

*Attività "formative"
nell'insegnamento della matematica*

Claudio Bernardi (*Sapienza*, Università di Roma)

Guido Castelnuovo (1907) «È opinione diffusa, fin dai tempi più remoti, che la matematica fornisca alla mente la disciplina e l'equilibrio, che essa, meglio di ogni altra scienza, insegni l'arte di ragionare.»

non è vero che i matematici fanno sempre ragionamenti inoppugnabili,
ma l'*educazione* e la *cultura* matematica hanno un peso rilevante nella formazione

non sono d'accordo con chi parla del «fallimento della didattica tradizionale»

naturalmente con opportune attività si può ottenere molto di più: laboratori del Piano Lauree Scientifiche, M@t.abel, Lincei per una nuova didattica, ecc.;

pensiamo anche a tutte le applicazioni

chi ha una formazione matematica (*forma mentis*):

- se cita un numero, lo usa consapevolmente (con un significato)
- è attento alle parole usate ("esponenziale")
- sa trattare un problema in generale, senza cadere in casi particolari, come invece capita spesso quando si discute
- sente l'esigenza di consequenzialità

nella Scuola Primaria i bambini imparano *a memoria* le tabelline

alcune tabelline risultano facili da ricordare e altre più difficili; nella tabellina del 5 o anche del 9, un bambino riconosce una regolarità

imparare le tabelline significa riconoscere regolarità e conferire una struttura nell'insieme dei numeri

(dai programmi Elementari 1985)

«gli algoritmi (cioè, i procedimenti ordinati) di calcolo e lo studio delle figure geometriche hanno una valenza formativa ben al di là delle utilizzazioni pratiche che un tempo giustificavano il loro inserimento nei programmi»

la frase precedente mi piace, però ... una distinzione esplicita fra l'uso pratico della matematica e la sua valenza formativa risale a molto tempo fa ...

Platone, libro VII della *Repubblica*

Socrate parla con Glaucone

una volta stabilito che il governo va affidato ai filosofi, si pone il problema: come educare i filosofi? come educare i guerrieri?

si prendono in considerazione ginnastica e musica; ma
«*la ginnastica si occupa di ciò che nasce e perisce, in quanto sorveglia la crescita e il deperimento del corpo [...] Pertanto non può essere la disciplina che cerchiamo*»

la musica viene scartata («*non è una scienza*») e si escludono anche le arti

si passa alla «*disciplina comune di cui si servono tutte le arti, le opinioni intellettuali e le scienze, e che ognuno deve per forza imparare molto presto [...] sto parlando del numero e del calcolo. Non è forse vero che ogni arte e scienza è costretta a essere partecipe di queste nozioni?*»

«*alle discipline necessarie al guerriero dovremo aggiungere la conoscenza del calcolo e dei numeri [...], se egli vuole capire qualcosa di tattica, o piuttosto se vuole essere un uomo*»

«*Pertanto è conveniente imporre questa disciplina per legge [...], senza usarla per vendere e comprare, come fanno i mercanti e i bottegai, ma per la guerra e per facilitare la conversione dell'anima stessa dal divenire alla verità e all'essere*»

«gli individui naturalmente portati per il calcolo sono acuti d'ingegno in tutte le discipline, mentre coloro che sono lenti ad apprendere, se istruiti e addestrati nell'aritmetica [...] fanno qualche progresso e diventano più acuti di prima»

al secondo posto viene collocata la geometria

«[Alcuni] ne parlano in modo davvero ridicolo e forzato: tracciano quadrilateri, prolungano linee, aggiungono figure e così via per scopi pratici, mentre questa disciplina deve essere coltivata solo per la conoscenza»

«Si tratta della conoscenza di ciò che eternamente è, non di ciò che nasce e perisce»

«per un migliore apprendimento di ogni disciplina ci sarà una differenza totale tra chi è esperto in geometria e chi non lo è»

poi si passa all'astronomia, alla musica e infine alla dialettica; l'utilità della matematica per il filosofo è diversa da quella dei mercanti (senza nulla togliere ai mercanti e alle applicazioni)

cerchiamo di precisare ...

- educare alla precisione e concisione di linguaggio;
(raggiungere "consapevolezza linguistica")
- educare a un linguaggio simbolico, all'astrazione;
- abituare ad esporre un ragionamento, educare alla coerenza, a uno spirito critico (a non fidarsi di quanto è chiaro in figura)
- educare a un metodo, a scoprire strategie;
- educare alla fantasia, alla capacità di vedere, a rappresentare

Abraham Lincoln, da giovane avvocato, portava con sé nei suoi viaggi gli *Elementi* di Euclide per raffinare le sue capacità

qualche esplorazione

"con la mente e con le mani"

(attività dell'Accademia dei Lincei a Roma)

aggiungo gli *occhi* e una costante attenzione al *linguaggio*

osservare, riconoscere regolarità e descriverle

la *tavola pitagorica* è ricca di regolarità numeriche

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

un'occasione per qualche frase:

«può capitare che un prodotto sia multiplo di 4 anche se *nessuno* dei fattori è multiplo di 4»

«*tutti* i multipli di 4 sono pari, ma *esistono ...* »;

«il prodotto di due numeri naturali è pari se e solo se *almeno* uno dei fattori è pari»

ricerca di regolarità nella tavola pitagorica

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

in un quadrato 2×2 : moltiplicando i numeri in diagonale troviamo lo stesso prodotto $ab \cdot (a+1)(b+1) = a(b+1) \cdot (a+1)b$

pensando la tavola come una matrice, ha rango 1 perché le righe sono a due a due linearmente dipendenti

un esempio di dimostrazione (ragionamento per eccellenza)

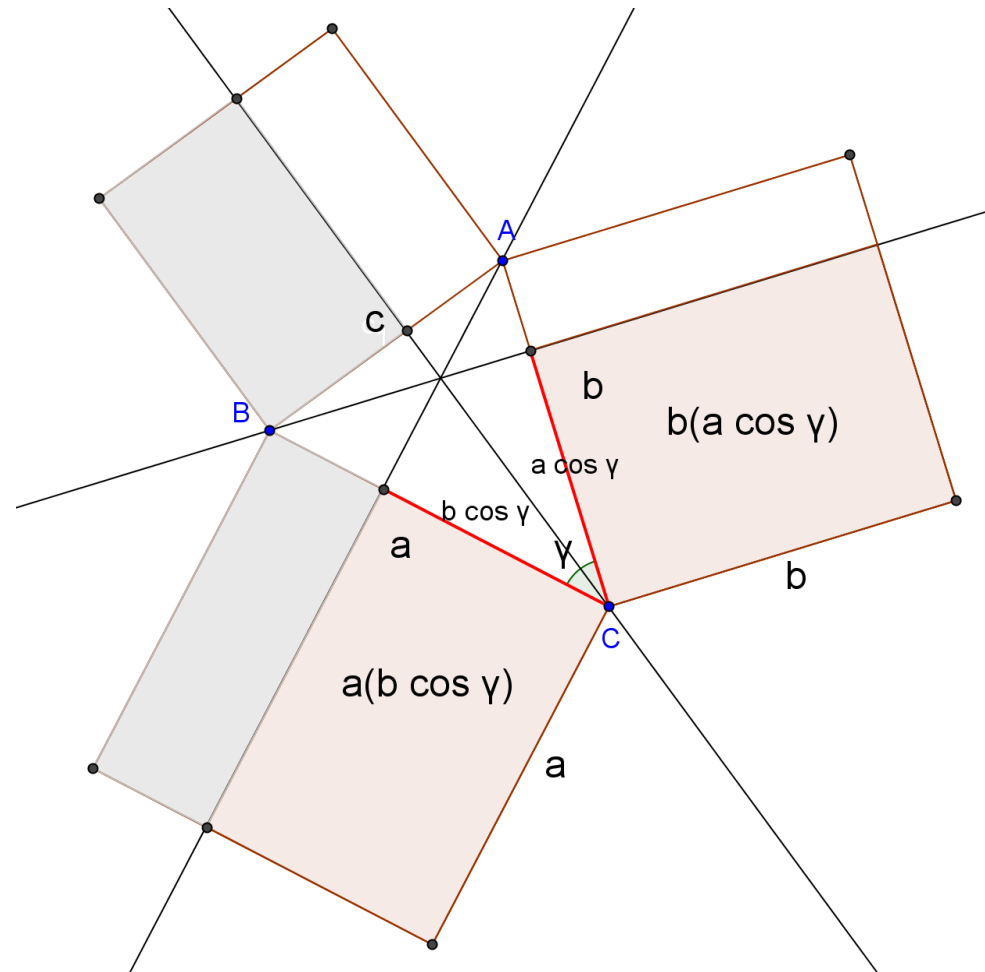
due motivi per la prossima dimostrazione:

capacità di "vedere" - il ruolo della trigonometria

(Al Cuoco) teorema del coseno: *Detto a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo, vale l'uguaglianza $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (dove γ è l'ampiezza dell'angolo opposto al lato c).*

partiamo da un triangolo acutangolo

costruiamo i quadrati sui tre lati e tracciamo le altezze



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

quando *una dimostrazione* è "formativa"?

- presenza di una figura
- chiarezza deduttiva (facilità memorizzazione)
- generalità (apre la mente)
- legami con assiomi e teoremi precedenti, legami con esercizi

il *ragionamento per assurdo* si ritrova nella vita corrente nel gioco del Sudoku, capita spesso di ragionare così:

«se in una casella escludo tutti numeri salvo il 3, allora scrivo 3»
si tratta di un ragionamento per assurdo (per esclusione)

considero *formativo* **il metodo matematico**,
capire come è organizzata una teoria
dare importanza alle cose importanti

molto importante è la *scelta degli esercizi*

due esigenze contrapposte:

- ogni compito scritto deve essere, in gran parte, *prevedibile*
- ma non è opportuno che tutto il compito riguardi sempre solo sull'ultimo argomento svolto a lezione

occasionalmente, *problem solving*

- si propongono problemi non legati al curriculum;
- non sappiamo a priori quale strumento va applicato;

esempi di matematizzazione e modelli matematici

pensare matematicamente

(Gian Carlo Rota) «per un matematico lavorare è un intrecciarsi di ipotesi, analogie, speranze e frustrazioni»

un esempio dai recenti test per l'ammissione al TFA (A047)
(CINECA TFA)

La media aritmetica delle ampiezze (in gradi) degli angoli di un poligono convesso è 150° . Che cosa si può dire della somma delle ampiezze degli angoli di quel poligono?

al *problem solving* affianco gare, giochi matematici
ottimi per sviluppare strategie

vediamo un problema sull'equità di un metodo

In alcuni esami ogni candidato estrae da un'urna tre titoli, li legge e ne sceglie uno. I titoli estratti non sono rimessi nell'urna. Gli ultimi candidati si trovano un'urna con pochi titoli; uno degli ultimi candidati protesta. Ha torto o ha ragione?

il candidato ha torto, ma la situazione trae in inganno;
è importante discutere, più che convincere della risposta "esatta"

una situazione apparentemente diversa:
nei giochi di carte le carte sono distribuite da un mazziere;
e se le carte fossero scelte dai giocatori, senza vederle?

invece, *non* è equa una procedura che consiste nel rimettere
nell'urna solo i due titoli non scelti

efficacia formativa umana e scientifica
molto dipende anche da noi docenti

Emma Castelnuovo, al 3° anno, segue un corso di Enriques

«Ho ancora i quaderni di appunti. No, non si tratta di appunti presi durante la lezione: era impossibile prender nota di qualcosa, tanto le sue lezioni erano condotte su un filo di pensiero che molto spesso mutava rotta. Eravamo noi studenti (una decina) a deviare quel filo con qualche domanda [...]. Noi studenti, suoi collaboratori fin dal primo giorno, non potevamo prendere appunti e nemmeno trascrivere qualcosa dalla lavagna, tanto la sua scrittura era incomprensibile. Il nostro era un continuo esercizio a vedere con gli occhi della mente.»

è un docente con grande carisma ed ha una classe privilegiata; non è perfetto (pare che facesse perfino errori di calcolo!); ma sa coinvolgere, rende gli studenti partecipi, fa capire che la matematica è viva e in continuo sviluppo

anche noi a scuola, in condizioni ahimè più normali, cerchiamo di far capire che noi non sappiamo tutto, che la matematica non è conclusa per sempre

(Federigo Enriques) *«Se la verità è soltanto un passo verso la verità, il valore della scienza consisterà piuttosto nel camminare che nel fermarsi ad un termine provvisoriamente raggiunto»*