbesi, M. La Barbiera: Invariants of symmetric algebras associated to graphs, preprint 2011.

[4] M. La Barbiera, G. Restuccia: Mixed product ideals generated by s-sequences, Algebra Colloquium, In stampa, 2011.

[5] Z. Tang: On certain monomial sequences, J. of Algebra **282**, 2004, 831–842.

Patrizia Longobardi: Su di un problema riguardante i gruppi ordinati

Patrizia Longobardi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
email: plongobardi@unisa.it

Sunto. Si dice che un sottoinsieme finito S di un gruppo G soddisfa la *proprietà degli insiemi quadrati piccoli* se $|S^2| \leq \alpha|S| + \beta$, dove α e β sono numeri reali, $\alpha > 1$ e $S^2 = \{s_1 s_2 \mid s_1, s_2 \in S\}$. Scopo di questa comunicazione è mostrare che i sottoinsiemi finiti di *gruppi ordinati* soddisfacenti la proprietà degli insiemi quadrati piccoli con $\alpha = 3$ e $|\beta|$ piccolo, soddisfano notevoli proprietà strutturali. Questo è un passo nel programma di estendere i classici teoremi inversi di Freiman (cfr. [1]), dai gruppi abeliani a quelli non abeliani (cfr. per esempio [2]). Risultati analoghi sono stati ottenuti da Y. Bilu (1999), M. Chang (202), G. A. Freiman (1987), B. J. Green e I. Z. Ruzsa (2007), B. J. Green e T. C. Tao (2009), Y. O. Hamidoune (2010), I. Z. Ruzsa (1994), T. Sanders (2008), T. C. Tao (2008, 2009, 2011).

Sia G un gruppo e sia definita nell'insieme G una relazione d'ordine totale $\leq$. $(G, <)$ è detto un *gruppo ordinato* se per ogni $a, b, x, y \in G$, la diseguaglianza $a \leq b$ implica che $xay \leq xby$.

Sia G un gruppo ordinato e sia S un sottoinsieme finito di G di ordine $|S| = k \geq 2$. In collaborazione con G. A. Freiman, M. Herzog e M. Maj sono stati provati in [3] i seguenti risultati: (i) se $|S^2| \leq 3k - 3$, allora S è abeliano i.e. se S è non commutativo, allora $|S^2| \geq 3k - 2$ e questo risultato è il migliore possibile; (ii) $N_G(S) = C_G(S)$; e (iii) se $k \geq 3$ e $t = |S^2| \leq 3k - 4$, allora esistono $a, q \in G$ tali che $aq = qa$ e S è un sottoinsieme di $\{a, aq, aq^2, \ldots, aq^{t-k}\}$.

Bibliografia

[1] G. A. Freiman: "Foundations of a structural theory of set addition", Translations of mathematical monographs, v. 37. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1973.

[2] G. A. Freiman: "On finite subsets of nonabelian groups with small doubling", *Proc Amer. Math. Soc.*, in corso di stampa.

[3] G. A. Freiman, M. Herzog, P. Longobardi, M.Maj: "Small doubling in ordered groups", *J. Austral. Math. Soc.*, in corso di stampa.

[1] Lavoro svolto nell'ambito di GNSAGA

Mario Marietti: La congettura di Dyer-Lusztig

Mario Marietti
Dipartimento di Scienze, Università di Chieti-Pescara
email: marietti@sci.unich.it

Sunto. Sia W un arbitrario gruppo di Coxeter. I polinomi di Kazhdan–Lusztig di W sono dei polinomi $P_{u,v}(q)$ (uno per ogni coppia di elementi $u, v \in W$) introdotti da Kazhdan e Lusztig in [2] per costruire alcune rappresentazioni dell'algebra di Hecke di W. Presto ne furono trovate altre applicazioni, tra cui quelle in teoria di Lie e nella topologia delle varietà di Schubert.

La struttura algebrica di gruppo di W induce sull'insieme soggiacente una struttura di insieme parzialmente ordinato (ordine di Bruhat). Le varie equivalenti definizioni dei polinomi di Kazhdan–Lusztig fanno uso della struttura algebrica di W. Indipendentemente, negli anni 80, Dyer e Lusztig hanno congetturato che il polinomio $P_{u,v}$ dipendesse solo dall'intervallo di Bruhat $[u, v]$ come insieme parzialmente ordinato astratto: dati due intervalli $[x, y]$ e $[x', y']$ isomorfi in due gruppi di Coxeter, i polinomi $P_{x,y}$ e $P_{x',y'}$ sono congetturalmente uguali. La congettura di Dyer–Lusztig è stata dimostrata solo in casi particolari (ad esempio, con forti restrizioni sui gruppi o sul rango degli intervalli). In [1], abbiamo dimostrato che la congettura vale se x e x' sono gli elementi identità, senza alcuna altra restrizione.

Teorema 9. *Siano y e y' due elementi di due gruppi di Coxeter arbitrari. Se $\phi : [id, y] \mapsto [id', y']$ è un isomorfismo di insiemi parzialmente ordinati, $P_{x,y} = P_{\phi(x),\phi(y)}$.*

Siano G un gruppo algebrico riduttivo, B un suo sottogruppo di Borel e W il suo gruppo di Weyl. La decomposizione di Bruhat di G induce una decomposizione della varietà delle bandiere $G/B = \cup_{w \in W} BwB/B$ in celle parametrizzate da W le cui chiusure sono delle varietà proiettive X_w, chiamate varietà di Schubert, anch'esse dotate di una decomposizione cellulare: la varietà X_w è unione disgiunta delle celle BvB/B con $v \leq w$ nell'ordine di Bruhat. In [3], Kazhdan e Lusztig mostrano che i coefficienti del polinomio di Kazhdan-Lusztig $P_{v,w}$ sono i numeri di Betti della coomologia di intersezione della varietà di Schubert X_w in un intorno di un qualsiasi punto della cella BvB/B. Il Teorema 1 implica che, per conoscere tali coomologie, non è necessario conoscere le varietà in gioco ma solo le mutue inclusioni.

Bibliografia

[1] Brenti, F., Caselli, F., Marietti, M.: "Special matchings and Kazhdan-Lusztig polynomials", Advances in Mathematics 202, 555–601 (2006).

[2] Kazhdan, D., Lusztig, G.: "Representations of Coxeter groups and Hecke algebras", Inventiones Mathematicae 53 (2), 165–184 (1979).

[3] Kazhdan, D., Lusztig, G.: "Schubert varieties and Poincaré duality", Proc. Sympos. Pure Math., vol. 36, AMS, Providence, 185–203 (1980)

Alice Pavarin: Preantipodi per dual-quasi bialgebre

Alice Pavarin
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università degli studi di Padova
email: apavarin@math.unipd.it

Alessandro Ardizzoni
Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Ferrara

Sunto. Sia H una bialgebra. È noto che il funtore $(-) \otimes H : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_H^H$ determina un'equivalenza tra la categoria $\mathfrak{M}$ degli spazi vettoriali e la categoria $\mathfrak{M}_H^H$ degli Hopf-moduli destri se e solo se H ha un antipode i.e. è una Hopf algebra. La prima parte di questo enunciato è il cosiddetto teorema fondamentale per gli Hopf-moduli. Nel 1989 Drinfeld introdusse il concetto di quasi-bialgebra in connessione al sistema di equazioni alle derivate parziali di Knizhnik-Zamolodchikov. Nel lavoro di Drinfeld 'Quasi-Hopf algebras', l'antipode per una quasi-bialgebra (da cui il concetto di quasi-Hopf algebra) è introdotto per rendere rigida la categoria dei moduli destri piatti. Dalla categoria delle co-rappresentazioni di H si ottiene, invece, il concetto di dual quasi-bialgebra e di dual quasi-Hopf algebra. Per un'arbitraria dual quasi-Hopf algebra, il teorema fondamentale è dimostrato nell'articolo 'Two characterizations of finite quasi-Hopf algebras' come segue. Si dimostra prima che una dual quasi-bialgebra soddisfa il teorema fondamentale se e solo se la categoria delle sue co-rappresentazioni finito-dimensionali è rigida. Se è vero che ogni dual quasi-Hopf algebra soddisfa questa proprietà, il viceversa in generale non vale. Quindi le dual quasi-Hopf algebre non esauriscono la classe delle dual quasi-bialgebre che soddisfano il teorema fondamentale. È da osservare che l'equivalenza data nel teorema fondamentale nel caso delle algebre di Hopf ordinarie deve essere sostituito, nel caso delle quasi-bialgebre, dall'equivalenza tra la categoria H-comoduli sinistri ${}^H\mathfrak{M}$ e la categoria dei quasi-Hopf H-bicomoduli ${}^H\mathfrak{M}_H^H$. Il principale risultato che vorrei presentare stabilisce che tale equivalenza porta all'esistenza di una mappa $S : H \to H$ che abbiamo chiamato preantipode. Si può dimostrare che ogni dual quasi-bialgebra con antipode (i.e. una dual quasi-Hopf algebra) ammette un preantipode ma il viceversa non è, in generale, vero. Darò poi un esempio di costruzione di un preantipode per un'algebra di gruppo dotata di un 3-cociclo normalizzato.

Bibliografia

[1] A. Ardizzoni, A. Pavarin, *Preantipodes for dual-quasi bialgebras*, preprint (arXiv:1012.1956)

[2] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras.* (Russian) Algebra i Analiz **1** (1989), no. 6, 114–148; translation in Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 6, 1419–1457.

[3] P. Schauenburg, *Two characterizations of finite quasi-Hopf algebras.* J. Algebra **273** (2004), no. 2, 538–550.

Giovanni Scudo: Derivazioni Generalizzate in Anelli Primi ed Algebre di Banach

Giovanni Scudo
Dipartimento di Matematica, Università di Messina
email: gscudo@unime.it

Sunto. Siano: R un anello primo, $Z(R)$ il suo centro, U il suo anello dei quozienti di Utumi e C il suo centroide esteso. Molti risultati in letteratura evidenziano che la struttura globale di R è spesso strettamente connessa al comportamento di mappe additive definite in R, quali derivazioni e derivazioni generalizzate. Più precisamente una mappa additiva $F : R \longrightarrow R$ è detta derivazione generalizzata di R se $F(xy) = F(x)y + xd(y)$, per ogni $x, y \in R$, con d derivazione di R. In [1] viene evidenziata l'importanza del ruolo dell'insieme $T = \{[F(x), x], x \in S\}$, per un opportuno $S \subseteq R$ e per F derivazione generalizzata di R. Come caso particolare, se S è un ideale di Lie di R, si deduce che $T = (0)$ se e solo se esiste $\alpha \in C$ tale che $F(x) = \alpha x$, per ogni $x \in R$, eccetto nel caso in cui R soddisfi l'identità standard s_4 ed esistono $a \in U$, $\alpha \in C$ tali che $F(x) = ax + xa + \alpha x$, per ogni $x \in R$. Nella presente comunicazione consideriamo una analoga situazione. In particolare analizziamo l'insieme $\{[F(x), x]F(x), x \in S\}$, dove S è un ideale di Lie o un ideale destro di R, ed illustriamo i seguenti risultati, i quali sono contenuti in [2]:

Teorema. *Sia L un ideale di Lie non centrale di R tale che $[F(u), u]F(u) = 0$, per ogni $u \in L$, allora esiste $\alpha \in C$ tale che $F(x) = \alpha x$, per ogni $x \in R$, eccetto nel caso in cui R soddisfi l'identità standard s_4 ed esistono $a \in U$, $\alpha \in C$ tali che $F(x) = ax + xa + \alpha x$, per ogni $x \in R$.*

Teorema. *Sia I un ideale destro di R tale che $[F(x), x]F(x) = 0$, per ogni $x \in I$, allora $[I, I]I = (0)$ eccetto quando esistono $a, b \in U$, $\alpha, \beta \in C$ tali che $F(x) = ax + xb$ per ogni $x \in R$, ed inoltre $(a - \alpha)I = (0)$ e $(b - \beta)I = (0)$.*

Teorema. *Sia R una algebra di Banach non commutativa e $F(x) = ax + d(x)$ per qualche $a \in R$ e d una derivazione di R tali che $[F(x), x]F(x) \in rad(R)$ per ogni $x \in R$. Se F è continua allora $d(R) \subseteq rad(R)$ ed inoltre $[a, R] \subseteq rad(R)$.*

Bibliografia

[1] V. De Filippis, An Engel condition with generalized derivations on multilinear polynomials, Israel Journal of Mathematics vol. 162, (2007) 93-108

[2] V. De Filippis, G. Scudo, M.S. Tammam El-Sayiad, An identity with Generalized Derivations on Lie ideals, right ideals and Banach algebras, Czecoslovak Mathematical Journal, in corso di stampa.

Paola Lea Staglianò: s-Successioni e moduli monomiali

Paola Lea Staglianò
Dipartimento di Matematica, Università di Messina
email: paola.sta@virgilio.it

Sunto. Sia R un anello Noetheriano commutativo unitario, sia $M = Rf_1 + Rf_2 + \ldots + Rf_q$ un $R-$modulo finitamente generato e sia $Sym_R(M) = R[T_1, T_2, \ldots, T_q]/J$ l'algebra simmetrica di M. È possibile studiare gli invarianti standard di $Sym_R(M)$ dell'ideale delle relazioni J e utilizzando la teoria delle $s-$successioni introdotta da J. Herzog, G. Restuccia, Z. Tang nel 2001. Recentemente la teoria delle $s-$successioni è stata applicata nei seguenti casi:

- ideali monomiali, ideali generati da $d-$successioni e da successioni proprie
- moduli generici

Il nostro obiettivo è quello di studiare moduli generati da $s-$successioni, in particolare:

- moduli monomiali;
- moduli di sizigie di ideali monomiali

Teorema 10. *Sia $M = \oplus_{i=1}^{m} I_i g_i$ un modulo monomiale, con $I_i = (m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{ir_i})$, $i = 1, \ldots, m$. Se*

$$gcd(m_{ij,lk}, m_{tu,zv}) = 1, \text{ con } m_{ij,lk} = \frac{m_{ij}}{gcd(m_{ij}, m_{lk})}$$

con $i = l$ e $j < k$, $t = z$ e $u < v$ o $i < l$, $t < z$, $(i,j) \neq (t,u)$ e $(l,k) \neq (z,v)$ allora M è generato da una $s-$successione.

Teorema 11. *Sia $I = (f_1, \ldots, f_t)$ un ideale monomiale tale che*

(i) $gcd\left(\frac{lcm(f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3})}{lcm(f_{i_2}, f_{i_3})}, \frac{lcm(f_{j_1}, f_{j_2}, f_{j_3})}{lcm(f_{j_2} f_{j_3})}\right) = 1$,
$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq t$, $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq t$, $i_1 \neq j_1$, $i_2 \neq j_2$, $i_3 \neq j_3$;

(ii) *il secondo modulo di sizigie di I sia generato da trinomi.*

Allora $Syz_1(I)$ è generato da una $s-$successione.

Bibliografia

[1] J. Herzog, G. Restuccia, Z. Tang: "s-Sequences and Symmetric Algebras", Manuscripta Math., 104, 2001, pp. 479-501.

[2] G. Restuccia, P. L. Staglianò: "On the first syzygies module of a monomial ideal generated by a $s-$sequence", preprint 2011.

[3] P. L. Staglianò: "Graded modules on commutative noetherian rings generated by s-sequences ", Tesi di Dottorato, Messina, 2011.

Maria Tota: Gruppi con sottogruppi non-normali risolubili

Kivanc Ersoy
Department of Mathematics, Mimar Sinan Fine Arts University

Antonio Tortora
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno

Maria Tota
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
email: `mtota@unisa.it`

Sunto. Sia P una classe di gruppi. Nel seguito, indicheremo con P^* la classe dei gruppi i cui sottogruppi non-normali appartengono a P. Denotata con $\mathfrak{S}$ la classe dei gruppi risolubili, in collaborazione con il dott. K. Ersoy e il dott. A. Tortora, abbiamo studiato i gruppi in $\mathfrak{S}^*$. In particolare, tenendo conto che i "Mostri" di Tarski ([2]) sono esempi di gruppi appartenenti a questa classe, ci siamo ristretti, come è usuale, al caso localmente graduato.

In [1], Franciosi, de Giovanni and Newell hanno studiato i gruppi i cui sottogruppi non-normali sono policiclici e, per un gruppo G a sottogruppi risolubili hanno provato che se G è infinito e localmente graduato allora G è iperabeliano.

Nel nostro contesto, un analogo risultato è il seguente:

Teorema. *Sia G un gruppo localmente graduato in $\mathfrak{S}^*$. Allora G è iperabeliano e localmente risolubile oppure G è risolubile-per-finito.*

Bibliografia

[1] S. Franciosi, F. de Giovanni and M. L. Newell: "Groups with Polycyclic Non-Normal Subgroups", Algebra Colloquium, 7, 2000, 33–42.

[2] A.Y. Ol'shanskii: "Groups of bounded exponent with subgroups of prime order", Algebra i Logika 21, 553, 1982 (English translation in Algebra and Logic, 21, 1982), 369-418.

Sezione 15 Combinatorica

Arrigo Bonisoli: Disegni i cui blocchi sono grafi

Arrigo Bonisoli[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia
email: `arrigo.bonisoli@unimore.it`

Sunto. I disegni a blocchi o disegni combinatorici possono essere visti come strutture di incidenza finite costituite da punti e blocchi. Questi ultimi giocano il ruolo delle rette nella geometria. La tipologia di un disegno viene definita dai suoi parametri e dalle condizioni che vengono imposte alla relazione di incidenza punto–blocco. La nozione più classica è quella di 2–$(v, k, 1)$ disegno: v è il numero totale di punti, ciascun blocco è incidente esattamente k punti e viene richiesto che comunque presi due punti distinti esista un unico blocco che li incide entrambi.

In quest'ordine di idee un blocco non è altro che un insieme privo di struttura. Se si vuole pensare che un blocco abbia una certa "forma" occorre modellare ciascun blocco come un grafo. Se tutti i blocchi sono isomorfi a un assegnato grafo Γ parleremo di Γ–disegno: la nozione di 2–$(v, k, 1)$ disegno si ottiene quando Γ è il grafo completo su k vertici. L'insieme dei valori v per i quali esiste un Γ–disegno con v punti costituisce lo *spettro* del grafo Γ. Lo spettro è stato determinato per grafi "piccoli" (con un numero di vertici non superiore a cinque [2]) o per grafi particolari (il grafo di Petersen [1]).

In un 2–$(v, k, 1)$ disegno risulta costante il numero, tradizionalmente indicato con r, dei blocchi incidenti un punto. In un Γ–disegno non è detto che questo numero sia costante, qualora il grafo Γ non sia regolare. I Γ–disegni in cui r è costante vengono definiti "bilanciati" in [3] e lo spettro bilanciato di Γ è quindi l'insieme dei valori v per i quali esiste un Γ–disegno bilanciato con v punti.

Sono state studiate altre condizioni di "bilanciamento" per un Γ–disegno. In questa comunicazione verranno confrontate queste nozioni e verranno illustrati alcuni risultati che consentono la determinazione dei relativi spettri per varie classi di grafi Γ.

Bibliografia

[1] P. Adams, D.E. Bryant, "The spectrum problem for the Petersen graph", Journal of Graph Theory 22 (1996), 175–180.

[2] J.–C. Bermond, C. Huang, A. Rosa, D. Sotteau: "Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices", Ars Combinatoria 10 (1980), 211–254.

[3] P. Hell, A. Rosa: "Graph decompositions, handcuffed prisoners and balanced P–designs", Discrete Mathematics 2 (1972), 229–252.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN 2008 "Disegni Combinatorici, Grafi e loro Applicazioni"

Simona Bonvicini: Ricoprimenti di grafi cubici con matching di cardinalità fissata

Simona Bonvicini[1]
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria, Università di Modena e Reggio Emilia
email: simona.bonvicini@unimore.it

Giuseppe Mazzuoccolo
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria, Università di Modena e Reggio Emilia

Sunto. Sia $G = (V, E)$ un grafo semplice. Si dice accoppiamento o matching in G un qualsiasi sottografo 1–regolare M di G. Si dice che M è un k–matching se ha cardinalità k, cioè è costituito da esattamente k spigoli di G. Se $k = |V|/2$ allora M è detto accoppiamento perfetto o 1–fattore, [2].

Si dice 1–fattorizzazione di G una partizione dell'insieme E in 1–fattori di G. Un grafo G che ammette una 1–fattorizzazione è detto 1–fattorizzabile. Ovviamente, un grafo 1–fattorizzabile ha ordine pari. Il grafo completo K_{2v} su un numero pari di vertici è un esempio di grafo regolare 1–fattorizzabile, ma non tutti i grafi regolari di ordine pari sono 1–fattorizzabili, si prenda ad esempio il grafo di Petersen. E' molto difficile determinare i grafi regolari che sono 1–fattorizzabili, tant'è vero che già per i grafi cubici il problema risulta essere NP–completo, [1].

Tale problema ha portato ad estendere il concetto di 1–fattorizzazione a quello di $[k]$–fattorizzazione eccessiva. Più precisamente, sia k un intero positivo fissato e sia $\mathcal{M}$ un insieme di k–matching. Si dice che $\mathcal{M}$ è un $[k]$–ricoprimento di G se $E = \cup_{M \in \mathcal{M}} E(M)$. Un $[k]$–ricoprimento è minimo se esso contiene il minor numero possibile di k–matching e in tal caso viene anche detto $[k]$–fattorizzazione eccessiva. Per $k = |V|/2$ si parla semplicemente di fattorizzazione eccessiva. Si osservi che, se il grafo G è 1–fattorizzabile, allora una fattorizzazione eccessiva di G non è altro che una 1–fattorizzazione di G, ma se G non è 1–fattorizzabile ed esiste una fattorizzazione eccessiva $\mathcal{F}$ di G, allora da $|\mathcal{F}|$ sappiamo qual è il minimo numero di 1–fattori che occorre per ricoprire l'insieme E.

Si considera il problema delle $[k]$–fattorizzazioni eccessive quando G è un grafo cubico e $k = (|V|/2) - 1$.

Bibliografia

[1] M. R. Garey, D. S. Johnson, L. Stockmeyer: "Some simplified NP–complete graph problems", Theoret. Comput. Sci. 1 (1976), 237–267.

[2] L. Lovász, M. D. Plummer, Matching theory, Annals of Discrete Math. 29, North Holland, 1986.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN 2008 "Disegni Combinatorici, Grafi e loro Applicazioni"

Daniela Emma: Piani di traslazione associati a ovoidi A_6-invarianti della quadrica di Klein

Vito Abatangelo
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Bari

Daniela Emma[1]
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Bari
email: emma@dm.uniba.it

Bambina Larato
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Bari

Sunto. Nel complemento di traslazione di un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $GF(q)$ con $q = p^h$, $2 \leq h \in \mathbf{N}$, p primo, si possono presentare sottogruppi irriducibili di ordine coprimo rispetto a p. Questo fu evidenziato da T.G. Ostrom in un lavoro pionieristico del 1977, [2]. Lo stesso Ostrom dimostrò che esiste la possibilità che un tale gruppo sia isomorfo al gruppo alterno A_5 oppure al gruppo alterno A_6. Nel caso di A_5 Ostrom ha determinato tanto famiglie infinite di tali piani, quanto esempi sporadici.

Il complemento di traslazione del piano di Hering e quelli dei due piani di Mason contiene un gruppo isomorfo ad A_6.

Nel 1990 Biliotti e Korchmaros in [1] hanno affrontato questo problema mediante un approccio diverso da quelli precedenti. Per costruire una fibrazione in rette di $PG(3,q), q = p^2, 5 \leq p \leq 19$, questi Autori hanno usato la rappresentazione di tali rette sulla quadrica di Klein. In questo ambito hanno ottenuto parecchi esempi di nuovi piani di traslazione con la proprietà richiesta e hanno ritrovato gli esempi noti di Hering, di Mason e di Nakagawa.

Con V. Abatangelo e B. Larato abbiamo esaminato il caso $q = 23$ ottenendo il risultato seguente:

Teorema. *Esistono esattamente 23 piani di traslazione (non isomorfi tra loro) di ordine* 23^2 *il cui complemento di traslazione contiene un gruppo di collineazioni lineari isomorfo al gruppo alterno* A_6.

Bibliografia

[1] M. Biliotti and G. Korchmáros, Some finite translation planes arising from A_6-invariant ovoids of the Klein quadric, *J. Geom.* **37** (1990), 29-47.

[2] T.G. Ostrom, Collineation groups whose order is prime to the characteristic, *Math. Z.* **156** (1977), 56-71.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del Dottorato di Ricerca in Matematica

Michel Lavrauw: Semicorpi di skew polynomial rings

Michel Lavrauw[1]
Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali, Università di Padova
email: michel.lavrauw@unipd.it

John Sheekey
Department of Mathematics, University College Dublin

Sunto. Un semicorpo finito è un algebra a dimensione finita su un campo finito, distributiva, con identità, e priva di divisori dello zero. Mediante il metodo per introdurre coordinate per un piano proiettivo, un semicorpo corrisponde a un piano di traslazione il cui duale sia anch'esso un piano di traslazione. È stato dimostrato da A. A. Albert che le classi di isomorfismo di piani proiettivi corrispondono a le classi di isotopismo di semicorpi. Una famiglia interessante dei semicorpi è la famiglia di semicorpi ciclici, costruiti usando applicazioni semilineari. Lo scopo di questa comunicazione è quello di presentare un approccio usando la teoria dei "skew polinomial rings" per dimostrare una nuova limitazione per il numero di classi d'isotopismo di semicorpi ciclici.

[1]Lavoro svolto con il supporto del Research Foundation Flanders (FWO)

Fiorenza Morini: Quasianelli planari circolari: aspetti geometrici e combinatorici

Anna Benini
Dipartimento di Matematica, Università di Brescia

Achille Frigeri
Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano

Fiorenza Morini[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: `fiorenza.morini@unipr.it`

Sunto. Clay [1] e Ferrero [3] studiarono quasi contemporaneamente, ma indipendentemente, i quasianelli planari. Dallo studio di tale classe di quasianelli si è notato che da essi era possibile costruire interessanti strutture combinatorie quali, ad esempio, configurazioni tattiche, disegni bilanciati (BIBD) o parzialmente bilanciati (PBIBD) ed anche codici [5]. In [2] abbiamo considerato quasianelli planari circolari ed abbiamo introdotto la definizione di "disco" che nel caso di quasianello finitamente generato risulta avere importanti proprietà: ad esempio possiede una sorta di omogeneità per traslazioni e dilatazioni. Ma soprattutto abbiamo dimostrato che se $\mathcal{B}^{\mathcal{D}}$ è l'insieme di tutti i dischi di un particolare quasianello planare circolare N, la struttura d'incidenza $(N, \mathcal{B}^{\mathcal{D}})$ è un BIBD.

In [4] lo studio di tale struttura è risultato estremamente promettente, infatti, almeno nei casi più interessanti, si è potuto costruire uno schema d'associazione che ha reso la struttura $(N, \mathcal{B}^{\mathcal{D}})$ unione di PBIBD. In particolare da tali disegni abbiamo potuto ottenere codici dei quali è possibile calcolare i parametri e fra questi alcuni sono risultati ciclici.

Bibliografia

[1] Anshel, M. and Clay, J.R.: "Planar algebraic systems, some geometric interpretations", J. Algebra, 10, 166-173 (1968).

[2] Benini A., Frigeri, A., Morini, F.: "Codes and combinatorial structures from circular planar nearrings", Proceedings CAI 2011, 4th International Conference on Algebraic Informatics, sottoposto per la pubblicazione.

[3] Ferrero G., "Stems planari e BIB-disegni", Riv. Mat. Univ. Parma, 2(11), 79-96 (1970).

[4] Frigeri, A., Morini, F.: "Circular planar nearrings: geometrical and combinatorial aspects", sottoposto per la pubblicazione, available on `http://arxiv.org/`

[5] Fuchs, P., Hofer, G., Pilz, G.: "Codes from planar near-rings", IEEE Trans. Inform. Theory 36, 647-651 (1990).

[1] Lavoro svolto nell'ambito di PRIN 2008 - Strutture d'incidenza e combinatorie

Fernanda Pambianco: Archi in piani proiettivi

Daniele Bartoli
Dipartimento di Matematica ed Informatica, Università degli Studi di Perugia

Fernanda Pambianco
Dipartimento di Matematica ed Informatica, Università degli Studi di Perugia
email: `fernanda@dmi.unipg.it`

Stefano Marcugini
Dipartimento di Matematica ed Informatica, Università degli Studi di Perugia

Alexander A. Davydov
Accademia delle Scienze Russa, Mosca

Sunto. Un k-arco in $PG(2,q)$, piano proiettivo sopra il campo di Galois F_q, è un insieme di k punti a tre a tre non allineati. Un k-arco è detto completo se non è contenuto in alcun $(k+1)$-arco di $PG(2,q)$.

In particolare, un arco completo in $PG(2,q)$, i cui punti siano riguardati come colonne 3-dimensionali q-arie, definisce una matrice di controllo di un codice lineare q-ario di codimensione 3, avente distanza di Hamming 4 e raggio di ricoprimento 2. Gli archi possono essere interpretati come codici lineari MDS (Maximum Distance Separable).

Uno dei principali problemi nello studio dei piani proiettivi, che riveste anche rilevante interesse in Teoria dei Codici, è trovare lo spettro delle possibili cardinalità di archi completi.

In questo lavoro forniamo stime per $t_2(2,q)$, la cardinalità più piccola di un arco completo in $PG(2,q)$. Inoltre proponiamo nuove costruzioni di archi completi in $PG(2,q)$ e consideriamo lo spettro delle loro possibili cardinalità.

Claudio Perelli Cippo: Involuzioni semplici che evitano certi motivi

Claudio Perelli Cippo[1]
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: `claudio.perelli_cippo@polimi.it`

Piera Manara
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Sunto. Si applicano i teoremi di scomposizione e la tecnica dei cammini di Motzkin pesati per studiare le involuzioni che evitano, rispettivamente, i motivi 321, 4321 ,2143 (involuzioni vessillarie), ed entrambi i motivi 4321 e 2143 (e cioè gli insiemi $I(321)$, $I(4321)$, $I(2143)$ e $I(4321, 2143)$). In ciascuno di tali insiemi si caratterizzano graficamente le involuzioni semplici e se ne calcolano le funzioni generatrici. Si calcolano inoltre le funzioni generatrici corrispondenti alla struttura fine di ognuno dei suddetti insiemi. Per le involuzioni *semplici* di $I(321)$ si illustra una ulteriore caratterizzazione grafica in termine di cammini di Dyck ed un'altra interpretazione combinatoria in termini di cammini di Motzkin senza passi orizzontali a livello 0, aventi, questa volta, lunghezza $\frac{n}{2} - 1$.

Bibliografia

[1] M.H. Albert, M.D. Atkinson, *Simple permutations and pattern restricted permutations*, Discrete Mathematics 300 (2005) 1 - 15

[2] M. Barnabei, F. Bonetti, M. Silimbani, *Restricted involutions and Motzkin paths*, Adv. in Appl. Math. (2010), doi:10.1016/j.aam.2010.05.002

[3] R. Brignall, S. Huczynska, V. Vatter, *Simple permutations and algebraic generating functions*, J. of Combinatorial Theory, Series A115(2008) 423-441

[4] P. Manara, C. Perelli Cippo, *The fine structure of 4321 avoiding involutions and 321 avoiding involutions*, accettato per la pubblicazione sui Proceedings di Permutation Patterns 2010.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo di ricerca nazionale Disegni Combinatorici, Grafi e loro Applicazioni

Gloria Rinaldi: Problema di Oberwolfach: soluzioni con simmetria

Gloria Rinaldi[1]
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria Università di Modena e Reggio Emilia
email: gloria.rinaldi@unimore.it

Sunto. Il problema di Oberwolfach classico fu posto per la prima volta da Ringel nel $'60$ ed è menzionato in [3]. Ringel chiese se fosse possibile far sedere un numero dispari v di persone per $(v-1)/2$ giorni in una sala da pranzo contenente s tavoli (aventi rispettivamente $c_1, \ldots, c_s$ posti) in modo che ogni coppia di persone fosse seduta a fianco esattamente una volta. In teoria dei grafi ciò equivale a chiedere se sia possibile costruire una $2-$fattorizzazione del grafo completo K_v (v dispari) avente tutti i $2-$fattori isomorfi, ad esempio tutti costituiti da cicli di lunghezza $c_1, \ldots, c_s$. Tale problema viene usualmente indicato con $OP(c_1, \ldots, c_s)$. È ben noto che $OP(4,5)$, $OP(3,3,5)$, $OP(3,3)$ e $OP(3,3,3,3)$ non hanno soluzione, mentre $OP(m,m,\ldots,m)$, $m \geq 3$, è stato completamente risolto in [1]. In [2] si è dimostrato che ogni possbile problema di Oberwolfach su un numero di vertici v inferiore a 41 ha soluzione, eccetto i casi sopra menzionati. Tuttavia per $v \geq 41$ attualmente non è disponibile una risposta esaustiva. Il problema classico può essere generalizzato sia nel caso del grafo completo su un numero pari v di vertici sia nel caso dei grafi multipartiti completi. Inoltre si può richiedere che la soluzione sia dotata di un gruppo di automorfismi non banale. L'imporre particolari richeste sul gruppo di automorfismi se da un lato riduce le possibilità di avere soluzioni, dall'altro consente di utilizzare tecniche algebriche e di arrivare a trovare famiglie, anche ampie, di nuove soluzioni. In questa comunicazione verranno illustrate alcune tecniche messe a punto per costruire ampie famiglie di soluzioni ricche di simmetria.

Bibliografia

[1] B. Alspach, P.J. Schellenberg, D.R. Stinson, D. Wagner: The Oberwolfach problem and factors of uniform odd length cycles, J. Combin. Theory Ser. A **52** (1989) 20-43.

[2] A. Deza, F. Franek, W. Hua, M. Meszka, A. Rosa: Solutions to the Oberwolfach problem for orders 18 to 40, J. Combin. Math. Combin. Comput. **74** (2010) 95-102.

[3] R.K. Guy: " Unsolved combinatorial problems ", in D.J.A. Welsh (Ed.), Proceedings on the Conference on Combinatorial Mathematics and its Applications, Oxford, 1967, Academic Press, New York, 1971, p.121.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN 2008 "Disegni Combinatorici, Grafi e loro Applicazioni"

Beatrice Ruini: L'indice cromatico H-automorfo di un grafo

Beatrice Ruini[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia
email: beatrice.ruini@unimore.it

Giuseppe Mazzuoccolo
Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia

Sunto. Accanto ai classici parametri cromatici di un grafo - il numero cromatico per le colorazioni sui vertici e l'indice cromatico per le colorazioni sugli spigoli [1]- si studiano oggi moltissimi altri parametri definiti mediante colorazioni di varia natura. Alcuni parametri si possono ottenere a partire da considerazioni di simmetria, ovvero coinvolgendo qualche gruppo di automorfismi del grafo. In proposito, da una parte si ha la ricerca di quelle colorazioni totalmente prive di simmetria, quelle cioè che sono conservate solo dall'automorfismo identico (da cui lo studio del "distinguishing chromatic number"), dall'altra, può aver senso considerare quelle colorazioni che sono conservate da un fissato gruppo di automorfismi del grafo, eventualmente dal gruppo totale. Si definisce, pertanto, l'indice cromatico H-automorfo di un grafo Γ quale il minimo intero m per cui Γ ammette una m-colorazione propria sugli spigoli che è preservata da un fissato sottogruppo H del gruppo degli automorfismi del grafo Γ, [2]. Se H è un gruppo ciclico di ordine un numero primo, oppure se H è un 2-gruppo abeliano, si mostrano delle stime dall'alto per tale indice dipendenti dall'indice cromatico del grafo. Nel caso particolare in cui H coincida con il gruppo totale degli automorfismi, si determina il valore dell'indice cromatico H-automorfo di famiglie infinite di grafi quali, ad esempio, i grafi di Petersen generalizzati, gli snark di tipo "flower", gli snark di Goldberg.

Bibliografia

[1] J.A. Bondy, U.S.R. Murty: "Graph Theory", GTM 244, Springer, 2008

[2] C. Fiori, G. Mazzuoccolo, B. Ruini: "On the automorphic cromatic index of a graph", Graphs Combin., 26 (2010), no. 5, 685-694.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN 2008 "Disegni Combinatorici. Grafi e loro Applicazioni"

Sezione 16 Topologia e geometria differenziale

Gennaro Amendola: Superfici di Dehn e 3-varietà chiuse

Gennaro Amendola
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
email: gennaro.amendola@unimib.it

Sunto. In questa comunicazione descriveremo come utilizzare le superfici di Dehn per affrontare il problema della classificazione e dello studio delle 3-varietà topologiche chiuse.

Definizione. Un sottopoliedro Σ di una 3-varietà topologica chiusa M è detto *superficie di Dehn* se esiste una superficie chiusa astratta S e una immersione trasversa $f\colon S \to M$ tale che $\Sigma = f(S)$. Una superficie di Dehn Σ di M è detta *quasi-riempiente* se $M \setminus \Sigma$ è formato da palle; è detta *riempiente* se le sue singolarità inducono una cellularizzazione di M.

Ogni 3-varietà chiusa ha superfici di Dehn quasi-riempienti (risp. riempienti), e queste racchiudono molte (risp. tutte le) informazioni della varietà.

Definizione. La *s-complessità* $sc(M)$ di una 3-varietà chiusa M è il minimo numero di punti tripli di una superficie di Dehn quasi-riempiente di M.

La funzione s-complessità gode di molte proprietà.

- Finitezza: Esistono solo un numero finito di 3-varietà chiuse $\mathbb{P}^2$-irriducibili che hanno la stessa s-complessità.
- Naturalità: Se M è una 3-varietà chiusa $\mathbb{P}^2$-irriducibile (diversa da S^3, $\mathbb{RP}^3$ e $L_{4,1}$), la s-complessità coincide con il minimo numero di cubi di una cubazione di M.
- Subadditività: La s-complessità della somma connessa di 3-varietà chiuse è minore o uguale della somma delle loro s-complessità.

La s-complessità può essere stimata attraverso le triangolazioni, gli spezzamenti di Heegaard, le presentazioni per chirurgia e la complessità di Matveev.

La proprietà di finitezza della s-complessità ha permesso di portare avanti un processo di enumerazione delle 3-varietà chiuse, per ora di quelle orientabili fino a s-complessità due.

Se si considerano le sfere di Dehn riempienti nulle in omotopia è possibile descrivere un calcolo locale (cosa che sembra complicata per le superfici di Dehn generiche). Visto che tali oggetti presentano le 3-varietà chiuse, utilizzando il calcolo è possibile definire invarianti.

Gianluca Bande: Alcuni risultati sulle coppie di contatto metriche

Gianluca Bande
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari
email: gbande@unica.it

Sunto. Una *coppia di contatto metrica* [2] su una varietà di dimensione pari, è una terna (α_1, α_2, g), dove (α_1, α_2) è una coppia di contatto [1] e g una *metrica associata*. Denotati con Z_1, Z_2 i campi di Reeb della coppia (α_1, α_2), g è detta metrica associata, se $g(X, Z_i) = \alpha_i(X)$ (per $i = 1, 2$) e se il campo di endomorfismi ϕ, univocamente determinato dalla condizione $g(X, \phi Y) = (d\alpha_1 + d\alpha_2)(X, Y)$, verifica

$$\phi^2 = -Id + \alpha_1 \otimes Z_1 + \alpha_2 \otimes Z_2 \,.$$

In questa comunicazione verranno presentati alcuni risultati, contenuti in [4], riguardanti la geometria delle coppie metriche di contatto. In particolare si vuole illustrare una generalizzazione al caso delle coppie di contatto metriche, di un noto risultato di D. Blair [5] che afferma la non esistenza di metriche associate piatte per una struttura metrica di contatto su una varietà di dimensione superiore a tre. Più precisamente si ha:

Teorema. *Sia M una varietà di dimensione $2h+2k+2$ munita di una coppia di contatto metrica $(\alpha_1, \alpha_2, \phi, g)$ di tipo (h, k), tale che ϕ sia decomponibile. Se la metrica g è piatta, allora i fogli delle foliazioni caratteristiche hanno dimensione minore o uguale a tre (i.e. $h,\ k \leq 1$).*

Bibliografia

[1] G. Bande and A. Hadjar, *Contact Pairs*, Tohoku Math. J. **57** (2005), 247–260.

[2] G. Bande and A. Hadjar, *Contact pair structures and associated metrics*, Differential Geometry - Proceedings of the 8th International Colloquium, World Sci. Publ. (2009), 266–275.

[3] G. Bande and A. Hadjar, *On the characteristic foliations of metric contact pairs*, sottoposto per la pubblicazione in Contemporary Mathematics, Preprint arXiv:1003.0281v2 [math.DG] 30 October 2010.

[4] G. Bande and A. Hadjar, *On the curvature of metric contact pairs*, preprint.

[5] D. E. Blair, *On the non-existence of flat contact metric structures*, Tohoku Math. J. **28** (1976), no. 3, 373–379.

Silvia Benvenuti: Branchfolds, varietà coniche razionali e il problema di Cheeger-Simons

Silvia Benvenuti
Scuola di Scienze e tecnologie, Università di Camerino
email: silvia.benvenuti@unicam.it

Riccardo Piergallini
Scuola di Scienze e tecnologie, Università di Camerino

Giacomo Tomassoni
Scuola di Scienze e tecnologie, Università di Camerino

Sunto. Una *branchfold* di dimensione m è uno spazio coperto da aperti U, ciascuno dei quali ammette due rivestimenti ramificati regolari $V \leftarrow P \rightarrow U$, dove P è un poliedro e V è un aperto di R^m. Si tratta cioè di una generalizzazione del concetto di *orbifold*, in cui gli aperti U ammettono un solo rivestimento $V \rightarrow U$. Nella comunicazione richiameremo in primo luogo le principali definizioni e costruzioni della teoria delle branchfold, evidenziandone i teoremi fondamentali. Spiegheremo poi in che modo tali spazi possano rivelarsi utili nell'affrontare il problema di Cheeger-Simons, ovvero nell'investigare se il volume di una varietà conica sferica compatta m-dimensionale con angoli razionali sia o meno un multiplo razionale del volume della m-sfera.

Letizia Brunetti: Proiezioni di $g.f.f$-strutture indefinite

Letizia Brunetti[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: brunetti@dm.uniba.it

Anna Maria Pastore
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Sunto. Definita una f-struttura indefinita su gruppi di Lie di matrici, si realizzeranno due tipi di proiezioni di queste f-strutture indefinite nei modi successivamente descritti.

Nel caso di varietà Riemanniane munite di $\mathcal{K}$-strutture sono noti i lavori di D.E. Blair (cf. [2]) e di D.E. Blair, G.D. Ludden e K. Yano (cf. [3]). In questi articoli gli autori provano che una $\mathcal{K}$-varietà compatta, connessa e regolare è lo spazio totale di un fibrato principale toroidale su una varietà di Kähler, la cui struttura è costruita proiettando quella dello spazio totale, e che per una $\mathcal{S}$-varietà M^{2n+s} connessa, compatta e regolare esistono diagrammi commutativi del tipo

$$\begin{array}{ccccc} M^{2n+s} & & \overset{\tau}{\longrightarrow} & & M^{2n+1} \\ \pi & \searrow & & \swarrow & \pi' \\ & & N^{2n} & & \end{array}$$

dove $(N^{2n}, J, \tilde{g})$ è una varietà di Kähler, e M^{2n+1} è una varietà di Sasaki connessa, compatta e regolare, spazio totale di un $\mathbb{S}^1$-fibrato su N^{2n}. Inoltre tutte le applicazioni sono sommersioni Riemanniane.

Una volta realizzata l'estensione dei risultati precedentemente citati al caso semi-Riemanniano, siamo in grado di realizzare il primo tipo di proiezione applicata a gruppi di Lie di matrici unitarie.

Successivamente, utilizzando la condizione di proiettabilità per un campo tensoriale, introdotta da M. Ako (cf. [1]), si realizza il secondo tipo di proiezione della $g.f.f$-struttura costruita sui gruppi di Lie di matrici unitarie.

Bibliografia

[1] M. Ako: "Fibred spaces with almost complex structure", Kodai Math. Sem. Rep., 24 (1972), 482–505.

[2] E.D. Blair: "Geometry of manifolds with structural group $\mathcal{U}(n) \times \mathcal{O}(s)$", J. Differential Geom., 4 (1970), 155–167.

[3] D.E. Blair, G.D. Ludden e K. Yano: "Differential geometric structures on principal toroidal bundles", Trans. Amer. Math. Soc., 181 (1973), 175–184.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di un assegno di ricerca presso l'Università di Bari, sui Fondi di Ateneo

Angelo V. Caldarella: Sommersioni semi-Riemanniane e condizioni di Ossermann speciali su f-varietà

Letizia Brunetti
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Angelo V. Caldarella
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: caldarella@dm.uniba.it

Sunto. Nel presente lavoro si espongono taluni risultati scaturiti dallo studio di alcune proprietà di un particolare operatore di curvatura (Operatore di Jacobi, [3]), in relazione ad una nuova condizione "di tipo Ossermann" (φ-null Ossermann condition) recentemente introdotta (cfr. [2]) nel contesto di varietà munite di speciali classi di f-strutture con nucleo parallelizzabile, compatibili con metriche semi-Riemanniane, in particolare Lorentziane.

In dettaglio, si esaminano alcuni aspetti connessi alla possibilità di trasferimento di tali condizioni da varietà munite di $\mathcal{S}$-strutture Lorentziane φ-null Osserman, utilizzate come spazio totale di fibrati principali toroidali con metriche indefinite (cf. [1]), su varietà di Lorentz con struttura Sasakiana, oppure varietà con struttura Kähleriana (eventualmente indefinita), mediante l'esame del comportamento dell'operatore di Jacobi rispetto alla sommersione semi-Riemanniana di proiezione del fibrato.

Bibliografia

[1] L. Brunetti, A.M. Pastore: "Some results on indefinite globally framed f-structures and toroidal principal bundles", Rapp. Int. Dip. Mat., Università di Bari, 8/2010. Sottoposto per pubblicazione.

[2] L. Brunetti: "An Osserman-type condition on Lorentz $\mathcal{S}$-manifolds", Rapp. Int. Dip. Mat., Università di Bari, 4/2011.

[3] E. García-Rio, D.N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo: "Osserman Manifolds in Semi-Riemannian Geometry", Springer-Verlag, 2002.

Giovanni Calvaruso: Solitoni di Ricci pseudo-Riemanniani

Giovanni Calvaruso
Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi", Università del Salento
email: giovanni.calvaruso@unisalento.it

Sunto. Un *solitone di Ricci* è una varietà (pseudo-)Riemanniana (M, g), con un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, che soddisfano l'equazione

$$\mathcal{L}_X g + \varrho = \lambda g,$$

in cui $\mathcal{L}$ e ϱ denotano rispettivamente la derivata di Lie ed il tensore di Ricci e λ è una costante. Un solitone di Ricci si dice *expanding, steady* o *shrinking*, a seconda che $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ o $\lambda < 0$. I solitoni di Ricci sono i punti fissi del *flusso di Ricci*, e sono importanti per la comprensione delle sue singolarità.

Dapprima introdotti e studiati nel caso Riemanniano, i solitoni di Ricci sono stati poi investigati nell'ambito pseudo-Riemanniano. Rispetto al caso Riemanniano, la geometria pseudo-Riemanniana permette più possibilità circa l'esistenza di solitoni di Ricci. Riporteremo diversi risultati recenti sui solitoni di Ricci pseudo-Riemanniani, con particolare riferimento ai solitoni di Ricci *invarianti* (M, g, X), dove $M = G/H$ è uno spazio omogeneo, g una metrica pseudo-Riemanniana invariante e X un campo di vettori invariante.

Mentre i gruppi di Lie Riemanniani tridimensionali non ammettono alcun solitone di Ricci invariante a sinistra, numerosi comportamenti interessanti emergono dalla classificazione completa dei solitoni di Ricci invarianti a sinistra su gruppi di Lie Lorentziani tridimensionali, ottenuta in [1].

Contrariamente al caso Riemanniano, uno spazio omogeneo pseudo-Riemanniano (di dimensione maggiore di tre) non ammette necessariamente una decomposizione riduttiva. E' quindi naturale porsi il problema di classificare i solitoni di Ricci invarianti sugli spazi omogenei pseudo-Riemanniani non riduttivi. In dimensione quattro, una tale classificazione è stata realizzata in [2].

Bibliografia

[1] M. Brozos-Vázquez, G. Calvaruso, E. García-Río and S. Gavino-Fernández, *Three-dimensional Lorentzian homogeneous Ricci solitons*, Israel J. Math., in corso di stampa.

[2] G. Calvaruso and A. Fino, *Ricci solitons and geometry of four-dimensional non-reductive homogeneous spaces*, sottoposto per la pubblicazione.

Andrei Catalioto: Funzioni H-chiuse, U-chiuse, minimal Hausdorff e minimal Urysohn

Filippo Cammaroto
Dipartimento di Matematica - Università di Messina

Andrei Catalioto
Dipartimento di Matematica - Università di Messina
email: acatalioto@unime.it

Jack R. Porter
Department of Mathematics - University of Kansas

Sunto. Nel 1994 F. Cammaroto e G. Nordo, sulla base di alcuni lavori di B.A. Pasynkov ed altri esponenti della scuola russa di topologia, hanno introdotto la definizione di $\mathcal{P}$-funzione (funzione continua soddisfacente una proprietà topologica $\mathcal{P}$). In particolare hanno studiato le principali proprietà delle $\mathcal{P}$-funzioni (*caratterizzazione*, *ereditarietà* e *produttività*) dove $\mathcal{P} = T_0$, T_1, *Hausdorff*, *Urysohn*, *regular*, *almost-regular* e *semiregular* notando come alcune proprietà valevoli per i $\mathcal{P}$-spazi siano estendibili alle $\mathcal{P}$-funzioni. In seguito, nel 1998, F. Cammaroto, V.V. Fedorchuk e J.R. Porter hanno introdotto il concetto di *funzione H-chiusa* e relative proprietà.

Il nostro problema è stato quello di focalizzare l'attenzione sulle *funzioni H-chiuse*, *U-chiuse*, *minimal Hausdorff* e *minimal Urysohn* studiandone in dettaglio le seguenti proprietà:
- **caratterizzazione** delle funzioni H-chiuse ed U-chiuse;
- **ereditarietà** delle funzioni H-chiuse, U-chiuse, minimal Hausdorff e minimal Urysohn;
- **produttività** delle funzioni H-chiuse e minimal Haursdorff (ma non U-chiuse e non minimal Urysohn).

Bibliografia

[1] F. Cammaroto, *On $\mathcal{P}$-functions*, Proc. "Meeting Top. Spaces Theory Appl.", Yatsushiro 1999 (1999), 1-10.

[2] F. Cammaroto, A. Catalioto and J.R. Porter, *On H-closed and U-closed functions*, Quaestiones Mathematicae (2011), sottoposto per la pubblicazione.

[3] F. Cammaroto, A. Catalioto and J.R. Porter, *On minimal Hausdorff and minimal Urysohn functions*, Central European Journal of Mathematics (2011), sottoposto per la pubblicazione.

[4] F. Cammaroto, V.V. Fedorchuk and J.R. Porter, *H-closed functions*, Comment. Math. Univ. Carolinae, (3) **39** (1998), 563-572.

[5] F. Cammaroto and G. Nordo, *On Urysohn, almost regular and semiregular functions*, Filomat (Niš), **8** (1994), 71-80.

Alessia Cattabriga: Polinomio di Alexander di tangle

Alessia Cattabriga[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: cattabri@dm.unibo.it

Vincent Florens
Département de Mathématiques, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Stephen Bigelow
Department of Mathematics, University of California

Sunto. Un invariante di fondamentale importanza nella teoria dei nodi è il polinomio di Alexander. Tale polinomio, che può essere definito in numerose maniere, contiene informazioni relative al rivestimento ciclico infinito ramificato sul nodo. In questa comunicazione descriviamo un'estensione del polinomio di Alexander ai tangle orientati, cioè alle sottovarietà 1-dimesionali orientate di $D^2 \times I$, dove D^2 denota il disco chiuso unitario e $I = [-1, 1]$. Oltre ai nodi (e ai link) anche le trecce possono essere pensate come particolari tangle. Da un punto di vista categoriale, i tangle sono i morfismi di una categoria che ha come oggetti sequenze finite di punti con segno in D^2: in quest'ambito i nodi (e i link) sono morfismi dal vuoto in sè, mentre le trecce sono isomorfismi tra due sequenze di punti aventi la stessa cardinalità. Affronteremo il problema dell'estensione del polinomio di Alexander ai tangle da vari punti di vista e descriveremo le connessioni con altri invarianti di tangle.

[1]Lavoro svolto nell'ambito dei fondi GNSAGA, INdAM.

Nicola Ciccoli: Quantizzazione geometrica di strutture di Poisson omogenee non regolari

Nicola Ciccoli[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
email: `ciccoli@dmi.unipg.it`

Sunto. La quantizzazione geometrica di varietà di Poisson non regolari, come introdotta da Weinstein nei primi anni '90 [4], richiede l'integrazione della varietà ad un gruppoide simplettico e, successivamente, la costruzione di una polarizzazione. Purtroppo questa programma è stato sinora completato solo in pochissimi casi [1,2,5]. Mostreremo come nel caso degli spazi proiettivi complessi con struttura di Poisson $SU(n)$–omogenea l'integrazione del gruppoide simplettico sia possibile ma ci siano ostruzioni topologiche alla costruzione di foliazioni Lagrangiane compatibili con la struttura di gruppoide. Permettendo però alcuni tipi di singolarità semplici in queste foliazioni è possibile ottenere foliazioni Lagrangiane quasi ovunque regolari su cui la condizione di Bohr-Sommerfeld identifica interessanti sottogruppoidi discreti, già noti ([3]) come collegati a tali strutture di Poisson tramite la quantizzazione per deformazione.

Bibliografia

[1] F. Bonechi, N. Ciccoli, N. Staffolani, M. Tarlini, *The quantization of the symplectic groupoid of the standard Podles sphere*, sottoposto per la pubblicazione.

[2] E. Hawkins, *A groupoid approach to quantization*, J. Sympl. Geom. 6 (2008), 61–125.

[3] A.J.–L. Sheu, *Groupoid approach to quantum projective spaces*, Quarterly Journ. Math. 48 (1997), 503–510.

[4] A. Weinstein, *Symplectic groupoids, geometric quantization and irrational rotation algebras,* in "Symplectic Geometry, groupoids and integrable systemse" (Berkeley CA 1989) 281–290, Springer N.Y. (1990).

[5] A. Weinstein e P. Xu, *Extensions of symplectic groupoids and quantization* Journ. für Reine Angew. Math. 417 (1991) 159–189.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di PRIN 2007 - Geometria Differenziale ed Analisi Globale

Paola Cristofori: Stime della complessità di Matveev di una 3-varietà: diagrammi di Heegaard generalizzati e grafi colorati

Maria Rita Casali
Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia

Paola Cristofori
Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia
email: paola.cristofori@unimore.it

Michele Mulazzani
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Sunto. Il concetto di complessità di una 3-varietà compatta, introdotto da S.V. Matveev, è definito come il minimo numero di vertici singolari di una qualsiasi spina semplice della 3-varietà.

Il calcolo del valore esatto della complessità è, dal punto di vista teorico, molto difficile. Risulta quindi importante la determinazione di limitazioni inferiori e superiori per tale valore.

Dato un diagramma di Heegaard $\mathcal{H}$ di una 3-varietà chiusa M, è possibile costruire una spina $P(\mathcal{H})$ di M. Il valore $c_H(M)$, definito come il numero minimo di vertici singolari di $P(\mathcal{H})$ al variare di $\mathcal{H}$ nell'insieme di tutti i diagrammi di Heegaard di M, è ovviamente una limitazione superiore per la complessità $c(M)$. Benché non si conoscano controesempi, non è noto se $c(M) = c_H(M)$.

Una estensione di c_H a 3-varietà orientabili compatte (c_{HM} =*complessità di Heegaard modificata*) è stata introdotta da Cattabriga, Mulazzani e Vesnin, attraverso l'uso di diagrammi di Heegaard generalizzati. In questo modo sono state trovate limitazioni superiori per il valore della complessità di 3-varietà chiuse che sono rivestimenti ciclici di particolari nodi o link, e di 3-varietà con bordo ottenute da rivestimenti ciclici di θ-grafi.

Casali ha invece introdotto il concetto di *Gem-complessità* (c_{GM}) utilizzando particolari rappresentazioni combinatorie di 3-varietà chiuse mediante grafi colorati sugli spigoli. Per mezzo di tale invariante sono state stabilite limitazioni superiori per la complessità di una varietà che sia rappresentata come rivestimento doppio di $\mathbb{S}^3$ ramificato su un link, come rivestimento triplo semplice di $\mathbb{S}^3$ ramificato su un nodo, o attraverso un framed link.

Nel lavoro che è oggetto di questa comunicazione si estende la definizione di c_{HM} al caso non orientabile e si dimostra la sua coincidenza con c_{GM} per 3-varietà chiuse.

Barbara Di Fabio: Formule di Mayer-Vietoris per l'omologia persistente

Barbara Di Fabio
ARCES, Università di Bologna
email: difabio@dm.unibo.it

Claudia Landi
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria, Università di Modena e Reggio Emilia

Sunto. In topologia algebrica, una formula di Mayer-Vietoris rappresenta una relazione tra i ranghi dei gruppi di omologia di spazi X, A, B, C quando $X = A \cup B$ e $C = A \cap B$. In [2] si dimostra che analoghe formule valgono anche per i gruppi di omologia persistente ordinaria, relativa ed estesa introdotti in [1].

L'omologia persistente rappresenta uno strumento largamente usato oggigiorno in topologia computazionale per analizzare gli eventi topologici che si verificano in una filtrazione di uno spazio (come la nascita di componenti connesse, o la fusione di componenti preesistenti). L'obiettivo principale consiste nel fornire una scala di valutazione della rilevanza di questi eventi, relativamente alla filtrazione scelta. Più gli eventi sono longevi, infatti, più risultano significativi nella descrizione dello spazio. Gli eventi di breve durata, invece, sono dettagli che nelle applicazioni vengono identificati come rumore o errori di approssimazione.

In questo contesto, le formule di Mayer-Vietoris permettono di ottenere informazioni sui gruppi di omologia persistente di un dato spazio topologico, frazionandolo in sottospazi i cui gruppi di omologia persistente sono più semplici da calcolare. L'idea nuova che ci ha permesso di ottenere tali formule si basa su diagrammi di successioni di Mayer-Vietoris interlacciate con successioni esatte lunghe contenenti le mappe che definiscono i gruppi di omologia persistente.

Oltre a rappresentare uno sviluppo teorico dell'omologia persistente, un tale risultato presenta importanti risvolti in ambito applicativo. Infatti, può essere utilizzato per risolvere problemi di riconoscimento di oggetti presenti in un'immagine digitale a partire da informazioni parziali [3].

Bibliografia

[1] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, J. Harer: "Extending Persistence Using Poincaré and Lefschetz Duality", Foundations of Computational Mathematics **9** (2009), no. 1, 133-134 .

[2] B. Di Fabio, C. Landi: "Persistent Homology and Partial Similarity of Shapes", Technical report, Univ. of Bologna, 2011, http://amsacta.cib.unibo.it/2973/.

[3] B. Di Fabio, C. Landi, F. Medri: "Recognition of Occluded Shapes Using Size Functions", Lecture Notes In Computer Science, Vol 5716 (2009), 642-651.

Luigia Di Terlizzi: Una sottoclasse delle $\mathcal{K}$-varietà

Luigia Di Terlizzi
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: `terlizzi@dm.uniba.it`

Anna Maria Pastore
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Sunto. Si considera su una varietà M^{2n+s} una f-struttura φ di rango $2n$ con nucleo parallelizabile tramite s campi vettoriali $\xi_1, \dots \xi_s$. Su M esiste sempre una metrica Riemanniana *compatibile* g, i.e. $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\eta^i(Y)$, dove $\eta^1, \dots, \eta^s$ sono le 1-forme duali di $\xi_1, \dots \xi_s$. Quando il campo tensoriale $N := [\varphi, \varphi] + 2\sum_{i=1}^{s} d\eta^i \otimes \xi_i$ si annulla e la 2-forma di Sasaki $F = g(-, \varphi -)$ è chiusa si ha una $\mathcal{K}$-*struttura* ed M viene chiamata $\mathcal{K}$-*varietà*. Le $\mathcal{K}$-varietà, furono introdotte da D.E.Blair e sono una generalizzazione delle varietà quasi-Sasakiane, nel senso che, per $s = 1$ si riottiene una varietà quasi-Sasakiana. All'interno della classe delle $\mathcal{K}$-varietà c'è quella delle $\mathcal{S}$-*varietà*: queste ultime verificano la condizione $d\eta^1 = \cdots = d\eta^s = F$ e quindi costituiscono una naturale generalizzazione delle varietà Sasakiane.

C'è un modo altrettanto naturale di generalizzare le varietà Sasakiane: basta chiedere che su una $\mathcal{K}$-varietà sia verificata la condizione

$$\sum_{i=1}^{s} d\eta^i = F.$$

Nell'articolo in fase di stesura, abbiamo chiamato $\widehat{\mathcal{K}}$-*strutture* le $\mathcal{K}$-strutture che verificano questa identità.

Dopo aver dimostrato alcune proprietà, presentiamo alcuni esempi di $\widehat{\mathcal{K}}$-strutture, per dare un senso alla definizione. È ben noto che il prodotto di varietà di Sasaki non è una varietà di Sasaki: infatti abbiamo provato che il prodotto di s varietà di Sasaki è una $\widehat{\mathcal{K}}$-varietà. Viceversa abbiamo verificato che, in certe ipotesi, una $\widehat{\mathcal{K}}$-varietà è localmente prodotto (non Riemanniano) di varietà Sasakiane.

Bibliografia

[1] L. Di Terlizzi, A.M. Pastore: "Una sottoclasse delle $\mathcal{K}$-varietà", in fase di stesura

[2] D.E. Blair: "Geometry of manifolds with structural group $\mathcal{U}(n) \times \mathcal{O}(s)$", J. Diff. Geom., **4** (1970) 155-167

Giulia Dileo: Varietà pseudohermitiane generalizzate

Giulia Dileo
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: dileo@dm.uniba.it

Antonio Lotta
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Sunto. Una struttura pseudohermitiana su una varietà CR fortemente pseudoconvessa (M, HM, J) di tipo ipersuperficie è stata definita da S. Webster come una sezione η dell'annullatore $H^oM \subset TM^*$ del fibrato tangente olomorfo HM, la cui forma di Levi scalare $\mathcal{L}_\eta$ è definita positiva [4]. Ogni varietà pseudohermitiana (M, HM, J, η) è munita di una metrica Riemanniana canonica g_η che estende $\mathcal{L}_\eta$ in modo tale che $HM^\perp$ coincida con il sottofibrato generato dal campo vettoriale di Reeb ξ della forma di contatto η. Il problema dell'equivalenza per varietà pseudohermitiane è stato risolto da Webster associando a ciascuna varietà pseudohermitiana una connessione lineare canonica che parallelizza J e g_η. Indipendentemente, N. Tanaka ha fornito una caratterizzazione assiomatica di tale connessione [3].

Nella presente comunicazione sarà definita e indagata una classe più generale di strutture geometriche su varietà quasi CR, che chiameremo *strutture pseudohermitiane generalizzate* [1]. Data (M, HM, J) varietà quasi CR, definiamo struttura pseudohermitiana generalizzata una coppia (h, P), dove h è una metrica definita positiva su HM e compatibile con J, e $P : TM \to TM$ è un proiettore differenziabile tale che $Im(P) = HM$. Tali varietà, di arbitraria CR-codimensione s, includono le varietà quasi Hermitiane ($s = 0$), le varietà metriche quasi di contatto ($s = 1$), le varietà 3-Sasaki ($s = 3$). Ad ogni struttura pseudohermitiana generalizzata associamo una connessione lineare canonica sul fibrato tangente olomorfo HM invariante per equivalenze. Tale connessione permette di risolvere il problema dell'equivalenza nel caso in cui la distribuzione HM è di tipo finito e genere 2. Saranno illustrate inoltre le proprietà di curvatura della connessione lineare canonica e introdotte le immersioni isopseudohermitiane, nel tentativo di generalizzare la teoria delle immersioni pseudohermitiane tra varietà CR fortemente pseudoconvesse di tipo ipersuperficie [2].

Bibliografia

[1] G. Dileo and A. Lotta, "Generalized pseudohermitian manifolds", in corso di stampa su Forum Math., DOI: 10.1515/FORM.2011.098.

[2] S. Dragomir: "On pseudo-Hermitian immersions between strictly pseudoconvex CR manifolds", Amer. J. Math. 117 (1995), no. 1, 169–202.

[3] N. Tanaka: "On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections", Japan. J. Math. 20 (1976), 131–190.

[4] S. M. Webster: "Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface", J. Differential Geom. 13 (1978), no. 1, 25–41.

Roberto Frigerio: Rigidità per varietà senza curvatura negativa

Roberto Frigerio
Dipartimento di Matematica L. Tonelli, Università di Pisa
email: `frigerio@dm.unipi.it`

Jean-Francois Lafont
Department of Mathematics, Ohio State University

Alessandro Sisto
Mathematical Institute, Department of Oxford

Sunto. Una varietà differenziabile si dice *CAT(0)* se ammette una struttura Riemanniana con curvatura non positiva in ogni punto. In dimensione maggiore di 4, le varietà compatte CAT(0) godono di particolari proprietà di rigidità: per esempio, un celebre risultato di Farrell e Jones assicura che due tali varietà sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso gruppo fondamentale. Risultati di rigidità ancora più forti valgono nel caso in cui le varietà considerate ammettano una metrica di curvatura negativa costante: in tal caso, per il Teorema di Rigidità di Mostow il gruppo fondamentale determina il tipo di diffeomorfismo.

In questa comunicazione definirò una classe di varietà, che chiamerò *varietà grafo generalizzate*, mostrando che esse soddisfano vari teoremi di rigidità: per esempio, in dimensione maggiore di 5 ogni varietà asferica con lo stesso gruppo fondamentale di una varietà grafo generalizzata è in effetti omeomorfa a tale varietà, e varietà grafo generalizzate con lo stesso gruppo fondamentale sono diffeomorfe. Mostrerò inoltre come costruire esempi di varietà grafo generalizzate che *non* sono CAT(0).

Le dimostrazione sono basate su tecniche provenienti dalla teoria geometrica dei gruppi, dalla teoria delle azioni di gruppo su alberi e dalla teoria degli spazi CAT(0).

Antonio Lotta: Metriche ammissibili su varietà di contatto

Giulia Dileo
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Antonio Lotta
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: `lotta@dm.uniba.it`

Sunto. D.E. Blair ha congetturato la non esistenza di varietà metriche di contatto aventi curvatura non positiva e dimensione almeno 5. Tale congettura è motivata dal teorema di non esistenza, dovuto allo stesso Blair, di varietà metriche di contatto piatte (fatta eccezione per il caso tridimensionale) e dalla generalizzazione di Z. Olszak di tale risultato: *una varietà di contatto metrica a curvatura costante c e dimensone almeno 5 è necessariamente Sasakiana, ed in particolare $c = 1$* (cf. [1]). La congettura è vera per varietà compatte, con la richiesta di curvatura *negativa*, e per le varietà di tipo (k, μ) (si veda [1], pp. 99 e 103). Presenteremo un risultato recente che conferma la congettura nel caso omogeneo [3]:

Teorema. *Sia $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ una varietà metrica di contatto semplicemente connessa, omogenea, con curvatura sezionale non positiva. Allora M ha dimensione 3, è piatta, ed è equivalente al rivestimento universale $\tilde{E}(2)$ del gruppo delle isometrie del piano Euclideo. Più in generale, sia (M, η) una varietà di contatto omogenea, semplicemente connessa, di dimensione almeno 5. Allora M non ammette alcuna metrica Riemanniana omogenea, verificante le seguenti condizioni:*

$$g(\xi, \xi) = 1, \qquad \xi \perp Ker(\eta).$$

Questo risultato suggerisce di affrontare uno studio più approfondito delle metriche Riemanniane soddisfacenti le condizioni precedenti, che chiameremo *ammissibili*. In particolare, si pone la questione della validità dei risultati di Blair e Olszak per varietà di contatto dotate di metriche ammissibili. In questa direzione, presenteremo alcuni risultati recenti, riguardanti una sottoclasse di tali varietà, denominate *Levi-parallele* [2]. Tale classe contiene in modo naturale le varietà pseudohermitiane e quelle Sasakiane. La condizione di integrabilità delle struttura CR soggiacente ad una struttura pseudohermitiana è sostituita qui dal parallelismo della forma di Levi rispetto ad una connessione metrica canonica che parallelizza η; per varietà pseudohermitiane si tratta della connessione di Tanaka-Webster.

Bibliografia

[1] D. E. Blair: Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Progr. Math. **203**, Birkhäuser, Boston, 2002.

[2] G. Dileo, A. Lotta: Levi-parallel contact Riemannian manifolds (2011), in preparation.

[3] A. Lotta: Non existence of homogeneous contact metric manifolds of nonpositive curvature, *Tohoku Math. J.* **62** (2010), 575–578.

Stefano Montaldo: Sulla classificazione delle sottovarietà biarmoniche

Stefano Montaldo
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari
email: montaldo@unica.it

Sunto. Le sottovarietà minime (armoniche) di una varietà riemanniana N sono quelle il cui vettore curvatura media $\mathbf{H}$ è identicamente nullo. Una generalizzazione naturale delle sottovarietà minime è costituita dalle sottovarietà biarmoniche le quali sono caratterizzate dalla condizione

$$\Delta\mathbf{H} + \mathrm{Trace}\,\mathrm{R}(\cdot,\mathbf{H})\cdot = 0\,,$$

dove Δ rappresenta il laplaciano grezzo mentre R indica l'operatore di curvatura della varietà N. Nel caso delle ipersuperfici, la condizione di biarmonicità coincide con la richiesta che la funzione curvatura media H e l'operatore di forma A soddisfino al sistema

$$\begin{cases} \Delta H - H\,|A|^2 + H\,\mathrm{Ric}^{\mathrm{N}}(\eta,\eta) = 0 \\ 2A(\mathrm{grad}\,\mathrm{H}) + \frac{\mathrm{m}}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{H}^2 - 2\mathrm{H}(\mathrm{Ric}^{\mathrm{N}}(\eta))^{\top} = 0\,, \end{cases}$$

dove η è un campo di vettori normale unitario, mentre Ric indica l'operatore di Ricci di N.

Le sottovarietà biarmoniche sono state oggetto di intensi studi negli ultimi dieci anni ed ancora rimane irrisolta la congettura di B.-Y. Chen: *le uniche sottovarietà biarmoniche di* $\mathbb{R}^n$ *sono le minime.*

In questa comunicazione, partendo dai lavori [2, 3, 6], mostreremo alcuni risultati recenti (parte dei quali contenuti in [1, 4, 5]) sulla classificazione delle sottovarietà biarmoniche in spazi di dimensione 3 e 4. In particolare, se N ha curvatura sezionale costante daremo la classificazione esaustiva delle ipersuperfici biarmoniche.

Bibliografia

[1] A. Balmus, S. Montaldo e C. Oniciuc, Biharmonic hypersurfaces in 4-dimensional space forms, *Math. Nachr.* 283 (2010), 1696-1705.

[2] A. Balmus, S. Montaldo e C. Oniciuc, Classification results for biharmonic submanifolds in spheres, *Israel J. Math.* 168 (2008), 201-220.

[3] R. Caddeo, S. Montaldo e C. Oniciuc, Biharmonic submanifolds of $\mathbb{S}^3$, *Internat. J. Math.* 12 (2001), 867-876.

[4] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc e P. Piu, Biharmonic surfaces in the Heisenberg space, in preparazione.

[5] Y.-L. Ou, Z.-P. Wang, Constant mean curvature and totally umbilical biharmonic surfaces in 3-dimensional geometries, http://arxiv.org/abs/1101.3282v1.

[6] Y.-L. Ou, Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds, *Pacific J. Math.* 248 (2010), 217-232.

Paola Piu: Strutture riemanniane Γ-simmetriche del gruppo di Heisenberg

Paola Piu[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Cagliari
email: `piu@unica.it`

Michel Goze
LMIA, Université de Haute-Alsace (F)

Sunto. La nozione di spazio Γ-simmetrico introdotta da R.Lutz in [2] è una generalizzazione della nozione classica di spazio simmetrico. Sia Γ un gruppo abeliano finito e sia G un gruppo di Lie connesso.

Definizione 1. Uno spazio Γ-*simmetrico* è uno spazio omogeneo riduttivo $M = G/K$ munito in ogni punto di uno gruppo abeliano finito di *simmetrie* isomorfo a Γ. Ossia esiste un omomorfismo iniettivo $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}G$, tale che $G_0^\Gamma \subseteq K \subseteq G^\Gamma$, dove G^Γ è il sottogruppo di elementi fissati da $\rho(\Gamma)$ e G_0^Γ è la sua componente connessa.

Il caso $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ coincide con la definizione di spazio simmetrico, mentre se $\Gamma = \mathbb{Z}_2^k$ l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G è graduata da Γ e la graduazione permette di costruire le simmetrie di M. Nel caso $\Gamma = \mathbb{Z}_2^2$ possiamo riscrivere la definizione come segue.

Uno spazio omogeneo $M = G/K$ è $\mathbb{Z}_2^2$-*simmetrico* se e solo se esistono due diverse involuzioni che commutano in G, cioè se esistono $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}G \setminus \{Id\}$ ($\sigma^2 = \tau^2 = Id$, $\sigma \neq \tau$ e $\sigma\tau = \tau\sigma$) tali che $(G^\sigma \cap G^\tau)_0 \subseteq K \subseteq G^\sigma \cap G^\tau$.

Una metrica riemanniana adattata a uno spazio Γ-simmetrico M è data da un tensore metrico per il quale le simmetrie sono isometrie (si veda [1]). Dopo aver descritto la classificazione, a meno di automorfismi dell'algebra di Lie, degli spazi $\mathbb{Z}_2^2$-*simmetrici* nel caso in cui M è il gruppo di Heisenberg viene descritto il tensore metrico riemanniano e quello pseudo-riemanniano adattato a queste strutture.

Bibliografia

[1] M. Goze, E. Remm: *Riemannian Γ-symmetric spaces.* Differential geometry, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2009), 195 - 206.

[2] R. Lutz: *Sur la géométrie des espaces Γ-symétriques* C.R.A.S. Paris Sér. I Math. 293 (1981), no. 1, 55 - 58.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del GNSAGA, avviato mentre il secondo autore era Visiting Professor della Regione Sardegna presso l'Università di Cagliari

Sezione 17 Geometria complessa

Daniele Angella: Scomposizione in coomologia per varietà quasi-complesse

Daniele Angella
Dipartimento di Matematica "Leonida Tonelli", Università di Pisa
email: angella@mail.dm.unipi.it

Adriano Tomassini
Dipartimento di Matematica, Università di Parma

Sunto. Sia (M, J) una varietà quasi-complessa compatta. Consideriamo, seguendo T.-J. Li e W. Zhang (si veda [7]), i sottogruppi $H^+_J(M)$ ed $H^-_J(M)$ del secondo gruppo di coomologia di de Rham $H^2_{dR}(M;\mathbb{R})$, definiti come l'insieme delle classi che ammettono rappresentanti, rispettivamente, J-invarianti e J-anti-invarianti. In generale, la somma di questi due sottogruppi non coincide con $H^2_{dR}(M;\mathbb{R})$, né è una somma diretta. Nel caso di varietà Kähleriane compatte, i gruppi H^+_J ed H^-_J non sono altro che la parte reale dei gruppi di Dolbeault, ed inducono quindi una scomposizione in coomologia.

Si discutono alcuni risultati recenti (si vedano [1], [2] e [3]) riguardanti le proprietà di H^+_J ed H^-_J per varietà quasi-complesse di dimensione 6; in particolare, si ha che la situazione nel caso almost-Kähler risulta essere sostanzialmente differente da quella nel caso Kähleriano.

Bibliografia

[1] D. Angella, A. Tomassini, On cohomological decomposition of almost-complex manifolds and deformations, in corso di stampa in *J. Sympl. Geom.*.

[2] D. Angella, A. Tomassini, On the cohomology of almost-complex manifolds, preprint, 2010.

[3] D. Angella, A. Tomassini, W. Zhang, On cohomological decomposability of almost-Kähler structures, preprint, 2011.

[4] T. Draghici, T.-J. Li, W. Zhang, Symplectic forms and cohomology decomposition of almost complex four-manifolds, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2010** (2010), no. 1, 1–17.

[5] T. Draghici, T.-J. Li, W. Zhang, On the J-anti-invariant cohomology of almost complex 4-manifolds, arXiv:1104.2511v1 [math.SG], 2011.

[6] T. Draghici, T.-J. Li, W. Zhang, Geometry of tamed almost complex structures in dimension 4, preprint, 2011.

[7] T.-J. Li, W. Zhang, Comparing tamed and compatible symplectic cones and cohomological properties of almost complex manifolds, *Comm. Anal. Geom.* **17** (2009), no. 4, 651–683.

Leandro Arosio: Aspetti geometrici della teoria di Loewner

Leandro Arosio
Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi"
email: `arosio@altamatematica.it`

Sunto. La teoria di Lowner radiale nel disco unitario è stata introdotta [4] da C. Loewner nel 1923 nel tentativo di dimostrare la congettura di Bieberbach e da allora è stata utilizzata per dimostrare vari profondi risultati nella teoria geometrica delle funzioni. Recentemente [3] Bracci, Contreras e Díaz-Madrigal hanno generalizzato il concetto di famiglia di evoluzione a varietà complesse iperboliche. Le catene di Loewner, che svolgono un ruolo centrale nella teoria nel disco, possono essere generalizzate [2] all'ambito delle varietà complesse iperboliche interpretandole come limite diretto della famiglia di evoluzione.

Come conseguenza possiamo definire il *Loewner range* di una famiglia di evoluzione come la classe di biolomorfismo di $\bigcup_{t\geq 0} f_t(M)$, dove (f_t) è una catena di Loewner associata. La pseudometrica di Kobayashi del Loewner range dipende dalla dinamica della famiglia di evoluzione.

Nel caso di famiglie di evoluzione di tipo dilation della palla $\mathbb{B}^n$ dimostriamo [1] che il Loewner range è $\mathbb{C}^n$. Per ottenere questo risultato introduciamo una nozione di coniugio dipendente da un parametro per famiglie di evoluzione, che preserva il Loewner range. Per poter coniugare una famiglia di evoluzione alla sua parte lineare (che ha Loewner range $\mathbb{C}^n$) dobbiamo risolvere un'equazione di Schroeder parametrica, e come ostruzione all'esistenza di una soluzione troviamo le risonanze reali tra gli autovalori della parte lineare. In presenza di risonanze dobbiamo coniugare la famiglia di evoluzione ad un'opportuna famiglia di evoluzione polinomiale triangolare con Loewner range $\mathbb{C}^n$.

Bibliografia

[1] L. Arosio, *Resonances in Loewner equations*, Adv. Math., in corso di stampa.

[2] L. Arosio, F. Bracci, H. Hamada and G. Kohr, *An abstract approach to Loewner chains*, preprint (2010)

[3] F. Bracci, M. D. Contreras and S. Díaz-Madrigal, *Evolution families and the Loewner equation II: complex hyperbolic manifolds*, Math. Ann., **344** (2009), 947–962.

[4] C. Loewner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann., **89** (1923), 103–121.

Cinzia Bisi: Tori Quaternionici e loro Spazio di Moduli

Cinzia Bisi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
email: bsicnz@unife.it

Graziano Gentili
Dipartimento di Matematica, Università di Firenze

Sunto. Si descrive lo spazio dei moduli dei tori quaternionici (ovvero reticoli di dimensione reale 4), a meno di automorfismi *slice*-regolari del corpo dei quaternioni, che sono della forma $q \to qa+b$. Si usa diffusamente la teoria di riduzione di matrici definite positive dovuta a Minkowski e Siegel, applicata alle matrici di Gram dei reticoli.

Si investigano inoltre i tori che hanno un gruppo di automorfismi non banale.

Bibliografia

[1] H.S.M. Coxeter "Regular Complex Polytopes" Cambridge University Press, 1973.

[2] P. Du Val "Homographies, Quaternions and Rotations" Oxford Mathematical Monographs, 1964.

[3] H.M. Farkas, I. Kra "Theta constants, Riemann surfaces and the modular group. An introduction with applications to uniformization theorems, partition identities and combinatorial number theory" Graduate Studies in Mathematics, 37. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[4] G. Gentili, D.C. Struppa "A new theory of regular functions of a quaternionic variable" Adv. Math., 216 (2007), pp. 279-301.

[5] J-i. Igusa "Theta functions" Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[6] H. Maass "Siegel's modular forms and the Dirichelet series" Lecture Notes in Mathematics, n. 216, Springer-Verlag, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[7] I.N. Stewart, D.O. Tall "Algebraic Number theory" Chapman and Hall, London, 1979.

[8] E. Vesentini "Capitoli scelti della teoria delle funzioni olomorfe" Unione Matematica Italiana, 1984.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Progetto MIUR di Rilevante Interesse Nazionale *Proprietà geometriche delle varietà reali e complesse* e con il supporto di GNSAGA-INDAM.

Antonio J. Di Scala: Una dimostrazione breve del teorema di Karpelevich-Mostow

Antonio J. Di Scala[1]
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
email: antonio.discala@polito.it

Sunto. Presenterò una dimostrazione breve del seguente teorema di Karpelevich-Mostow.

Teorema. *Sia M uno spazio simmetrico Riemanniano di tipo non-compatto e sia $G \subset Iso(M)$ un sottogruppo di Lie semisemplice. Allora esiste $p \in M$ tale che l'orbita $G.p$ è una sottovarietà totalmente geodetica di M.*

Una interessante applicazione è il seguente resultato di Clozel.

Teorema. *Una immersione olomorfa equivariante tra spazi simmetrici Hermitiani di tipo non-compatto è totalmente geodetica.*

Bibliografia

[1] L. Clozel: "Equivariant embeddings of Hermitian symmetric spaces", Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 117 (2007), no. 3, 317−323.

[2] A.J. Di Scala and C. Olmos: "Corrigendum for "A geometric proof of the Karpelevich-Mostow theorem", arXiv:1104.0892.

[3] A.J. Di Scala and C. Olmos: "A geometric proof of the Karpelevich-Mostow theorem", Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), no. 4, 634−638.

[4] F.I. Karpelevich: "Surfaces of transitivity of semisimple group of motions of a symmetric space", Doklady Akad. Nauk SSSR 93, 401−404, 1953.

[5] G. Mostow: "Some new decomposition theorems for semi-simple groups", Mem. Amer. Math. Soc., 14, 31−54, 1955.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di GNSAGA,INdAM, PRIN 07 'Differential Geometry and Global Analysis' e MIUR.

Andrea Iannuzzi: Iperbolicità dei fibrati in dischi puntati $SU(2)$-invarianti e di Stein sulla quadrica affine complessa

Andrea Iannuzzi
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"
email: `iannuzzi@mat.uniroma2.it`

Sunto. Dato un fibrato in rette olomorfo sulla quadrica affine complessa, si considerano i sui sottofibrati in dischi $SU(2)$-invarianti e di Stein. A meno di biolomorfismi equivarianti, tali sottofibrati sono tutti contenuti in un certo fibrato in dischi massimale Ω_{max}. Il fibrato in dischi puntati associato a Ω_{max}, ottenuto rimuovendo la sezione nulla, risulta essere l'unico fibrato in dischi puntati $SU(2)$-invariante e di Stein contenente curve intere. Invero si mostra che tutti gli altri sono Kobayashi iperbolici e si intende discutere un'applicazione di tale risultato.

Costantino Medori: Quadriche CR con speciali proprietà di simmetria

Andrea Altomani
Faculty of Sciences, Technology and Communication, University of Luxembourg

Costantino Medori
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: `costantino.medori@unipr.it`

Sunto. Il più semplice esempio non banale di varietà di Cauchy-Riemann (brevemente CR) è dato dalle quadriche $Q = \{(z,w) \in \mathbb{C}^n_z \times \mathbb{C}^k_w \mid \operatorname{Im} w = H(z,z)\}$, dove $H\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ è una forma hermitiana simmetrica. Ogni tale quadrica ha un completamento canonico ad una sottovarietà $\hat{Q}$ di uno spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^N$, con $\hat{Q}$ non necessariamente chiusa quando $k > 1$. Sia Q che $\hat{Q}$ sono CR-omogenee e ogni automorfismo CR locale di Q o di $\hat{Q}$ si estende ad un automorfismo globale proiettivo di $\mathbb{CP}^N$ che trasforma $\hat{Q}$ in se stessa (vedi [2]).

È noto che l'algebra $\mathfrak{g}$ degli automorfismi CR locali di Q, ovvero di $\hat{Q}$, ha una naturale gradazione $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, dipendente solo dalla scelta di un punto di Q. Tale algebra è isomorfa all'algebra di Levi-Tanaka (vedi [4]). ll gruppo degli automorfismi CR di $\hat{Q}$ ha $\mathfrak{g}$ come algebra di Lie.

Recentemente W. Kaup (vedi [3]) ha introdotto la seguente proprietà di simmetria: la quadrica Q soddisfa la proprietà (S) se e solo se esiste γ, automorfismo CR di $\hat{Q}$, che sia involutivo e tale che $\operatorname{Ad}(\gamma)(\mathfrak{g}_j) = \mathfrak{g}_{-j}$ per ogni $j = 0, \pm 1, \pm 2$.

In questa comunicazione saranno esposti alcuni risultati ottenuti in collobora-zione con A. Altomani (vedi [1]). In particolare si estende la proprietà (S) ad una proprietà $(\tilde{S})$, che consiste nel richiedere l'esistenza di un automorfismo CR di $\hat{Q}$ che rovesci la gradazione di $\mathfrak{g}$ e sia di ordine finito (non necessariamente due). Le quadriche che soddisfano la proprietà $(\tilde{S})$ sono allora caratterizzate in termini della seguente proprietà dell'algebra $\mathfrak{g}$: la gradazione di $\mathfrak{g}$ deve essere interna e definita da un elemento semisemplice di un fattore di Levi di $\mathfrak{g}$. Si ha anche che, se $\hat{Q}$ è compatta, le proprietà (S) e $(\tilde{S})$ sono equivalenti.

Bibliografia

[1] A. Altomani, C. Medori: "A Characterization of CR Quadrics with a Symmetry Property", *J. Geom. Anal.*, DOI 10.1007/s12220-011-9228-6.

[2] A. Isaev, W. Kaup: "Regularization of Local CR-Automorphisms of Real-Analytic CR-Manifolds", *J. Geom. Anal.*, DOI 10.1007/s12220-010-9181-9.

[3] W. Kaup: "CR-quadrics with a symmetry property", *Manuscripta Math.* **133** (2010), 505–517.

[4] C. Medori, M. Nacinovich: "Levi-Tanaka algebras and homogeneous CR manifolds", *Compos. Math.* **109** (1997), 195–250.

Jasmin Raissy: Forme normali in dinamica olomorfa

Jasmin Raissy[1]
Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Milano Bicocca
email: jasmin.raissy@unimib.it

Sunto. Uno degli strumenti principali nello studio della dinamica olomorfa locale sono le forme normali. Sebbene il caso unidimensionale sia ampiamente sviluppato (si vedano [1], [2], [8]), in dimensione $n \geq 2$ tale studio è ben lontano dall'essere completo, e, fino a pochi anni fa, si limitava al problema della linearizzazione in assenza di risonanze e a pochi casi particolari.

In questo seminario, si discutono risultati ottenuti riguardo la linearizzazione di germi di biolomorfismo in presenza di risonanze e le tecniche usate, partendo dall'approccio classico ed arrivando a nuovi metodi geometrici (si vedano [3], [4], [6], [7]). Più in generale, si presentano risultati che caratterizzano l'esistenza di forme normali olomorfe attraverso tecniche puramente geometriche (si veda [5]). Si presentano infine nuove applicazioni delle forme normali allo studio della dinamica olomorfa locale.

Bibliografia

[1] M. Abate, *Discrete local holomorphic dynamics*. New version. In "Holomorphic dynamical systems", Lect. Notes in Math. 1998, Springer, Berlin, 2010, 1-55.

[2] F. Bracci, *Local holomorphic dynamics of diffeomorphisms in dimension one*. Five lectures in complex analysis, 1-42, Contemp. Math., 525, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[3] J. Raissy: *Linearization of holomorphic germs with quasi-Brjuno fixed points*, Mathematische Zeitschrift, **264**, 2010, 881-900.

[4] J. Raissy: *Simultaneous linearization of holomorphic germs in presence of resonances*, Conform. Geom. Dyn. **13**, 2009, 217-224.

[5] J. Raissy: *Torus actions in the normalization problem*, Journal of Geometric Analysis, **20**, 2010, 472-524.

[6] J. Raissy: *Brjuno conditions for linearization in presence of resonances*, in corso di stampa in "Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDE's; Generalized Borel Summation", Edizioni Della Normale 2010, arXiv:0911.4341v1.

[7] J. Raissy: *Holomorphic linearization of commuting germs of holomorphic maps*, Preprint, 2010, arXiv:1005.3434v1.

[8] J.-C. Yoccoz: *Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques*, Astérisque **231**, 1995, 3-88.

[1] Lavoro parzialmente supportato da: FSE, Regione Lombardia

Federico Alberto Rossi: Deformazioni di D-strutture ed esempi

Federico Alberto Rossi[1]
Dipartimento di Metematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
email: `f.rossi46@campus.unimib.it`

Sunto. Una ***D**-struttura* su una varietà $2n$-dimensionale M è un endomorfismo K del fibrato tangente TM tale che $K^2 = \mathrm{Id}_{TM}$, le due autodistribuzioni $TM^{\pm}$ con autovalori ± 1 abbiano lo stesso rango n e tali autodistribuzioni siano involutive (queste strutture sono note in letteratura anche come *strutture para-complesse*). La **D**-geometria presenta collegamenti sia con la geometria complessa sia con altre strutture geometriche, quali, ad esempio le *strutture prodotto*, la *geometria pseudo-Riemanniana* e le *strutture bi-Lagrangiane* (note anche come *varietà **D**-Kähleriane* [1]). Recentemente, Harvey e Lawson [2], hanno studiato la geometria delle sottovarietà in una varietà **D**-Kähleriana con fibrato canonico triviale, che è il **D**-analogo di una varietà di Calabi-Yau. In questa comunicazione presenteremo alcuni esempi di nilvarietà che ammettono strutture di questo tipo, che sottolinea la differenza tra le **D**-strutture e le strutture complesse. Tratteremo inoltre la teoria delle piccole deformazioni di **D**-strutture su una varietà compatta M [6]. Analogamente alla teoria classica di Kodaira e Spencer per le deformazioni delle strutture complesse, in [4] è introdotta una *Algebra di Lie Differenziale Graduata* $(\mathcal{A}, [[\cdot,\cdot]], \overline{\partial}_K)$ (brevemente *DGLA*) per caratterizzare le piccole deformazioni di **D**-strutture K. Risulta che tali deformazioni sono parametrizzate da elemententi di $\mathcal{A}$ di grado 1 che soddisfano l'*equazione di Maurer-Cartan.* Usando un opportuno omomorfismo tra DGLA, possiamo riscrivere l'equazione di integrabilità di Maurer-Cartan come una condizione specifica nello spazio delle derivazioni anti-simmetriche dell'algebra esterna $\wedge_K^{0,*}(M)$. Un risultato analogo si può ottenere per le ***D**-strutture CR* [3] su varietà di contatto.

Bibliografia

[1] Bryant R.L.:Bochner-Kähler metrics, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), no.3 623–715.

[2] Harvey F.R., Lawson H.B. Jr.: Split Special Lagrangian Geometry, (2010), `e-print arXiv:1007.0450`.

[3] Hill C.D., Nurowski P.: Differential equations and para-CR structures, *Boll. Unione Mat. Ital. (9)* **3** (2010), no.1 25–91.

[4] Medori C., Tomassini A.: On small deformations of para-complex manifolds, (2010), in corso di stampa in *J. Noncommut. Geom.*

[5] Rossi F.A., Tomassini A.: On Strong Kähler and Astheno-Kähler metrics on nilmanifolds, (2010), in corso di stampa in *Adv. Geom.*

[6] Rossi F.A.:On deformations of **D**-manifolds and CR **D**-manifolds, `preprint` (2011).

[1]Si ringraziano i Professori A. Tomassini e C. Medori per la disponibilità e il supporto dimostrati.

Irene Sabadini: Teoremi di dualità per funzioni slice iperolomorfe

Irene Sabadini
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: irene.sabadini@polimi.it

Sunto. La teoria delle funzioni slice iperolomorfe è nata in tempi recenti, dopo la definizione di funzioni slice regolari introdotta da Gentili e Struppa nel lavoro [4]. Queste ultime sono funzioni di una variabile quaternionica a valori quaternionici, le cui restrizioni a opportuni piani complessi sono olomorfe. La teoria è stata poi estesa al caso di funzioni a valori in un'algebra di Clifford in [1], le cosiddette funzioni slice monogene, e successivamente al caso di funzioni a valori in algebre più generali, vedi [5]. È da notare che queste funzioni non sono soluzione di un operatore differenziale a coefficienti costanti, a parte il caso in cui l'algebra considerata sia quella dei numeri complessi. La teoria di queste funzioni è in rapido sviluppo, ed è motivata dalle applicazioni, ad esempio, al calcolo funzionale per n-uple di operatori, [3].

In questa comunicazione presenterò i teoremi di dualità dimostrati in [2] per funzioni iperolomorfe, nello spirito degli analoghi risultati di Köthe e Grothendieck [5], [6] per funzioni olomorfe. I risultati di dualità sono sia algebrici che topologici. Le dimostrazioni sono complicate dal fatto che la formula di Cauchy per funzioni slice iperolomorfe destre e per quelle sinistre è basata su due diversi nuclei.

Bibliografia

[1] F. Colombo, I. Sabadini, D.C. Struppa: "Slice monogenic functions", Israel J. Math., **171** (2009), 385–403.

[2] F. Colombo, I. Sabadini, D.C. Struppa, "Duality theorems for slice hyperholomorphic functions", J. Reine Angew. Math., **177** (2010), 369–389.

[3] F. Colombo, I. Sabadini, D. C. Struppa, "Noncommutative Functional Calculus. Theory and Applications of Slice Hyperholomorphic Functions", Progress in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2011.

[4] G. Gentili, D.C. Struppa, "A new theory of regular functions of a quaternionic variable", Adv. Math., **216** (2007), 279–301.

[5] R. Ghiloni, A. Perotti, "Slice regular functions on real alternative algebras", Adv. Math., **226** (2011), 1662–1691.

[6] A. Grothendieck, "Sur certain espaces de fonctions holomorphes, I, II", J. Reine Angew. Math., **192** (1953), 35–64, 77–95.

[7] G. Köthe, "Dualität in der Funktionentheorie", J. Reine Angew. Math., **191** (1953), 30-49.

Alberto Saracco: Misure di Carleson e successioni uniformemente discrete in dominî fortemente pseudoconvessi

Marco Abate
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Alberto Saracco[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: alberto.saracco@unipr.it

Sunto. Le misure di Carleson sono un'importante classe di misure positive finite di Borel introdotta per studiare alcune proprietà di algebre di funzioni olomorfe su un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$. Sono possibili varie caratterizzazioni delle misure di Carleson, soprattutto nel caso di dominî particolari come il disco di $\mathbb{C}$ o la palla di $\mathbb{C}^n$. Nel 1995 Cima e Mercer [2] danno la prima caratterizzazione per D fortemente pseudoconvesso, data in termini di geometria euclidea. Nel 2007 Duren e Weir [3] danno una caratterizzazione intrinseca delle misure μ di Carleson nella palla in termini di trasformata di Berezin di μ. Tale caratterizzazione si generalizza.

Teorema. *Sia μ una misura di Borel finita positiva su un dominio fortemente pseudoconvesso limitato $D \Subset \mathbb{C}^n$. Allora μ è una misura di Carleson di $A^p(D)$ se e solo se la sua trasformata di Berezin $B\mu$ è limitata.*

Legate alle misure di Carleson sono le successioni uniformemente discrete per la distanza di Kobayashi. Tale legame è stato trovato da Jevtić, Massaneda e Thomas [4] per la palla, e sussiste anche nel caso più generale dei dominî fortemente pseudoconvessi limitati. È quindi interessante studiare tali successioni e in particolare il problema della velocità di fuga al bordo. Una stima precisa di MacCluer [5] di tale velocità nella palla viene generalizzata ai dominî limitati fortemente pseudoconvessi.

Bibliografia

[1] M. Abate e A. Saracco 'Carleson measures and uniformly discrete sequences in strongly pseudoconvex domains', *J. Lond. Math. Soc.* doi:10.1112/jlms/jdq092.

[2] J.A. Cima e P.R. Mercer 'Composition operators between Bergman spaces on convex domains in $\mathbf{C}^n$', *J. Operator Theory* 33 (1995), 363–369.

[3] P.L. Duren e R. Weir, 'The pseudohyperbolic metric and Bergman spaces in the ball', *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007), 63–76.

[4] M. Jevtić, X. Massaneda e P.J. Thomas, 'Interpolating sequences for weighted Bergman spaces of the ball', *Michigan Math. J.* 43 (1996), 495–517.

[5] B.D. MacCluer, 'Uniformly discrete sequences in the ball', *J. Math. Anal. Appl.* 318 (2006), 37–42.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto MIUR "Proprietà geometriche delle varietà reali e complesse"

Caterina Stoppato: Nuovi sviluppi in serie per funzioni quaternioniche regolari

Caterina Stoppato[1]
Dipartimento di Matematica Università di Roma "Tor Vergata" Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma & Dipartimento di Scienze Matematiche Università Politecnica delle Marche Via Brecce Bianche, 60131 Ancona
email: `stoppato@math.unifi.it`

Sunto. Una nuova teoria delle funzioni di variabile quaternionica è stata sviluppata da G. Gentili e D. C. Struppa in [2] sulla base di una definizione di funzione regolare ispirata da C. G. Cullen. In particolare le funzioni regolari su una palla $B(0,R) = \{q \in \mathbb{H} : |q| < R\}$ sono tutte e sole le somme di serie di potenze quaternioniche $f(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n a_n$ con raggio di convergenza maggiore o uguale ad R. Una caratterizzazione analoga vale se anziché 0 si considera un altro punto q_0 dell'asse reale di $\mathbb{H}$. Più delicato è lo studio nell'intorno di un punto q_0 qualunque in $\mathbb{H}$. In [1] si sono introdotti un nuovo tipo di serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}(q-q_0)^{*n}a_n$ ed una distanza $\sigma : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{R}$, provando il seguente teorema.

Teorema. *Sia Ω un dominio di $\mathbb{H}$. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{H}$ è regolare se e solo se ammette in ogni $q_0 \in \Omega$ uno sviluppo del tipo $f(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(q-q_0)^{*n}a_n$ valido in una σ-palla $\Sigma(q_0,R) = \{q \in \mathbb{H} : \sigma(q,q_0) < R\}$ con $R > 0$.*

La somiglianza col caso complesso è notevole, ma si deve tenere presente che la distanza σ induce su $\mathbb{H}$ una topologia che è strettamente più fine di quella euclidea. Perciò lo sviluppo in serie indicato non consente, in genere, di prevedere il comportamento di f in un intorno euclideo di q_0. In [3] si introduce invece un nuovo tipo di sviluppo che è valido su aperti euclidei e permette quindi di superare il limite ora menzionato.

Bibliografia

[1] G. Gentili and C. Stoppato, "Power series and analyticity over the quaternions," *Math. Ann.*, online first, 2011.

[2] G. Gentili and D. C. Struppa, "A new theory of regular functions of a quaternionic variable," *Adv. Math.*, vol. 216, no. 1, pp. 279–301, 2007.

[3] C. Stoppato "A new series expansion for slice regular functions". Preprint.

[1]Con il supporto parziale di: GNSAGA INdAM, FIRB "Geometria Differenziale Complessa e Dinamica Olomorfa", PRIN "Proprietà geometriche delle varietà reali e complesse" e PRIN "Geometria Differenziale e Analisi Globale".

Adriano Tomassini: Strutture quasi-complesse su spazi omogenei e loro proprietà coomologiche

Tian-Jun Li
School of Mathematics, University of Minnesota

Adriano Tomassini
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: `adriano.tomassini@unipr.it`

Sunto. Recentemente, alcuni autori hanno studiato le proprietà geometriche e coomologiche delle varietà compatte dotate di una metrica *almost-Kähler*, specialmente dal punto di vista simplettico (si veda [3], [5] e [1]). In [5], T.-J. Li e W. Zhang hanno introdotto, per una varietà quasi-complessa (M, J), i sottogruppi di coomologia $H^{1,1}_J(M)_{\mathbb{R}}$ e $H^{(2,0),(0,2)}_J(M)_{\mathbb{R}}$ di $H^2_{dR}(M;\mathbb{R})$, i cui elementi sono 2-classi di coomologia che ammettono rispettivamente un rappresentante J-invariante, J-anti-invariante. Tali gruppi appaiono naturalmente nello studio del rapporto tra il *cono simplettico dominato* $\mathcal{K}^t_J$ e il *cono simplettico calibrato* $\mathcal{K}^c_J$ su una varietà quasi-complessa (M, J) (problema legato ad una congettura di Donaldson, si veda [2, Question 2]), i.e.,

$$\mathcal{K}^t_J = \left\{ [\omega] \in H^2_{dR}(M;\mathbb{R}) \,|\, \omega \,\text{sia una forma simplettica e } J \text{ sia } \omega\text{-dominata} \right\},$$

$$\mathcal{K}^c_J = \left\{ [\omega] \in H^2_{dR}(M;\mathbb{R}) \,|\, \omega \,\text{sia una forma simplettica e } J \text{ sia } \omega\text{-calibrata} \right\},$$

In questo seminario, si esporranno alcuni risultati recenti ottenuti in collaborazione con T.-J. Li (si veda [4]), riguardanti le proprietà coomologiche di strutture almost-Kähler su algebre di Lie unimodulari di dimensione quattro. Si discuteranno infine le scomposizioni coomologiche di alcune famiglie di strutture quasi-complesse su spazi omogenei di dimensione sei (si veda [1]).

Bibliografia

[1] D. Angella, A. Tomassini, On cohomological decomposition of almost-complex manifolds and deformations, *J. Sympl. Geom.* **9** (2011), no. 3, 1–26.

[2] S. K. Donaldson, *Two-forms on four-manifolds and elliptic equations*, Inspired by S. S. Chern, Nankai Tracts Math., vol. 11, World Sci. Publ., 2006, pp. 153–172.

[3] T. Draghici, T.-J. Li, W. Zhang, Symplectic forms and cohomology decomposition of almost complex four-manifolds, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2010** (2010), no. 1, 1–17.

[4] T.-J. Li, A. Tomassini, Almost-Kähler structures on 4-dimensional unimodular Lie algebras, `preprint`.

[5] T.-J. Li, W. Zhang, Comparing tamed and compatible symplectic cones and cohomological properties of almost complex manifolds, *Comm. Anal. Geom.* **17** (2009), no. 4, 651–683.

Sezione 18 Geometria algebrica

Fabrizio Andreatta: Sottovarietà localmente simmetriche nel luogo di Torelli

Fabrizio Andreatta
Dipartimento di Matematica, Università di Milano
email: fabrizio.andreatta@unimi.it

Sunto. Enuncerò e darò un cenno di dimostrazione dell'analogo di una congettura di R. Coleman e F. Oort sulla non esistenza di sottovarietà localmente simmetriche del luogo delle curve singolari e irrudicibili nella compattificazione di Deligne e Mumford dello spazio dei moduli delle curve di genere $g \geq 4$.

Bibliografia

[1] F. Andreatta: "Coleman–Oort's conjecture for degenerate irreducible curves", in corso di pubblicazione sul *Israel Journal of Mathematics*.

Cristina Bertone: Schemi di Hilbert e aperti di Borel

Cristina Bertone[1]
Dipartimento di Matematica G. Peano, Università di Torino
email: `cristina.bertone@unito.it`

Paolo Lella
Dipartimento di Matematica G. Peano, Università di Torino

Margherita Roggero
Dipartimento di Matematica G. Peano, Università di Torino

Sunto. Sia $p(t)$ un polinomio di Hilbert ammissibile in $\mathbb{P}^n$ di grado d e numero di Gotzmann r, e sia $q(t) = \binom{n+t}{n} - p(t)$. Possiamo immergere $\mathcal{H}ilb^n_{p(t)}$ nella Grassmanniana $\mathbb{G}(q(r), q(r)+p(r))$ e quindi mediante coordinate di Plücker in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^M$. Nonostante questa costruzione sia del tutto esplicita, in generale non permette di ottenere metodi computazionali efficienti per lo studio di $\mathcal{H}ilb^n_{p(t)}$, poiché $M \gg 0$. Per arrivare ad un'immersione che sia più "maneggevole" dal punto di vista computazionale, alcuni recenti lavori studiano equazioni locali per $\mathcal{H}ilb^n_{p(t)}$, ossia equazioni che definiscono gli aperti di un particolare ricoprimento di $\mathcal{H}ilb^n_{p(t)}$ ottenuti a partire da ideali di Borel (vedi [1], [2]). Mostriamo come ognuno di questi aperti è schematicamente isomorfo al J-marked scheme $\mathcal{M}f(J)$ (introdotto in [1]), che parametrizza tutti gli ideali omogenei I tali che il negativo $\mathcal{N}(J)$ dell'ideale di Borel J è una base del quoziente $k[x_0, \ldots, x_n]/I$. Siamo quindi interessati a studiare immersioni di $\mathcal{M}f(J)$ in spazi affini "piccoli" e definite da equazioni "semplici".

Teorema. *Sia J un ideale monomiale di Borel.*

(1) *Esistono equazioni di grado $\leq d+2$ che definiscono $\mathcal{M}f(J)$ come sottoschema chiuso di $\mathbf{A}^{q(m)p(m)}$, per ogni $m \geq r'$, dove r' è la regolarità della saturazione J_0 di J;*

(2) *$\mathcal{M}f(J)$ può essere proiettato isomorficamente su un sottospazio lineare di dimensione $\leqslant \sigma p(r')$, dove σ è il numero di generatori minimali di J_0.*

Questi risultati sono ottenuti mediante due tipi di riduzioni a forma normale, che generalizzano la riduzione rispetto a una base di Groebner ma non necessitano di un term order. Grazie al Teorema, possiamo quindi immergere gli aperti di un ricoprimento di $\mathcal{H}ilb^n_{p(t)}$ in spazi affini di dimensione molto più piccola di M. Ad esempio, $\mathcal{H}ilb^3_{4t}$ è immerso mediante coordinate di Plücker in uno spazio proiettivo di dimensione $M \sim 642 \cdot 10^{18}$; applicando il Teorema, possiamo immergere gli aperti di un ricoprimento di $\mathcal{H}ilb^3_{4t}$ in spazi affini di dimensione ≤ 100.

Bibliografia

[1] F.Cioffi, M. Roggero: "Flat families by strongly stable ideals and a generalization of Groebner bases", preprint, 2011.

[2] P. Lella, M. Roggero: "Rational components of Hilbert schemes", accettato per la pubblicazione sui Rendiconti dell'Università di Padova.

[1] Lavoro eseguito con il supporto del progetto PRIN "Geometria delle varietà algebriche e dei loro spazi di moduli", cofinanziato dal MIUR (cofin 2008).

Michele Bolognesi: Categorie derivate e razionalità di fibrati in coniche

Michele Bolognesi
IRMAR, Université de Rennes 1
email: michele.bolognesi@univ-rennes1.fr

Marcello Bernardara
Fakultät für Mathematik, Univeristät Duisburg–Essen

Sunto. Uno dei fini principali della ricerca nell'ambito delle categorie derivate è la comprensione di come la geometria esplicita di una varietà algebrica X sia codificata nella categoria derivata $\mathrm{D^b}(X)$ dei complessi limitati di fasci coerenti. Uno degli approcci più prolifici si è rivelato studiare le decomposizioni semiortogonali di tale c.d.. In molte situazioni, quasi tutti gli oggetti di una decomposizione sono equivalenti alla c.d. di un punto e le sottocategorie non triviali che appaiono in una decomposizione semiortogonale contengono informazioni sulla geometria di X.

Sia S una superficie liscia, razionale e $\pi : X \to S$ un fibrato in coniche standard. In [2] Kunznetsov considera il fascio $\mathcal{B}_0$ delle parti pari dell'algebra di Clifford associata al fibrato in coniche e descrive una decomposizione

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \Phi \mathrm{D^b}(S, \mathcal{B}_0), E_1, \ldots, E_s \rangle, \tag{35}$$

dove $\{E_i\}_{i=1}^s$ sono oggetti eccezionali, cioè equivalenti alla c.d. di un punto. Le informazioni non triviali sono quindi contenute nella sottocategoria $\mathrm{D^b}(S, \mathcal{B}_0)$.

Teorema 12. *[1] Siano$\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$ curve algebriche lisce e $k \geq 0$ e supponiamo che esistano dei funtori pieni e fedeli $\Psi_i : \mathrm{D^b}(\Gamma_i) \to \mathrm{D^b}(S, \mathcal{B}_0)$ per $i = 1, \ldots k$, tali che $\mathrm{D^b}(S, \mathcal{B}_0)$ ammette una decomposizione*

$$\mathrm{D^b}(S, \mathcal{B}_0) = \langle \Psi_1 \mathrm{D^b}(\Gamma_1), \ldots, \Psi_k \mathrm{D^b}(\Gamma_k), E_1, \ldots, E_l \rangle, \tag{36}$$

dove gli E_i sono oggetti eccezionali e $l \geq 0$.Allora la Jacobiana intermedia $J(X) = \bigoplus_{i=1}^k J(\Gamma_i)$.

Teorema 13. *[1] Se S è anche minimale, allora X è razionale se e solo se esistono dei funtori pieni e fedeli $\Psi_i : \mathrm{D^b}(\Gamma_i) \to \mathrm{D^b}(S, \mathcal{B}_0)$ e una decomposizione semiortogonale*

$$\mathrm{D^b}(S, \mathcal{B}_0) = \langle \Psi_1 \mathrm{D^b}(\Gamma_1), \ldots, \Psi_k \mathrm{D^b}(\Gamma_k), E_1, \ldots, E_l \rangle,$$

dove E_i sono oggetti eccezionali e $l \geq 0$.

Bibliografia

[1] M.Bernardara, and M.Bolognesi: "Derived categories and rationality of conic bundles", Preprint, http://arxiv.org/abs/1010.2417, 1–23.

[2] A.Kuznetsov:"Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics", Adv.Math.**218** (2008),no.5,1340–1369.

Maria Chiara Brambilla: Varietà delle secanti a varietà di Segre-Veronese

Maria Chiara Brambilla
Dipartimento di Scienze Matematiche, Università Politecnica delle Marche
email: brambilla@dipmat.univpm.it

Hirotachi Abo
Department of Mathematics, University of Idaho

Sunto. Data una varietà proiettiva X, la sua varietà delle s-secanti $\sigma_s(X)$ è definita come la chiusura di Zariski dell'unione di tutti gli spazi lineari generati da tutte le s-uple di punti indipendenti di X. Le proprietà delle varietà delle secanti danno informazioni utili sia dal punto di vista della geometria proiettiva, sia per numerose applicazioni che sono state approfondite recentemente in vari campi come ad esempio la statistica algebrica o la teoria delle telecomunicazioni.

La prima domanda che è naturale porsi riguarda la dimensione della varietà delle secanti. Quando la dimensione è il minimo tra $s\dim(X)+s-1$ e la dimensione dello spazio ambiente, diciamo che $\sigma_s(X)$ ha la dimensione aspettata, altrimenti diciamo che X è s-difettiva.

Solo nel caso delle varietà di Veronese la classificazione completa delle varietà difettive è nota grazie al famoso teorema di Alexander-Hirschowitz (dimostrato negli anni '90). Il problema di classificare le varietà difettive per altre famiglie, come le varietà di Segre, le Grassmanniane o le varietà di Segre-Veronese è stato affrontato da diversi autori e sono stati ottenuti molti risultati parziali, tuttavia una classificazione completa non è ancora nota in nessuno di questi casi.

In questo seminario vorrei concentrarmi sul caso delle varietà di Segre-Veronese, presentando alcuni risultati recenti ottenuti in collaborazione con Hirotachi Abo.

Bibliografia

[1] H. Abo, M.C. Brambilla, "Secant varieties of Segre-Veronese varieties $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ embedded by $\mathcal{O}(1,2)$". Experimental Mathematics, 18 (2009) 3, 369-384.

[2] H. Abo, M.C. Brambilla, "On the dimensions of secant varieties of Segre-Veronese varieties." Preprint arXiv:0912.4342

[3] H. Abo, M.C. Brambilla, "New examples of defective secant varieties of Segre-Veronese varieties." Accettato per la pubblicazione su Collectanea Mathematica. Preprint arXiv:1101.3202

Alberto Calabri: Sulle curve piane contratte da trasformazioni di Cremona

Alberto Calabri
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Ferrara
email: alberto.calabri@unife.it

Ciro Ciliberto
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

Sunto. Una trasformazione di Cremona è una funzione birazionale $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, dove $\mathbb{P}^2$ è il piano proiettivo su un campo k, che per noi sarà il campo dei numeri complessi.

Diciamo che una curva piana irriducibile C è *contraibile cremonianamente* se esiste una trasformazione di Cremona che manda C in un punto del piano $\mathbb{P}^2$.

Uno strumento classico per studiare una curva piana C è fornito dai *sistemi lineari di curve m-aggiunte* a C, cioè $|C+mK_{\mathbb{P}^2}|$ quando C è liscia, o cose analoghe sullo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ nelle singolarità di C, quando C non è liscia.

In [1], Coolidge affermò che una curva piana irriducibile C è contraibile cremonianamente se e solo se C non ha m-aggiunte, per ogni $m \geqslant 1$, ma la sua dimostrazione in [1] è incompleta. In [3], Kumar and Murthy dimostrarono, con metodi differenti:

Teorema (Kumar-Murthy). *Una curva piana irriducibile C è contraibile cremonianamente se e solo se la curva C non ha* 1*-aggiunte e* 2*-aggiunte.*

Il teorema può essere considerato un analogo del criterio di razionalità di Castelnuovo per le superfici, riferito invece alle coppie "curva irriducibile su superficie razionale". È stato generalizzato da Iitaka in [4] all'unione di due curve piane irriducibili. In [2] Kojima e Takahashi ottengono generalizzazioni simili per l'unione di al più quattro curve piane irriducibili.

In questa comunicazione ricorderemo in breve la storia di questo problema, daremo una dimostrazione dell'affermazione di Coolidge con metodi classici e infine parleremo di un lavoro in preparazione sull'unione di un numero finito, arbitrario, di rette che possono essere contratte a punti da una trasformazione di Cremona.

Bibliografia

[1] J. L. Coolidge, A treatise on algebraic plane curves, Oxford Univ. Press, 1931.

[2] H. Kojima, T. Takahashi, Reducible curves on rational surfaces, Tokyo J. Math. 29 (2006), 301–317.

[3] N. M. Kumar, M. P. Murthy, Curves with negative self-intersection on rational surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 22 (1982/83), 767–777.

[4] S. Iitaka, Classification of reducible plane curves, Tokyo J. Math. 11 (1988), 363–379.

Alberto Canonaco: Funtori di Fourier-Mukai: non unicità

Alberto Canonaco
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università degli Studi di Pavia
email: alberto.canonaco@unipv.it

Paolo Stellari
Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università degli Studi di Milano

Sunto. Date due varietà proiettive lisce X e Y, la funzione che associa ad ogni oggetto $\mathcal{E}$ della categoria derivata $\mathrm{D}^b(X \times Y)$ il funtore di Fourier–Mukai con nucleo $\mathcal{E}$, $\Phi_{\mathcal{E}} = \Phi_{\mathcal{E}}^{X \to Y} \colon \mathrm{D}^b(X) \to \mathrm{D}^b(Y)$, si estende chiaramente a un funtore

$$\Phi_{-}^{X \to Y} \colon \mathrm{D}^b(X \times Y) \to \mathbf{ExFun}(\mathrm{D}^b(X), \mathrm{D}^b(Y)),$$

dove la categoria di arrivo è quella dei funtori esatti (tra categorie triangolate) da $\mathrm{D}^b(X)$ a $\mathrm{D}^b(Y)$.

Si illustreranno alcuni risultati, ottenuti in collaborazione con Paolo Stellari, relativi alle proprietà di tale funtore, considerando in particolare le seguenti domande.

(1) $\mathbf{ExFun}(\mathrm{D}^b(X), \mathrm{D}^b(Y))$ ammette una struttura triangolata tale che $\Phi_{-}^{X \to Y}$ sia esatto?
(2) $\Phi_{-}^{X \to Y}$ è fedele?
(3) $\Phi_{-}^{X \to Y}$ è pieno?
(4) $\Phi_{-}^{X \to Y}$ è essenzialmente iniettivo (cioè, il nucleo di un funtore di Fourier–Mukai è unico a meno di isomorfismo)?
(5) $\Phi_{-}^{X \to Y}$ è essenzialmente suriettivo (cioè, ogni funtore esatto è di Fourier–Mukai)?

La risposta a tutte queste domande è sì se X o Y è un punto, perché in quel caso $\Phi_{-}^{X \to Y}$ è un'equivalenza. Assumendo invece $\dim(X), \dim(Y) > 0$, si sono trovate le seguenti parziali risposte a tutte le domande tranne che all'ultima (certamente la più interessante ma apparentemente anche la più difficile).

(1) No, se X o Y è $\mathbb{P}^1$.
(2) No, se X o Y è una curva (questo generalizza un risultato di Căldăraru nel caso $X = Y$ curva ellittica).
(3) No, se X o Y è una curva.
(4) Sì, se X o Y è $\mathbb{P}^1$; no, se $X = Y$ è una curva ellittica.

L'ultimo è sicuramente il risultato più importante: esistono dunque oggetti $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ in $\mathrm{D}^b(X \times Y)$ tali che $\Phi_{\mathcal{E}_1} \cong \Phi_{\mathcal{E}_2}$ ma $\mathcal{E}_1 \ncong \mathcal{E}_2$. D'altra parte si è anche dimostrato che i gruppi di coomologia del nucleo sono univocamente determinati (a meno di isomorfismo) dal funtore, cioè $\Phi_{\mathcal{E}_1} \cong \Phi_{\mathcal{E}_2}$ implica $H^i(\mathcal{E}_1) \cong H^i(\mathcal{E}_2)$ per ogni intero i.

Cinzia Casagrande: Un nuovo invariante delle varietà di Fano

Cinzia Casagrande
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
email: `cinzia.casagrande@unito.it`

Sunto. Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Dato un divisore primo $D \subset X$, consideriamo l'applicazione di restrizione

$$r_D \colon H^2(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(D, \mathbb{R}).$$

In generale r_D non è né iniettiva né suriettiva; d'altronde r_D non può essere l'applicazione nulla, perché se H è un divisore ampio su X, la restrizione $H_{|D}$ è non banale.

Definiamo il seguente invariante di X:

$$c_X := \max\{\dim \ker r_D \mid D \subset X \text{ divisore primo}\}.$$

Abbiamo $c_X \in \{0, \dots, b_2(X) - 1\}$ e $c_X \geq b_2(X) - b_2(D)$ per ogni divisore primo $D \subset X$ (dove b_2 è il secondo numero di Betti).

L'invariante c_X è significativo quando X è una *varietà di Fano*, cioè quando il divisore anticanonico $-K_X$ è ampio. Infatti vale il seguente risultato, mostrato in [1].

Teorema. *Se X è una varietà di Fano, allora $c_X \leq 8$.*

Inoltre, se $c_X \geq 4$, allora $X \cong S \times Y$, dove S è una superficie di Del Pezzo con $b_2(S) = c_X + 1$, e Y è una varietà di Fano con $c_Y \leq c_X$.

Infine, se $c_X = 3$, allora esiste un morfismo suriettivo, piatto e a fibre connesse $X \to Y$, dove Y è una varietà di Fano liscia con $\dim Y = \dim X - 2$, $b_2(Y) = b_2(X) - 4$ e $c_Y \leq 3$.

Consideriamo ora una varietà di Fano X di dimensione 4. Dato che X ha un numero finito di possibili tipi topologici, $b_2(X)$ è limitato, tuttavia non se ne conosce il massimo valore. Se X è un prodotto di superfici di Del Pezzo, abbiamo $b_2(X) \leq 18$, mentre tutti gli esempi noti che non siano prodotti di superfici hanno $b_2 \leq 6$. Utilizzando il risultato precedente, si mostra che se $c_X \geq 2$ si ha $b_2(X) \leq 18$.

Bibliografia

[1] C. Casagrande: "On the Picard number of divisors in Fano manifolds", preprint arxiv:0905.3239v3, 2009.

Luca Chiantini: Metodi geometrici per lo studio della rappresentazione di tensori e polinomi

Luca Chiantini
Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Università di Siena
email: `chiantini@unisi.it`

Sunto. Si presentano e analizzano alcuni contributi che lo studio geometrico delle varietà secanti proiettive sta fornendo, di recente, nella teoria della decomposizione di tensori e nella teoria delle rappresentazioni di polinomi.

Bibliografia

[1] H. Abo, G. Ottaviani and C. Peterson. Induction for secant varieties of Segre varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(2) (2009) 767–792.

[2] C. Bocci and L. Chiantini. On the identifiability of binary Segre products. *J. Alg. Geom.*, in corso di stampa.

[3] E. Carlini, L. Chiantini, and A.V. Geramita. Complete intersections on general hypersurfaces. *Michigan Math. J.* 57 (2008), 121–136.

[4] L. Chiantini and C. Ciliberto. Weakly defective varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(1) (2002) 151–178.

[5] L. Chiantini and C. Ciliberto. On the k-th secant order of a projective variety. *J. London Math. Soc.*, 73(2) (2006) 436–454.

[6] L. Chiantini, D. Faenzi. Rank 2 arithmetically Cohen-Macaulay bundles on a general quintic surface. *Math. Nach.* 282 (2009), 1691–1708.

[7] L. Chiantini and J. Migliore. Determinantal representation and subschemes of general plane curves. *arXiv:1012.3396*.

[8] L. Chiantini and G. Ottaviani. On generic identifiability of 3-tensors of small rank. *arXiv:1103.2696*.

[9] N. Eriksson, K. Ranestad, B. Sturmfels and S. Sullivant. Phylogenetic Algebraic Geometry. *Proceedings of the conference 'Varieties with Unexpected Properties', Siena, 2004.* Walter de Gruyter (2005) 177–197.

[10] F. Zak. Tangents and secants of varieties. *Transl Math. Monograph*, 127 (1993).

Ciro Ciliberto: Rigate ed iperbolicità

Ciro Ciliberto
Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
email: cilibert@axp.mat.uniroma2.it

Sunto. In questa comunicazione esporrò alcuni risultati in collaborazione con M. Zaidenberg su problemi di iperbolicità relativi a superficie generali di $\mathbb{P}^3$. La tecnica da noi usata per studiare famiglie di curve di genere basso su dette superficie, consiste nel degenerarle a opportune superficie rigate analizzando poi i limiti delle curve in questione.

Pietro De Poi: Apolarità per curve sottocanoniche

Pietro De Poi[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studî di Udine
email: `pietro.depoi@uniud.it`

Francesco Zucconi
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studî di Udine

Sunto. Dato $S := \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_N]$, sia $T := \mathbb{C}[\partial_0, \ldots, \partial_N]$ l'algebra delle derivate parziali di S; ricordiamo che il Lemma di Macaulay (cfr. [1]) afferma che un'algebra graduata Artiniana di Gorenstein di dimensione di socle 1 e grado $s+2$ è isomorfa a $\frac{T}{F^\perp}$, dove $F \in S$ è una forma di grado $s+2$ e $F^\perp := \{D \in T \mid D(F) = 0\}$. Un modo per ottenere algebre di questo tipo è il seguente: data una curva $C \subset \check{\mathbb{P}}^N := \mathrm{Proj}(T)$ proiettivamente normale ed s-sottocanonica, allora $\frac{S_C}{(\eta_1, \eta_2)}$, dove S_C è l'anello delle coordinate omogeneo di C ed $\eta_1, \eta_2 \in T_1$ sono due forme lineari generali, è una delle algebre cercate. Grazie al Lemma di Macaulay, a tale algebra risulta associata una forma F_{η_1,η_2} di grado $s+2$ in un anello di polinomi ad $N-1$ indeterminate; rimane così definita una applicazione razionale $\alpha_C \colon \mathrm{Gr}(N-2, N) \dashrightarrow H_{N-2,s}$, dove $H_{N-2,s+2}$ è lo spazio delle forme di grado $s+2$ su $\mathbb{P}^{N-2}$ a meno dell'azione di $\mathbb{P}\mathrm{Gl}(N-2, \mathbb{C})$. Un primo risultato ottenuto è il seguente

Teorema 14 ([2]). *Una curva canonica C è trigonale o isomorfa ad una quintica piana liscia se e solo se F_{η_1,η_2} è una cubica di Fermat.*

Tale risultato è stato ulteriormente esteso, ottenendo nel contempo una generalizzazione a curve sottocanoniche del classico Teorema di Enriques-Petri:

Teorema 15 ([3]). *Sia $C \subset \check{\mathbb{P}}^N$ una curva s-sottocanonica ($s \geq 1$) proiettivamente normale con $N \geq 4$; allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

(1) *o C è $(s+2)$-gonale, o $C \cong C' \subset \mathbb{P}^2$, con $\deg(C') = 2s+3$;*
(2) *o C è contenuta in una superficie rigata razionale normale liscia S_{a_1,a_2} o, se C è isomorfa a C', è contenuta nella superficie di Veronese di $\check{\mathbb{P}}^5$;*
(3) *per ogni coppia generale $\eta_1, \eta_2 \in H^0(C, \mathcal{O}_C(1))$, la corrispondente forma apolare $F_{\eta_1,\eta_2} \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{a_1+a_2-1}]$ è una forma di Fermat di grado $s+2$.*

Verranno poi discussi successivi sviluppi per varietà sottocanoniche.

Bibliografia

[1] Francis S. Macaulay, *The algebraic theory of modular systems*, Reprint dell'orig. del 1916. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[2] Pietro De Poi e Francesco Zucconi, *Gonality, apolarity and hypercubics*, Preprint `arXiv:0802.0705v3 [math.AG]`, apparirà in Bull. Lond. Math. Soc.

[3] Pietro De Poi e Francesco Zucconi, *Fermat hypersurfaces and subcanonical curves*, Preprint `arXiv:0908.0522v2 [math.AG]`, apparirà in Internat. J. Math.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN "Geometria delle varietà algebriche e dei loro spazi di moduli"

Lorenzo Di Biagio: Luoghi base asintotici per varietà singolari

Salvatore Cacciola
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi "Roma Tre"

Lorenzo Di Biagio
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi "Roma Tre"
email: dibiagio@mat.uniroma3.it

Sunto. Nell'ambito della geometria algebrica birazionale lo studio dei comportamenti asintotici delle serie lineari riveste un ruolo essenziale e non a caso, nell'ultimo decennio, molti progressi sono stati fatti nell'analisi di invarianti asintotici associati ai luoghi base di sistemi lineari. In particolare, per D divisore big, L. Ein *et al.* hanno definito, indagandone le proprietà, $v(\|D\|)$, l'ordine di annullamento asintotico lungo una valutazione discreta geometrica v, e i luoghi base stabili aumentato e diminuito associati a D, concetti che permettono di superare alcune patologie che si presentano nell'uso del più semplice luogo base stabile $\mathbb{B}(D)$.

In questo lavoro, in collaborazione con il dott. S. Cacciola, abbiamo studiato le relazioni che intercorrono tra due di questi invarianti asintotici, estendendo risultati già noti al caso di varietà normali con determinate singolarità e al caso di divisori pseudoeffettivi non necessariamente big.

Più nello specifico:

Definizione. Sia D un $\mathbb{R}$-divisore big su X varietà proiettiva complessa normale. Il *luogo base stabile diminuito* di D è $\mathbb{B}_-(D) := \bigcup_{\substack{A\ \mathbb{R}\text{-divisore}\\ A\ \text{ampio}}} \mathbb{B}(D+A)$. Il *luogo non nef* di D è $\mathrm{NNef}(D) := \bigcup\{c_X(v), v(\|D\|) > 0\}$, dove con $c_X(v)$ si indica il centro della valutazione discreta geometrica v.

In generale $\mathrm{NNef}(D) \subseteq \mathbb{B}_-(D)$ e congetturalmente vale l'uguaglianza. L'uguaglianza è stata dimostrata da L. Ein *et al.* quando X è liscia e da S. Boucksom *et al.* quando (X, Δ) è una coppia KLT effettiva e $D = K_X + \Delta$.

Utilizzando tecniche di ideali moltiplicatori asintotici, noi dimostriamo i seguenti:

Teorema. *Sia (X, Δ) una coppia KLT effettiva e sia D un $\mathbb{R}$-divisore di Cartier pseudoeffettivo. Allora $\mathbb{B}_-(D) = \mathrm{NNef}(D)$.*

Teorema. *Sia (X, Δ) una coppia KLT effettiva e sia D un divisore di Cartier. Allora D è nef e abbondante se e solo se $\mathcal{J}((X, \Delta); \|pD\|) = \mathcal{O}_X$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.*

Bibliografia

[1] S. Boucksom et al. Uniruledness of stable base loci of adjoint linear systems with and without Mori theory. *arXiv:math/0902.1142v1*, 2009.

[2] L. Ein et al. Asymptotic invariants of base loci. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(6):1701–1734, 2006.

[3] F. Russo. A characterization of nef and good divisors by asymptotic multiplier ideals. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 16:943–951, 2009.

Roberta Di Gennaro: Liaison e Condizioni di Cohen-Macaulaycità

Roberta Di Gennaro
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"Università degli Studi di Napoli "Federico II"
email: digennar@unina.it

Sunto. In questa comunicazione presentiamo risultati ottenuti in collaborazione con Francesca Cioffi (cf. [1], [2]). Applicando tecniche di liaison, studiamo curve proiettive C (precisamente sottoschemi lCM equidimensionali di dimensione 1) "vicine" ad un'intersezione completa Y che le contenga; la "distanza" di C da Y è misurata in termini della differenza $reg(Y) - reg(C)$ tra le regolarità di Castelnuovo-Mumford o della differenza $deg(Y) - deg(C)$ tra i gradi.

In [3] è provato che, se C è una curva in $\mathbb{P}^3$ tale che $reg(C) = reg(Y) - 1 > \rho_C + 1$ (dove ρ_C è la regolarità della funzione di Hilbert di C), allora la curva C' legata a C mediante Y è una curva piana, quindi aCM. Partendo da questo risultato, studiamo curve $C \subset \mathbb{P}^n_K$ per ogni $n \geq 3$ tali che $reg(C) > \rho_C + 1$, in termini dell'intero non-negativo $reg(Y) - reg(C)$ che risulta essere un maggiorante del grado iniziale dell'ideale di C'; proviamo l'equivalenza dell'essere C' degenere con la condizione $reg(Y) - reg(C) = 1$.

Parallelamente, in [4] Davis misura la "distanza" di C da Y in temini di $deg(Y) - deg(C)$ provando che una curva dello spazio $\mathbb{P}^3$ liscia ed integra con la stessa postulazione di una curva aCM è essa stessa aCM se $deg(Y) - deg(C) \leq 5$. Estendiamo il risultato di Davis a curve C dello spazio $\mathbb{P}^3$ con $reg(C) > \rho_C + 1$ e $deg(Y) - deg(C) \leq 5$. Con opportuni esempi mostriamo che questo risultato non può essere migliorato in termini di gradi, ma lo estendiamo a sottoschemi non-degeneri lCM equidimensionali X di codimensione due con la stessa postulazione di un sottoschema aCM tali che $deg(Y) - deg(X) \leq 5$, dove Y è un'intersezione completa contenente X.

Aumentando la codimensione il risultato si indebolisce, ad esempio per curve C in $\mathbb{P}^n_K$ tali che $reg(C) > \rho_C + 1$ il risultato vale solo per $deg(Y) - deg(C) \leq 3$.

Bibliografia

[1] Francesca Cioffi, Roberta Di Gennaro, *Liaison and Cohen-Macaulayness Conditions* Collect. Math. **62**, no. 2, 173-186 (2011)

[2] Francesca Cioffi, Roberta Di Gennaro, *Two codimension projective schemes close to complete intersections*, in preparazione.

[3] F. Cioffi, M. G. Marinari, and L. Ramella, *Regularity bounds by minimal generators and Hilbert function*, Collect. Math. **60** (2009), no. 1, 89–100.

[4] Edward D. Davis, *Curves which are close to complete intersections*, The Curves Seminar at Queen's, Vol. VII, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., vol. 85, 1990, pp. Exp. No. F, 14.

Daniele Faenzi: Teorema di Torelli per configurazioni di iperpiani

Daniele Faenzi
Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Pau
email: daniele.faenzi@univ-pau.fr

Daniel Matei
Institute of Mathematics of the Romanian Academy I.M.A.R.

Jean Vallès
Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Pau

Sunto. Una configurazione di iperpiani è una collezione di ℓ iperpiani distinti $H_1, \ldots, H_\ell$ di $\mathbb{P}^n$, in altre parole il dato di ℓ punti $Z = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$ dello spazio duale $\check{\mathbb{P}}^n$. Fra gli invarianti di una configurazione di iperpiani, sono di particolare interesse il fascio Ω_Z delle forme differenziali con poli logaritmici lungo il divisore $D_Z = H_1 \cup \cdots \cup H_\ell$, introdotto da Deligne e Saito, e il suo raffinamento $\tilde{\Omega}_Z$ introdotto da Dolgachev.

Mostreremo come, sotto certe condizioni, la configurazione sia determinata dal fascio $\tilde{\Omega}_Z$, ovvero come da $\tilde{\Omega}_Z$ si possa ricostruire l'insieme Z, nel qual caso Z è detto *di Torelli*. Tale risultato è il principale contributo contenuto nel lavoro [2]. Questo generalizza ai casi di configurazioni a incroci non normali un noto teorema di Dolgachev-Kapranov, si veda [1].

Per formulare il risultato in maniera precisa, introduciamo le varietà di *Kronecker-Weierstrass* (KW). Una varietà di KW di tipo (d, s), con $d > 0$ è una sottovarietà Y di $\check{\mathbb{P}}^n$ della forma $Y = C \cup L_1 \cup \cdots \cup L_s$, ove C è una curva razionale normale di grado d in $\mathbb{P}^d \subset \check{\mathbb{P}}^n$, e dove gli L_i sono sottospazi lineari 2 a 2 disgiunti $\mathbb{P}^{n_i} \subset \check{\mathbb{P}}^n$, con $d + \sum n_i = n$, che incontrano ciascuno $\mathbb{P}^d$ in un solo punto appartenente a C. Inoltre Y è KW di tipo $(0, s)$ se $Y = L_1 \cup \cdots \cup L_s$, con Y non degenere, e gli L_i sono spazi lineari che si incontrano tutti in un solo punto, detto punto distinto di Y.

Teorema. *Sia Z un insieme di ℓ punti di $\check{\mathbb{P}}^n$, non contenuto in un iperpiano. Allora Z non è di Torelli se e solo se Z è contenuto in una varietà di KW di tipo (d, s) con $d > 0$, o con $d = 0$, e il punto distinto di Y non appartiene a Z.*

La dimostrazione è basata su una definizione alla *Fourier-Mukai* di $\tilde{\Omega}_Z$, che permette di studiare gli iperpiani instabili di $\tilde{\Omega}_Z$, fra cui si trovano $H_1 \ldots, H_\ell$, e di analizzare le condizioni geometriche che assicurano che essi siano gli unici iperpiani con tale proprietà, nel qual caso Z è di Torelli.

Bibliografia

[1] Igor Dolgachev and Mikhail M. Kapranov, *Arrangements of hyperplanes and vector bundles on* $\mathbf{P}^n$, Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 633–664.

[2] Daniele Faenzi, Daniel Matei, and Jean Vallès, *Hyperplane arrangements of Torelli type*, ArXiv e-prints (2010).

Claudio Fontanari: Un ricoprimento aperto affine di $\mathcal{M}_g$ per $g \leq 5$

Claudio Fontanari[1]
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento
email: `fontanar@science.unitn.it`

Stefano Pascolutti
Dipartimento di Matematica, Università di Roma La Sapienza

Sunto. Si dimostra che lo spazio dei moduli $\mathcal{M}_g$ delle curve lisce di genere g è unione di $g-1$ aperti affini per ogni g con $2 \leq g \leq 5$, come predetto da una famosa congettura di Eduard Looijenga.

Bibliografia

[1] C. Fontanari e S. Pascolutti: "An affine open covering of $\mathcal{M}_g$ for $g \leq 5$", arXiv:1103.2646 (2011), accettato per la pubblicazione su Geometriae Dedicata.

[1]Lavoro svolto nell'ambito di MIUR Cofin 2008 - Geometria delle varietà algebriche e dei loro spazi di moduli

Marco Franciosi: Il teorema di Clifford per curve semistabili

Marco Franciosi[1]
Dipartimento di Matematica Applicata "U.Dini", Università di Pisa
email: `franciosi@dma.unipi.it`

Sunto. In questo seminario verrà descritto lo studio compiuto in collaborazione con E. Tenni riguardante una generalizzazione del Teorema di Clifford e le sue applicazioni al caso di curve Gorenstein, con particolare riguardo alle curve semistabili.

Il nostro approccio è stato quello di stimare lo spazio delle sezioni del fascio canonico che si annullano su uno schema 0-dimensionale S.

Per quanto riguarda le curve ridotte il risultato è il seguente

Teorema. *Sia C una curva Gorenstein ridotta e 4-connessa. Dato un fascio invertibile L e uno schema 0-dimensionale S su C tali che*

$$0 \leq \deg[(\mathcal{I}_S L)_{|B}] \leq \deg K_{C|B} \qquad \textit{per ogni sottocurva } B \subset C$$

allora

$$h^0(C, \mathcal{I}_S L) \leq \frac{\deg \mathcal{I}_S L}{2} + 1.$$

Inoltre se vale l'uguaglianza si ha $\mathcal{I}_S L \cong \mathcal{I}_T \omega_C$ dove T è uno schema 0-dimensionale tale che

- *$T = 0$, K_C; oppure*
- *C è onestamente iperellittica e T è un multiplo di una g^1_2.*

Si forniscono inoltre esempi di curve non 4-connesse in cui il risultato non vale e applicazioni allo studio delle immersioni canoniche di curve 4-connesse.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto MIUR PRIN 2008 "Geometria delle varietà algebriche e dei loro spazi di moduli".

Paola Frediani: Mappa di Prym e mappe gaussiane

Paola Frediani
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia
email: paola.frediani@unipv.it

Sunto. In questa comunicazione esporrò alcuni risultati ottenuti in collaborazione con Elisabetta Colombo sul rango della seconda mappa gaussiana per fibrati in rette Prym-canonici su una curva generale in relazione alla seconda forma fondamentale della mappa di Prym $Pr_g : \mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$.

Ricordiamo che $\mathcal{R}_g$ è lo spazio dei moduli che parametrizza classi di isomorfismo di coppie $[C, A]$, dove $[C] \in \mathcal{M}_g$ è una curva liscia e $A \in Pic^0(C)[2]$ è un punto di torsione di ordine 2 e $\mathcal{A}_{g-1}$ è lo spazio dei moduli delle varietà abeliane principalmente polarizzate di dimensione $g-1$ che è dotato della metrica di Siegel e consideriamo la metrica indotta su $\mathcal{R}_g$ attraverso la mappa di Prym.

Dimostriamo innanzitutto che la seconda forma fondamentale della mappa di Prym nel punto $[C, A]$ è un sollevamento della seconda mappa gaussiana μ_A del fibrato $K_C \otimes A$, analogamente a quello che accade per la seconda forma fondamentale della mappa dei periodi $\mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g$ e la seconda mappa gaussiana del sistema lineare canonico. Questo ci permette di studiare proprietà di curvatura di $\mathcal{R}_g$ munito della metrica di Siegel in analogia a quanto fatto per la curvatura di $\mathcal{M}_g$.

Studiamo poi il rango della mappa gaussiana μ_A e mostriamo con tecniche di degenerazione che per il punto generico in $\mathcal{R}_g$ con $g \geq 20$, μ_A è suriettiva, generalizzando così risultati analoghi sulla suriettività della seconda mappa gaussiana μ_2 del sistema lineare canonico per la curva generale in $\mathcal{M}_g$ con $g \geq 18$.

Infatti, in collaborazione con Elisabetta Colombo abbiamo mostrato la suriettività di μ_2 per curve generali di genere alto usando curve su superficie K3, mentre la suriettività per la curva generale di genere ≥ 18 è stata poi mostrata da Calabri, Ciliberto e Miranda usando tecniche di degenerazione a curve binarie, che generalizziamo al caso di $\mathcal{R}_g$.

Concettina Galati: Su famiglie di curve singolari su superfici K3

Concettina Galati
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
email: galati@mat.unical.it

Sunto. Sia S una superficie proiettiva liscia complessa e $|D|$ un sistema lineare di Bertini su S. Si chiama varietà di Severi delle curve δ-nodali in $|D|$, la sottovarietà $V^S_{D,\delta} \subset |D| \simeq \mathbb{P}^N$ di $|D|$ definita come la chiusura, nella topologia di Zariski, del luogo delle curve irriducibili, aventi δ nodi come singolarità. Lo studio delle varietà di Severi è fra gli argomenti più classici in geometria algebrica, introdotto, appunto, da Severi agli inizi del secolo scorso, nel caso in cui $S = \mathbb{P}^2$ è il piano proiettivo complesso. Le varietà di Severi di curve piane sono oggetti ben noti. Sono non vuote, per ogni $\delta \leq (n-1)(n-2)/2$, irriducibili e della dimensione aspettata. Il problema dell'esistenza e della dimensione è stato risolto con successo dallo stesso Severi, mentre il problema dell'irriducibilità, rimasto a lungo aperto, è stato risolto solo negli anni ottanta da Harris. Ad Harris e Caporaso sono anche dovuta una formula induttiva per il grado delle varietà di Severi di curve piane. Lo studio di famiglie di curve piane nodali ha dato vita ad una lunga serie di lavori che non possiamo citare qui. I risultati su varietà di Severi si basano spesso su tecniche degenerative alla base delle quali vi è lo studio del bordo di queste varietà, ovvero di sottovarietà di $V^S_{D,\delta}$ il cui generico elemento corrisponde ad una curva con singolarità peggiori di nodi. Durante il nostro seminario, soffermeremo la nostra attenzione al caso in cui S è una generica superficie $K3$ liscia. In tal caso, le varietà di Severi di curve nodali sono sempre non vuote di dimensione aspettata. In particolare, l'esistenza di curve nodali su superfici $K3$ è stata dimostrata recentemente da Xi Chen. Lo studio del bordo di $V^S_{D,\delta}$, per S superficie $K3$, rimane invece un problema aperto, oggetto del nostro seminario. In particolare, esporremo alcuni risultati, ottenuti in collaborazione con A. L. Knutsen, sull'esistenza di curve con nodi e cuspidi su superfici $K3$.

Alice Garbagnati: Automorfismi di superfici K3

Alice Garbagnati
Dipartimento di Matematica, Università Statale degli Studi di Milano
email: alice.garbagnati@unimi.it

Sunto. Le superfici K3 sono superfici complesse con canonico e irregolarità banali. A priori il gruppo di automorfismi di una superificie K3 può essere banale, finito o infinito. Anche per questo, invece che affrontare il problema di determinare l'intero gruppo di automorfismi di una data superficie, sembra piú interessante determinare le famiglie di superfici K3 che ammettano determinati automorfismi. Spesso richiedere che una superficie K3 ammetta un certo gruppo G di automorfismi implica automaticamente la presenza di un gruppo più grande, H, di automorfismi.

Data una superficie K3 X, $H^{2,0}(X) \simeq \mathbb{C}$ e quindi $H^{2,0}(X) = \langle \omega_X \rangle$ per un ω_X fissato in $H^{2,0}(X)$. Sia α un automorfismo di X di ordine m, allora $\alpha^*(\omega_X) = \lambda_\alpha \omega_X$, $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\lambda^m = 1$. Diciamo che α è simplettico se $\lambda_\alpha = 1$ e che è puramente non simplettico se λ_α è una radice primitiva m-esima dell'unità.

Vale allora: una superficie K3 ammette $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ come gruppo di automorfismi simplettici se e solo se ammette il gruppo diedrale di ordine 10, $\mathcal{D}_5$, come gruppo di automorfismi simplettici (cf. [G1]). Tale risultato può inoltre essere generalizzato: esiste un criterio per riconoscere fra le coppie (G, H) di gruppi di automorfismi simplettici tali che $G \subset H$ quelle per cui una K3 ammette G come gruppo di automorfismi simplettici se e solo se ammette H come gruppo di automorfismi simplettici (cf. [G1]). Espliciti esempi di tale fenomeno sono presentati in [G2].

Gli automorfismi puramente non simplettici di ordine un primo p possono essere classificati mediante invarianti che descrivono il loro luogo fisso. In [GS] si mostra che una K3 che ammette un automorfismo non simplettico di ordine un primo p associato a certi invarianti, ne ammette anche uno simplettico dello stesso ordine. Analogamente si hanno risultati che coinvolgono solo automorfismi puramente non simplettici: una K3 che ammette un automorfismo non simplettico di ordine un primo $p > 2$ associato a certi invarianti, ne ammette anche uno puramente non simplettico di ordine $2p$ (se $p = 3$ questo è un risultato dovuto a J. Dillies, il caso $p > 3$ è trattato in [GS]).

Bibliografia

G1 A. Garbagnati: "The dihedral group $\mathcal{D}_5$ as group of symplectic automorphisms on K3 surfaces", Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), no. 6, 2045–2055.

G2 A. Garbagnati: "Elliptic K3 surfaces with abelian and dihedral groups of symplectic automorphisms", arXiv:0904.1519.

GS A. Garbagnati, A. Sarti: "On symplectic and non-symplectic automorhpisms on K3 surface", arXiv:1006.1604.

Margherita Guida: Configurazioni di rette di $\mathbb{P}^n_K$: generatori e proprietà di Cohen-Macaulay

Margherita Guida
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"Università degli Studi di Napoli "Federico II"
email: maguida@unina.it

Sunto. In questa comunicazione si presentano dei risultati su insiemi di rette dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_K$ (su un campo K algebricamente chiuso), che sono intersezione di iperpiani appartenenti ad una fissata partizione.

Estendendo le tecniche introdotte in [1], per tali configurazioni di rette si calcolano i generatori e si prova che questi sono il prodotto di forme lineari definenti gli iperpiani. Inoltre, si dimostra la proprietà di Cohen-Macaulay.

Bibliografia

[1] Guida, M.; Orecchia, F. Algebraic properties of grids of projective lines. J. Pure and Appl. Algebra **2007**, *208 (2)*, 603–615.

Valeria Ornella Marcucci: Sul genere di una curva in una varietà Jacobiana

Valeria Ornella Marcucci[1]
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia
email: valeria.marcucci@unipv.it

Sunto. In questa comunicazione presenteremo un risultato riguardante il possibile genere di una curva in una Jacobiana $J(C)$. Assumeremo che C sia molto generale, cioè che il punto $[C]$ in M_g, lo spazio dei moduli delle curve di genere g, sia al di fuori di un'unione numerabile di sottovarietà analitiche proprie. Sotto questa ipotesi, il minimo genere geometrico di una curva su $J(C)$ è pari a g ed è noto che tutte le curve di genere g sono isomorfe a C [1].

Il nostro risultato è il seguente:

Teorema. *Siano C e D due curve complesse, proiettive, lisce, e*

$$\varphi\colon D \to J(C)$$

una mappa non costante. Si assuma C molto generale di genere $g \geq 4$.

(1) *Vale*

$$g(D) \geq 2g-2, \qquad \textit{oppure} \qquad g(D) = g.$$

(2) *Inoltre, quando $g = 4$ oppure $g = 5$, si ha anche*

$$g(D) \neq 2g-2.$$

La prima parte del teorema dà una risposta affermativa a una congettura enunciata in [3], dove gli autori dimostrano un analogo risultato per le varietà di Prym. La nostra dimostrazione sfrutta l'analisi del caso degenere, quando $J(C)$ è la Jacobiana di una curva nodale, e si basa su un risultato di rigidità [4] e sullo studio dell'azione di monodromia sul primo gruppo di coomologia intera delle due curve.

La dimostrazione della seconda parte è legata allo studio delle deformazioni di una curva in una varietà abeliana e a una proprietà delle varietà di Prym di rivestimenti ramificati [2].

Bibliografia

[1] F. Bardelli and G. P. Pirola. Curves of genus g lying on a g-dimensional Jacobian variety. *Invent. Math.*, 95(2):263–276, 1989.

[2] V. Marcucci and G. P. Pirola. Generic Torelli theorem for Prym varieties of ramified coverings. Preprint, 2010. arXiv:1010.4483v1.

[3] J. C. Naranjo and G. P. Pirola. On the genus of curves in the generic Prym variety. *Indag. Math. (N.S.)*, 5(1):101–105, 1994.

[4] G. P. Pirola. On a conjecture of Xiao. *J. Reine Angew. Math.*, 431:75–89, 1992.

[1]Ricerca parzialmente supportata da 1) FAR 2010 (PV) *"Varietà algebriche, calcolo algebrico, grafi orientati e topologici"*; 2) INdAM (GNSAGA)

Carla Novelli: Varietà proiettive che contengono uno spazio lineare con fibrato normale nef

Carla Novelli
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
email: novelli@math.unipd.it

Gianluca Occhetta
Dipartimento di Matematica, Università di Trento

Sunto. Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una varietà proiettiva complessa liscia di dimensione n che contiene uno spazio lineare Λ di dimensione s. Sia $\mathcal{N} := N_{\Lambda/X}$ il fibrato normale di Λ in X. È noto che, se $\mathcal{N}$ è ampio, allora X è uno spazio lineare; lo stesso risultato vale se $\mathcal{N}$ è nef, $n < 2s$ e il numero di Picard di X è uno. Inoltre, è noto che se $\mathcal{N}$ è banale e $n \leq 2s$, allora X è uno scroll classico. Infine, se $n = 2s$, allora X è uno scroll classico, o un'iperquadrica, o la Grassmanniana $\mathbb{G}(1, s+1)$. Nel corso del seminario considereremo il caso successivo, *i.e.* $n = 2s+1$, dimostrando il seguente

Teorema. *Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una varietà liscia di dimensione $n = 2s+1$ che contiene uno spazio lineare Λ di dimensione s tale che $\mathcal{N}$ è nef.*

Se il numero di Picard di X è uno, allora X è una delle varietà seguenti:

(1) *uno spazio lineare $\mathbb{P}^{2s+1}$;*
(2) *un'iperquadrica liscia $\mathbb{Q}^{2s+1}$;*
(3) *un 3-fold cubico in $\mathbb{P}^4$;*
(4) *un'intersezione completa di due iperquadriche in $\mathbb{P}^5$;*
(5) *l'intersezione di $\mathbb{G}(1,4) \subset \mathbb{P}^9$ con tre iperpiani generici;*
(6) *una sezione iperpiana di $\mathbb{G}(1, s+2)$.*

Se il numero di Picard di X è maggiore di uno, allora esiste una contrazione elementare $\varphi\colon X \to Y$ che contrae Λ e vale uno dei seguenti:

(7) *$\varphi\colon X \to Y$ è uno scroll;*
(8) *Y è una curva liscia e la fibra generica di φ è*
  (8a) *la Grassmanniana $\mathbb{G}(1, s+1)$;*
  (8b) *un'iperquadrica liscia $\mathbb{Q}^{2s}$;*
  (8c) *un prodotto di spazi proiettivi $\mathbb{P}^s \times \mathbb{P}^s$.*

Gianluca Occhetta: Fibrati vettoriali uniformi su varietà di Fano

Gianluca Occhetta
Dipartimento di Matematica, Università di Trento
email: gianluca.occhetta@unitn.it

Sunto. È ben noto che ogni fibrato vettoriale sulla retta proiettiva si decompone come somma di fibrati lineari, ed è quindi determinato a meno di isomorfismo da una lista di interi, chiamati *tipo di spezzamento* del fibrato.

Nello studio di fibrati vettoriali su spazi proiettivi è stato quindi naturale considerare la restrizione dei fibrati alle rette. Una classe di fibrati che è stata oggetto di particolare studio è quella dei fibrati *uniformi*, cioè quelli il cui tipo di spezzamento non dipende dalla retta. È stato dimostrato che un fibrato vettoriale uniforme $\mathcal{E}$ di rango r su $\mathbb{P}^n$ è decomponibile se $r < n$, e sono stati caratterizzati i casi $r = n, n+1$.

Risultati analoghi sono stati ottenuti per fibrati vettoriali su altre varietà coperte da rette, quali iperquadriche e Grassmanniane. Questi risultati sono basati sulla cosiddetta *costruzione standard*, che usa la famiglia universale delle rette sulla varietà per produrre un sottofibrato uniforme del fibrato iniziale, al fine di utilizzare un procedimento induttivo sul rango del fibrato.

Lo scopo della presente comunicazione è quello di illustrare un'interpretazione geometrica della costruzione standard in termini di particolari famiglie di curve razionali, che permette di ottenere un criterio di spezzamento per fibrati uniformi: più precisamente, data una varietà di Fano liscia X con numero di Picard uno e coperta da rette, parametrizzate da una famiglia $\mathcal{L}$ e dato un punto $x \in X$ si considera $\mathcal{L}_x$, la varietà che parametrizza le rette su X passanti per x. Il criterio di spezzamento è espresso in termini della coomologia di $\mathcal{L}_x$.

Teorema. *Sia X una varietà di Fano liscia con numero di Picard uno coperta da rette, sia r un intero positivo minore o uguale a* $\dim \mathcal{L}_x$. *Se* $\dim H^{2s}(\mathcal{L}_x, \mathbb{C}) = 1$ *per ogni $s \leq \lfloor r/2 \rfloor$ e ogni $x \in X$ allora i soli fibrati vettoriali uniformi di rango r su X sono somme dirette di fibrati lineari.*

Questo risultato è stato ottenuto in collaborazione con Roberto Muñoz e Luis E. Solá Conde ed è contenuto nel lavoro [1] a cui si rimanda per la sua dimostrazione, le sue generalizzazioni e applicazioni, come pure per una essenziale bibliografia sull'argomento.

Bibliografia

[1] R. Muñoz, G. Occhetta and Luis E. Solá Conde: "Uniform vector bundles on Fano manifolds and applications", J. Reine Angew. Math., in corso di stampa (2011).

Giorgio Ottaviani: Equazioni per tensori di rango limitato e varietà secanti

Giorgio Ottaviani
Dipartimento di Matematica, Università di Firenze
email: ottavian@math.unifi.it

Sunto. La varietà delle matrici (simmetriche o generali) di rango $\leq r$ è definita dai minori di ordine $r+1$. Si descrivono alcune estensioni di questo risultato a tensori con più di due componenti. Il lavoro è motivato da applicazioni al *Signal Processing* e ad altre aree. Geometricamente, questo corrisponde a trovare le equazioni delle varietà secanti alle varietà di Segre o di Veronese. Si descrive un procedimento generale per trovare una classe significativa di equazioni di varietà secanti, partendo da un fibrato vettoriale E e dalla sua presentazione.

Bibliografia

[1] H. Abo, G. Ottaviani, C. Peterson, Induction for secant varieties of Segre varieties, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009) 767-792

[2] M.V. Catalisano, A. Geramita, A. Gimigliano, On the ideals of Secant Varieties to certain rational varieties. Journal of Algebra 319, (2008), 1913-1931

[3] J.M. Landsberg, G. Ottaviani, Equations for secant varieties to Veronese varieties arXiv:1006.0180

[4] J.M. Landsberg, G. Ottaviani, Equations for secant varieties via vector bundles arXiv:1010.1825

Rita Pardini: Curve su superfici irregolari

Margarida Mendes Lopes
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa

Rita Pardini[1]
Dipartimento di Matematica "L. Tonelli", Università di Pisa
email: pardini@dm.unipi.it

Gian Pietro Pirola
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Sunto. Sia S una superficie complessa (minimale, liscia e proiettiva) di tipo generale che non ha "fasci irrazionali di genere > 1", cioè che non ammette morfismi a fibre connesse $S \to B$ con B curva di genere $b > 1$. Se S ha irregolarità $q(S) := h^0(\Omega^1_S) > 1$ e non ha fasci irregolari, l'applicazione di Albanese $a\colon S \to \mathrm{Alb}(S)$ ha fibra generica finita, cioè S ha dimensione di Albanese massima. Le superfici con queste proprietà sono ancora poco comprese.

Studiamo il problema dell'esistenza di curve di genere aritmetico "basso", cioè compreso tra q e $2q-2$, su tali superfici. Mostriamo che l'esistenza di una curva (divisore effettivo 1-connesso) di genere q con autointersezione positiva caratterizza i prodotti e i prodotti simmetrici. Più in generale, otteniamo restrizioni sull'autointersezione delle curve di genere basso, usando risultati di tipo Brill-Noether per curve irriducibili su superfici irregolari senza fasci irrazionali.

Bibliografia

[1] M. Mendes Lopes, R. Pardini and G.P. Pirola, *A characterization of the symmetric square of a curve*, International Mathematics Research Notices (2011). doi: 10.1093/imrn/rnr025 arXiv:1008.1790

[2] M. Mendes Lopes, R. Pardini, *The geography of irregular surfaces*, to appear in the M.S.R.I. volume "Current developments in algebraic geometry". arXiv:0909.5195

[1] Lavoro svolto nell'ambito di PRIN 2008 "Geometria delle varietà algebriche e dei loro spazi di moduli"

Roberto Pignatelli: Deformazioni di Burniat terziarie

Roberto Pignatelli
Dipartimento di Matematica, Università di Trento
email: `Roberto.Pignatelli@unitn.it`

Sunto. Nel 1966 P. Burniat ([2]) costruisce superfici di tipo generale di genere geometrico nullo come rivestimenti del piano. Tra esse sono particolarmente interessanti le superficie *terziarie*, quelle con $K_S^2 = 3$; la teoria delle deformazioni predice la loro deformabilità a superficie diverse, rimaste misteriose per oltre 50 anni.

Per costruirle, in [3], abbiamo utilizzato le *unprojections*; il risultato è il seguente.

Si consideri $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^4$ con coordinate t_{jk}, $j \in \{0 \dots 3\}$, $k \in \{0,1\}$, l'ipersuperficie $Z_1 := \{t_{01}t_{10}t_{20}t_{30} + t_{00}t_{11}t_{21}t_{31} = 0\}$ nel sistema lineare $|\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^4}(1,1,1,1)|$, e il gruppo $\tilde{G}$ (di ordine 16) di automorfismi di $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^4$ generato da

$jk =$	00	01	10	11	20	21	30	31
$A_1(t_{jk}) =$	t_{10}	$\sqrt{-1}\cdot t_{11}$	t_{00}	$\sqrt{-1}\cdot t_{01}$	t_{31}	$-\sqrt{-1}\cdot t_{30}$	t_{21}	$\sqrt{-1}\cdot t_{20}$
$A_2(t_{jk}) =$	t_{20}	$\sqrt{-1}\cdot t_{21}$	t_{31}	$\sqrt{-1}\cdot t_{30}$	t_{00}	$\sqrt{-1}\cdot t_{01}$	t_{11}	$-\sqrt{-1}\cdot t_{10}$
$A_3(t_{jk}) =$	t_{30}	$\sqrt{-1}\cdot t_{31}$	t_{21}	$-\sqrt{-1}\cdot t_{20}$	t_{11}	$\sqrt{-1}\cdot t_{10}$	t_{00}	$\sqrt{-1}\cdot t_{01}$

Teorema (Neves, Pignatelli). *Sia $Z_2 \in |\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^4}(2,2,2,2)|^{\tilde{G}}$ generica.*

Allora $\tilde{G}$ agisce liberamente su $Z_1 \cap Z_2$ e la proiezione sul quoziente $X := (Z_1 \cap Z_2)/\tilde{G}$ è il rivestimento universale del modello canonico di una superficie di tipo generale con $p_g(S) = 0$ e $K_S^2 = 3$.

Le superfici X ottenute formano una famiglia 4-dimensionale nello spazio dei moduli delle superfici di tipo generale contenenti le superfici di Burniat terziarie.

Indipendentemente Bauer e Catanese ([1]) hanno costruito un'altra famiglia di dimensione 4, contenente le Burniat terziarie, densa ma non chiusa in una componente irriducibile dello spazio dei moduli. Ne segue che la famiglia del Teorema vi è densa. Il possesso di un pencil è una proprietà chiusa per cui parrebbe plausibile che il rivestimento universale di ogni degenerazione si immerga in $(\mathbb{P}^1)^4$, da cui seguirebbe

Congettura. *La famiglia del Teorema 1 copre un'intera componente irriducibile dello spazio dei moduli delle superficie di tipo generale.*

Bibliografia

[1] I. Bauer, F. Catanese: 'Burniat surfaces III: deformations of automorphisms and extended Burniat surfaces", arXiv:1012.3770.

[2] P. Burniat: "Sur les surfaces de genre $P_{12} > 1$". Ann. Mat. Pura Appl. (4) **71** (1966), 1–24.

[3] J. Neves, R. Pignatelli: "Unprojection and deformations of tertiary Burniat surfaces", arXiv:1101.3160.

Paolo Stellari: Funtori di Fourier-Mukai: esistenza

Paolo Stellari
Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università degli Studi di Milano
email: paolo.stellari@unimi.it

Alberto Canonaco
Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università degli Studi di Pavia

Sunto. In un articolo del 1981, Mukai ha mostrato che, data una varietà abeliana A e la sua duale $\hat{A}$, il fibrato di Poincaré $\mathcal{P}$ induce un'equivalenza $\Phi_{\mathcal{P}}$ tra le categorie derivate $\mathrm{D}^b(A)$ e $\mathrm{D}^b(\hat{A})$. In particolare, per ogni $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^b(A)$, abbiamo

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) := p_*(\mathcal{P} \otimes q^*(\mathcal{F})),$$

dove p e q sono le proiezioni da $A \times \hat{A}$ su, rispettivamente, $\hat{A}$ e A e tutti i funtori sono derivati.

Più in generale, date due varietà proiettive lisce X e Y, un funtore esatto $\mathsf{F} : \mathrm{D}^b(X) \to \mathrm{D}^b(Y)$ è detto *di Fourier–Mukai* se esiste un isomorfismo

$$\mathsf{F} \cong \Phi_{\mathcal{E}}(-) := p_*(\mathcal{E} \otimes q^*(-)),$$

dove $\mathcal{E} \in \mathrm{D}^b(X \times Y)$, p e q sono le proiezioni e, come prima, tutti i funtori sono derivati. L'oggetto $\mathcal{E}$ è detto *nucleo di Fourier–Mukai*.

In questo seminario, dopo aver ricordato quali sono i contesti geometrici in cui tali funtori appaiono, ci occuperemo di mettere in evidenza due loro naturali applicazioni:

(1) Le loro azioni sui gruppi di coomologia singolare e di Hochschild (Căldăraru, Macrì–Stellari, Markarian e Orlov). Da questo segue la loro utilità per la descrizione dei gruppi di autoequivalenze.
(2) Il loro comportamento rispetto alle deformazioni (ad esempio Lowen–van den Bergh e Toda).

Ci occuperemo poi di studiare sotto quali iportesi un funtore esatto sia di Fourier–Mukai. Esporremo i risultati fondamentali di Orlov ed enunceremo i risultati più generali disponibili in questa direzione (lavoro in collaborazione con A. Canonaco). Come osservazione collegata a questo circolo di idee, mostreremo che, sotto naturali ipotesi, un funtore pieno esatto è anche fedele (e quindi di Fourier–Mukai). Quest'ultimo è un lavoro in collaborazione con A. Canonaco e D. Orlov.

Elisa Tenni: Il Teorema di Clifford per curve Gorenstein

Elisa Tenni[1]
Dipartimento di Matematica "L. Tonelli", Università di Pisa
email: `tenni@mail.dm.unipi.it`

Sunto. In questo seminario discuterò un lavoro in collaborazione con M. Franciosi riguardante una generalizzazione del Teorema di Clifford. Il risultato riguarda curve Gorenstein, ridotte o contenute in una superficie liscia, il cui canonico è ampio. Abbiamo verificato che vale una disuguaglianza di tipo Clifford per i fasci della forma $\mathcal{I}_S\omega_C$, dove $\mathcal{I}_S$ è l'ideale di un sottoschema 0-dimensionale S contenuto in un divisore canonico, sotto ipotesi generali riguardanti il sottoschema S o la curva stessa.

Più precisamente vale la disuguaglianza

$$h^0(C, \mathcal{I}_S\omega_C) \leq p_a(C) - \frac{\deg S}{2}$$

quando S è un divisore di Cartier, oppure quando il sistema lineare $|\mathcal{I}_S K_C| \subset |K_C|$ non ha come punti base singolarità di C_{red}, oppure ancora quando C_{red} è 4-connessa. Inoltre l'uguaglianza può valere solo se il divisore canonico K_C non è molto ampio, oppure nei casi banali $S = 0$ o $S = K_C$.

Mosterò inoltre esempi che mostrano come la disuguaglianza può essere falsa se non sono verificate le ipotesi persino nel caso di curve con canonico molto ampio.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto MIUR PRIN 2008 "Geometria delle varietà algebriche e dei loro spazi di moduli".

Sofia Tirabassi: Mappa tetracanonica di una varietà di dimensione di Albanese massima e di tipo generale

Sofia Tirabassi[1]
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma TRE
email: tirabass@mat.uniroma3.it

Sunto. Sia data Z una varietà complessa proiettiva liscia e di tipo generale. Allora, per definizione, se n è un intero positivo abbastanza grande, la mappa razionale indotta dal sistema n-canonico, $|nK_Z|$, è birazionale. È, quindi, lecito cercare di trovare un limite effettivo per tale intero.

Sotto l'ulteriore ipotesi che Z abbia dimensione di Albanese massima, questo studio ha portato risultati sorprendenti, in quanto si è trovato un intero n_0 indipendente anche dalla dimensione di Z. Ad esempio Chen e Hacon in [1] hanno dimostrato che la mappa esacanonica $\varphi_{|6K_Z|}$ è sempre birazionale, mentre Jiang in [2], usando idee di Pareschi e Popa (cfr. [3]), ha visto come la mappa pentacanonica sia birazionale. Il risultato più importante che abbiamo ottenuto in quest'ambito, usando anche noi la teoria dell' M-regolarità di Pareschi-Popa, è il seguente:

Teorema. *Sia Z una varietà complessa proiettiva di tipo generale e dimensione di Albanese massima. Allora la mappa tetracanonica $\varphi_{|4K_Z|}$ è sempre birazionale.*

L'idea alla base della dimostrzione consiste nel mostrare che i divisori $D_\alpha + D_{\alpha^\vee}$, con $\alpha \in \mathrm{Pic}^0(Z)$, $D_\alpha \in |\omega_Z^{\otimes 2} \otimes \alpha|$ e $D_{\alpha^\vee} \in |\omega_Z^{\otimes 2} \otimes \alpha^\vee|$ separano i punti in un aperto di Z. Il cardine della dimostrazione è che, per ogni $\alpha \in \mathrm{Pic}^0(Z)$, le sezioni di $\omega_Z^{\otimes 2} \otimes \alpha$ per il punto generico di Z hanno buone proprietà di generazione, e ciò è ottenuto mediante tecniche di M-regolarità introdotte da Pareschi-Popa [3] insieme con un teorema di Chen-Hacon [1] sulla geometria del luogo di svanimento generico $V^0(\omega_Z)$.

Bibliografia

[1] J. A. Chen e C. Hacon: "Pluricanonical maps of varieties of maximal Albanese dimension.", Mathematische Annalen, **320**(2001), no.2,367-380.

[2] Z. Jiang: "On varieties of maximal Albanese dimension", arXiv:0909.4817.

[3] G. Pareschi e M. Popa: "Regularity on abelian varieties III: relationships with generic vanishing and applications", in pubblicazione sui Proceedings del Clay Institute Workshop **14** (2011), arXiv:0802.1021v1.

[4] S. Tirabassi: "On the tetracanonical map of varieties of general type and maximal Albanese dimension", arXiv:1103.5236v1.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del dottorato di ricerca in matematica

Francesca Vetro: Componenti Irriducibili di Spazi di Hurwitz

Francesca Vetro
Università degli Studi di Palermo
email: fvetro@math.unipa.it

Sunto. Gli spazi di Hurwitz parametrizzano classi di equivalenza di rivestimenti ramificati di curve proiettive complesse non singolari e, di conseguenza, intervengono in modo naturale nello studio delle curve algebriche. La determinazione delle componenti irriducibili di spazi di Hurwitz è un problema classico in geometria algebrica ed è stato affrontato per la prima volta alla fine dell'ottocento da Hurwitz stesso. Da allora diversi matematici si sono dedicati allo studio di tali spazi e nell'ultimo trentennio molti fra questi hanno sottolineato come la determinazione delle componenti irriducibli di spazi di Hurwitz sia di aiuto nello studio delle varietà abeliane e delle curve modulari. Lo studio dell'irriducibilità di spazi di Hurwitz è, inoltre, legato, al problema Inverso di Galois. Tutto ciò ha dato nuova linfa alla ricerca in questo ambito portando, ad esempio, alle generalizzazioni del risultato di Hurwitz ottenute da Natanzon, Kluitmann, Wajnryb, Kanev, Biggers e Fried, Vetro.

L'obiettivo del mio intervento è quello di descrivere il problema della determinazione delle componenti irriducibili di spazi di Hurwitz evidenziandone un approccio risolutivo. Mi propongo, inoltre, di delineare una breve panoramica dei risultati ottenuti negli ultimi anni, soffermandomi su quelli relativi a rivestimenti di curve con fibre speciali. In tal modo, cercherò di evidenziare, non solo quanto altro ancora si possa fare ma, anche, come risultati di questo tipo siano interessanti in quanto forniscono una classificazione topologica dei rivestimenti presi in esame.

Bibliografia

[1] R. Biggers - M. Fried: "Irreducibility of moduli spaces of cyclic unramified covers of genus g curves", Trans. Amer. Math. Soc., **295** (1986), no. 1, 59 – 70.

[2] V. Kanev: "Hurwitz spaces of Galois coverings of $\mathbb{P}^1$ whose Galois groups are Weyl groups", J. Algebra, **305** (2006), no. 1, 442 – 456.

[3] S. M. Natanzon: "Topology of 2-dimensional coverings and meromorphic functions on real and complex algebraic curves", Selecta Math. Soviet., **12** (1993), no. 3, 251 – 291.

[4] F. Vetro: "On Hurwitz spaces of coverings with one special fiber", Pacific J. Math., **240** (2009), no. 2, 383 – 398.

[5] F. Vetro: "On Hurwitz spaces of coverings with two special fibers and monodromy group a Weyl group of type B_d", preprint, Palermo 2010.

[6] B. Wajnryb: "Orbits of Hurwitz action for coverings of a sphere with two special fibers", Indag. Math., N.S., **7** (1996), no. 4, 549 – 558.

Sezione 19 Logica matematica

Alessandro Andretta: La complessità del Teorema di Densità di Lebesgue

Alessandro Andretta
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
email: alessandro.andretta@unito.it

Riccardo Camerlo
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino

Sunto. Il teorema di densità di Lebesgue per lo spazio di Cantor afferma che ogni insieme misurabile $A \subseteq {}^{\omega}2$ differisce per un insieme di misura nulla da

$$\Phi(A) = \{x \in {}^{\omega}2 \mid \lim_n 2^n \mu(A \cap \boldsymbol{N}_{x\restriction n}) = 1\}$$

l'insieme dei punti che hanno densità 1 in A, dove $\boldsymbol{N}_s = \{x \in {}^{\omega}2 \mid s \subseteq x\}$ è l'intorno di base determinato dalla stringa s. È noto che $\Phi(A)$ è $\boldsymbol{\Pi}^0_3$ (vale a dire: $\boldsymbol{F}_{\sigma\delta}$), quindi risulta definita una mappa $\hat{\Phi}\colon \mathrm{MALG} \to \boldsymbol{\Pi}^0_3$, dove MALG è l'algebra di misura, cioè il quoviente della σ-algebra dei Boreliani modulo gli insiemi di misura nulla.

Teorema 16. *$\hat{\Phi}$ è Boreliana nei codici.*

Definizione. $A, B \subseteq {}^{\omega}2$ sono Wadge-equivalenti, in simboli $A \equiv_{\mathrm{W}} B$ se uno è la contro-immagine continua dell'altro.

Teorema 17. *Per ogni $A \subseteq {}^{\omega}2$ l'insieme dei B tali che $\Phi(B) \equiv_{\mathrm{W}} A$ è denso in* MALG.

Come conseguenza si ottiene un *pre-well-ordering* naturale su MALG di tipo d'ordine $\omega_1^{\omega_1} + 1$.

Bibliografia

[1] A. Andretta: "More on Wadge determinacy", Ann. Pure Appl. Logic, (2006) 2-32

[2] A. Andretta, G. Hjorth, I. Neeman: "Effective Cardinals of Boldface Pointclasses", Journal of Mathematical Logic, (2007) 35-92

[3] A.S. Kechris: "Classical Descriptive Set Theory", GTM 156, Springer, 1995.

[4] J. Oxtoby: "Measure and Category", GTM 2, Springer, 1980

Stefano Baratella: Proprietà di inviluppi nonstandard di C^*-algebre

Stefano Baratella
Dipartimento di Matematica, Università di Trento
email: stefano.baratella@unitn.it

Sunto. Scopo di questa comunicazione è presentare alcune applicazioni di tecniche nonstandard (nel senso di A. Robinson) a C^*–algebre.

È noto che ogni ultraprodotto di C^*–algebre è ottenibile mediante la costruzione di *inviluppo nonstandard*, a partire da qualche C^*–algebra *interna*. Studiare proprietà di inviluppi nonstandard corrisponde quindi a studiare proprietà di ultraprodotti.

Nella prima parte di questa comunicazione ricordo la definizione di ultraprodotto di una famiglia di C^*–algebre. Descrivo poi brevemente il contesto in cui gli inviluppi nonstandard sono definiti.

Nella seconda parte mostro come alcune rilevanti proprietà di C^*–algebre (quali *fattorialità* e *primitività*) e di loro rappresentazioni (quali *fedeltà* e *irriducibilità*) siano preservate e riflesse dalla costruzione di inviluppo nonstandard.

Infine, presento una variante della costruzione di inviluppo nonstandard che, a partire da un'algebra di von Neumann interna su cui è definita una traccia, restituisce un'algebra di von Neumann e fornisco una descrizione "di tipo inviluppo" dei gruppi K_0 e K_1 associati a un inviluppo nonstandard.

Bibliografia

[1] S. Baratella, Notes on nonstandard hulls and their generalizations. In preparazione.

[2] S. Baratella e S.A. Ng, Some properties of nonstandard hulls of Banach spaces. Bull. Belg. Math. Soc. 18-1 (2011), 31–38.

[3] S. Baratella e S.A. Ng, Nonstandard hulls of C^*–algebras. Sottoposto per la pubblicazione (disponibile a http://titan.cs.unp.ac.za/∼siuahn/)

[4] S. Heinrich, Ultraproducts in Banach space theory. J. Reine Angew. Math. 313 (1980), 72–104.

[5] C.W. Henson, Nonstandard hulls of Banach spaces. Israel J. Math. 25 (1976), 108–144.

Riccardo Camerlo: La teoria descrittiva del teorema di densità di Lebesgue

Riccardo Camerlo
Dipartimento di matematica, Politecnico di Torino
email: `camerlo@calvino.polito.it`

Alessandro Andretta
Dipartimento di matematica, Università di Torino

Sunto. Si dimostra che nello spazio di Cantor $2^{\mathbb{N}}$ ogni grado di Wadge $\mathbf{\Pi}^0_3$ contiene un elemento che è l'insieme dei punti di densità 1 per qualche sottoinsieme misurabile $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.

Giovanni Curi: Risultati di indipendenza in teoria costruttiva degli insiemi e dei tipi

Giovanni Curi
Dipartimento di Matematica, Università di Padova
email: gcuri@math.unipd.it

Sunto. La teoria costruttiva degli insiemi di Aczel-Myhill (CZF), e la teoria dei tipi di Martin-Löf (CTT) sono i due principali sistemi formali per la matematica costruttiva nel senso di E. Bishop. A differenza della teoria degli insiemi classica (ZF), questi sistemi utilizzano la logica *intuizionistica* (non vale il principio del terzo escluso) e sono *predicativi*: nel contesto insiemistico ciò in particolare significa che la classe dei sottoinsiemi di un insieme non è un insieme (non si ha l'assioma delle parti), e che l'assioma di separazione è ristretto alle formule limitate (formule in cui il range dei quantificatori è limitato da un insieme).

I risultati ottenuti in CZF, CTT, oltre a godere di una interpretazione computazionale, hanno applicazioni nel contesto matematico usuale (non costruttivo): è noto ad esempio che i teoremi della teoria intuizionistica degli insiemi IZF (che si ottiene da CZF per aggiunta dell'assioma delle parti e dell'assioma di separazione usuale), possono essere interpretati in ogni topos di Grothendieck. CZF è considerevolmente più debole di IZF; i risultati ottenuti in questo sistema sono dunque validi in universi categoriali assai più generali dei topos di Grothendieck.

E' dunque d'interesse, sia sul piano della teoria della dimostrazione, che su quello della pratica matematica, l'operazione di identificazione dei limiti di questi sistemi (e di certe loro varianti) attraverso la dimostrazione di risultati di indipendenza. Mentre risultati di questa natura relativi ad esempio all'inderivabilità di un particolare assioma, o schema di assiomi, della teoria degli insiemi, sono stati e sono ancora studiati, mancano pressoché del tutto risultati di indipendenza da sistemi come CZF, CTT, relativi ad ambiti della matematica diversi dalla teoria degli insiemi.

Nell'intervento questo indirizzo di ricerca sarà illustrato in maggiore dettaglio, e saranno presentati i risultati principali fino ad oggi ottenuti, relativi all'esistenza della compattificazione di Stone-Čech, e della copertura di Gleason.

Bibliografia

[1] E. Bishop, Foundations of constructive analysis. McGraw - Hill, 1967

[2] G. Curi, "On the existence of Stone - Čech compactification". Journal of Symbolic Logic, 75, No. 4 (2010) pp. 1137-1146.

[3] P. T. Johnstone, Sketches of an elephant. A topos theory compendium. II. Clarendon Press, 2002.

[4] A. Simpson, "Constructive set theories and their category-theoretic models". From sets and types to topology and analysis, 41-61, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.

Paola D'Aquino: Parti intere di campi reali chiusi

Paola D'Aquino
Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Napoli
email: paola.daquino@unina2.it

Sunto.

Definizione. Una parte intera di un campo ordinato R è un sottoanello discreto Z tale che per ogni $r \in R$ esiste $z \in Z$ con $z \leq r < z + 1$.

In [6] Shepherdson ha caratterizzato gli anelli ordinati discreti che sono parti intere di campi reale chiusi in termini di modelli dell'induzione aperta (sottoteoria debole dell'aritmetica di Peano). Mourgues e Ressayre hanno dimostrato in [4]

Teorema. *Ogni campo reale chiuso ammette una parte intera.*

Ressayre, inoltre, ha dimostrato in [5] un analogo risultato per campi reali chiusi con esponenziale, cioè ha provato l'esistenza di una parte intera stabile rispetto all'esponenziale.

In collaborazione con Knight, Starchenko, Lange and Kulmann ([1], [2], [3]) sono stati ottenuti risultati sia model teoretici che di complessità algoritmica su parti intere di campi reali chiusi. In particolare, sono stati caratterizzati quei campi reali chiusi che ammettono parti intere che sono modelli dell'Aritmetica di Peano. E' stata, inoltre, approfondita la relazione, già individuata da Wilkie, che sussiste tra parti intere di campi reali chiusi e Z-anelli, anelli in cui può essere effettuata la divisione euclidea relativamente a divisori in $\mathbb{N}$. E' stata ottenuta una stima sulla complessità computazionale per la costruzione di una parte intera esponenziale di un campo reale chiuso esponenziale.

Bibliografia

[1] P. D'Aquino, J. F. Knight, and K. Lange, "Limit-computable integer parts", in corso di stampa in *Archive for Mathematical Logic*

[2] P. D'Aquino, J. F. Knight, S. Kuhlmann, and K. Lange, "Real closed exponential fields", preprint 2011.

[3] P. D'Aquino, J. F. Knight, and S. Starchenko, "Real closed fields and models of Peano Arithmetic", *J. Symb. Logic*, vol. 75(2010), pp. 1-11.

[4] M.-H. Mourgues and J.- P. Ressayre, "Every real closed field has an integer part", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 58(1993), pp. 641–647.

[5] J.-P. Ressayre, "Integer parts of real closed exponential fields", in *Arithmetic, proof theory, and computational complexity*, P. Clote and J. Krajicek, editors, Oxford University Press, New York, 1993.

[6] J. Shepherdson, "A non-standard model for the free variable fragment of number theory", *Bulletin de l'Academie Polonaise Des Sciences*, vol. 12 (1964), pp. 79-86.

Mauro Di Nasso: Somme di insiemi di interi con densità positiva

Mauro Di Nasso
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
email: `dinasso@dm.unipi.it`

Sunto. La *densità di Banach* $\mathrm{BD}(A)$ per insiemi $A \subseteq \mathbb{Z}$ è spesso usata come naturale "raffinamento" della *densità asintotica superiore* $\overline{d}(A) = \limsup_n |A \cap [1,n]|/n$:

$$\mathrm{BD}(A) = \lim_{n\to\infty} \max_{k\in\mathbb{N}} \frac{|A \cap [k, k+n)|}{n}.$$

Chiaramente $\mathrm{BD}(A) \geq \overline{d}(A)$, ed anzi può accadere che $\overline{d}(A) = 0$ ma $\mathrm{BD}(A) = 1$. Se $\mathrm{BD}(A) = 1$ o, equivalentemente, se A include intervalli arbitrariamente lunghi, A si dice *spesso*. L'insieme A si dice *sindetico* se ha "buchi limitati", cioè se esiste n tale che $A \cap [x, x+n) \neq \emptyset$ per ogni x. A si dice *sindetico a tratti* se è l'intersezione di un insieme sindetico con un insieme spesso. Notiamo che A è sindetico a tratti se e solo se un'unione finita di sue traslazioni $\bigcup_{x\in F} x + A$ è spessa; inoltre necessariamente $\mathrm{BD}(A) > 0$. Per contro, esistono insiemi con densità di Banach arbitrariamente vicina a 1 che non sono sindetici a tratti.

Con l'*analisi nonstandard*, R. Jin [3] ha dimostrato che l'*insieme somma* $A + B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$ è sindetico a tratti quando A e B hanno densità di Banach positiva. Diversi studi successivi hanno cercato di rafforzare questo risultato e di trovarne dimostrazioni alternative (*cf.* ad esempio [1,2]). È però rimasto aperto il problema posto da Jin stesso sulla quantità di traslazioni necessarie affinché $A+B$ copra un insieme spesso. Usando i metodi dell'*analisi nonstandard* ho ottenuto il seguente risultato (la dimostrazione usa argomenti diversi rispetto a quelli di Jin ed è molto più breve).

Teorema. *Supponiamo che $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ abbiano densità di Banach positiva. Allora per ogni insieme infinito $X \subseteq \mathbb{Z}$ esistono $\xi_1, \ldots, \xi_m \in X$ tali che*

(1) $m \leq \left\lfloor \frac{1}{BD(A)\cdot BD(B)} \right\rfloor$

(2) *Per ogni $F \subset X$ finito, esiste una traslazione $n + F \subset \bigcup_{i=1}^m \xi_i + A + B$.*

Prendendo come X un insieme spesso qualunque, si deduce il seguente

Corollario. *Se k è un naturale con $1/k \leq BD(A) \cdot BD(B)$, allora $A + B$ è k-sindetico a tratti, cioè $F + A + B$ è spesso per un opportuno $|F| = k$.*

Bibliografia

[1] M. Beiglböck: An ultrafilter approach to Jin's Theorem, *Israel J. Math.*, in corso di st.

[2] V. Bergelson, H. Furstenberg, B. Weiss: Piece-wise sets of integers and combinatorial number theory, in "Topics in discrete mathematics" n.26 of Alg. Combin., 13-37 (2006).

[3] R. Jin: The sumset phenomenon, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130, 855-861 (2002).

Vincenzo Dimonte: Insiemi Icaro ed immersioni elementari

Vincenzo Dimonte
Kurt Gödel Research Center Universität Wien
email: vincenzo.dimonte@gmail.com

Sunto. La teoria dei grandi cardinali è al momento la via più seguita (e più promettente) per il trattamento di ipotesi la cui consistenza va al di là della comune Teoria degli Insiemi. Nata del 1908, ha subito una brusca accelerazione dagli anni Cinquanta, e ora ha una complessa ed articolata struttura. Ciò che rende interessante questa teoria è il fatto che le ipotesi che la compongono, provenienti dalle più svariate correnti della Teoria degli Insiemi e anche al di fuori di essa, formano un'elegante struttura lineare, in cui un'ipotesi è ad un livello più alto di un'altra se la consistenza della prima implica la consistenza della seconda. Inaspettatamente, la gran parte delle ipotesi sorte dai diversi campi della matematica ha un equivalente all'interno di questa teoria.

Un'area affascinante della teoria dei grandi cardinali è il suo livello più alto, composto da ipotesi così forti che non hanno ancora trovato un equivalente in matematica. La consistenza delle più forti fra esse è tuttora sotto analisi. Recentemente Woodin ha creato una nuova sequenza di tali ipotesi, che si situa al di sopra di ogni altra, la cui giustificazione è duplice: creare un sistema di riferimento che possa misurare con certezza il confine oltre il quale le ipotesi sono troppo forti per essere consistenti, e generalizzare in maniera naturale ipotesi già esistenti. Oltre all'indubbio valore per una ricerca generale sui grandi cardinali e sulla verità in matematica, questa sequenza crea una struttura di immersioni elementari interessante *per se*, in cui testare anomalie o estendere concetti già conosciuti in nuovi modi.

La mia ricerca si concentra sulle proprietà di queste immersioni elementari. Una in particolare, chiamata *properness*, si è rivelata così comune da far sorgere il dubbio che ogni immersione elementare la possedesse. Negli articoli [1] e [2] si dimostra invece l'esistenza di immersioni elementari non proprie, e si sottolinea il fatto che per un'immersione elementare l'essere propria o meno può non dipendere dal suo dominio. Viene presentato inoltre un modello la cui ricchezza lo rende privilegiato nella ricerca di esempi di diverse congetture.

Bibliografia

[1] V. Dimonte, *Totally Non-Proper Ordinals Beyond* $L(V_{\lambda+1})$, Archive for Mathematical Logic, in corso di stampa.

[2] V. Dimonte, *A Partially Non-Proper Ordinal*, sottoposto per la pubblicazione.

[3] A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[4] H. Woodin, *Suitable Extender Sequences*, da pubblicarsi.

Anna Rita Ferraioli: Classificazione delle MV-algebre mediante fasci

Antonio Di Nola
Dip. di Matematica, Università degli Studi di Salerno

Anna Rita Ferraioli
Dip. di Matematica, Università degli Studi di Salerno
email: anferraioli@unisa.it

Giacomo Lenzi
Dip. di Matematica, Università degli Studi di Salerno

Sunto. In letteratura esistono numerose rappresentazioni delle MV-algebre tramite fasci. Nel nostro lavoro siamo partiti dalla rappresentazione di Filipoiu e Georgescu (1995) in cui il fascio ha come spazio base lo spettro degli ideali massimali (che con la topologia di Zariski è compatto e di Hausdorff) della MV-algebra rappresentata e come stalk MV-algebre locali. Tale rappresentazione fornisce un'equivalenza categoriale tra le MV-algebre e speciali oggetti geometrici detti *spazi MV-algebrici*, coppie (X, F) dove X è uno spazio topologico e F è un fascio di MV-algebre. Diremo che uno spazio MV-algebrico è separante se per ogni chiuso D di X e ogni elemento $x \notin D$ esiste una sezione globale σ tale che $\sigma(x) = 1$ e $\sigma_{|D} = 0$. In particolare la categoria delle MV-algebre è equivalente alla categoria degli spazi MV-algebrici T_2 compatti (spazio base compatto di Hausdorff), separanti e locali (a stalk locali). A partire da questa rappresentazione e facendo variare di volta in volta gli stalk in speciali classi di MV-algebre abbiamo ottenuto i seguenti risultati: *la categoria delle MV-algebre divisibili è equivalente alla categoria degli spazi MV-algebrici T_2, compatti, separanti, locali e divisibili (a stalk MV-algebre divisibili). La categoria delle MV-algebre regolari è equivalente alla categoria degli spazi MV-algebrici di Stone (spazio base booleano) separanti e totalmente ordinati (a stalk MV-catene). La categoria delle MV-algebre algebricamente chiuse è equivalente alla categoria degli spazi MV-algebrici di Stone separanti, totalmente ordinati e divisibili.* Infine, scegliendo come stalk MV-algebre con radicale retrattivo si ottiene: *la categoria delle MV-algebre con radicale retrattivo è equivalente alla categoria degli spazi MV-algebrici T_2, compatti, separanti, locali con radicale retrattivo.* Questo risultato ci permette di caratterizzare completamente le MV-algebre con radicale retrattivo. Infatti in [2] le MV-algebre locali con radicale retrattivo sono state caratterizzate come prodotto lessicografico di un sottogruppo dei reali con un l-gruppo abeliano.

Bibliografia

[1] Di Nola A., Esposito I., Gerla B., Local algebras in the representation of MV-algebras, Algebra Universalis 56 (2007), p. 133-164.

[2] Filipoiu A., Georgescu G., "Compact and Pierce representations of MV-algebras", Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 40, (1995), p. 599-618.

Antongiulio Fornasiero: Espansioni dei reali che non definiscono i numeri naturali

Antongiulio Fornasiero
Institut für Mathematische Logik, Università di Münster
email: antongiulio.fornasiero@googlemail.com

Sunto. Sia $\mathcal{R}$ un'espansione del prim'ordine del campo dei numeri reali.

Teorema 18. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *$\mathcal{R}$ è "i-minimale": cioè, ogni sottoinsieme definible di $\mathbb{R}$ con parte interna vuota è mai denso;*
(2) *ogni sottoinsieme definible di $\mathbb{R}$ con parte interna vuota ha misura di Lebesgue 0;*
(3) *ogni sottoinsieme definible di $\mathbb{R}$ con parte interna vuota ha dimensione di Hausdorff 0.*

Inoltre, se $\mathcal{R}$ è i-minimale e $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è definibile e non vuoto, allora la dimensione di Hausdorff di X è uguale alla dimensione "geometrica" di X, cioè al più grande intero d tale che esiste una proiezione ortogonale π da $\mathbb{R}^n$ ad uno spazio coordinato d-dimensionale tale che $\pi(X)$ ha parte interna non vuota.

Una nozione più generale di "i-minimale" è "moderato": $\mathcal{R}$ è moderato se, per ogni sottoinsieme discreto definibile D di $\mathbb{R}^n$ ed ogni funzione definibile $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f(D)$ è mai denso.

Teorema (P. Hieronymi). *O $\mathcal{R}$ è moderato, oppure definisce l'insieme dei numeri naturali.*

Teorema 19. *Sia $\mathcal{R}$ moderato. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e definibile, e sia $F := \pi(C)$, dove $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una funzione continua e definibile. Allora, la dimensione di Hausdorff di F è uguale alla sua dimensione geometrica.*

Teorema 20. *Sia $\mathcal{R}$ moderato. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione definibile e continua. Allora, f è $\mathcal{C}^1$ fuori da un insieme mai denso definibile.*

Bibliografia

[1] A. Fornasiero: "Expansions of the reals which do not define the natural numbers", (2011), sottoposto per la pubblicazione.

[2] P. Hieronymi: "Defining the set of integers in expansions of the real field by a closed discrete set", Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 6, 2163–2168.

[3] C. Miller: "Tameness in expansions of the real field", Logic Colloquium '01, 281–316, Lect. Notes Log., 20, Assoc. Symbol. Logic, Urbana, IL, 2005.

Marco Forti: Insiemi equipotenti sono davvero *equinumerosi*? Aristotele-Euclide o Cantor-Zermelo?

Marco Forti
Dipartimento di Matematica Applicata "U. Dini", Università di Pisa
email: `forti@dma.unipi.it`

Sunto. Una nozione naturale di *grandezza* per le collezioni (*"numerosità"*) dovrebbe rispettare le cinque *"nozioni comuni"* (*κοιναι εννοιαι*) di Euclide, con la somma corrispondente all'unione disgiunta e la relazione d'ordine all'inclusione. Indicando la numerosità con $\mathfrak{n}$, la seconda e la terza nozione possono essere combinate in

AP (*Principio di Aristotele*) $\mathfrak{n}(A) = \mathfrak{n}(B) \iff \mathfrak{n}(A \setminus B) = \mathfrak{n}(B \setminus A)$,
che a sua volta implica la quinta nozione, nella forma
EP (*Principio di Euclide*) $A \supset B \implies \mathfrak{n}(A) > \mathfrak{n}(B)$.

D'altra parte, interpretando nella quarta nozione *εφαρμοζοντα* ("esattamente sovrapponibili") come "in corrispondenza biunivoca", si ottiene
CP (*Principio di Cantor*) $\exists\varphi\ 1-1$ t.c. $\varphi[A] = B \implies \mathfrak{n}(A) = \mathfrak{n}(B)$.

Questi principi danno agli *insiemi finiti* la loro numerosità naturale, ma sono purtroppo incompatibili per le collezioni infinite.

Escludendo AP e ponendo in CP la doppia implicazione, Cantor ha ottenuto la sua meravigliosa teoria delle *cardinalità*, che è compatibile con la forma "debole" di EP ove $A \supseteq B$ implica $\mathfrak{n}(A) \geq \mathfrak{n}(B)$, e permette anche la confrontabilità
ZP (*Principio di Zermelo*) $\mathfrak{n}(A) \leq \mathfrak{n}(B) \ \vee\ \mathfrak{n}(A) \geq \mathfrak{n}(B)$;
ma l'aritmetica è assai strana: si ha $\alpha + \beta = \max(\alpha, \beta)$, quindi niente *sottrazione*, mentre i principi AP ed EP sono malamente falsificati.

V. Benci, M. Di Nasso e M. Forti, restringendo il principio di Cantor CP ad un'opportuna classe $\mathfrak{T}$ di "congruenze naturali", piú fedele al significato di *εφαρμοζειν*,
$\mathsf{CP}_{\mathfrak{T}}$ (*Principio di Congruenza*) $\exists\tau \in \mathfrak{T}$ t.c. $\tau[A] = B \implies \mathfrak{n}(A) = \mathfrak{n}(B)$,
lo hanno reso compatibile con AP, ottenendo così delle numerosità che rispettano tutte e cinque le nozioni euclidee, costituendo la *parte non negativa di un gruppo ordinato*, che può divenire un *anello* purché nella naturale definizione di prodotto $\mathfrak{n}(A)\cdot\mathfrak{n}(B) = \mathfrak{n}(A \times B)$ si pongano adeguate restrizioni che, a seconda delle differenti codifiche insiemistiche, evitino i contrasti con il principio di Euclide EP.

Varie proposte tendenti a rafforzare la teoria in senso "Cantor-Zermeliano" sono state avanzate in una serie di articoli apparsi nell'ultimo decennio (e ancora aperta):
- porre un bicondizionale in $\mathsf{CP}_{\mathfrak{T}}$, o almeno ottenere l'implicazione inversa di CP;
- rafforzare EP alla naturale *definizione* $\mathfrak{n}(A) > \mathfrak{n}(B) \iff \exists C\, \mathfrak{n}(A) = \mathfrak{n}(B \cup C)$ senza rinunciare alla *linearità* dell'ordine data da ZP;
- ottenere la *continuità della numerosità rispetto ad approssimazioni normali*;
tali estensioni richiedono ipotesi insiemistiche che vanno oltre ZFC e, seppur singolarmente consistenti, sono probabilmente irrealizzabili insieme.

Paolo Gentilini: Introduzione di una logica paraconsistente *costruttiva* e dei sistemi aritmetici su essa basati

Paolo Gentilini
IMATI-CNR, ANSAS Liguria
email: gentilini@ge.imati.cnr.it

Sunto. In [2] sono presentate la teoria della dimostrazione [1] e una *arithmetical semantics* per alcune logiche paraconsistenti della classe dei **C**-systems, introdotta da W. A. Carnielli e altri. L'*arithmetical semantics* interpreta le formule del linguaggio dei **C**-systems in enunciati della Logica della Provabilità dell'Aritmetica classica **PA** [1]: essa lega la nozione di verità di una formula in un contesto non standard a quella di dimostrabilità in un ambiente classico. Essa rende vere un insieme infinito di particolari formule contraddittorie $B \wedge \neg B$ e falsifica esempi arbitrariamente complessi del principio di non contraddizione $\neg(F \wedge \neg F)$. Inoltre, offre modelli per i **C**-systems, ma può falsificare sia la Logica Classica **LK** sia la Logica intuizionista **LJ** [1]. In tal modo viene dimostrata una forma di completezza metalogica dell'*aritmetical semantics* rispetto alla logica paraconsistente dei **C**-systems.

Una *logica paraconsistente costruttiva* **U** è un sistema a sequenti per il quale vale l'eliminazione dei tagli [1] e che è essenzialmente caratterizzato da queste proprietà:
1) Le regole di negazione a sinistra di **U** sono vincolate rispetto al caso classico e possono essere ottenute tramite una specifica relazione di antisimmetria dalle corrispondenti regole di negazione a destra di un sistema pseudo-intuizionista **V**, assunto a *riferimento* per **U**. Un sistema **V** è *pseudo-intuizionista* se ammette l'eliminazione dei tagli e se le sue regole di negazione a destra sono vincolate rispetto al caso classico in modo tale che **V** non dimostra infinite istanze del principio del terzo escluso $B \vee \neg B$ e della doppia negazione a sinistra $\neg\neg B \to B$.
2) **U** ammette una *arithmetical semantics* tale che esiste un modello aritmetico $\langle \mathbf{N}, \mathbf{PA}, \varphi \rangle$ di **U** nel quale per una infinità numerabile di formule non atomiche B vale $\varphi(\neg B) \equiv \neg \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\varphi(B))$, ossia la negazione è interpretata tramite una condizione di non dimostrabilità nell'Aritmetica classica **PA**.

In [2] si dimostra che la logica paraconsistente **CI** è costruttiva. In questa comunicazione si approfondisce la nozione di paraconsistenza costruttiva, si esaminano le condizioni di costruttività dell'Aritmetica paraconsistente **PACI** basata su **CI,** e si esplora il significato che possono assumere in teoria della dimostrazione le *contraddizioni costruttive*, ossia le contraddizioni $A \wedge \neg A$ la cui intepretazione nell'*aritmetical semantics* è una formula vera nel modello standard **N** di **PA**.

Bibliografia

[1] S.R. Buss (Ed.), *Handbook of Proof Theory*, Elsevier, Amsterdam, 1998.

[2] P. Gentilini, 'Proof Theory and Mathematical Meaning of Paraconsistent C-Systems', in corso di st. in J. Appl. Logic. Preprint in http://www.gentilini.ge.it

Sonia L'Innocente: Algebre di Lie e Algebre Quantizzate: il ruolo dell'esponenziazione

Sonia L'Innocente
Scuola di Scienze e Tecnologie, Sezione di Matematica, Università di Camerino
email: sonia.linnocente@unicam.it.it

Sunto. L'interesse per l'esponenziazione non coinvolge solamente le strutture standard del campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali o il campo $\mathbb{C}$ dei complessi ma si estende anche a contesti piu ù ampi, come ad esempio alle algebre di Lie, e più in generale alle algebre di Hopf. Si illustrano, mediante tecniche di Teoria dei Modelli, possibili esponenziazioni su due interessanti algebre di Hopf. [2] confronta alcune mappe esponenziali definite sull'algebra universale di inviluppo U dell'algebra di Lie $sl_2(\mathbb{C})$ delle matrici 2x2 a traccia nulla a valori nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, usando la teoria delle rappresentazioni di U di dimensione finita.

Questo tipo di analisi può essere esteso in modo naturale al contesto delle algebre quantizzate. Di recente, queste interessanti strutture algebriche sono state studiate anche da un punto di vista model teoretico, ad esempio dai lavori [4] e [1]. Si vuole, quindi, introdurre in [3] alcune esponenziazioni sull'agebra $U_q(sl_2(\mathbb{C}))$, che può essere presentata come la versione quantizzata di U, dove il parametro di deformazione q è in $\mathbb{C} - \{0\}$, con $q^2 \neq 1$. Vengono analizzati due casi distinti, a seconda che il parametro q sia oppure no radice dell'unità.

Un altro aspetto da esaminare riguarda la connessione tra l'esponenziazioni e i gruppi di Lie con la funzione logaritmica, definita come funzione inversa dell'esponenziale. Infatti uno dei maggiori ostacoli per un'analisi sistematica al primo ordine dei gruppi di Lie risiede proprio nella natura non esplicita delle regioni logaritmiche, cioè nei domini naturali della funzione logaritmica. Saranno trattate questioni di decidibilità per le strutture che espandano alcuni gruppi di Lie in esame con le relative funzioni logaritmiche.

Bibliografia

[1] I. Herzog, S. L'Innocente: "The nonstandard quantum plane", Annals of Pure and Applied Logic 156, 2008, 78-85.

[2] S. L'Innocente, A. Macintyre, F. Point, "Exponentiations over the universal enveloping algebra of $sl_2(\mathbb{C})$", Annals of Pure and Applied Logic, 161, 2010, 1565-1580.

[3] S. L'Innocente, F. Point, "Exponentiations over the quantum algebra of $U_q(sl_2(\mathbb{C}))$, Preprint 2010

[4] B. Zilber, "A class of quantum Zariski geometries, In: Model Theory with applications to algebra and analysis, I and II (Z. Chatzidakis, H.D. Macpherson, A. Pillay, A.J. Wilkie editors), LMS Lecture Note Series 349, 2008

Maria Emilia Maietti: Fondazione a più livelli per la matematica costruttiva

Maria Emilia Maietti[1]
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova
email: maietti@math.unipd.it

Giovanni Sambin
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova

Sunto. Le dimostrazioni in matematica costruttiva si distinguono da quelle in matematica classica per il fatto di contenere in sè tutte le informazioni necessarie a computare i testimoni delle affermazioni esistenziali che vengono via via dimostrate.

Questo ha portato in [3] a proporre la nozione di sistema formale a due livelli per fondare la matematica costruttiva. Un suo esempio è contenuto in [4]. I due livelli sono dati da una teoria estensionale in cui formalizzare le dimostrazioni dei teoremi matematici, e da un livello intensionale che funge da linguaggio di programmazione all'interno del quale rappresentare le dimostrazioni come programmi. Il livello estensionale si interpreta in quello intensionale per mezzo di un teorema di coerenza in un opportuno modello di quozienti costruito sul livello intensionale.

In questo intervento arricchiamo il sistema in [4] di due ulteriori livelli:

(1) un modello della realizzabilità per il livello intensionale in cui estrarre gli algoritmi che computano i testimoni delle affermazioni esistenziali.
(2) una teoria algebrica che generalizza il livello estensionale in [4] e che utilizza la nozione di "overlap algebra" introdotta in [5] (vedi anche [1],[2]) per fornire una dimostrazione costruttiva del teorema di rappresentazione di Linderbaum-Tarski sulle algebre di Boole complete e atomiche.

Bibliografia

[1] F. Ciraulo, M.E. Maietti, P. Toto: "Constructive version of Boolean algebra", *Logic Journal of the IGPL*, in corso di stampa.

[2] F. Ciraulo, G. Sambin, "The overlap algebra of regular opens", *Journal of Pure and Applied Algebra*, *214 (11)*, pp. 1988–1995, 2010.

[3] M.E. Maietti and G. Sambin: "Toward a minimalist foundation for constructive mathematics." In L. Crosilla and P. Schuster, editor, *From Sets and Types to Topology and Analysis: Practicable Foundations for Constructive Mathematics*, number 48 in Oxford Logic Guides, pages 91–114. Oxford University Press, 2005.

[4] M.E. Maietti: "A minimalist two-level foundation for constructive mathematics", *Annals of Pure and Applied Logic 160*, 319–354, 2009.

[5] G. Sambin: "The Basic Picture and positive topology. New structures for constructive mathematics.", *Oxford University Press*, in corso di stampa.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto nazionale MCTAFI

Ruggero Pagnan: Fibrazioni concrete

Ruggero Pagnan
Dipartimento di Informatica e Scienze dell'Informazione, Università di Genova
email: `ruggero.pagnan@disi.unige.it`

Sunto. Una categoria concreta è una categoria per la quale esiste un funtore fedele da essa verso la categoria degli insiemi e delle funzioni, Sets. Sono esempi di categorie concrete tutte le categorie di insiemi con struttura e omomorfismi tra essi, nonché la categoria Sets stessa. Per questa ragione, una categoria concreta è tipicamente concepita come una categoria di insiemi strutturati in modo non specificato e funzioni tra essi che conservano tale struttura, e lo studio delle proprietà di tali categorie come un possibile approccio ad una teoria generale delle strutture. D'altra parte, la sostituzione della categoria Sets con una qualsiasi categoria C determina una relativizzazione e generalizzazione della nozione di categoria concreta le cui proprietà è interessante studiare in dipendenza dalle proprietà di C. Infine, è importante sottolineare l'utilizzo delle categorie concrete nella modellizzazione dei linguaggi del prim'ordine infinitari, si veda [1]. Quanto sommariamente descritto pone in luce come la teoria delle categorie concrete sia una teoria delle strutture che dipende dalla scelta di una categoria "base" ed è interessantemente connessa con l'ambito logico-matematico.

È ben noto come la teoria delle fibrazioni, o categorie fibrate, si veda [2], incorpori anch'essa tutti questi aspetti. Una fibrazione è una categoria di strutture "sopra" una categoria di base e allo stesso tempo un modello di logica sopra una teoria di tipi, particolarmente se è un preordine. Le trasposizione delle nozioni categoriali e dei relativi risultati dall'ambito della ordinaria teoria delle categorie all'ambito della teoria delle fibrazioni è non banale e spesso avviene in maniera sorprendente. In particolare, e per quanto ci è dato sapere, non esiste alcuna nozione di fibrazione concreta. Lo scopo di questo intervento è quello di presentare una formulazione di tale nozione, mostrare come essa estenda quella ordinaria più sopra descritta e produrre esempi di fibrazioni concrete.

Bibliografia

[1] J. Rosický: "Concrete categories and infinitary languages", Journal of Pure and Applied Algebra 22 (1981) 309-339.

[2] A. Grothendieck: "Catégories fibrées et descente (Exposé VI)", Lecture Notes in Mathematics 224 (1970) 145-194.

Giuseppe Rosolini: Quozienti, stack e iperdottrine

Giuseppe Rosolini[1]
DISI, Università di Genova
email: rosolini@disi.unige.it

Maria Emilia Maietti
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova

Sunto. Applicando strumenti e tecniche sviluppate in logica categoriale, si fornisce una descrizione astratta di modelli di matematica costruttiva basati sulla teoria dei tipi intensionale come presentata in [3]. Il concetto chiave che viene utilizzato è quello di *Lawvere existential elementary hyperdoctrine* [2]; per queste si descrive una nozione generale di completamento per quozienti. Tale nozione risulta essere la soluzione di un problema universale e fornisce molti esempi noti in letteratura, quali il completamento esatto di una categoria con limiti finiti deboli così come quelli trattati in [1] e molti esempi importanti sviluppati nella teoria dei tipi, si veda [4].

Bibliografia

[1] A. Carboni, G. Rosolini: "Locally cartesian closed exact completions", *J.Pure Appl. Alg. 154*, 103–116, 2000.

[2] F. W. Lawvere: "Adjointness in foundations", *Dialectica 23*, 281–296, 1969.

[3] M.E. Maietti: "A minimalist two-level foundation for constructive mathematics", *Annals of Pure and Applied Logic 160*, 319–354, 2009.

[4] B. Nordström, K. Petersson, J. Smith: "Programming in Martin Löf's Type Theory", Clarendon Press, Oxford, 1990.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto nazionale MCTAFI

Carlo Toffalori: Reticoli generalizzati su anelli alla Dedekind locali

Carlo Toffalori[1]
Scuola di Scienze e Tecnologie, Università di Camerino
email: carlo.toffalori@unicam.it

Sunto. La comunicazione riguarda una ricerca in collaborazione con G. Puninski (Mosca) sugli anelli *alla Dedekind* (*Dedekind-like*). Questa classe di anelli comprende vari esempi familiari, come gli anelli gruppali $\mathbf{Z}[G]$ dove $\mathbf{Z}$ denota il dominio di integrità degli interi e G è un gruppo ciclico finito di ordine libero da quadrati. Uno studio intensivo della classe è stato condotto da Klingler e Levy. In particolare [2] e [3] trattano il caso *locale*.

E' poi da segnalare l'attenzione riservata in vari lavori, come [1], [4] e [5], a certi moduli proiettivi su ordini su domini di Dedekind chiamati *reticoli generalizzati*. Questi articoli cercano anche di stabilire quando un reticolo generalizzato su un ordine è una somma diretta di reticoli ordinari - cioè finitamente generati.

Il nostro lavoro propone una nozione di *reticolo generalizzato* su un anello locale alla Dedekind Λ. Si tratta di un addendo diretto di una somma diretta di un numero arbitrario - eventualmente infinito - di copie di $\Lambda \oplus \Gamma$ dove Γ denota la chiusura integrale di Λ nel suo anello totale dei quozienti, e Λ e Γ sono visti come moduli sull'anello Λ. In questa prospettiva i reticoli (finitamente generati) possono essere considerati come addendi diretti di somme dirette di un numero finito di copie di $\Lambda \oplus \Gamma$.

Il nostro interesse principale è classificare gli anelli Λ per cui ogni reticolo generalizzato è una somma diretta di reticoli. Ma confrontiamo anche le teorie del primo ordine dei reticoli generalizzati e dei reticoli (finitamente generati) su Λ.

Bibliografia

[1] M.C.R. Butler - J.M. Campbell - L.G. Kovács, On infinite rank representations of groups and orders of finite lattice type, *Archiv der Mathematik* 83 (2004), pp. 297–308.

[2] L. Klinger - L. Levy, Representation Type of Commutative Noetherian Rings I: Local Wildness, *Pacific Journal of Mathematics*, 200 (2001), pp. 345–386.

[3] L. Klingler - L. Levy, Representation Type of Commutative Noetherian Rings II: Local Tameness, *Pacific J. Math.* 200 (2001), pp. 387–483.

[4] P. Pŕíhoda - G. Puninski, Classifying generalized lattices. Some examples as introduction, *J. London Math. Soc.* 82 (2010), pp. 125–143.

[5] W. Rump, Large lattices over orders, *Proc. London Math. Soc.* 91 (2005), pp. 105–128.

[1] Lavoro svolto nell'ambito dello GNSAGA-INDAM

Sezione 20 Teoria dei numeri

Jung Kyu Canci: Buona riduzione per endomorfismi di $\mathbb{P}^1$

Jung Kyu Canci[1]
Mathematisches Institut, Universität Basel
email: jungkyu.canci@unibas.ch

Sunto. Sia K un campo di numeri, v una valutazione non archimedea di K. Dato Φ un endomorfismo della retta proiettiva definito su K, diciamo che Φ ha *buona riduzione semplice* in v se la mappa Φ_v, la riduzione modulo v di Φ, ha lo stesso grado di Φ. Supponiamo ora che v sia stata estesa alla chiusura algebrica $\overline{\mathbb{Q}}$. Si dice che Φ ha *buona riduzione critica* in v se per ogni coppia di punti distinti in $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ di ramificazione per Φ anche le loro riduzioni modulo v sono distinte e se lo stesso vale anche per coppie di punti distinti dell'immagine di ramificazione. Entrambe queste nozioni sono in relazione con la buona riduzione per curve ellittiche. Si veda per esempio la dimostrazione del teorema di Shafarevich, sulle classi di curve ellitiche, ottenuta da Szpiro e Tucker.

La buona riduzione critica non sempre si comporta bene per iterazione dell'endomorfismo. Quindi la dinamica ad esso associata potrebbe risultare di difficile studio. Invece la nozione di buona riduzione semplice si preserva per iterazione della mappa. Presenterò un risultato ottenuto in collaborazione con Peruginelli e Tossici che afferma che se Φ ha buona riduzione critica in v e la sua riduzione Φ_v modulo v è separabile, allora Φ ha buona riduzione semplice in v. Il nostro risultato è legato a dei lavori di Fulton, Beckmann e Zannier e ci permette di dimostrare un caso particolare della *Uniform Boundedness Conjecture* sui punti K razionali di endomorfismi di $\mathbb{P}^1$.

Bibliografia

[1] S. Beckmann. *Ramified Primes in the Field of Moduli of Branched Coverings of Curves*, Journal of Algebra, 125, 1989, 236-255.

[2] J.K. Canci, G. Peruginelli, D. Tossici. *On Some Notions of Good Reduction for Endomorphisms of the Projective Line*, Preprint HIM, arXiv:1103.3853

[3] W. Fulton. *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli algebraic curves*, Annals of Mathematics (2), 90, 1969, 542-575.

[4] L. Szpiro, T. Tucker. *A Shafarevich-Faltings Theorem for Rational Functions.* Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 322, (2009), 3345-3365.

[5] U. Zannier. *Good reduction for certain covers* $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, Israel Journal of Mathematics, 124, 2001, 93-114.

[1]Lavoro in collaborazione con G. Peruginelli e D. Tossici iniziato durante il Junior Hausdorff Trimester Programs in Algebra e Teoria dei Numeri presso l'Hausdorff Institute di Bonn.

Sara Checcoli: Campi di numeri algebrici con gradi locali limitati

Sara Checcoli[1]
email: sara.checcoli@gmail.com

Sunto. Verranno presentati i risultati ottenuti in [1] e [2] in cui si dà una caratterizzazione dei campi di numeri algebrici con i gradi locali uniformemente limitati.

In particolare si dimostra che per una estensione algebrica infinita di Galois $K/\mathbb{Q}$ sono equivalenti le seguenti proprietà: K ha i gradi locali uniformemente limitati a tutti i primi; K ha i gradi locali uniformemente limitati a quasi tutti i primi; il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ha esponente finito.

La dimostrazione di questo risultato ha interessanti collegamenti con il lavoro di Zelmanov sul problema ristretto di Burnside. Si dà una formula per calcolare esplicitamente dei bound per i gradi locali di una estensione infinita in alcuni casi particolari.

La limitatezza dei gradi locali viene poi messa in relazione con altre due proprietà: essere un sottocampo di $\mathbb{Q}^{(d)}$, che è definito come il composito nella chiusura algebrcia di $\mathbb{Q}$ di tutti i campi di numeri di grado al più d su $\mathbb{Q}$; essere generabile da elementi di grado uniformemente limitato. Si dimostra che tali proprietà sono equivalenti per estensioni abeliane, ma non in generale; vengono costruiti controesempi utilizzando i gruppi extraspeciali e loro moduli irriducibili.

Bibliografia

[1] S. Checcoli, U.Zannier: "On fields of algebraic numbers with bounded local degrees", Comptes Rendus Mathematique, Volume 349, Issue 1, Pages 11-14.

[2] S. Checcoli: "Fields of algebraic numbers with bounded local degrees and their properties", Preprint, 2010, arXiv: 1012.0984.

[1] Lavoro svolto durante il Dottorato dell'autrice

Giovanni Coppola: Aspetti elementari del metodo della Dispersione e del Crivello Largo

Giovanni Coppola[1]
Università di Salerno
email: giocop@interfree.it

Sunto. Il metodo della Dispersione e del Crivello Largo hanno entrambi la loro origine nel lavoro del matematico russo Yuri V. Linnik. Daremo una breve panoramica su come un approccio elementare ai due metodi, basato solo su sviluppi di Fourier finiti (discrete Fourier transforms) e relative proprietà, dà risultati non banali per la distribuzione di funzioni aritmetiche in quasi tutti gli intervalli corti.

Diciamo che una proprietà (tipicamente, una stima asintotica o una maggiorazione) è vera per quasi tutti gli intervalli corti $[x, x+h]$ se vale $\forall x \in [N, 2N]$ tranne un insieme "eccezionale" con al più $o(N)$ valori, per $N \to \infty$, ed $[x, x+h]$ è corto se $h = o(x)$ quando $x \to \infty$ (con $h \to \infty$ per evitare banalità).

Le funzioni aritmetiche per le quali abbiamo ottenuto risultati non banali in quasi tutti gli intervalli corti sono la funzione divisori, v. C-Salerno Acta Arithmetica (2004), insieme a funzioni ad essa collegate; ad esempio, le funzioni somme di divisori, v. Integers (2004), altre funzioni aritmetiche ancora più generali, v. Journal of Combinatorics and Number Theory (2010) e le funzioni divisori localizzati in ranges fissati, v. International Journal of Pure and Applied Mathematics (2010).

[1]Ringrazio i colleghi italiani per la collaborazione.

Alessandro Languasco: Una formula esplicita per i numeri di Goldbach

Alessandro Languasco
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova
email: `languasc@math.unipd.it`

Sunto. Sia Λ la funzione di von Mangoldt e sia $R(n) = \sum_{h+k=n} \Lambda(h)\Lambda(k)$ la funzione che conta il numero di rappresentazioni pesate di un intero come somma di due primi. Sia inoltre N un parametro sufficientemente grande e si assuma la validità dell'Ipotesi di Riemann. In un recente articolo [2] in collaborazione con A. Zaccagnini (Univ. Parma) abbiamo dimostrato che

$$\sum_{n=1}^{N} R(n) = \frac{N^2}{2} - 2\sum_{\rho} \frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + \mathcal{O}\left(N \log^3 N\right),$$

dove $\rho = 1/2 + i\gamma$ varia sugli zeri non banali della funzione $\zeta(s)$ di Riemann.

Tale risultato migliora un recente teorema di Bhowmik e Schlage-Puchta [1] e rappresenta lo stato dell'arte ottenibile con il metodo del cerchio di Hardy-Littlewood. Ciò significa che la stima sopra scritta del termine d'errore non può essere migliorata senza avere più accurate informazioni sulla distribuzione degli zeri non banali di $\zeta(s)$ sulla linea critica. Informazioni del genere seguono, ad esempio, da opportune formulazioni della Pair-Correlation Conjecture di Montgomery.

Bibliografia

[1] G. Bhowmik, J.-C. Schlage-Puchta, *Mean representation number of integers as the sum of primes*, in corso di stampa in Nagoya Math. J., `http://arxiv.org/abs/0806.3295v3`.

[2] A. Languasco, A. Zaccagnini, *The number of Goldbach representations of an integer*, in corso di stampa in Proc. A.M.S., `http://arxiv.org/abs/1011.3198`.

Matteo Longo: Un criterio di irriducibilità per rappresentazioni di gruppi ed applicazioni aritmetiche

Matteo Longo
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
email: `mlongo@math.unipd.it`

Stefano Vigni
Departament de Matemàtica Aplicada II, Universitat Politècnica de Catalunya

Sunto. Sia G un gruppo, R un dominio noetheriano e ρ una rappresentazione di G a valori in $\mathrm{GL}_d(R)$, per un intero $d \geq 1$. Alla rappresentazione ρ si associa in modo naturale una rappresentazione ρ_K di G a valori nel campo delle frazioni K di R. Inoltre, per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di R possiamo considerare la proiezione canonica $\pi_{\mathfrak{p}} : R \twoheadrightarrow k_{\mathfrak{p}} := R/\mathfrak{p}$ e definire tramite $\pi_{\mathfrak{p}}$ la rappresentazione $\rho_{\mathfrak{p}}$ di G a valori in $\mathrm{GL}_2(k_{\mathfrak{p}})$. Il primo risultato è il seguente:

Teorema. *Se $\rho_{\mathfrak{p}}$ è irriducibile per un insieme di ideali primi $\mathfrak{p}$ con intersezione nulla, allora ρ_K è irriducibile.*

Sia ora f una newform di peso un intero $k \geq 2$ e livello $\Gamma_1(N)$, dove $N \geq 1$ è un intero. Sia K_f il campo di numeri generato (su $\mathbb{Q}$) dai coefficienti di Fourier di f. Per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ dell'anello degli interi algebrici $\mathcal{O}_f$ di K_f consideriamo la rappresentazione residuale

$$\rho_{f,\mathfrak{p}} : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(k_{f,\mathfrak{p}})$$

costruita da Deligne, dove $k_{f,\mathfrak{p}}$ è il campo residuo di $\mathcal{O}_f$ in $\mathfrak{p}$ e $G_{\mathbb{Q},S}$ è il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ della massima estensione di $\mathbb{Q}$ non ramificata al di fuori dell'insieme finito S di posti che dividono $Np\infty$ (essendo p la caratteristica di $k_{f,\mathfrak{p}}$ e ∞ l'unico posto archimedeo di $\mathbb{Q}$). Supponiamo ora che $\rho_{f,\mathfrak{p}}$ sia assolutamente irriducibile (condizione che esclude solo un numero finito di primi $\mathfrak{p}$). Sia infine $R^S_{f,\mathfrak{p}}$ l'anello di deformazione universale di $\rho_{f,\mathfrak{p}}$ che parametrizza le deformazioni di $\rho_{f,\mathfrak{p}}$ ad anelli locali completi noetheriani con campo residuo $k_{f,\mathfrak{p}}$. Come applicazione del primo risultato, abbiamo il seguente:

Teorema. *Se $k > 2$, la deformazione universale $R^S_{f,\mathfrak{p}}$ è irriducibile per tutti i primi $\mathfrak{p}$ eccetto al più un numero finito. Se $k = 2$ l'insieme dei primi $\mathfrak{p}$ tali che $\rho^{\mathrm{univ}}_{f,\mathfrak{p}}$ sia irriducibile ha densità 1.*

Bibliografia

[1] M. Longo, S. Vigni, Stefano. An irreducibility criterion for group representations, with arithmetic applications. *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), no. 10, 3437–3447

Raffaele Marcovecchio: Misure d'irrazionalità e di non-quadraticità di logaritmi di numeri razionali ed algebrici

Raffaele Marcovecchio
Fakultät für Mathematik Universität Wien (Austria)
email: marcovr8@univie.ac.at

Sunto. Per ogni α irrazionale reale, e per ogni $A \leq 2$, esistono infinite coppie di interi (p_n, q_n) tali che per ogni n si abbia

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^A}. \tag{37}$$

Ciò segue ad esempio dalla teoria delle frazioni continue, o in alternativa dal principio di Dirichlet. L'estremo superiore dei numeri reali A per i quali esistono infinite coppie di interi (p_n, q_n) che verificano la (1) è detto *misura d'irrazionalità* di α, e si denota con $\mu(\alpha)$.

Tale nozione ammette generalizzazioni in dimensione superiore, e.g. se α non è né un numero razionale né un irrazionale quadratico si definisce un'analoga *misura di non-quadraticità* $\mu_2(\alpha)$, e nozioni simili possono essere introdotte relativamente ad un campo di numeri. Proporrò un breve excursus su alcuni recenti risultati quantitativi d'irrazionalità (risp. non-quadraticità) di logaritmi di numeri razionali o algebrici. I risultati su campi di numeri diversi dal campo dei razionali sono otteuti in collaborazione con C.Viola.

Bibliografia

[1] F.Amoroso e C.Viola, *Approximation measures for logarithms of algebraic numbers.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) **30** (2001), no. 1, 225–249.

[2] R.Marcovecchio, *The Rhin-Viola method for* $\log 2$, Acta Arith. **139** (2009), 147–184.

[3] R.Marcovecchio e C.Viola, *Irrationality and non-quadraticity measures for logarithms of algebraic numbers*, sottoposto per la pubblicazione.

Giuseppe Molteni: Congruenze soddisfatte dal numero di rappresentazioni di 2^k come somma di k potenze di due

Giuseppe Molteni
Dipartimento di Matematica, Università di Milano
email: giuseppe.molteni1@unimi.it

Sunto. Sia $U(\ell, k)$ il numero di rappresentazioni che l'intero ℓ ha come somma di potenze intere di 2: $U(\ell, k) := \sharp\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k : \ \ell = \sum_j 2^{n_j}\}$. Si osservi che in questa espressione sequenze che differiscono per l'ordine sono considerate *distinte*; proprio per questo motivo lo studio di $U(\ell, k)$ non è un tipico problema di partizione e non è collegato, nonostante l'analogia, con un analogo problema proposto da Erdös.

Il comportamento di $U(\ell, k)$ al variare di ℓ e k è estremamente irregolare. Più regolare è invece quello di $W(\sigma, k)$, definito come il massimo tra i valori assunti da $U(\ell, k)$ al variare di ℓ tra gli interi la cui rappresentazione binaria contiene esattamente σ potenze di 2. In effetti si dimostra che $W(\sigma, k)$ è calcolabile a partire da $W(1, k)$ e quest'ultimo è a sua volta calcolabile in quanto uguale a $U(2^k, k)$.

Ramanujan dimostrò che la funzione di partizione $p(n)$ soddisfa notevoli ed inaspettate proprietà di congruenza. Esse furono in seguito estese ma la loro generalità e la loro natura sono state chiarite solo recentemente da Ahlgren, Ono e Mahlburg, ed è risultata collegata ad opportune funzioni modulari da un lato, ed a un concetto combinatorio noto con il nome di *crank* dall'altro. *Summa* di questi studi è il fatto che per ogni q coprimo con 6 esistono due interi a e b tali che

$$p(an + b) = 0 \pmod q, \qquad \forall n.$$

Nonostante la successione $W(1, k)$ di per sé non sia collegata a $p(n)$, l'analogia con il problema sulle partizioni suggerisce di analizzare i valori di $W(1, k)$ modulo un intero q. In effetti tali relazioni sembrano esistere, e, anzi, esse paiono numerose. Tre esempi su tutti:

$$\begin{aligned} W(1,k) &= 1 \pmod 2 && \forall k \geq 1, \\ W(1,k) &= (-1)^k + 4 \pmod 8 && \forall k \geq 3, \\ W(1,8mk) &= (-(-1)^{(m-1)/2} + 2 + 4D)m \pmod{8m} && \forall k, \forall m \text{ dispari}, \end{aligned}$$

con $D = 0$ se $m = 3, 5 \pmod 8$, e $D = 1$ se invece $m = 1, 7 \pmod 8$. E tuttavia la loro validità è in gran parte non spiegata. In effetti la congruenza modulo 2 può essere dimostrata con un semplice argomento combinatorio ma questo sembra essere un fatto accidentale: l'unica altra congruenza per la quale possediamo una dimostrazione, quella modulo 8, è infatti provata mediante una 'tortuosa' argomentazione non ricollegabile a tecniche combinatorie.

Laura Paladino: Divisibilità locale-globale nei gruppi algebrici commutativi

Laura Paladino
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
email: paladino@mat.unical.it

Gabriele Ranieri
Max Plank Institut, Bonn

Evelina Viada
Mathematisches Institut, Universität Basel

Sunto. Sia k un campo di numeri e sia $\mathcal{A}$ un gruppo algebrico commutativo su k. Indichiamo con M_k l'insieme delle valutazioni $v \in k$ e con k_v il completamento di k tramite v. Consideriamo il seguente quesito, noto come *Problema di Divisibilità Locale-Globale.*

Problema: *Sia $P \in \mathcal{A}(k)$. Supponiamo che per tutte le $v \in M_k$, tranne al più un numero finito, esista $D_v \in \mathcal{A}(k_v)$ tale che $P = qD_v$, dove q è un intero positivo. È possibile concludere che esiste $D \in \mathcal{A}(k)$ tale che $P = qD$?*

Nel caso in cui $\mathcal{A}$ è il gruppo moltiplicativo $\mathbb{G}_m$, una risposta è ben nota. Nel caso di altri gruppi algebrici, nell'ultimo decennio è stata data un'interpretazione cohomologica al problema (vedi [1] e [2]). Verranno mostrati i risultati più recenti ottenuti tramite tale interpretazione cohomologica; in particolare, verrà considerato il caso in cui $\mathcal{A}$ è una curva ellittica $\mathcal{E}$ e $k = \mathbb{Q}$ ([3], [4], [5] e [6]).

Bibliografia

[1] R. Dvornicich R., U. Zannier: "Local-global divisibility of rational points in some commutative algebraic groups", Bull. Soc. Math. France, 129 (2001), 317-338.

[2] R. Dvornicich, U. Zannier: "On local-global principle for the divisibility of a rational point by a positive integer", Bull. Lon. Math. Soc., 39 (2007), 27-34.

[3] L. Paladino: "Local-global divisibility by 4 in elliptic curves defined over $\mathbb{Q}$", Annali di Matematica Pura e Applicata, 189.1, (2010), 17-23.

[4] L. Paladino: "Elliptic curves with $\mathbb{Q}(\mathcal{E}[3]) = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ and counterexamples to local-global divisibility by 9", Le Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 22. 1 (2010), 138-160.

[5] L. Paladino: "On counterexamples to local-global divisibility in commutative algebraic groups", Acta Arithmetica, 148.1 (2011), pp. 21-29.

[6] L. Paladino, G. Ranieri, E. Viada: "Local-Global Divisibility by p^n in elliptic curves", sottoposto per la pubblicazione.

Francesco Pappalardi: Sull'esponente del gruppo dei punti di una curva ellittica su un campo finito

Francesco Pappalardi
Dipartimento di Matematica, Università Roma Tre
email: pappa@mat.uniroma3.it

Sunto. Presentiamo una stima inferiore per l'esponente del gruppo dei punti razionali di una curva ellittica definita su un campo finito. Risultati precedenti considerano campi finiti $\mathbb{F}_{q^m}$ dove q è fissato oppure $m = 1$ e q è primo.

In questo lavoro permettiamo sia a q che a m di variare e le nostre stime sono esplicite e non dipendono dalle curve ellittiche.

Bibliografia

[1] F. Pappalardi: "On the exponent of the group of points of an elliptic curve over a finite filed", Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011) 2337-2341.

Giulio Peruginelli: Punti quasi-interi su componenti lineari di curve a variabili separabili

Giulio Peruginelli[1]
Institut für Analysis und Computational Number Theory, Technische Universität, Graz, Austria
email: peruginelli@math.tugraz.at

Sunto. Recentemente sono stati classificati i polinomi in una variabile a coefficienti razionali la cui immagine è uguale a quella di un polinomio a coefficienti interi in più variabili (vedi [3]).

Teorema (P. - Zannier, 2010). *Sia* $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]$.

Si ha che $f(\mathbb{Z}) = g(\mathbb{Z}^m)$ *per un qualche polinomio* $g \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_m]$ *se e solo se* $f \in \mathbb{Z}[\frac{sX(r-sX)}{2}]$ *dove* s, r *sono interi dispari coprimi e* s *è una potenza di un numero primo o uguale a* 1.

Se la suddetta condizione è soddisfatta risulta inoltre che m può essere scelto uguale a 1 o 2 e il polinomio g è descritto esplicitamente in termini di f. Possiamo quindi dire che tali polinomi sono polinomialmente generati su $\mathbb{Z}$ dalla famiglia $B(X) = \frac{sX(r-sX)}{2}$, al variare di s, r come sopra. Risultati di parametrizzazione di valori interi di polinomi sono contenuti in [1] e [2].

Mostreremo che tale problema è legato allo studio dei punti quasi-interi della curva data dall'equazione $f(X) = f(Y)$ e alla loro distribuzione sulle componenti lineari di tale curva.

Più in generale verranno fornite evidenze verso una generalizzazione di tale risultato ad un campo di numeri K, dove come è ben noto le componenti lineari di tali curve sono in biezione con un gruppo ciclico finito formato da radici dell'unità contenute nel campo K.

Bibliografia

[1] S. Frisch. *Remarks on polynomial parametrization of sets of integer points.* Comm. Algebra 36 (2008), no. 3, 1110-1114.

[2] S. Frisch, L. Vaserstein. *Parametrization of Pythagorean triples by a single triple of polynomials.* Pure Appl. Algebra 212 (2008), no. 1, 271-274.

[3] G. Peruginelli, U. Zannier. *Parametrizing over* $\mathbb{Z}$ *integral values of polynomials over* $\mathbb{Q}$, Comm. Algebra 38 (2010), no. 1, 119–130.

[1] Lavoro svolto durante un soggiorno al dipartimento di Matematica LAMFA, Amiens, Francia, finanziato dal CNRS.

Antonella Rossi: Un risultato condizionale sul problema di Goldbach-Linnik

Antonella Rossi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: antonellarossi82@alice.it

Sunto. Questa comunicazione verterà sul problema di Goldbach-Linnik, cioè di dimostrare che ogni numero intero pari può essere scritto come somma di due primi e k potenze di 2. Uno dei modi di affrontare questo problema è quello di studiare la grandezza dell'insieme eccezionale, cioè l'insieme dei numeri pari che non hanno una rappresentazione come somma di due primi e k potenze di 2. Si può studiare inoltre in intervalli del tipo $[N, N+H]$, con $H = o(N)$ e $N \to +\infty$, detti intervalli corti. Mettendo insieme questi due aspetti nel mio lavoro ho studiato la seguente quantità

$$E_k(N,H) = |\{N \leq n \leq N+H, n \text{ pari } : n \neq p_1 + p_2 + 2^{\nu_1} + \cdots + 2^{\nu_k}\}|,$$

dove p_1, p_2 sono primi e H è la lunghezza dell'intervallo corto. Detto $R''_k(n)$ il numero pesato di rappresentazioni di n nella forma voluta e $M_k(n)$ il "termine principale atteso", si ha il seguente risultato

Teorema. *Assumendo GRH, consideriamo $k \geq 1$ e poniamo $0 < \gamma \leq 1$ fissato e $H = N^\gamma$, allora esiste una costante effettivamente calcolabile $c(\gamma) < 1$ tale che*

$$\sum_{N \leq n \leq N+H} \Sigma_k(n,N,H)^2 \leq c(\gamma)^{2k}(c_0 + o(1))H^{1/2}N^2L^{2k+5},$$

dove $\Sigma_k(n,N,H) = |R''_k(n) - M_k(n) + F_k(n,N,H)|$, $F_k(n,N,H) = o(NL^k)$ e c_0 è una costante reale positiva. In particolare $c(1) = 0.7163435444776661$ e $c(\gamma) \to 1$ quando $\gamma \to 0$.

Da questo si dimostra che $E_k(N,H) \leq c(\gamma)^{2k}(c_0 + o(1))H^{1/2}L^5$.

Ricordiamo inoltre che il caso $k = 0$, corrispondente al problema di Goldbach, è stato dimostrato da Kaczorowski, Perelli e Pintz.

Bibliografia

[1] Kaczorowski, J. and Perelli, A. and Pintz, J.: "A note on the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals", Monatsh. Math., 116(3-4):275-282, 1993

[2] Languasco, A. and Pintz, J. and Zaccagnini, A.: "On the sum of two primes and k powers of two", Bull. Lond. Math. Soc., 39(5):771-780, 2007

[3] Pintz, J. and Ruzsa, I. Z.: "On Linnik's approximation to Goldbach's problem. I", Acta Arith., 109(2):169-194, 2003

[1] Lavoro svolto nell'ambito della tesi di dottorato

Valentina Settimi: Norma L^2 di somme esponenziali su quadrati di primi

Alessandro Languasco
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova

Valentina Settimi
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova
email: `vsettimi@math.unipd.it`

Sunto. Nell'articolo [1] ho studiato l'approssimabilità di un numero reale dato mediante i valori della forma

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2^2 + \lambda_3 p_3^2 + \mu_1 2^{m_1} + \ldots + \mu_s 2^{m_s}, \tag{38}$$

dove p_1, p_2, p_3 sono numeri primi, $m_1, \ldots, m_s$ sono interi positivi e i coefficienti λ_1, λ_2, λ_3 e μ_1, ..., μ_s sono numeri reali soddisfacenti ad adeguate relazioni.

Nel 2005, W.P. Li e Wang [2] hanno dimostrato che i valori assunti dalla forma (1) possono approssimare arbitrariamente bene qualsiasi numero reale, prendendo $s \geq s_0$ e $s_0 = s_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ è sufficientemente grande.

In [1] miglioriamo il risultato di W.P. Li e Wang, abbassando il valore di s_0 di circa il 90&. Tale miglioramento segue principalmente dall'aver inserito all'interno del metodo di Davenport-Heilbronn la seguente stima L^2 al posto di una in $\|\|_\infty$.

Teorema. *Sia $X > 0$ sufficientemente grande. Definiamo*

$$S(\alpha) = \sum_{X/2 \leq p^2 \leq X} \log p \; e(p^2\alpha), \qquad e \qquad U(\alpha) = \sum_{X/2 \leq n^2 \leq X} e(n^2\alpha).$$

Siano $\epsilon > 0$ e $1/X \leq Y \leq 1/2$. Allora esiste una costante effettiva $c = c(\epsilon) > 0$ tale che

$$\int_{-Y}^{Y} |S(\alpha) - U(\alpha)|^2 \, \mathrm{d}\alpha \ll_\epsilon \frac{\log^2 X}{YX} + \exp\Big(- c\Big(\frac{\log X}{\log\log X}\Big)^{1/3}\Big).$$

uniformemente per $1/X \leq Y \leq X^{-7/12-\epsilon}$.

Questa è una procedura standard quando si lavora con i primi, ma sembra essere la prima volta che tale tecnica viene utilizzata in applicazioni che coinvolgono i quadrati di primi.

Bibliografia

[1] A. Languasco, V. Settimi, On a diophantine problem with one prime, two squares of primes and s powers of two, preprint, 2011. http://arxiv.org/abs/1103.1985.

[2] W. P. Li, T. Z. Wang, Diophantine approximation by a prime, squares of two primes and powers of two, Pure Appl. Math. (Xi'an), 21:295–299, 2005. (Cinese)

Francesco Veneziano: Punti interi quadratici su curve di genere 1 definite da una doppia equazione di Pell

Francesco Veneziano
Scuola Normale Superiore di Pisa
email: `f.veneziano@sns.it`

Sunto. Sia $\mathcal{C}$ una curva irriducibile definita su un campo di numeri k. La struttura di $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ è nota, dipende dal genere della curva, e in particolare $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ è un insieme finito quando il genere g di $\mathcal{C}$ è maggiore di 1. Dal momento che $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$ è infinito, è naturale chiedersi cosa accada considerando l'insieme dei punti algebrici fino a un certo grado fissato, in particolare se questi sono infiniti o meno.

Questo problema è stato affrontato, tra gli altri, da Abramovich e Harris; il problema analogo relativo ai punti *interi* di grado 2 è stato affrontato in modo conclusivo da Corvaja e Zannier applicando il teorema del sottospazio di Schmidt, e nella mia tesi di dottorato ho mostrato come, quando $\mathcal{C}$ ha una particolare struttura, si possa ottenere un risultato più esplicito senza ricorrere al teorema del sottospazio, ma adoperando un metodo più semplice, dovuto a Vojta.

Le curve di cui mi sono occupato sono quelle definite da un sistema di due equazioni di Pell:

$$\begin{cases} y^2 = ax^2 + c \\ z^2 = bx^2 + d \end{cases}$$

con a, b, c, d interi algebrici, $abcd \neq 0, ad \neq bc$. Questo sistema definisce una curva di genere 1 in $\mathbb{P}_3$ con quattro punti all'infinito, e la peculiarità essenziale nella dimostrazione è che la differenza di due qualunque di questi quattro punti è di torsione nel gruppo di Picard.

Si dimostra che su una curva siffatta tutti i punti interi quadratici meno un numero finito appartengono a tre famiglie infinite corrispondenti a tre mappe di grado due verso $\mathbb{P}_1$, e il numero di eccezioni è limitato in modo esplicito, sebbene esse stesse non siano determinabili in modo effettivo.

Bibliografia

[1] D. Abramovich e J. Harris: Abelian varieties and curves in $W_d(C)$, Compositio Math. 78 (1991) no. 2, 227-238.

[2] P. Corvaja e U. Zannier: On integral points on surfaces, J.Reine Angew. Math. 565 (2003), 27-42.

[3] P. Vojta: Diophantine approximation and value distribution theorie, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1239, Springer-Verlag, Berlino, 1987.

Stefano Vigni: Risultati recenti sull'aritmetica dei punti di Darmon

Matteo Longo
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova

Victor Rotger
Departament de Matemàtica Aplicada II, Universitat Politècnica de Catalunya

Stefano Vigni
Departament de Matemàtica Aplicada II, Universitat Politècnica de Catalunya
email: `stefano.vigni@upc.edu`

Sunto. In [1] H. Darmon ha introdotto la nozione di punti di Stark–Heegner su curve ellittiche definite su $\mathbb{Q}$. Questi punti p-adici *locali* sono congetturalmente punti *globali* razionali su "ring class field" di campi quadratici reali.

In [2] abbiamo studiato il quoziente p-nuovo $J_0^D(Mp)^{p\text{-new}}$ della Jacobiana di una curva di Shimura definita su $\mathbb{Q}$ di discriminante $D > 1$ e livello Mp (con p primo che non divide MD e $(M, D) = 1$). Dopo aver opportunamente definito un toro p-adico T e un reticolo $L \subset T$, abbiamo considerato il quoziente T/L.

Teorema 21 (Longo–Rotger–V). *Esiste un'isogenia Hecke-equivariante definita sull'estensione quadratica non ramificata di $\mathbb{Q}_p$ fra il quoziente T/L e lo spazio rigido analitico associato al prodotto di due copie di $J_0^D(Mp)^{p\text{-new}}$.*

Come applicazione dei risultati di [2], in [3] abbiamo introdotto *punti di Darmon* su tori p-adici e Jacobiane di curve di Shimura su $\mathbb{Q}$, che generalizzano i punti di Stark–Heegner definiti da Darmon. Abbiamo quindi formulato congetture circa la loro razionalità su ring class field di campi quadratici reali.

Infine, in [4] abbiamo studiato l'algebricità delle proiezioni dei punti di Darmon definiti in [3] su curve ellittiche $E_{/\mathbb{Q}}$. Sia K un campo quadratico reale in cui il primo p è inerte, sia H_K il campo di classe di Hilbert stretto di K, poniamo $G := \mathrm{Gal}(H_K/K)$ e sia $\{P_\sigma \in E(K_p)\}_{\sigma\in G}$ la famiglia dei punti di Darmon su E. Sia quindi χ un "genus character" di K con corrispondente "genus field" H_χ e definiamo $P_\chi := \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma)P_\sigma \in E(K_p)$.

Teorema 22 (Longo–V). *Un opportuno multiplo intero del punto P_χ appartiene all'immagine di $E(H_\chi)$ in $E(K_p)$.*

Bibliografia

[1] H. Darmon, "Integration on $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}$ and arithmetic applications", *Ann. of Math. (2)* **154** (2001), no. 3, 589–639.

[2] M. Longo, V. Rotger, S. Vigni, "On rigid analytic uniformizations of Jacobians of Shimura curves", *Amer. J. Math.*, in stampa.

[3] M. Longo, V. Rotger, S. Vigni, "Special values of L-functions and the arithmetic of Darmon points", sottoposto per pubblicazione (2010).

[4] M. Longo, S. Vigni, "The rationality of quaternionic Darmon points over genus fields of real quadratic fields", sottoposto per pubblicazione (2011).

Alessandro Zaccagnini: Correlazione fra gli zeri della funzione zeta e numeri primi negli intervalli corti

Alessandro Zaccagnini
Dipartimento di Matematica, Università di Parma
email: alessandro.zaccagnini@unipr.it

Alessandro Languasco
Dipartimento di Matematica, Università di Padova

Alberto Perelli
Dipartimento di Matematica, Università di Genova

Sunto. In un famoso articolo del 1973, Montgomery [2] ha considerato la funzione di correlazione fra gli zeri non banali $\rho = \beta + i\gamma$ della funzione zeta di Riemann

$$F(X,T) = \sum_{0<\gamma,\gamma'\le T} X^{i(\gamma-\gamma')} w(\gamma-\gamma') \qquad \text{dove} \qquad w(u) = \frac{4}{4+u^2}$$

dimostrando che dalla Congettura di Riemann segue (essenzialmente) che $F(X,T) \sim (T/2\pi)\log X$ quando $T \to \infty$, uniformemente per $T^\epsilon \le X \le T$, per ogni $\epsilon > 0$ fissato. Nello stesso articolo, propose la Congettura di Correlazione per le coppie di zeri, e cioè che $F(X,T) \sim (T/2\pi)\log T$ quando $T \to \infty$, uniformemente per $T \le X \le T^A$, per ogni $A > 1$ fissato. Successivamente, Gallagher & Mueller nel 1978 ed Heath-Brown nel 1982 hanno studiato varie applicazioni della Congettura di Montgomery alla distribuzione dei numeri primi negli intervalli "corti," cioè intervalli del tipo $[x, x+y]$ dove $y = o(x)$ quando $x \to \infty$. Inoltre, Goldston & Montgomery nel 1987 hanno dimostrato che la Congettura di Montgomery equivale alla formula asintotica $J(X,\theta) \sim \frac{3}{2}X^2\theta\log(1/\theta)$ per $X \to \infty$, uniformemente per $X^{-1} \le \theta \le X^{-\epsilon}$, per la media quadratica dei numeri primi negli intervalli corti, definita da

$$J(X,\theta) = \int_X^{2X} (\psi(x+\theta x) - \psi(x) - \theta x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Ulteriori studi sono stati fatti, fra gli altri, da Montgomery & Soundararajan (2002 e 2004) e da Chan [1], che hanno considerato relazioni fra versioni quantitativamente esplicite della Congettura di Montgomery e della formula asintotica per $J(X,\theta)$. In questo lavoro, estendiamo e miglioriamo i risultati di Chan [1], ottenendo una relazione piú precisa e piú forte tra i termini d'errore nelle formule asintotiche citate.

Bibliografia

[1] T. H. Chan: "More precise pair correlation of zeros and primes in short intervals", J. London Math. Soc. (2) **68** (2003), 579–598.

[2] H. L. Montgomery: "The pair correlation of zeros of the zeta function", Proc. Symp. Pure Math. **24** (1973), 181–193.

Sezione 21 Storia della matematica

Sandro Caparrini: Alle origini della fisica teorica: la corrispondenza fra T. Levi-Civita e A. Righi (1901-1920)

Sandro Caparrini[1]
U.F.R. de Mathématiques, Université de Lille 1
email: caparrini@libero.it

Sunto. Nel settembre del 1901 ebbe inizio una corrispondenza fra il matematico T. Levi-Civita (1873-1941) e il fisico sperimentale A. Righi (1850-1920) su questioni che oggi definiremmo di fisica teorica.

Lo spunto iniziale fu dato dagli esperimenti del francese V. Crémieu, che sembravano minare le fondamenta della teoria di Maxwell. Crémieu pensava infatti di aver dimostrato che una carica elettrica in movimento non crea un campo magnetico. I suoi risultati, sostenuti da Poincaré, erano in quegli anni al centro dell'interesse dei fisici.

Dagli esperimenti di Crémieu si giunse a discutere di un problema di fisica matematica: il calcolo del campo elettromagnetico generato da una carica che trasla uniformemente rispetto a un piano conduttore. È una questione che coinvolge la validità delle equazioni fondamentali e lo status delle condizioni al contorno nell'elettromagnetismo.

Nel corso degli anni successivi furono trattati altri argomenti ai confini fra teoria ed esperimento: la costituzione dei raggi catodici, la massa elettromagnetica, l'esperimento di Michelson e Morley.

La corrispondenza tra Levi-Civita e Righi è un esempio di collaborazione al più alto livello fra teorici e sperimentali. Essa aiuta a comprendere il ruolo dei matematici nella nascita della fisica teorica italiana. In particolare, documenta la diffusione della relatività in Italia.

La presente comunicazione è basata su un lavoro svolto in collaborazione con Rossana Tazzioli (Università di Lille).

Bibliografia

[1] S. Caparrini e R. Tazzioli (a cura di): *Alle origini della fisica teorica: la corrispondenza fra T. Levi-Civita e A. Righi (1901-1920)*, Milano, PRISTEM, 2011

[1]Lavoro svolto nell'ambito dell'attività dell'UFR de mathématiques, Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1.

Cinzia Cerroni: Dai complessi agli ipercomplessi nella metà dell'ottocento

Cinzia Cerroni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo
email: `cerroni@math.unipa.it`

Sunto. La teoria dei numeri complessi e soprattutto la loro interpretazione geometrica hanno stimolato le ricerche sull'esistenza di una loro possibile estensione. A partire dalla fine della prima metà dell'ottocento, in particolare in Gran Bretagna, si svilupparono molti studi in questa direzione che portarono alla nascita di nuovi sistemi di numeri ipercomplessi. La scoperta dei Quaternioni, nel 1843, da parte di W.R.Hamilton (1805-1865) rivelò ai matematici l'esistenza di un sistema algebrico che aveva tutte le proprietà dei numeri reali e complessi tranne la commutatività della moltiplicazione. Su questa scia si svilupparono in Gran Bretagna le ricerche su nuovi sistemi di numeri ipercomplessi, che portarono alla scoperta dei *Tessarini* (1848), degli *Ottonioni* (1845), dei *Biquaternioni* di Clifford (1873) ed alla presentazione sistematica delle algebre di ipercomplessi note fino a quel tempo di B. Pierce (1871). Analizzeremo, in particolare, la nascita dei *Tessarini* (noti oggi come bicomplessi). L'idea venne a James Cockle (1819-1895) a partire dallo studio di equazioni irrazionali, dette *"congeneric surd equations"*. In particolare, dall'equazione $\sqrt{j}+1=0$ introdusse una nuova unità immaginaria j, che soddisfa $j^2=1$ ed ispirandosi alla teoria dei Quaternioni di Hamilton (come egli stesso afferma) scrisse il generico tessarino come $w=a+bi+cj+ijd$, dove $i^2=-1$. Nel 1892 Corrado Segre (1863-1924) nei sui studi di Geometria Complessa riscoprì l'algebra dei bicomplessi.

Un'attenzione particolare, merita, inoltre il contesto storico inglese nel quale si sono sviluppate le ricerche sopradette.

Bibliografia

[1] James Cockle: "On Certain Functions Resembling Quaternions and on a New Imaginary in Algebra", *Philosophical Magazine*, Series 3, n.33, 1848, pp. 435-9.

[2] Corrado Segre: "The real representation of complex elements and hyperalgebraic entities", *Mathematische Annalen*, n.40, 1892, pp.413-67.

[3] Helena M. Pycior, "George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra", *Historia Mathematica*, n.8, 1981, pp.23-41.

Luca Dell'Aglio: Teoria delle omografie e calcolo tensoriale

Luca Dell'Aglio
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
email: dellaglio@unical.it,paolo.freguglia@technet.it

Paolo Freguglia
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi dell'Aquila

Sunto. Tema della comunicazione è l'analisi dei rapporti tra i metodi tensoriali e la scuola vettorialista italiana durante i primi decenni del Novecento. Viene in particolare preso in esame il modo in cui le nozioni di base del calcolo differenziale assoluto - dalla definizione di 'sistema m-plo' ai principi dell'algebra e dell'analisi tensoriale - furono riformulate dalla scuola vettorialista, soprattutto all'interno del volume *Espaces courbes* di C. Burali-Forti e T. Boggio (1924), mediante un sistematico uso della teoria delle omografie.

Bibliografia

[1] C. Burali-Forti, T. Boggio, *Espaces courbes*, Torino, Sten Editrice, 1924.

[2] C. Burali-Forti, R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale: I, Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.

[3] L. Dell'Aglio, *On the genesis of the concept of covariant differentiation*, Revue d'Histoire des Mathématiques, 2, 1996, pp. 215-264.

[4] P. Freguglia, *Geometria e numeri. Storia, teoria elementare e applicazioni del calcolo geometrico*, Torino, Bollati Boringhieri, 2006.

[5] P. Freguglia, C. Bocci, *Dall'eredità grassmanniana alla teoria delle omografie nella scuola di Peano*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, A, (I) 1, 2008, pp. 131-164.

[6] T. Levi-Civita, G. Ricci-Curbastro, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Mathematische Annalen, 54, 1901, pp. 125-201.

Veronica Gavagna: L'edizione critica degli *Elementorum compendia* di Francesco Maurolico

Veronica Gavagna
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
email: vgavagna@unisa.it

Sunto. Nel 1567 il messinese Francesco Maurolico (1494-1575) cominciò a realizzare un'enciclopedia del sapere in compendi, con lo scopo di utilizzarla in un primo tempo per l'insegnamento nel locale Collegio gesuitico e successivamente in tutti i Collegi della Compagnia. Gli *Elementorum compendia* nascono dunque in seno a questo ambizioso progetto e si compongono di un nucleo di scritti redatti per l'occasione (libri I-X) ai quali l'autore pensò di aggiungere, dopo averli opportunamente rielaborati, due testi risalenti rispettivamente al 1532 e al 1563: una lettura *ex traditione Maurolyci* dei libri XIII-XV e un'opera dal titolo *De proportione communium solidorum*, trasformata nel compendio dei libri XI e XII. I testi che compongono gli *Elementorum compendia* sono dunque poco uniformi tra loro, anzitutto per lo stile dimostrativo e per le fonti usate; senza contare che alcuni libri – soprattutto i libri II e X – recano tracce di significativi ripensamenti dell'autore. Nel corso dell'intervento si farà cenno ai problemi ecdotici posti dalla complessità del testo e dalle particolari vicende editoriali vissute, nonché alle soluzioni adottate nell'edizione critica degli *Elementorum compendia*, che è in corso di realizzazione. Paradossalmente, all'eterogeneità dei testi si oppone una sostanziale uniformità nell'approccio, che si fonda su una lettura fortemente aritmetizzante degli *Elementi*. Tale approccio si rivela spesso profondamente originale, come testimoniano, ad esempio, le dimostrazioni aritmetiche (alternative a quelle di Euclide) della cubatura della piramide e del cono, primo caso di applicazione dei cosiddetti "metodi infinitesimali" usati successivamente da Maurolico per la determinazione del centro di gravità del paraboloide di rivoluzione.

Bibliografia

[1] V.Gavagna: "Francesco Maurolico and the restoration of Euclid in the Renaissance", Proceedings of the 4th International Conference of the European Society for the History of Science, Barcelona 18-20 November 2010 (in corso di stampa).

[2] F.Maurolico: "Elementorum XI et XII. Solidorum primus et secundus", Introduzione ed edizione critica a cura di V.Gavagna, http://www.maurolico.unipi.it/edizioni/euclide/librisolidi/intro.htm, 2006.

[3] P.D.Napolitani, J.P.Sutto: "Francesco Maurolico et le centre de gravité du paraboloïde", SCIAMVS, 2 (2001), pp. 187-250.

[4] J.P. Sutto: "Le compendium du 5e livre des *Éléments* d'Euclide par Francesco Maurolico", Revue d'histoire des mathématiques, 6 (2000), pp.59-94

Livia Giacardi: Le lettere di Beltrami a Betti, Tardy e Gherardi

Livia Giacardi[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Torino
email: livia.giacardi@unito.it

Rossana Tazzioli
Laboratoire Paul Painlevé, Università di Lille 1

Sunto. Come è noto, molti matematici e fisici italiani contribuirono in prima persona al Risorgimento e la loro opera per la *costruzione* di una identità culturale e politica e, come scrive Cremona, *pel lustro della Scienza italiana e pel progresso dell'alto insegnamento*, continuò anche dopo l'Unità. Varie sono le direzioni in cui si esplicò la loro opera: nella creazione e nello sviluppo di nuovi filoni di ricerca; nella riorganizzazione dell'università; nella realizzazione di giornali ad alto livello scientifico; nell'avviamento dei giovani alla ricerca; nella riforma della scuola; nella pubblicazione e traduzione di trattati e manuali per l'insegnamento universitario e secondario. Le lettere inedite che presentiamo mettono in evidenza l'impegno scientifico e istituzionale di Eugenio Beltrami (1835-1900), Enrico Betti(1823-1892), Placido Tardy (1816-1914) e Silvestro Gherardi (1802-1879), mostrandoci le loro opinioni sulla realtà politica e accademica di quegli anni e le loro aspettative future. Ci hanno inoltre consentito di portare alla luce nuovi documenti come gli appunti delle lezioni di Beltrami a Pavia, o la proposta di decreto sull'insegnamento universitario avanzata da Gherardi durante il suo breve mandato come ministro della Pubblica Istruzione nella Repubblica romana. Soprattutto queste lettere gettano luce su aspetti fino ad ora trascurati della vita e dell'opera di Beltrami. Da esse e da altre corrispondenze in parte inedite, e da documenti recentemente ritrovati (Archivio centrale dello Stato, Roma; Archives de Académie des Sciences, Parigi; Scuola Normale Superiore, Pisa; Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek, Göttingen, ...), emergono il suo modo di intendere le scienze matematiche e il rapporto tra teoria e realtà, l'impegno volto a migliorare l'insegnamento nella scuola secondaria e nell'università, il ruolo nel processo di internazionalizzazione della matematica italiana e le relazioni con i colleghi stranieri, la sua propensione ad aiutare i giovani e le sue qualità di maestro.

Bibliografia

[1] L. Giacardi e R. Tazzioli: *Pel lustro della Scienza italiana e pel progresso dell'alto insegnamento". Le lettere di Beltrami a Betti, Tardy e Gherardi*, Milano, Mimesis (in stampa).

[2] R. Tazzioli. *New Perspectives on Beltrami's Life and Work. Considerations based on his Correspondence*, in stampa.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del progetto *Scuole matematiche e identità nazionale nell'età moderna e contemporanea* - Unità di Torino, e dell'attività dell'UFR de mathématiques, Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1.

Iolanda Nagliati: Le prime ricerche algebriche di Enrico Betti

Iolanda Nagliati
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
email: iolanda.nagliati@unife.it

Sunto. La ricorrenza dei 150 anni dell'Unità d'Italia, che vide il significativo impegno nel periodo risorgimentale degli universitari pisani, offre l'occasione per riprendere e ampliare un mio lavoro precedente riguardante il carteggio tra Enrico Betti (1823 - 1892) e il suo maestro Ottaviano Fabrizio Mossotti (1791 - 1863). Altro materiale inedito si aggiunge ora allo studio: tra i suoi corrispondenti figurano, oltre ai già pubblicati Hermite e Borchardt, Arthur Cayley, Leopold Kronecker, James Joseph Sylvester, Bernhard Riemann, Carl Holmgren, e tra gli italiani Giusto Bellavitis, Giovanni Novi, Riccardo Felici, Domenico Chelini, Placido Tardy, Barnaba Tortolini.

Appartengono al periodo che precede il suo ritorno a Pisa come professore (1857) le importanti ricerche algebriche sulla risolubilità delle equazioni e sulla teoria delle sostituzioni, degli invarianti e dei covarianti, condotte in costante contatto con numerosi matematici italiani ed europei, e in particolare con il suo maestro Mossotti. Sulla questione della risolubilità delle equazioni di grado superiore al quarto, in una lettera a Mossotti del 1853, enuncia il risultato: Le radici di una equazione generale di 5° sono sempre funzioni algebriche di un seno la cui coamplitudine è una funzione iperbolica. Betti non completò il proprio programma al riguardo: ai problemi personali si aggiunsero probabilmente difficoltà tecniche, inizialmente sottovalutate, che pensava di superare grazie alla teoria degli invarianti, utilizzati nelle applicazioni delle funzioni ellittiche alla teoria delle equazioni; l'argomento nel tempo ebbe sempre più importanza specialmente dopo il primo incontro con Sylvester del settembre 1854. L'influsso di questi e, per suo tramite, di Cayley, fu molto importante per gli indirizzi di ricerca di Betti negli anni immediatamente successivi: pubblicò la lunga monografia "La teorica delle funzioni ellittiche" nel 1860, dopo aver affrontato l'opera di Riemann sull'analisi complessa.

Bibliografia

[1] M.T.Borgato: "Il carteggio Brioschi-Betti (1857-1890)", comunicazione al II Congresso SISM, 2002.

[2] M.T.Borgato: "Continuity and discontinuity in italian mathematics after the unification: from Brioschi to Peano", Organon, 41 (2009), pp. 219-231.

[3] U.Bottazzini: "Algebraische Untersuchungen in Italien, 1850-1863", Hist. Mat., 7 (1980), pp. 24-37.

[4] I.Nagliati: "Le prime ricerche di Enrico Betti nel carteggio con Mossotti", Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XX (2000), pp. 3-86.

Nicla Palladino: La "costruzione" di una nazione: la corrispondenza politica e matematica durante l'unificazione dell'Italia

Nicla Palladino
Università della Basilicata
email: nicla.palladino@unina.it

Laura Martini
Università della Basilicata

Sunto. Si presenta una rassegna delle recenti pubblicazioni di corrispondenze epistolari tra alcuni dei più illustri matematici italiani che operarono durante il processo di unificazione e la costituzione del Regno d'Italia. Brioschi, Cremona, Betti, Genocchi, Battaglini e Tardy furono tra i più alti esponenti di quel periodo, sia per il valore assoluto delle loro capacità scientifiche sia per l'azione politica intrapresa. Le lettere raccolte e commentate consentono di seguire nei dettagli vari momenti e numerosi aspetti della loro attività scientifica, essendo ampiamente ricche di testimonianze del loro operato. Si evince l'impegno singolo e collettivo, impegno che si manifesta nel concreto della loro vita scientifica e nell'azione politico-istituzionale. Questi matematici lavorano al fine di creare nuove strutture culturali, riformare quelle già esistenti, fondare riviste specializzate, rilanciare la ricerca matematica per portarla ai livelli delle altre nazioni europee. Le corrispondenze offrono accurata testimonianza di questo processo storico e culturale: l'ambizione italiana era quella di conquistare un posto di rilievo nel panorama europeo o, almeno, secondo gli uomini più misurati, un posto di prima fila nell' "alta cultura" sotto la bandiera dei grandi "italiani" che fino al XVII secolo avevano fatto onore a tutta la penisola. Partendo dalle corrispondenze recentemente pubblicate e dalla bibliografia nota, si discutono le interazioni tra gli autori, il loro ruolo politico e scientifico e si approfondiscono aspetti che rivelano interessanti e a volte trascurati fattori e linee di tendenza.

Bibliografia

[1] Carbone-Gatto -Palladino, L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886), Firenze, Olschki, 2001.

[2] Carbone-Mercurio-Palladino -Palladino, La corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi, R. Accademia delle Scienze di Napoli, 2006.

[3] Cerroni-Martini, Il carteggio Betti-Tardy, Mimesis, Milano, 2009.

[4] Palladino-Mercurio, La corrispondenza epistolare di Battaglini a Cremona, in stampa per i R. Accademia delle Scienze di Napoli.

[5] Palladino-Mercurio-Palladino, Per la costruzione dell'Unità d'Italia. Le corrispondenze Brioschi-Cremona e Betti-Genocchi, Firenze, Olschki, 2009.

[6] Palladino-Palladino, Dalla "moderna geometria" alla "nuova geometria" italiana. Viaggiando per Napoli, Torino e dintorni, Firenze, Olschki, 2006.

Clara Silvia Roero: Università di Torino, Risorgimento e Unità d'Italia: l'impegno dei matematici

Clara Silvia Roero[1]
Dipartimento di Matematica G. Peano, Università di Torino
email: clarasilvia.roero@unito.it

Sunto. Nel 1900 a Parigi Volterra sottolineava l'importanza per lo sviluppo dell'analisi in Italia del viaggio di E. Betti, F. Brioschi e F. Casorati nel 1858 nelle Università europee. Nell'Ateneo torinese la tradizione dei soggiorni di studio e dei viaggi ricognitivi nelle istituzioni straniere prese l'avvio fin dal 1840, con il secondo congresso degli scienziati italiani, e con le aperture politiche e culturali messe in atto dallo Statuto albertino del 1848. Matematici e fisici di spicco, come C.I. Giulio, A. Avogadro, L.F. Menabrea, G. Plana, G.D. Botto, F. Chiò e A. Genocchi, non solo entrarono in contatto con illustri colleghi esteri (A.L. Cauchy, C. Babbage, C.G. Jacobi, L. Kronecker, ...) ma con il sostegno dei Savoia promossero viaggi e soggiorni di loro allievi, allo scopo di rinnovare la struttura e l'organizzazione degli studi e delle ricerche in Piemonte e poi nel Regno. Grazie alle missioni di Q. Sella, F. Giordano, G.V. Schiaparelli, F. Faà di Bruno e altri, si formarono nuove scuole tecniche sui modelli francesi, tedeschi e inglesi (R. Scuola di applicazione per ingegneri, 1859; R. Museo Industriale, 1862) e si ammodernarono i programmi degli insegnamenti nella Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali.

Nella comunicazione si metteranno in evidenza gli aspetti dell'attività scientifica, didattica e parlamentare svolta dai matematici e fisici dell'Università di Torino, impegnati in politica, come ministri, deputati, senatori, segretari, ispettori, ..., al fine di valutare in che modo gli ideali risorgimentali e la concretezza politica contribuirono

- alla costruzione di un sapere matematico avanzato, con l'edizione di pregevoli trattati e manuali tecnici, apprezzati anche all'estero;
- alla realizzazione di ricerche d'avanguardia, in grado di competere con le altre nazioni, con dotazioni di strumenti adeguati nei laboratori e negli osservatori astronomici;
- al recupero e alla valorizzazione della scienza nazionale tramite la storiografia e le Esposizioni. Significativi sono gli articoli di A. Genocchi e F. Siacci sul *Bullettino di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche* a cura di B. Boncompagni, di S. Gherardi sulla storia dell'algebra, di G. Govi su Leonardo e Galileo, di Q. Sella, ...
- al miglioramento dell'istruzione matematica nelle scuole primarie e secondarie e all'educazione etico-sociale-culturale del popolo.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Progetto *Scuole matematiche e identità nazionale nell'età moderna e contemporanea* - Unità di Torino

Luciana Zuccheri: Sull'insegnamento dell'Analisi agli inizi del '900

Luciana Zuccheri[1]
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Trieste
email: zuccheri@units.it

Verena Zudini
Dipartimento di Psicologia, Università di Milano-Bicocca

Sunto. L'inizio del XX secolo fu un momento fondamentale per lo sviluppo della didattica della matematica, soprattutto nel mondo mitteleuropeo, con la costituzione della CIEM - IMUK (in seguito, ICMI), il cui primo presidente Felix Klein fu promotore di un'importante riforma nell'insegnamento della matematica in Germania (Schubring, 2008). Nell'Impero Austro Ungarico si tenne conto delle nuove idee affermatesi in contesto internazionale e, con la riforma realizzata nel 1909/1910 dal Ministro Marchet, nelle scuole secondarie austriache furono introdotti i primi elementi di calcolo differenziale e integrale, assenti all'epoca, con rare eccezioni, dai programmi ufficiali di insegnamento delle scuole del Regno d'Italia (Giacardi, 2006). Per questo motivo l'insegnamento dell'analisi fu introdotto a Trieste nella scuola secondaria prima della Prima Guerra Mondiale. I principi metodologici utilizzati all'epoca dagli insegnanti secondari triestini erano basati su un testo (Jacob, 1913) contenente un metodo pratico di insegnamento della matematica per il "Gymnasium", la cui prefazione è opera del celebre fisico e filosofo Ernst Mach, alle cui teorie cognitive fa riferimento (Zuccheri e Zudini 2008). Si illustreranno alcuni esempi, in particolare l'introduzione del concetto di derivata.

Bibliografia

[1] L. Giacardi (a cura di): "Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia", Lugano: Lumières Internationales, 2006.

[2] J. Jacob: "Praktische Methodik des mathematischen Unterrichts", (prefazione di E. Mach), Wien: A. Pichlers Witwe und Sohn., 1913.

[3] G. Schubring: "The origins and early incarnations of ICMI", in: Menghini, Furinghetti, Giacardi, Arzarello (a cura di), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education*, Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, 2008, pp. 113-130.

[4] L. Zuccheri, V. Zudini: "The "Jacob Method": an example of application of cognitive theories in the period of the introduction of calculus in Austrian secondary mathematics instruction", *The International Journal for the History of Mathematics Education*, 3(2), 2008, pp. 57-64.

[1]Ricerca approvata dal CIRD dell'Università di Trieste e supportata dalla Fondazione CRTrieste.

Sezione 22 Didattica della matematica

Chiara Andrà: Tirare a caso nei test a risposta multipla: la peculiarità delle domande di matematica

Chiara Andrà
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino
email: chiara.andra@gmail.com

Guido Magnano
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino

Sunto. La possibilità di fornire la risposta corretta tirando a caso (in inglese, *guessing*) è una delle caratteristiche dei test a risposta multipla e ha acceso un dibattito sulla pratica del "guessing" che ha coinvolto ricercatori e insegnanti di tutti i livelli scolari in diversi Paesi (si veda per esempio [2] [3] [4]). In questa comunicazione, da un lato si presentano e si discutono i metodi statistici esistenti, nell'ambito della Item Response Theory [5], per stimare i parametri relativi al "guessing"; dall'altro lato, si evidenziano alcune implicazioni didattiche della pratica di scoraggiare il guessing.

La questione di fondo che muove la nostra ricerca è se a indurre la pratica del "guessing" sia il contenuto delle domande (o l'argomento), ovvero se sia una caratteristica del soggetto che risponde alle domande. I risultati presentati in questa comunicazione provengono da uno studio longitudinale sui test non selettivi a risposta multipla per la valutazione delle conoscenze possedute all'ingresso di corsi universitari di primo livello nell'Università degli Studi di Torino [1]. Da un'indagine svolta su (i) due insiemi di domande rispettivamente di matematica e di storia (facenti parte di uno stesso test, somministrato a circa 2000 studenti), e su (ii) studenti sostenenti un test di contenuto matematico, che prevedeva la penalizzazione della risposta sbagliata, presentiamo evidenza sperimentale che il rispondere a caso non possa essere considerato una caratteristica appartenente alla sola sfera della domanda (escludendo un ruolo attivo del soggetto).

Bibliografia

[1] C. Andrà: "Assessment of prerequisites for undergraduate studies through multiple-choice tests: the case of the University of Turin (Italy)". Tesi di dottorato. Torino, 2009.

[2] M. Bar-Hillel, D. Budescu e Y. Attali: "Scoring and keying multiple choice tests: A case study in irrationality", Mind and Society, 4, pp. 3-12. 2004.

[3] F. M. Lord: "Formula scoring and number-right scoring", Journal of Educational Measurement, 12, pp. 7-11. 1975.

[4] W. Kansup e A. R. Hakstian: "A comparison of several methods of assessing partial knowledge in multiple-choice tests: I. Scoring procedures", Journal of Educational Measurement, 12, pp. 219-230. 1975.

[5] W. J. van der Linden e R. K. Hambleton: "Handbook of modern Item Response Theory". Springer, 1997.

Cristina Coppola: Invenzione e manipolazione di un linguaggio socialmente condiviso in classi di scuola primaria

Cristina Coppola
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno
email: ccoppola@unisa.it

Tiziana Pacelli
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno

Monica Mollo
Dipartimento di Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Salerno

Sunto. La ricerca analizza il rapporto tra linguaggio e sviluppo di abilità logiche in bambini di scuola primaria in particolari situazioni di interazione. Per abilità logiche intendiamo la capacità di individuare e scegliere differenti strategie per risolvere problemi riguardanti compiti logici. Il background teorico si riferisce alla logica (Gerla, 1988), ai contributi della scuola storico-culturale (Vygotskij, 1934) ed al costruzionismo socio-genetico (Perret-Clermont, 1979; Iannaccone, 2010). L'ipotesi di ricerca si traduce nell'idea che attraverso attività di gruppo riguardanti la creazione e la manipolazione di semplici linguaggi procedurali si possa favorire nei bambini un cambiamento nella rappresentazione del linguaggio, da solo strumento di comunicazione ad oggetto di manipolazione. I bambini di una quarta primaria sono stati coinvolti in diverse attività. La metodologia utilizzata è di tipo quanti-qualitativo. Si analizzano gli scambi sociali tra i bambini, individuando le strategie che in interazione co-costruiscono per risolvere i compiti (Leont'ev, 1978; Steinbring, 1997) e la rappresentazione cognitiva della soluzione dei compiti che i bambini, individualmente, elaborano durante e alla fine delle attività (Vermersch, 2005). Dall'analisi dei dati emerge come i bambini abbiano attivato processi di risoluzione dei compiti socialmente condivisi, mediati da artefatti materiali, linguistici e simbolici.

Bibliografia

[1] Gerla, G. (1988). L'insegnamento della logica nelle scuole elementari e medie. La logica matematica nella didattica, Atti del XII Incontro AILA.

[2] Iannaccone, A. (2010). Le condizioni sociali del pensiero. Contesti, attività e ricerca di senso, Edizioni Unicopli: Milano.

[3] Leont'ev, A.N. (1978). Activity, consciousness, personality. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

[4] Perret-Clermont, A.-N. (1979). La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale, Berne, Peter Lang.

[5] Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching, Ed. Studies in Mathematics, 32 (1), 49-92.

[6] Vermersch, P. (2005). Descrivere il lavoro, Carocci Faber, Roma.

[7] Vygotskij, L.S. (1934). Thought and language, Moscow-Leningrad, Sozekgiz.

Maria Flavia Mammana: Genesi e sviluppo di una ricerca didattica

Maria Flavia Mammana
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania
email: fmammana@dmi.unict.it

Mario Pennisi
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania

Sunto. Negli ultimi anni alcune attività del Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica dell'Università di Catania si sono sviluppate seguendo un percorso metodologico scandito in varie fasi. Il percorso è iniziato con la ricerca di nuove proprietà di geometria elementare; tali proprietà sono state poi utilizzate per progettare proposte didattiche innovative per la scuola secondaria superiore; infine, è stata sviluppata una sperimentazione in classe e sono stati esaminati i relativi risultati. In particolare, la sperimentazione è stata realizzata sotto forma di "laboratorio didattico di matematica" [1], in cui gli studenti lavorano insieme per ottenere risultati, confrontano idee e intuizioni, utilizzano le loro capacità critiche in ambienti di apprendimento collaborativi.

Presentiamo qui una di queste attività. Essa si basa sul lavoro [2] e si occupa in particolare di proprietà di geometria piana e solida, studiate in parallelo. L'attività è finalizzata soprattutto a recuperare l'interesse degli studenti per lo studio della geometria dello spazio. Nel percorso didattico lo studente è guidato alla scoperta di inaspettate proprietà che accomunano due enti geometrici, quadrilateri e tetraedri, apparentemente molto distanti tra loro [3, 4]. Nella sua attività di esplorazione e scoperta lo studente si avvale dello strumento concettuale dell'analogia e di un software di geometria dinamica del piano e dello spazio. I risultati della sperimentazione in classe sono stati esposti e commentati in [5].

Bibliografia

[1] G. Chiappini: "Il laboratorio didattico di matematica: riferimenti teorici per la costruzione", Innovazione educativa, Inserto allegato al numero 8, 2007.

[2] M.F. Mammana, D. Margarone, B. Micale, M. Pennisi, S. Pluchino: "Dai quadrilateri ai tetraedri: alla scoperta di sorprendenti analogie", Casa editrice La Tecnica della Scuola, 2009.

[3] M.F. Mammana, B. Micale, M. Pennisi: "Analogy and dynamic geometry software together in approaching 3d geometry", Atti del TIME 2010, Malaga 2010.

[4] M.F. Mammana, B. Micale, M. Pennisi: "Quadrilaterals and tetrahedra", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 40, N.6, 2009.

[5] M.F. Mammana, M. Pennisi: "Dragging quadrilaterals into tetrahedra", atti del ATCM 2010, Kuala Lumpur, pubblicati da Mathematics and Technology, 2010.

Piera Manara: Sistemi polinomiali e basi di Gröbner: una sperimentazione didattica

Piera Manara
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
email: piera.manara@fis.unipr.it

Claudio Perelli Cippo
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Sunto. Si riferisce di una sperimentazione didattica, all'interno di un corso di Geometria II in una Facoltà di Ingegneria. L'idea di inserire questo argomento in un corso di Ingegneria, vincendo la preconcetta ostilità dell'ambiente verso tutto quanto sa di Algebra astratta o di Geometria Algebrica, è nata quando alcuni ricercatori ingegneri ci hanno sottoposto il problema di esprimere le intersezioni reali di un sistema di quadriche dipendente da un parametro, in modo esatto e non approssimato attraverso il calcolo numerico, a loro familiare. Lavorando insieme ci siamo convinti che la mancanza di un'introduzione teorica appropriata rende difficile anche solo usare al meglio gli strumenti di calcolo simbolico oggi disponibili sul PC. D'altra parte il problema di discutere e di risolvere sistemi di equazioni anche non lineari può essere riconosciuto come importante anche da studenti di liceo, che spesso hanno già dimestichezza con il computer ed hanno a disposizione strumenti di calcolo (mentre devono ancora capire che lo strumento, da solo, non basta).

Bibliografia

[1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea: "Using Algebraic Geometry", Springer, N.Y. 2004.

[2] C. Perelli Cippo, M. P. Manara: "Sistemi di equazioni polinomiali e basi di Gröbner", McGraw Hill, Milano 2009.

[3] B. Sturmfels: "Solving Systems of Polynomial Equations", Cbms Regional Conference Series in Mathematics, n. 97, AMS, 2002.

Alberto Marini: Materiale per approcci costruttivi alla matematica

Alberto Marini
Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche, sezione di Milano
email: alberto@mi.imati.cnr.it

Sunto. Questa comunicazione vuole segnalare un testo in progressivo sviluppo che intende puntualizzare varie questioni che si pongono a chi affronta la matematica privilegiando i suoi aspetti costruttivi; il testo è accessibile attraverso la pagina Web (http://www.mi.imati.cnr.it/∼alberto).

La scelta di proporre questo materiale mediante il Web discende dalle seguenti convinzioni: i contenuti aperti sono ampiamente accessibili, facilmente riutilizzabili e migliorabili; il Web ignora i vincoli sull'estensione e sui tempi di ripubblicazione dei testi su carta; la Rete globale consente di proporre materiali come quelli segnalati a lettori mal definiti sul piano commerciale; le pagine Web sono collegabili in estese reti di conoscenze e le pagine segnalate si vogliono ricche di collegamenti ad altri materiali immediatamente accessibili sul Web: si pensa in particolare a Wikipedia e alle aperture verso le applicazioni; potrebbe servire un filo diretto per critiche, segnalazioni di difetti e contributi; in prospettiva i materiali su Web, grazie alla loro adattabilità, sono aperti alla multimedialità e sono meno soggetti all'obsolescenza a medio termine dei testi su carta.

Attualmente sono rese disponibili pagine PDF da testi sorgente in Plain TEX; le prospettive degli e-books sono notevoli, ma riguardano formati non consolidati.

I documenti, con le loro ancor molte lacune, non pretendono di essere definitivi, ma forse possano già essere di qualche utilità. Si considera comunque ragionevole lasciare ampliabili componenti quali esempi, figure, riferimenti, segnalazioni di applicazioni. Nel testo sono usati termini e simboli poco usuali; questi peraltro sono reperibili mediante indici di cui si cura la completezza.

Per le scelte dei contenuti segnaliamo: la matematica viene considerata utilitaristicamente come strumento sia per gli umani che per le macchine; il conseguente rilievo dato ad algoritmi, a strutture discrete e alle esigenze dell'organizzazione sistematica delle conoscenze matematiche; la polarità fra entità utilizzabili per soluzioni effettive ed entità introdotte assiomaticamente, senza preoccuparsi della loro costruibilità; l'attenzione alla compatibilità fra esigenze costruttive e astrazioni.

Francesca Martignone: Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia Romagna

Francesca Martignone[1]
Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia
email: francesca.martignone@unimore.it

Sunto. Nel biennio 2008-2010 il Laboratorio delle Macchine Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia ha coordinato il progetto MMLab-ER, "Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia Romagna" [1]. Questo Progetto ha voluto rispondere alle indicazioni e raccomandazioni nazionali e internazionali che propongono la diffusione di metodologie laboratoriali per favorire insegnamento-apprendimento della matematica. Il progetto MMlab-ER si è sviluppato seguendo tre fasi principali: l'allestimento in cinque province dell'Emilia Romagna (Bologna, Modena, Piacenza, Ravenna e Rimini) di aule didattiche attrezzate con macchine matematiche (ricostruzioni di pantografi e curvigrafi appartenenti alla fenomenologia storica della matematica); lo svolgimento di un programma di formazione in servizio di insegnanti di matematica di scuola primaria e secondaria; lo sviluppo di sperimentazioni nelle classi ad opera degli insegnanti formati. Nei due anni del Progetto sono stati coinvolti circa un centinaio di insegnanti appartenenti a 65 istituti scolastici: più della metà appartenenti al primo ciclo e il rimanente a licei, istituti tecnici e professionali. La progettazione e lo sviluppo delle attività condotte durante il progetto MMLab-ER si sono basate sulla rielaborazione di ipotesi e risultati provenienti dalle ricerche del Laboratorio delle Macchine Matematiche sugli aspetti epistemologici, didattici e cognitivi coinvolti in attività laboratoriali che si avvalgono dell'uso di macchine matematiche e dagli studi internazionali nel settore della formazione insegnanti. Le caratteristiche peculiari delle attività svolte all'interno del Progetto, sia nel programma di formazione degli insegnanti, sia nelle successive sperimentazioni, sono state: la scelta di un approccio laboratoriale; l'uso di macchine "storiche"; i focus sulla condivisione, analisi e verbalizzazione dei processi di esplorazione, di genesi di congetture e produzione di argomentazioni fino alla costruzione di dimostrazioni; e la messa in luce degli aspetti culturali coinvolti in queste attività. Una parte della documentazione del progetto MMLab-ER è stata pubblicata on-line sul sito del Laboratorio delle Macchine Matematiche (www.mmlab.unimore.it).

Bibliografia

[1] F. Martignone (Ed.): "MMLab-ER - Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia Romagna: Azione 1", in *Scienze e Tecnologie in Emilia Romagna*, Tecnodid, Napoli, 2010.

[1]Lavoro svolto nell'ambito del Progetto MMLab-ER, prima azione del Progetto Scienze e Tecnologie, finanziato dalla Regione Emilia Romagna.

Michela Maschietto: Strumenti per la rappresentazione dei numeri: un'esperienza didattica con la 'pascalina' Zero+1

Rita Canalini Corpacci
Scuola elementare "Enzo Ferrari" (Fiorano Modenese) Laboratorio delle Macchine Matematiche, Università di Modena e Reggio Emilia

Michela Maschietto[1]
Dipartimento di Matematica Laboratorio delle Macchine Matematiche, Università di Modena e Reggio Emilia
email: michela.maschietto@unimore.it

Sunto. In questa comunicazione saranno presentati gli elementi essenziali dell'analisi di una sperimentazione didattica [2] condotta in una classe quinta di scuola primaria, caratterizzata dall'introduzione della macchina artimetica Zero+1 (chiamata 'pascalina' in classe) per avviare una riflessione sulla notazione posizionale per la rappresentazione dei numeri. La sperimentazione è stata condotta nei quadri teorici della mediazione semiotica [1] e dell'approccio strumentale [3], nel contesto del laboratorio di matematica. Essa è stata strutturata in due fasi. Nella prima fase opportune consegne hanno avviato e sostenuto i processi di genesi strumentale degli allievi e permesso loro di costruire i significati matematici che la macchina incorpora. Nella seconda fase, la macchina aritmetica è stata utilizzata per proporre problemi relativi alla rappresentazione dei numeri in base minore di quella decimale. L'analisi mostra come il nuovo strumento 'pascalina' interagisce con quelli già in possesso degli allievi in relazione ai problemi posti. Sembra inoltre confermare che l'introduzione di un nuovo strumento all'interno di un sistema di strumenti preesistenti possa sollecitare, attraverso opportune consegne, un processo di generalizzazione del significato matematico in gioco.

Bibliografia

[1] M.G. Bartolini Bussi, M.A. Mariotti (2008): "Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective". In L. English and M. G. Bartolini Bussi (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 746-783). New York: Routledge.

[2] R. Canalini Corpacci, M. Maschietto (2011): "Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria - La pascalina Zero+1 nella classe: genesi strumentale", *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol. 34A, N. 2, 161-188.

[3] P. Rabardel (1995): *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

[1] Lavoro svolto nell'ambito del progetto PRIN2007B2M4EK

Luigi Menna: Problem solving: il ruolo del contesto del problema e degli strumenti da utilizzare

Luigi Menna
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Palermo
email: luigimenna@yahoo.it

Sunto. L'insegnamento della matematica dispone oggi di una gran quantità di strumenti informatici, tra cui software e strumenti di calcolo che, se non affatto gratuiti, sono comunque facilmente accessibili. Una tale quantità di strumenti a disposizione induce lo studente a considerare l'ipotesi che un problema possa essere affrontato utilizzando strategie differenti. Lo studente alle prese con un problema può essere tentato di risolverlo attraverso l'uso degli strumenti tecnologici che ritiene di conoscere. Tuttavia già l'uso della calcolatrice scientifica, se non mediato opportunamente dall'insegnante o dal manuale, rischia di diventare fuorviante per il lettore-risolutore rispetto agli obiettivi dell'autore del problema.

Esemplificherò l'argomento riferendomi al contesto della trigonometria. Esaminando diversi libri di testo, il calcolo dei valori del seno e del coseno di un angolo appare al più ridotto all'esame dei soli angoli notevoli: 30, 45, 60 gradi. Per questi viene fornita una procedura argomentata volta a dimostrare che i valori del seno sono rispettivamente $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Appena alcune pagine dopo non è raro imbattersi in esercizi i cui risultati sono espressi in centimetri persino se si tratta di numeri irrazionali. Non tutti i problemi nei manuali usano unità di misura: anzi, le unità di misura compaiono raramente nei testi scolastici in uso.Nondimeno, il fatto che talvolta sia indicata una unità di misura rende implicita una considerazione che per un lettore "giovane" e dotato di macchina calcolatrice non è del tutto scontata: la misura è affetta da errori. Gli autori del libro intendono, mediante questo genere di esercizi, risolvere attraverso un processo puramente matematico un problema che sembrerebbe essere dedotto dalla vita reale (nel senso che i dati sarebbero stati ricavati materialmente mediante uno strumento o un calcolo). Se già l'affermazione che un lato di un triangolo misuri, per esempio, 27 cm può ingenerare qualche dubbio, che la misura di un perimetro possa essere rappresentato da un numero irrazionale dovrebbe apparire sorprendente e far perdere qualsiasi tipo di concretezza e di ragionevolezza al testo del problema e ai suoi tentativi per risolverlo. Anche un problema di questo tipo, secondo me, rimane comunque ancorato ad una visione strumentale della matematica, secondo la quale uno studente deve semplicemente imparare formule da applicare.

Tiziana Pacelli: Coordinamento semiotico: una proposta didattica

Giovannina Albano
Dip. di Ing. Elettronica e Ing. Informatica, Università degli Studi di Salerno

Cristina Coppola
Dip. di Matematica, Università degli Studi di Salerno

Tiziana Pacelli
Dip. di Matematica, Università degli Studi di Salerno
email: tpacelli@unisa.it

Lucio Vecchio
Liceo Scientifico G. Da Procida, Salerno

Sunto. Il linguaggio, artefatto culturale per eccellenza (Vygotskij, 1934), gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento, come ampiamente riconosciuto in molte ricerche in educazione matematica. Molti fallimenti degli studenti possono essere attribuiti a problemi linguistici (Ferrari, 2004). Per comprendere le difficoltà che molti studenti incontrano nelle attività matematiche è necessario un approccio cognitivo, che investighi quali sono le caratteristiche soggiacenti alla diversità dei processi matematici (Duval, 2006). Questi sono caratterizzati da una dominante importanza e varietà delle rappresentazioni semiotiche. Secondo Duval la comprensione in matematica presuppone il coordinamento di almeno due registri di rappresentazione semiotica, abilità niente affatto naturale. Infatti anche nel quadro di riferimento delle prove INVALSI, tra i processi cognitivi da valutare, troviamo: "'Conoscere e utilizzare diverse forme di rappresentazione e saper passare da una all'altra... '. Da uno sguardo alle prove disponibili, si vede che il coordinamento delle rappresentazioni semiotiche è prerequisito per rispondere alla maggior parte delle domande presenti. Presentiamo qui un progetto di lavoro, indirizzato a studenti di scuola secondaria superiore, che da un lato fornisca loro questo strumento fondamentale per la comprensione in matematica e dall'altro dia una preparazione più adeguata a quanto richiesto dagli standard di valutazione nazionale. Abbiamo somministrato in una seconda classe di scuola secondaria superiore un test di ingresso su vari tipi di conversioni. I risultati hanno evidenziato alcune difficoltà, in particolare quando è coinvolto il linguaggio verbale. A partire dall'analisi dei protocolli, abbiamo progettato alcune attività didattiche, che sono in via di sperimentazione preliminare, per andare a regime dal prossimo anno.

Bibliografia

[1] Duval, R. (2006). The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 1, 103-131.

[2] Ferrari, P.L. (2004). Matematica e linguaggio. Quadro teorico per la didattica, Bologna: Pitagora Editrice.

[3] Vygotskij, L.S. (1934). Thought and language. Moscow-Leningrad: Sozekgiz.

Michele Pertichino: Un modello per la formazione permanente degli insegnanti di matematica

Eleonora Faggiano
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Luciano Faggiano
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Antonella Montone
Dipartimento di Matematica, Università di Bari

Michele Pertichino
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
email: pertich@dm.uniba.it

Sunto. La formazione degli insegnanti di matematica presenta, sulla base sia delle nostre esperienze che delle ricerche nazionali e internazionali, forti elementi di contraddizione. Un'indagine ministeriale (progetto "Ascolto") segnala come per la maggioranza degli insegnanti il problema della loro formazione professionale sia di secondaria importanza. Fin dagli anni '60 veniva messo in evidenza come le attese profonde dei docenti di matematica fossero orientate soprattutto sulla esigenza di veder riconosciuta l'importanza sociale del loro lavoro e il prestigio come educatori [3]. D'altra parte la formazione in servizio appare spesso poco organica e inadeguata ad affrontare le problematiche metodologiche e didattiche con flessibilità e con le necessarie capacità creative e interpretative. La nostra proposta di un modello di formazione permanente e globale degli insegnanti di matematica, frutto di ricerche e confronto continuo e di oltre un anno di lavoro con gli insegnanti nell'ambito del PRIN2008, punta su quattro linee operative, in sinergia tra loro, che possano rispondere alle esigenze contingenti e progettuali degli insegnanti e mira ad offrire strumenti che permettano di: riflettere su quale sia il significato più profondo di "competenza disciplinare e didattica in matematica"; dare agli insegnanti strumenti di studio diretto, quali una biblioteca virtuale e reale, un sito web dove poter condividere materiale ed esperienze, entrare in chat, partecipare a forum, registrare e tenere memoria degli interventi [1]; porre il problema del senso dell'efficacia della comunicazione matematica e approfondirne il significato, affrontando gli elementi costitutivi del discorso matematico a livello di testo scritto e discorsivo [2]; fornire strumenti per la "cultura" matematica, cioè cosa e come il docente di matematica può utilizzare, come e cosa può costituire un itinerario permanente e contingente

Bibliografia

[1] Carrozza, M.A., Zanetti, S., (2007). Il project work: un'attività di laboratorio virtuale per la formazione degli insegnanti. Università e scuola, Anno XII-1, pp. 17-29.

[2] Sfard, A., (2009). Psicologia del pensiero matematico. Erickson, Trento.

[3] Togliatti, E., (1964) in Linati, P., (2011). L'algoritmo delle occasioni perdute. Erickson, Trento.

George Santi: Integrare teorie in didattica della matematica: oggetti matematici, significato e rappresentazioni

George Santi
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
email: grpsanti@gmail.com

Sunto. L'apprendimento della matematica è un fenomeno complesso, nel quale entrano in gioco il sapere matematico e le sue caratteristiche epistemologiche e filosofiche. Il protagonista dell'apprendimento è l'individuo con la sua dimensione psicologica, sociale e antropologica, inserito in un percorso educativo. L'interazione tra le diverse discipline, che hanno contribuito alla nascita e allo sviluppo della Didattica della Matematica, ha portato ad un proliferare di teorie che hanno messo in discussione la coerenza globale e l'unità metodologica e teorica di questa scienza e le ricadute dei suoi risultati nella pratica d'aula. Per far fronte a questo problema, si è sviluppato uno specifico ambito di ricerca in Didattica della Matematica, che si occupa di individuare strategie efficaci per integrare diversi approcci teorici [1] [2]. In questa comunicazione si mostra l'efficacia dell'integrazione di teorie nell'interpretazione di un particolare fenomeno didattico: la perdita del senso degli oggetti quando si eseguono trasformazioni semiotiche. Gli allievi, quando eseguono trasformazioni semiotiche, talvolta perdono la relazione di equisignificato che lega diverse rappresentazioni attraverso l'oggetto matematico comune che denotano [3]. È un problema di ricerca complesso, che chiama in causa gli oggetti matematici, i loro significati e le loro rappresentazioni, e non può essere inquadrato da un solo approccio teorico. Integrando due prospettive semiotiche [4] [5], si interpreta il comportamento di allievi di scuola primaria che devono individuare la funzione generatrice di successioni di numeri naturali utilizzando diverse rappresentazioni semiotiche.

Bibliografia

[1] S. Prediger, A. Bikner-Ahsbahs, e F. Arzarello: "Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework", ZDM Mathematics Education, 40, pp. 165-178, 2008.

[2] L. Radford: "Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities", ZDM Mathematics Education, 40, pp. 317-327, 2008.

[3] B. D'Amore: "Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici", La Matematica e la sua Didattica, 20(4), pp. 557-583, 2006.

[4] R. Duval: "Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals". Peter Lang, 2005.

[5] L. Radford. "A cultural theory of learning". Rotterdam: Sense Publishers, 2009.

Annarosa Serpe: Impreparati in matematica, fino a che punto?

Francesco Aldo Costabile
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria

Annarosa Serpe
Dipartimento di Matematica, Università della Calabria
email: annarosa.serpe@unical.it, costabil@unical.it

Sunto. Le varie indagini nazionali ed internazionali evidenziano, da molto tempo, l'impreparazione e le difficoltà che gli studenti incontrano nello studio della Matematica a diversi livelli, tra cui quello delle matricole universitarie. Tuttavia, da queste indagini non emerge sempre con chiarezza il livello di impreparazione relativo alle specifiche tematiche d'interesse, soprattutto, per il prosieguo degli studi o per l'inserimento nel campo lavorativo. In proposito, si presentano tre esempi tratti dalla nostra esperienza nell'Università della Calabria, nell'ultima decade.

Bibliografia

[1] Basile A., Pizzuti B., Test sul ragionamento dello studente - Anno Accademico 1996/97, Rapporto interno 14, C.I.R.D. Unical.

[2] Caira R., Costabile F.A., Un test per le matricole della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università della Calabria, Anno Accademico 2000/01 - Alcuni risultati, Rapporto interno 29, C.I.R.D. Unical.

[3] Caira R., Costabile F.A., Test d'ingresso e corso propedeutico della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università della Calabria - Anno Accademico 2001/02 - Risultati, Rapporto interno 33, C.I.R.D. Unical.

[4] Caira R., Costabile F.A., Test d'ingresso e corso propedeutico della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università della Calabria - Anno Accademico 2003/04, Rapporto interno 39, C.I.R.D. Unical.

[5] Costabile F.A., Gualtieri M.I., Un test sul ragionamento dello studente: alcuni risultati, Anno Accademico 1994/95, Rapporto interno 4, C.I.R.D. Unical.

[6] INValSI, Il possesso di conoscenze ed abilità, Anni Scolastici 2004-2006.

[7] Program for International Student Assessment (PISA), organizzato dall'OCSE nel 2000, 2003, 2006, WEB SITE URL: http://www.pisa.oecd.org.

[8] Trends in Maths and Science Study (TMSS), 2003, WEB SITE URL: http://www.timss.org.

Luigi Tomasi: La matematica nel riordino della Scuola secondaria di II grado: osservazioni didattiche

Luigi Tomasi
Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Adria (RO)
email: tomasi.luigi@alice.it

Sunto. In questa comunicazione si presentano alcune osservazioni e considerazioni didattiche, dal punto di vista di un insegnante di scuola secondaria, sui nuovi quadri orari, le *Indicazioni nazionali* per i Licei e le *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali, per quanto riguarda la Matematica, che sono stati introdotti nel riordino della Scuola secondaria di II grado a partire dall'anno scolastico 2010-2011. Saranno sottolineati in particolare alcuni aspetti di genericità e vaghezza presenti nelle *Indicazioni nazionali* per i Licei, ma nello stesso tempo si discuteranno le possibilità che si possono individuare per intraprendere un rinnovamento dei curricoli di matematica della scuola secondaria di II grado. Questo naturalmente comporterà l'individuazione, da parte degli insegnanti e delle scuole, all'interno delle *Indicazioni nazionali* e delle *Linee guida*, di percorsi didattici che abbiano una loro coerenza - e che siano più precisi e dettagliati - con l'obiettivo di un rinnovamento del curricolo di matematica, anche in vista di una verifica delle conoscenze e competenze matematiche al termine della Scuola secondaria di II grado (nell'Esame di Stato e nelle previste prove INVALSI anche nella classe finale).

Tale rinnovamento -come prova l'esperienza avvenuta nelle scuole sperimentali negli ultimi due decenni - non può avvenire solo "per decreto", ma occorre un lavoro di approfondimento e l'individuazione di proposte di curricolo che prendano spunto da quanto è stato elaborato da gruppi di docenti e di scuole negli ultimi anni, ad esempio dai materiali contenuti nei volumi *Matematica 2003* e *Matematica 2004* elaborati negli anni 2000-2004 da una Commissione nominata dall'UMI.

Questo lavoro di trasposizione didattica delle indicazioni nazionali e delle linee guida in curricoli che possano essere sviluppati effettivamente nelle classi non può che essere fatto dagli insegnanti e dalle scuole.

Nella comunicazione saranno discusse in particolare alcune proposte emerse nelle scuole e in rete, nei gruppi di discussione di insegnanti di matematica.

Bibliografia

[1] D. Paola: "Le indicazioni curricolari dei nuovi licei: una prima impressione", in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 33B, n. 4, Agosto 2010.

[2] L. Tomasi: "La matematica nel riordino della Scuola secondaria di II grado del 2010: osservazioni e considerazioni didattiche", in *Progetto Alice*, vol.XII, n.1, 2011.

F. S. Tortoriello: Il programma Geologic: una sperimentazione didattica per la risoluzione di triangoli rettangoli

F. S. Tortoriello[1]
Università degli Studi di Salerno
email: fstortoriello@unisa.it

U. Dello Iacono
ITIS di Bagnoli Irpino (AV)

Sunto. In questa comunicazione viene descritta una sperimentazione didattica in una seconda classe di scuola secondaria di I grado, che affronta un argomento semplice e molto presente nell'insegnamento scolastico: la risoluzione di un triangolo rettangolo. La sperimentazione è stata effettuata con l'ausilio del programma Geologic, software destinato alla didattica, realizzato in Visual Basic 6.0 ed elaborato interamente dai ricercatori afferenti al gruppo di ricerca in didattica della matematica presso l'Università di Salerno coordinato dal prof. Gerla. Obiettivo di tale sperimentazione è lo studio delle potenzialità della logica nella didattica della matematica rispetto all'elaborazione di strategie risolutive di problemi, in particolare geometrici. Il programma, il cui nome nasce dalla fusione delle parole "Geometria" e "Logica", può essere utilizzato sia come semplice strumento informatico per la risoluzione numerica di triangoli rettangoli, sia come un programma di logica in quanto, con l'utilizzo di fatti e regole, utilizzando delle strutture del tipo "se...allora", cerca di fornire una strategia risolutiva indicando le possibili strade per arrivare alla risoluzione del triangolo, o al raggiungimento dello scopo prefissato. Spesso l'insegnamento della matematica nelle scuole è orientato a sviluppare abilità di calcolo, e nelle migliori delle ipotesi alla comprensione di dimostrazioni già esistenti. Poca attenzione è dedicata allo sviluppo di abilità deduttive. L'obiettivo è quello di supportare lo sviluppo di tali abilità. L'attività di sperimentazione didattica ha previsto una prima fase di "formalizzazione della conoscenza" nella quale si è affrontato lo studio teorico di tutti i teoremi e regole inerenti alla risoluzione di un triangolo rettangolo. Successivamente si è descritto il programma in cui il sistema assiomatico risulta essere così composto: i "fatti" sono i dati noti all'inizio del problema, le "regole" sono le formule ed i teoremi già che si possono applicare per raggiungere la soluzione. Il modello è il triangolo rettangolo. La strategia di ragionamento che si adotta è di tipo backward ("all'indietro") che prevede un primo confronto tra la situazione finale richiesta e quella iniziale, cercando di ridurre il divario tra queste due, attraverso il raggiungimento di uno stato intermedio che viene nuovamente confrontato con l'obiettivo e così via, in un processo di continuo confronto tra stato "attuale" ed obiettivo fino a che i due stati coincidono.

[1]Nucleo di Ricerca Didattica della Matematica - Università di Salerno

Giancarlo Travaglini: Sulla preparazione alla matematica universitaria

Giancarlo Travaglini
Dipartimento di Statistica, Università di Milano-Bicocca
email: giancarlo.travaglini@unimib.it

Marco Bramanti
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Sunto. Sappiamo che molte matricole iscritte a corsi di laurea scientifici abbandonano gli studi a causa delle difficoltà che incontrano negli esami di matematica. Purtroppo non è vero che tutti gli studenti in possesso di un diploma di Maturità hanno le capacità necessarie per affrontare un corso universitario in cui è presente la matematica; è però vero che molti degli studenti che abbandonano gli studi universitari a causa di questa materia avrebbero potuto "salvarsi" attraverso un lavoro specifico iniziato per tempo, relativo sia alla carenza di prerequisiti che al particolare metodo di studio che la matematica universitaria richiede di sviluppare.

Il libro che presentiamo riguarda questo aspetto "di metodo" ed è pensato per gli studenti degli ultimi due anni della Scuola Superiore, o all'inizio degli studi universitari: può essere utilizzato per l'organizzazione di corsi, o individualmente.

La prima parte del libro presenta la "lingua matematica" e vuole dare allo studente la necessaria precisione di linguaggio, la sicurezza nell'uso di implicazioni, contresempi, dimostrazioni per assurdo, la conoscenza dei simboli utilizzati nello studio e nelle operazioni all'interno di insiemi generici ed in particolare di insiemi numerici. Abbiamo preferito evitare una presentazione formale e siamo invece partiti rilevando e discutendo alcune ambiguità del linguaggio comune, non gravi nel loro contesto, ma da evitare nel linguaggio matematico e scientifico in genere.

La seconda parte vuole essere una "palestra" per abituarsi per tempo alle difficoltà proprie di un testo di matematica universitario. Si insegna ad esempio a leggere una definizione cercandone innanzitutto esempi significativi, poi studiandola in generale attraverso la verifica o la confutazione di alcune implicazioni. Oppure ci si preoccupa di come si studia una dimostrazione, innanzitutto visualizzandola attraverso opportuni esempi, poi spezzando il ragionamento in passi, quindi ricostruendola da soli "su un foglio bianco", ripulendola da eventuali imperfezioni, infine verificandone la comprensione anche attraverso il suo utilizzo nell'affrontare problemi differenti. Tutto questo attraverso esercizi, scelti non in base all'argomento (algebra, geometria, numeri interi, ...) ma in quanto elementari e funzionali al lavoro appena descritto.

Si conclude presentando alcuni punti (maggiorazioni, dimostrazioni di unicità, ...) su cui può essere utile che il lettore rifletta prima di iniziare gli studi universitari.

Bibliografia

[1] M. Bramanti, G. Travaglini: "Matematica. Questione di metodo", Zanichelli, 2009.

Indice analitico

Abatangelo V., 848
Abate M., 883
Abbondandolo A., 637
Abo H., 890
Achdou Y., 675
Agnoli G. L., 768, 779
Aimi A., 818
Alabau-Boussouira F., 665
Albano G., 968
Allegretto W., 692
Altomani A., 879
Altomare F., 792
Amendola G., 856
Amendola M. E., 651
Andrà C., 960
Andreatta F., 887
Andretta A., 384, 917, 919
Angella D., 874
Angeloni L., 711
Arcozzi N., 726
Ardizzoni A., 841
Aricò A., 798
Arosio L., 875
Arzarello F., 2
Ascanelli A., 652
Aschieri P., 758
Averna D., 698

Babadajian J. F., 709
Baccaglini-Frank A., 624
Back J., 828
Bagagiolo F., 701
Baldi A., 702
Baldi P., 638
Bande G., 857
Banfi C., 769
Baratella S., 918
Barbieri G., 712
Barile S., 639
Baroni P., 653
Bartoli D., 851
Bassetti F., 739
Bastianelli F., 252
Bellini F., 753
Benedetti I., 679, 697
Benevieri P., 681
Benini A., 850
Benvenuti S., 858
Benzi M., 799
Berchio E., 265, 645
Bernardara M., 889
Bernardi C., 626
Berti M., 640, 641
Berti P., 740, 752
Bertolini M., 4
Bertone C., 888
Betcke T., 810
Biacino L., 713
Biagini F., 741
Biasco L., 641
Biasotti S., 772
Bigelow S., 863
Bigolin F., 280
Bini D., 403, 808, 812
Bisi C., 876
Bisi M., 770
Boccia S., 654
Boero P., 632
Boffi D., 19, 824
Boiti C., 652
Boito P., 799
Bolognesi M., 889
Bolten M., 804
Bonanno G., 680
Bonaventura L., 826
Bonettini S., 436, 800
Bonheure D., 670, 690
Bonisoli A., 846
Bonizzoni F., 819
Bonvicini S., 847
Borrelli A., 776
Borzì A., 802
Boscaggin A., 685
Boscarino S., 820
Bozzo E., 801
Bracci F., 35
Bramanti M., 655, 974
Brambilla M. C., 890

Brandolini L., 655, 730
Bravi P., 831
Breda D., 783
Brezinski C., 814
Brianzi P., 805
Brunetti L., 859, 860
Bruni V., 791
Buffa A., 819

Cacciola S., 897
Calabri A., 891
Calamai A., 681
Caldarella A. V., 860
Calvaruso G., 861
Camerlo R., 917, 919
Cammaroto F., 862
Canalini Corpacci R., 966
Canci J. K., 934
Candito P., 682
Cannarsa P., 665, 705
Canonaco A., 892, 912
Caparrini S., 950
Capietto A., 683
Capitanelli R., 656
Cappelletti Montano M., 792
Caramellino L., 749
Carbonaro A., 727
Carbone I., 714
Carbone R., 736
Cardinali T., 694
Cardone A., 784
Carillo S., 759
Carletti M., 771
Carlini E., 821
Carniel R., 801
Casagrande C., 893
Casali M. R., 865
Casarin R., 739
Caso L., 660
Catalioto A., 862
Cattabriga A., 863
Cavallini N., 822, 824
Cavicchioli R., 816
Cecchini S., 687
Cerri A., 772
Cerroni C., 951
Cerulli Irelli G., 832
Checcoli S., 935
Chiacchio F., 662
Chiantini L., 894
Chiarella C., 773
Chinnì A., 684
Choirat C., 730
Cianchi A., 66
Ciccoli N., 864
Ciliberto C., 891, 895
Coen S., 92
Colli P., 657
Colombo F., 728
Colzani L., 730, 737
Conti C., 793, 796
Contucci P., 760
Coppola C., 961, 968
Coppola G., 936
Corti A., 112
Cortini R., 252
Costabile F. A., 794, 971
Costarelli D., 715
Cretarola A., 741
Cristofori P., 865
Crupi M., 835
Cupini G., 658
Curi G., 920

D'Abbicco M., 659
D'Aguì G., 290
D'Ambrosio Ra., 785, 787
D'Ambrosio Ro., 660
D'Angelo C., 823
D'Apice C., 777
D'Aquino P., 921
D'Ippoliti F., 773
D'Onofrio L., 703
Davydov A. A., 851
De Asmundis R., 704
De Blasi P., 751
De Filippis V., 833
De Poi P., 252, 896
De Simone V., 802
Del Buono N., 786
Del Corso G. M., 803
Delizia C., 564
Dell'Accio F., 794
Dell'Aglio L., 952
Della Pietra F., 661, 706
Dello Iacono U., 973
Deolmi G., 774
Di Benedetto F., 805
Di Biagio L., 897
di Biase F., 729
di Blasio G., 662
Di Fabio B., 866
Di Gennaro R., 898
Di Nasso M., 922
Di Nola A., 924
Di Scala A. J., 877
di Serafino D., 802
Di Terlizzi L., 867
Di Tommaso F., 794
Dileo G., 868, 870
Dimonte V., 923
Dipierro S., 642
Diverio S., 302
Dolera E., 316, 765
Donatelli M., 804
Dragičević O., 727

Dubrovin B., 113
Durante F., 755

Eleuteri M., 775
Emma D., 848
Epifani I., 744
Ersoy K., 844
Esposito E., 787
Estatico C., 805

Fabbri A., 834
Faenzi D., 899
Faggiano E., 969
Faggiano L., 969
Fanelli S., 806
Farina A., 645
Fasino D., 801
Favaro S., 742, 754
Favini A., 663
Felli V., 643
Fernández-Sánchez J., 755
Ferraioli A. R., 924
Ferrari F., 664
Ferrario D. L., 644
Ferrero A., 265, 645
Ferretti R., 821
Ferrò C., 835
Finocchiaro C. A., 325
Flandoli F., 114
Florens V., 863
Floridia G., 705
Fochi M., 716
Fonda A., 685
Fontana M., 325
Fontanari C., 900
Formaggia L., 780
Fornasiero A., 925
Forni G., 131
Forti M., 926
Franchi B., 675, 702
Franciosi M., 901
Frangi A., 818
Frediani P., 902
Freguglia P., 952
Frigeri A., 850
Frigerio R., 869
Frittelli M., 356
Frosini P., 772
Fumagalli A., 823
Furi M., 681
Furioli G., 735
Fusacchia G., 836

Gala S., 781
Galati C., 903
Garbagnati A., 904
Gardini F., 824
Garrappa R., 411, 788
Garrione M., 685
Gastaldi L., 824
Gavagna V., 953
Gavitone N., 706
Gazzola F., 265, 645
Gemignani L., 796, 812
Gentili G., 876
Gentilini P., 927
Gerace I., 807
Giacardi L., 954
Giannelli C., 326
Giantesio G., 776
Giardinà C., 760
Giberti C., 760
Gigante G., 730
Giorgi D., 772
Gould N. I. M., 813
Goze M., 872
Greco L., 733
Grossi M., 670
Guardasoni C., 818
Guarracino M. R., 704
Guglielmi R., 665
Guida M., 905
Guidetti D., 731

Habermann J., 653
Huckle T., 804

Iannazzo B., 808
Iannuzzi A., 878
Imbesi M., 837, 838
Infusino M., 717
Iozzi A., 732

Jona-Lasinio G., 132
Jüttler B., 326

Karageorgis P., 265
Kubo H., 667
Kuhn M. G., 732

L'Innocente S., 928
La Barbiera M., 837, 838
Lafont J.-F., 869
Lanconelli A., 743
Landi C., 866
Landi G., 809
Languasco A., 937, 945, 948
Lanzoni J., 810
Larato B., 848
Lavrauw M., 849
Leisen F., 739, 744
Lella P., 888
Lenzi G., 924
Leonessa V., 792
Li T.-J., 885
Lijoi A., 744, 748
Livrea R., 686
Loiudice A., 666

Longo M., 938, 947
Longobardi P., 839
Loper K. A., 325
Lopez L., 786
Lotta A., 868, 870
Lucente S., 667
Luciano E., 334
Lussardi L., 707

Maggis M., 356
Magnano G., 960
Maietti M. E., 929, 931
Mainini E., 375
Malaguti L., 687, 697
Mameli V., 745
Mammana M. F., 962
Manara P., 852, 963
Manfredi E., 376
Mantellini I., 718
Mantova V., 378
Manzo R., 777
Marcellini P., 658
Marcello N., 675
Marcovecchio R., 939
Marcucci V. O., 906
Marcugini S., 851
Marcuzzi F., 774
Marietti M., 840
Marinacci M., 133
Marini A., 964
Marinucci D., 746
Martignone F., 965
Martini L., 956
Marzuoli A., 761
Maschietto M., 966
Mascolo E., 658
Maset S., 783, 789
Matei D., 899
Matucci S., 688
Matveyev S., 637
Mazzia A., 825
Mazzuoccolo G., 847, 854
Meda S., 134
Medori C., 879
Meini B., 403, 808
Mendes Lopes M., 910
Menna L., 967
Mingione G., 160
Molica Bisci G., 689
Mollo M., 961
Molteni G., 940
Monsurrò S., 660, 668
Montaldo S., 871
Montanari A., 708
Montone A., 969
Morbidelli D., 708
Moretti V., 762
Moretto E., 773
Morigi S., 811
Morini F., 850
Morselli F., 634
Motto Ros L., 384
Mughetti M., 669
Mulazzani M., 865
Musio M., 745, 747

Nagliati I., 955
Nipoti B., 748
Nobile F., 780, 819, 828
Noferini V., 812
Noris B., 670
Notarnicola F., 778
Novelli C., 907

Obersnel F., 690, 691
Occhetta G., 907, 908
Omari P., 690, 691
Ottaviani G., 909

Pacchiarotti B., 749
Pacelli T., 961, 968
Pagani C., 763
Pagnan R., 930
Paladino L., 941
Palladino N., 956
Pallotti G., 779
Pambianco F., 851
Panizzi S., 818
Paparella F., 647
Papini D., 692
Pappalardi F., 942
Pardini R., 910
Pareschi L., 820
Pascoletti A., 699
Pascolutti S., 900
Pascucci A., 750
Pasquali S., 773
Pastore A. M., 859, 867
Paternoster B., 787
Patria M. C., 776
Pavarin A., 841
Peccati G., 751
Pedroni M., 655
Penegini M., 386
Pennisi M., 962
Pera M. P., 681
Peral I., 661
Perelli A., 948
Perelli Cippo C., 852, 963
Perroni F., 764
Pertichino M., 969
Peruginelli G., 943
Piccoli B., 777
Piergallini R., 858
Pignatelli R., 911
Pinamonti N., 762
Pini G., 825

Pinzari G., 646
Pirola G. P., 910
Pischiutta M., 780
Pitolli F., 795
Piu P., 872
Pizzimenti P. F., 693
Platen E., 741
Poloni F., 403, 808
Popolizio M., 411, 788
Porcelli M., 813
Porretta A., 671, 672
Portaluri A., 647
Porter J. R., 862
Prünster I., 751
Pratelli L., 740, 752
Prato M., 436
Presutti E., 190
Prinari F., 709
Priola E., 672
Procesi C., 648
Procesi M., 648
Pulvirenti A., 735
Puppo G., 827
Pusateri F., 454

Qao L., 781

Ragusa M. A., 781
Raissy J., 880
Ranieri G., 941
Razouk N., 799
Regazzini E., 316, 765
Reissig M., 659
Restelli M., 826
Ricciardi T., 677
Rigo P., 740, 752
Rinaldi G., 853
Rochberg R., 726
Rodriguez G., 798, 814
Roero C. S., 957
Roggero M., 888
Romani L., 793, 796
Rosazza Gianin E., 753
Rosolini G., 931
Rossi A., 944
Rossi F. A., 881
Rossi R., 491
Rotger V., 947
Rubbioni P., 694
Ruggiero M., 754
Ruggiero V., 800
Ruini B., 854
Russo G., 820

Sabadini I., 882
Salsa S., 664
Salvadei S., 749
Salvato M., 668
Salvatore A., 639
Sambin G., 929
Santi G., 970
Saracco A., 883
Sartoretto F., 825
Sasso E., 736
Savaré G., 491
Sawyer E., 726
Sbordone C., 733
Scacchi S., 473
Schiattarella R., 733
Sciammetta A., 695
Scotti A., 823
Scudo G., 842
Seatzu S., 814
Segatti A., 491
Sempi C., 755
Semplice M., 827
Seri R., 730
Serpe A., 971
Serra-Capizzano S., 225
Settimi V., 945
Sheekey J., 849
Simoncini V., 815
Sisto A., 869
Sjögren P., 595
Soave N., 683
Sorrentino A., 508
Spada L., 546
Spadini M., 696
Spagnolo S., 673
Staglianò P. L., 843
Stefanelli U., 491
Steger T., 732
Stellari P., 892, 912
Stoppato C., 884

Taddei V., 697
Taglialatela G., 673
Tamellini L., 828
Tantardini F., 829
Tanzini A., 766
Tarsi C., 674
Tavernise M., 734
Tazzioli R., 954
Tempone R., 828
Tenni E., 913
Terracini S., 227
Terraneo E., 735
Tesi M. C., 675
Tirabassi S., 914
Toffalori C., 932
Toint Ph. L., 813
Tomasi L., 972
Tomassini A., 874, 885
Tomassoni G., 858
Toraldo G., 704
Tornatore E., 698
Tortora A., 564, 844

Tortoriello F. S., 973
Toscani G., 735
Tosin A., 575
Tota M., 844
Transirico M., 668
Travaglini G., 730, 974
Trombetta A., 734
Trombetta G., 734, 756
Tumolo G., 826

Umanità V., 736

Valdinoci E., 649
Vallarino M., 595
Vallès J., 899
Vandebril R., 803
Vecchio L., 968
Veeser A., 829
Veneziano F., 946
Ventriglia F., 609
Vermiglio R., 783
Véron L., 671
Vetro C., 719
Vetro F., 915
Vezzoni L., 621
Viada E., 941
Vigni S., 938, 947
Vinti G., 609, 711, 715, 720, 724
Viola G., 716
Vitolo P., 721
Volčič A., 722
Volpi S., 737
Volzone B., 676

Walker S. G., 754
Weber H., 723
Weth T., 670
Wick B., 726
Wigman I., 746

Zaccagnini A., 948
Zampogni L., 720, 724
Zanella R., 816
Zanghirati G., 771, 816
Zanghirati L., 652
Zanni L., 816
Zannier U., 378
Zanolin F., 699
Zappale E., 709
Zecca G., 677
Zuccheri L., 958
Zucconi F., 896
Zudini V., 958