

**Venerdì 17 ottobre - Sessione 2 - ore 14:30-15:30**

**SPAZI CIIM – Scuola Secondaria di 2° grado:  
Scelte alla base di un percorso formativo  
per la Scuola secondaria di II grado:  
Geometria**

Maria Angela Chimento, Luigi Tomasi



**Gruppo di lavoro nominato dalla CIIM sulle Indicazioni  
curricolari di Matematica**

**I biennio - II biennio - V anno – Scuola sec. di II grado**



Coordinatore: Ercole Castagnola

Pierangela Accomazzo  
Gianpaolo Baruzzo  
Silvia Beltramino  
Sebastiano Cappuccio  
Maria Angela Chimento  
Enrica Ferrari  
Donata Foà  
Paola Ranzani  
Riccardo Ruganti  
Luigi Tomasi  
Sergio Zoccante



## Indicazioni/ vincoli posti dalla CIIM per la stesura dei percorsi didattici

- Esempi e indicazioni per un uso consapevole dello strumento informatico.
- Modalità per la realizzazione di momenti di *didattica laboratoriale*.
- Indicazioni su pratiche didattiche da seguire o sconsigliate

3



## Percorsi didattici proposti

Il gruppo ha prodotto in precedenza un documento dal titolo “Un esempio di percorso di matematica per il primo e per il secondo biennio di una Scuola Secondaria di II Grado con una disponibilità oraria di 3 oppure di 2 ore settimanali”

Questo è consultabile sul sito UMI <http://www.umi-ciim.it> nella sezione “Materiali UMI-CIIM - Secondo ciclo”

Contiene un esempio di possibile di percorso su conoscenze e competenze essenziali, valido per le scuole secondarie di secondo grado che hanno poche ore settimanali di matematica.

E' organizzato con una scansione annuale degli argomenti.

4

## Elementi per la costruzione di un percorso didattico

Ogni docente segue, coscientemente o no, un suo percorso nell'insegnamento della matematica in una classe ben precisa.

Esplicitare gli elementi che stanno alla base del percorso permette di

- controllare il processo con maggiore efficacia
- interagire con altri nella costruzione di percorsi comuni

Quali sono le scelte che stanno alla base di un percorso di Geometria? Quali sono i punti di forza e quali quelli di debolezza?

5

## Il caso di Geometria

Vari fattori hanno messo in discussione l'approccio classico alla Geometria e il suo peso all'interno del curriculum:

- la scolarizzazione di massa
- l'ondata bourbakista
- un'idea debole della "matematica del cittadino"
- l'ingresso nella scuola delle tecnologie informatiche

6

## La geometria e le *Indicazioni nazionali/Linee guida*

- Le nuove *Indicazioni nazionali* per i Licei e le *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali impongono di ridurre il tempo da dedicare alla geometria (e all'algebra)
- I contenuti però non sembrano subire riduzioni sostanziali rispetto alla situazione precedente (anche rispetto ai Programmi PNI).

## Perché la *Geometria* non va trascurata?

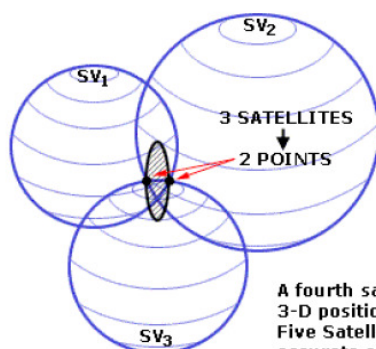
- Ha una lunga storia, che si intreccia con lo sviluppo della Matematica
- È parte integrante della nostra esperienza di interazione con il mondo reale e culturale (arti visive...)
- Può catturare gli interessi di studenti che non sono interessati ad altri aspetti della Matematica
- Si presta a differenti approcci
- È una miniera di problemi interessanti e teoremi sorprendenti

## Geometria: facciamo matematica, ma non solo!

- Geometria euclidea come primo capitolo della Fisica classica (e Geometrie non euclidee come strumento per la Fisica moderna)
- Geometria e Astronomia, Geografia, Geodesia, Cartografia....
- Geometria e Architettura
- Geometria e Arti figurative
- Geometria e Design
- Robotica
- Diagnostica medica per immagini
- Animazioni al computer
- 

## Un esempio

GPS



A fourth satellite locates the 3-D position at a single point. Five Satellites is even more accurate and reliable.

## Che cos'è la Geometria?

**Christopher Zeeman, 2001:**

"Geometry comprises those branches of mathematics that exploit visual intuition (the most dominant of our senses) to remember theorems, understand proof, inspire conjecture, perceive reality and give global insight".

## Che cos'è la Geometria?

**Christopher Zeeman, 2001:**

*"La Geometria comprende quelle parti della Matematica che sfruttano l'intuizione visuale (il più dominante dei nostri sensi) per ricordare teoremi, capire dimostrazioni, ispirare congetture, percepire la realtà e fornire comprensione globale profonda".*

## Vladimir I. Arnold

intervista in *Notices of the AMS* (April 1997)

Our brain has two halves: one is responsible for the multiplication of polynomials and languages, and the other half is responsible for orientation of figures in space and all the things important in real life.

Mathematics is Geometry when...

you have to use  
**both** halves!

...Il nostro cervello ha due emisferi: uno è responsabile della moltiplicazione di polinomi e dei linguaggi, l'altro è responsabile dell'orientamento delle figure nello spazio, e di tutte le cose importanti nella vita reale.  
La Matematica è Geometria quando devi usare entrambi gli emisferi.

15

### Obiettivi dell'insegnamento della geometria (Royal Society /JMC report)

- to develop spatial awareness, geometrical intuition and the ability to visualize;
- to provide a breadth of geometrical experiences in 2 and 3-dimensions;
- to develop knowledge and understanding of and the ability to use geometrical properties and theorems;
- to encourage the development and use of conjecture, deductive reasoning and proof

16



## Obiettivi dell'insegnamento della geometria (Royal Society /JMC report)

- sviluppare consapevolezza spaziale, intuizione geometrica e capacità di visualizzare
- fornire un'ampia esperienza geometrica in 2 e 3 dimensioni
- sviluppare conoscenza, comprensione e abilità nell'uso di proprietà geometriche e teoremi
- incoraggiare lo sviluppo e l'uso di congetture, ragionamenti deduttivi e dimostrazioni

17

## Obiettivi dell'insegnamento della geometria (Royal Society /JMC report)

- to develop skills of applying geometry through problem solving and modelling in real world contexts;
- to develop useful Information & Communication Technology (ICT) skills in specifically geometrical contexts;
- to engender a positive attitude to mathematics;
- to develop an awareness of the historical and cultural heritage of geometry in society, and of the contemporary applications of geometry

18

## Obiettivi dell'insegnamento della geometria (Royal Society /JMC report)

- sviluppare abilità nell'applicare la geometria attraverso il problem solving e la modellizzazione in contesti del mondo reale;
- sviluppare utili abilità relative alle Tecnologie di Informazione e Comunicazione (ICT) in contesti specificamente geometrici;
- generare un atteggiamento positivo verso la matematica
- sviluppare la consapevolezza del patrimonio storico e culturale della geometria nella società, e delle applicazioni contemporanee della geometria<sup>19</sup>

## I software di geometria dinamica e la l'insegnamento della geometria

- 
- 
- 
- 
- 



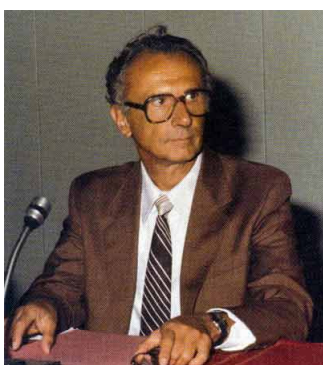
"La rivincita di Euclide"!

## Possibili percorsi di Geometria nella Scuola secondaria di II grado

1. di impostazione tradizionale Euclidea
2. di impostazione Hilbertiana (e insiemistica)
3. con le trasformazioni geometriche
4. basato sull'assiomatica di G.D. Birkhoff
5. per via analitica
6. con l' algebra lineare
7. incentrato sull'uso di sussidi informatici

21

## Possibili percorsi di Geometria nella Scuola secondaria di II grado



Nella precedente diapositiva: citazione da un articolo di **Vinicio Villani**,  
**RIFLESSIONI SU POSSIBILI  
PERCORSI  
NELL'INSEGNAMENTO DELLA  
GEOMETRIA**,  
*Rivista **Insegnamento della  
Matematica e delle Scienze  
Integrate***, nov-dic. 2007

22

## Un testo fondamentale per la didattica della Geometria

Vinicio Villani,

### Cominciamo dal punto

*Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria),*

Pitagora, Bologna  
2006.



## “Isole deduttive” nella Scuola secondaria di II grado

Rinviando all'articolo di Villani, a noi sembra che il percorso più fattibile sia quello delle "isole deduttive", che sembra il più sensato e anche il più flessibile.

Questo metodo è sostanzialmente quello suggerito dai “percorsi CIIM” che abbiamo elaborato, o almeno era quello che avevamo in mente noi.

## **Cosa sono le “isole deduttive” in geometria?**

Rinviando all'articolo citato di V.Villani,

- Non si può usare a 14-15 anni il metodo assiomatico!
- Dimostrare tutto è come non dimostrare nulla
- Prima vengono le congetture e poi le dimostrazioni
- Scegliere alcuni nuclei fondamentali e un numero ridotto di teoremi da dimostrare, chiarendo il quadro in cui si inseriscono

25

***Il percorso di geometria  
proposto (indirizzi con 3 o 2  
ore settimanali di matematica)***

26

**Nelle Indicazioni nazionali si legge:**

*“Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano....*

*l’approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica”.*

*Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.*

● *Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.*

● *La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

**Indicazioni nazionali :**

- Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità.
- L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

**Percorso “sintetico” - Primo anno**

<p><b>Aritmetica e algebra</b>  <b>15 h</b> (A1): Aritmetica (fino ai numeri razionali).          Algebra (uso delle lettere fino ai prodotti notevoli)</p> <p><b>Relazioni e funzioni</b>  <b>5h</b> (R1): Introduzione al concetto di funzione.</p>	<p><b>Raggruppamenti comuni</b>  <b>10h*</b> (C1): Equazioni e disequazioni di I grado (in comune tra <i>Aritmetica e algebra</i> e <i>Relazioni e funzioni</i>)  <b>10 h*</b> (C2): Lettura tabelle, rappresentazione grafica di dati e grafico di funzioni (in comune tra <i>Relazioni e funzioni</i>, <i>Geometria</i> e <i>Dati e previsioni</i>).  <b>5h*</b> (C3): analisi di diverse funzioni (in comune tra <i>Relazioni e funzioni</i> e <i>Dati e previsioni</i>)</p>	<p><b>Geometria</b>  <b>20 h</b> (G1): <b>Recupero, consolidamento e approfondimento delle conoscenze pregresse sulle figure del piano. Proprietà essenziali di triangoli e poligoni attraverso procedimenti costruttivi e argomentativi.</b></p> <p><b>Dati e previsioni</b>  <b>15 h</b> (D1): Indagine statistica (con tutti i possibili collegamenti con gli altri ambiti)</p>
---	---	--

## Percorso “sintetico” – Secondo anno

<p><b>Aritmetica e algebra</b>  <b>10 h (A2):</b> Introduzione intuitiva dei numeri reali e delle loro rappresentazioni. Operazioni coi numeri irrazionali.</p> <p><b>Relazioni e funzioni</b>  <b>15 h (R2):</b> Consolidamento del concetto di funzione. Analisi delle funzioni lineari e delle funzioni <math>f(x) =  x </math>, <math>f(x) = a/x</math>, <math>f(x) = x^2</math>.</p>	<p><b>Raggruppamenti comuni</b>  <b>5 h* (C4):</b> Applicazioni della similitudine (in collegamento tra <i>Geometria e Aritmetica e algebra</i>). Rette nel piano cartesiano, rappresentazione di oggetti algebrici (In collegamento tra <i>Geometria, Aritmetica e algebra e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p><b>5h*(C5):</b> Approfondimenti di statistica (in collegamento tra <i>Dati e previsioni e Geometria</i>).</p> <p><b>10 h*(C6):</b> Approfondimenti su Equazioni e Disequazioni (in collegamento tra <i>Relazioni e funzioni, Aritmetica e algebra e Geometria</i>).</p>	<p><b>Geometria</b>  <b>20h (G2):</b> Il ruolo del teorema di Pitagora, approfondimenti su un numero limitato di temi per arrivare alla dimostrazione attraverso l'argomentazione. Equivalenza nel piano e misura di superfici. La similitudine nel piano, il teorema di Talete (in modo intuitivo).</p> <p><b>Dati e previsioni</b>  <b>15 h (D2):</b> Studio di alcuni elementi fondamentali di calcolo delle probabilità fino alla prima introduzione della probabilità condizionata (con tutti i possibili collegamenti con gli altri ambiti).</p>
---	---	--

31

### Indicazioni nazionali Secondo Biennio

#### **Geometria**

- *Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.*
- *Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio.*

32



### Coniche: consigli e sconsigli

- Si consiglia in ogni caso di privilegiare l'obiettivo di far acquisire agli studenti la conoscenza delle coniche e il significato geometrico delle loro principali caratteristiche quali per esempio l'eccentricità.
- Nel piano cartesiano si consiglia di limitarsi a trattare ellissi e iperboli riferite ai propri assi o nel caso delle iperboli equilatera riferite ai propri asintoti e parabole con l'asse parallelo ad uno degli assi del riferimento. Importante è che gli studenti giungano a saper passare con consapevolezza dalle equazioni alla rappresentazione grafica e viceversa.
- Nel piano cartesiano si sconsiglia di proporre problemi riguardanti posizioni reciproche di intersezioni o di tangenza tra coniche e anche casi complessi tra coniche e rette.

33

### Secondo Biennio - GEOMETRIA

#### *Indicazioni nazionali Secondo Biennio*

*[Lo studente]*

- *Apprenderà le definizioni e le proprietà e relazioni elementari delle funzioni circolari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.*
- *Studierà alcuni esempi significativi di luogo geometrico.*

34

## Trigonometria: consigli e sconsigli

- evidenziare la stretta connessione con la geometria euclidea piana, della quale la trigonometria rappresenta l'aspetto algoritmico;
- partire da situazioni e problemi reali;
- fare uso di elementi di storia (della matematica, dell'astronomia, della geodesia, della navigazione);
- fare largo uso di strumenti di calcolo automatico.

### Sconsigli:

- evitare il proliferare di formule, evidenziando piuttosto che le relazioni in trigonometria si possono ricondurre tutte a poche relazioni fondamentali;
- evitare problemi inutilmente macchinosi;
- limitare l'uso di parametri allo stretto necessario evitando sterili casistiche e formalismi.

35

### Nelle *Indicazioni nazionali* si legge:

[Lo studente]

- *Affronterà l'estensione allo spazio di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica.*
- *In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.*

36

*Indicazioni nazionali – V anno*

**Geometria**

*Lo studente apprenderà i primi elementi di geometria analitica dello spazio e la rappresentazione analitica di rette, piani e sfere.*

**Geometria dello spazio: consigli e sconsigli**

- Non partire da un'impostazione assiomatica della Geometria dello spazio, ma mettere in evidenza l'importanza di alcuni teoremi, senza far imparare troppe dimostrazioni; questo risulta impossibile, non c'è il tempo e si perderebbe il significato di quelle poche che sono veramente importanti: dimostrare tutto è come non dimostrare nulla.
- Fare ricorso ad ampie ammissioni di carattere intuitivo.
- Argomentare e congetturare vengono prima di dimostrare.
- Sottolineare che la Geometria rappresenta "Il punto d'incontro tra la matematica intesa come teoria e la matematica intesa come serbatoio di modelli"

## Geometria dello spazio: consigli e sconsigli

- Far vedere come la Geometria sia connessa agli altri ambiti (Aritmetica e algebra, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni) e sottolineare continuamente i collegamenti tra di loro.
- La Geometria non è un formulario per trovare lunghezze, aree e volumi; è necessario presentarla come un ambito molto importante per scoprire, sperimentare, visualizzare, argomentare proprietà e collegamenti tra una teoria matematica e il mondo reale.
- Si sconsiglia di trascurare la Geometria: vuol dire privare gli allievi di un ambito estremamente importante per la formazione matematica e tarpare le ali anche agli altri ambiti del sapere matematico.

39

## Percorso “sintetico” – Secondo Biennio-1<sup>a</sup> parte

<b>Aritmetica e algebra</b> <b>3 h</b> (A1) Numeri reali: Richiamo sulle proprietà di <b>R</b> . Numeri algebrici e trascendenti. <b>4 h</b> (A2) Successioni. <b>3 h</b> (A3) Principio di induzione e sue applicazioni. <b>5 h</b> (A4) I polinomi a coefficienti reali: Scomposizione in fattori, divisione tra polinomi. <b>4 h</b> (A5) Risoluzione di equazioni di secondo grado. <b>3 h</b> (A6) Il problema del contare. Elementi di base del calcolo combinatorio.	<b>Raggruppamenti comuni</b> <b>4 h (C1)</b> Equazione della circonferenza, della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole riferite a opportuni assi cartesiani (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i> ); possibilità di rappresentare tali curve in forma parametrica.	<b>Geometria</b> <b>8 h (G1 – Coniche):</b> Osservazione e riproduzione di curve riconducibili a sezioni di un cono e loro rappresentazione grafica (sia sintetica che nel piano cartesiano [vedi raggruppamenti comuni, in cui 2 ore delle 4 indicate sono comprese in queste 10]). Costruzione di coniche come luoghi geometrici.
--	--	--

40

### Percorso “sintetico” – Secondo Biennio 2<sup>a</sup>parte

<p><b>Aritmetica e algebra</b> <b>Relazioni e funzioni</b></p> <p><b>3 h</b> (R1). Richiami sulle funzioni <math>f(x) =  x </math>, <math>f(x) = a/x</math>, <math>f(x) = x^2</math>.</p> <p><b>2 h</b> Funzione inversa di <math>y = ax^2</math> con <math>x \geq 0</math>, dominio, segno. Funzioni di vario tipo: potenza, cubiche, polinomiali. Concetto intuitivo di asintoto.</p> <p><b>2 h</b> (R2). Trasformazione di <math>y = a \times \sin(x) + b \times \cos(x)</math> in <math>y = k \sin(px + q)</math></p>	<p><b>Raggruppamenti comuni</b></p> <p><b>4 h (C2)</b> <b>Il moto armonico e le funzioni circolari</b> (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>2 h Introduzione del concetto di variabile casuale (in comune tra <i>Aritmetica e algebra</i>, <i>Relazioni e funzioni</i>, e <i>Dati e previsioni</i>).</p>	<p><b>Geometria</b></p> <p><b>8 h (G2 – Trigonometria):</b> Misura di angoli in gradi sessagesimali e in radianti. Seno, coseno, tangente di un angolo acuto come applicazione della similitudine tra triangoli. Risoluzione di triangoli rettangoli. Seno, coseno, tangente di un angolo con riferimento alla circonferenza goniometrica. Le relazioni fondamentali che legano seno, coseno, tangente. Angoli associati. Teoremi dei seni e del coseno. Formule di addizione per seni e coseni. Risoluzione di triangoli qualsiasi. Area del triangolo.</p>
---	---	--

41

### Percorso “sintetico” – Secondo Biennio 3<sup>a</sup>parte

<p><b>Aritmetica e algebra</b> <b>Relazioni e funzioni</b></p> <p><b>3 h</b> (R1). Richiami sulle funzioni <math>f(x) =  x </math>, <math>f(x) = a/x</math>, <math>f(x) = x^2</math>.</p> <p><b>2 h</b> Funzione inversa di <math>y = ax^2</math> con <math>x \geq 0</math>, dominio, segno. Funzioni di vario tipo: potenza, cubiche, polinomiali. Concetto intuitivo di asintoto.</p> <p><b>2 h</b> (R2). Trasformazione di <math>y = a \times \sin(x) + b \times \cos(x)</math> in <math>y = k \sin(px + q)</math></p>	<p><b>Raggruppamenti comuni</b></p> <p>(C3) Equazioni di grado superiore al secondo e loro risoluzione numerica. Teorema di Ruffini (in comune tra <i>Aritmetica e algebra</i> e <i>Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>(C4) Funzioni quadratiche: rappresentazione simbolica, grafica, numerica. (in comune tra <i>Geometria</i> e <i>Relazioni e funzioni</i>)</p> <p>(C5) Uso consapevole delle tecnologie, software di geometria dinamica e software di algebra (CAS) (in comune tra <i>Aritmetica e algebra</i>, <i>Geometria</i> e <i>Relazioni e funzioni</i>).</p> <p><b>5 h</b> (C6) Sistemi di secondo grado. Risoluzione algebrica e grafica (in comune tra <i>Aritmetica e algebra</i> e <i>Relazioni e funzioni</i>).</p>	<p><b>10 h (G3 – Geometria dello Spazio):</b> Riconoscimento nel mondo reale di figure geometriche note (prismi, piramidi, alcuni tipi di poliedri, cilindri, cono, sfere) e loro descrizione con un linguaggio appropriato e una terminologia progressivamente sempre più specifica. Proprietà essenziali relative a rette e piani nello spazio e loro riconoscimento in situazioni concrete. Analisi con strumenti intuitivi di forme, sezioni e sviluppi piani di semplici poliedri e solidi di rotazione. Esempi di semplici dimostrazioni di proprietà di prismi e piramidi. Parallelismo e perpendicolarità nello spazio. Diedri e angoloidi; proprietà (somma delle “facce” di un angoloide).</p>
---	--	--

42

## Percorso “sintetico” – Secondo Biennio 4<sup>a</sup> parte

<p><b>Aritmetica e algebra</b> <b>Relazioni e funzioni</b></p> <p><b>4 h (R3).</b> Dalla successione geometrica alla funzione esponenziale. Semplici equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.</p> <p><b>4 h (R4).</b> Concetto intuitivo di continuità. La funzione parte intera di <math>x</math>. Funzioni definite a tratti.</p> <p><b>2 h (R5).</b> Concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.</p>	<p><b>Raggruppamenti comuni</b> (C7) Funzioni razionali del tipo  <math>f(x) = x + k/x</math>  <math>f(x) = (ax + b)/(cx + d)</math>  <math>f(x) = (ax^2 + bx + c)/(dx + e)</math>.                      Asintoto obliquo, divisione fra polinomi (in comune tra <i>Aritmetica e algebra</i> e <i>Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>(C8) Funzioni periodiche elementari <math>y = \sin(x)</math>, <math>y = \cos(x)</math>. Passaggio da gradi a radianti (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p><b>2 h (C9)</b> Semplici equazioni e disequazioni trigonometriche (in comune tra <i>Geometria e Relazioni e funzioni</i>).</p> <p>(C10) Funzione esponenziale e logaritmica (in comune tra <i>Relazioni e funzioni</i> e <i>Dati e previsioni</i>)</p>	<p><b>Dati e previsioni</b> <b>7 h (D1)</b>                      Analizzare distribuzioni doppie di frequenze; richiami sui concetti base della probabilità (con attenzione ai possibili collegamenti con gli altri ambiti).</p> <p><b>3 h (D2)</b>                      Indicatori statistici mediante rapporti e differenze (con attenzione ai possibili collegamenti con gli altri ambiti).</p> <p><b>4 h (D3)</b>                      Probabilità totale, probabilità condizionata e composta, teorema di Bayes (con attenzione ai possibili collegamenti con gli altri ambiti).</p> <p><b>4 h (D4)</b> Campionamento casuale semplice e tecniche di campionamento (con attenzione ai possibili collegamenti con gli altri ambiti).</p>
		43



Ombre e proporzionalità  
m@t.abel

### Un esempio di attività per il II anno

**Ombre e proporzionalità (m@t.abel).**

*Gli studenti sono coinvolti in situazioni problematiche, in cui devono individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (proporzionalità diretta,...), quindi costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni (lineari,...).*

*Infine entrando nello specifico delle similitudini, da un punto di vista teorico, ne analizzano proprietà e invarianti, collegandole alle situazioni reali ad esse riconducibili.*

*Si affronta il nodo concettuale delle similitudini, partendo dall'analisi di situazioni reali fino a giungere al nodo cruciale del teorema di Talete, unitamente alle sue conseguenze nel piano favorendo l'acquisizione della consapevolezza del suo ruolo fondamentale nella geometria piana.*

Indicazioni del "Percorso Sintetico"

Ombre e proporzionalità  
m@t.abel

Talete e l'altezza della piramide

Quanto è alto questo lampione?

45

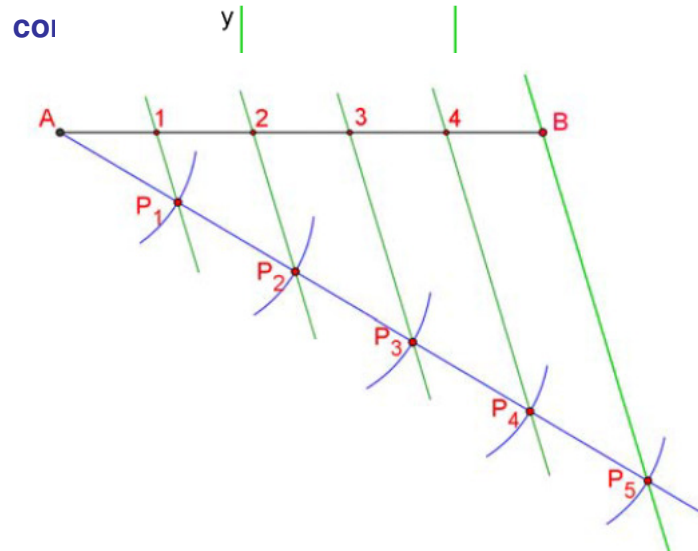
Ombre e proporzionalità  
m@t.abel

Bastoncini, gnomoni, obelischi

46



## La similitudine: applicazioni ed approfondimenti

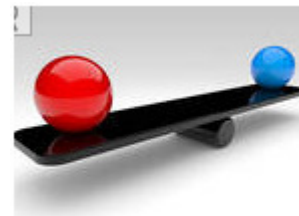


## GEOMETRIA



### Consigli (geometria)

- Non partire da un'impostazione assiomatica, ma mettere in evidenza l'importanza dei teoremi, senza far imparare troppe dimostrazioni; è impossibile, non c'è il tempo e si perderebbe il significato di quelle poche che sono veramente importanti: dimostrare tutto è come non dimostrare nulla.
- Argomentare e congetturare vengono prima di dimostrare
- Mantenere la geometria connessa agli altri ambiti e sottolineare continuamente i collegamenti tra di loro
- La geometria non è un formulario per trovare lunghezze, aree e volumi; è necessario presentarla come un ambito molto importante per scoprire, sperimentare, visualizzare, argomentare proprietà e collegamenti tra una teoria matematica e il mondo reale

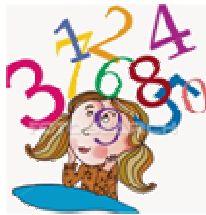




## e... Sconsigli (geometria)

### GEOMETRIA

- ◆ Si sconsiglia di trascurare la geometria: vuol dire privare gli allievi di un ambito estremamente importante per l'apprendimento della matematica e tarpare le ali anche agli altri ambiti del sapere matematico
- ◆ Si sconsiglia di chiedere definizioni imparate solo a memoria; prima occorre capire e costruire i concetti e poi definire; gli allievi comprendono anche se non sanno ancora definire



- ◆ Si sconsiglia di presentare una dimostrazione in modo dettagliato (mettendo cioè in evidenza i vari passi e che cosa si utilizza per giustificarli) se prima non è chiaro il significato che ha “il dimostrare” e che cosa esso presuppone (una teoria, degli assiomi,...)

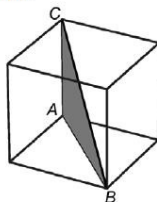
## Difficoltà di apprendimento/insegnamento in geometria

### Cosa ci dicono le prove INVALSI sulla geometria?

Commento ad alcune domande che sono “andate male” (meno del 30% di risposte esatte)

## INVALSI: Livello 10 2011-12

D9. Nella figura è rappresentato un cubo.



Il triangolo ABC ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e una diagonale del cubo.

a. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		Vera	Falsa
a1.	Il lato AB è uguale al lato AC	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a2.	Il triangolo ABC è rettangolo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a3.	Il lato BC è il più lungo dei tre	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a4.	L'angolo ABC è di $45^\circ$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

b. Se lo spigolo del cubo misura 1 m, quanto misurano i lati del triangolo ABC?

AC = .....

AB = .....

BC = .....

Risposta esatta

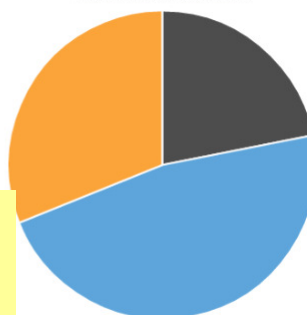
D9\_b AC = 1 m; AB =  $\sqrt{2}$  m; BC =  $\sqrt{3}$  m

Si possono accettare anche valori approssimati

AB = 1,41 m oppure AB = 1,4 m

BC = 1,73 m oppure BC = 1,7 m

Percentuali nazionali



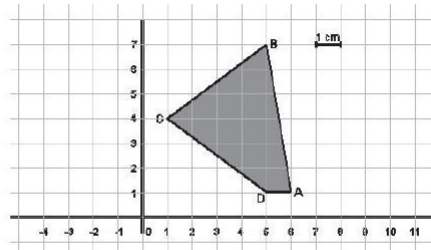
**Riconoscimento delle forme nello spazio:**

**È un punto debole nell'apprendimento**

**e nell'insegnamento**

## INVALSI: Livello 10 - 2011-12

D18. L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.

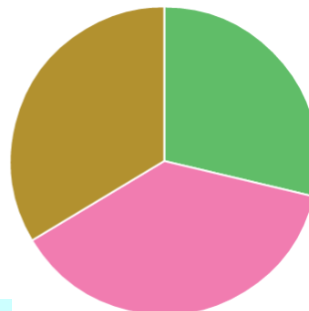


Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

Risposta: ..... cm<sup>2</sup>

Risposta esatta  
15 cm<sup>2</sup>

Percentuali nazionali



■ Risposte corrette 28.7% ■ Risposte errate 37.7%  
■ Risposte Mancate 33.6%

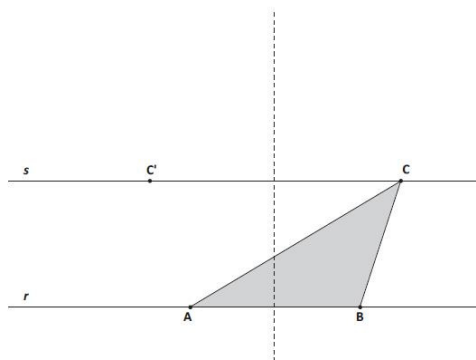
**Punto debole:**

**Applicare ragionamenti  
geometrici in un contesto di  
geometria analitica:**

**Geometria analitica separata  
dalla sua base sintetica!**

## INVALSI: Livello 10 - 2012-13

- D3. ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta  $r$  e il terzo vertice in un punto qualunque della retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per C.



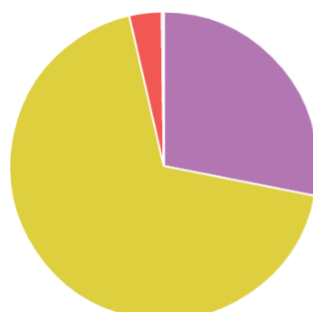
Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC?

- A.  Soltanto il triangolo  $ABC'$ , simmetrico di ABC rispetto all'asse di AB
- B.  Soltanto il triangolo isoscele di base AB
- C.  Soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B
- D.  Tutti gli infiniti triangoli di base AB

### Risposta esatta

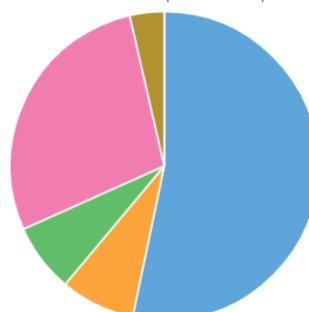
D

Percentuali nazionali



Risposte corrette 28.1% Risposte errate 68.3%  
Risposte Mancate 3.4% Altre non valide 0.2%

Domande a risposta multipla



Risposta A 53.3% Risposta B 7.8%  
Risposta C 7.2% Risposta D 28.1%  
Risposte non valide 3.6%

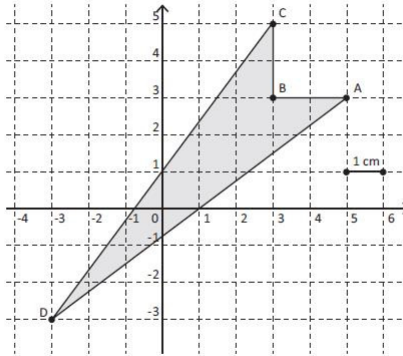
**Difficoltà a pensare la figura in modo dinamico**

**Figure disegnate in modo non standard**

**Luogo geometrico**

## INVALSI: Livello 10 - 2012-13

D17. Calcola l'area del quadrilatero ABCD disegnato in figura.

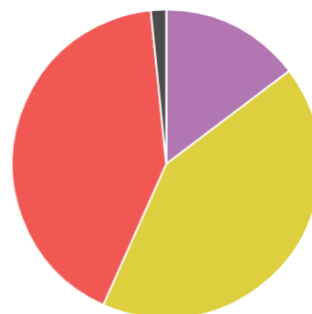


Risposta: ..... cm<sup>2</sup>

Risposta esatta

12

Percentuali nazionali

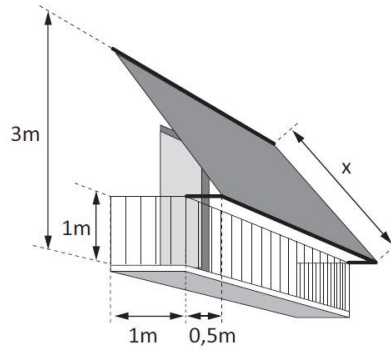


■ Risposte corrette, 14.7%   ■ Risposte errate, 42%  
■ Risposte Mancate, 41.7%   ■ Altre non valide, 1.6%

**Figure disegnate in modo non standard**  
**Difficoltà ad applicare ragionamenti**  
**geometrici in un contesto di geometria**  
**analitica**

## INVALSI: Livello 10 - 2012-13

- D24. Occorre confezionare una tenda da sole per il balcone in figura. La tenda deve essere fissata al muro a 3 m di altezza dal pavimento del balcone, che è largo 1 m. La tenda deve sporgere 0,5 m dalla ringhiera che è alta 1 m.



Scrivi i calcoli che fai per trovare la lunghezza  $x$  della tenda e infine riporta il risultato.

.....  
.....  
.....

Risultato:  $x = \dots\dots\dots$  metri

### Risposta esatta

Accettabile qualunque risposta che faccia riferimento al teorema di Pitagora applicato al triangolo di cateti 2 e 1,5:

$$x = \sqrt{4 + 2,25} = 2,5$$

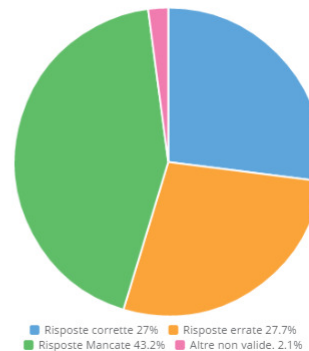
Accettabile anche se il risultato viene lasciato indicato, come nei tre seguenti esempi:

- $\sqrt{(3-1)^2 + (1+0,5)^2}$
- $\sqrt{4+2,25}$
- $\sqrt{6,25}$

Non accettabile se il ragionamento è corretto, ma i calcoli oppure sono sbagliati o non è scritto il risultato.

Esempio di risposta non corretta: ho eseguito i calcoli usando il TdP, cioè  $l = \sqrt{C^2 + c^2}$ .

### Percentuali nazionali



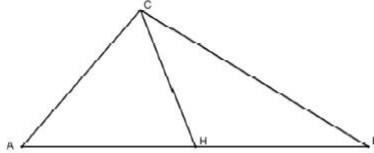
**Tutti conoscono il teorema di Pitagora**

**Difficoltà di applicazione in una situazione concreta**

**Questo dipende anche dal nostro insegnamento e dai libri di testo**

## INVALSI: Livello 10 - 2013-14

D5. H è il punto medio del lato AB del triangolo ABC.



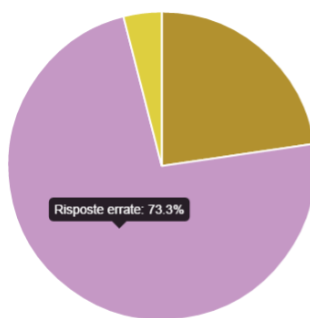
I triangoli AHC e HBC hanno la stessa area perché

- A.  la distanza di C da AB è la stessa nei due triangoli e  $AH = HB$
- B.  la mediana CH divide il triangolo in due triangoli congruenti
- C.  hanno come altezza comune CH e le relative basi sono della stessa lunghezza
- D.  i triangoli CHA e CHB sono tutti e due triangoli isosceli

### Risposta esatta

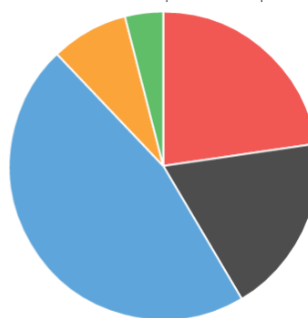
A

Percentuali nazionali



■ Risposte corrette 22.7% ■ Risposte errate 73.3%  
■ Risposte Mancate 4%

Domande a risposta multipla



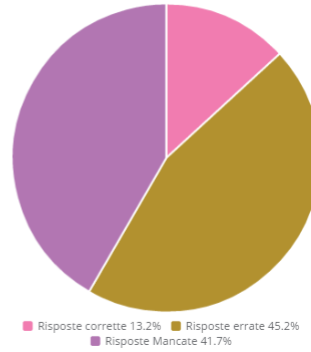
■ Risposta A 22.7% ■ Risposta B 18.8%  
■ Risposta C 46.4% ■ Risposta D 8.1%  
■ Risposte non valide 4%

## Risposta esatta

100 - 25%

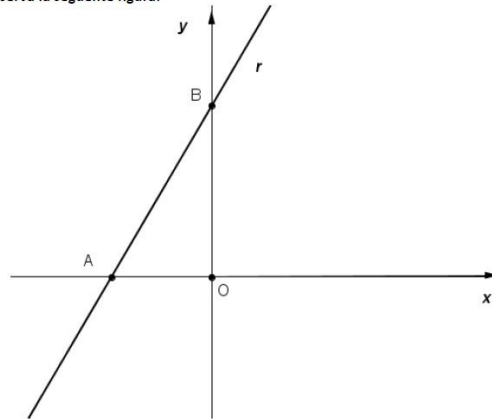
accettabile anche 21,5 oppure un qualunque numero decimale compreso tra 21,4 e 22,5  
(estremi inclusi)

## Percentuali nazionali



## INVALSI: Livello 10 - 2013-14

D21. Osserva la seguente figura.



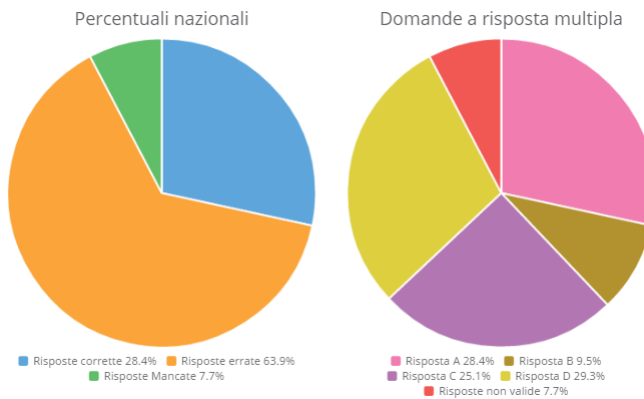
Le coordinate di A sono  $(-3; 0)$  e l'area del triangolo AOB è 9.  
Quale fra le seguenti equazioni rappresenta la retta  $r$ ?

- A.   $y = 2x + 6$
- B.   $y = -2x - 6$
- C.   $y = 3x + 9$
- D.   $y = -3x - 9$



## Risposta esatta

A



**Difficoltà ad applicare il ragionamento geometrico in problemi non appena questi sono un po' non standard o mettono assieme piano cartesiano e area di un triangolo.**

## Discussione

- E per te, che cos'è la Geometria?
- Quale spazio ritieni debba avere nel curriculum del primo biennio? E del secondo biennio?
- Quali sono i contenuti irrinunciabili? E quali quelli da tagliare, se necessario?
- Che spazio dai all'uso di strumenti (riga e compasso, software, carta piegata...)?

## Discussione

- Quale spazio dai alla discussione, alla formulazione di congetture, alla soluzione di problemi?
- Utilizzi la dimostrazione in Geometria?
- Utilizzi attività di avviamento alla dimostrazione?
- Quale percorso ritieni il più adatto per la scuola nella quale insegni?