



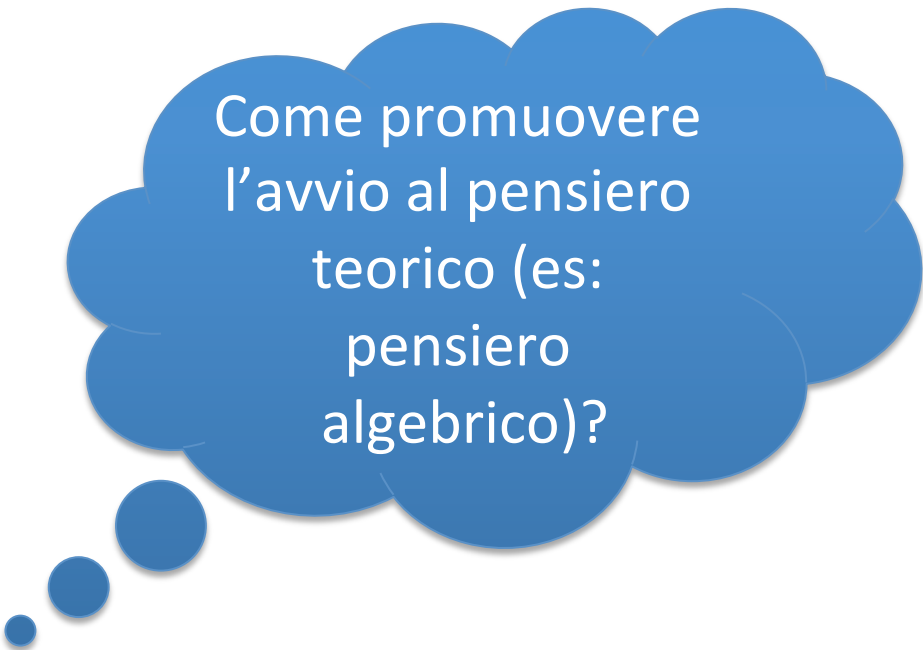
Osservazione a
lungo termine:
come si sviluppano
le competenze
argomentative?



Come promuovere
l'avvio al pensiero
teorico (es:
pensiero
algebrico)?



Come
l'argomentazione
promuove la
concettualizzazio
ne?



Come promuovere
l'avvio al pensiero
teorico (es:
pensiero
algebrico)?

L'algebra non è questione di nuovi simboli, ma di **insight & understanding** (Subramamian & Banerjee, 2011)

Algebra come **strumento dimostrativo** (Carpenter & Franke, 2001)

- Percorso modificato: rettangoli isoperimetrici
- Percorso ampliato: **somma di numeri consecutivi**

Lo sviluppo del pensiero algebrico comporta lo sviluppo di specifiche modalità di pensiero: **analizzare relazioni tra quantità, cogliere le strutture, giustificare e dimostrare**. (Cai & Knuth, 2011)

L'algebra come strumento dimostrativo

$$1500 + 1600 + 1700 = \boxed{4800} \div 1600 = 3$$

$$500 + 600 + 700 = 1800 \div 600 = 3$$

$$300 + 600 + 900 = 1800 \div 600 = 3$$

$$20 + 30 + 60 = 90 \div 30 = 3$$

$$30 + 60 + 90 = 180 \div 60 = 3$$

$$60 + 90 + 120 = 270 \div 90 = 3$$

Le funzioni del linguaggio algebrico

Il linguaggio algebrico può essere utilizzato con tre diverse finalità:

- **Stenografare**, cioè scrivere in modo simbolico
- **Sintetizzare** (cioè “riassumere informazioni”) e **generalizzare** (cioè scrivere nella forma più generale)
- **Trasformare**, cioè partire da una formula iniziale e, attraverso regole sintattiche, arrivare ad una formula finale.

Le funzioni del linguaggio algebrico

La funzione peculiare del linguaggio algebrico è quella **trasformatzionale**.

La funzione di trasformazione rende il linguaggio algebrico molto più che un metodo di rappresentazione della situazione problematica, conferendogli il potere di un vero strumento di pensiero.

Pensa un numero...

L'insegnante ti propone il seguente gioco:

“Pensa ad un numero, moltiplicalo per due, aggiungi cinque, togli il numero che hai pensato, aggiungi otto, togli due, togli il numero che hai pensato, togli uno”.

- Secondo te, è possibile che l'insegnante, pur non conoscendo il numero che tu hai pensato, indovini il tuo risultato?
- Se sì, in quale modo?

Il ciclo fondamentale dell'algebra



Il ciclo fondamentale dell'algebra

$$NX^2+5-N+8-2-N-1$$

TRASFORMAZIONE

$$NX^2-N-N+5+8-2-1=10$$

FORM 1

FORM 2

FORMALIZZAZIONE

INTERPRETAZIONE

SEM 1

SEM 2

IL GIOCO: pensa un numero....

IL RISULTATO E' SEMPRE 10

La razionalità nell'uso del linguaggio algebrico

Razionalità epistemica (ER)

Modelling requirements: correttezza della **formalizzazione** della situazione e dell'**interpretazione** delle espressioni algebriche

Systemic requirements: correttezza nell'applicazione delle regole sintattiche di trasformazione

Razionalità comunicativa (CR)

Adesione alle regole di notazione condivise dalla comunità di riferimento.
Adozione di criteri che possano facilitare la leggibilità e il trattamento delle espressioni

Razionalità teleologica (TR)

Scelta e gestione, consapevole e in accordo con lo scopo dell'attività, delle **formalizzazioni**, **trasformazioni** e **interpretazioni**

L'avvio all'algebra

Un modello implicito diffuso nell'insegnamento dell'algebra: l'algebra come **aritmetica generalizzata**

- Il linguaggio aritmetico si **estende** nel linguaggio algebrico
- L'algebra è il “perfezionamento” dell'aritmetica
 - “Memoria” dell'algebra
 - $8+3=11$ vs $a+b$

L' algebra come aritmetica generalizzata

“L' algebra fa risolvere più facilmente i problemi”

- Ma spesso i problemi presentati sono facilmente risolubili con l' aritmetica
- Questo “paradosso” può portare al rifiuto dell' algebra da parte degli studenti

Rischio: gli studenti non si sentono motivati ad utilizzare l' algebra

False continuità tra aritmetica ed algebra

Stessi simboli, significati diversi

$$4+3 = 7$$

“=” come azione, risultato

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$$

“=” come azione, risultato,
ma anche come relazione

False continuità tra aritmetica ed algebra

Le lettere:

$$2p = 3+3+5$$

etichetta

$$x^2 = 4$$

incognita

Quindi...

- Introdurre l'algebra come estensione dell'aritmetica può essere pericoloso (**false continuità**)
- **Rischio: privilegiare il calcolo**
- Il passaggio all'algebra non si può ridurre all'introduzione di un linguaggio più evoluto
- Il passaggio all'algebra segna un cambiamento **qualitativo**, e non solo di linguaggio

“Algebraic thinking in earlier grades should go beyond mastery of arithmetic and computational fluency to attend to the deeper underlying structure of mathematics.

The development of algebraic thinking, including analyzing relationship between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting. That is, early algebra learning develops not only new tools to understand mathematical relationships, but also **new habits of mind**”.

Cai & Knuth (2011)

La vera transizione non si realizza quando si iniziano a usare le lettere, ma quando si passa ad un **ragionamento di tipo algebrico**, cioè quando si passa dal calcolare allo studiare le relazioni

Un secondo esempio

- Classi seconde e terze di scuola secondaria di primo grado

Obiettivi generali:

- approccio all'algebra come strumento dimostrativo

Il percorso – attività iniziale

Che cosa si può dire della somma di tre numeri consecutivi?

LAVORO DI GRUPPO



- Immaginate le possibili soluzioni degli studenti
- Per risolvere il problema si usa l'algebra? Se sì, provate a utilizzare il ciclo fondamentale dell'algebra per fare un'analisi a priori della consegna

La sperimentazione

- Attività sperimentata in due classi seconde (IIB, IIC)
- In ogni classe: due sessioni di due ore
- A disposizione:
 - Produzioni individuali e di gruppo
 - Video delle discussioni di classe
 - Schermate LIM
 - Note dell'osservatore

Le congetture prodotte

- **Il risultato è divisibile per 3** (*9 studenti*)
- **Il risultato è divisibile per il numero intermedio** (*4 studenti*)
- Altre osservazioni (es: ogni somma è multipla della prima) (*4 studenti*)
- Solo esempi numerici (*3 studenti*)

Classe IIC

Classe IIB

- **Il risultato è divisibile per 3** (*14 studenti*)
- **Il risultato è divisibile per il numero intermedio** (*2 studenti*)
- **Prendendo due dispari più uno pari consecutivi il risultato è pari** (*7 studenti*)
- Altre osservazioni (es.: Il risultato è il doppio del precedente) (*6 studenti*)

Episodio 1: una proprietà, tre modi di provarla



Giustificazione mediante esempio generico

Elio

SI PUÒ OSSERVARE CHE LA SOMMA È UN
MULTIPLO DI TRE
 $1+2+3=6$
 $\quad \quad \quad +1$
 $7+8+9=24$
 $51+52+53=156$
INOLTRE SE IL TERZO NUMERO DÀ UN'UNITÀ
AL PRIMO, DIVENTANO NUMERI UGUALI

Inoltre se il terzo numero dà un'unità al primo, diventano numeri uguali

- Giustificazione mediante **esempio generico**:
l'esempio non serve per "verificare che la congettura funziona" ma per mostrare, nel caso specifico dell'esempio, "perché la congettura funziona"
- La giustificazione si fonda sul fatto che si può togliere 1 al terzo numero e aggiungerlo al primo, ottenendo così tre volte lo stesso numero

Giustificazione mediante esempio generico

Elio

○: tra l'altro in questo modo **si capisce perché è una proprietà che non funziona sempre**. Qualcuno di voi forse l'ha fatto, di sommare tre numeri non consecutivi. Non è detto che succeda più questo, no? Questo fa capire perché servono proprio tre numeri consecutivi per poter avere questo.

Elio: se provassimo qui a fare, anziché 503, 504... diventerebbe 503... ne tolgo 1 e viene 503 e non 502.

Dimostrazione per via algebrica

Elio

SI PUÒ OSSERVARE CHE LA SOMMA È UN
MULTIPLO DI TRE

$$1+2+3=6$$

$$\overbrace{7+8+9}^{+1}=24$$

$$51+52+53=156$$

INOLTRE SE IL TERZO NUMERO DÀ UN'UNITÀ
AL PRIMO, DIVENTANO NUMERI UGUALI
SAREBBE

~~$a + (a+1) + (a+2)$~~ SI POTREBBE ANCHE FARE $a + a + a + 1 + 2$
PER LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA E SAREBBE
 $a \cdot 3 + 1 + 2$
 $a \cdot 3 + 3$



$$\begin{aligned} &a + a + 1 + a + 2 \\ &a + a + a + 1 + 2 \\ &a \cdot 3 + 1 + 2 \\ &a \cdot 3 + 3 \end{aligned}$$

Dimostrazione per via algebrica

Elio

SI PUÒ OSSERVARE CHE LA SOMMA È UN
MULTIPLO DI TRE

$$1+2+3=6$$

$$7+8+9=24$$

$$51+52+53$$

INOLTRE

AL PRIN

SAREBBE

$a + a + 1 + a + 2$
PER LA PROPRIO

$$a \cdot 3 + 1 + 2$$

$$a \cdot 3 + 3$$

Però magari su numeri più grandi non funzionava e non potevamo fare un esempio su tutti. Quindi abbiamo pensato all'attività dell'anno scorso e anziché scrivere un numero preciso abbiamo scritto un numero in generale, così.

$$a+a+1+a+2$$

$$a+a+a+1+2$$

$$a \cdot 3 + 1 + 2$$

$$a \cdot 3 + 3$$

Dimostrazione per via algebrica

Elio

SI PUÒ OSSERVARE CHE LA SOMMA È UN
MULTIPLO DI TRE

$$1+2+3=6$$

$$7+8+9=24$$

$$51+52+53=156$$

INOLTRE

AL PRIMO

SAREBBE

$$a + a + a + 1 + 2$$

PER LA PROPRIETÀ

$$a \cdot 3 + 1 + 2$$
$$a \cdot 3 + 3$$

E poi abbiamo applicato la proprietà
commutativa che invece di scrivere a
 $+a+1+a+2$ abbiamo scritto
esattamente $a+a+a+1+2$ e così
abbiamo capito che si poteva fare
semplicemente $a \cdot 3 + 3$, che così viene
per forza multiplo di 3

$$a+a+1+a+2$$
$$a+a+a+1+2$$
$$a \cdot 3 + 1 + 2$$
$$a \cdot 3 + 3$$

Dimostrazione per via algebrica

Elio

SI PUÒ OSSERVARE CHE LA SOMMA È UN
MULTIPLO DI TRE

$$1+2+3=6$$

$$7+8+9=24$$

$$51+52+53=156$$

INOLTRE SE IL TERZO NUMERO DÀ UN'UNITÀ
AL PRIMO, DIVENTANO NUMERI UGUALI
SAREBBE

~~$a + (a+1) + (a+2)$~~ SI POTREBBE ANCHE FARE $a + a + a + 1 + 2$
PER LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA E SAREBBE
 ~~$a \cdot 3 + 1 + 2$~~
 $a \cdot 3 + 3$

La spiegazione "con le lettere" non ricalca la
spiegazione fatta sull'esempio numerico!

Seconda dimostrazione per via algebrica

Elio

Nella discussione, l'insegnante invita Elio a scrivere in lettere la prima spiegazione ("trasporto di 1")

$$\alpha + 1 + \alpha + 1 + \alpha + 1 = 3(\alpha + 1)$$

E COSÌ SI DIMOSTRA ~~PER~~ ANCHE CHE LA SOMMA
DI TRE NUMERI CONSECUTIVI È UN MULTIPLO DI 3

*Due dimostrazioni per via algebrica:
analisi mediante gli strumenti teorici*



La prima dimostrazione per via algebrica

$$a+a+1+a+2$$

$$3a+3$$



Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

La prima dimostrazione per via algebrica

Scopo:
ottenere la
divisibilità
per 3

$$a+a+1+a+2$$

RE, RT

$$3a+3$$

TRASFORMAZIONE

Espressione
manipolabile

FORM 1

FORM 2

FORMALIZZAZIONE

INTERPRETAZIONE

RE, RT

SEM 1

SEM 2

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

La prima dimostrazione per via algebrica

Si potrebbero anche eseguire le trasformazioni senza avere idea della proprietà da dimostrare e poi scoprire la divisibilità per 3

$$a+a+1+a+2$$

RE, RT

$$3a+3$$

TRASFORMAZIONE

FORM 1

FORM 2

FORMALIZZAZIONE

RE, RT

SEM 1

SEM 2

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

Si potrebbero anche eseguire le trasformazioni senza avere idea della proprietà da dimostrare e poi scoprire la divisibilità per 3

La prima dimostrazione per via algebrica

$$a+a+1+a+2$$

RE, RT

$$3a+3 = 3(a+1)$$

TRASFORMAZIONE

FORM 1

FORM 2

FORMALIZZAZIONE

RE, RT

SEM 1

SEM 2

Si potrebbe
anche cogliere
la divisibilità per il
numero
intermedio

Somma di tre numeri
consecutivi

Divisibile per 3
**3 volte il numero
centrale**

La seconda dimostrazione per via algebrica

$$a+a+1+a+2$$

FORM 1

FORMALIZZAZIONE
↑

SEM 1

Somma di tre numeri
consecutivi

TRASFORMAZIONE

$$a+1 + a+1 + a+1 = 3(a+1)$$

FORM 2

INTERPRETAZIONE
↓

SEM 2

Divisibile per 3
**3 volte il numero
centrale**

La seconda dimostrazione algebrica

Scopo: ottenere la divisibilità per 3

Espressione manipolabile

2

RE
RT di alto livello

TRASFORMAZIONE

$$a+1 + a+1 + a+1 = 3(a+1)$$

RE, RT

FORM 1

FORM 2

FORMA ONE

SEM 1

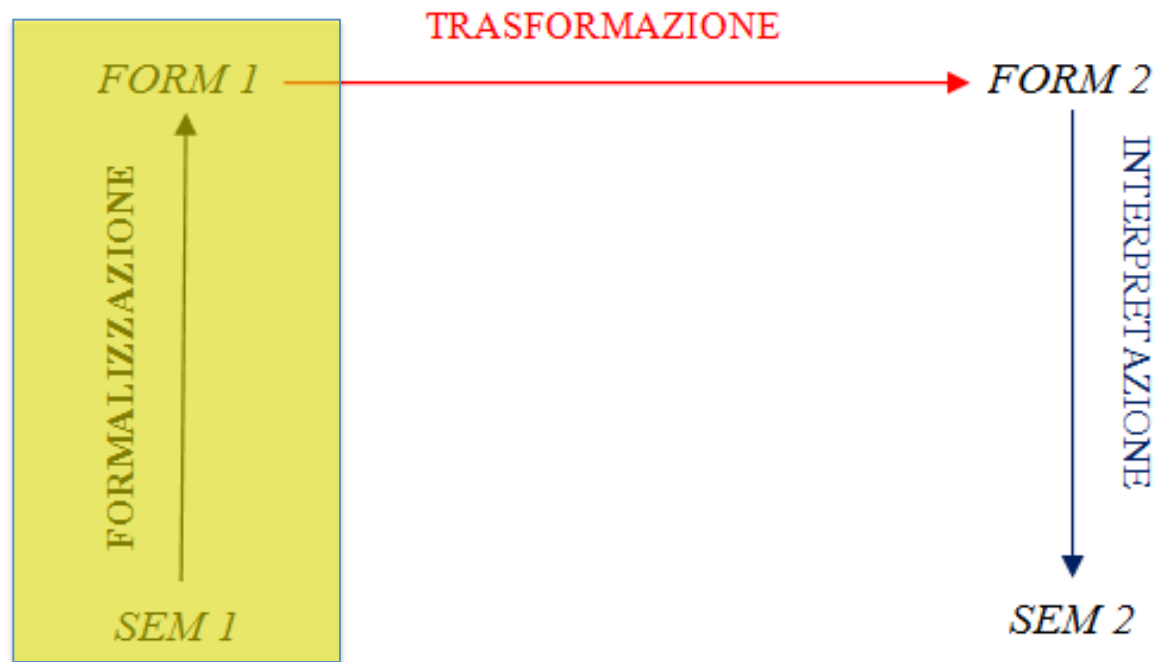
Si coglie anche la divisibilità per il numero intermedio

SEM 2

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3
3 volte il numero centrale

La formalizzazione è corretta (RE) e utile (RT) per la successiva manipolazione



Le trasformazioni sono condotte in modo corretto (RE) e utile (TR) in relazione allo scopo (ottenere la divisibilità per 3).

Nella seconda dimostrazione, la trasformazione si basa sulla strategia dello “spostare un’unità”: è guidata dalla strategia precedentemente intuita (forte componente teleologica TR).



L'interpretazione è corretta (ER).

Nella prima dimostrazione per via algebrica l'espressione $3a+3$ potrebbe essere ulteriormente sviluppata per rendere ancora più evidente la divisibilità per 3.

Nella seconda dimostrazione per via algebrica si può leggere anche la divisibilità per il numero intermedio



In sintesi...

- La prima dimostrazione è prevalentemente **sintattica** (e potrebbe essere condotta anche senza conoscere la proprietà a cui si vuole arrivare)
- La seconda dimostrazione è portata a termine sotto la guida di una forte anticipazione, quindi in continuità con l'argomentazione condotta in linguaggio naturale e con l'ausilio degli esempi numerici.

In sintesi...

- Entrambe le dimostrazioni offrono occasione di riflessione a livello meta:
 - La prima dimostrazione può suggerire l'idea della dimostrazione con funzione di **scoperta**
 - La seconda è un esempio di dimostrazione con funzione di **spiegazione**.
 - Nel caso si noti che il risultato è anche divisibile per il numero intermedio, c'è anche la funzione di **scoperta**.
 - Inoltre, questa dimostrazione mette in luce l'importanza degli esempi numerici

In sintesi...

- Da questa analisi emerge l'importanza di una riflessione a posteriori sul confronto tra le due dimostrazioni
- Argomentazione a livello meta:
 - Sul modo di provare mediante l'algebra (ruolo cruciale della trasformazione)
 - Sulla funzione della dimostrazione algebrica (convinzione, spiegazione, scoperta)

Episodio 2: alla ricerca di una dimostrazione algebrica



Nell'altra classe...

Una sola studentessa utilizza le lettere

Classe IIB

- Il risultato è divisibile per 3 (*14 studenti*)
- Il risultato è divisibile per il numero intermedio (*2 studenti*)
- Prendendo due dispari più uno pari consecutivi il risultato è pari (*7 studenti*)
- Altre osservazioni (es.: Il risultato è il doppio del precedente) (*6 studenti*)

L'uso delle lettere

Edelawit

$$\frac{n+n+n}{3}$$

$$\frac{1+n2+n3}{3} = \frac{n}{3}$$

tre numeri consecutivi possono essere sommati il risultato è ~~divisibile per 3~~ ^{multiplo di}

La somma di questi numeri è divisibile per 3 per i numeri sommati sono 3

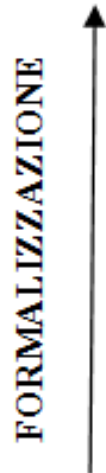
Il numero al centro è dato dalla divisione della somma dei tre numeri.

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

$$n+n+n$$

FORM 1 -



SEM 1

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

$$n+n+n$$

FORM 1

FORMALIZZAZIONE



SEM 1

Somma di tre numeri consecutivi

$$n/3$$

FORM 2



SEM 2

Divisibile per 3

Algebra con funzione stenografica

$n+n+n$

$n/3$

FORM 1

XXX

FORM 2

FORMALIZZAZIONE

Formalizzazione

SEM 1

SEM 2

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

$n+n+n$

$n/3$

FORM 1

XXX

FORM 2

FORMALIZZAZIONE



SEM 1



Mancanza a livello di razionalità epistemica
Ma c'è una razionalità teleologica in atto!

SEM 2

Problemi a livello di RE

Edel è razionale rispetto al suo scopo: "tradurre in lettere" quanto scoperto

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

Visione "rituale"
dell'algebra come
strumento dimostrativo

$n/3$

Problemi a
livello di RE

FORMALIZZAZIONE

SEM 1

Essi sono razionali
rispetto al suo
scopo: "tradurre
in lettere"
quanto scoperto

FORM 2

Manca a
livello di
razionalità
epistemica
Ma c'è una
razionalità
teleologica in
atto!

SEM 2

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

Quel che manca è la
consapevolezza (a livello
meta) del potere
trasformativazionale
dell'algebra

$n/3$

Problemi a
livello di RE

FORMAL

SEM 1

razie
to al suo
scoperto "tradurre
mettere"
quanto scoperto

FORM 2

Manca a
livello di
razionalità
epistemica
Ma c'è una
razionalità
teleologica in
atto!

SEM 2

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

$$n+n+1+n+2$$

$$n/3$$

FORM 1

FORM 2

FORMALIZZAZIONE



SEM 1



SEM 2

Somma di tre numeri consecutivi

Divisibile per 3

La discussione di classe

$$\frac{n+n+n}{3}$$

$$\frac{1+n^2+n^3}{3}$$

Prima avevamo scritto
numero più numero più
numero senza 1,2,3 però
poi bisognava
aggiungere 1,2,3 per far
capire che sono
consecutivi

Le non
divisione, della somma dei tre
numeri.

La discussione di classe

$$\frac{n+n+n}{3} = n$$

$$1+n2+n3 = \frac{n}{3}$$

Si poteva scrivere in un
altro modo

$$\underbrace{n \cdot 2}_{\text{or}} + \underbrace{n \cdot 2 + 1}_{\text{or}} + \underbrace{n \cdot 2}_0 = \frac{n}{3} =$$

$$n^2 + n^2 + 1 + n^2$$

$$\cancel{n_1 + n_2 + n_3}$$

FORM 1

FORMALIZZAZIONE



SEM 1

Somma di tre numeri consecutivi

$$n/3$$

FORM 2

SEM 2

Divisibile per 3

La discussione di classe

$$\underbrace{n^{\text{°}} \cdot 2}_{\text{°}} + \underbrace{n^{\text{°r}} \cdot 2 + 1}_{\text{°r}} + \underbrace{n^{\text{°r}} \cdot 2}_{\text{°r}} = \frac{n^{\text{°}}}{3} =$$

Se io entro in classe in questo momento e vedo quella somma scritta alla lavagna, capisco che è la somma di tre numeri consecutivi?

Non specifica che sono consecutivi

è la somma di un numero pari più un numero dispari o di un numero dispari più un numero pari

La discussione di classe

$$\underbrace{n \cdot 2}_{\text{pari}} + \underbrace{n \cdot 2 + 1}_{\text{dispari}} + \underbrace{n \cdot 2}_{\text{pari}} = \frac{n}{3} =$$

Non specifica
che sono
consecutivi

RE, RT

Se io entro in classe in questo
momento e vedo quella somma
scritta alla lavagna, capisco che
è la somma di tre numeri
consecutivi?

RE

è la somma di un numero pari più
un numero dispari o di un numero
dispari più un numero pari

RC

La discussione di classe

$$\underbrace{n \cdot 2}_{\text{e}} + \underbrace{n \cdot 2 + 1}_{\text{or}} + \underbrace{n \cdot 2}_{\text{odf}}$$

Il numero primo deve essere diverso dal numero terzo

Potrebbero essere uguali, potrebbe essere $6+7+6$

Se io per esempio metto al posto di n , 3, quella scrittura diventa $6+7+6$. Io invece vorrei per esempio $6+7+8$. Come faccio a rendere quella scrittura una scrittura che veramente rappresenti la somma di tre numeri consecutivi?

La discussione di classe

RE

$$\underbrace{n \cdot 2}_{\text{e}} + \underbrace{n \cdot 2 + 1}_{\text{or}} + \underbrace{n \cdot 2}_{\text{or}}$$

Il numero primo deve essere diverso dal numero terzo

Potrebbero essere uguali, potrebbe essere 6+7+6

Se io per esempio metto al posto di n , 3, quella scrittura diventa 6+7+6. Io invece vorrei per esempio 6+7+8. Come faccio a rendere quella scrittura una scrittura che veramente rappresenti la somma di tre numeri consecutivi?

RE

La discussione di classe

$$\underbrace{n \cdot 2}_{\text{even}} + \underbrace{n \cdot 2 + 1}_{\text{or}} + \underbrace{n \cdot 2}_{\text{odd}} = \frac{n}{3} =$$

Possiamo usare tre lettere diverse

Possiamo mettere... nel primo
caso n^2 , poi n^2+1 , poi n^2+3 ...
 n^2+2

$$n \cdot 2 + m \cdot 2 + 1 + m \cdot 2 + 2$$

La discussione di classe

$$n \cdot 2 + m \cdot 2 + 1 + m \cdot 2 + 2$$

$$n = 3$$

$$6 + 7 + 8$$

La discussione di classe

$$n \cdot 2 + m \cdot 2 + 1 + n \cdot 2 + 2$$

Riesco a scrivere $5+6+7$ in quel modo?

La discussione di classe

$$n \cdot 2 + m \cdot 2 + 1 + m \cdot 2 + 2$$

Riesco a scrivere $5+6+7$ in quel modo?

Possiamo togliere il per 2

$$n + m + 1 + m + 2 =$$

$$m=5 \\ 5 + 6 + 7$$

Finora che cosa abbiamo fatto però? Non abbiamo fatto altro che rappresentare la somma dei tre numeri consecutivi. [...] Per ora abbiamo solo scritto il testo, abbiamo solo scritto la somma dei tre numeri consecutivi. A che cosa ci può servire averla scritta a quel modo?

RT

$$\begin{aligned} n + n + 1 + n + 2 &= \\ n + n + n + 1 + 2 &= \\ n + n + n + 3 &= \\ n \cdot 3 + 3 &= \end{aligned}$$

Perché modificando
verrebbe numero +
numero + numero
+1+2, e quindi ...

In sintesi...

- L'attività è occasione per una riflessione su come funziona l'algebra come strumento dimostrativo
 - C'è una razionalità nella scelta di usare l'algebra come strumento dimostrativo e una razionalità nel condurre la dimostrazione per via algebrica
- ... e la consapevolezza delle componenti di razionalità relative al fatto di provare mediante l'algebra ha influenza sulle componenti di razionalità relative a come condurre una dimostrazione per via algebrica
- Es:** l'algebra è un utile strumento dimostrativo perché consente di ottenere la dimostrazione mediante trasformazione di espressioni simboliche → la formalizzazione e le conseguenti trasformazioni non devono solo essere corrette, ma goal-oriented

Ripensando ai due esempi (Elio ed Edlawit)

Alcuni temi emersi:

- Il ruolo e valore degli esempi numerici
- L'accettabilità di una dimostrazione mediante esempi numerici
- Il ruolo cruciale della trasformazione, e la conseguente importanza delle formalizzazioni transformation-oriented
- Il rapporto dialettico tra manipolazione sintattica e manipolazione più “creativa”
- Le diverse funzioni della dimostrazione algebrica

Sviluppi

Il ciclo di attività individuale-condivisione in gruppo-discussione di classe può solo parzialmente promuovere argomentazioni di livello meta sui temi elencati

È dunque necessario pensare e sperimentare consegne aggiuntive che colgano e sviluppino le occasioni di argomentazione a livello meta

Alcune nuove consegne sono già state sperimentate...

Le ulteriori consegne

Per casa è proposta una scheda contenente tre richieste:

Che cosa si può dire della somma di due numeri consecutivi?

Che cosa si può dire della somma di quattro numeri consecutivi?

Che cosa si può dire della somma di cinque numeri consecutivi?

Successivamente, lavoro sulle produzioni degli studenti:

Confronto di testi

Considera le risposte fornite da alcuni dei tuoi compagni alle domande sulle somme di numeri consecutivi. Confrontale e scrivi le tue riflessioni:

Che cosa si può dire sulle proprietà trovate?

Che cosa si può dire sulle spiegazioni presentate?

Risposta A

Nella somma di cinque numeri consecutivi si può notare che il risultato è sempre divisibile $\times 5$.
E si può moltiplicare il numero in mezzo $\times 5$ e il risultato ti viene.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$$

$$11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65$$

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 90$$

$$21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 115$$

$$26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 140$$

$$31 + 32 + 33 + 34 + 35 = 165$$

$$36 + 37 + 38 + 39 + 40 = 190$$

Risposta B

$$3+4=7$$

$$2+3+4+5+6=20$$

$$0+1=1$$

$$0+1+2+3+4=9$$

$$5+6+7+8+9=35$$

$$2+3=5$$

$$1+2=3$$

$$6+5=11$$

$$8+9=17$$

Se si sommano due numeri consecutivi il risultato è sempre un numero primo, invece se si sommano cinque numeri consecutivi il risultato si può sempre scomporre in numeri primi.

(quasi)

Risposta C

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Se ho da fare la somma di 5 n° consecutivi
se il primo n° è dispari ci saranno 3 n° dispari
e quindi la somma sarà un numero dispari
(perché ogni 2 n° dispari la somma è pari)

ES:

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 1 = 6$$

Se i n° dispari sono dispari la somma è dispari
Se i n° dispari sono pari la somma è pari.

Risposta D

➤ Provare se si sommano 2 nr. consecutivi, cosa si può dire sulla somma e sulla somma di 5 nr. consecutivi.

es: $0+1=1$ $1+2=3$ $3+4=7$ $5+6=11$ $12+13=25$ $7+8=15$ $53+54=107$
 $1200+1201=2401$ $9+10=19$ $72+73=145$

Basta moltiplicare il primo nr. $\cdot 2$ e aggiungere 1 per sapere il risultato.

Es: $5+6=5 \cdot 2 + 1 = 11$ Il risultato sarà sempre dispari.

Es: $0+1+2+3+4=10$ $7+8+9+10+11=45$ $12+13+14+15+16=70$

Basta moltiplicare il primo nr. $\cdot 5$ e aggiungere 10.

Es: $5+6+7+8+9=5 \cdot 5 + 10 = 35$

Risposta E

①

$$1+2=3$$

$$2+3=5$$

$$3+4=7$$

$$4+5=9$$

$$5+6=11$$

$$6+7=13$$

$$7+8=15$$

$$8+9=17$$

$$9+10=19$$

$$n-1+n=n$$

$$2-1+2=3$$

oppure il risultato +2

②

$$1+2+3+4+5=15$$

$$5+6+7+8+9=35$$

$$9+10+11+12+13=55$$

$$n^2+n^2+n^2+n^2+n^2=n^2 \times 5$$

i risultati sono multipli di 5

Risposta F

$$1+2=3 \quad 7+8=15 \quad N+N+1=N \cdot 2+1$$

$$2+3=5$$

$$3+4=7$$

Si può dire che la somma di 2 nr. consecutivi forma sempre un numero dispari.

$$0+1+2+3+4=10$$

$$1+2+3+4+5=15$$

$$2+3+4+5+6=20$$

$$3+4+5+6+7=25$$

$$N+(N+1)+(N+2)+(N+3)+(N+4)$$

$$5(N+3)$$

Si può affermare che la somma di 5 numeri equivale a un multiplo di 5 più precisamente è il prodotto tra 5 e $N+3$.

