UMI - CIIM

Contenuti matematici irrinunciabili delle Indicazioni Nazionali per il quinto anno dei licei scientifici, licei scientifici opzione scienze applicate, licei scientifici a indirizzo sportivo

Marzo 2015

Premessa

Il presente documento, che si affianca al *Syllabus* già redatto dall'UMI-CIIM maggio 2015, si propone di precisare, in maniera molto analitica, i contenuti irrinunciabili (dunque essenziali) di matematica che tutti gli studenti devono conoscere al termine del percorso di studi della scuola secondaria di secondo grado nei licei scientifici. Riteniamo, infatti, che non tutti gli argomenti proposti nelle *Indicazioni* abbiano la stessa importanza per il conseguimento di una buona cultura matematica e per affrontare la prova scritta di matematica a conclusione del percorso di studi. Soprattutto siamo del parere che non tutte le tecniche hanno la stessa importanza concettuale e culturale: alcune di esse sono "di base", di altre la conoscenza può essere utile a quegli studenti che hanno maggiore interesse per la disciplina.

Per questo motivo il presente documento deve essere consultato e letto insieme al *Syllabus* già pubblicato che riporta tutti gli argomenti dell'ultimo anno di corso oltre a quelli considerati come prerequisiti.

Abbiamo anche indicato esempi di esercizi – problemi per dare un'idea del livello di competenze tecniche che necessariamente uno studente deve possedere relativamente agli argomenti irrinunciabili al termine del quinto anno di corso. Pertanto, quando è stato possibile, abbiamo fatto riferimento a esercizi e problemi assegnati nelle prove di esame degli ultimi anni, anche per mostrare che le nuove *Indicazioni* possono innestarsi in un contesto già adatto a recepire le novità.

Il dettaglio di talune indicazioni è dovuto all'opportunità di essere chiari sul livello di complessità che non dovrebbe essere superato nei quesiti atti a sondare il possesso delle conoscenze irrinunciabili.

Auspichiamo che il documento redatto possa essere utile sia agli insegnanti che agli studenti, per individuare priorità nei percorsi di insegnamento-apprendimento, sia agli estensori della prova scritta di matematica, affinché possano strutturarla in modo tale da prevedere una parte fondamentale, irrinunciabile, che è necessario affrontare e risolvere per ottenere la sufficienza e una parte rivolta a evidenziare e valutare il possesso di conoscenze e competenze di livello più elevato.

Liceo scientifico
Matematica
Conoscenze irrinunciabili
Quinto anno

Ambito	**Argomento**	**Eventuali esempi di esercizi - quesiti – problemi**
Geometria	Coordinate cartesiane nello spazio	
	Distanza tra due punti nello spazio. Punto medio di un segmento.	Verificare che il triangolo di vertici A(-3, 1, 1), B(1, 5, -2), O(0, 0, 0) è un triangolo rettangolo.
	Equazione cartesiana di un piano nello spazio. Equazione del piano passante per tre punti non allineati. Mutue posizioni fra due piani: condizioni di incidenza, parallelismo.	Fra gli infiniti piani rappresentati dall'equazione $kx + y - z + 1 = 0$, determinare: a) l'equazione del piano parallelo al piano di equazione $2x + y - z + 1 = 0$; b) l'equazione del piano passante per A (2, 3, – 2). Si considerino i punti A (1; 0; 1), B (0; 1; 2) e C (2 ; 2; 6). a. Mostrare che A, B e C non sono allineati. b. Determinare l'equazione del piano ABC.
	Equazioni cartesiane e parametriche di una retta nello spazio.	Dato il sistema: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ dire che cosa rappresentano, nello spazio Oxyz, le soluzioni del sistema e le soluzioni di ciascuna equazione.
	Equazioni di una retta	Determinare le equazioni della retta passante per i punti P(2, -1, 1) e Q(0, 1, 3)

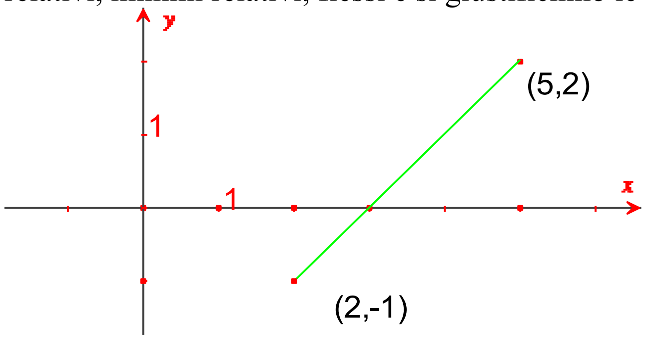
	per due punti nello spazio.	
	Equazione del piano passante per una retta e un punto a essa non appartenente.	Determinare l'equazione del piano passante per la retta di equazioni x – 3=0, y = 0 e per il punto P(2, -1, 1)
	Mutue posizioni di un piano e di una retta nello spazio: retta e piano incidenti, paralleli, perpendicolari.	Determinare l'equazione del piano passante per il punto $P(2, 1, 4)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x/1 = y/3 = z/(-3)$. Determinare l'equazione del piano passante per il punto $P(2, 1, 4)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x/1 = y/3 = z/(-3)$. Determinare le equazioni della retta passante per il punto P(2, 3, –2) e perpendicolare al piano di equazione $x + y + z = 1$. Determinare il volume del cono di vertice V(1, 1, 0), base nel piano di equazione x+ y –z= 0 e apotema di lunghezza 5.
	Fascio di piani nello spazio. Stella di piani nello spazio. Stella di rette nello spazio	Determinare le equazioni della retta parallela alla retta di equazioni x – 3 = 0, y = 0 e passante per il punto P(2,-1, 1).
	Equazione di una superficie sferica. Mutue posizioni di una sfera e di un piano	Determinare l'equazione di una superficie sferica di centro C(1, 1, 0) e raggio 2. Dire se il punto *A* (2, 4, 2) è interno, esterno o appartiene alla superficie sferica di centro (1, 1, 0) e raggio 2, giustificando la risposta.

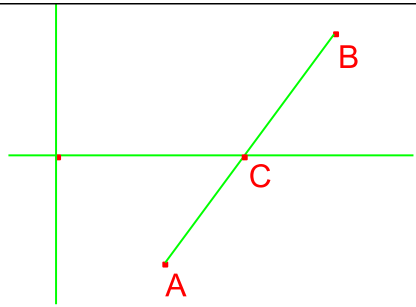
Relazioni e funzioni	Conoscenza delle principali caratteristiche (insieme di definizione, comportamento agli estremi dell' insieme di definizione[1], crescenza, concavità) delle seguenti funzioni reali di variabile reale (caratterizzate, da ora in avanti come "funzioni elementari"): $f(x) = px + q$ $f(x) = x^n$ con n numero naturale $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(x) = 1/x$ $f(x) = \sqrt[n]{x}$, con n numero naturale > 1 $f(x) = a^x$ con a reale positivo $\neq 1$ $f(x) = \log_a x$ con a reale positivo $\neq 1$ $f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x)$ $f(x) = \arctan(x)$ $f(x) = \arcsin(x)$ $f(x) = \arccos(x)$	

[1] Se l' insieme di definizione non viene dato esplicitamente si intende quello che alcuni chiamano "insieme di definizione naturale", ossia l'insieme di tutti i numeri reali per cui la funzione può essere definita.

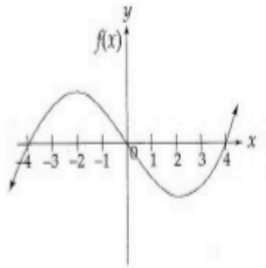
	Definizione di funzione composta	Date le funzioni $f(x) = e^x + x$ e $g(x) = sin(2x)$, scrivere $f(g(x))$ e $g(f(x))$
	Insieme di definizione di funzioni ottenute come composizione di "funzioni elementari" (un'indicazione è quella di limitarsi a funzioni che si ottengono come composizioni di due "funzioni elementari")	Determinare l'insieme di definizione delle funzioni definite dalle seguenti formule: $f(x) = \ln(\sin(x))$ $f(x) = e^{(1/x)}$ $f(x) = \ln(2x^2 - x - 1)$ $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 1\right)$
	Teoremi sulla crescenza di funzioni risultanti dalla composizione di due "funzioni elementari"	Determinare l'insieme di definizione e la crescenza delle funzioni definite dalle seguenti formule: $f(x) = \ln\,(2x^2 - 3x)$ $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - x - 1}$ $f(x) = e^{2-x^2}$ $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(2x - x^2\right)$ $f(x) = \arcsin(x^2 + 1)$ $f(x) = \arccos(x^2 - x)$
	Limiti: a) limite di funzioni composte b) teorema del confronto c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$	Determinare: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$
	Continuità: a) definizione di continuità in un	Dire quanto deve valere a affinché la funzione $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & per\ x \neq 0 \\ a & per\ x = 0 \end{cases}$ sia continua nel suo insieme di definizione

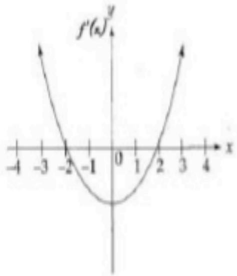
	punto b) teorema degli zeri per le funzioni continue c) riconoscere se una data funzione è o meno continua in un punto o nel suo insieme di definizione	Dimostrare che la funzione *f(x) = cos x - x* ammette almeno uno zero nell'intervallo [0,1]. Dimostrare che l'equazione $\cos x - x + 2 = 0$ ha una sola radice nell'intervallo I = [0;2] Studiare la continuità di $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$
	Asintoti del grafico di "funzioni elementari" o ottenute come composizione di "funzioni elementari" (si consiglia di limitarsi a composizioni di due funzioni) o come rapporti o come prodotti di "funzioni elementari"	*Quesito 2 Corso di ordinamento 2012* Si illustri il significato di asintoto e si fornisca un esempio di funzione *f(x)* il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
	Derivate: a) definizione di derivata in un punto limite del rapporto incrementale in quel punto b) retta tangente al grafico di una funzione in un	Si scriva il limite del rapporto incrementale in un punto generico della funzione $f(x) = 3x + 2$. Si scriva il limite del rapporto incrementale in un punto generico della funzione $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Sia data la funzione *f* definita da $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + 3, & x \geq 0 \\ 4ax - b, & x < 0 \end{cases}$

	punto, sua esistenza, sua pendenza e sua equazione (se esiste) c) relazioni tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto d) differenziale di una funzione e suo significato geometrico(linearizzazione di una funzione in un punto) e) derivate delle “funzioni elementari” f) derivata della somma o differenza di due funzioni g) derivata del prodotto di due funzioni h) derivata della funzione reciproca i) derivata della funzione composta j) derivata della	a) Si determini, se esistono, valori reali di a e di b per cui f è continua e derivabile su R. b) Si disegni il grafico di $f(x)$ per $a = 1$ e $b = -3$. c) Si determini l’equazione della tangente,nel punto di ascissa ½, al grafico della funzione $f(x)$ considerata al punto b). Il segmento in figura è il grafico della funzione *f ’(x)*, derivata prima della funzione *f(x)*. Si dica per quali valori di x la funzione *f(x)* è crescente o decrescente e per quali valori di x si ha, se esistono, massimi relativi, minimi relativi, flessi e si giustifichino le risposte.  Il segmento in figura, che ha estremi nei punti A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B), con $x_A < x_B$, interseca l’asse delle ascisse nel punto C(x_C, 0) ed è il grafico di una funzione *f ’(x)*, derivata prima di una funzione *f(x)*. Si dica per quali valori di x la funzione *f(x)* è crescente o decrescente e per quali valori di x presenta, se esistono, massimi relativi o minimi relativi, e si giustifichino le risposte.

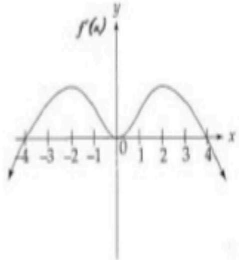
	funzione inversa k) segno della derivata e monotonia, massimi e minimi relativi e assoluti, concavità e flessi del grafico di una funzione l) velocità istantanea di variazione di un processo descritto da una funzione	 La parabola che interseca l'asse delle ascisse nei punti A(x_A,0), B(x_B, 0), con $x_A < x_B$, ha il vertice nel punto V di ordinata V_C<0,è il grafico di una funzione *f '(x)*, derivata prima di una funzione *f(x)*. Si dica per quali valori di *x* la funzione *f(x)* è crescente o decrescente e per quali valori di *x* presenta, se esistono, massimi relativi o minimi relativi, e si giustifichino le risposte. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^3 + x + 1$ è invertibile in R . Indicata con *g*(*x*) la funzione inversa, determinare *g*'(3). Sia $f(x)$ la funzione definita "a tratti": $f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ bx + c & \text{se } x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ Determinare le costanti *a, b, c* in modo che la funzione sia derivabile per ogni *x* reale. Disegnare il grafico di $f(x)$. *Quesito 10 Corso ordinamento 2013*

Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.

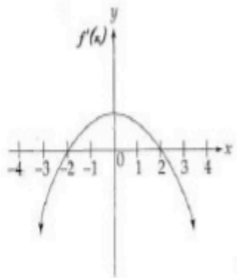




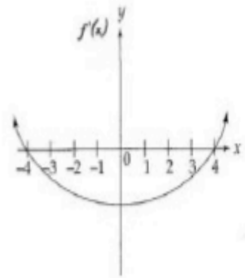
A)



C)



B)



D)

		Quesito 3 Corso ordinamento 2012 3. La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$? *Quesito 3 Corso PNI 2012* Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1? NB *Si presuppone che la "curva" di cui si parla nel quesito sia il grafico della funzione f(x).*
	Calcolo di un'approssimazione dello zero di una funzione con il metodo di bisezione Teorema di Weierstrass sull'esistenza di minimi e massimi assoluti per una funzione continua definita su un insieme chiuso e limitato Problemi di massimo e di minimo.	*Quesito 6 Corso di ordinamento 2014* 6. Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina? *Quesito 6 Corso PNI 2014* Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$. *Quesito 3 Corso di ordinamento e PNI 2013* Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;-1)$ e $B(-6;-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

		Quesito 4 Corso ordinamento 2012 Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?
	Integrali: a) nozione di integrale definito di una funzione in un intervallo b) interpretazione dell’integrale definito di una funzione come area c) teorema della media integrale e suo significato geometrico d) espressione per mezzo di integrali dell'area di insiemi di punti del piano compresi tra due grafici di funzioni del tipo: $f(x) = px + q$ $f(x) = x^n$ con n numero naturale $f(x) = ax^2 + bx +$	*Quesito 7 Corso di ordinamento 2007* Se f(x) è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all’origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione 3+ f(x)? *Quesito 7 Corso di ordinamento 2014* Il valor medio della funzione $f(x)=x^3$ sull’intervallo chiuso $[0,k]$ è 9. Si determini k. *Quesito 8 Corso di ordinamento 2012* Qual è il valor medio di $f(x)=\frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?

	c, più, in generale funzioni polinomiali $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con n numero naturale > 1 $f(x) = a^x$ con a reale positivo $\neq 1$ $f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ e) determinazione del volume di solidi ottenuti dalla rotazione di grafici di funzioni “elementari”. f) primitiva di una funzione e nozione d’integrale indefinito g) calcolo di primitive delle funzioni del tipo: $f(x) = x^n$ con n numero naturale $f(x) = ax^2 + bx + c$, più in	

	generale funzioni polinomiali $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con n numero naturale > 1 $f(x) = a^x$ con a realepositivo $\neq 1$ $f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ h) teorema fondamentale del calcolo integrale i) calcolo di un integrale definito di una funzione di cui si conosce una primitiva (o la si può ricavare integrando funzioni del tipo sopra precisato).	
	Equazioni differenziali: a) concetto di equazione differenziale e sua utilizzazione per la descrizione e	Esempio 1 *Bac 2009 scuole europee*

	modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. b) risoluzioni di equazioni differenziali del tipo $g'(x) = f(x)$ dove $f(x)$ è una funzione del tipo: $f(x) = x^n$ con n numero naturale $f(x) = ax^2 + bx + c$, più in generale funzioni polinomiali $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con n numero naturale > 1 $f(x) = a^x$ con a reale positivo $\neq 1$ $f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ c) risoluzioni di equazioni differenziali del tipo $f'(x) = (ax + b)\, f(x)$	Uno studente sta studiando la crescita di una popolazione di batteri. Egli ritiene che la crescita possa essere descritta dalla seguente equazione differenziale: $$\frac{dN}{dt} = 0{,}25\,N\,t$$ dove t è il tempo in minuti trascorso dall'inizio dell'esperimento e N è il numero di batteri presenti all'istante t. Viene ora effettuato un esperimento in cui il numero iniziale di batteri è 5000. a) Determinare la soluzione di questa equazione differenziale esprimendo N in funzione del tempo. b) i. Calcolare il numero di batteri presenti dopo 4 minuti. ii. Calcolare il tempo necessario affinché il numero di batteri presenti diventi uguale a 50000. *Esempio 2. Bac scuole europee 2008*

		Secondo un modello matematico per le gare di corsa sulle brevi distanze, un atleta aumenta la sua velocità v (in m/s) in funzione del tempo t (in secondi), in accordo con la seguente equazione differenziale: $$\frac{dv}{dt} = 12,2 - kv$$ dove k è una costante che dipende dall'atleta considerato. a) Determinare la soluzione generale di questa equazione differenziale esprimendo v in funzione di t. b) In una gara dei 100 metri piani, un atleta parte da fermo, ossia con $v = 0$ all'istante t=0. i. Trovare la soluzione che dà v in funzione del tempo e che soddisfa questa condizione iniziale. ii. Il valore di k per un certo atleta è 1,25. Calcolare il tempo impiegato da questo atleta per raggiungere la velocità di 9,0 m/s.
Dati e previsioni	Concetto di variabile aleatoria discreta e distribuzione binomiale (valor medio e deviazione standard)	**Quesito 3 Corso PNI 2014**

		3. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità: • esattamente una pallina è rossa • le tre palline sono di colori differenti. **Quesito 7**
		Esame di Stato 2011 PNI Quesito 7 Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta tra quattro alternative. Qual è la probabilità che rispondendo a caso, almeno due risposte siano esatte?
		Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?
		Esame di Stato 2006 PNI Quesito 8 ***QUESITO 8*** Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta? **Esame di stato PNI 2005 quesito 9** Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti qual è la probabilità di avere due 10 in sei lanci?

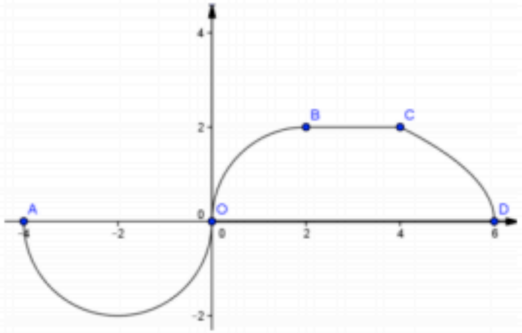
	Concetto di variabile aleatoria continua e distribuzione normale (valor medio e deviazione standard)	Il punteggio X assegnato ad un test segue una distribuzione Normale di media μ=117 e deviazione standard σ=28,5. Il candidato: a) descriva le caratteristiche della distribuzione di probabilità della variabile casuale X. b) calcoli la probabilità che il punteggio superi ($\mu+\sigma$) c) valuti,in un insieme di 150 studenti, quanti mediamente otterrebbero, nel test, un punteggio maggiore di 145 ——— La variabile casuale X che descrive la spesa al bar della scuola, in euro, di uno studente da distribuzione Normale di media μ =2,75 e deviazione standard σ=1,25. Il candidato: a) calcoli la probabilità che uno studente spenda più di 3 euro b) individui il valore *x*, assunto dalla variabile X, che corrisponde al valore standardizzato *z*=-1,26 ——— Un dispositivo è formato da 5 componenti che si possono guastare indipendentemente l'uno dall'altro. È noto che ciascun componente ha probabilità di guastarsi uguale a 0,08. Il candidato : a) fornisca la distribuzione di probabilità della variabile casuale X= "numero di componenti guasti" b) Valuti la probabilità che al massimo uno dei componenti si guasti. ——— Di una variabile casuale binomiale X si conoscono Il numero di prove *n*=10 e il valore della varianza uguale a 0,9. Il candidato: a) Fornisca il valore della probabilità *p* di "successo" b) Calcoli la probabilità che X appartenga all'intervallo]2, 6[. ——— **Quesito 4 PNI 2007**

		QUESITO 4 Si consideri la funzione: $$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.
	Operazione di standardizzazione: sua importanza nel confronto e studio di distribuzioni statistiche e di probabilità e per l'utilizzo in modo corretto delle tavole della distribuzione normale standardizzata (della densità e della funzione di ripartizione).	Che cosa si intende per operazione di standardizzazione? L'operazione di standardizzazione è applicabile a qualsiasi variabile casuale? Quali sono le caratteristiche della variabile risultante dall'operazione di standardizzazione?

Esempi di problemi d'esame che non richiedono altre conoscenze oltre a quelle che abbiamo considerato come irrinunciabili

Problema n. 1 corso PNI 2014

PROBLEMA 1

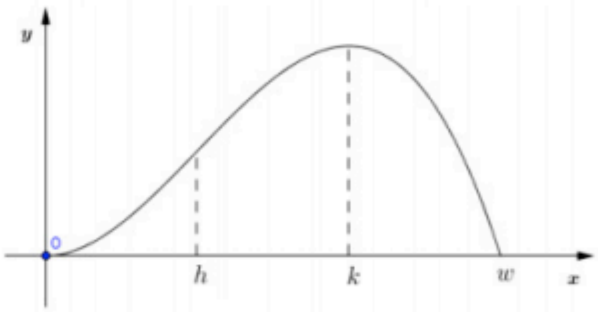


Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4,6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A(-4;0)$, $O(0;0)$, $B(2;2)$, $C(4;2)$, $D(6;0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x.

1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D.
2. Posto $f(x)=\int_{-4}^{x} g(t)\,dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4,6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

Problema n. 1 Corso di ordinamento 2014

Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ con f funzione definita sull'intervallo $[0, w]$ e ivi continua e derivabile. Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x=h$ e $x=k$.



1) Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
2) Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che $g(x)$ sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.
3) Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w=3$ e $g(1)=\frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y=\frac{2}{3}$.
4) Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa attorno all'asse y. Si spieghi perchè il volume di W si può ottenere calcolando:

$$\int_0^3 (2\pi x)\,g(x)\,dx$$

Supposte fissate in decimetri le unità di misura del sistema monometrico Oxy, si dia la capacità in litri di W.

I primi tre quesiti del problema 1 Corso ordinamento 2013

La funzione f è definita da $f(x)=\int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0,9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0,2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0\le x\le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x)=3\,sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

   Si calcoli il volume di W.

I primi tre quesiti del problema 1 Corso ordinamento 2012

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

$$f(x)=\left|27x^3\right| \quad e \quad g(x)=sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x=\frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perchè, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.