XXXII Convegno Umi-CIIM – Livorno 16/18 Ottobre 2014
Laboratorio per Secondaria di 1° e 2° grado.
'Diamo i numeri' - Lucilla Cannizzaro
lucilla.cannizzaro@gmail.com

Canovaccio del laboratorio

Legenda:

In Bradley Hand ITC ed in colore azzurro sono gli intarsi verbali durante le attività di Laboratorio per tratteggiare un panorama generale delle attività

In BV Boli e colore arancio sono cenni su alcune osservazioni interessanti emerse durante il Laboratorio.

……………………

A…..il numero …questo sconosciuto

Sollevo velocemente una questione (tra le molte che si potrebbero porre) e poi affido poche righe e qualche indicazione bibliografica per approfondire ed espandere il discorso.
Subito dopo, al lavoro; per continuare a riflettere ma partendo da spunti concreti e tangibili per i nostri ragazzi.

Nel mezzo del guado tra matematica ed teorie cognitive
ordinale o cardinale?

Il ventunesimo secolo è cominciato con il 1° Gennaio 2000 oppure con il 1° Gennaio 2001?
La questione potrebbe essere posta per ogni anno di storia individuale e non solo di storia collettiva. L'essenza della questione è se la data è designata da un numero cardinale oppure da un numero ordinale.

L'esempio è autorevole: F. Enriques in 'Questioni riguardanti le matematiche elementari', (edizione 1924-1927, p. 251), un saggio in cui l'autore analizza la molteplicità di aspetti del numero naturale e, in particolare, la questione tra prevalenza di aspetto cardinale o ordinale.

Enriques riconosce l'importanza delle esperienze concrete e attribuisce la chiave della soluzione di priorità di questo genere a criteri esterni alla matematica; nel nostro caso, consegna alla storia il compito di sciogliere la questione.

E anche interessante registrare, a proposito dei numeri, la posizione di Enriques (1924-1927, p. 252) circa il gioco tra esperienze vissute nella pratica ed esperienze solo immaginate dice: *"Operando sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati non si arriva <in fatto> che a numeri non troppo grandi: ... Bisogna dunque ammettere che la conoscenza di cui si tratta non deriva dalla pura esperienza bruta del conteggio su classi di oggetti..... Pertanto la nostra mente supplisce alle esperienze effettuate con esperienze immaginate, la cui possibilità di ripetizione indefinita ci porge la costruzione ideale di una serie infinita di numeri."*.

Il primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana nel 1939 testimonia il dibattito tra le varie posizioni sulla essenza del numero con una relazione di Natucci che compie una analisi delle varie posizioni puntualizzando difetti e critiche di ciascuna e tentando di esplicitare le linee di filiazione tra alcune di esse.

Sul versante più specificamente epistemologico la questione di riduzione logica di una concezione all'altra, non è risolta (1901) e registra continue e vivaci alternanze soprattutto tra i sostenitori delle due posizioni contrapposte: cardinale/ordinale. Per
esempio, Burali-Forti, collaboratore di Peano, nel 1896 nega la priorità all'impostazione ordinale del suo
maestro. Sono esistite anche posizioni pragmaticamente concilianti come quella di Dantzig (1939) secondo il quale è innegabile che, ovunque esista una tecnica numerica, si ritrovino compresenti tanto l'aspetto cardinale che l'aspetto ordinale. Weyl (1949) ha negato la priorità all'aspetto cardinale affermando che. *"Il criterio dell'equivalenza numerica fa uso della possibilità di costruire delle coppie: ma questa possibilità può essere verificata solo se le operazioni di correlazione sono eseguite una dopo l'altra nel tempo, e quindi dando un ordine agli elementi dell'insieme. .... Per questa ragione mi sembra indiscutibile che il concetto primitivo sia quello di numero ordinale. .."*. (1967, p.41-42)

Una via di uscita dalla situazione di stallo fu impostata da Piaget che assunse come punto di partenza, come 'assioma', per le sue ricerche in epistemologia genetica la perfetta coincidenza dei meccanismi di sviluppo della scienza a livello individuale e a livello storico.
In sostanza, è come se il problema epistemologico sui numeri naturali fosse stato traslato nel problema di gestire tecnicamente rilevazioni empiriche sulla psicogenesi del concetto di numero.
Piaget incarna, da un punto di vista metodologico, l'auspicio di Enriques a risolvere la questione della priorità tra le concezioni del numero naturale adottando criteri esterni alla matematica. Piaget, però, si pone esternamente alla matematica con una visione assolutamente interna alla matematica e cioè cerca nelle sue indagini e assolutizza nelle sue osservazioni l'aspetto cardinale del numero naturale.
La questione non è ancora risolta anche per l'esplosione di nuove interessanti prospettive che sono state aperte da recenti studi di antropologia del numero e di indagine sul concetto di numero condotte sul versante della Psicologia e delle Neuroscienze.

Una espansione di questa riflessione si può trovare in Cannizzaro L., 2000, Approccio al concetto di numero. In M. Bartolini Bussi, *Numeri: conoscenze e competenze*. Edizioni Junior, Bergamo, 7-36.

Riferimenti biblografici:
Burali-Forti C., 1896, Le classi infinite, *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, XXXII, 34-52
Dantzig, T. (1939). Number: the language of science. Macmillan; traduzione italiana (1965). Il Numero: linguaggio della scienza. La Nuova Italia
Enriques,F., (1924-1927). I numeri reali. Parte prima: I numeri naturali. In Enriques, F. (a cura di), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, 231-283. Zanichelli (ristampa anastatica 1983)
Natucci, A. (1939). Saggio di una classifica dei metodi usati nell'aritmetica generale. *Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, 512-520
Wayl H., (1949) 1967, *Filosofia della Matematica e delle Scienze Naturali*, Boringhieri

Un punto di vista particolare: Il considerare gli insiemi dei numeri naturali, dei razionali, etc. dati in atto, *collettivamente*, attraverso il loro simbolo ha messo in un angolo la considerazione degli insiemi numerici pensati in potenza e dei numeri considerati individualmente per loro proprietà specifiche.
Penso che dovremmo comportarci come fossimo un cercatore d'acqua e andare ad attivare nelle persone il concetto di numero naturale sollecitando sia aspetti di numero in atto che aspetti di numero in potenza; dovremmo attivare entrambe le diramazioni della forcella da rabdomante.
Si fa presto a dire: 'dato un numero naturale qualunque ….', ma è veramente una sfida quella di dare un numero naturale qualunque visto che appena lo si pensa questo sarà o pari o dispari, primo o composto, multipli di …., amico, etc.etc!

B. Spunti didattici. Premessa

Rimbocchiamoci le maniche e lavoriamo pensando ai ragazzi

Propongo di lavorare sulle varie situazioni, in prima battuta, pensando a come potrebbero affrontarle alunni di scuola secondaria di primo grado (13 anni) o di inizio di scuola secondaria di secondo grado (15 o 15+).
In un secondo passaggio, invece, proviamo a tradurre le situazioni in una 'forma' (simbolica, linguistica, concreta, ...) che renda evidente una tensione didattica verso l'obiettivo di fare compiere qualche passo in avanti.
Le situazioni che seguono hanno una formulazione induttiva, non compiutamente definita e per questo preferisco etichettarli non come 'problemi' ma come 'situazioni didattiche' per sottolineare che il lavoro su di esse contribuisce a meglio delineare il loro profilo.

Le prime 7 situazioni didattiche o problemi sono costruite con metodologia di problem posing. Assegnata una situazione si generano ulteriori situazioni riformulando la situazione data in piani linguistici diversi o cambiando e espandendo la situazione facendo variare opportunamente uno dei parametri della situazione originaria.

Per approfondire aspetti del *Problem posing* consiglio:

- con una caratterizzazione metodologica generale e con spunti operativi didattici per fascia di età fino ai 15 anni: Brown S., Walter M., 1988, *L'arte del problem posing*, SEI

- per una riflessione epistemologico al livello di docenti e per spunti operativi per una fascia di età sopra i 15 anni: Polya G., 1990, *Mathematics of Plausible Reasoning* Vol. I, Vol. II

- per una riflessione epistemologica generale: Macchi L., 1994, *Il ragionamento probabilistico: ruolo delle euristiche e della pragmatica*, Firenze: La Nuova Italia

B.1. Situazione didattica 1

Cerchiamo scorciatoie di calcolo per ottenere velocemente, senza calcolatrice e senza eseguire operazioni in riga e colonna, il quadrato di numeri inferiori a cento entrambi con la cifra delle unità uguale a cinque
Pensiamo, però, di fare lavorare i ragazzi non assegnando l'enunciazione appena scritta ma secondo lo script (il canovaccio) che segue:

Esegui ed osserva:

15 x 15 = …..
25 x 25 = ……
…………

a) come potresti continuare?
b) cogli qualche regolarità?
c) scrivi una breve relazione per comunicare ad un amico quello che hai trovato.
Aiutati con frasi come le seguenti: stiamo parlando del …………….; si tratta di vedere ……….; vogliamo fare il quadrato di …………
Aiutati, ora, con la calcolatrice

d) scrivi una breve ma esauriente ‘pagina di diario’ dell’attività svolta, cerca di ricostruire come si è sviluppata la tua idea o come hai formulato il procedimento adottato**.**

Sollecitare qualche ‘lampo’ di discussione **sull’uso delle calcolatrici e sui numeri macchina**

Diverse coppie di lavoro hanno subito trovato che procedendo da una riga alla successiva si mantengono costanti le differenze seconde; hanno colto la regolarità della relazione funzionale (quadrato di un numero). Osservazione interessante se si pianifica di riprendere l’esercizio nel momento o nella occasione di affrontare le funzioni di secondo grado. L’obiettivo in questo caso era soltanto di trovare un trucco che consenta il calcolo rapido, senza macchinetta, di quadrati di numeri e di riattivare questioni di scrittura dei numeri

B.2. Situazione Didattica 2: Formalizzazione a parole della Situazione Didattica 1

Per il calcolo del quadrato di numeri inferiori a cento entrambi con la cifra delle unità uguale a cinque, si possono individuare due scorciatoie (in generale entrambe le scorciatoie sono individuate da gruppi di lavoro diversi ed è utile porle a confronto con una discussione collettiva e procedere al miglioramento della enunciazione prodotte dai ragazzi. Questo lavoro faticoso di limatura (personale e vicendevole) del linguaggio naturale e sorgente del processo di evaporazione dei significati che costruisce la possibilità di usare con senso le lettere dell’algebra):

- il quadrato del numero risulterà terminare (cifre delle decine e delle unità) con venticinque; le centinaia e le migliaia risultano costruite a partire dalla cifra delle decine del numero di partenza facendo il quadrato di tale cifra aumentato della valore della stessa cifra; oppure
- il quadrato del numero risulterà terminare con 25 mentre il *resto* del numero si otterrà dal prodotto del numero dalla cifra delle decine per il suo successivo. Es.: $75^2 = 5625$ (56 = 7x8 e poi 25)).

B.3. Situazione Didattica 3: Espansione della Situazione Didattica 1

Variamo qualcosa ma non tutto (applicazione di una metodologia di problem posing); prendiamo in considerazione **non** il quadrato di un numero a due cifre, con cifra delle unità uguale a cinque, **ma** il prodotto di due numeri a due cifre con cifra delle unità uguale a 5 e con le decine espresse da due numeri successivi.

Lo script iniziale per i ragazzi potrebbe essere:

Come nella situazione precedente cerchiamo scorciatoie di calcolo per ottenere velocemente, senza calcolatrice e senza eseguire operazioni in riga e colonna il risultato di operazioni come le seguenti. Esegui ed osserva:

15 x 25 = …..
25 x 35 = ……
…………

a) come potresti continuare?
b) cogli qualche regolarità?

c) scrivi una breve relazione per comunicare ad un amico quello che hai trovato.
Aiutati con frasi come le seguenti: stiamo parlando del …………….; si tratta di vedere ……….; mentre prima dovevamo fare ………, ora ………..

Aiutati, ora, con la calcolatrice
d) scrivi una breve ma esauriente 'pagina di diario' dell'attività svolta, cerca di ricostruire come si è sviluppata la tua idea o come hai formulato il procedimento adottato**.**

Possiamo pensare ad ulteriori passi di problem posing che possono essere lanciati a qualche gruppo di lavoro e non a tutti, via via che i gruppi finiscono il lavoro precedente.
Si può pensare di rinunciare al vincolo che le cifre delle decine dei due numeri siano due numeri consecutivi (N.B. i diversi modi nei quali possiamo enunciare una stessa caratteristica!).
E questa ipotesi può concretizzarsi in tanti modi:
a) centrare l'attenzione su 15 x 25, 15 x 35, etc. e perché no anche su 15 x 15! Oppure su 25 x 15, 25 x 25, 25 x 35, etc. e così via;
b) destrutturando completamente la successione dei prodotti e producendo, a caso, prodotti di due numeri a due cifre con cifra delle unità uguale a cinque; si potrà convenire che per potere cogliere regolarità è opportuno lavorare con qualche idea conduttrice, con qualche 'metodo' ! e tornare così, ad esempio, ad a).

Fare cenno alla questione della gestione del lavoro individuale (di singoli o singoli gruppi) e del lavoro corale della classe. Citare: L'insegnante come direttore di orchestra, coordinatore di voci e di echi (Boero et alii, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Edizione 2011, in http://www.seminariodidama.unito.it/).

B.4. Situazione Didattica 4: Formalizzazione a parole della Situazione Didattica 3 ***(espansione della Situazione Didattica 1)***

La situazione più complessa richiede lavoro ed attenzione; per esempio, può essere iniziato il lavoro in classe a gruppi e poi due gruppi possono essere responsabilizzati a provare a fare progredire il lavoro e poi riportare in classe le difficoltà, le soluzioni e la sistemazione fin dove fatta avanzare. In generale si ottiene una scaletta di enunciazione dei punti trovati del tipo di quella che segue. Questa sistemazione a parole è vitale per potere procedere alla successiva formalizzazione con le lettere delle procedure di calcolo rapido.

Per il calcolo del prodotto di numeri inferiori a cento, entrambi con la cifra delle unità uguale a cinque ma diversa cifra delle decine, ……mettendo insieme il lavoro di tutti si presentano due casi:

- Primo caso è quando i due numeri hanno la cifra delle decine della stessa parità: a) il numero risultante terminerà con venticinque;

- Secondo caso è quando i due numeri hanno la cifre delle decine di parità diversa: a') il numero risultante terminerà con settantacinque;
- Nel primo caso le cifre delle migliaia e centinaia le otteniamo sommando due addendi: il prodotto delle cifre delle decine dei numeri di partenza e la semisomma delle stesse;

- Nel secondo caso le cifre delle migliaia e centinaia le otteniamo sommando due addendi: il prodotto delle cifre delle decine dei numeri di partenza e la semisomma delle stesse decrementata di uno.

B.5. Situazione Didattica 5: Formalizzazione con l'algebra della Situazione Didattica 3 (espansione della situazione didattica 1)

Su come 'scivolare' dalle parole alle lettere dipenderà ampiamente da quanto lavoro è stato fatto in precedenza nell'area dell'*algebra-aritmetica*. E' opportuno procedere con i numeri ben visibili davanti agli occhi e mantenere una formulazione in lettere che non *vaporizzi* troppo i significati anche a discapito di una non omogeneità della scrittura algebrica.

E' possibile ricercare spiegazioni 'algebriche' delle regole scrivendo i numeri in modo da esplicitare la composizione additiva e moltiplicativa soggiacente il sistema posizionale in base dieci e formalizzare le cifre pari e dispari in modo classico con 2m e 2m+1:

esempio:

25x35 si potrà scrivere come (2x10+5)x(3x10+5) e svolgendo i conti senza nascondere la scrittura posizionale …..

In generale il prodotto di (((2m+1)x10)+5)x (((2n+1)x10)+5) darà ……

B.6. Situazione didattica 6: variante della Situazione Didattica 1

Ancora con un passo di problem posing si tratta di tornare alla Situazione Didattica 1 e cercare scorciatoie di calcolo per trovare il quadrato di un numero a due cifre con cifra della decine uguale a cinque. Si può chiedere ai ragazzi:

Ripeti lo script della Situazione 1 per numeri del tipo:
$(58)^2$
ovvero: …………………

B.7. Situazione didattica 7: ulteriore variazione della Situazione Didattica 1

Con un altro passo di problem posing si può chiedere, anche a giorni di distanza dalla fine del lavoro sul nucleo precedente e proprio per riprendere, rinforzare, esprimere a se stessi in un linguaggio interiore rapido, di:

Scoprire, se esiste, una efficace scorciatoia di calcolo che permetta di calcolare rapidamente il prodotto di due numeri di due cifre con la stessa cifra delle decine e cifre delle unità che si completano a dieci.

B.8. Situazioni diverse, meno strutturate sotto il profilo del problem posing, per lanciare il calcolo mentale e provocare una riflessione su alcune caratteristiche dei numeri

Nel laboratorio abbiamo velocemente lavorato solo alla situazione g) per potere esplicitare la valenza dei problemi, delle soluzioni e delle discussioni che possono sorgere.

a) 42 x 39 è un numero di ….. cifre

b) 4,5 x 5 è
   i. maggiore di 20
   ii. minore di 25
   iii. un numero frazionario
   iv. un numero con cifra dei decimi uguale a 5

b) In Z la differenza di due numeri può essere maggiore di ciascuno dei due? Come formulare, se possibile, analoga affermazione per la somma?

c) E' vero che se n è multiplo di 3, allora il suo quadrato è multiplo di 6?

d) Due numeri naturali la cui somma sia 10 hanno i quadrati con la stessa cifra delle unità e la differenza di tali quadrati è un multiplo di 10. Prova qualche caso e dimostralo in generale

e) Esiste un numero maggiore di 100 e minore di150 il cui resto è sempre 1 quando viene diviso per due, per tre, per quattro, per cinque e per sei?

f) Qualcuno ha scritto 5 numeri di due cifre su di un foglio che non si può vedere. Sappiamo che la loro somma è anche esso un numero di due cifre. In questa ipotesi dire se ciascuna delle affermazioni seguenti è vera, falsa oppur se per essa non si può dire niente:
   i. Ognuno dei cinque numeri è più piccolo di 20
   ii. Uno dei cinque numeri è maggiore di 60
   iii. Quattro dei cinque numeri sono maggiori di 20 e uno è minore
   iv. Se due dei numeri sono minori di 20, allora almeno uno è maggiore di 20

   v. Se i cinque numeri sono tutti differenti tra loro, allora la loro somma è almeno 60

g) Il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è sempre un multiplo di 6.
In una scala da 1 a 5, quale è la probabilità che l'affermazione precedente sia vera?
Facendo uso delle lettere la questione rimane oscura se si parte dall'espressine n (n+1) (n+2); e non è meglio se partiamo da (n-1) n (n+1) = n (n^2-1)……..
Se pensiamo a come sono distribuiti i multipli di due e tre sulla retta numerica è intuitivo.
Se pensiamo ai possibili resti delle divisioni per tre è aritmeticamente chiaro, ma se trattato algebricamente è non immediato.

h) Considera tre numeri naturali consecutivi. Calcola il quadrato di quello intermedio e sottraigli il prodotto degli altri due. Prova con altri tre numeri consecutivi …. poi altri tre …Che cosa osservi? Come lo spieghi?

C. Il numero …questo sconosciuto: Indicazioni bibliografiche aggiuntive

Storia, Epistemologia e Didattica

Cremonesi C., 1993, *Conoscere la matematica dalla teoria degli antichi alla logica del computer.* Hoepli

In *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* (Centro Morin, Paderno del Grappa, in internet tutti gli indici e molti articoli scaricabili):

1992, Ferrari M., I numeri decimali, 15, 3, 216-233

1992, Ferrari M., I numeri decimali. Seconda parte, 15, 5, 450-474

1992, Ferrari M., I numeri decimali. Terza parte: Approssimazioni decimali, 15, 7, 690-703,

1992, Ferrari M., I numeri decimali. Quarta parte: Numeri decimali periodici, 15, 9, 888-908,

1994, Dell'Aquila G. & Ferrari M., La lunga storia dei numeri interi relativi, 17, 3, 148-265

Maraschini W., 2008, *Bravi in Matematica*, Bruno Mondadori

Prodi G., 1971, La teoria degli insiemi nella introduzione alla matematica di base*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 2010, maggio, 293

Prodi G., 1981, Tendenze attuali nell'insegnamento della matematica*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 2010, maggio, 293

Rozsa Peter, (1957) 1973, *Giocando con l'Infinito*. (a cura di Girello e Magione), Feltrinelli ed dal 2010, Rizzoli, anche in versione elettronica per supporto Kindle.

Villani V., Dare un senso ai numeri, *Induzioni*, 1995, n. 10, 19-29

Villani V., 2003, *Cominciamo da Zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Aritmetica e dell'Algebra*, Pitagora Editore

Waismann F. (1936), *Introduzione al pensiero matematico*, trad. italiana del 1971 di L. Geymonat, Boringhieri

Wayl H., (1949) 1967, *Filosofia della Matematica e delle Scienze Naturali*, Boringhieri

Fonti di esempi

Gherzi I., 1988, *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli

Peano, *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, un volumetto uscito per i tipi di Paravia nel 1924 e ristampato da Sansoni nel 1983.

Progetto ArAl,2003, a cura di Malara A. N. e Navarra G., Pitagora Editrice. (Per la Scuola Secondaria di Primo Grado: fascicolo 4 -11. E http://www.aralweb.unimore.it

Scienze cognitive e neuroscienze

Butterworth B.,(1999) 1999, *Intelligenza Matematica*, Rizzoli

Dehaene, (1997) 2000, *Il pallino della Matematica, Mondadori*; 2011, Cortina Editore

Lakoff G., Núñez R. E.*, 2005, Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*, Bollati Boringhieri