Qual è la mossa giusta?

I giochi e le scelte strategiche: un campo di esperienza per il problem solving matematico e lo sviluppo della razionalità scientifica

Silvia Beltramino*, **Cristina Sabena****, **Elisabetta Vio*****

* Liceo Scientifico "M. Curie", Pinerolo

** Università di Torino

*** Istituto Comprensivo, Airasca

Livorno, XXXII Convegno UMI - CIIM, venerdì 17 ottobre 2014

Gruppo di ricerca didattica dell'Università di Torino coordinato dal prof. Ferdinando Arzarello

Lorenzina Atzori
Silvia Beltramino
Paola Carante
Marisa Carossio
Marina De Simone
Francesca Ferrara
Patrizia Gianino
Francesca Martignone
Donatella Merlo
Miranda Mosca
Cristina Sabena
Ketty Savioli
Bruna Villa
Elisabetta Vio

Tesisti:
Damiano Agnelli
Sara Appiano
Jacopo Bertolotti
Michela Chiartano
Fabio Combetto
Paola Ghibaudo
Miriam Maccotta

Iniziamo … giocando!

La corsa a 20

Gioco a coppie

Gara a squadre

Regole del gioco:

- Due giocatori.
- Il primo giocatore dice 1 o 2.
- Ogni giocatore a turno dice un numero, ottenuto aggiungendo 1 o 2 al numero detto dall'altro.
- Vince chi dice il numero 20.

Problemi di interazione strategica o “giochi”

- **C’è una “strategia migliore” nel gioco della corsa a 20 (“strategia vincente”)? Qual è?**
- **Perché la strategia è “vincente”?**

Discussione

Problemi di interazione strategica o “giochi”

- ✓ Due o più decisori/giocatori controllano alcune variabili che influiscono sull’esito del problema.
- ✓ Le decisioni di ciascun giocatore influiscono sul risultato finale.
- ✓ Il giocatore cerca di immaginare cosa farà l’altro giocatore, e sceglie la “strategia migliore” per vincere.

Ipotesi del lavoro di ricerca e didattico

I giochi strategici costituiscono contesti adatti nei quali gli studenti possano essere coinvolti in modo attivo e sviluppare competenze essenziali a due attività matematiche fondamentali:

- **Problem-solving:** processi di esplorazione, anticipazione e controllo
- **Argomentazione:** pensiero logico-deduttivo e dimensione comunicativa

Sviluppo di una razionalità scientifica

Ipotesi del lavoro di ricerca e didattico

- Le attività possono essere affrontate anche **senza** avere alcuna **competenza complessa** in matematica
- "**Non si presentano**" come attività matematiche (anche se sono studiate dalla Teoria dei giochi)

Sviluppo di una adeguata visione della matematica e di un rapporto positivo con la disciplina

Obiettivo di ricerca

Spiegazioni che giustificano

- **Argomenti teorici**, basati sulla scoperta delle relazioni tra le varie mosse possibili nel gioco

Considerazioni pragmatiche

- **Argomenti empirici,** basati sulla semplice osservazione di ciò che succede durante il gioco

Metodologie didattiche

- **Lavori di gruppo** su problemi

(Consegne specifiche: dal come … al perché)

- **Discussioni matematiche** guidate dall'insegnante

Cambiamento delle consegne

Prima tipologia di consegna:
Gioca e osserva il gioco.
Descrivi il gioco e la strategia adottata.

Seconda tipologia di consegna:
Gioca e osserva il gioco.
Trova una strategia per vincere al gioco.
Perché la tua strategia è una “strategia vincente”?

Le sperimentazioni

- Teaching-experiment in classe, dalla primaria alla secondaria, con la partecipazione di insegnanti-ricercatori e tesisti di Matematica e Scienze della Formazione Primaria
- Audio e video-registrazioni delle attività, note del docente, raccolta degli elaborati degli studenti
- Analisi su base qualitativa-interpretativa (macro e micro)

Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione

✦***Analizza e interpreta*** rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e ***prendere decisioni***.

✦***Spiega il procedimento seguito***, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

✦ ***Sostiene le proprie convinzioni***, portando esempi e controesempi adeguati e ***utilizzando concatenazioni di affermazioni***; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.

✦ Ha rafforzato un ***atteggiamento positivo rispetto alla matematica*** attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

Da Indicazioni Nazionali per i Licei:

5) il concetto di ***modello matematico*** e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo.

Da Indicazioni Nazionali per gli Istituti Tecnici:

- Individuare le ***strategie appropriate*** per la soluzione di problemi
- ***Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche***, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico

Un esempio dalla classe: Corsa al 20 in IV primaria

- Gioco a coppie
- Gara tra squadre, alla lavagna
- Discussione in classe

Analisi discussione, corsa al 20 in IV primaria

Argomenti empirici, basati sulla semplice osservazione di ciò che succede durante il gioco

Considerazioni pragmatiche

FILIPPO

Secondo me, <u>per come ho giocato in queste due partite</u>, <u>ho visto che</u> sono sempre andato sul 14 e sul 17. Quindi quando sei alla fine del gioco, devi sempre arrivare sul 14 e sul 17, perché quei numeri lì sono i numeri fortunati che ti fanno vincere.

Argomenti empirici, basati sulla semplice osservazione di ciò che succede durante il gioco

Considerazioni pragmatiche

SOFIA

Però iniziare per primo o per secondo che non importa non è vero, perché se inizi per primo, tu vinci, perché io sto iniziando a guardare questa partita (indica il foglio), intanto che parlate, ho guardato questa partita (indica la lavagna) e questa partita (foglio) e <u>ho notato che quelli che han vinto han sempre iniziato per primi</u>

GIULIANA

Non è vero: <u>prima</u> ha iniziato <u>Gaia</u>, ma ha vinto lo stesso <u>Filippo</u> che era secondo

Argomenti teorici, basati sulla scoperta delle relazioni tra le varie mosse possibili nel gioco

Spiegazioni che giustificano

GIULIO

UNA REGOLA ARITMETICA GENERALE:

Secondo me dato che i numeri vincenti si toglie sempre 3: da 20 togli 3 e arrivi a 17, da 17 togli 3 e arrivi a 14, secondo me un altro numero vincente potrebbe essere l'11, potrebbe essere … l'8, potrebbe essere … il 5, potrebbe essere … il 2

Dimensione Comunicativa

INS. Spiegaci bene questa cosa

GIULIO Perché … cioè non so, se io arrivo a 2…cioè non so, io inizio, faccio 1, no faccio 2, lui arriva lì e mette 1, io metto 2 e sono arrivato a 5, che secondo me è un altro numero vincente … sì, essendo arrivato a 5…è un numero vincente, secondo me. Poi … lui aggiunge

ono arrivato a 8, che è un
i aggiunge 1, io aggiungo 2
11, scusa, che è un altro
iunge 2, io aggiungo 1, e
un numero vincente, lui
, arriviamo a 17 che è un
unge 1 o 2, io aggiungo 1 o

quindi in tutto … mentre giochi … aggiungi ogni volta 3, e quindi se tu riesci ad arrivare ai numeri in cui ci sono 3, cioè se … in tutto fa 3, perché se tu aggiungi 1 e l’altro aggiunge 2, se tu aggiungi 2 e l’altro aggiunge 1, in tutto fa e quindi devi riuscire a prendere i numeri che sono …. …

ELISA

Il gesto indica una distanza costante

Lo stesso gesto da sinistra a destra

quindi in tutto … mentre giochi … aggiungi ogni volta 3, e quindi se tu riesci ad arrivare ai numeri in cui ci sono 3, cioè se …in tutto fa 3, perché se tu aggiungi 1 e l'altro aggiunge 2, se tu aggiungi 2 e l'altro aggiunge, in tutto fa e quindi devi riuscire a prendere i numeri che sono …. …

ELISA

A distanza di …

INS.

Dimensione Comunicativa

3

ELISA

Alcune osservazioni

- Difficoltà a gestire tutte le possibilità offerte dalle mosse del gioco contemporaneamente

  → H. Simon parla di "razionalità limitata"

- Il percorso da argomentazioni fattuali-pragmatiche ad argomentazioni con validità generale non è lineare né uguale per tutti gli studenti (molti "ritorni indietro") e va sostenuto dall'insegnante con interventi consapevoli

Giochiamo ancora…

Il gioco del NIM

Il gioco del Nim

Versione 2-2

Si gioca dividendo le cannucce in due mucchi
da due cannucce ciascuno.

A turno i giocatori possono togliere un numero di cannucce a scelta da uno dei due mucchi, l'importante è che non si salti il turno, cioè si tolga almeno una cannuccia, e che si tolgano le cannucce da un solo mucchio.

Perde chi toglie l'ultima cannuccia dal tavolo.

Qual è la strategia vincente? Come si può descrivere?

Scrivete la risposta dopo averne discusso tra di voi e motivate le vostre scelte.

Buon gioco!

Versione 1-3-5

Si gioca dividendo le cannucce in tre mucchi: uno con 1 cannuccia, uno con 3 cannucce e l'ultimo con 5.

A turno i giocatori possono togliere un numero di cannucce a scelta da uno dei due mucchi, l'importante è che non si salti il turno, cioè si tolga almeno una cannuccia, e che si tolgano le cannucce da un solo mucchio.

Perde chi toglie l'ultima cannuccia dal tavolo.

Qual è la strategia vincente? Come si può descrivere?

Scrivete la risposta dopo averne discusso tra di voi e motivate le vostre scelte.

Buon gioco!

- Ti è piaciuta questa attività?
- Cosa hai provato giocando?

- Pensando ad una tua classe, quali comportamenti e quali risposte produrrebbero i tuoi studenti affrontando questa attività?
- Che cosa possono imparare con questo gioco?
- Lo utilizzeresti nella tua attività didattica? Quando?

Sperimentazione in classe

Classe 2°
scuola primaria

Classe 1°
scuola secondaria di I grado

Classe 1°
scuola secondaria di II grado

Scuola sec. 1° grado

Scuola sec. 2° grado

1. Introduzione
2. Giochi a coppie: configurazione (2, 2), (3, 3), (3, 5) e (1, 3, 5)
3. Discussione: albero e strategia vincente
4. Configurazione (1, 3, 5, 7)

Uno strumento per osservare meglio: la griglia

strumento per l’analisi dei protocolli degli studenti (testi scritti e rappresentazioni)

- ➡ Individuare i diversi tipi di razionalità degli studenti
- ➡ fornire agli insegnanti uno strumento operativo

Tre tipi di razionalità degli studenti considerati:

empirico, **intermedio** (di transizione), **teorico**.

Quadro di Razionalità empirico-frequentista:

	Descrizione	Habermas & Simon	Note
A	Lo studente produce un'affermazione senza dare una giustificazione esplicita. Le affermazioni dello studente si basano, sull'evidenza dei fatti nell'immediato o su una sensazione personale (Es. "conviene 200!" oppure "secondo me conviene la lepre!", detto molto all'inizio dei giochi).	Il soggetto non giustifica, si basa su un'intuizione e quindi non si può usare il modello di razionalità Habermas.	Lo studente afferma qualcosa subito dopo che ha letto la consegna, è una scelta istintiva. Non c'è un perché.
B	Lo studente produce un'affermazione e è in grado di giustificarla su richiesta, basandosi sull'esperienza quotidiana (Es. "se sono amici allora non si accusano, se sono giovani"," sono inesperti e quindi si accusano") La giustificazione data fa riferimento a fatti empirici e non alla teoria dei giochi. Conduce di solito a considerare i giocatori come influenzati da emozioni e sentimenti (che caratterizzano la natura umana).	Secondo Simon siamo sempre in questo campo, nelle situazioni di decisioni rapide a rischio. Gli studenti utilizzano prevalentemente la razionalità limitata, le emozioni hanno un ruolo determinante sulle giustificazioni date.	Lo studente esplicita o è in grado (su richiesta) di esplicitare un perché facendo riferimento alla propria esperienza. Le emozioni e i sentimenti dei giocatori sono il principale argomento di discussione degli alunni. Le giustificazioni date non sono del tutto razionali ma sono fortemente influenzate da fatti empirici e convinzioni degli studenti.
C	Lo studente produce un'affermazione e la giustifica, o è in grado di giustificarla se richiesto, facendo riferimento a conoscenze matematiche esplicite, scolastiche o non. La giustificazione data non fa però riferimento alla teoria dei giochi.	Gli studenti motivano le loro affermazioni facendo riferimento esplicitamente alle loro conoscenze, la razionalità epistemica assume un ruolo fondamentale nella discussione.	Le conoscenze matematiche utilizzate sono spesso legate alla probabilità, per questo C e D sono strettamente collegati. Gli studenti però non hanno ancora una visione globale del gioco, non sono neppure a conoscenza di tutte le strategie possibili e non considerano con la dovuta attenzione tutti i giocatori. Spesso sono analizzate le possibili strategie di un solo giocatore.
D	Lo studente produce un'affermazione e la giustifica basandosi su un'analisi fenomenologica e locale che fa riferimento in modo esplicito alla probabilità (Es. "tre volte su quattro gli conviene accusare", "due volte su tre conviene dire 200"		Qui il nucleo del discorso è almeno implicitamente di tipo probabilistico (in senso frequentista). Può arricchirsi di ulteriori aspetti teleologici se, partendo da considerazioni di tipo probabilistico-frequentista, l'allievo fa delle scelte di strategia.

Quadro di Razionalità di transizione

E	Lo studente produce un'affermazione tenendo conto delle strategie dell'avversario, sa che sono possibili diverse strategie, ma riesce solo a descriverne una parte partendo dalla interpretazione data al dilemma (Es. "se sta bluffando va dalla moral", "a" non vuole accusare "b", perché così "b" non lo accusa.").Produce esempi e controesempi per supportare il ragionamento. Non arriva a giustificare correttamente una strategia vincente. Si prende atto e si dà una descrizione (anche parziale) del dilemma. Si considerano solo alcune strategie dei giocatori.	L'aspetto teleologico può essere esplicitato (su richiesta) dall'allievo: infatti per poter giustificare razionalmente una strategia vincente di un giocatore deve tenere conto delle possibili strategie degli altri giocatori.	C'è una presa di coscienza da parte dello studente dell'importanza delle strategie dei giocatori. L'aspetto teleologico condiziona la scelta. Si va oltre l'empirico perché qui si comincia a tenere in considerazione quello che intendono fare i giocatori, non si considera solamente un giocatore per volta.
F	Lo studente descrive una possibile strategia vincente perché ha preso coscienza del fatto che esiste, ma si basa solo su fatti localmente verificati (non sono considerate tutte le strategie dei giocatori), non elabora (perché non cerca di farlo, non ne sente la necessità) una teoria valida per tutte le situazioni di gioco, o per lo meno non concepisce la sua teoria come se fosse tale. Non ha ancora un carattere generale, una validazione generale. Lo studente non crede che la strategia proposta sia l'unica corretta per la soluzione del dilemma.		Poiché gli alunni hanno molto tempo per decidere la risposta da scrivere e consegnare, (il gioco del Nim era invece molto veloce), di conseguenza E-F risultano "compressi" uno sull'altro, gli alunni inizialmente non arrivano a giustificare correttamente una strategia vincente,(E), ma dopo la discussione arrivano, (di solito), a F.
G	Lo studente utilizza forme di rappresentazione (schemi, rappresentazioni iconiche, gestuali) per tenere sotto controllo le strategie dei giocatori e su questi schemi costruisce ragionamenti localmente validi per senza giungere ad una generalizzazione.	Gli aspetti teleologici e comunicativi sono costantemente presenti nelle argomentazioni degli studenti quando utilizzano forme di rappresentazioni.	C'è una presa di coscienza della necessità di rappresentare. Si considerano forme diverse di rappresentazione, anche con diversi registri. ad es. un diagramma ad albero e una descrizione verbale, una descrizione accompagnata da gesti iconici e metaforici. G è da considerare come costantemente intrecciato con gli altri campi della griglia, costantemente gli studenti sentono la necessità di rappresentare le loro idee e di rappresentare il dilemma.
H	Lo studente, a partire da configurazioni particolari cerca di giustificare e fare previsioni sulle scelte fatte dai giocatori con le strategie. Esempio: "(200;200) è la situazione migliore per entrambi i giocatori ma se uno dice 100...?" R usa la tabella del dilemma per validare una strategia, metterla alla prova, non solo per cercare la strategia vincente. Non giunge però ad una sua sistemazione formale a partire da queste constatazioni. Il ragionamento non va oltre.		Aiutandosi con la tabella lo studente deve gestire in modo oculato le strategie dei giocatori,è come un traguardo intermedio da raggiungere. Siamo in fase di transizione da un quadro di razionalità empirica ad un quadro più matematico standard, di razionalità teorica, perché ci sono elementi che fanno riferimento alla teoria dei giochi ma non sono organizzati in modo tale da costituire un ragionamento applicabile in ogni situazione.

Quadro di Razionalità strategico-teorico

I	Lo studente parte da ciò che considera vero, (la tabella del dilemma, l'obbiettivo dei giocatori, o altre considerazioni consolidate), per costruire a posteriori un ragionamento che provi la validità della propria tesi per poter convincere tutti con un'argomentazione completa.	In termini di razionalità prevale la dimensione teleologica (il comportamento è teso alla ricerca del modello generale del gioco.)	In pratica l'allievo dice: "so che deve essere così ma non so ancora da quali dati partire per supportare la mia conclusione con un ragionamento valido cioè devo cercare le prove che portano alla validazione del mio ragionamento con inferenze tali da giustificare agli occhi di tutti la scelta di quella strategia".
L	Lo studente produce un ragionamento che fa riferimento a tutte le configurazioni possibili del gioco, ne esplicita tutti i passaggi, ne ricava una regola generale concatenando i fatti e costruendo catene deduttive complete. Lo studente è entrato nella teoria dei giochi. Nota 1: una differenza tra I e L è che in I prevalgono ancora i processi, in L i prodotti.	In termini di razionalità prevale la dimensione epistemica (il comportamento è teso a validare un sistema ormai ben definito nei suoi presupposti.)	I ed L possono essere viste come due fasi di uno stesso comportamento razionale-teorico (come accade nella costruzione di uno spezzone di teoria matematica.)

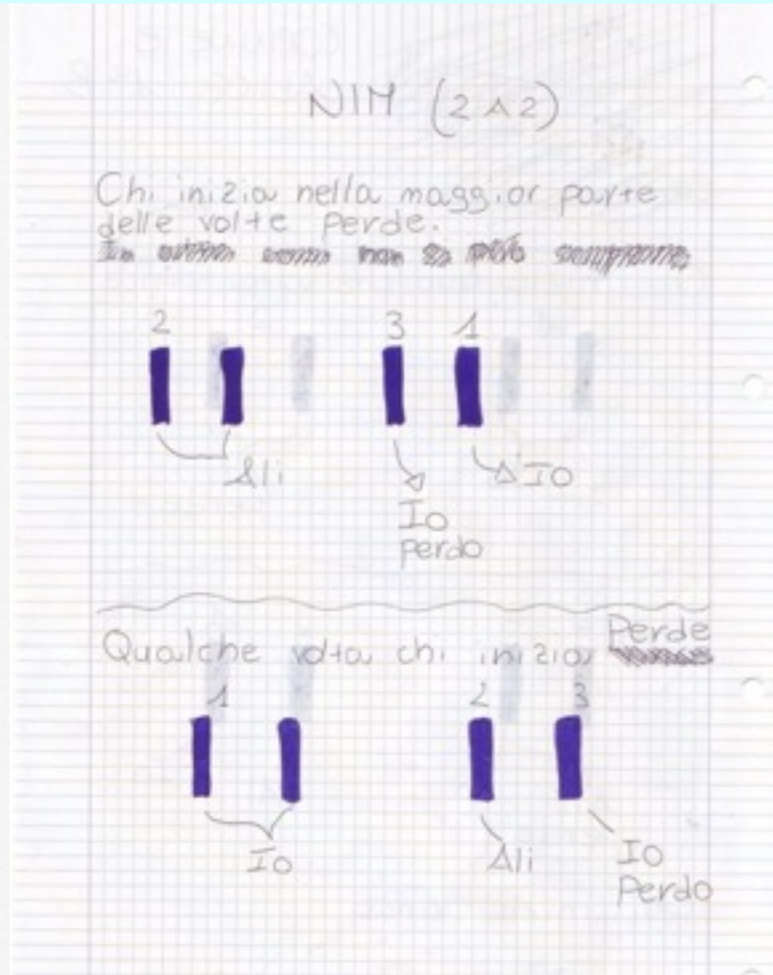
Quadro di Razionalità Empirico - frequentista

A

L'alunno produce un'affermazione senza dare una giustificazione, basandosi sull'evidenza dei fatti nell'immediato o su una sensazione personale

Gruppo 1:

"Chi inizia nella maggior parte delle volte perde"

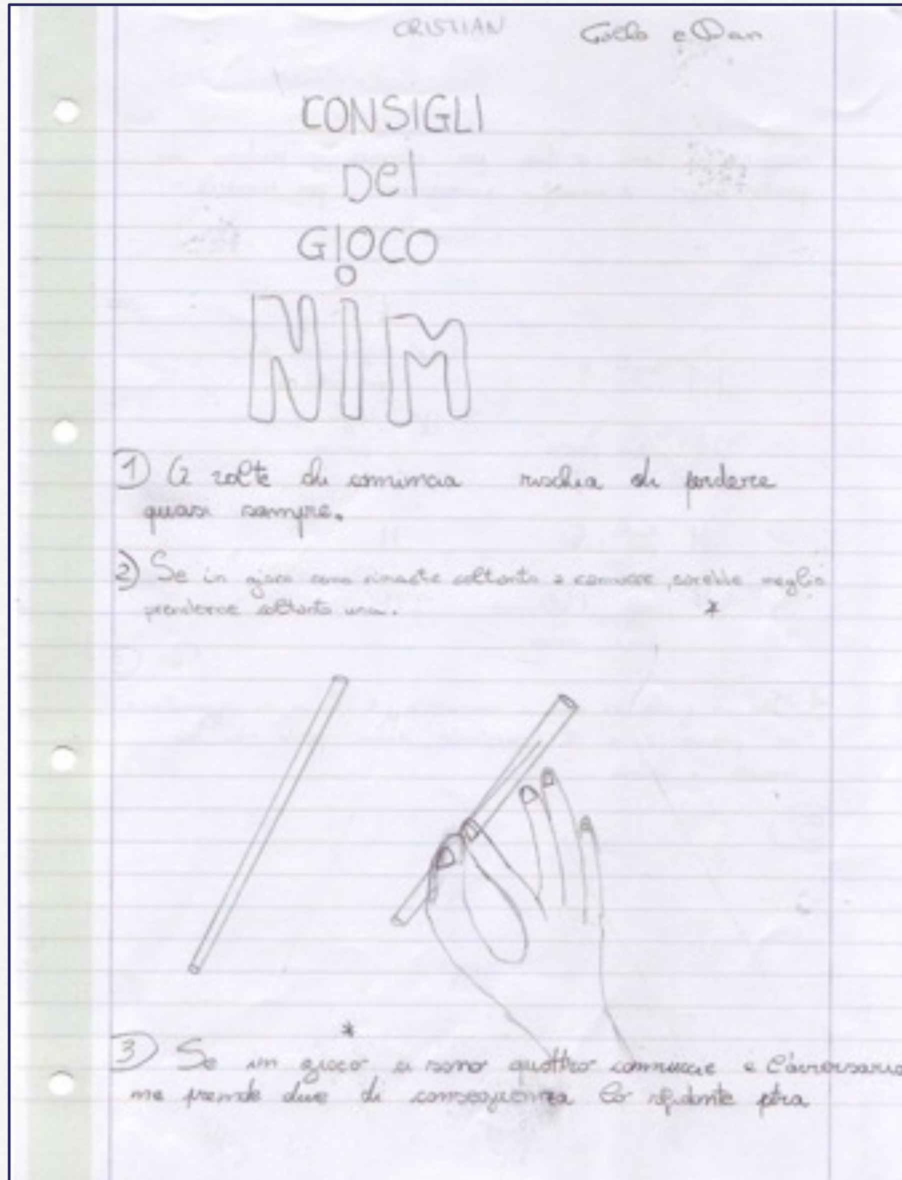


Classe 1° S.s. di I grado

A

Gruppo 3:

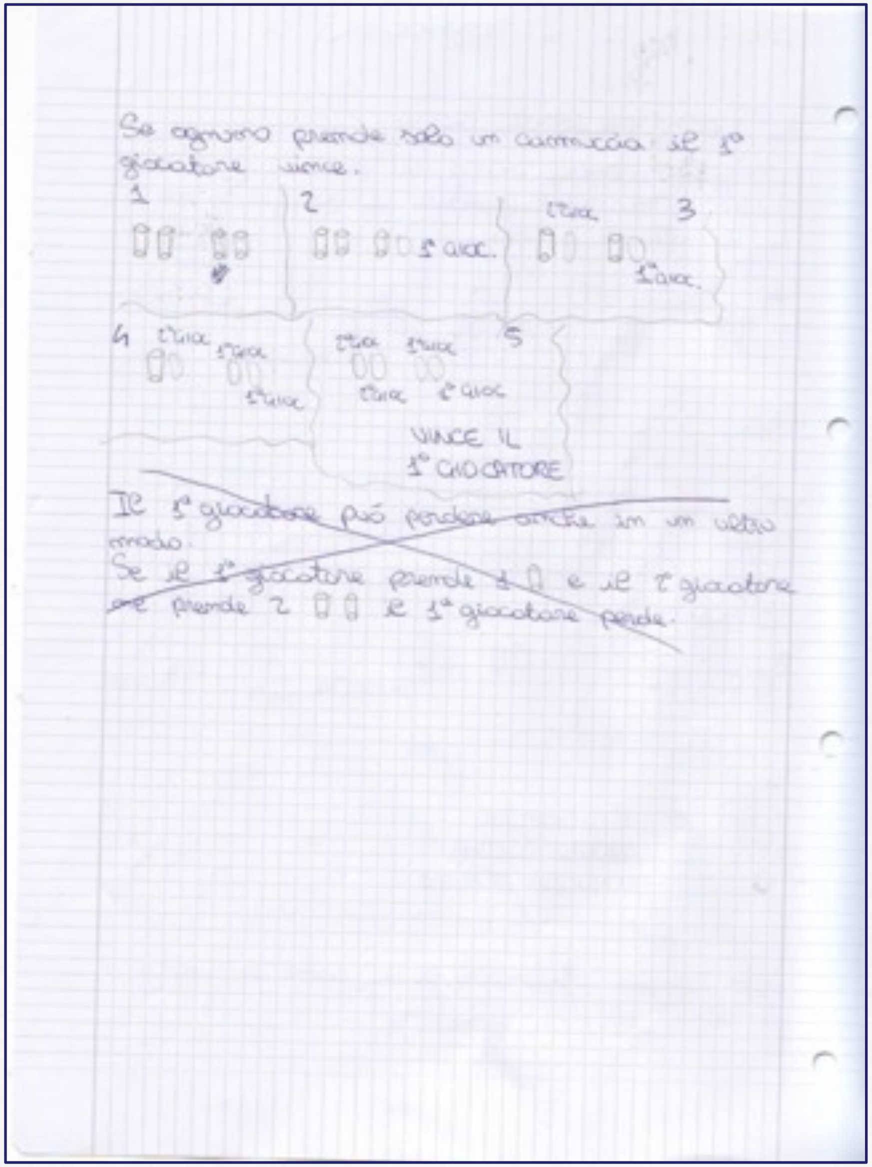
"Chi comincia rischia di perdere quasi sempre"



A

Gruppo 4:

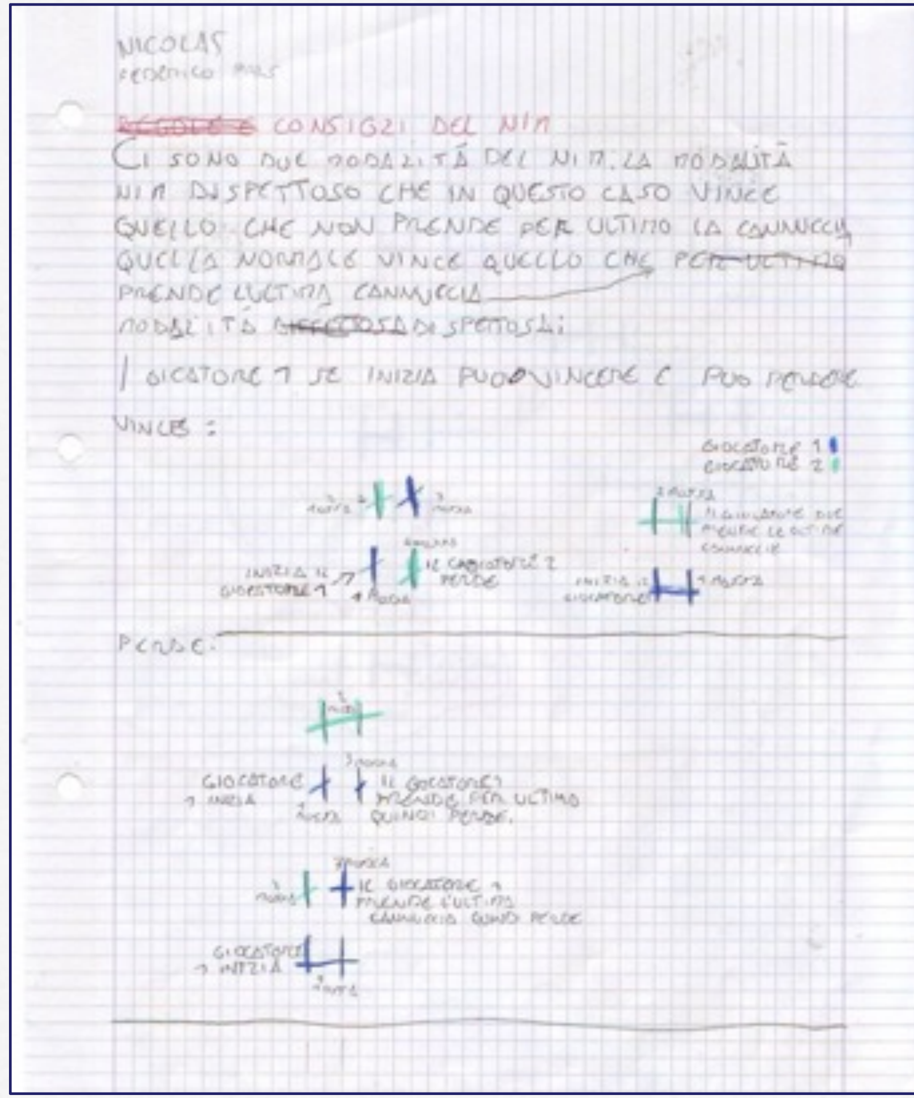
"Non sempre chi inizia perde, come in questo caso"



A

Gruppo 6:

"Il giocatore 1 se inizia può vincere e può perdere"


NICOLAS
FEDERICO

~~REGOLE~~ CONSIGLI DEL NIM

CI SONO DUE MODALITÁ DEL NIM. LA MODALITÁ NIM DISPETTOSO CHE IN QUESTO CASO VINCE QUELLO CHE NON PRENDE PER ULTIMO LA CANNUCCIA QUELLA NORMALE VINCE QUELLO CHE ~~PER ULTIMO~~ PRENDE L'ULTIMA CANNUCCIA

MODALITÁ ~~DIFETTOSA~~ DISPETTOSA:

I GIOCATORE 1 SE INIZIA PUÒ VINCERE E PUÒ PERDERE

VINCE:

GIOCATORE 1
GIOCATORE 2

PERDE:

GIOCATORE 1 INIZIA
IL GIOCATORE 1 PRENDE PER ULTIMO QUINDI PERDE.

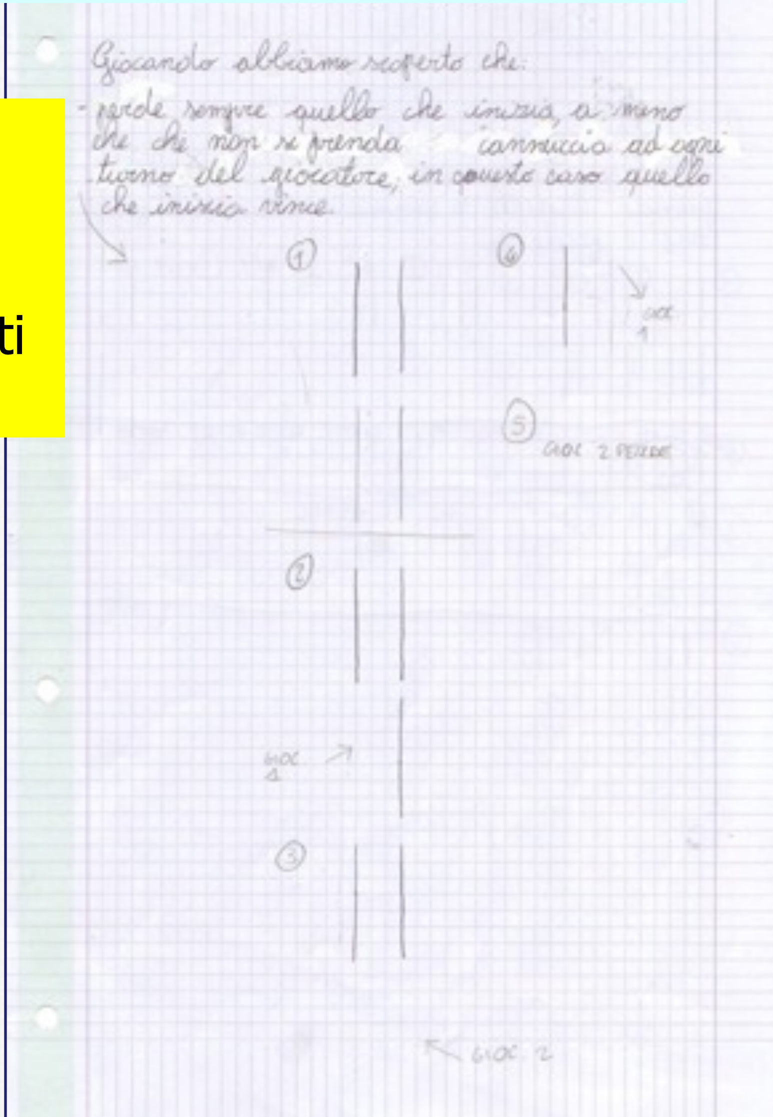
IL GIOCATORE 1 PRENDE L'ULTIMA CANNUCCIA QUINDI PERDE

GIOCATORE 1 INIZIA

B

Quadro di Razionalità Empirico - frequentista

L'alunno produce una giustificazione basandosi su un'analisi immediata di fatti che si ripetono.
La giustificazione data fa riferimento a fatti empirici e non alla teoria.

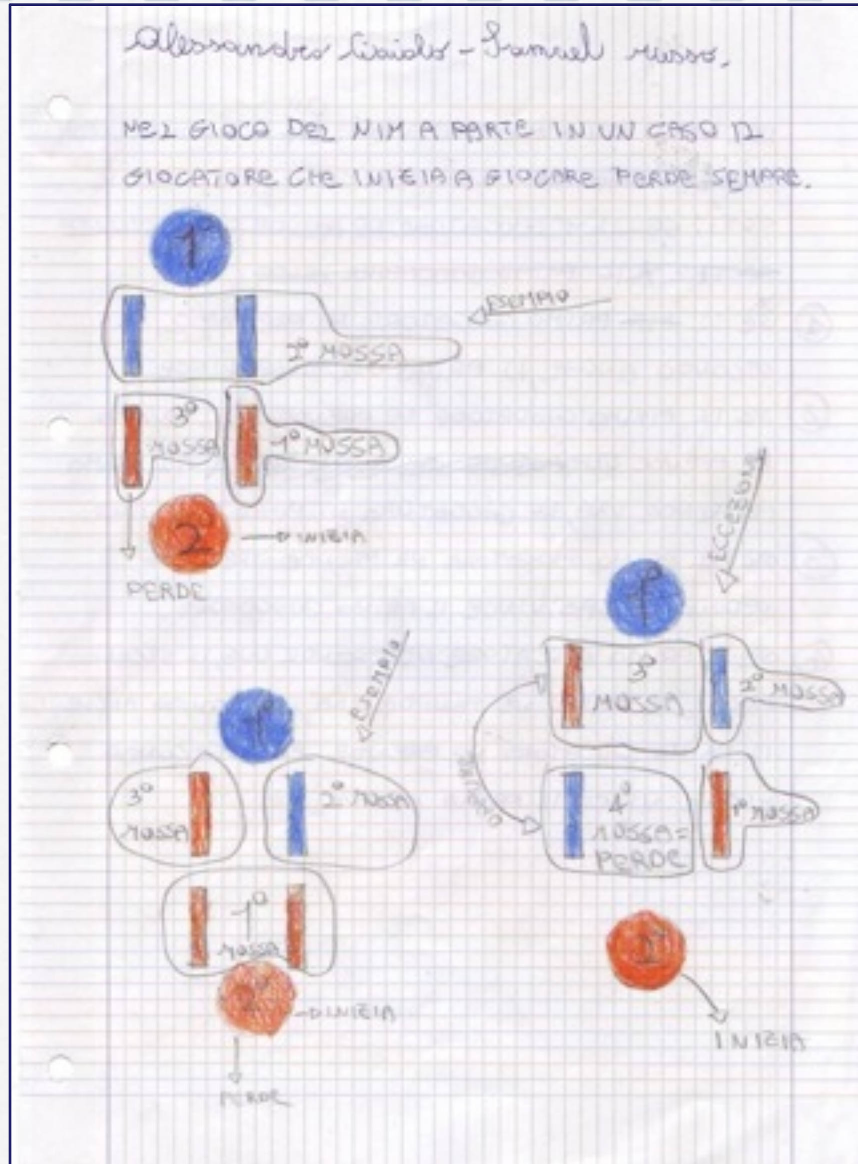


Gruppo 5: "Giocando abbiamo scoperto che: perde sempre quello che inizia, a meno che non si prenda una cannuccia ad ogni turno del giocatore, in questo caso quello che inizia vince"

B

Gruppo 7:

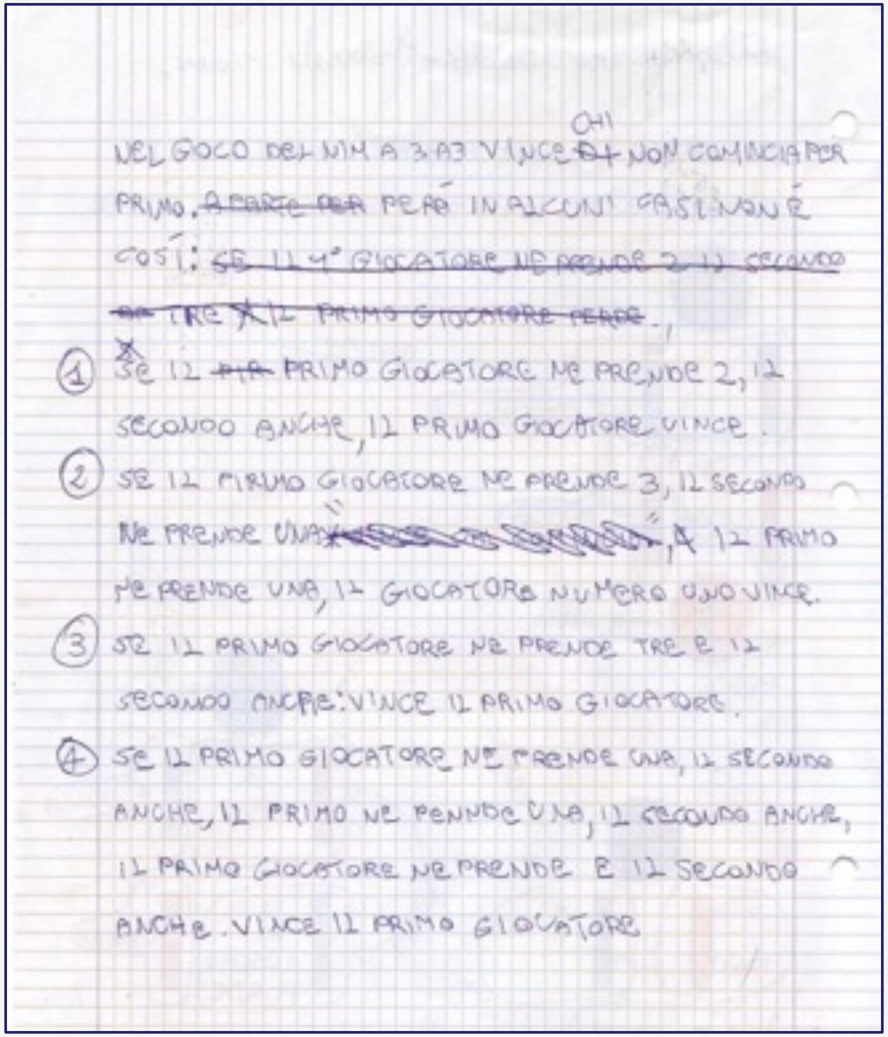
"Nel gioco del Nim a parte in un caso il giocatore che inizia a giocare perde sempre"



B

Gruppo 7:

“Nel gioco del nim a 3 a 3 vince chi non comincia per primo. Però in alcuni casi non è così: ….. (elenca i casi*)*


NEL GIOCO DEL NIM A 3 A3 VINCE ~~DI~~ CHI NON COMINCIA PER PRIMO. ~~A PARTE PER~~ PERÒ IN ALCUNI CASI NON È COSÌ: ~~SE IL 1° GIOCATORE NE PRENDE 2 IL SECONDO NE TRE IL PRIMO GIOCATORE PERDE~~.

1. SE IL ~~PR~~ PRIMO GIOCATORE NE PRENDE 2, IL SECONDO ANCHE, IL PRIMO GIOCATORE VINCE.
2. SE IL PRIMO GIOCATORE NE PRENDE 3, IL SECONDO NE PRENDE UNA, ~~[illegible]~~, IL PRIMO NE PRENDE UNA, IL GIOCATORE NUMERO UNO VINCE.
3. SE IL PRIMO GIOCATORE NE PRENDE TRE E IL SECONDO ANCHE: VINCE IL PRIMO GIOCATORE.
4. SE IL PRIMO GIOCATORE NE PRENDE UNA, IL SECONDO ANCHE, IL PRIMO NE PRENDE UNA, IL SECONDO ANCHE, IL PRIMO GIOCATORE NE PRENDE E IL SECONDO ANCHE. VINCE IL PRIMO GIOCATORE

Quadro di Razionalità
Empirico - frequentista

D

L'alunno produce un'affermazione e la giustifica facendo riferimento in modo esplicito alla frequenza dei fatti osservati

Gruppo 6:

"Giocando al Nim con 1,2,3 cannucce, abbiamo visto che è stato abbastanza facile: chi iniziava per primo poteva sia vincere sia perdere, perché la probabilità di vincere e perdere erano uguali"


FEDERICO E THOMAS

NIM 1-2-3

GIOCANDO AL NIM CON 1,2,3 CANNUCCE, ABBIAMO VISTO CHE È STATO ABBASTANZA FACILE CHI INIZIAVA PER PRIMO POTEVA SIA VINCERE E SIA PERDERE, ~~MA C'ERANO PIÙ PROBABILITÀ~~ PERCHÉ LE PROBABILITÀ DI VINCERE O PERDERE ERANO UGUALI.

1 GIOCATORE

2 GIOCATORE

VINCERE:

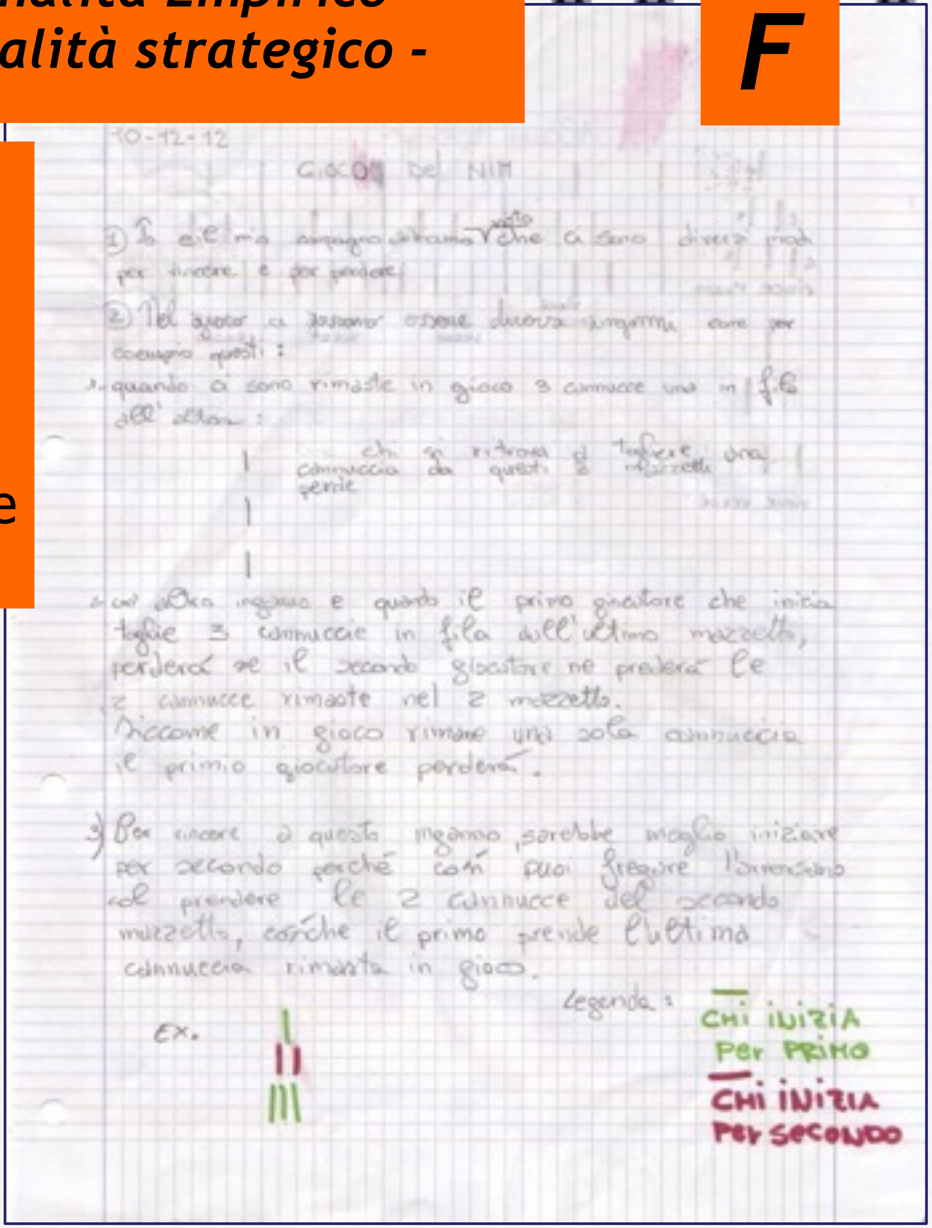
PERDERE:

Transizione tra Quadro di Razionalità Empirico - frequentista e Quadro di Razionalità strategico - teorica

F

L’alunno descrive una possibile strategia vincente. Nel farlo si basa solo su fatti localmente verificati, non elabora una teoria valida per tutte le situazioni di gioco, o per lo meno non concepisce la sua teoria come se fosse tale.

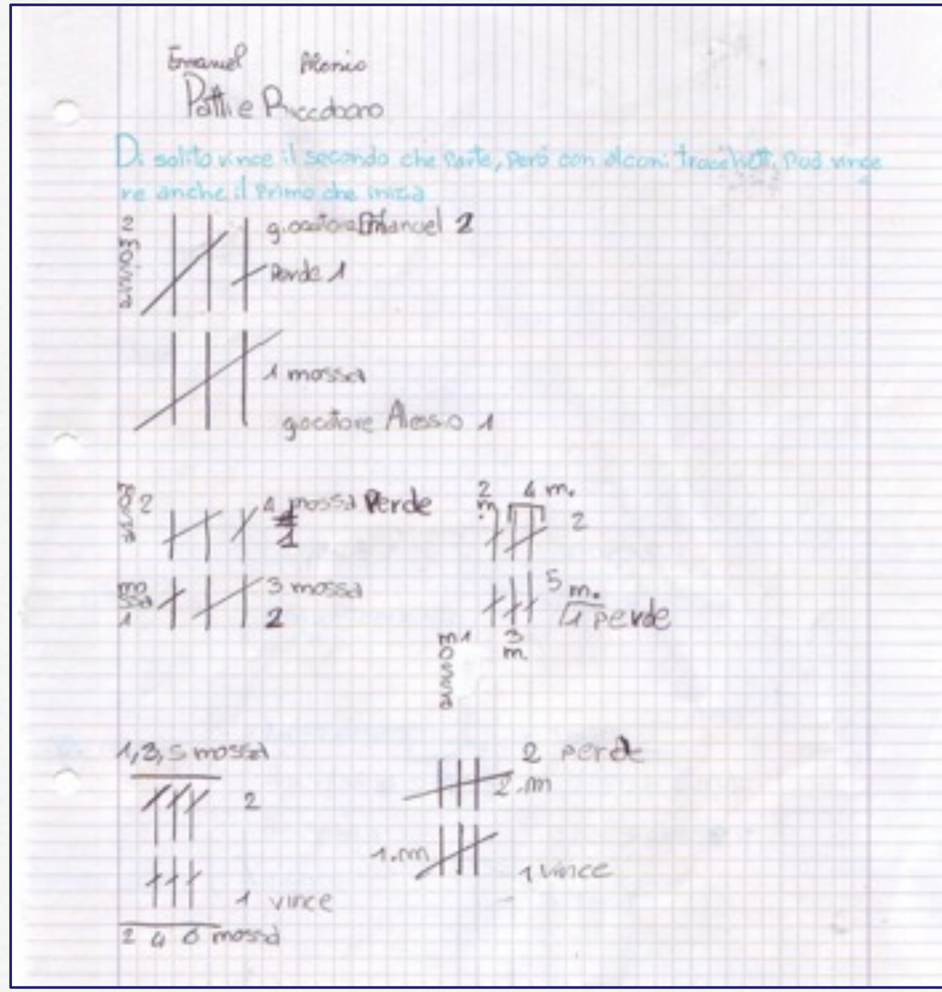
Gruppo 3: “nel gioco possono esserci diversi inganni come per esempio questi:…..”



F

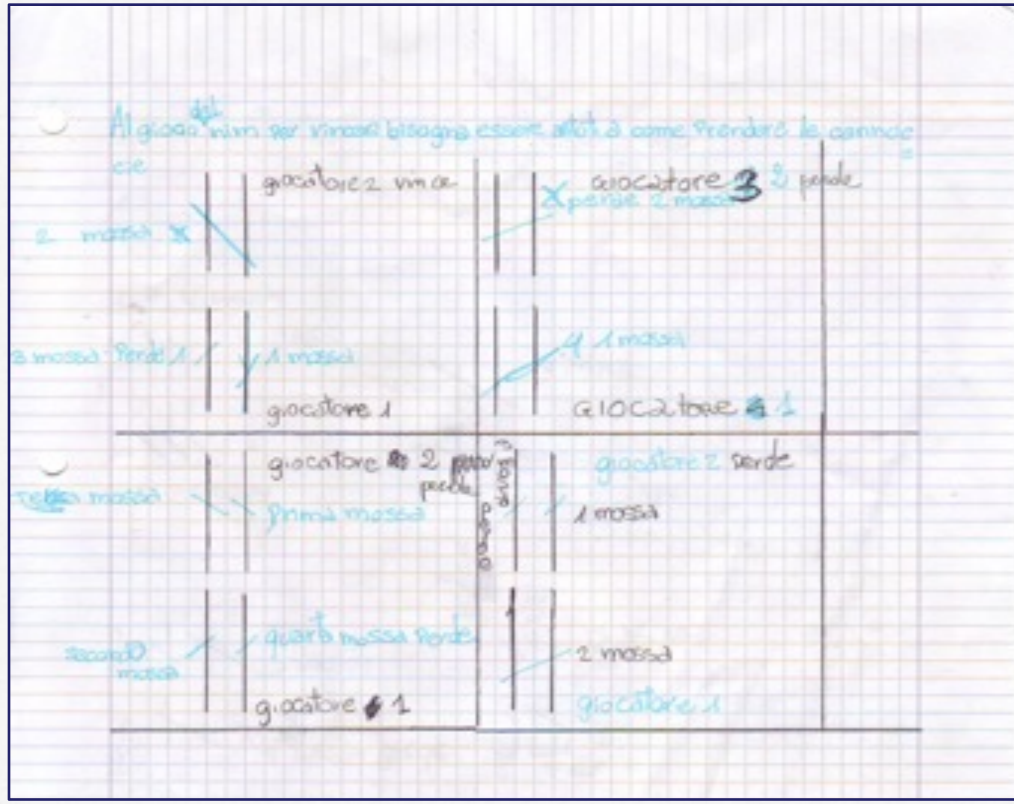
Gruppo 2:

"Di solito vince il secondo che inizia, però con alcuni trucchetti può vincere anche il primo"



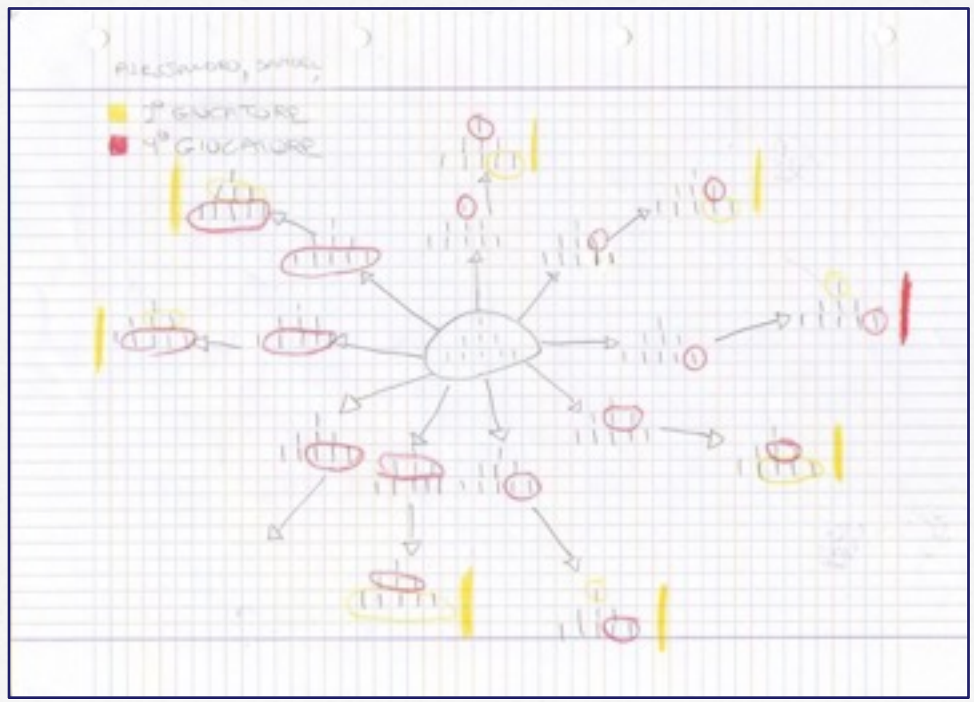
F

“Al gioco del Nim per vincere bisogna essere astuti a come prendere le cannucce.”



G

L'alunno utilizza forme di rappresentazione (schemi, rappresentazioni iconiche, gestuali) che gli consentono di tenere sotto controllo le mosse dell'avversario e di costruire su questo schemi ragionamenti localmente validi pur senza giungere ad una generalizzazione



Grande torneo!!

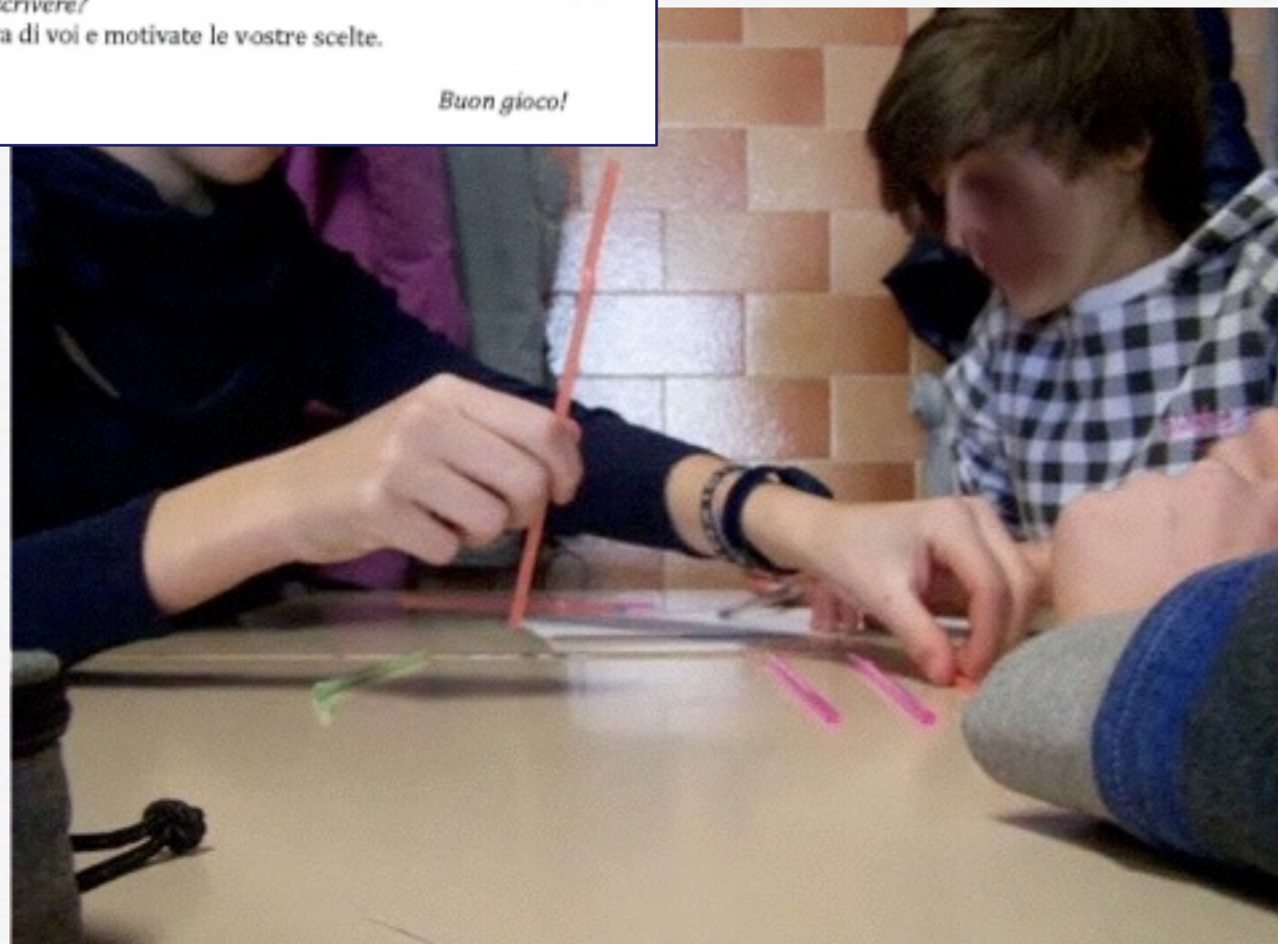
Scheda 1 – Gioco 3

Regole del gioco

Si gioca dividendo le cannucce in due mucchi, uno con tre cannucce e l'altro con cinque.
A turno i giocatori possono togliere un numero di cannucce a scelta da uno dei due mucchi, l'importante è che non si salti il turno, cioè si tolga almeno una cannuccia, e che si tolgano le cannucce da un solo mucchio.
Perde chi toglie l'ultima cannuccia dal tavolo.

Qual è la strategia vincente? Come si può descrivere?
Scrivete la risposta dopo averne discusso tra di voi e motivate le vostre scelte.

Buon gioco!

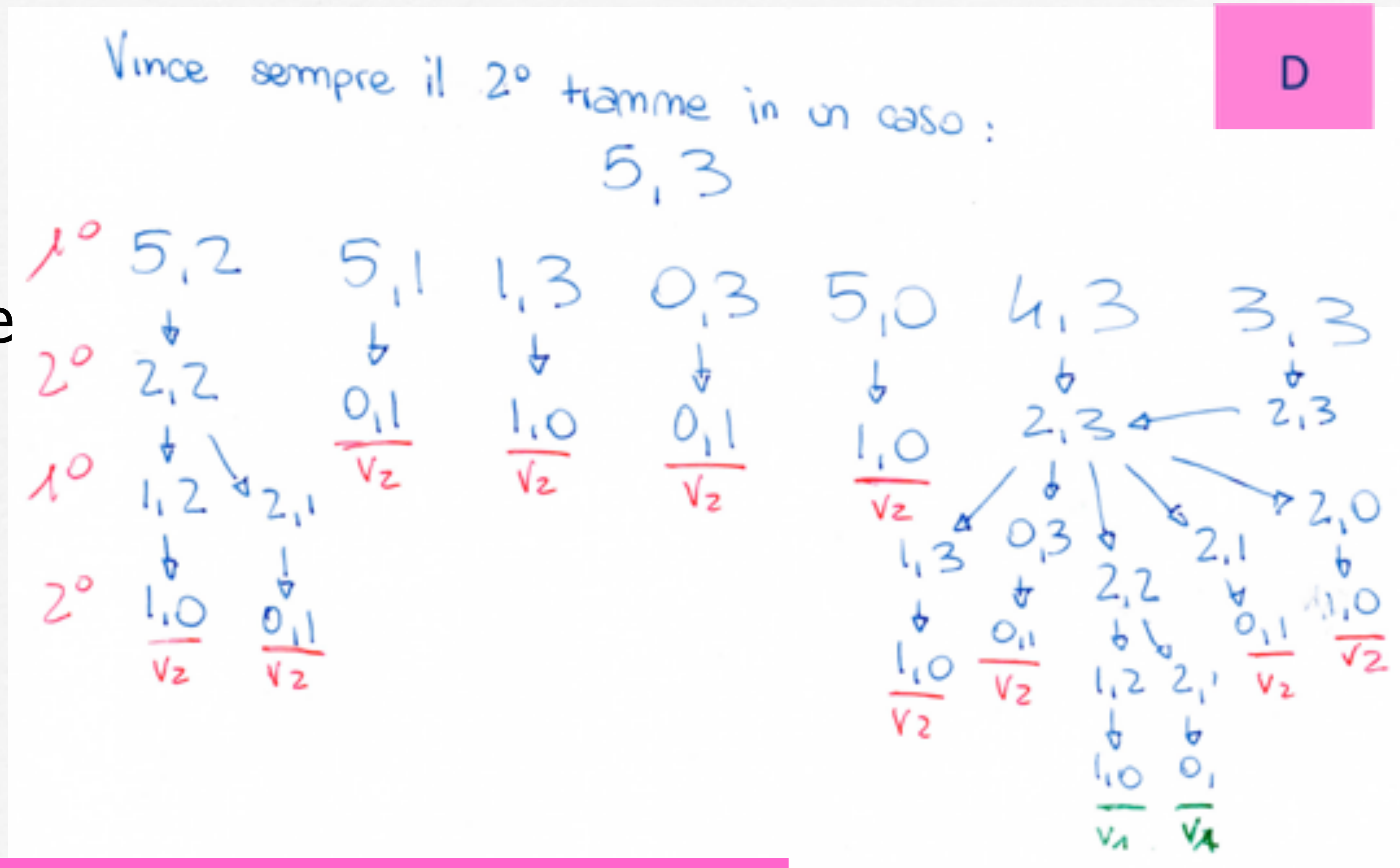


2° Superiore

Quadro di Razionalità Empirico - frequentista

D

Gruppo 1.
"Vince sempre il 2° tranne in un caso".



L'alunno produce un'affermazione e la giustifica basandosi su un'analisi fenomenologica e locale che fa riferimento in modo esplicito alla frequenza dei fatti

D

Quadro di Razionalità Empirico - frequentista

L'alunno produce un'affermazione e la giustifica basandosi su un'analisi fenomenologica e locale che fa riferimento in modo esplicito alla frequenza dei fatti

Gruppo 2. La strategia vincente è cercare di impedire all'altro di lasciare una cannuccia in ogni gruppo dopo il suo turno.
Abbiamo iniziato a fare il diagramma ad albero, ma ci siamo rese conto che le probabilità erano troppe.
Abbiamo anche notato che vince sempre il secondo giocatore

Mosse di gioco più probabili

GRUPPO 2

- 5;3 → 5;2 → 2;2 → 2;1 → 0;1 → V2
- 1;3 → 1;0 → V2
- 4;3 → 3;3 → 3;2 → 2;2 → 2;1 → 0;1 → V2

× La strategia vincente è cercare di impedire all'altro di lasciare una cannuccia in ogni gruppo dopo il suo turno.

× Abbiamo provato anche a fare il diagramma ad albero, ma ci siamo rese conto che le probabilità erano troppe

× Abbiamo anche notato che vince sempre il secondo giocatore

Transizione tra Quadro di Razionalità Empirico – frequentista e Quadro di Razionalità strategico - teorica

F

Gruppo 3. "Basandosi su delle prove, abbiamo visto che il giocatore 2 vince sempre, amenochè non sia distratto. Anche in questo caso, la strategia vincente è iniziare per secondi"

L'alunno descrive una possibile strategia vincente perché ha preso coscienza del fatto che esiste, ma si basa solo su fatti localmente verificati, non elabora (perché non cerca di farlo, non ne sente la necessità) una teoria valida per tutte le situazioni di gioco, o per lo meno non concepisce la sua teoria come se fosse tale.

• Basandosi su delle prove, abbiamo visto che il giocatore 2 vince sempre, amenoche' non sia distratto.

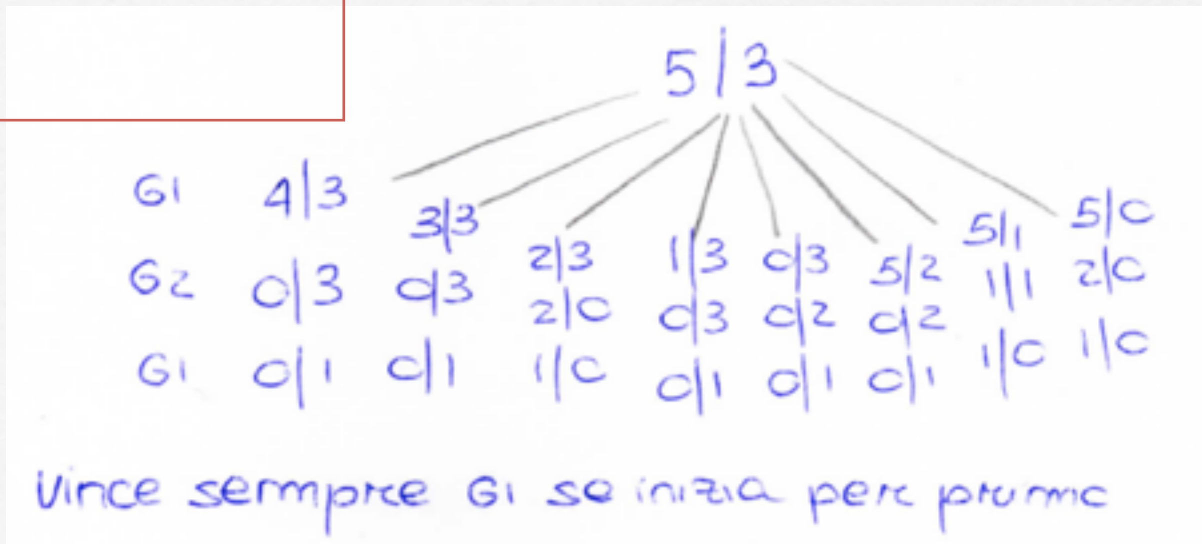
→ Anche in questo caso, la strategia vincente e' iniziare per secondi e utilizzare la seguente strategia:

G

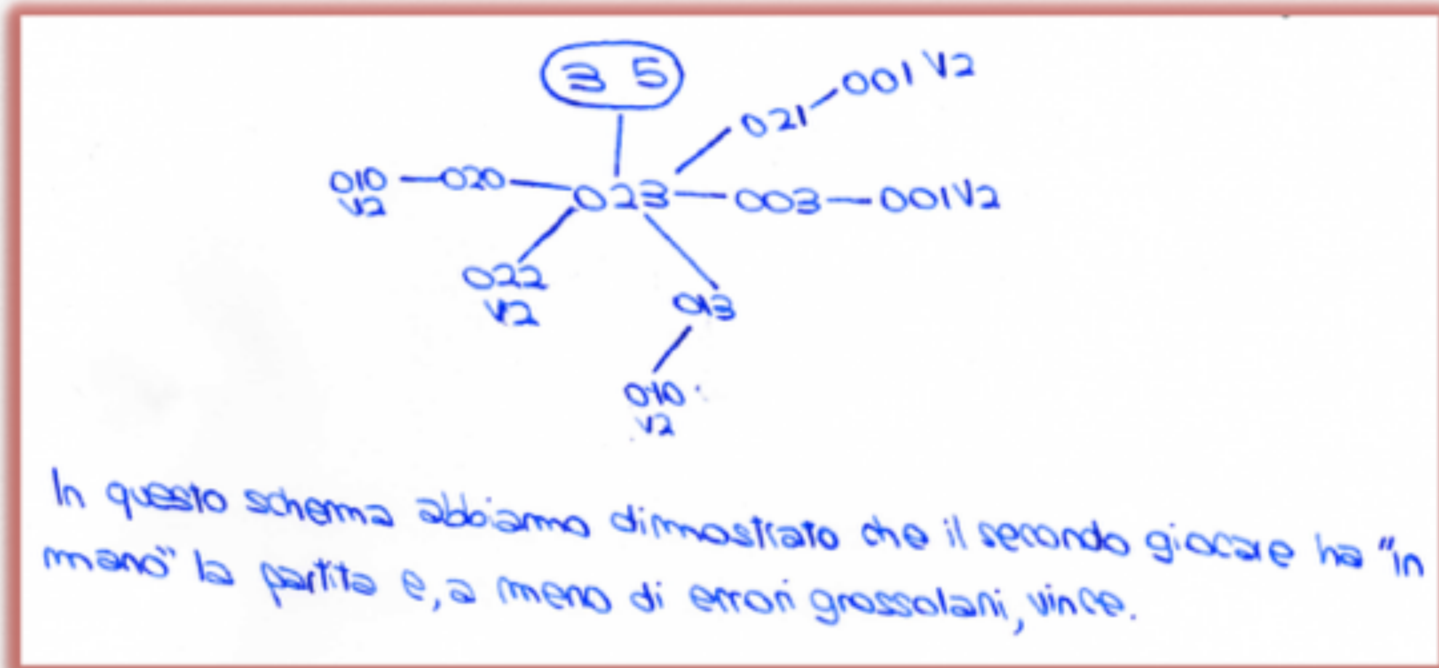
Usano il grafo ad albero (non sempre in maniera corretta) per giustificare o per giungere ad una conclusione. Il riferimento al grafo però è implicito.

L'alunno utilizza forme di rappresentazione (schemi, rappresentazioni iconiche, gestuali) per (che gli consentono di) tenere sotto controllo le mosse dell'avversario e (di costruire) su questo schemi costruisce ragionamenti localmente validi pur senza giungere ad una generalizzazione. È una fase analitica che potrebbe condurre alla generalizzazione.

Gruppo 4. Vince sempre G1 se inizia per primo

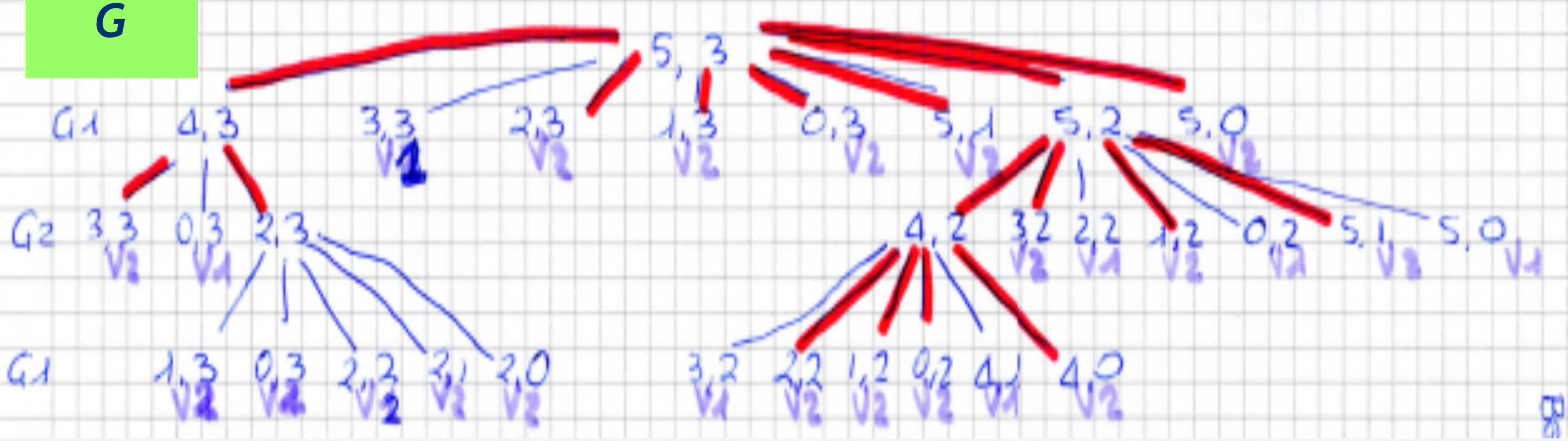


G



Gruppo 5. In questo schema abbiamo dimostrato che il secondo giocatore ha in mano la partita e, a meno di errori grossolani, vince”

G

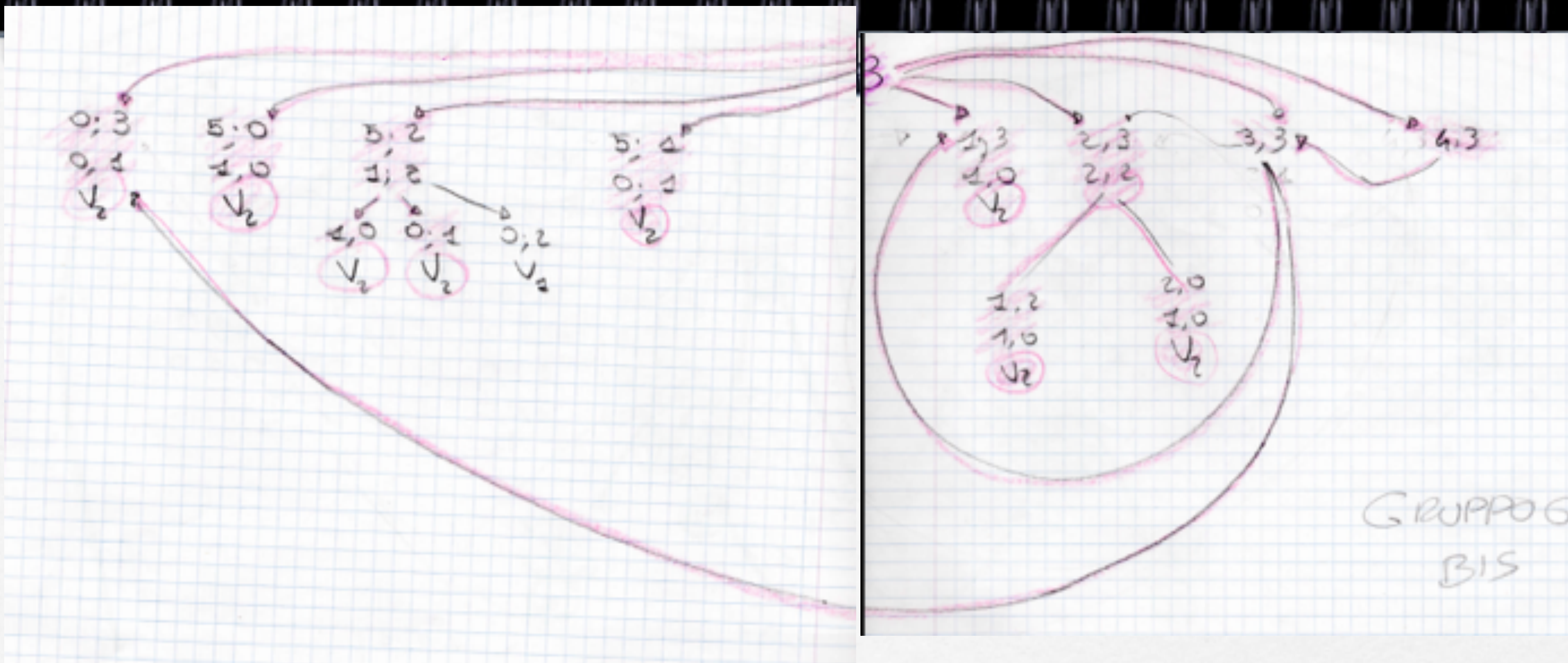


SCHEDA 1 - GIOCO 3

La strategia è iniziare sempre per secondi perché si vince di più.

L'unica mossa per contrastare il secondo

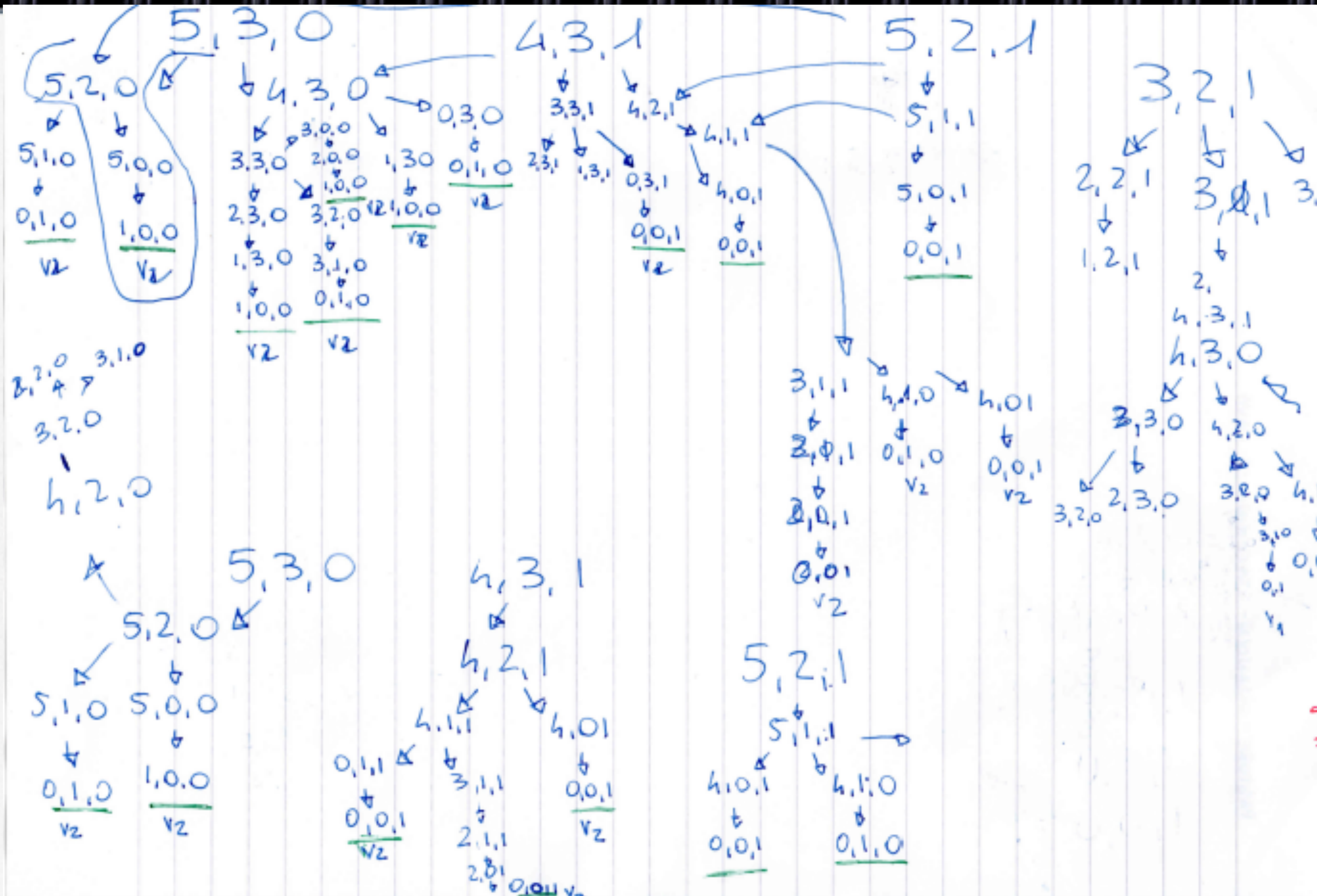
Gruppo 7. "La strategia è iniziare sempre per secondi, perché si vince di più"



V_2 = sicuramente vince se conosce lo schema di gioco per la situazione in cui si trova più vantaggioso, se gioca x vincere
V_1 = può vincere se il giocatore 2 è distratto o commette errori grossolani!

V_2 = vince giocatore 2
V_1 = vince giocatore 1

V2 = sicuramente vince se conosce lo schema di gioco per la situazione in cui si trova più vantaggioso, se gioca per vincere.V1 = può vincere se il giocatore 2 è distratto o commette errori grossolani.



5,3,0
4,3,1
5,2,1
3,2,1
5,2,0
4,3,0
0,3,0
3,3,1
4,2,1
4,1,1
5,1,1
5,1,0
5,0,0
0,1,0
1,0,0
V2
3,3,0
2,3,0
1,3,0
3,2,0
3,1,0
0,0,1
5,0,1
2,2,1
1,2,1
4,3,0
3,1,1
4,1,0
4,0,1
4,2,0
2,3,0

La strategia vincente è, quindi, iniziare per secondo!
In questo schema abbiamo dimostrato le varie possibilità di vittoria per il secondo giocatore.

Grafici per spiegare, per capire, per parlare, …

Discussione

Ins.: sei più sicura o sei sicura? Perché sono due cose diverse.
Virginia: sicura perché comunque tra le varie strategie se hai il grafico a mente sai che comunque la strada è quella e non puoi far altro che vincere
Sara1: no... È che la strategia dovrebbe essere fatta in modo che qualunque cosa faccia l'avversario io riesca a vincere... Qualsiasi mossa lui faccia io posso contrastarlo.

GIOCO	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Gioco 1	gr1 gr2 gr3 gr4 gr6 gr8						Tutti i gruppi utilizzano due colori e non il diagramma ad albero in modo autonomo	
Gioco2		gr5 gr7		gr6				
Gioco 3		gr4		gr8		gr2 gr3 gr4 gr7		gr3
Gioco 4								gr4

Gioco	B	C	D	E	F	G	H
Gioco 1	Gr 1 Gr 5	Gr 6	Gr 2		Gr 4	Gr 3	Gr 7
Gioco 2	Gr 1 Gr 5 Gr 6	Gr2 Gr 4	Gr 2	Gr 7	Gr 3		
Gioco 3			Gr 1 Gr 2		Gr 3	Gr 4 Gr 5 Gr 6? Gr 7	
Gioco 4			Gr 2		Gr 3 Gr 4	Gr 1 Gr 5 Gr 6	Gr 7?

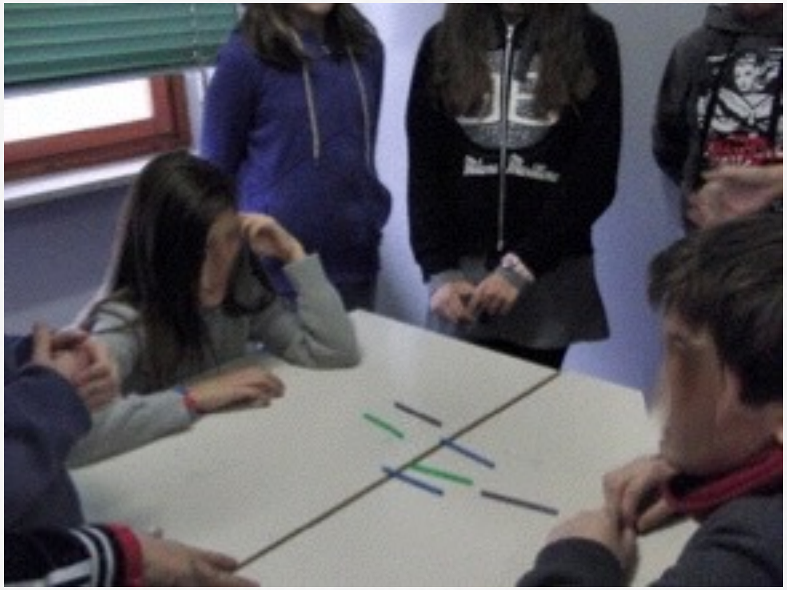
Alcune domande per riflettere ...

1^secondaria di I grado

- Il gioco ti è sembrato facile?
- Hai giocato a caso?
- Hai pensato a qualche mossa prima di giocare o mentre giocavi?
- Credevi di vincere o di perdere?
- Hai capito perché hai vinto/perso?
- Hai avuto l'impressione che il tuo avversario abbia pensato per giocare? O ha giocato a caso? Da che cosa te ne sei accorto?
- Dopo aver giocato hai commentato la partita con il tuo avversario?

“ …..ogni mossa che facevo ci pensavo bene, poi alcune partite sapevo già quali mosse fare prima che iniziava, altre no. Giocando con gli altri pensavo di vincere, infatti vincevo, ma quando sono arrivata contro Federico sapevo già di aver perso, infatti ho poi perso contro di lui, ho perso perché mi faceva degli inganni, quindi ero sicura di aver perso.

Ho avuto alcuni avversari che facevano un po’ a caso, me ne sono accorta perché non facevano mosse da esperti, mentre altri vedevo che ci pensavano bene prima di fare una mossa”



“Mentre giocavo non pensavo di giocare a caso perché infatti ragionavo un bel po’, ance solo per eseguire delle piccole mosse. Mentre eseguivamo questi giochi divertenti, ho notato anche dei piccoli inganni, soprattutto nel Nim 1-2-3. Li ho notati perché nel Nim 2-2 chi inizia per primo perde quasi sempre, invece nel Nim 1-2-3 si può arrivare a formare una sola riga come tipo un Nim 1-1-1, in questo caso chi ha iniziato per primo perde.

Ma a dire il vero quando vincevo o perdevo, non ho capito tanto il perché, ma forse perché ero un po’ distratto.

Anche il mio avversario, mentre giocava, sparava a caso perché me ne sono accorto che quando si arrivava al Nim 3-3 io ho preso due cannucce e lui, al posto di prenderne tre, cosicché io perdo, ne prende 2 così lui perde.”

"Ripensando al lavoro fatto sui giochi, esplicitate quali sono stati, secondo voi, i cambiamenti nel vostro modo di pensare, quali sono stati - se ci sono stati - i cambiamenti nei vostri ragionamenti e se vi aiuta, indicate quali strumenti vi sono stati utili per questi cambiamenti."

2^ superiore

(gruppo 2) All'inizio ci è andato un attimo a capire come potevamo ragionare, poi abbiamo cominciato ad usare le cannucce e a scrivere numeri sui fogli.

Dopo che imparammo a usare i diagrammi ad albero (o almeno ci proviamo) cominciammo ad usare essi. Il problema fu che quando il gioco cominciò a complicarsi il grafico diventava troppo complicato, cos' cominciammo a riusare le cannucce, a usare le mani e scrivendo sui fogli, ma non più numeri ma ragionamenti. Spesso non andavamo d'accordo sul metodo e sugli strumenti da usare, per questo ne usavamo molti insieme.

(gruppo 6) Il mio modo di lavorare sui giochi è cambiato, infatti all'inizio passavo più tempo a giocare e poi traevamo (io e il mio gruppo) le conclusioni. Col passare del tempo, sempre continuando a giocare, ma molto di meno, ho usato soprattutto gli schemi di gioco precedenti, i diagrammi ad albero cercando di trarre le conclusioni il prima possibili, senza "perdere" tempo a giocare. Questo perché, conoscendo già le situazioni prima analizzate non stavamo a rianalizzarle o a vedere il loro svolgimento perché lo sapevamo già.
Mi sono stati molto utili le cannucce, gli schemi precedenti, il diagramma ad albero, i compagni.

(gruppo 4) All'inizio facevo più fatica a capire di cosa si stava parlando, perché non riuscivo ad immaginarmi bene le situazioni, ciò che sarebbe successo nel gioco.
Per riuscire a capire mi hanno aiutato i miei compagni di gruppo e il provare a giocare. Il grafico ad albero è stata la cosa più utile perché mi ha permesso di visualizzare contemporaneamente tutte le mosse del gioco (nei giochi con un numero minore di cannucce) e quindi ad immaginare meglio gli sviluppi successivi. Capendo bene le situazioni più semplici ho iniziato a semplificare quelle più complesse per ritrovare le prime per muovermi con più sicurezza su qualcosa che conoscevo già

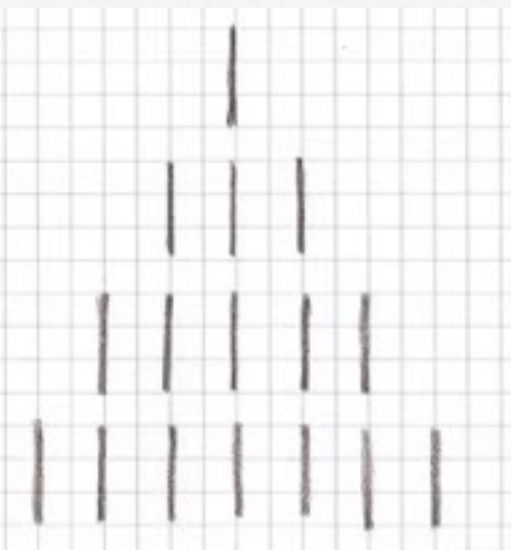
Ascolto, cerco di capire, gioco

Penso, ricordo, riconosco, collego

Ho capito! Allora so come vincere!

Un possibile passo ulteriore…

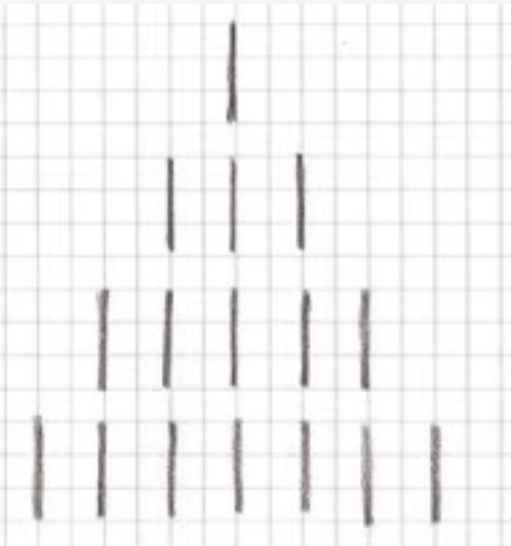
Modellizzazione della strategia vincente del NIM con il sistema binario



1
3
5
7

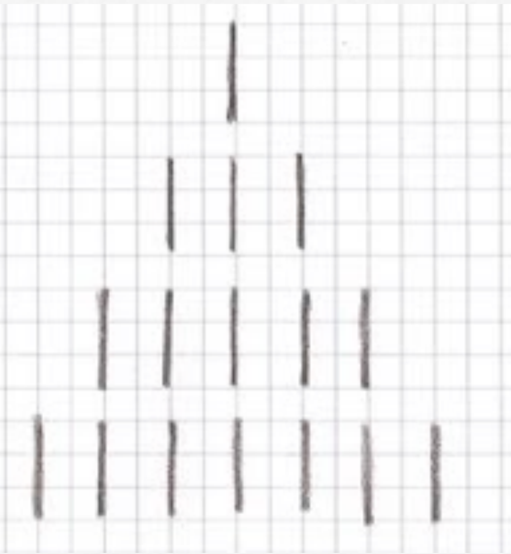
Rappresentare il numero di oggetti presenti in ogni riga secondo il sistema posizionale binario.

1
11
101
111



effettuare una somma in mod2 (spesso descritta come somma Nim)

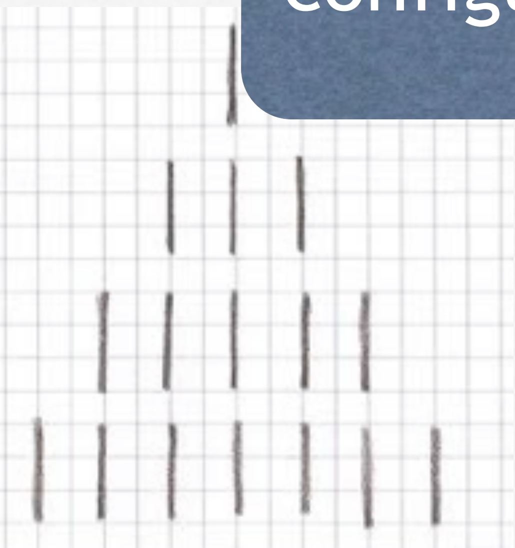
$$
\begin{array}{r}
1 \\
11 \\
101 \\
111 \\
\hline
000
\end{array}
$$



1
11
101
111
———
000

Se il risultato sarà una fila di soli 0 la configurazione è definita "stabile".

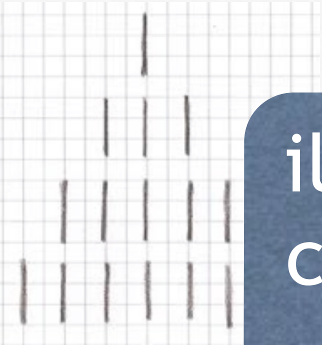
il giocatore che gioca a partire da una configurazione stabile, perde sempre.



Eccezione: file dispari di 1 elemento

1
11
101
111
000

Se il risultato sarà una fila di soli 0 la configurazione è definita “stabile”. Altrimenti è detta “instabile”.

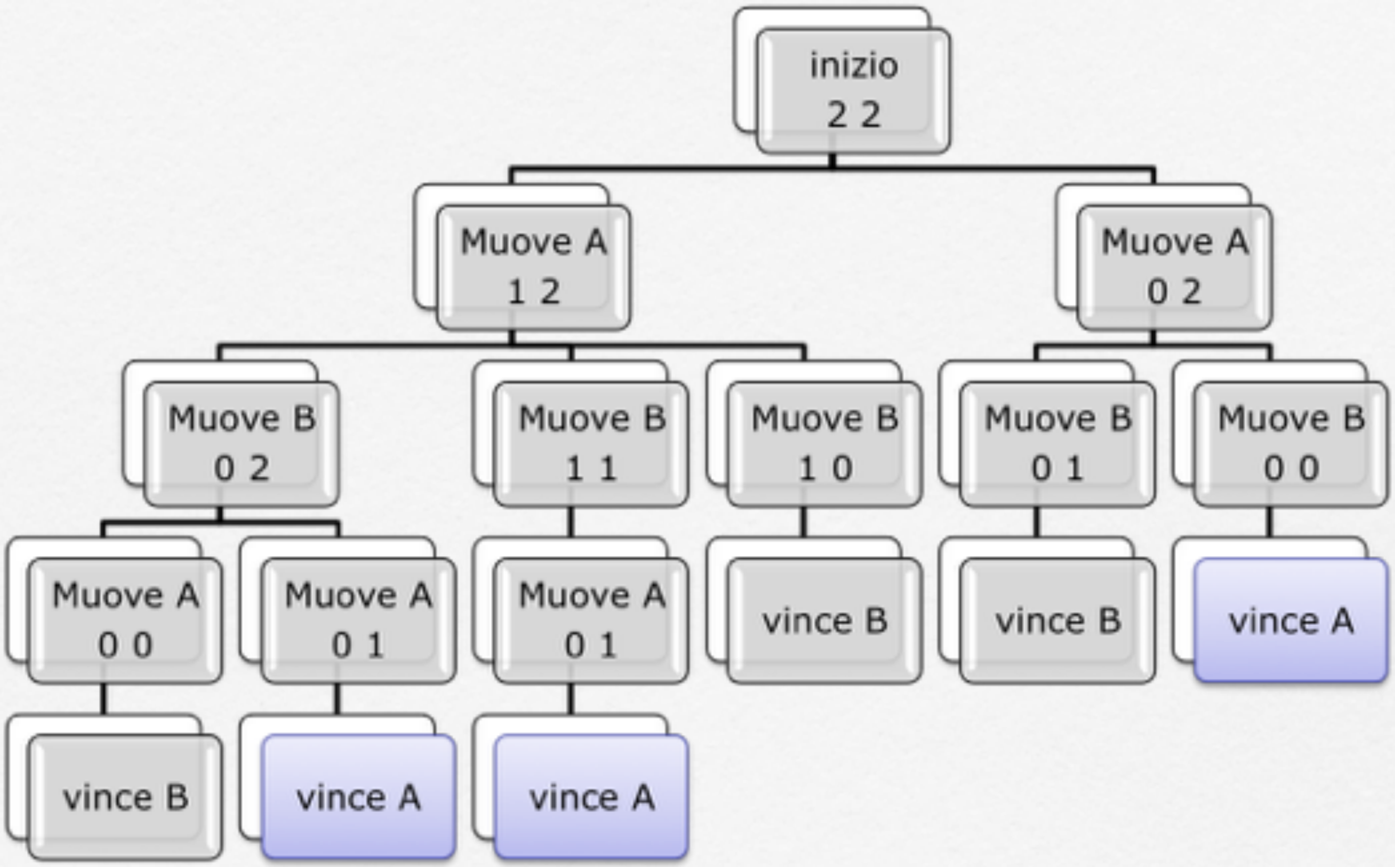


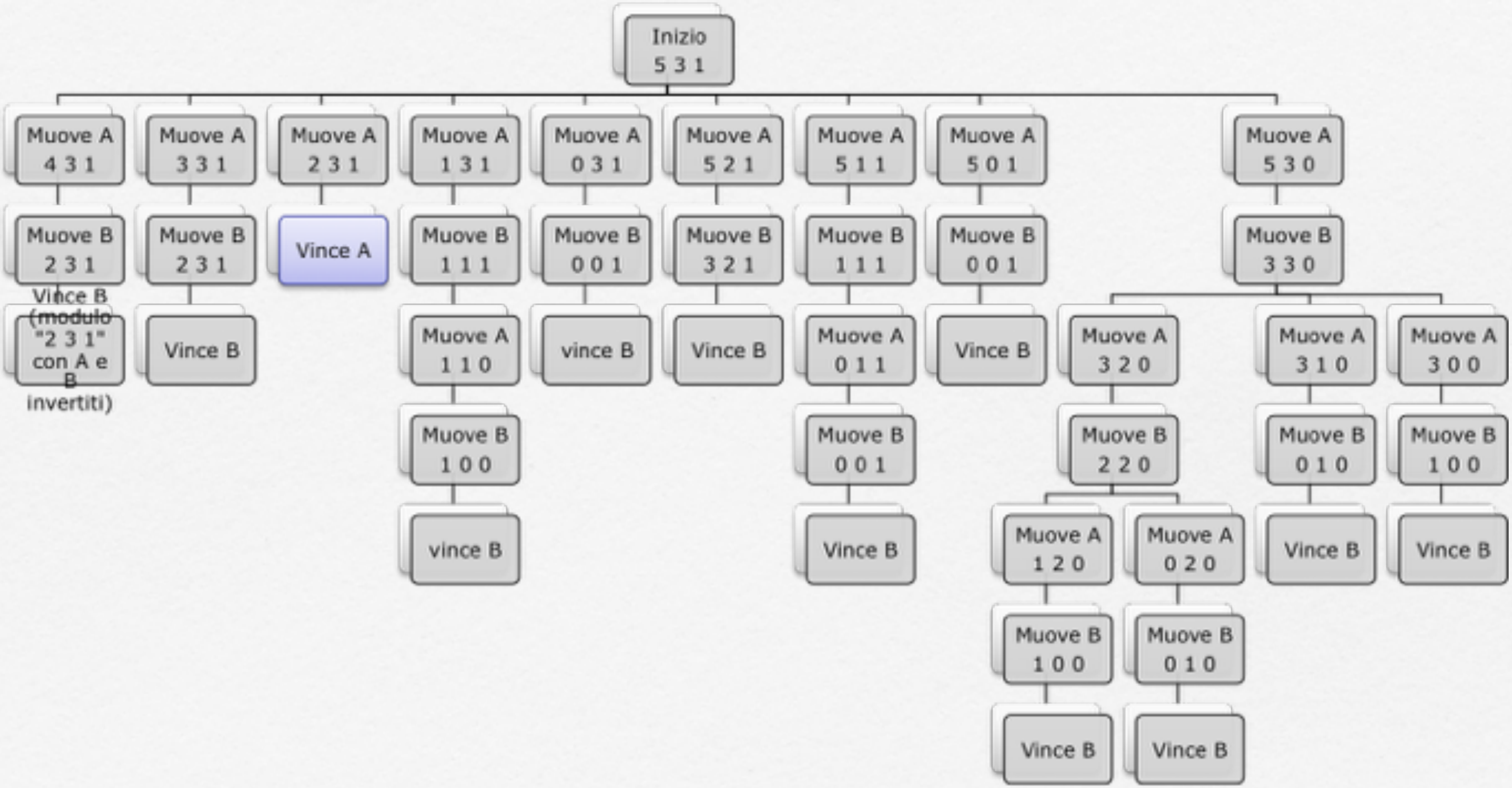
il giocatore che gioca a partire da una configurazione stabile, perde sempre.

Eccezione: file dispari di 1 elemento

il giocatore che gioca per primo e gioca il resto della divisione, vince sempre.

Eccezione: il numero target è multiplo di…


inizio
2 2
Muove A
1 2
Muove A
0 2
Muove B
0 2
Muove B
1 1
Muove B
1 0
Muove B
0 1
Muove B
0 0
Muove A
0 0
Muove A
0 1
Muove A
0 1
vince B
vince B
vince A
vince B
vince A
vince A



Inizio
5 3 1
Muove A
4 3 1
Muove B
2 3 1
Vince B (modulo "2 3 1" con A e B invertiti)
Muove A
3 3 1
Muove B
2 3 1
Vince B
Muove A
2 3 1
Vince A
Muove A
1 3 1
Muove B
1 1 1
Muove A
1 1 0
Muove B
1 0 0
vince B
Muove A
0 3 1
Muove B
0 0 1
vince B
Muove A
5 2 1
Muove B
3 2 1
Vince B
Muove A
5 1 1
Muove B
1 1 1
Muove A
0 1 1
Muove B
0 0 1
Vince B
Muove A
5 0 1
Muove B
0 0 1
Vince B
Muove A
5 3 0
Muove B
3 3 0
Muove A
3 2 0
Muove B
2 2 0
Muove A
1 2 0
Muove B
1 0 0
Vince B
Muove A
0 2 0
Muove B
0 1 0
Vince B
Muove A
3 1 0
Muove B
0 1 0
Vince B
Muove A
3 0 0
Muove B
1 0 0
Vince B

Riferimenti

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process. Relime Vol Especial, pp. 267-299.
- Arzarello, F., Paola, D. Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 70(2), 97-109.
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M.M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds.), Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 179-204), Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht/ Boston/London: Kluwer.
- Delucchi, E., Gaiffi, G., Pernazza, L., (2012). Giochi e percorsi matematici. Springer. Milano.
- Simon, H.A. (1984). La ragione nelle vicende umane. Bologna: Il Mulino. Ed originale del 1983: Reason in Human Affairs, Stanford, California: Stanford University Press.

Grazie per l'attenzione

silvia.beltramino@gmail.com

elisabetta.vio@gmail.com