XXXII CONVEGNO UMI-CIIM
IL VALORE FORMATIVO DELLA MATEMATICA
NELLA SCUOLA DI OGGI

dedicato a Federigo Enriques **Livorno, 16-18 ottobre 2014**

SCELTE ALLA BASE DI UN PERCORSO FORMATIVO: ARITMETICA E ALGEBRA SECONDO BIENNIO

Pierangela Accomazzo

Sergio Zoccante

Il percorso CIIM: quali linee guida

- Coerenza con le *Indicazioni nazionali* e con le *Linee guida*
- Continuità tra i percorsi Primo Biennio/Secondo biennio e quinto anno
- Flessibilità delle proposte didattiche per un facile adattamento a ogni corso di studi della scuola secondaria di secondo grado.
- Materiali scelti prevalentemente tra quelli disponibili in rete di sicura affidabilità e già sperimentati.
- Esempi e indicazioni per un uso consapevole dello strumento informatico.
- Modalità per la realizzazione di momenti di *Didattica laboratoriale*.
- Indicazioni su pratiche didattiche da evitare.

Due proposte di percorso …

Sia per il primo che per il secondo biennio sono stati prodotti due documenti:

- Un percorso sintetico per i corsi con un ridotto numero di ore di Matematica
- Un percorso analitico per le scuole con programma di Matematica 'forte'

I due percorsi sono consultabili sul sito UMI **http://www.umi-ciim.it** nella sezione 'Materiali UMI CIIM'

Propongono un esempio di possibile programmazione su conoscenze e competenze essenziali, validi per le scuole secondarie di secondo grado

- che hanno solo tre/due ore settimanali di matematica (primo percorso)
- che hanno cinque/quattro ore settimanali di matematica (secondo percorso)

Commissione Italiana per
l'Insegnamento della Matematica

Commissione Permanente
dell'Unione Matematica Italiana

UMI - CIIM

HOME | CHE COS'È LA CIIM | ATTIVITÀ DELLA CIIM | MATERIALI UMI-CIIM | ALTRE RISORSE | CONTATTI | NEWS

- Primo ciclo
- Secondo ciclo
- Università
- Trasversali

Articolazione del percorso sintetico

Schema della proposta di suddivisione oraria per il percorso di Matematica II biennio (Indirizzi di studio con 2 ore settimanali)

Aritmetica e algebra	**Raggruppamenti comuni**	**Geometria**
3 h (A1) Numeri reali: Richiamo sulle proprietà di **R**. Numeri algebrici e trascendenti. **4 h** (A2) Successioni. **3 h** (A3) Principio di induzione e sue applicazioni. **5 h** (A4) I polinomi a coefficienti reali: Scomposizione in fattori, divisione tra polinomi. **4 h** (A5) Risoluzione di equazioni di secondo grado. **3 h** (A6) Il problema del contare. Elementi di base del calcolo combinatorio.	**4 h** (C1) - Equazione della circonferenza, della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole riferite a opportuni assi cartesiani (in comune tra *Geometria* e *Relazioni e funzioni*); possibilità di rappresentare tali curve in forma parametrica. **4 h** (C2) - Il moto armonico e le funzioni circolari (in comune tra *Geometria* e *Relazioni e funzioni*).	**8 h** (G1 – Coniche): - Osservazione e riproduzione di curve riconducibili a sezioni di un cono e loro rappresentazione grafica (sia sintetica che nel piano cartesiano [vedi raggruppamenti comuni, in cui 2 ore delle 4 indicate sono comprese in queste 10]). - Costruzione di coniche come luoghi geometrici. **8 h** (G2 – Trigonometria): - Misura di angoli in gradi sessagesimali e in radianti. - Seno, coseno, tangente di un angolo acuto come applicazione della

Articolazione del percorso analitico

Conoscenze	**Abilità e competenze specifiche**	**Attività**
Numeri reali Richiamo sulle proprietà di **R** Numeri algebrici e trascendenti I numeri ***e*** e ***π*** Cenno all'insieme **R** dei numeri reali. Ordinamento. Confronto tra numeri reali.	Approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. Lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico). Sarà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.	1A – Il livello del mare (m@t.abel) *L'attività suggerisce problemi legati alle diverse rappresentazioni dei numeri nei diversi contesti. In particolare propone di operare con la notazione scientifica e di distinguere la rilevanza della precisione e dell'ordine di grandezza nella valutazione di un numero e, contemporaneamente, di acquisire un "senso del numero" adeguato a valutare l'attendibilità di informazioni numeriche relative a situazioni reali.* 2A – Il foglio A4 (m@t.abel) *Questa attività propone una prima costruzione dei numeri reali, che sarà poi approfondita con l'attività "Numeri sulla retta". Perché, quando si fotocopia un foglio A4, lo si può ingrandire esattamente su un foglio A3? E che c'entra questo con la matematica? A partire da queste domande si sviluppa un percorso che mostra la necessità di uscire dal mondo dei numeri razionali e costruirne di nuovi: i numeri irrazionali. Il percorso prosegue mostrando come sia possibile rappresentare mediante allineamenti decimali un qualsiasi numero reale e come si possano eseguire calcoli tra questi. L'attività integra aspetti di problem solving, di dimostrazione, di invenzione, di discussione matematica.* 3A – Numeri sulla retta (m@t.abel) *Si propone una sistemazione dei concetti relativi all'ordine e alla densità degli insiemi numerici, e alla compatibilità delle operazioni, in particolare della moltiplicazione, rispetto all'ordine. Le proposte di laboratorio ruotano attorno alla rappresentazione dei numeri sulla retta, a partire dai razionali, per estendersi poi ad alcuni numeri irrazionali (le radici quadrate di naturali) ed infine ai reali. Un percorso guidato mira a superare le difficoltà degli alunni nel corretto confronto fra frazioni e numeri decimali. Si esaminano situazioni che sono spesso causa di errori, come il confronto tra numeri decimali con un numero diverso di cifre decimali (ad es. 3,2 e 3,12), e la moltiplicazione tra numeri minori di 1 (in cui il prodotto è minore dei fattori).*

Elementi per la costruzione di un percorso

Ogni docente segue, coscientemente o no, un suo percorso nell'insegnamento della matematica in una classe ben precisa

Esplicitare gli elementi che stanno alla base del percorso permette di

- ***controllare** il processo con maggiore efficacia*
- ***interagire** con altri nella costruzione di **percorsi comuni***

Scelte alla base di un percorso

Le scelte disciplinari e didattiche (implicite o esplicite) che stanno alla base di un percorso:

il caso di *Aritmetica e Algebra*

E' un ambito particolarmente *sensibile* per quanto concerne la *percezione* che uno studente si fa della matematica

- *fornisce **il** linguaggio della matematica, oggi*

- *fornisce alcuni tra gli **strumenti fondamentali** della matematica*

- *fornisce alcuni tra i **concetti fondamentali** della matematica*

Il caso di *Aritmetica e Algebra*

Illustreremo qui le scelte di base sulle quali il gruppo di lavoro ha costruito il percorso; ma prima vorremmo che sulle scelte e sulle pratiche didattiche correnti si aprisse una discussione.

- Insiemi numerici e difficoltà degli allievi: su quali punti ritieni che vada posta particolare attenzione? Che cosa può essere lasciato ad una preparazione precedente e che cosa va ripreso ed approfondito?
- Numeri reali, numeri complessi: come equilibrare l'aspetto concettuale con l'aspetto strumentale?

Il caso di *Aritmetica e Algebra*

- Come viene introdotto nelle tue classi il linguaggio algebrico?
- Quale peso dai all'acquisizione di abilità di calcolo?
- Usi l'algebra per modellizzare una situazione o un problema?
- Usi l'algebra per dimostrare delle proprietà?

Il caso di *Aritmetica e Algebra*

Le risposte alle domande precedenti sono guidate dalle risposte a queste ulteriori domande:

Che cosa significa per te possedere buona padronanza numerica? In altre parole, che cosa intendi per *senso del numero*?

Quali sono i motivi per cui insegni il calcolo letterale?

E più in generale: che cosa è per te l’Algebra?

Scelte alla base di un percorso: il nodo dell'Algebra

E' uno strumento per

- *rappresentare*
- *comunicare*
- *generalizzare*
- *dimostrare*

Quando si trova una formula:

- *Bisogna saperla* ***leggere***
- *Bisogna saperne cogliere lo* ***schema*** *(il* pattern*)*

Quando si rappresenta occorre:

- *Porre attenzione alla* ***giusta*** *scelta della simbolizzazione*
- *Usare la formula* ***giusta*** *per ogni contesto*
- *Rendersi conto che la rappresentazione è l'****inizio*** *e la* ***base*** *di ogni modellizzazione*

Un passo indietro: Il primo biennio
Aritmetica e Algebra - le scelte del gruppo di lavoro

Le *Indicazioni ministeriali*…

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico.

La proposta del gruppo:

Il senso del numero

- Gli ordini di grandezza, le stime numeriche, le percentuali, l'uso dei numeri per misurare, contare, ordinare, ossia tutte quelle conoscenze e attività che contribuiscono a formare negli studenti una buona sensibilità numerica, possono essere conseguite, consolidate e rafforzate trattando argomenti legati all'elaborazione dei dati e, più in particolare, alla statistica descrittiva.

- Lavorando con i numeri gli studenti impareranno a eseguire operazioni tra i numeri conosciuti a mente oppure utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo e valutando quale strumento può essere più opportuno, a seconda della situazione e degli obiettivi, a confrontare i numeri anche se espressi in vario modo (frazioni, numeri decimali,...)

Aritmetica e Algebra: le scelte del gruppo di lavoro
Il primo biennio

La proposta del gruppo:

Il linguaggio dell’Algebra

L'utilizzo delle lettere precede l'usuale calcolo algebrico, ed è inizialmente finalizzato a generalizzare proprietà numeriche, ad esprimerle in modo adeguato, a dimostrarle. Solo in un secondo tempo si passerà allo studio esplicito delle tecniche di calcolo.
….consolidare gradualmente nel tempo la competenza nel calcolo numerico, e giungere ad una competenza algebrica adeguata nell'arco del primo biennio.

Pensa un numero intero

- somma ad esso 12
- moltiplica il risultato per 5
- sottrai 4 volte il numero pensato
- somma al risultato 40

Che numero hai ottenuto?

L'uso delle lettere non si riduca al solito calcolo algebrico, ma anzi lo preceda e serva ad esprimere le proprietà dei numeri

Indicazioni del "Percorso Sintetico"

n	**…+12**	**…•5**	**… - 4•…**	**…+40**	**Cosa ottieni?**
7	7+12	(7+12)•5	(7+12)•5 – 4•7	[(7+12)•5 - 4•7]+40	

Prova ora a "generalizzare" l'espressione scritta, in modo indipendente dal numero pensato

Quel che vedo è sempre vero

m@t.abel

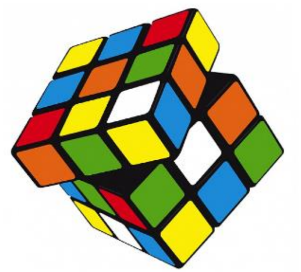
La differenza tra il quadrato di un numero naturale e il quadrato del suo precedente è sempre un numero dispari?

Dalla congettura, all'argomentazione, alla dimostrazione:
i simboli per esprimere, comunicare, generalizzare e risolvere problemi

Indicazioni del "Percorso Sintetico"

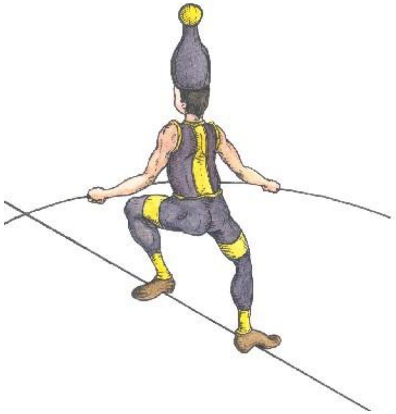
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Quel che vedo è sempre vero						
2									
3									
4		1°numero		n° precedente		1°quadrato	2° quadrato	differenza	
5									
6		5		4		25	16	9	
7		8		7		64	49	15	
8		11		10		121	100	21	
9									
10									
11									

Consigli e sconsigli



- È importante mantenere forte, soprattutto nelle prime manipolazioni algebriche, il significato delle formule e far capire all'allievo che il calcolo algebrico non è fine a se stesso.

Nell'affrontare le tecniche di calcolo algebrico sarà opportuno individuare il giusto equilibrio fra la ricerca del valore semantico (il 'senso' di una formula in un certo contesto) e l'abilità sintattica (cioè di calcolo formale) che è in parte legata all'addestramento.



Gli esercizi dovranno essere scelti per la loro valenza operativa e non dovranno costituire compito eccessivamente ripetitivo

Aritmetica e Algebra: le scelte del gruppo di lavoro
Il secondo biennio

Le indicazioni ministeriali….

I numeri reali

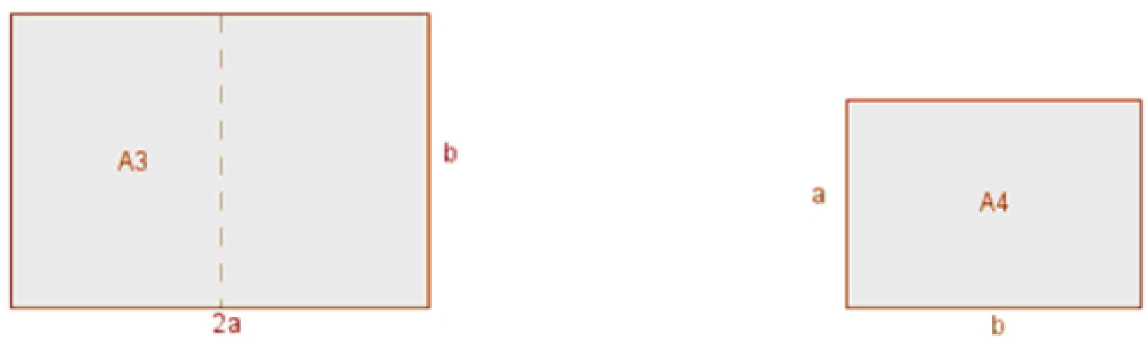
- Approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti.
- Lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico).
- Sarà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.

…e la proposta del gruppo:

Coltivare una 'manutenzione delle conoscenze acquisite' e un potenziamento delle medesime attraverso la soluzione di problemi via via più articolati e complessi.
Riprendere e approfondire l'esperienza degli allievi sui numeri reali, requisito indispensabile per affrontare l'Analisi, e sui polinomi, interpretati sia dal punto di vista algebrico sia dal punto di vista funzionale.

Il foglio A4
I numeri razionali non bastano

Numeri reali per calcolare e misurare
Che relazione c’è fra le dimensioni di un foglio comune di formato A4 in uno più grande di formato A3?
Il formato A3 di un foglio ha superficie doppia rispetto ad comune foglio A4:
Come devono essere i rapporti fra i lati di ciascun rettangolo?



Perché è importante il numero e ?

Treccani.it L'ENCICLOPEDIA ITALIANA

Perché è importante il numero e?

Lezione in PDF

Matematica: lezioni pubblicate

Introduzione | *Lezione* | *Risorse* | *Verifica*

La lezione parte da problemi di capitalizzazione in regime di interesse composto per arrivare gradualmente al numero e, mostrandone l'importanza nei processi di crescita continua.

RIFERIMENTI DIDATTICI

L'argomento '*funzione esponenziale e logaritmo*' è stato spesso trascurato finora nei licei. Ma oggi le recenti Indicazioni nazionali portano a una sostanziale identificazione nella trattazione dell'argomento durante il 2° biennio di tutti i licei. In particolare, è previsto lo studio di 'contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero ***e***'.

Sembra dunque richiesto un notevole cambiamento nella pratica didattica tradizionale. Per questi può essere utile un gruppo di sei lezioni, pronte per l'uso in aula, che costruiscono l'intero percorso per un apprendimento attivo del tema, completato anche da un buon numero di esercizi.

Verso il numero e

$$\left(1+\frac{1}{119989}\right)^{119989} = 2.7182705013$$

Aritmetica e Algebra: le scelte del gruppo di lavoro
Il secondo biennio

Le indicazioni ministeriali
Metodi numerici per la risoluzione di equazioni (→ Relazioni e funzioni)

Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione; e, inoltre, il concetto di funzione calcolabile e di calcolabilità e alcuni semplici esempi relativi.

La proposta del gruppo:
E' opportuno che gli allievi acquisiscano la capacità di affrontare la soluzione di equazioni utilizzando strumenti non soltanto algebrici, ma anche grafici e numerici;
…sapranno manipolare e dare un senso non solo alle soluzioni 'esatte' ottenute attraverso formule algebriche, ma anche ai valori approssimati ricavati da considerazioni grafiche o procedimenti numerici iterativi.

Risoluzione di equazioni

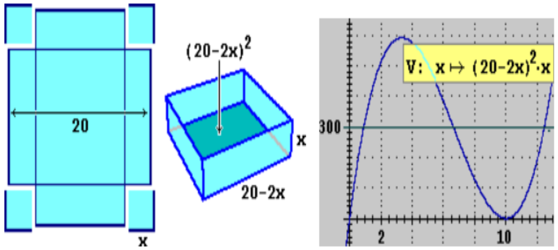
Risoluzione di equazioni (2)

Approfondiamo le considerazioni svolte in ➯ risoluzione di equazioni (1).

Aspetti generali

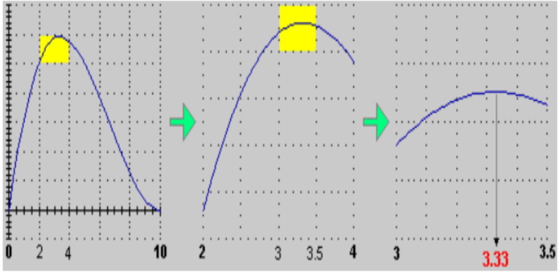
- il ➔ *metodo grafico* per risolvere le equazioni ha vantaggi e svantaggi:

• dal grafico di V (la funzione che a x associa il *volume [in cm^3] della scatola realizzabile tagliando da una lamiera quadrata di lato 20 [cm] quattro quadratini di lato x e operando successive piegature e saldature*: vedi figura sotto a sinistra) riesco a capire che le soluzioni in [0,10] di $(20-2x)^2x = 300$ (*come devo effettuare i tagli per ottenere un volume di 300 cm^3?*) sono 2 e riesco a valutarle, anche ***senza conoscere tecniche algebriche***;



Come devo prendere x ($0 \le x \le 10$: per x = 0 non effettuo tagli, per x = 10 taglio via tutto) per ottenere V=300? Dal grafico ricavo che x può essere circa 1 o circa 6.5. Con degli zoom posso migliorare la precisone e trovare gli arrotondamenti 0.9 e 6.6, che potrebbero essere sufficienti se le misure sono in *cm*.

NOTA. Graficamente potrei risolvere anche il problema: "*come devo effettuare il taglio per ottenere il volume* ***massimo****?*". Con successivi zoom posso trovare valori man mano più precisi: 3 cm, 3.3 cm, 3.33 cm (questa precisione, al decimo di millimetro, è sicuramente sufficiente per qualunque problema pratico).



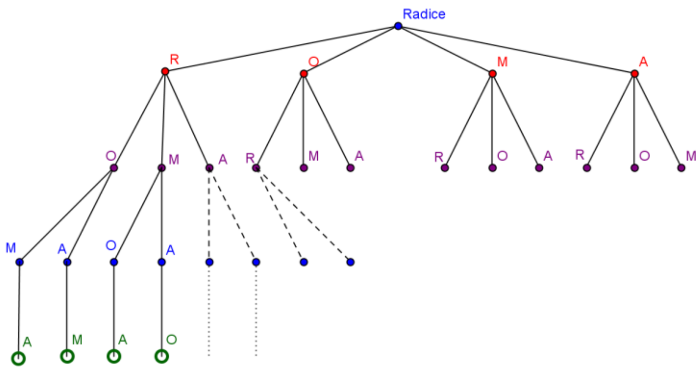
Aritmetica e Algebra: le scelte del gruppo di lavoro
Il secondo biennio

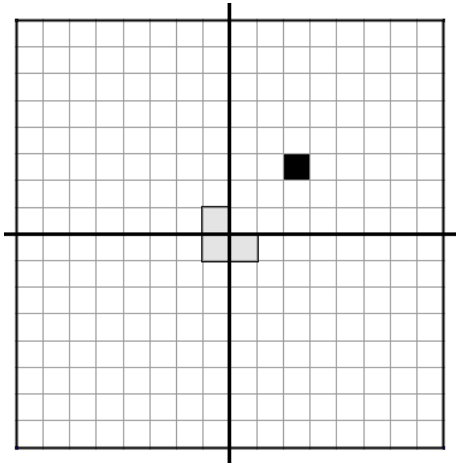
Le indicazioni ministeriali
Successioni e principio di induzione
Lo studente acquisirà la conoscenza di semplici esempi di successioni numeriche, anche definite per ricorrenza, e saprà trattare situazioni in cui si presentano progressioni aritmetiche e geometriche.
Il principio di induzione.

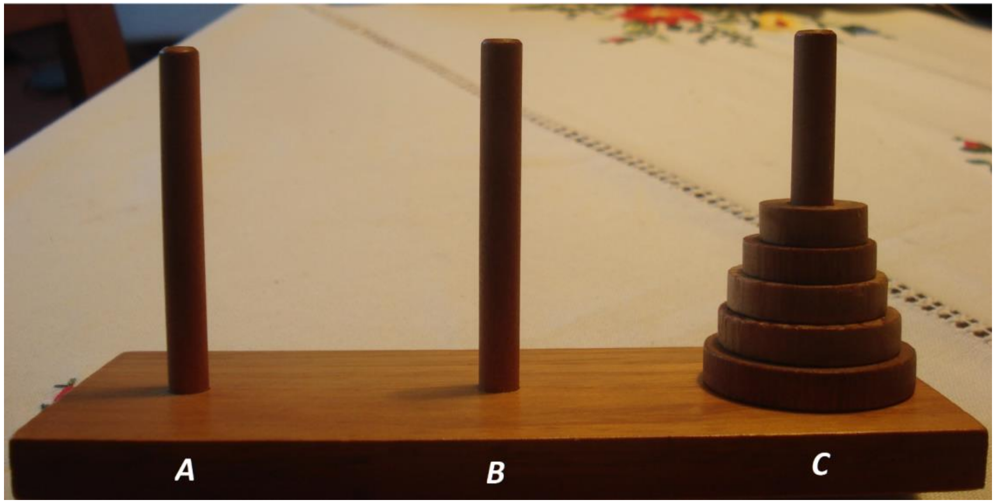
La proposta del gruppo:
Attraverso successioni possono essere descritti e modellizzati fenomeni naturali, e la definizione per ricorrenza "non è un artificio matematico".
Si potrà arrivare progressivamente alle dimostrazioni per induzione, non semplici da comprendere per gli allievi, dopo aver molto lavorato sulle definizioni per ricorrenza; solo quando gli allievi avranno ben compreso la differenza fra 'stato iniziale' e 'passo induttivo' si procederà a lavorare sulle dimostrazioni.

m@t.abel

L'induzione in matematica
Dagli anagrammi alla torre di Hanoi







Aritmetica e Algebra: le scelte del gruppo di lavoro
Il secondo biennio

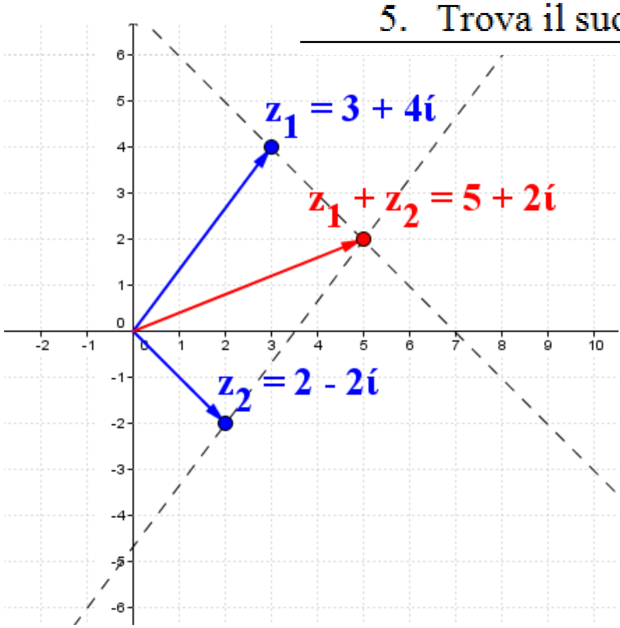
Le indicazioni ministeriali
I numeri complessi
Definizione e le proprietà delle operazioni dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica.

Numero delle soluzioni delle equazioni polinomiali

La proposta del gruppo:
I numeri complessi sono utilizzati in modo strumentale in alcune materie tecniche; tuttavia riteniamo opportuno dare loro significato teorico che ne favorisce una più profonda comprensione

Dalla forma algebrica alla rappresentazione nel piano cartesiano.
Con un software di geometria dinamica vengono proposte le costruzioni che realizzano le operazioni (addizione, moltiplicazione, reciproco e divisione).

Considerando il numero complesso $z = 2+3i$	
1. Indica la parte reale	
2. Indica il coefficiente della parte immaginaria	
3. Scrivi il suo complesso coniugato	
4. Trova il suo modulo	
5. Trova il suo modulo del suo complesso coniugato	



Aritmetica e Algebra: le scelte del gruppo di lavoro
Il secondo biennio

Le indicazioni ministeriali
Il problema del contare

- Studierà […] gli elementi di base del calcolo combinatorio

La proposta del gruppo:
Il Calcolo combinatorio è un importante tema di *Matematica discreta* che è opportuno sviluppare quanto prima; non va finalizzato unicamente al calcolo delle probabilità. Può essere, ad es., uno strumento efficace per risolvere problematiche legate al campionamento da popolazioni finite in contesti diversi.
Utilizzare i grafi ad albero per gestire i problemi, almeno nei casi semplici: questi permettono di fare congetture sulle formule, e, volendo, anche sugli algoritmi che consentono di elencare tutti i casi previsti
Solo dopo queste attività è significativa l'introduzione della terminologia specifica e delle formule relative.

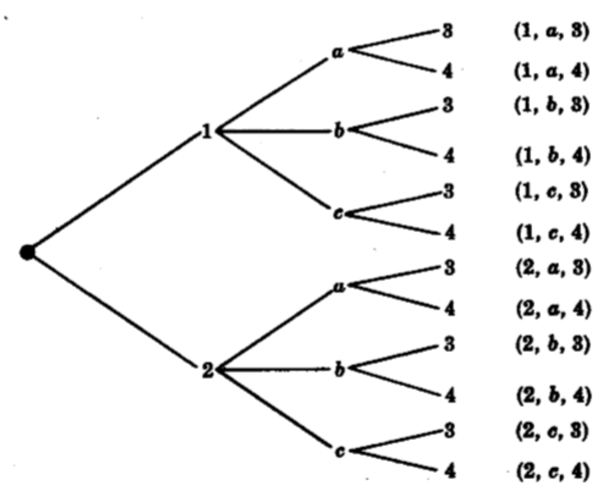
A cosa serve il calcolo combinatorio ?
Serve a contare, possibilmente senza fare troppi conti

Esempio 5 *Indicare con un grafo ad albero l'insieme dei casi possibili relativi agli eventi:*

$A = \{$ *Sono indeciso fra andare al cinema* (1) *o al mare* (2)$\}$;

$B = \{$ *Oggi pomeriggio uscirò con Anna* (a) *oppure Beatrice* (b) *oppure Carlotta* (c)$\}$;

$C = \{$ *Prima di uscire devo finire un lavoro. Uscirò alle tre* (3) *oppure alle quattro* (4)$\}$.?



Grazie per l'attenzione

pi.accom@tin.it
sergiozoccante@tin.it

Livorno, 16.10.2014

La Commissione CIIM sulle indicazioni curricolari

- Pierangela Accomazzo
- Marilina Ajello / Enrica Ferrari
- Gianpaolo Baruzzo
- Silvia Beltramino
- Sebastiano Cappuccio
- Maria Angela Chimetto
- Donata Foà
- Paola Ranzani
- Riccardo Ruganti
- Luigi Tomasi
- Sergio Zoccante

Coordinatore: Ercole Castagnola

Il compito:
produrre materiali che possano aiutare gli insegnanti che lavorano nella scuola secondaria di secondo grado nella costruzione di percorsi didattici di matematica coerenti con le indicazioni della riforma.

Spunti di riflessione

Questo approccio all’Algebra è prassi corrente?

Come viene introdotto nelle vostre classi il linguaggio algebrico?

Quale peso viene dato all’acquisizione di abilità di calcolo? Quale all’uso strumentale dei numeri e dell’algebra nella risoluzione di problemi aperti?

PROVE INVALSI

Classe II sup. – 2011

D16. L'espressione $10^{37} + 10^{38}$ è anche uguale a

- ☐ A. 20^{75}
- ☐ B. 10^{7}
- ☐ C. $11 \cdot 10^{37}$
- ☐ D. $10^{37 \cdot 38}$

Non trasferiscono all'ambito numerico il raccoglimento a fattor comune. Il calcolo simbolico è un campo di esperienza recintato e non comunicante con gli oggetti numerici. L'algebra non è strumento di pensiero

Non risp	A	B	C	D
2,4	35,0	1,9	**22,0**	38,7

PROVE INVALSI

Classe II sup. – 2014

D1. **Se k è un numero intero negativo, qual è il maggiore tra i seguenti numeri**

A. ☐ $5+k$

B. ☐ $5 \cdot k$

C. ☐ $5-k$

D. ☐ 5^k

Gli studenti possono rispondere notando che, per ogni k<0, 5+k è minore di 5; 5k è un numero negativo; 5^k è un numero minore di 1, mentre 5 – k è maggiore di 5. Un’esplorazione numerica può aiutare ad arrivare alla risposta corretta.

RISULTATI DEL CAMPIONE

	Item	Manc. Risp.	Opzioni A	B	C	D
G	D1	4,0	11,2	12,9	55,7	16,1
L	D1	3,0	8,1	10,7	65,2	12,9
T	D1	3,7	11,1	12,3	57,2	15,6
P	D1	6,6	17,5	18,5	33,8	23,4