



UNIVERSITÀ DELLA VALLE D'AOSTA
UNIVERSITÉ DE LA VALLÉE D'AOSTE

Dipartimento di Scienze Umane e Sociali
Département des Sciences Humaines et Sociales

Università di Modena
e Reggio Emilia



Comprendere aspetti dei DSA per migliorare la didattica della matematica per tutti

Anna Baccaglini-Frank* & Elisabetta Robotti**

*Università di Modena e Reggio Emilia

**Università della Valle d'Aosta

Premesso che...

in matematica TUTTI hanno
difficoltà, ma
solo alcuni le superano...



ci dobbiamo chiedere *perché*

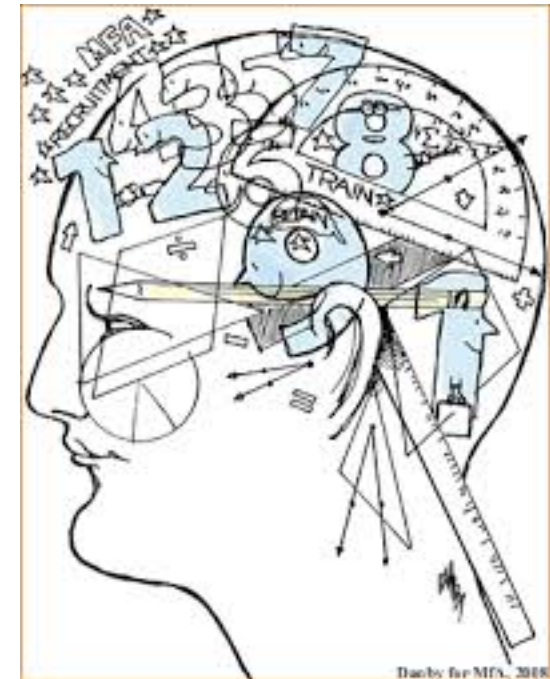
Fonti principali di origine delle difficoltà

- Fattori epistemologici
- Fattori affettivi
- Fattori cognitivi
- Fattori didattici



Fonti principali di origine delle difficoltà

- Fattori epistemologici
- Fattori affettivi
- Fattori cognitivi
- Fattori didattici



Neuroni e numeri

Attraverso lo studio e l'osservazione di persone che hanno subito lesioni cerebrali è stato scoperto che il cervello è suddiviso in aree altamente specializzate, connesse tra di loro da numerose vie di trasferimento.

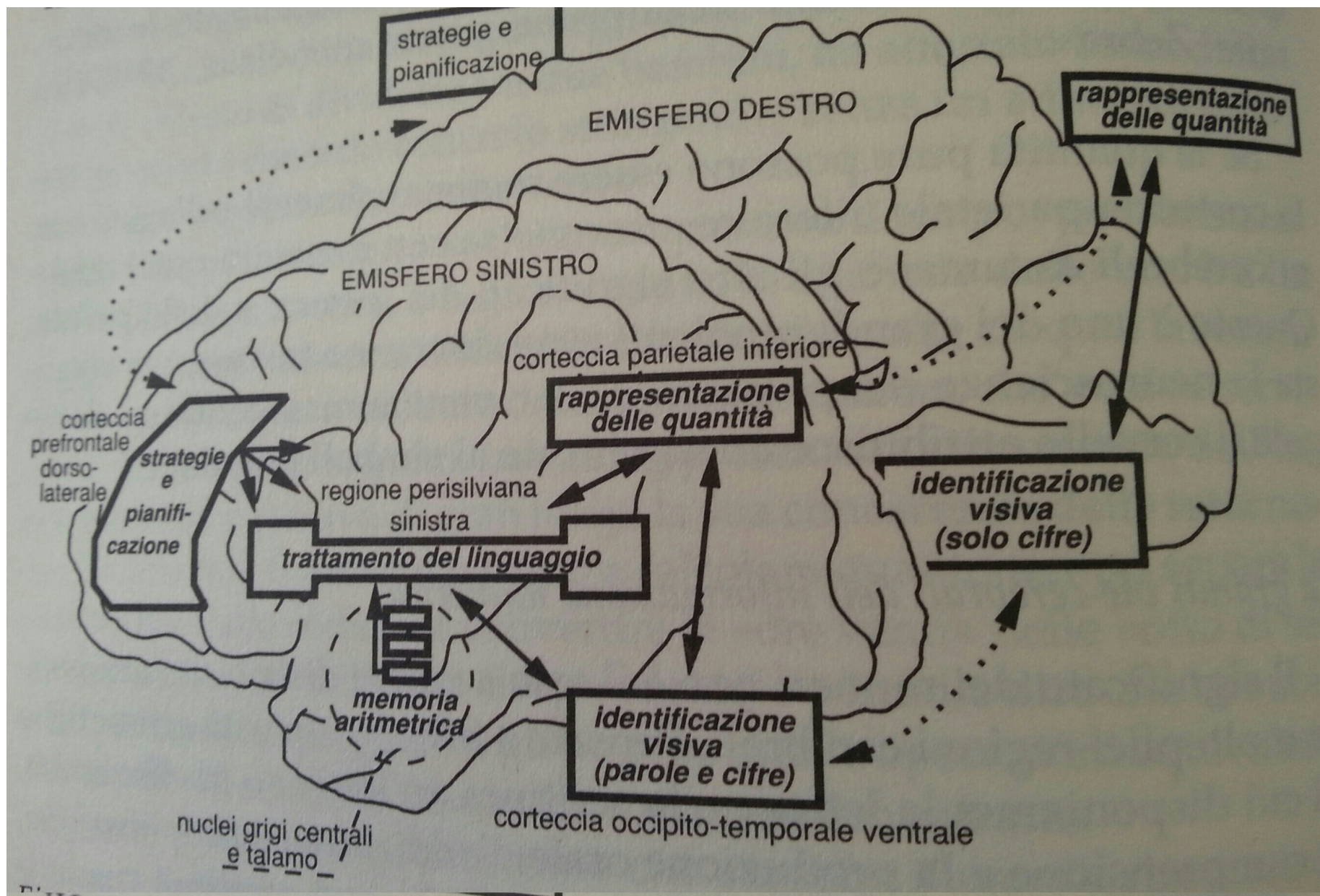
Indipendenza dei circuiti di elaborazione dei numeri

Indipendenza fra numero e linguaggio

Indipendenza fra numero e memoria

Indipendenza fra numero e ragionamento





Neuroni e numeri

Attraverso lo studio e l'osservazione di persone che hanno subito lesioni cerebrali è stato scoperto che il cervello è suddiviso in aree altamente specializzate, connesse tra di loro da numerose vie di trasferimento.

A seconda del compito che vogliamo intraprendere, i numeri che manipoliamo utilizzano diverse larghe vie cerebrali dell'informazione.

I circuiti specializzati nelle varie capacità conoscitive, come lettura, scrittura, calcolo, ecc... sono innati o no?

La lettura e il calcolo esistono soltanto da qualche migliaio di anni, un periodo troppo breve perché l'evoluzione vi abbia geneticamente predisposto alcuni circuiti neurali.

Queste capacità conoscitive apparse di recente devono dunque avere invaso circuiti inizialmente destinati ad altro uso.

Se ne appropriano talvolta in modo così pervasivo da divenirne l'unica funzione.

(...)

L'apprendimento non crea mai circuiti radicalmente nuovi, ma seleziona, raffina e specializza circuiti preesistenti, fino a conferir loro un significato e una funzione molto diversa da quelle alle quali la natura li aveva destinati.

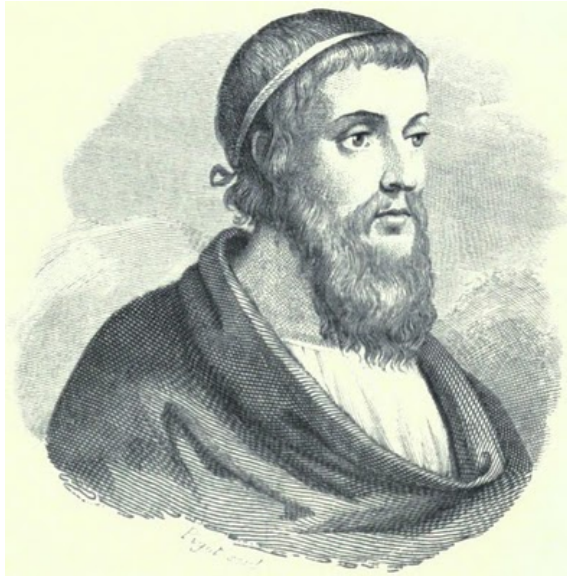
Il ruolo fondamentale della Cultura

Per quanto ci possano essere delle predisposizioni con cui si nasca, non è pensabile che da solo un bambino possa scoprire da solo tutta la matematica nell'arco della sua vita.

$$a^2 + 3a + 4 = 0$$

Sapete risolverla ?

Archimede la risolverebbe ?



Archimede
Siracusa
287 - 212 a.C.

XV secolo
invenzione
dei segni +, -

XVI secolo
Robert Record
inventa il simbolo =

I secolo d.C.
prime testimonianze dell'utilizzo del
simbolo dello zero derivante dalla
lettera greca omicron

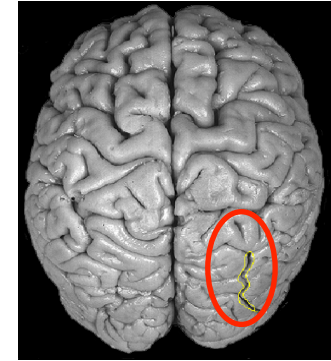
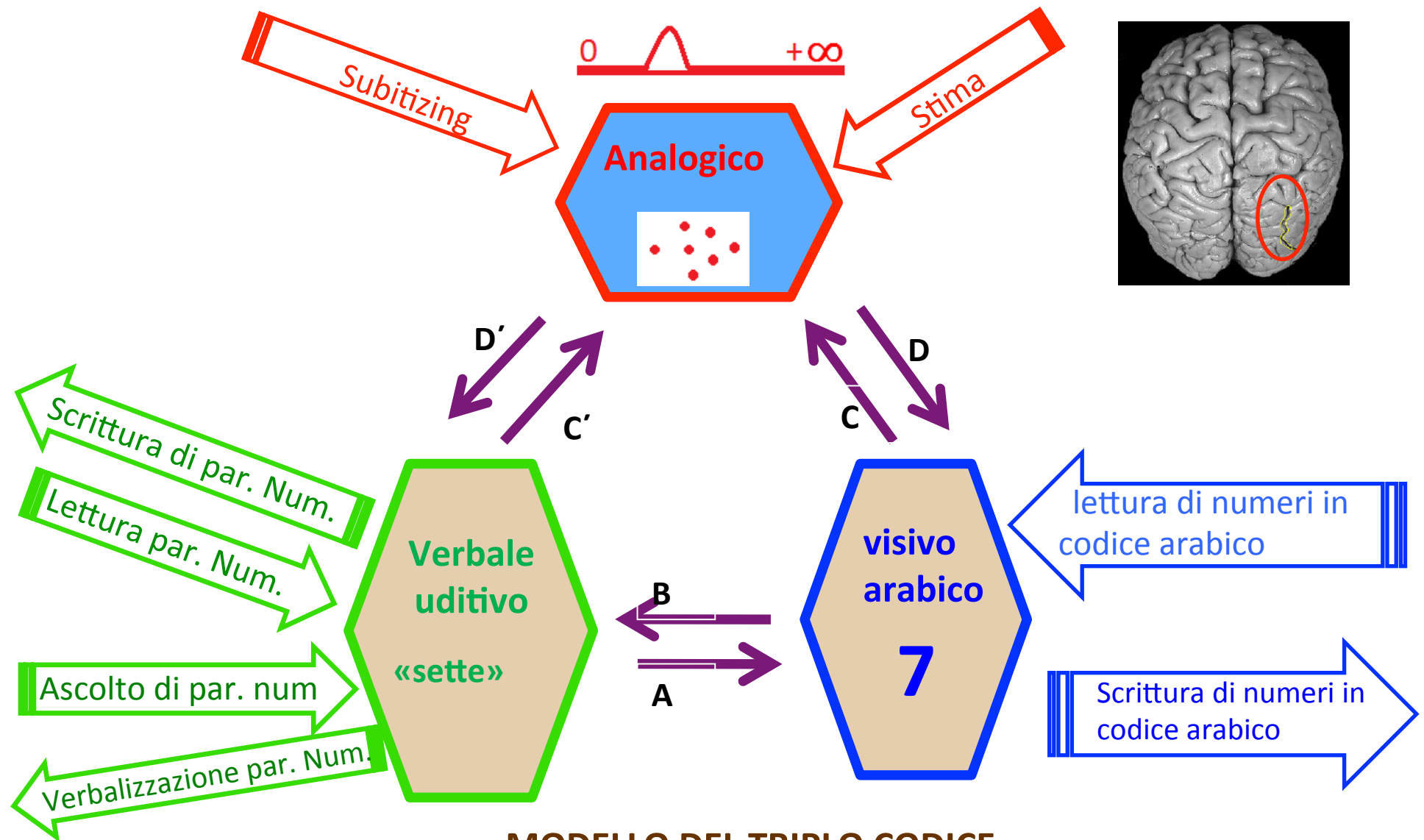
Il ruolo fondamentale della Cultura

Per quanto ci possano essere delle predisposizioni con cui si nasca, non è pensabile che da solo un bambino possa scoprire da solo tutta la matematica nell'arco della sua vita.

Anche per questo una buona
didattica – come immissione nella
Cultura Matematica – è
fondamentale!

E quando qualcosa non funziona?





**MODELLO DEL TRIPLO CODICE
(Dehaene, 1992)**

Mapping brain dysfunction in Dyscalculia

Hypothesis

«Access» :

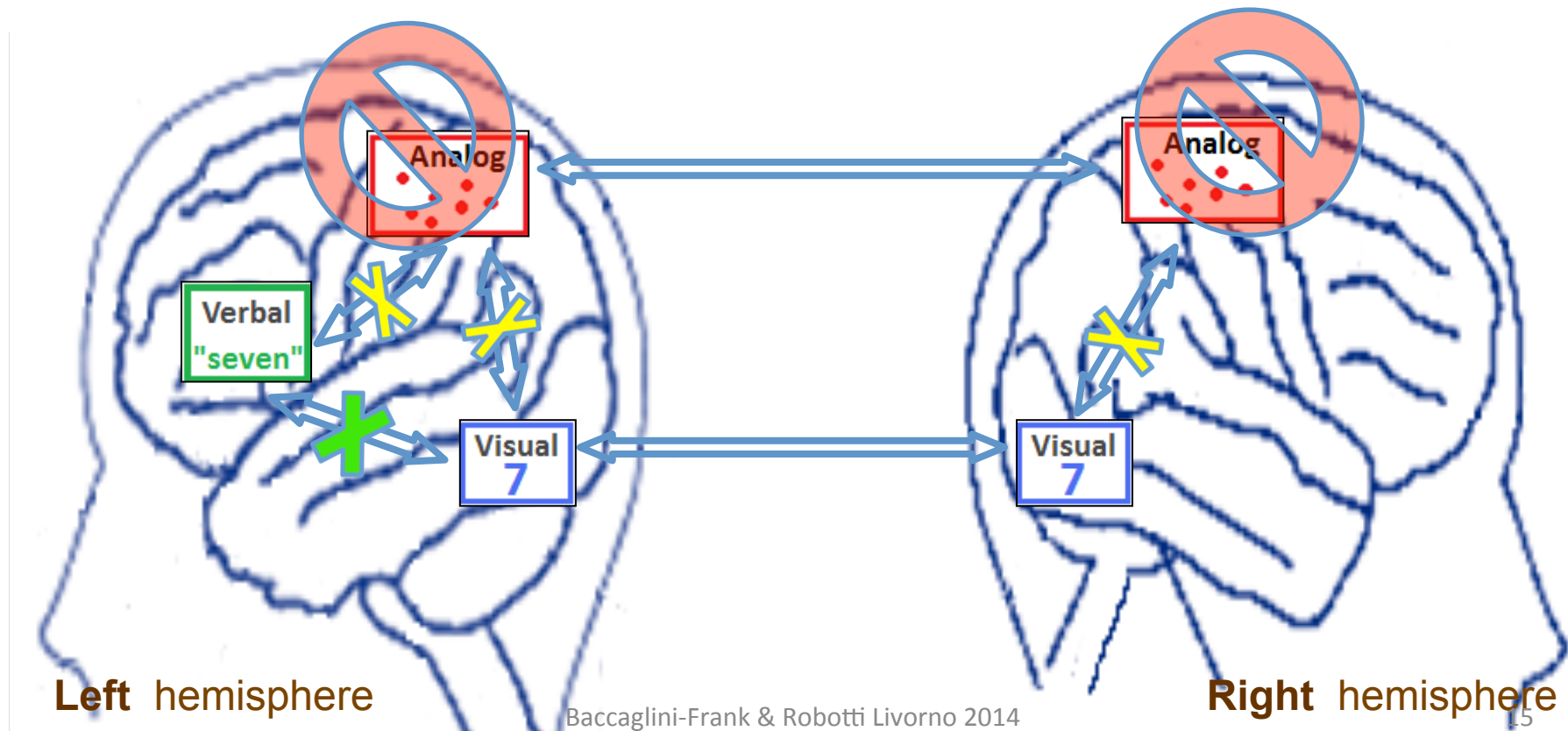
Deficit Exact Number Representation
and the link between Arabic –
Magnitude Representation
(Rouselle & Noël, 2007, 2011)

Hypothesis

«Core Deficit» :

Deficit in the Approximate
Magnitude system

(Butterworth, 1999; Gersten & Chard,
1999; Wilson & Dehaene, 2007)

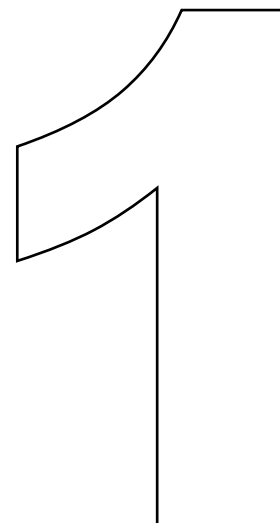
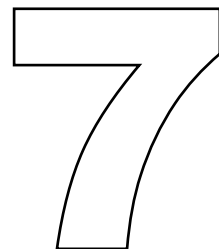


Ma il modello forse è superato!

Szucs, Devine, Soltesz, Nobes e Gabriel (Cortex, 2013) ipotizzano che la DE sia in relazione con l'abilità di inibizione e la memoria di lavoro visuo-spaziale.

L'ipotesi spiegherebbe le prestazioni basse in tests di subitizing e di confronto di numerosità simbolica con distrattore

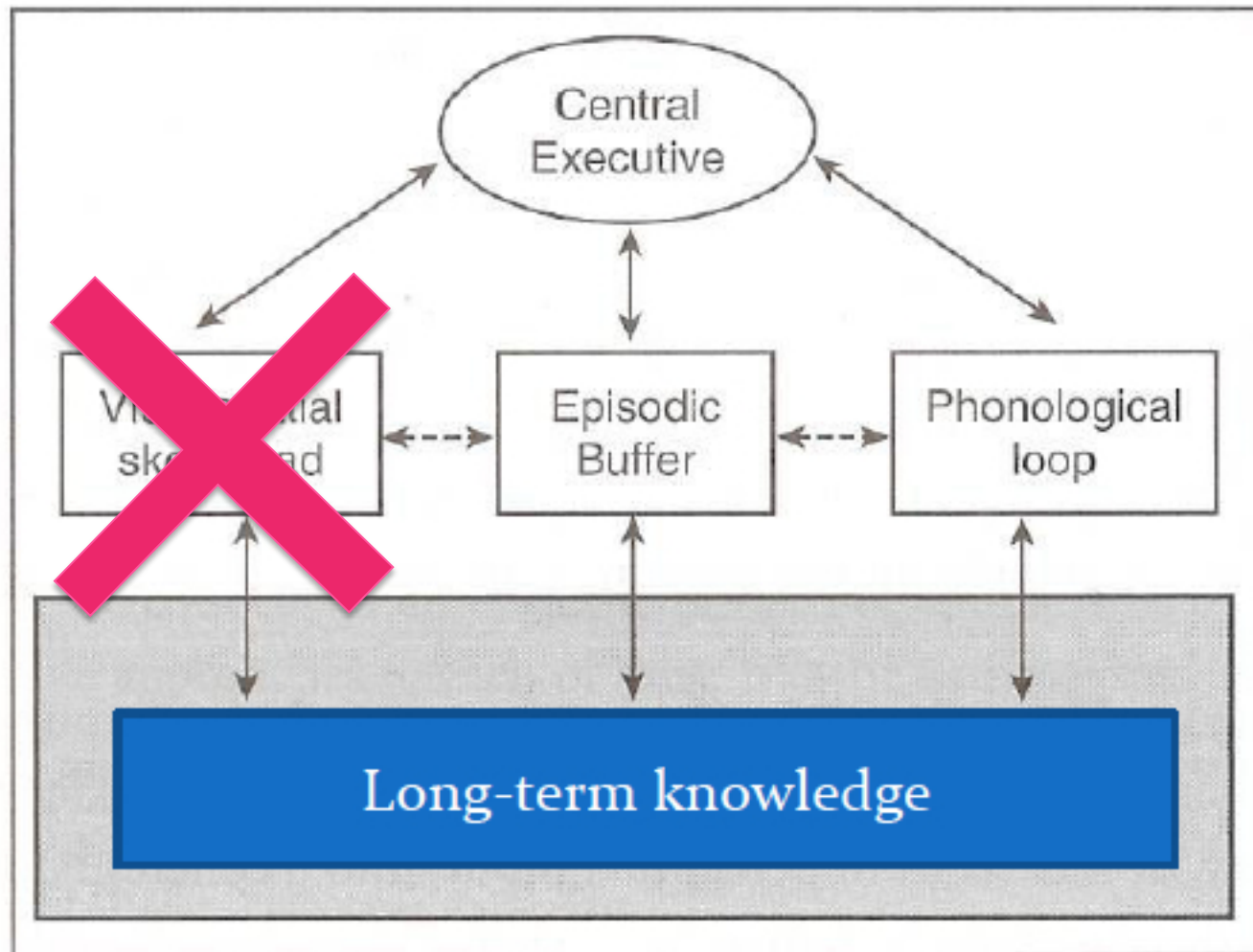
come nel caso di ...
(dire quali dei seguenti numeri è maggiore)



Una prestazione rapida ed
accurata si basa
principalmente sul
l'abilità di inibizione

Il Modello della Memoria di Lavoro

(Baddeley & Hitch, 1974; Baddeley, 2000)



DSA...e difficoltà di apprendimento

Un criterio per riconoscere un soggetto con un vero DSA consiste nel valutare come risponde all'intervento (**Response to Intervention, RTI**) e diagnosticarlo con DSA soltanto se è **resistente al potenziamento**.

Secondo tale criterio risultano essere falsi positivi tutti i soggetti che dai test diagnostici iniziali risulterebbero positivi, ma che dopo un periodo di potenziamento dei processi più deboli recuperano almeno di due deviazioni standard quando sottoposti agli stessi test.

Che cosa si può notare (anche precocemente) in studenti a rischio?

- debole “senso del numero”
- debole “percezione di struttura”

Il senso del numero è discriminante

Gray e Tall hanno preso 71 bambini tra i 7 e i 13 anni e hanno chiesto di sommare un numero di una cifra ad uno a due cifre.

Le strategie usate sono state:

- Conteggio totale
- Conteggio in avanti da
- Fatti conosciuti
- Fatti derivati (composizione e scomposizione) – senso del numero



Il senso del numero è discriminante

Studenti sopra la media	Studenti sotto la media
30% usa fatti conosciuti	6% fatti conosciuti
61% senso del numero	0% senso del numero
9% counting on	72% counting on
	22% conteggio totale



Il senso del numero è discriminante

Studenti sopra la media

media

30% usa fatti conosciuti

61% senso del numero

9% counting on

Chi è in difficoltà
impara un tipo diverso
di matematica!!!



Il senso del numero è discriminante

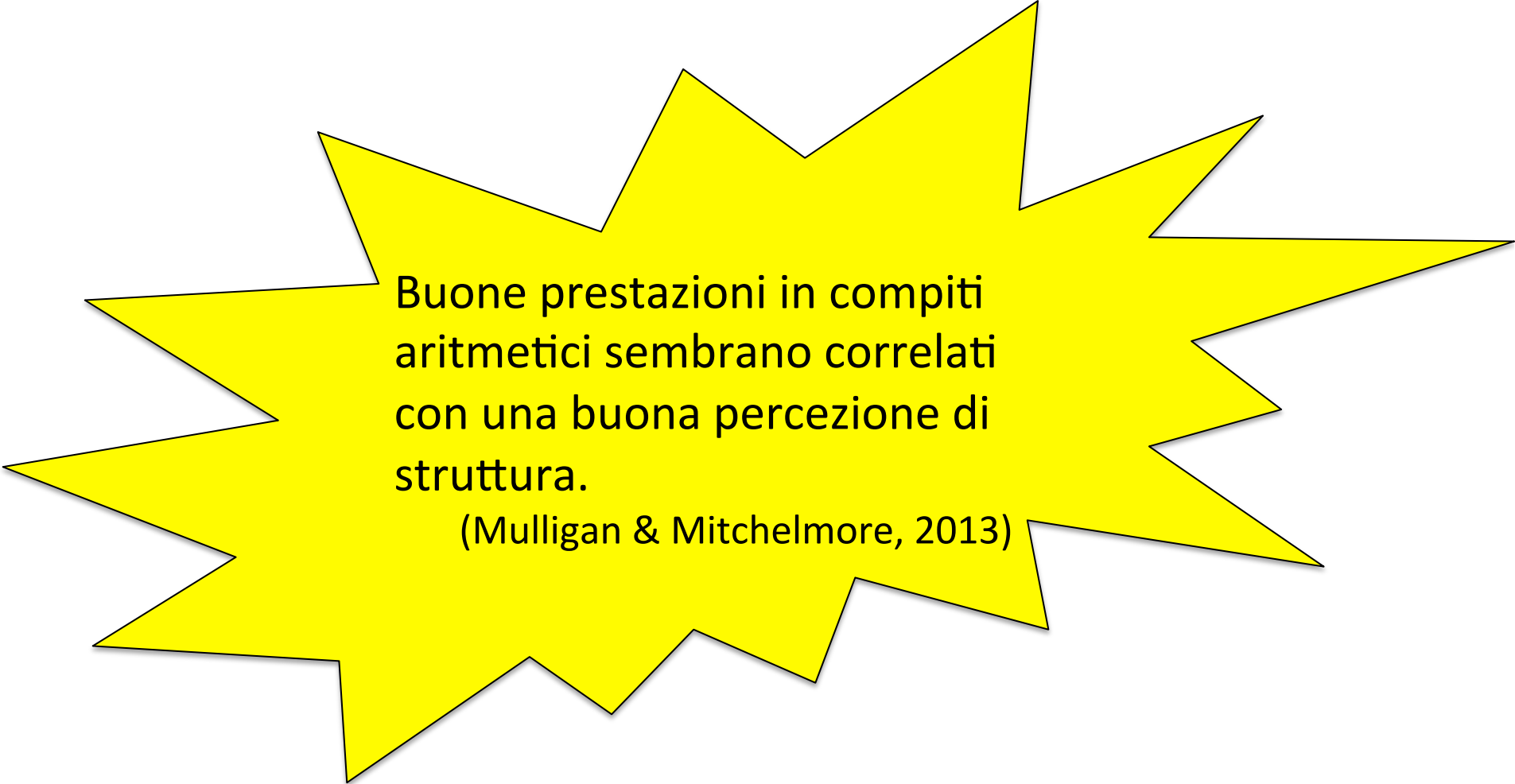
Chi è in difficoltà non sviluppa (ha sviluppato) il senso del numero, ma torna su strategie di conteggio e basta.

Dà sicurezza e rafforza la misconcezione che la matematica sia “contare in modo molto preciso.”

Spesso si sceglie di insegnare loro procedure invece che un uso flessibile dei numeri, perché così si ha l’illusione che “abbiano capito”.

Ma così **li si dispensa dal fare matematica.**

Che cos'altro è correlato con un buono sviluppo del “senso del numero”?



Buone prestazioni in compiti aritmetici sembrano correlati con una buona percezione di struttura.

(Mulligan & Mitchelmore, 2013)

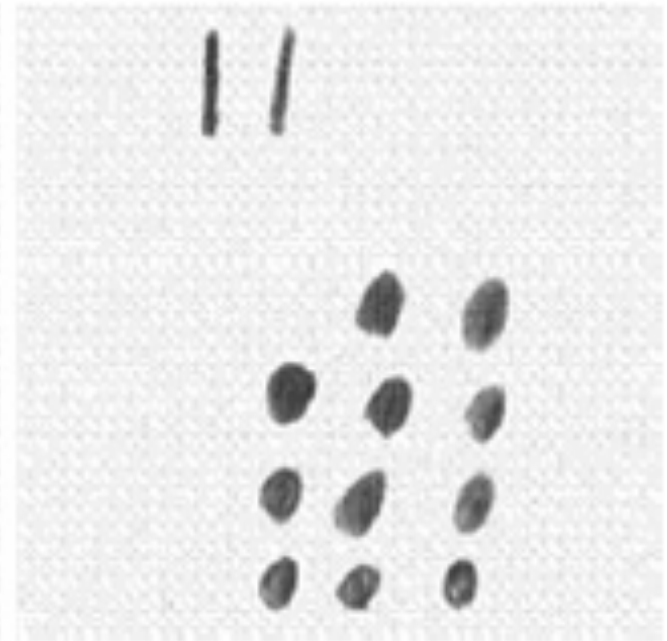
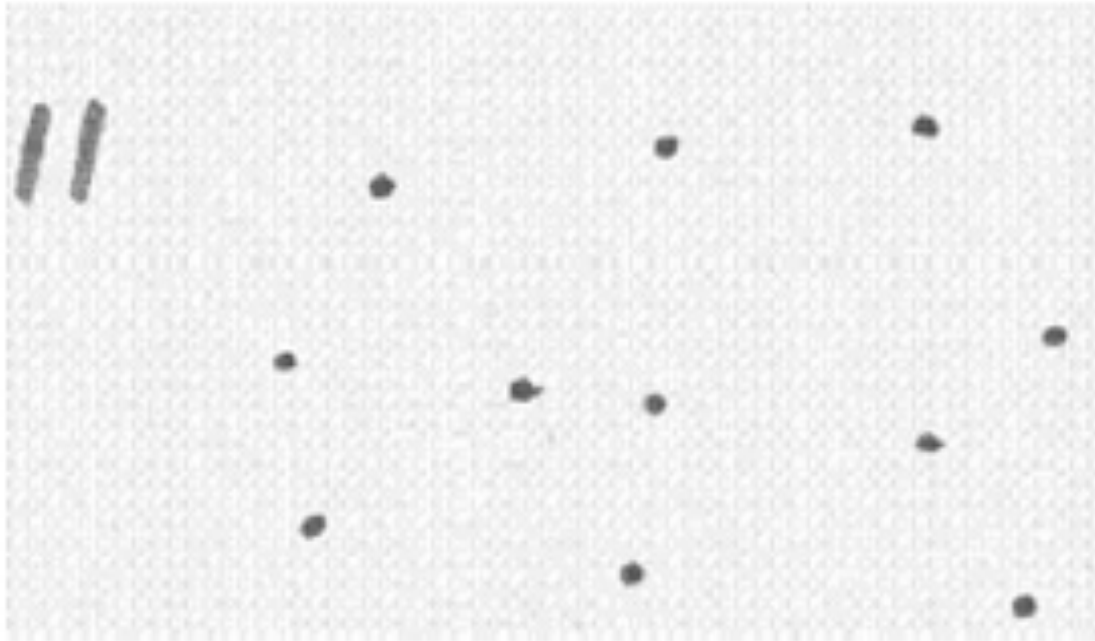




Fig. 3 Prestructural representations of a clock face (drawn from memory by Grade 1 students)

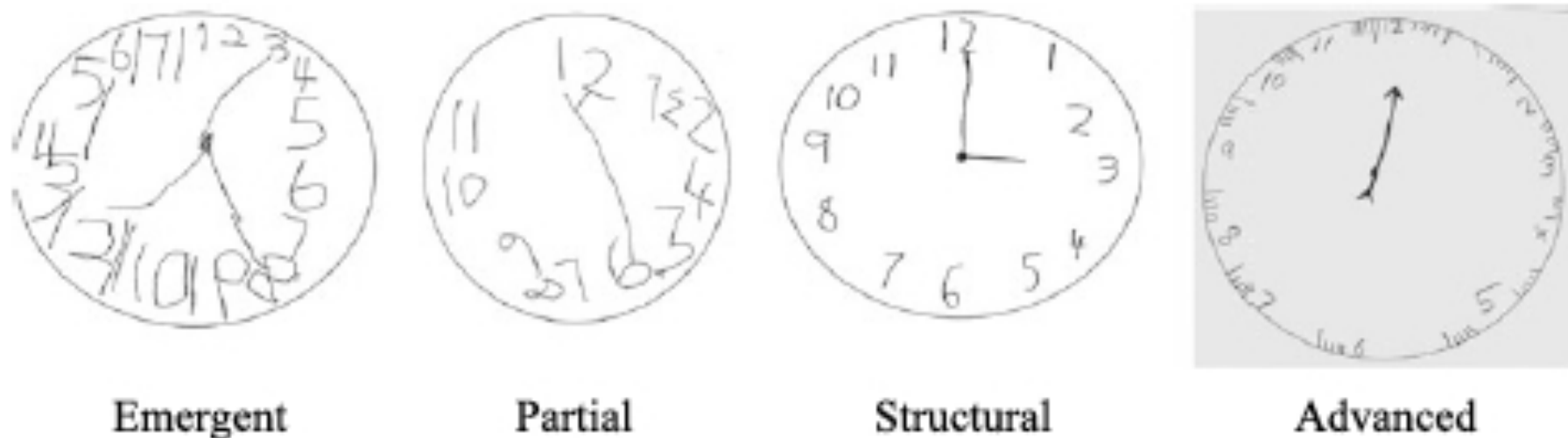
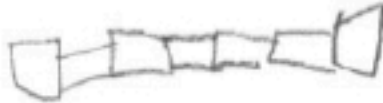
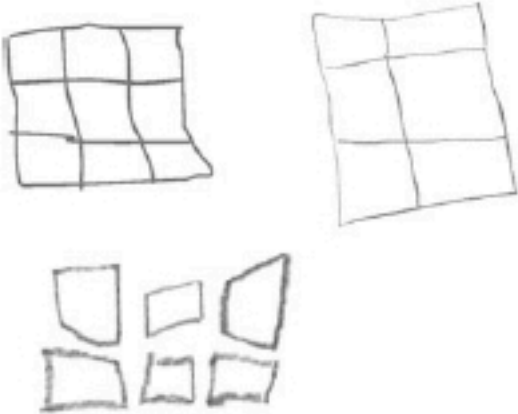
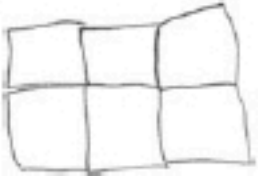


Fig. 4 Structural development in depictions of a clock face

Table 1 Typical student drawings of a 2×3 rectangular grid, by structural level

Structural level	Description	Examples
1. Prestructural	Scattered squares or a row of squares.	
2. Emergent	An attempt to draw a grid or border, but neither their numerical nor their spatial structure is correctly represented.	
3. Partial structural	A grid that is incomplete or inaccurate in terms of the number of squares drawn. For example:	
	(a) a grid with an incorrect number of squares	
	(b) a correct grid but drawn in the wrong orientation	
4. Structural	A grid of adjacent squares with the correct number of rows and columns, but with each square drawn separately.	
	5. Advanced	
	A grid of the correct number of squares, drawn using continuous horizontal and vertical lines.	



A Grade 1 students' three attempts to complete a rectangular grid

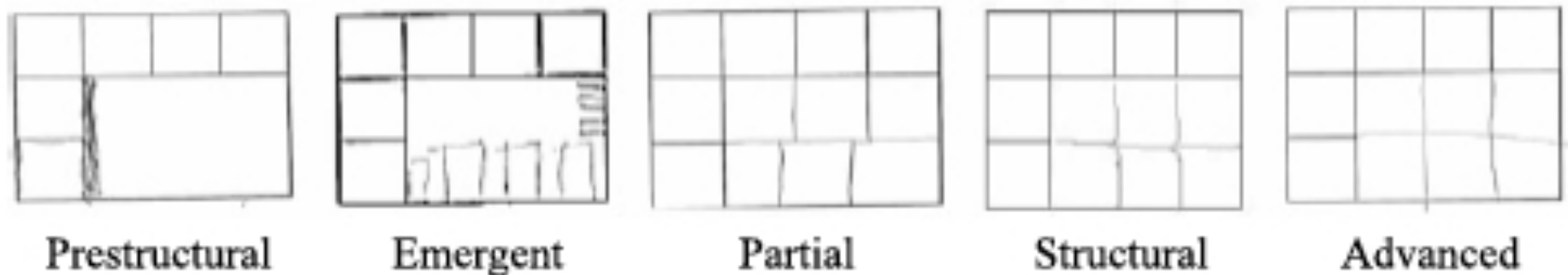


Fig. 5 Structural development in grid completion task

Riproducibile



Emergent



Structural



Advanced



Prestructural (Interview 1)



Prestructural (Interview 2)



Prestructural (Interview 3)

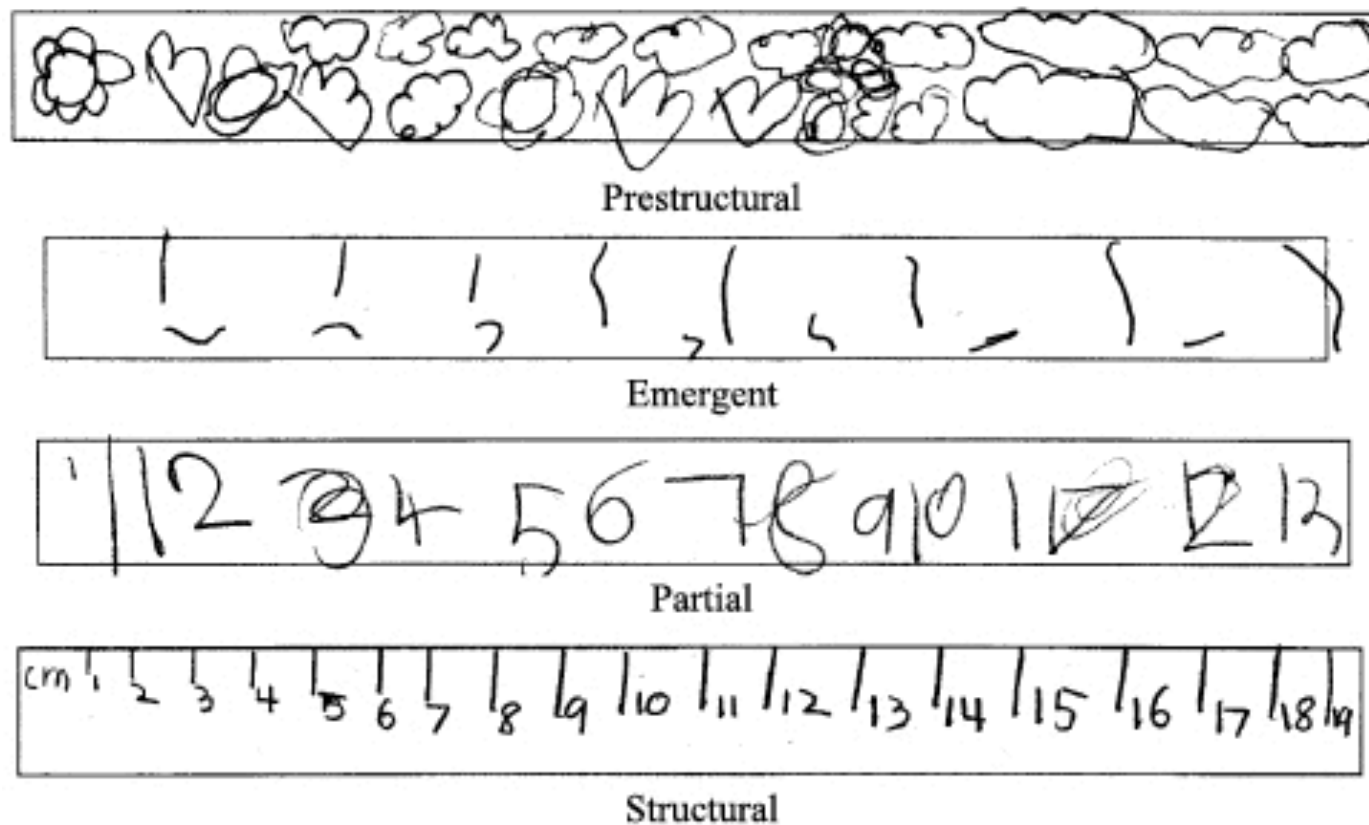


Fig. 8 Typical drawings of a ruler at the first four structural levels

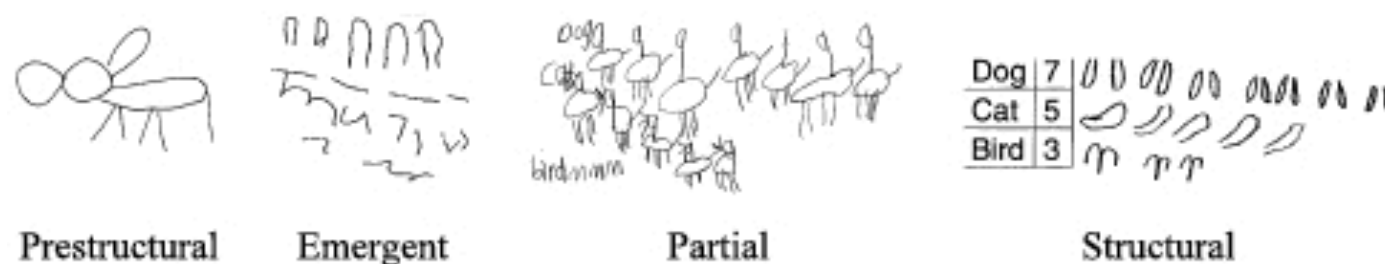


Fig. 9 Typical pictograms drawn at the first four structural levels

Mulligan & Mitchelmore (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. In L. English & J. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning*. Springer

Componente visuo-spaziale/strutturale del pensiero algebrico

In alcuni recenti lavori di Radford (2011) e di Rivera (2010) viene sottolineato come per estendere una sequenza di figure gli studenti hanno bisogno di riconoscere una regolarità e questo, da un punto di vista cognitivo, richiede la capacità di coordinare le strutture numeriche a quelle spaziali.

“The awareness of these structures and their coordination entail a complex relationship between (inner or outer) speech, forms of visualization and imagination, gesture, and activity on signs (e.g., numbers and proto-algebraic notations)” (Radford, 2011, p. 23).

Qualche riflessione didattica sul calcolo

Un problema grosso è come viene insegnata l'aritmetica e la matematica più in generale 😞

“The depressing thing about arithmetic badly taught is that it destroys a child’s intellect, and so to some extent, his integrity. Before they are taught arithmetic, children will not give their assent to utter nonsense; afterwards, they will.”

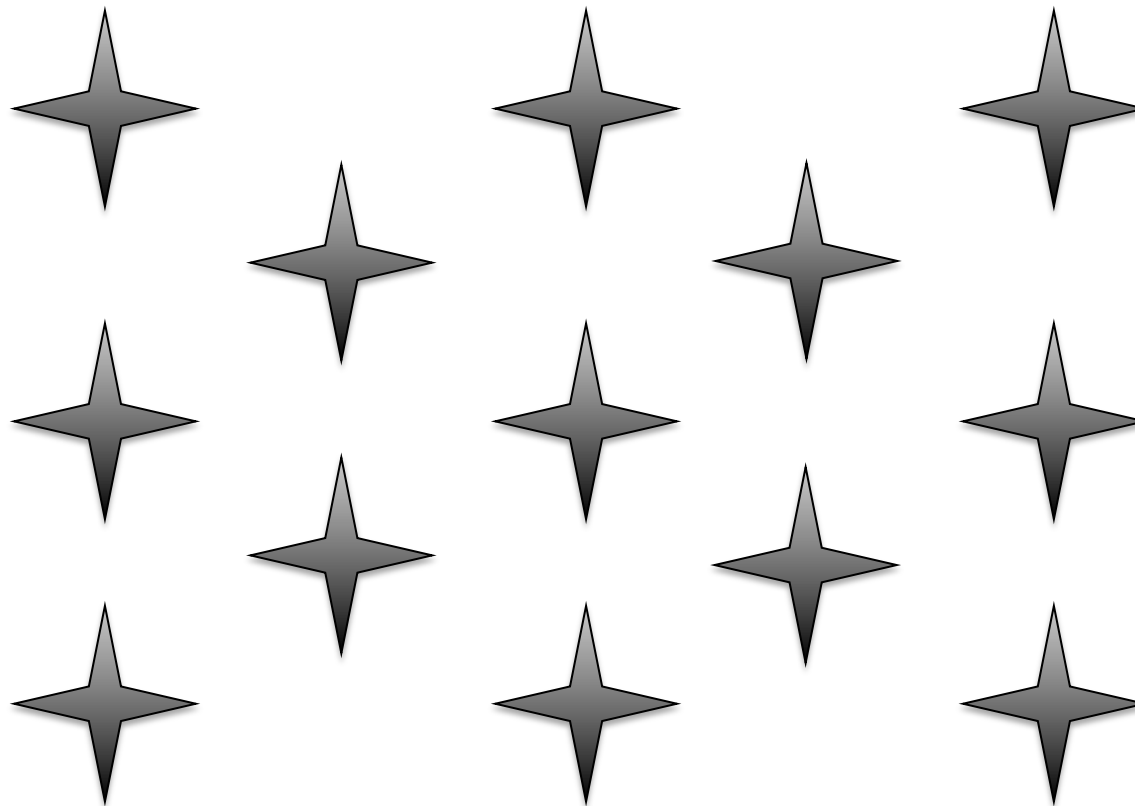
-Walter W. Sawyer

Ma si può rimediare! Come?

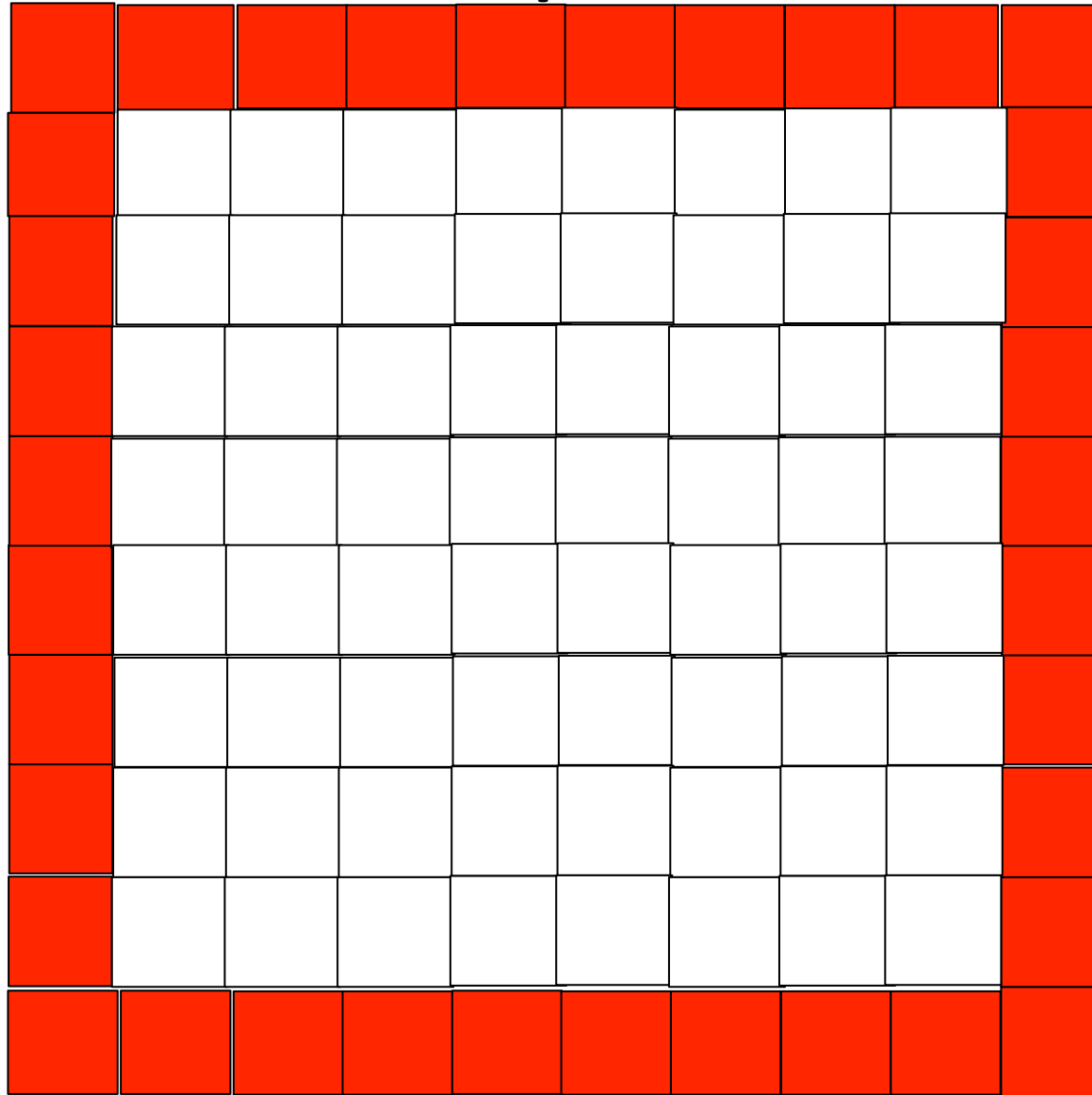
Per esempio, imparando a “manipolare” i numeri (in modo consapevole)

Proviamo a “manipolare” i numeri

Come descrivereste questa disposizione di stelline?



Quanti sono i quadrati rossi?



parliamone...

$$10 \times 4$$

$$10 + 10 + 8 + 8$$

$$10 \times 4 - 4$$

$$10 + 9 + 9 + 8$$

$$9 + 9 + 9 + 9$$

...

Quanti mattoncini nel caso 4?



caso 1

caso 2

caso 3

caso 4

E nel caso 100?



caso 1

caso 2

caso 3

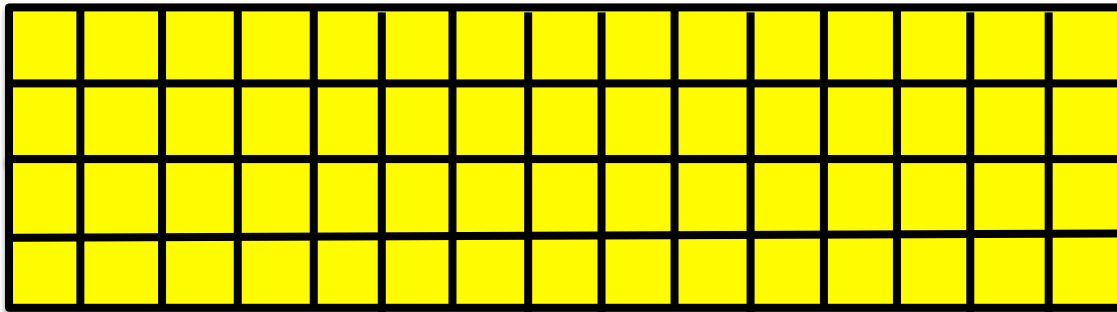
caso 4

Ora proviamo a pensare a

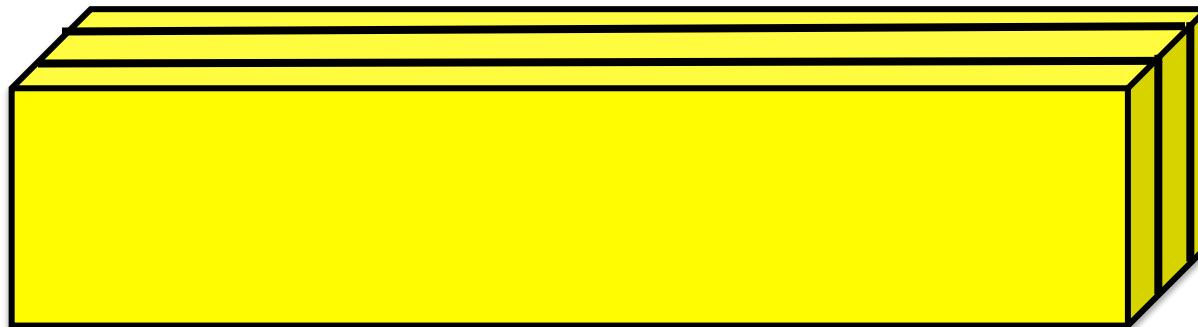
$$12 \times 15$$

[senza scrivere e senza usare algoritmo
moltiplicazione in colonna]

Proviamo a “manipolare” i numeri

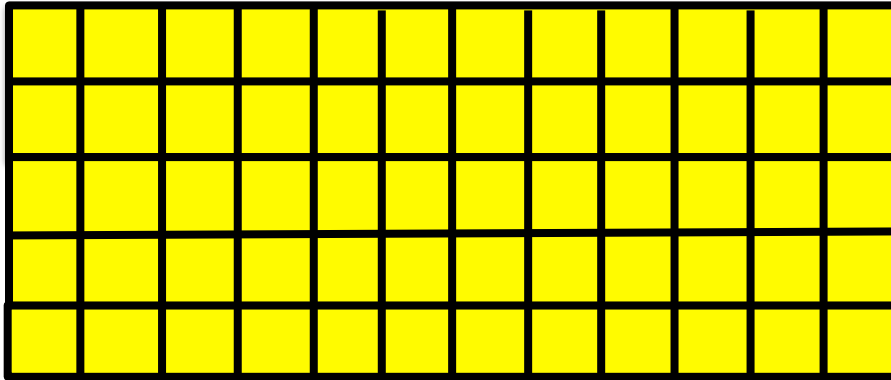


$$4 \times 15$$

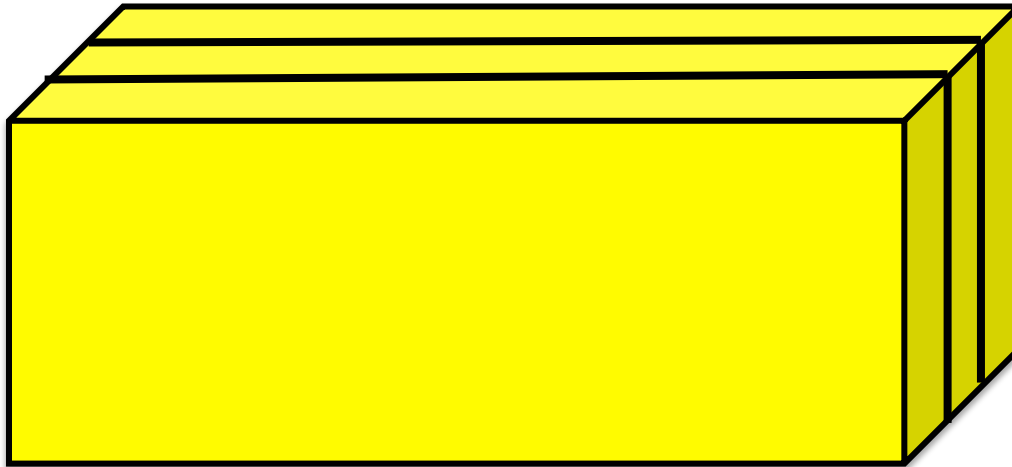


$$3 \times (4 \times 15)$$

Proviamo a “manipolare” i numeri



12×5



$(12 \times 5) \times 3$

Proviamo a “manipolare” i numeri

$$12 \times 15$$

$$\begin{aligned} 12 \times 15 &= (3 \times 4) \times 15 \\ &= 3 \times (4 \times 15) \\ &= 3 \times 60 \\ &= 180 \end{aligned}$$

associative

$$\begin{aligned} 12 \times 15 &= 12 \times (5 \times 3) \\ &= (12 \times 5) \times 3 \\ &= 60 \times 3 \end{aligned}$$

associative

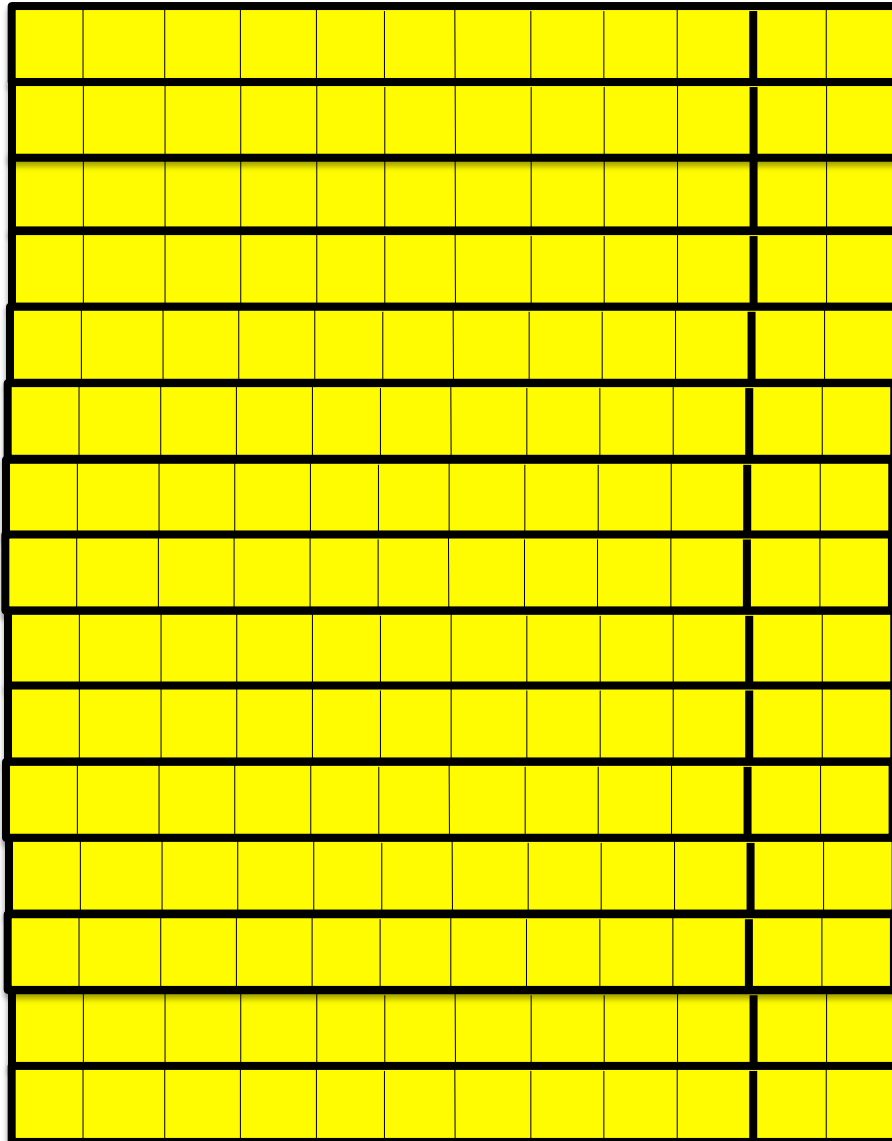
Proviamo a “manipolare” i numeri

$$(10 + 2) \times 15$$



$$10 + 2$$

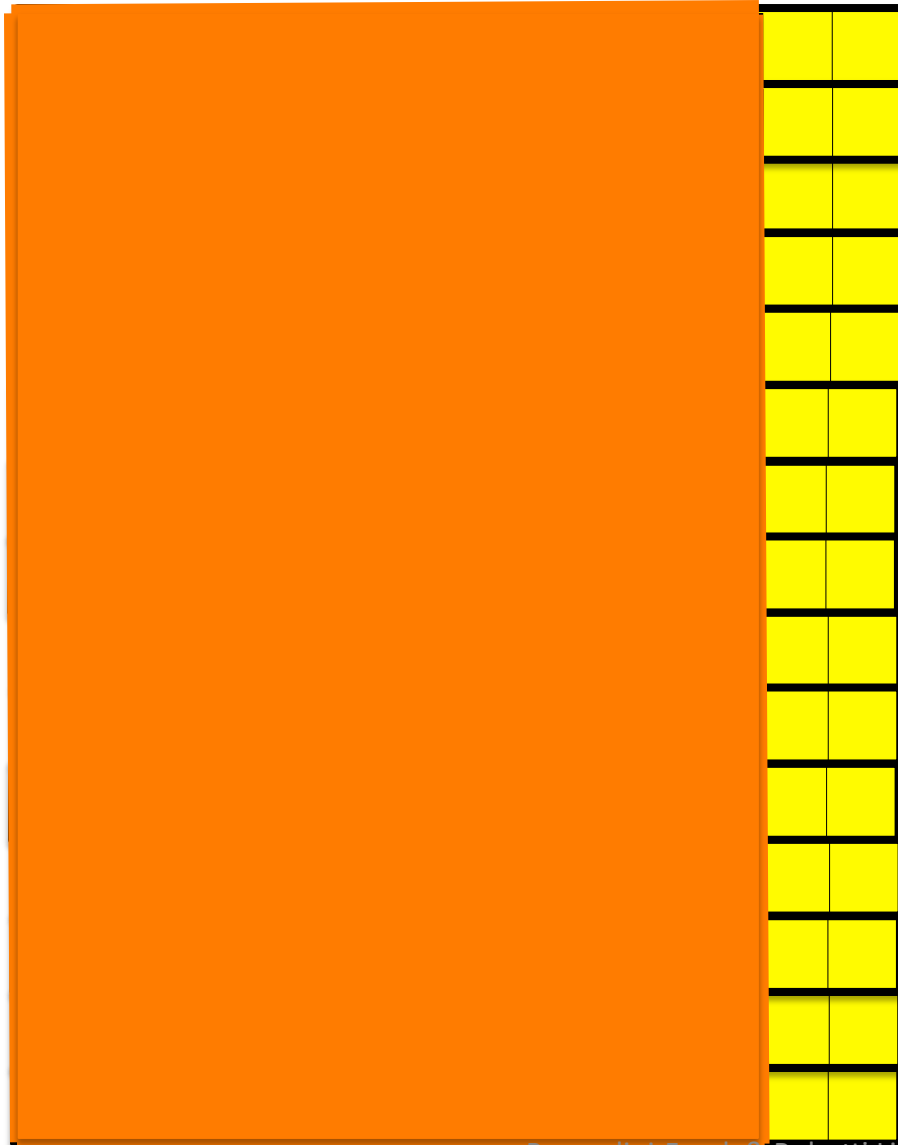
Proviamo a “manipolare” i numeri



$$(10 + 2) \times 15$$

$$10 + 2$$

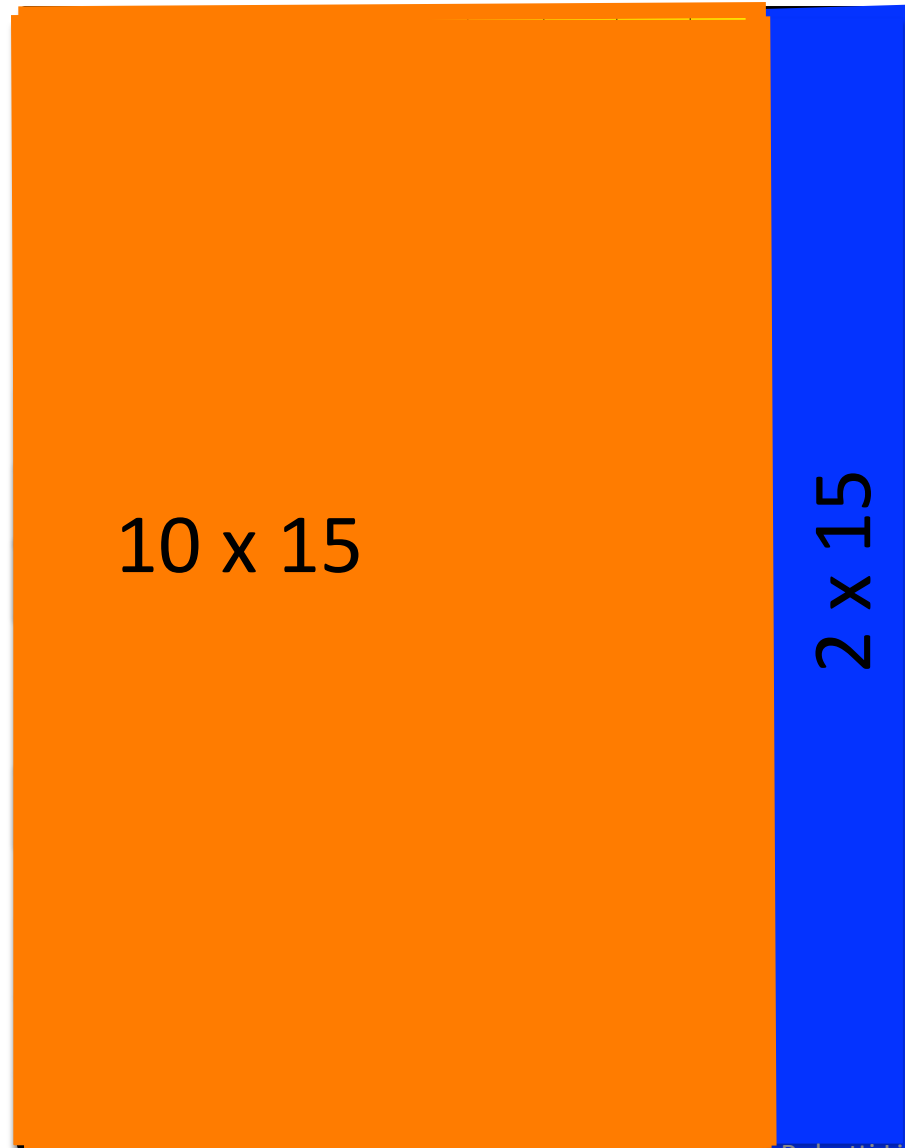
Proviamo a “manipolare” i numeri



$$(10 + 2) \times 15$$

$$10 + 2$$

Proviamo a “manipolare” i numeri



$$(10 + 2) \times 15$$

$$10 + 2$$

Proviamo a “manipolare” i numeri

Ora proviamo a pensare a

$$12 \times 15$$

(proposta di studenti con diagnosi di DSA)

$$15 \times 10 = 150$$

$$15 \times 2 = 30$$

$$(10 + 2) \times 15 = 10 \times 15 + 2 \times 15 = 150 + 30 = 180$$

Proviamo a “manipolare” i numeri

Pensiamo adesso a

$$25 \times 29$$

in tanti modi diversi.

A che cosa può servire una “Buona Didattica”?

Un'adeguata stimolazione attraverso una buona didattica può

- favorire i processi della plasticità cerebrale;
- alleviare alcune difficoltà causate dai DSA;
- prevenire il fenomeno degli studenti “falsi positivi” alle prove per la diagnosi di DE aiutando più del 20% della popolazione scolastica (percentuale di studenti che manifestano difficoltà in matematica entro la fine della scuola elementare).

Su quali basi teoriche fondare una “buona didattica” della matematica?

- Su trasposizioni didattiche “intelligenti” (!) di scoperte e modelli neuroscientifici rilevanti;
- su buone pratiche individuate per potenziamenti individuali;
- su appropriate teorie dal campo della didattica della matematica che consentano di adattare il lavoro uno-a-uno ad una ***situazione di classe***, con un’attenzione verso le caratteristiche cognitive di *tutti* gli studenti.

Quali basi scientifiche?

(Neuroscienze e psicologia cognitiva)

- Modello del Triplo Codice di Dehaene
- Modello sullo sviluppo della linea dei numeri mentale
- Ruolo della memoria
 - a lungo termine
 - a breve termine (in partic. MLVS)
- altre funzioni cognitive correlate con basse prestazioni in particolari ambiti della matematica
- stili d'apprendimento e canali preferenziali per il flusso di informazioni

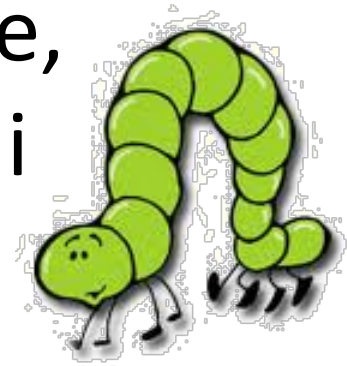
Quali basi scientifiche?

(Didattica della Matematica)

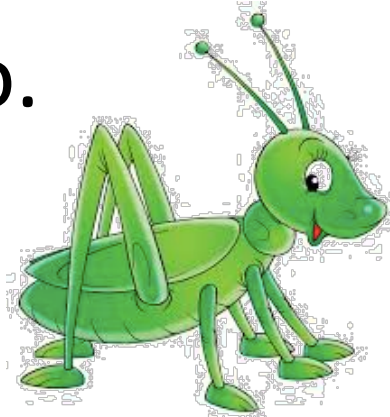
- ruolo della percezione di “struttura” nello sviluppo del “senso del numero”
- co-costruzione di significati matematici
- Teoria della Mediazione Semiotica
 - uso di “artefatti intelligenti” (fisici e digitali) nella didattica per mediare i contenuti matematici di riferimento
- Concetti Figurali
- Registri di rappresentazione semiotica

Stile “lombrico” e “grillo”

Stile lombrico: attaccato alle formule, procedurale, sequenziale, bisogno di documentare tutto



Stile grillo: olistico, intuitivo, oppongono resistenza alla richiesta di documentare il loro pensiero.



(Marolda & Davidson, 2000; Chinn, 2012)



È dipendente da abilità verbali.

Mette a fuoco dettagli specifici o aspetti singoli di una situazione.

Vede gli 'alberi' ma non percepisce la 'foresta'.
Preferisce COME a PERCHÉ

Dipende da una sequenza prediletta di passi per raggiungere una meta.

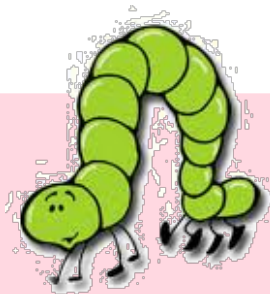


Preferisce stimoli percettivi e reinterpreta situazioni astratte in maniera visiva.

Gli piacciono i numeri grandi e non vuole essere disturbato a gestire i dettagli.

Preferisce PERCHÉ a COME

Preferisce approcci non sequenziali che coinvolgono "patterns" e relazioni tra diversi elementi



È dipendente dall'insegnante per conoscere LA procedura.

Non è versatile

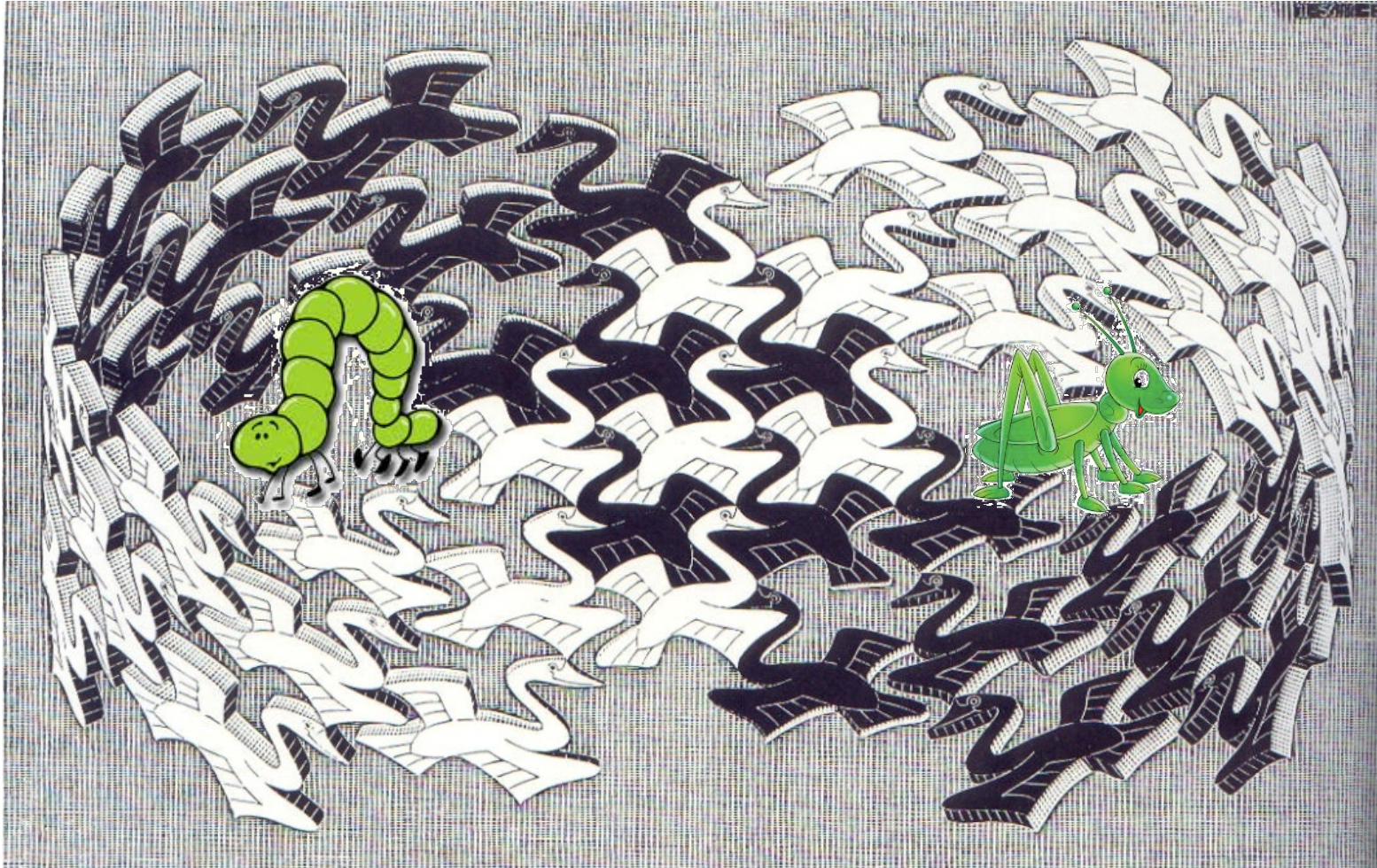
È messo in difficoltà da richieste percettive

Preferisce tests brevi su pochi argomenti a esami "grossi" che comprendono tutto.

È messo in difficoltà da richieste di dettagli e soluzioni precise.

Preferisce riconoscere risposte corrette piuttosto che generarle. Preferisce esami che comprendono tutto e che valutano i modi di pensare.

Il buon matematico raggiunge un equilibrio
ottimale tra questi estremi



Esempi di proposte didattiche

Nel progetto PerContare (tra il 2011 e il 2014), grazie ad un **lavoro congiunto tra didattici della matematica e psicologi cognitivi**, abbiamo sviluppato varie attività per un **buon avvio all'aritmetica**, a partire dalla transizione dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria.

(altre informazioni a percontare.asphi.it)

PerContare



Proposte per un buon avvio al calcolo (dalla prima classe...o prima)

Fate usare le mani.

Senza la capacità di associare la
rappresentazione dei numeri alla
rappresentazione neurale delle
dita e delle mani nelle loro
posizioni normali, gli stessi numeri
non possono avere una
rappresentazione normale nel
cervello.

(Butterworth, 1999)



Dalle neuroscienze

Uso delle Mani

Ipotesi: Tre abilità di base su cui poggiano le più complesse abilità numeriche sono

- Saper riconoscere piccole numerosità senza contare (subitizing)
- Le abilità motorie fini (finger tapping)
- La rappresentazione che il soggetto ha delle proprie dita (gnosia digitale)

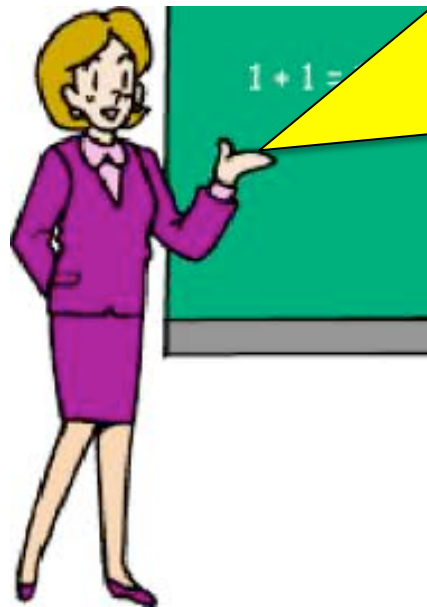


(Butterworth, 2000, 2005)

Risultati sperimentali sulla “gnosia digitale”

- “La consapevolezza delle dita” è un buon predittore delle abilità numeriche del bambino. (Noël, 2005)
- Il potenziamento della gnosia digitale ha portato un gruppo sperimentale di bambini con scarsa abilità a superare un gruppo “forte” non sottoposto a potenziamento. (Bafalluy & Noël, 2008)



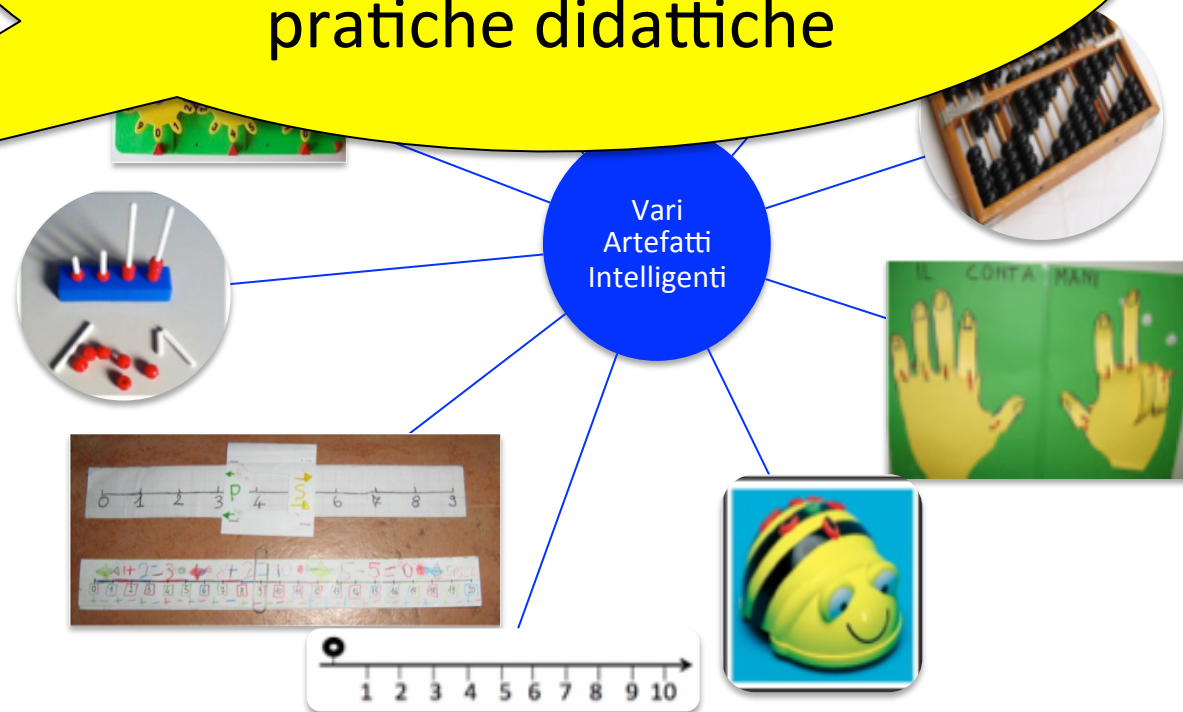


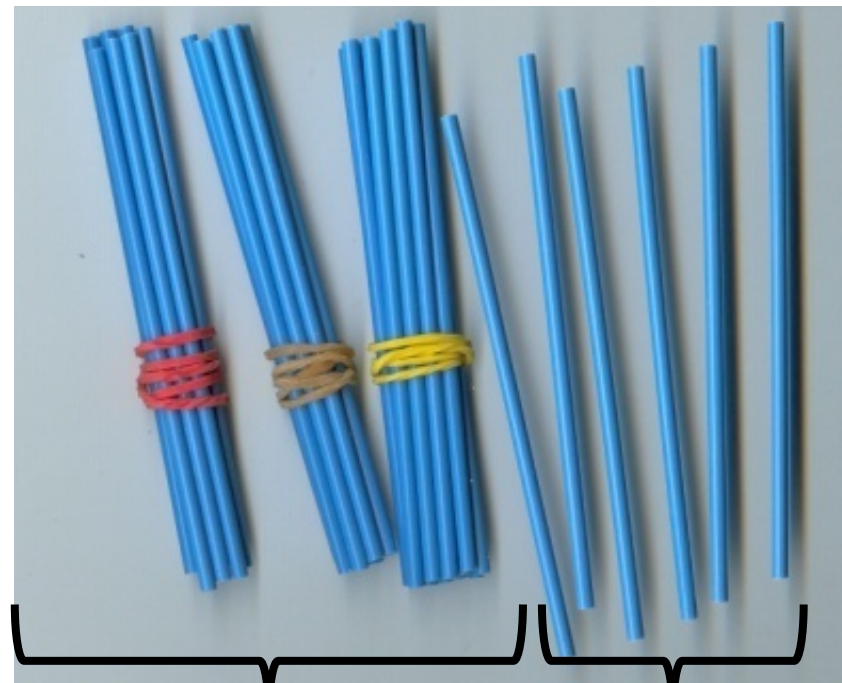
Possiamo sviluppare
delle buone pratiche
per sviluppare
consapevolezza delle
dita, mentre
sviluppiamo le abilità
numeriche.



...e “leggere” dai modi
in cui gli studenti usano
le mani gli schemi che
hanno appropriato
(oppure no).

Questo vale in generale
quando facciamo uso di
“artefatti intelligenti” nelle
pratiche didattiche





3 dieci 6 (sparse)
 30 6
 3 dieci 6 - trentasei
 36



Perché i fascetti di cannucce sono un buono strumento?

- permettono all'insegnante di mettersi in relazione con importanti significati matematici, per es.:
 - la decina
 - notazione decimale
 - comporre/scomporre
- consentono di mantenere una relazione concreta con l'aspetto semantico del numero senza passare per il codice verbale o quello visivo-arabo
- l'attività con le cannucce attiva il canale cinestetico

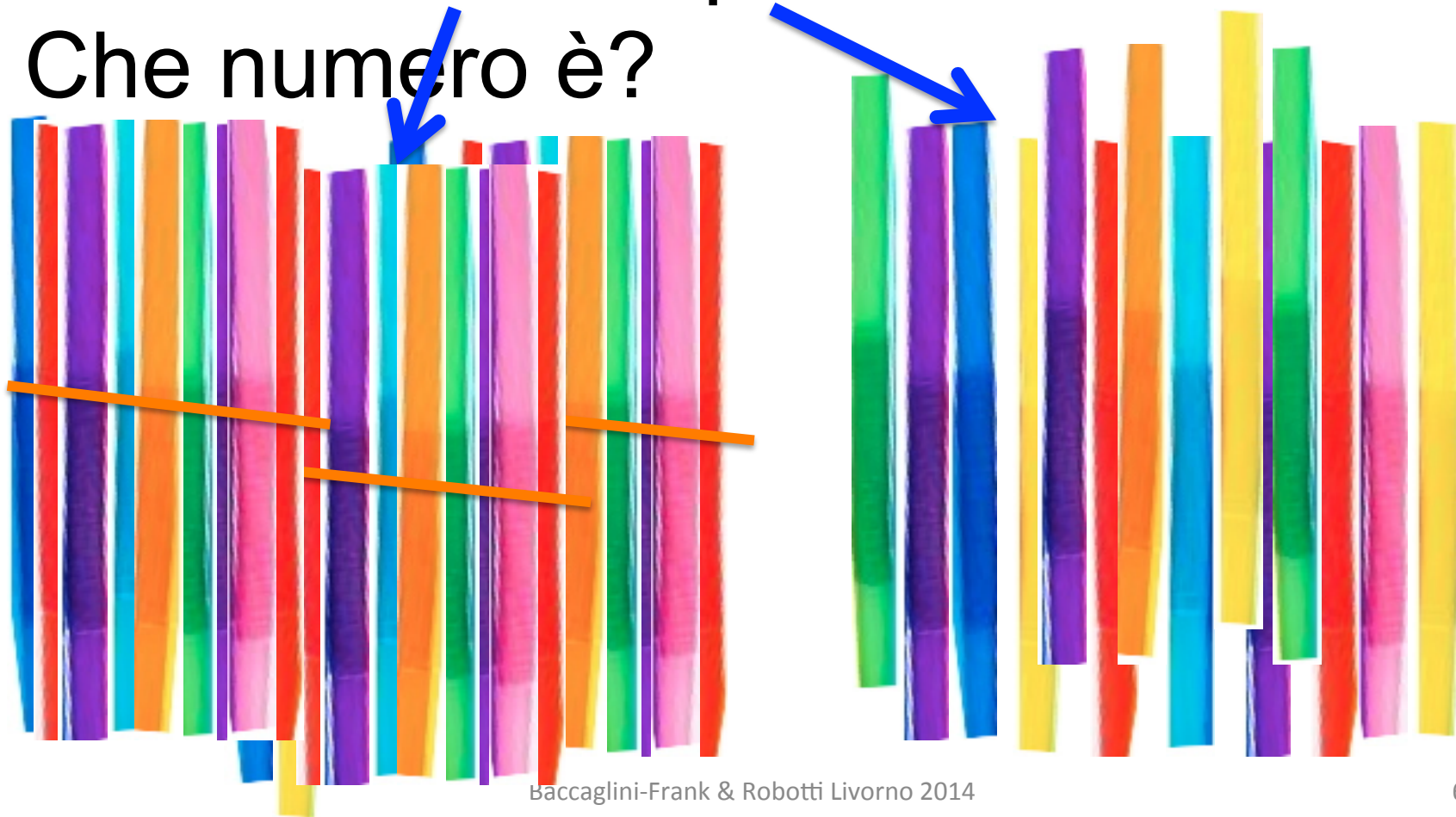


Modello delle scatole trasparenti

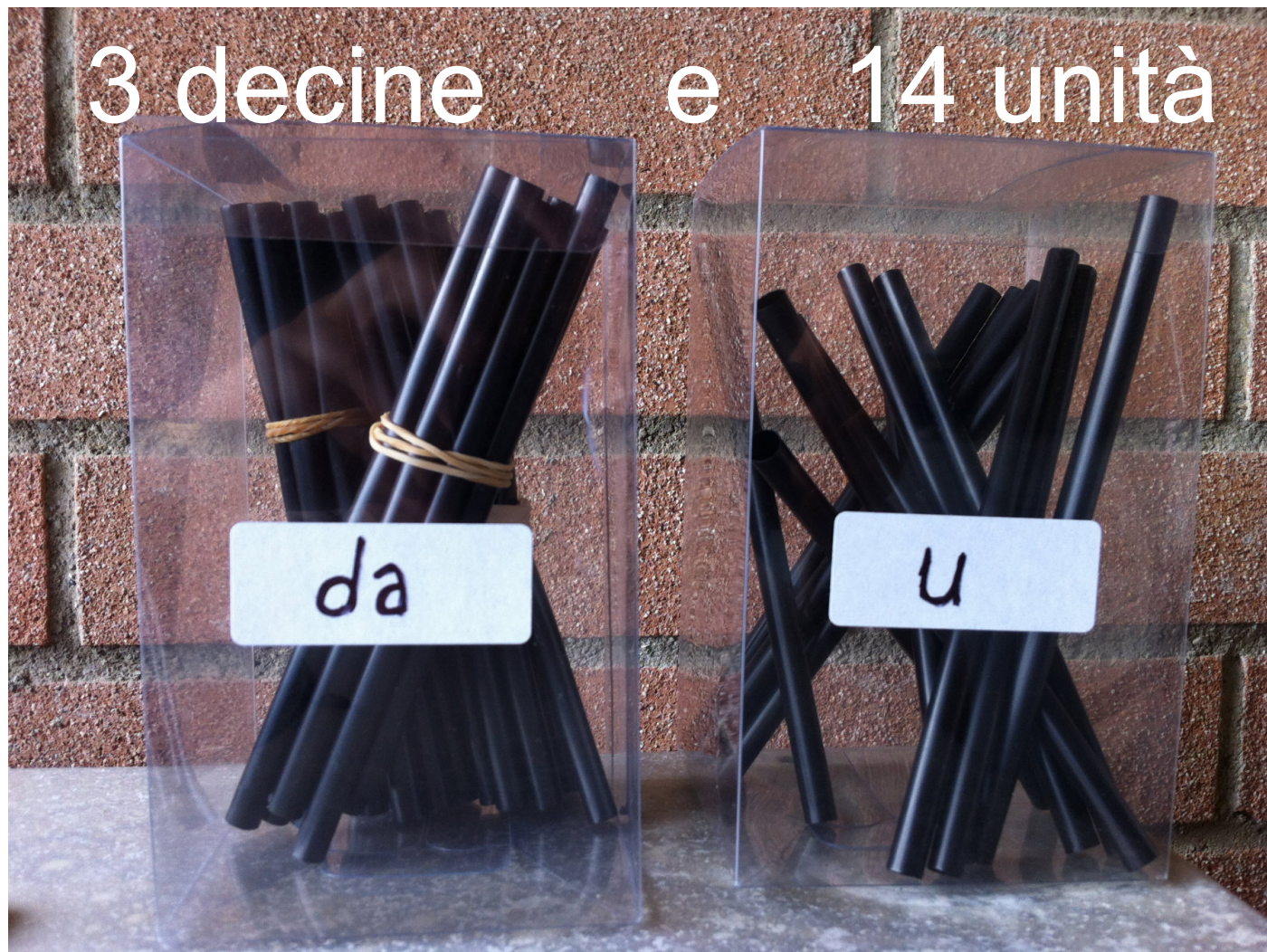
Ho tre decine e quattordici unità.
Che numero è?

Modello delle scatole trasparenti

Ho tre decine e quattordici unità.
Che numero è?



Modello delle scatole trasparenti



Modello delle scatole trasparenti



Modello delle scatole trasparenti



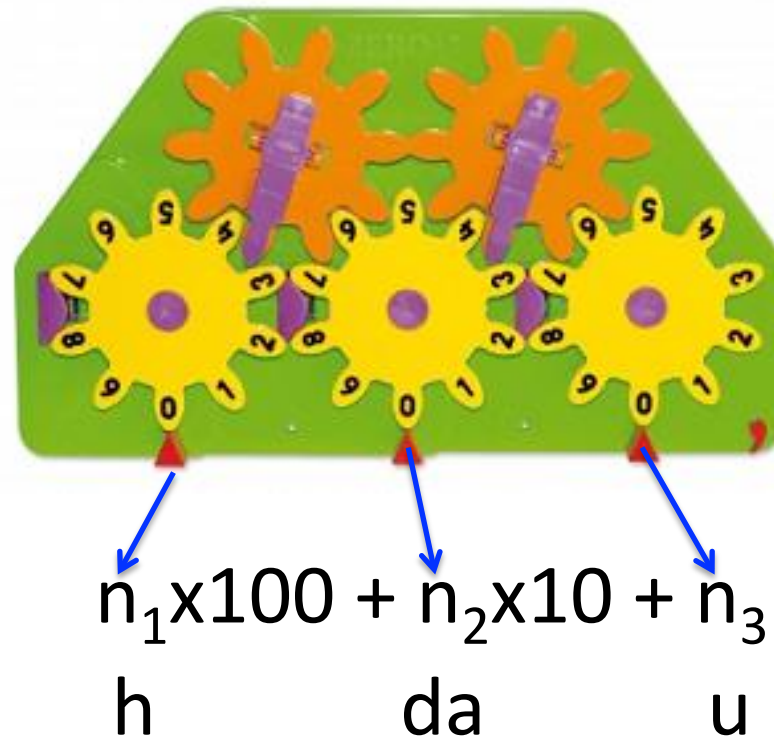
Modello delle scatole trasparenti



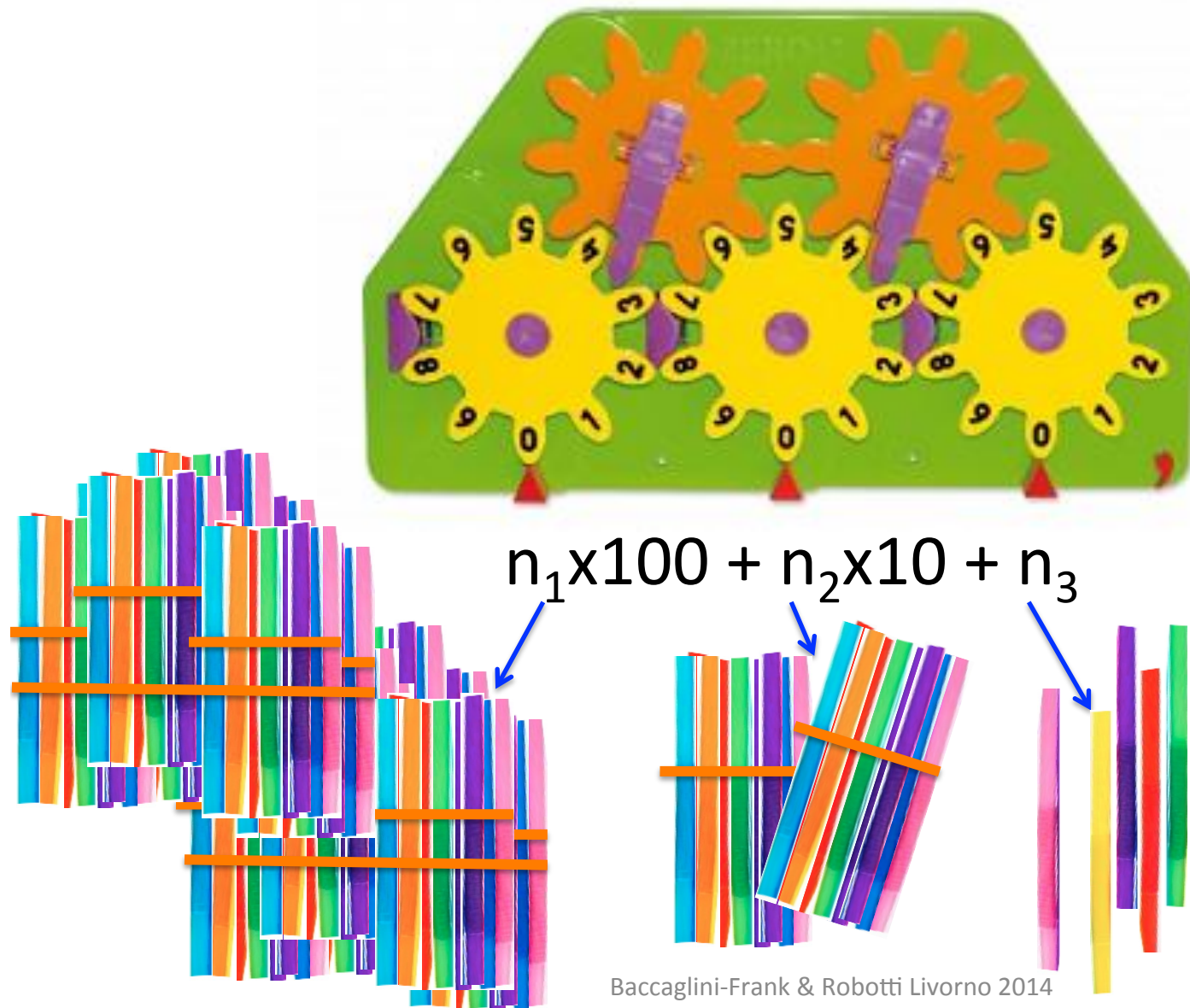
Cannucce → Pascalina → Abaco

Notazione posizionale decimale

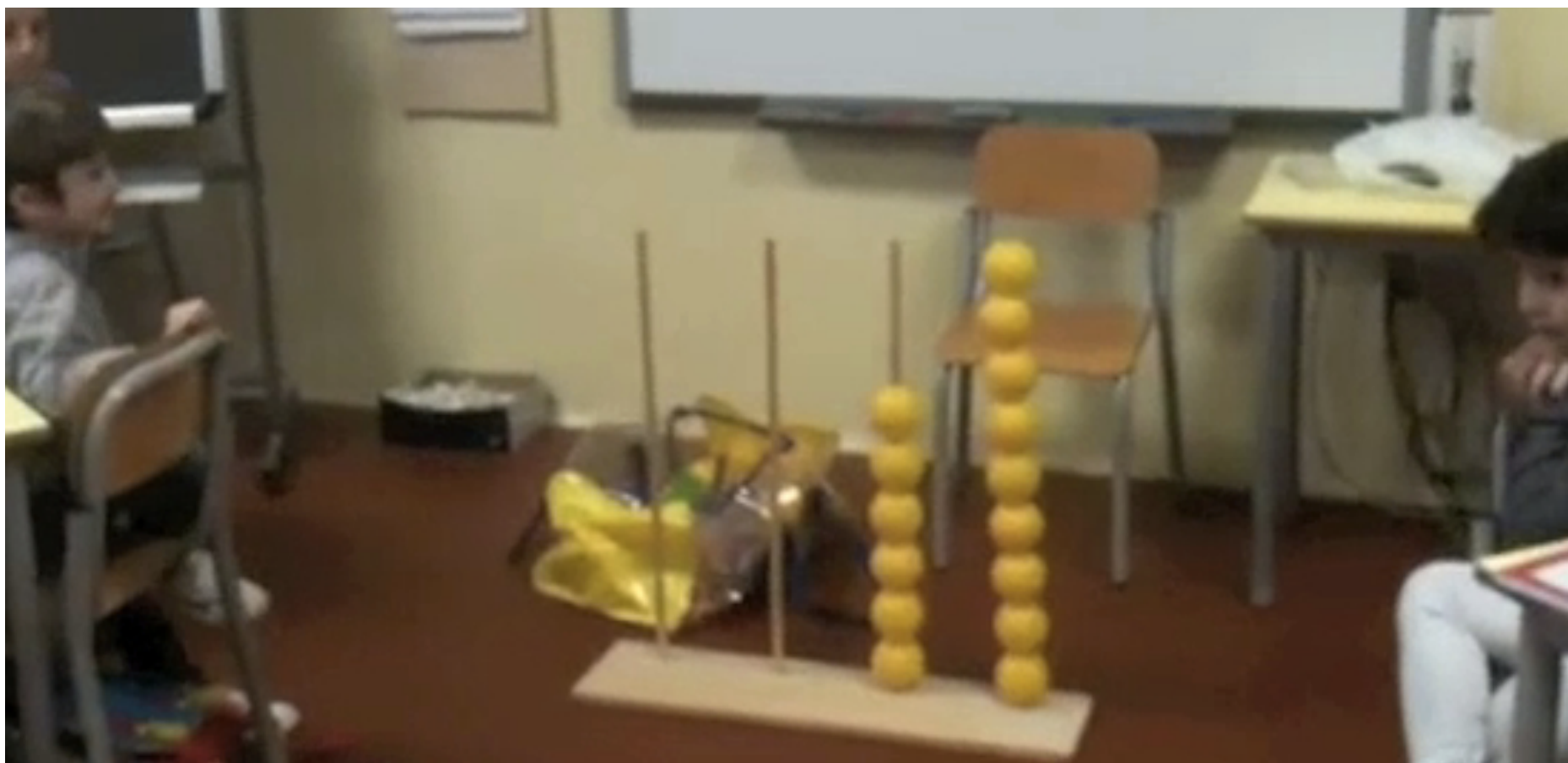
I numeri si possono decomporre in h, da, u:



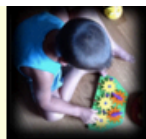
Corrispondenza cannucce - rotelle



E finalmente l'abaco...



Passando al calcolo...(anche quello in colonna)



CLASSE SECONDA

INTRODUZIONE

INDICE

PERCORSI

- [Strumenti e numeri fino 20](#)
- [Numeri fino a 100](#)
- [Calcolo](#)
 - [Calcolo a mente](#)
 - [Addizione e sottrazione](#)
 - [addizione-sottrazione 1](#)
 - [addizione-sottrazione 2](#)
 - [avvio calcolo in colonna](#)
 - [Moltiplicazione e divisione](#)
- [Misura](#)

ARTEFATTI

APPROFONDIMENTI

FORMAZIONE

MATERIALI

CREDITS

Per Contare



GUIDA ALLE ATTIVITA' PER LA MATEMATICA

[Home](#) - [Guida classe seconda](#) - [Percorsi](#) - [Calcolo](#) - [Addizione e Sottrazione](#) - [Avvio calcolo in colonna](#)

AVVIO CALCOLO IN COLONNA

L'attività è ripresa dall'attività "Addizioni e Sottrazioni sull'Abaco e in Colonna" e può essere usata indipendentemente per introdurre esclusivamente il calcolo in colonna, se ritenuto necessario.

Durata: 1 ora

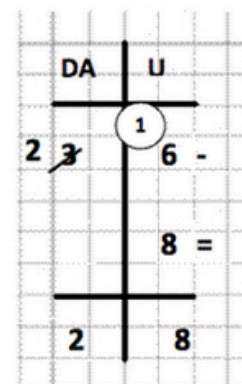
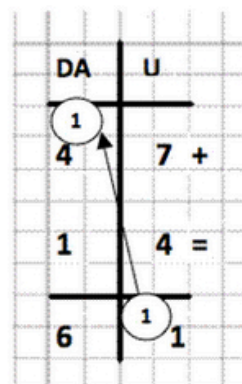
Materiali:

- Pascaline (una per coppia di bambini)
- Almeno una coppia di scatole trasparenti e 50 cannucce legate in fascetti da 10 con elastici (nel caso alcuni bambini ne abbiano bisogno)
- Quaderni

Preparazione e Consegna

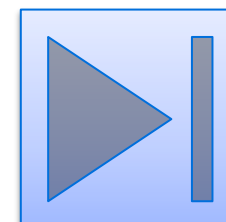
Chiedere ai bambini di spiegare come queste figure possono rappresentare calcoli che si potrebbero svolgere anche con altri strumenti, come i fascetti di cannucce nelle scatole trasparenti, l'abaco (a cui possono pensare).

Nel caso in cui alcuni bimbi li necessitano, si possono mettere a disposizione gli strumenti fisici, altrimenti basta che i bambini pensino alle loro versioni interiorizzate di questi.



Baccaglini-Frank & Robotti Livorno 2014

salta calcolo in colonna



Che cosa aspettarsi

I bambini dovrebbero essere in grado di proporre strategie autonomamente per lo svolgimento dei calcoli con i diversi strumenti. Può essere utile mantenere forte la rappresentazione con la scatole trasparenti, soprattutto per i bambini con difficoltà.

Significati matematici che si vogliono costruire

Questa attività propone di introdurre il calcolo in colonna, come rappresentazione dell'esecuzione del calcolo con l'abaco (e precedentemente con le cannuccie), o come particolare rappresentazione di quello che succede lavorando con la pascalina. Non si mira ad introdurre in modo rigido "la" procedura per il calcolo in colonna, ma di farne emergere una (o diverse) in continuità con il lavoro precedentemente svolto. Vogliamo sottolineare, per l'insegnante, che, per esempio, un'imposizione rigida di partire dalle unità non è necessaria, ma potrebbe emergere come pratica utile per non dover cancellare e riscrivere le decine, aggiustandole in base a nuove composizioni o

ADDIZIONE: strategia 1*

Abaco	Calcolo in colonna
Imposto il primo numero sull'abaco, scomposto in decine e unità.	Scrivo il primo numero scomposto in unità e decine sulla griglia.
	Scrivo il secondo numero, sotto, scomposto in unità e decine sulla griglia.
Aggiungo tante palline sull'asta delle decine quante sono le decine del secondo addendo.	Sommo le decine (colonna a sinistra della griglia) e scrivo (a matita) il risultato.
Aggiungo tante unità sull'asta delle unità quante sono le unità del secondo addendo.	Sommo le unità (colonna a destra della griglia) e scrivo il risultato.
Se supero la decina sull'asta delle unità scompongo il risultato e lascio sull'asta delle unità quante sono le unità di questo risultato e aggiungo all'asta delle decine una pallina per ogni decina del risultato.	Eventualmente aggiusto le decine se il risultato della somma delle unità è maggiore di 10. Scrivo il risultato definitivo per la somma delle decine.
Leggo il numero scomposto in unità e decine che compare sulle aste.	Leggo il numero scomposto in unità e decine che compare in basso nella griglia.

* Questa strategia è più funzionale per il calcolo a mente.

ADDIZIONE: strategia 2**

Abaco	Calcolo in colonna
Imposto il primo numero sull'abaco, scomposto in decine e unità.	Scrivo il primo numero scomposto in unità e decine sulla griglia.
	Scrivo il secondo numero, sotto, scomposto in unità e decine sulla griglia.
Aggiungo tante palline sull'asta delle unità quante sono le unità del secondo addendo. Se supero la decina sull'asta delle unità scompongo il risultato e lascio sull'asta delle unità quante sono le unità di questo risultato e aggiungo all'asta delle decine una pallina per ogni decina del risultato.	Sommo le unità (colonna a destra della griglia) e scrivo il risultato. Se supero la decina, scompongo il risultato e scrivo in alto il numero delle decine del risultato.
Aggiungo tante palline sull'asta delle decine quante sono le decine del secondo addendo.	Sommo le decine (colonna a sinistra della griglia), tenendo conto anche di quelle in più dal calcolo delle unità, e scrivo il risultato.
Leggo il numero scomposto in unità e decine che compare sulle aste.	Leggo il numero scomposto in unità e decine che compare in basso nella griglia.

Questa strategia rispecchia procedure “tradizionali” che però non dovrebbero essere insegnate a memoria, ma conquistate attraverso una “scoperta” da parte dei bambini.

ADDIZIONE: strategia 1*

Analogamente si possono far esplicitare similitudini tra procedure eseguite con la pascalina e procedure di calcolo in colonna, costruendo così il significato di questi ultimi a partire dal primo.

Pascalina	Calcolo in colonna
Imposto le decine e le unità del primo addendo sulle rotelle della pascalina.	Scrivo il primo numero scomposto in unità e decine sulla griglia.
Muovo in senso orario la rotella delle decine di quante decine ha il secondo addendo.	Scrivo il secondo numero, sotto, scomposto in unità e decine sulla griglia.
Muovo in senso orario la rotella delle unità di quante unità ha il secondo addendo.	Sommo le decine (colonna a sinistra della griglia) e scrivo (a matita) il risultato.
Leggo il numero scomposto in unità e decine che compare sulle rotelle.	Sommo le unità (colonna a destra della griglia) e scrivo (a matita) il risultato.

ADDIZIONE: strategia 1*

Pascalina	Calcolo in colonna
Imposto le decine e le unità del primo addendo sulle rotelle della pascalina.	Scrivo il primo numero scomposto in unità e decine sulla griglia.
	Scrivo il secondo numero, sotto, scomposto in unità e decine sulla griglia.
Muovo in senso orario la rotella delle decine di quante decine ha il secondo addendo.	Sommo le decine (colonna a sinistra della griglia) e scrivo (a matita) il risultato.
Muovo in senso orario la rotella delle unità di quante unità ha il secondo addendo.	Sommo le unità (colonna a destra della griglia) e scrivo il risultato.
	Eventualmente aggiusto le decine se il risultato della somma delle unità è maggiore di 10. Scrivo il risultato definitivo per la somma delle decine.
Leggo il numero scomposto in unità e decine che compare sulle rotelle.	Leggo il numero scomposto in unità e decine che compare in basso nella griglia.

* Questa strategia è più funzionale per il calcolo a mente.

Alcuni **software** suggeriti per esercitazioni.

Riassumendo...

Difficoltà nella rappresentazione dei numeri possono emergere da:

- passaggio codice analogico/cod simbolico
- gestione passaggio unità-decine e vs

Difficoltà nell'addizione/sottrazione possono emergere da:

- passaggio cod analogico/cod simbolico
- gestione passaggio unità-decine e vs
- diverse procedure per operandi a più cifre

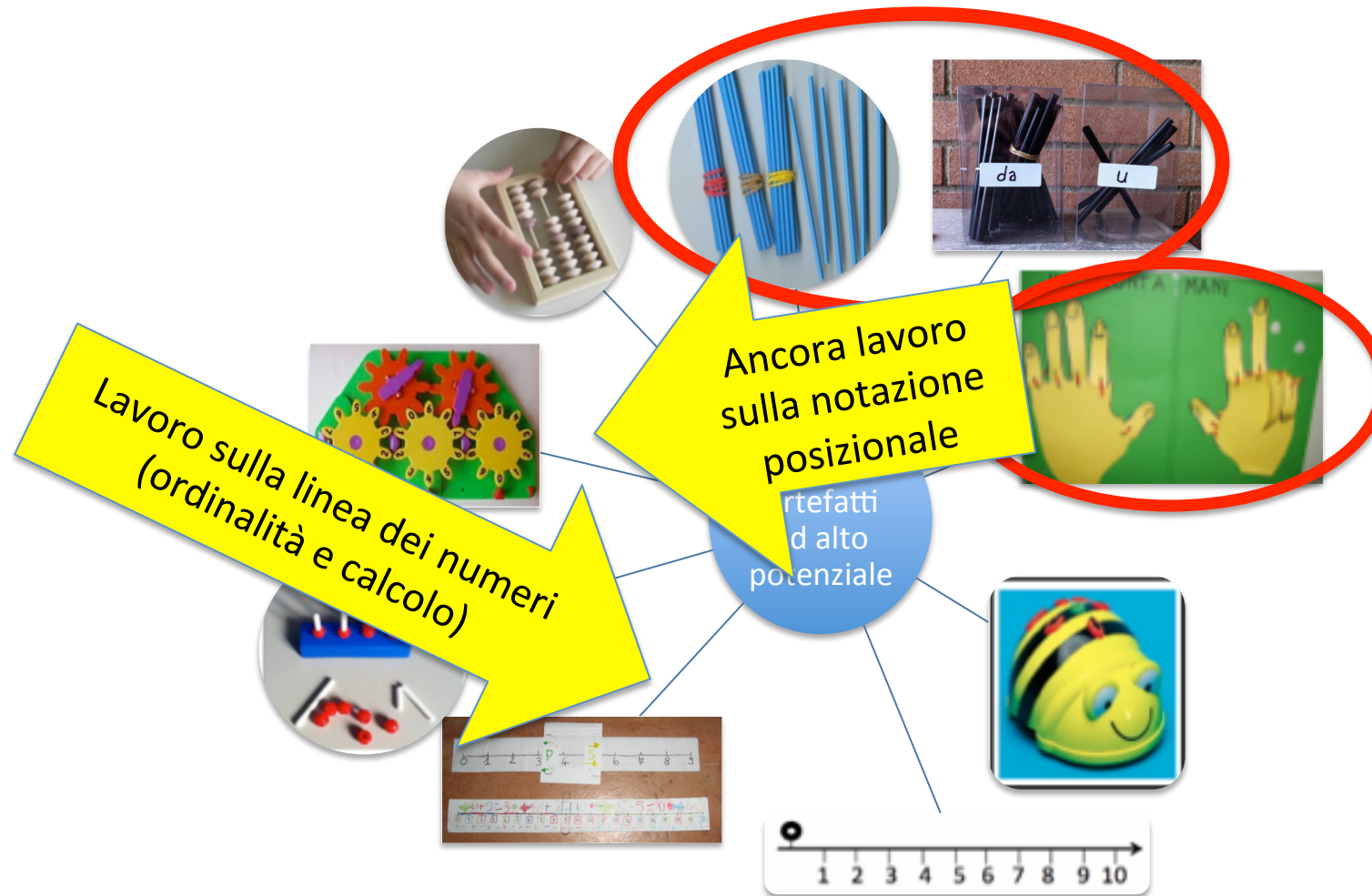
Riassumendo...

		Cannucce e scatole	pascalina	abaco	Carta e penna in colonna
Rappres. s. numeri	Cod analogico/ cod simbolico	analogico	Simbolico (cifre e posizione)	Simbolico posizione, analogico cifre	Simbolico con gestione visuo-spaz.
	Passaggio unità-decine e vs	A carico bambino	A carico strumento	A carico bambino	A carico bambino (anticipatam ente)
Calolo (add/ sott)	Procedura rigida per gestione decine/unità	No, intuitivo e rimane forte la componente analogica	no (come cannucce), a carico dello strumento	no, ma viene insegnata come tale, tutta a carico del bambino	Sì (per il bisogno di “anticipare” il risultato)

Riassumendo...

		Cannucce e scatole	pascalina	abaco	Carta e penna in colonna
Rappres. s. numeri	Cod analogico/ cod simbolico	analogico	Simbolico (cifre e posizione)	Simbolico posizione, analogico cifre	Simbolico con gestione visuo-spaz.
	Passaggio unità-decine e vs	A carico bambino	A carico strumento	A carico bambino	A carico bambino (anticipatam ente)
Calolo (add/ sott)	Procedura rigida per gestione decine/unità	No, intuitivo e rimane forte la componente analogica	no (come cannucce), a carico dello strumento	no, ma viene insegnata come tale, tutta a carico del bambino	Sì (per il bisogno di “anticipare” il risultato)

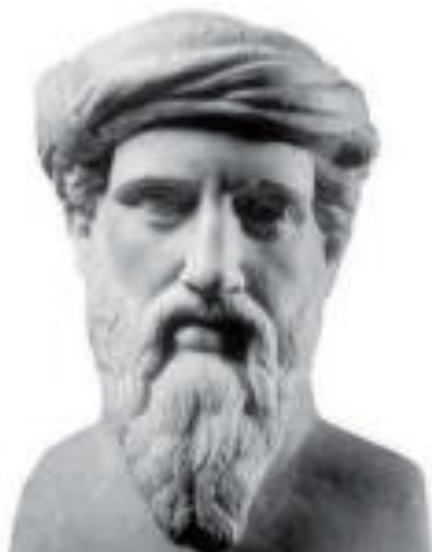
Percorsi fondamentali proposti nel progetto PerContare



Proposte per l'insegnamento delle “Tabelline”

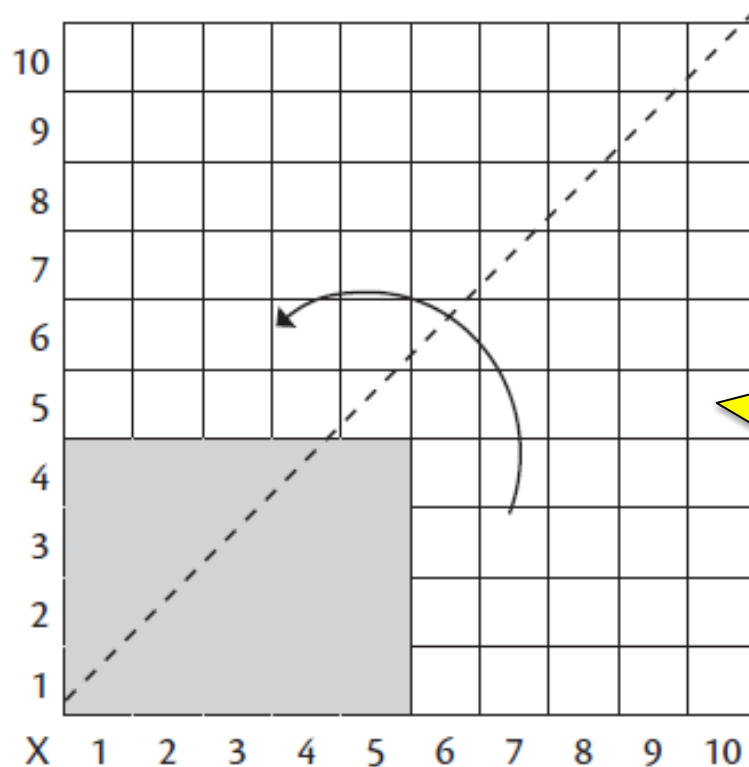
I rettangoli come modello per la moltiplicazione

- ❖ Fanno parte della nostra tradizione culturale: prima i pitagorici poi ripresi da Euclide
- ❖ Le prime ricerche (anni 2000) rivelano buoni risultati
- ❖ In alcune nazioni sono consigliati nel curriculum nazionale (per es. USA)
- ❖ Sono già presenti in alcuni libri di testo



In “Imparare con il Tubò Pitagorico” proponiamo...

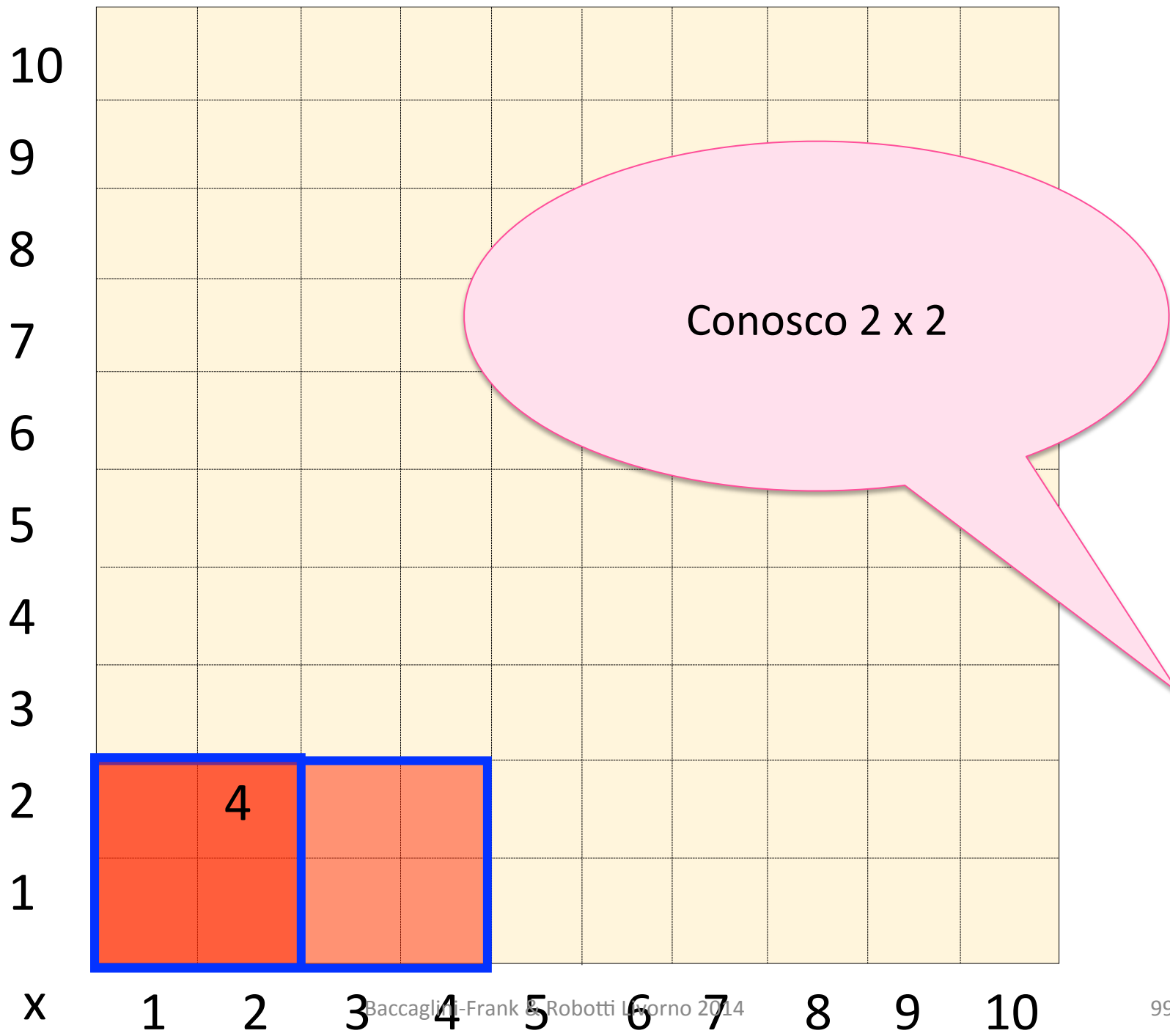
- 5. Se non lo hai fatto al punto precedente, parti con il rettangolo 5 x 4 di cartoncino nella sua posizione nella tabella e rovescialo con un movimento solo in modo che vada a coincidere con il rettangolo 4 x 5.

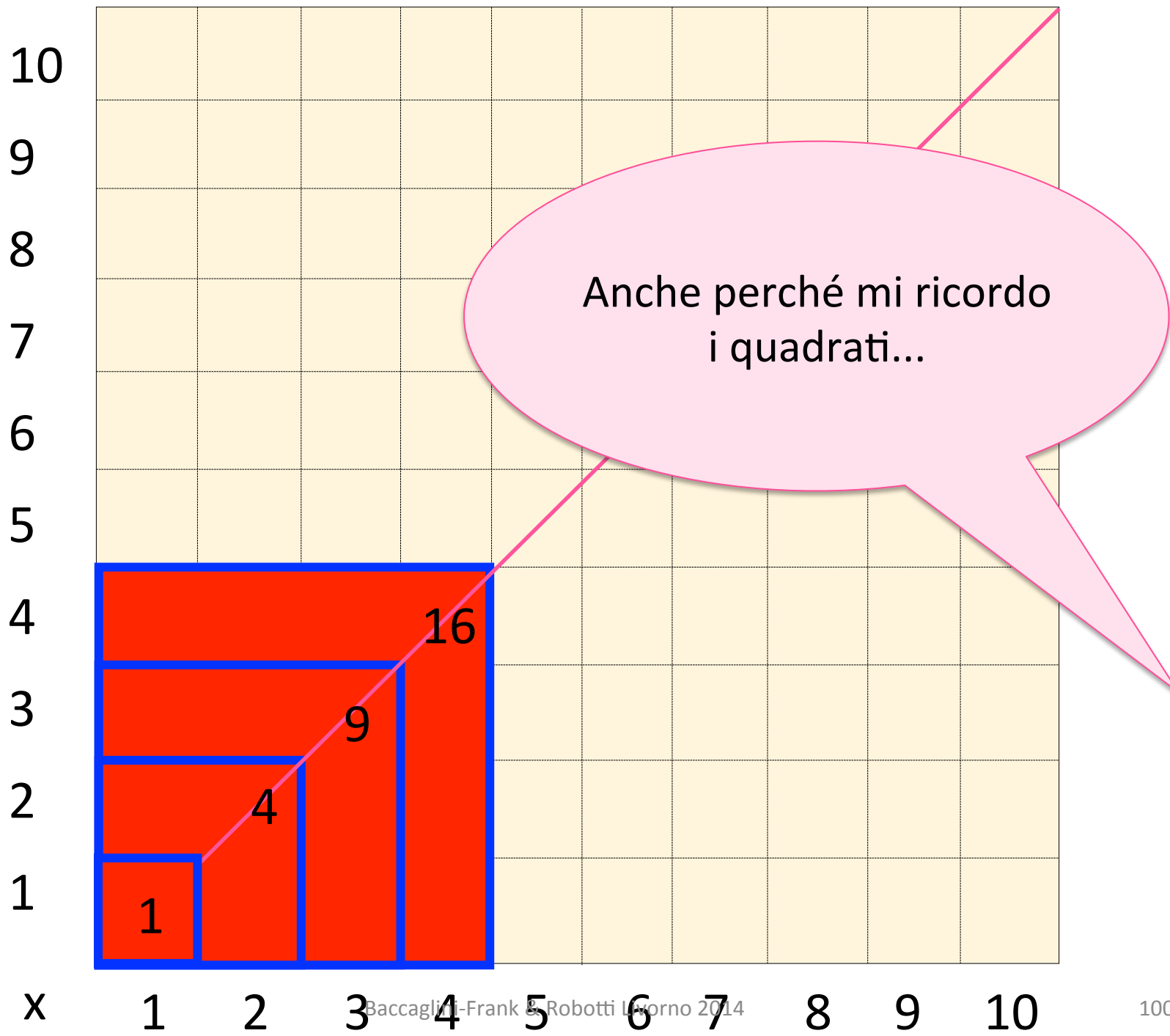


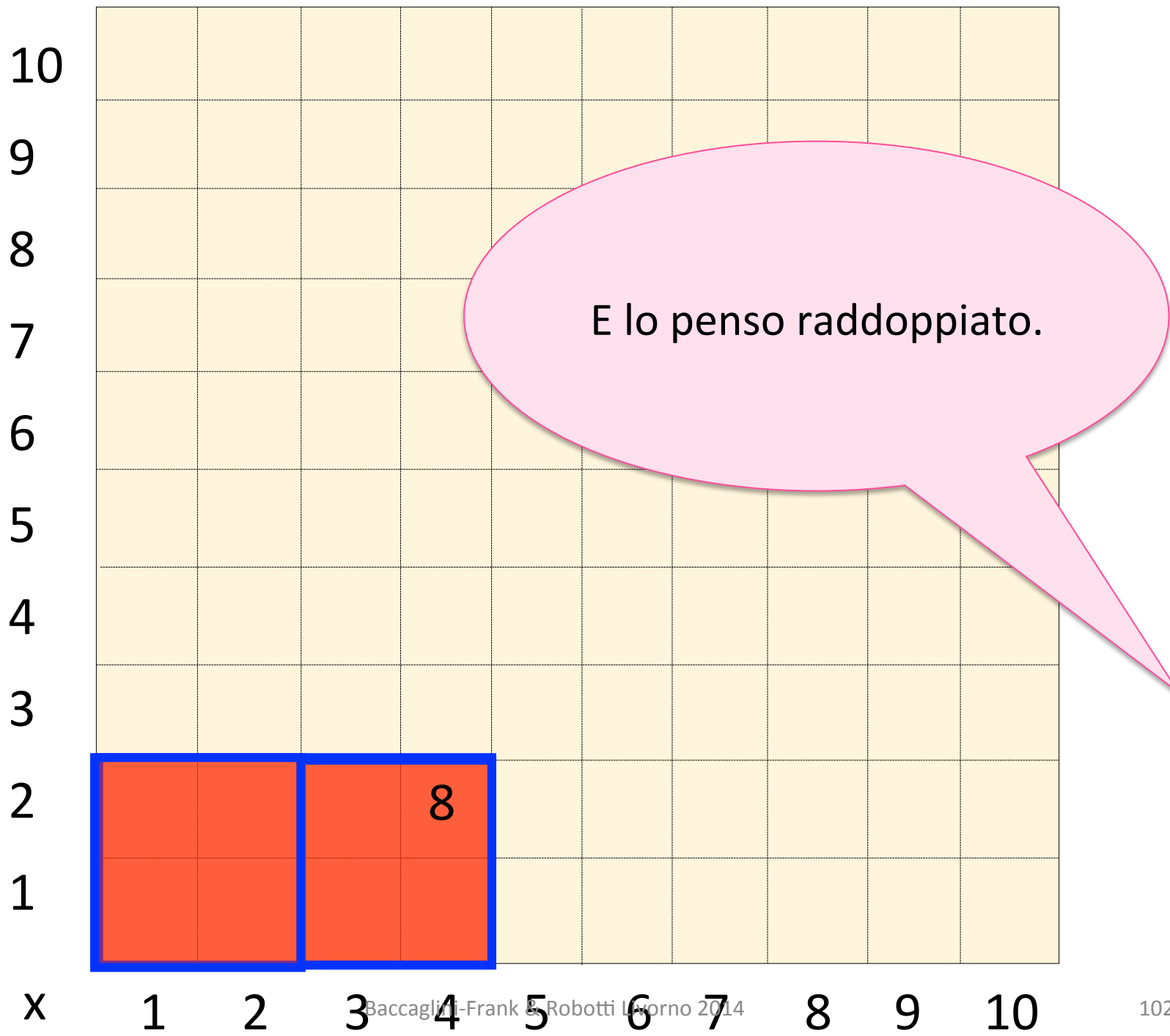
NB:
Tavola
pitagorica
“rovesciata”

Hai fatto una «simmetria» usando la diagonale che va dall'angolo in basso a sinistra all'angolo in alto a destra della tabella.











3. Ora scrivi nel suo angolo in alto a destra il numero di quadretti che contiene.

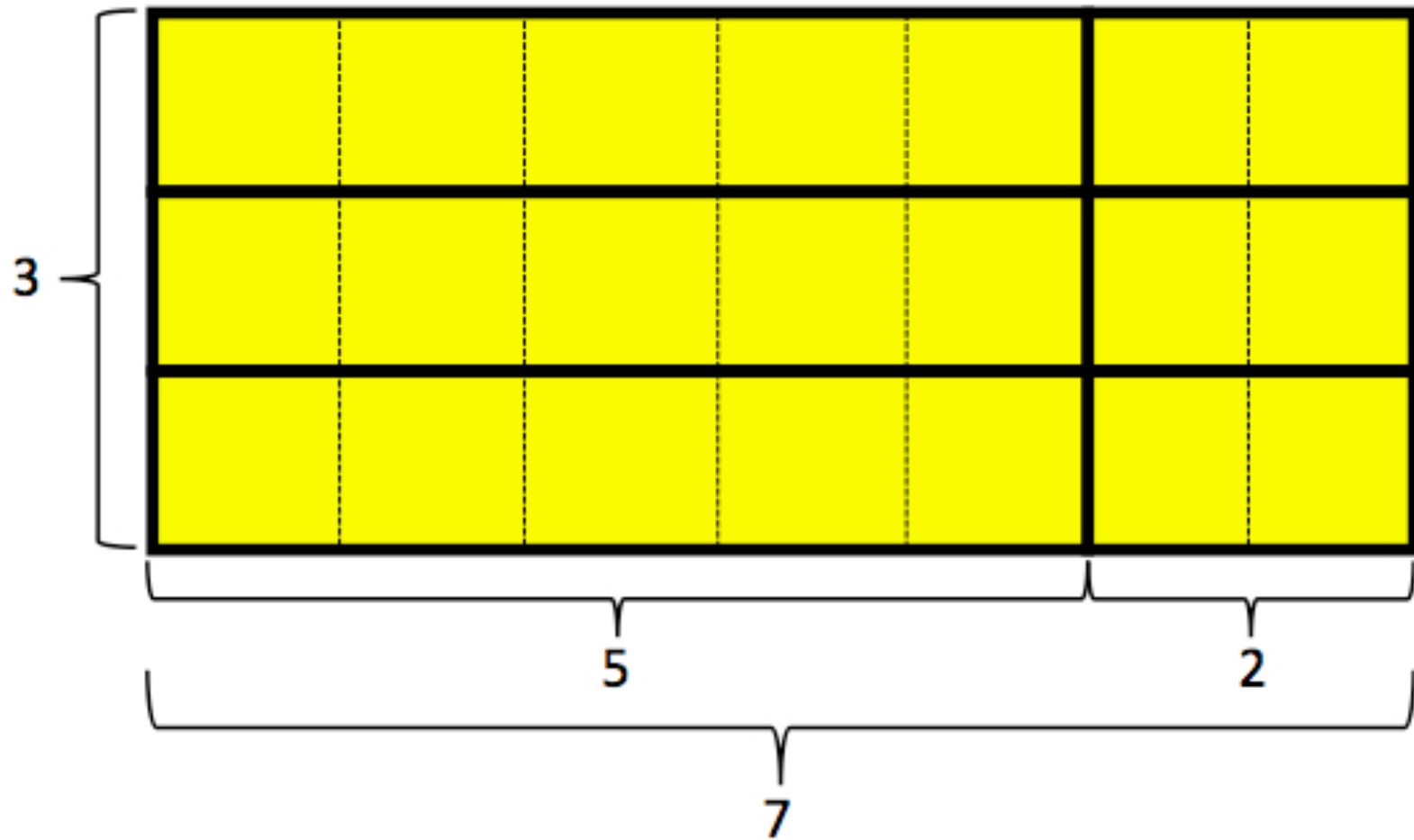
Un modo utile per trovare i quadretti contenuti da un rettangolo con almeno un lato di 9 è vederlo come un rettangolo «10 x qualcosa» (oppure «qualcosa x 10») e poi sottrarre una riga (o una colonna).

Ad esempio, puoi vedere 9 x 6 così.

							54	60

$$9 \times 6 = 10 \times 6 - 6 = 60 - 6 = 54.$$

(continua)





Difficoltà di apprendimento
in geometria

Difficoltà di apprendimento
in algebra

L'apprendimento della geometria

Sembra essere il risultato di differenti abilità :

- Legate al linguaggio - conoscenza dichiarativa (es. termini, definizioni, teoremi....),
 - Legate all'astrazione e al ragionamento - di problem solving (es. riconoscimento di invarianti, soluzione di problemi....)
 - Legate alla memoria (es. memorizzazione di informazioni e procedure, memoria di lavoro visuospatiale)
- ABILITA' VISUOSPAZIALI (scomposizione di figure, costruzione di figure solide, calcolo del volume – a partire da unità di base, memoria di lavoro - ex: colora la superficie dove tutte le figure si intersecano...)

L'apprendimento della geometria

Sembra essere il risultato di differenti abilità :

- Legate al linguaggio - conoscenza dichiarativa (es. termini, definizioni, teoremi....),
 - Legate all'astrazione e al ragionamento - di problem solving (es. riconoscimento di invarianti, soluzione di problemi....)
 - Legate alla memoria (es. memorizzazione di informazioni e procedure, memoria di lavoro visuospatiale)
- ABILITA' VISUOSPAZIALI (scomposizione di figure, costruzione di figure solide, calcolo del volume – a partire da unità di base, memoria di lavoro - ex: colora la superficie dove tutte le figure si intersecano...)

L'apprendimento della geometria

- La **carenza** però non sarebbe nel "magazzino passivo", quanto piuttosto **nella capacità di manipolare i contenuti della memoria ai diversi livelli di attività**: per conservare a lungo l'informazione, per analizzarla ed "aggiustarla", per trasformarla e reinterpretarla.
- Secondo Cornoldi (1999) queste **operazioni coinvolgono l'attività immaginativa visiva**. Infatti, le immagini mentali richiedono che contenuti visuo-spaziali, sia di esperienze immediatamente precedenti sia appartenenti al mondo dei ricordi, siano organizzati ed elaborati dalla memoria di lavoro.

Queste ipotesi, ridefiniscono in parte le caratteristiche proprie della Sindrome non verbale (Cornoldi et al., 1997):

- blocco di fronte a consegne difficili: probabilmente questa è una modalità difensiva per non lasciarsi sopraffare dall'eccessivo carico di informazioni che deve gestire (la capacità di memoria visuo-spaziale è limitata);
- approccio al compito di tipo top-down: il soggetto agisce soprattutto in base agli schemi mentali attivati, più che alle informazioni esterne; tende a fissarsi su un'idea senza prestare sufficiente attenzione agli stimoli esterni: ne consegue una certa perseveranza nell'errore o difficoltà a cambiare set di risposta;
- difficoltà nel manipolare, costruire e progettare l'immagine mentale;
- difficoltà nella pianificazione e progettazione di molti compiti;
- impaccio di fronte alla novità: soggetti top-down vedono quello che hanno in mente e non si accorgono delle eccezioni o dei particolari nuovi;
- difficoltà della memoria di lavoro visuo-spaziale;
- uso privilegiato del canale uditivo-verbale per elaborare le informazioni. Utilizzo del linguaggio a supporto e compensazione del deficit visuo-spaziale.

In particolare, sembra importante

Usare un codice che consenta di alleggerire
il carico della memoria visuo spaziale:
permetta di vedere più informazioni
simultaneamente e di mettere in relazione
oggetti geometrici

Canali di accesso alle informazioni e stili d'apprendimento



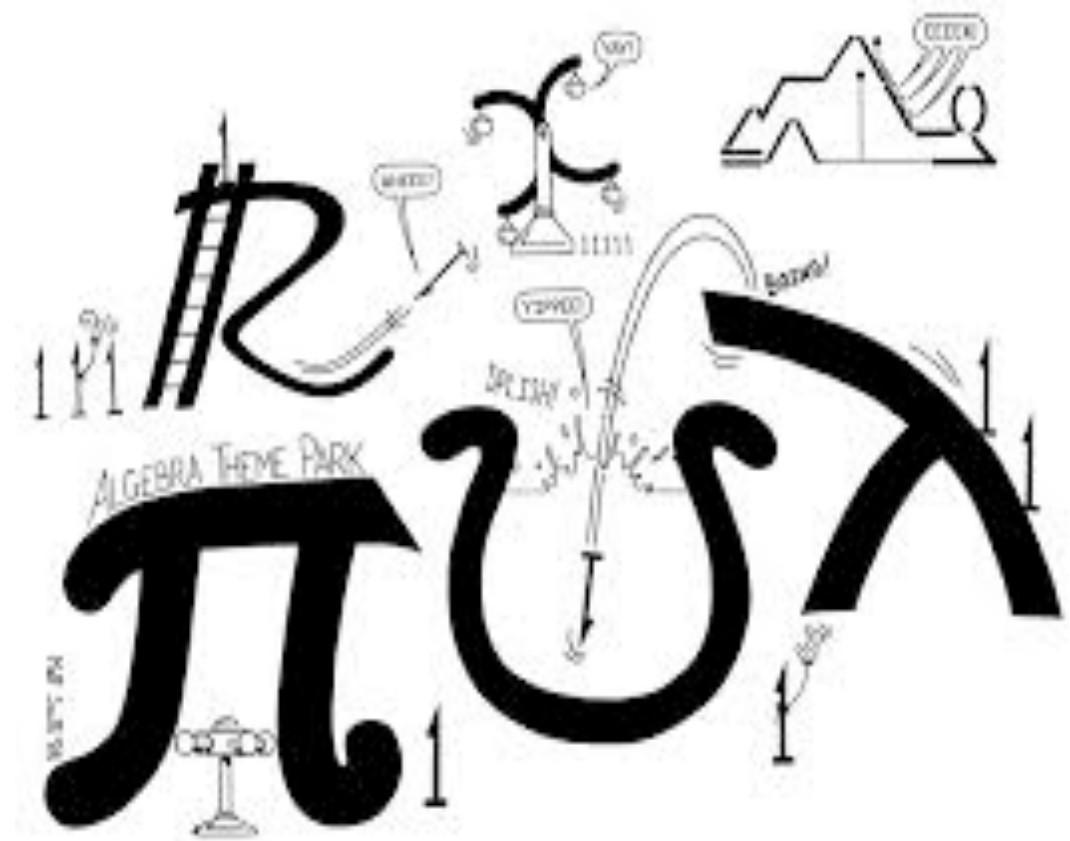
Servono strumenti che consentano di costruire immagini che hanno caratteristiche simili alle immagini mentali e che consentano di manipolarle come se fossero immagini mentali

L'oggetto matematico che gli studenti utilizzano in un software di geometria dinamica può essere da loro visto in due modi diversi: come *semplice figura* (ossia facendo leva sugli aspetti percettivi di osservazione) oppure come *figura legata a una teoria* (cioè facendo leva sugli aspetti concettuali)

Figural concept: le figure geometriche sono entità mentali che possiedono contemporaneamente proprietà concettuali (per es: proprietà della geometria euclidea) e proprietà figurali (forma, posizione, grandezza)

Un ragionamento geometrico produttivo (come una dimostrazione) può essere spiegato dal fatto che aspetti concettuali e figurali si fondono *in concetti figurali*

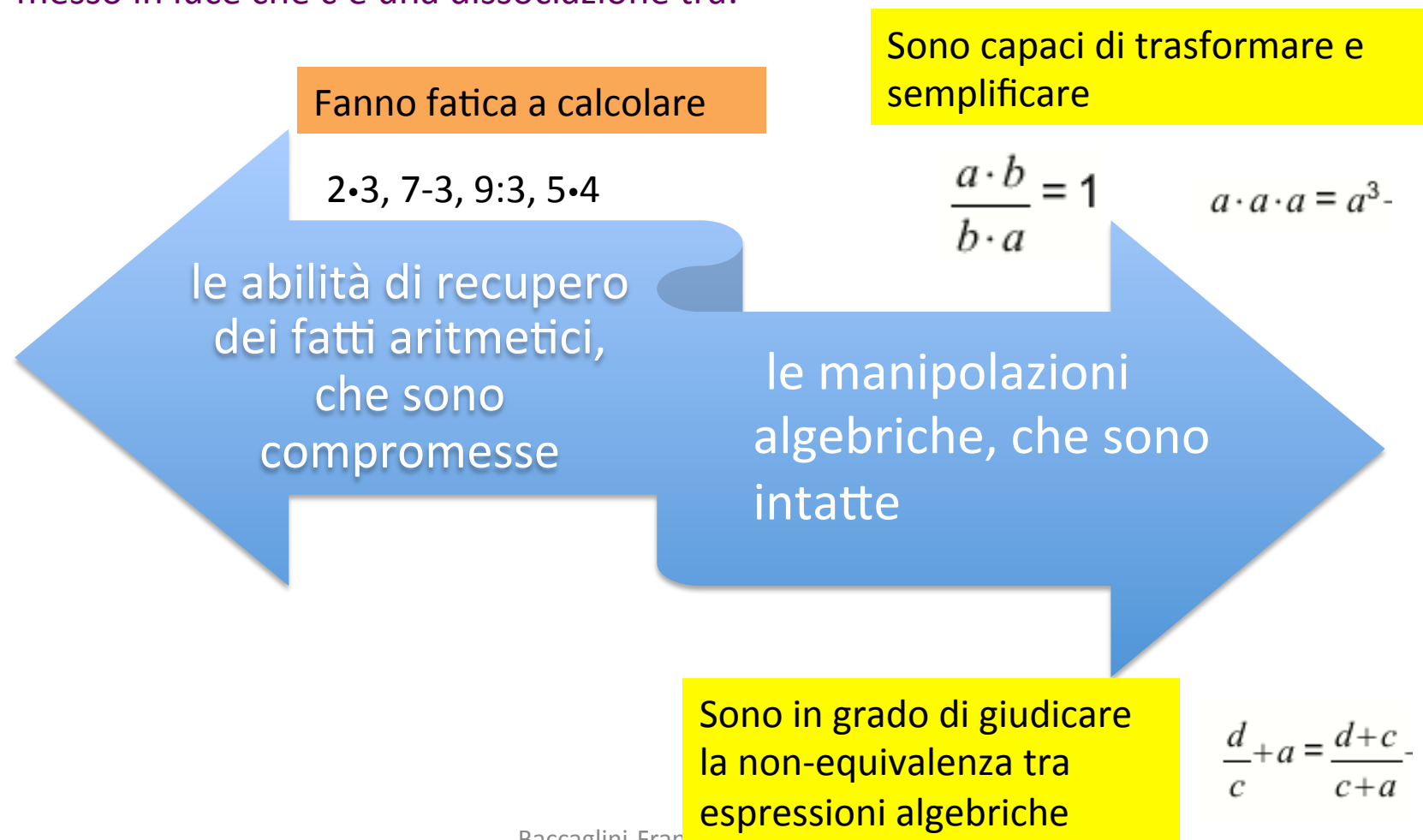
*La Discalculia Evolutiva e l'apprendimento
dell'algebra:
Alcune premesse*



Discalculia e apprendimento dell'algebra

dal punto di vista delle neuroscienze

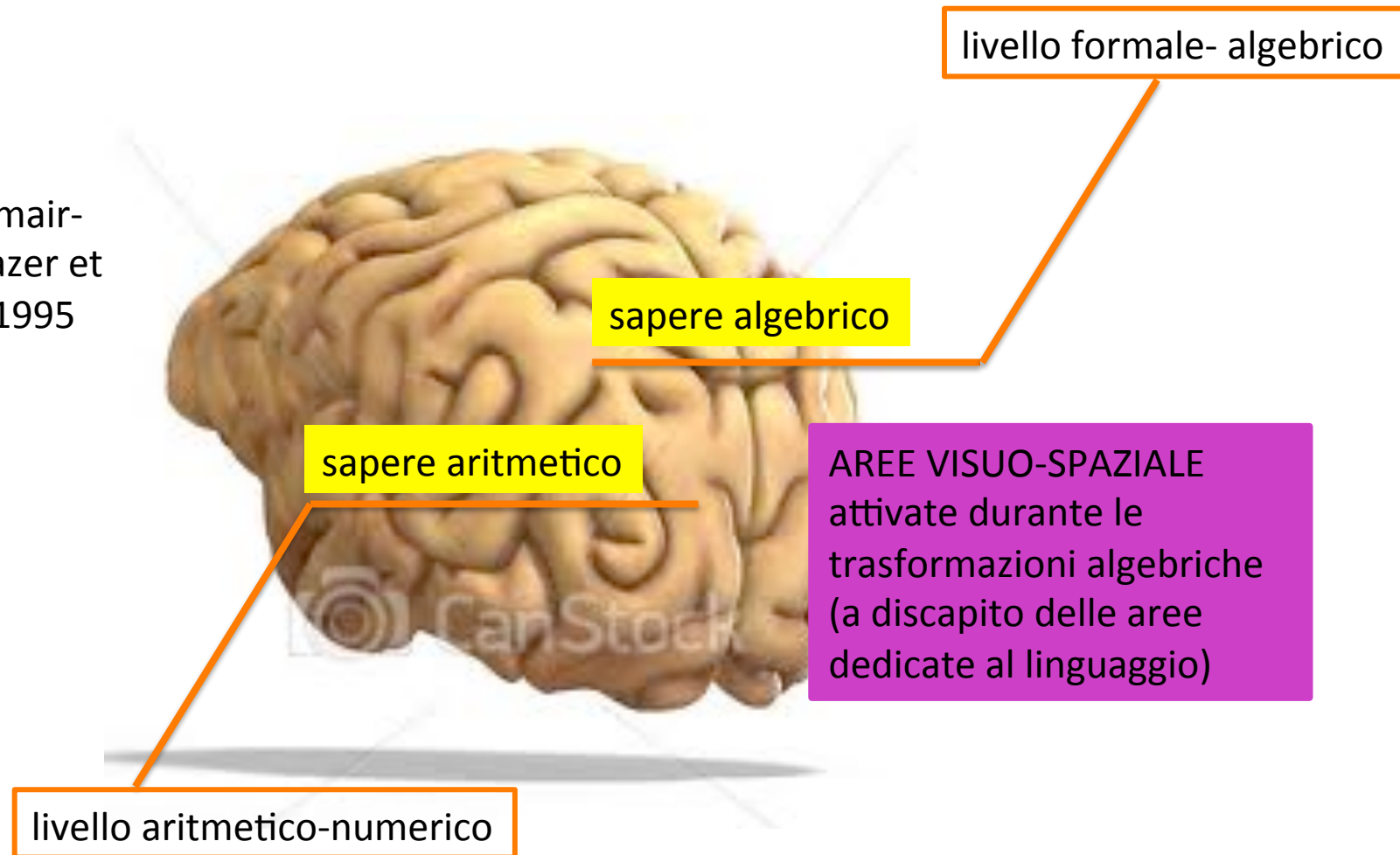
Ricerca su soggetti con discalculia (Hittmair-Delazer et al., 1995, Dehaene, 1997) ha messo in luce che c'è una dissociazione tra:



Discalculia e apprendimento dell'algebra

dal punto di vista delle neuroscienze

Hittmair-
Delazer et
al., 1995



Dissociazione tra linguaggio e aritmetica

LINGUAGGIO NATURALE E ARITMETICA

Houde &
Tzourio-
Mazoyer, 2003;
Venkatraman,
Ansari, & Chee,
2005; Zago et al,
2001

- Le competenze relative al **calcolo aritmetico sono legate principalmente all'area visuo spaziale** del cervello (parte bilaterale frontale): nello svolgimento di compiti aritmetici sono attivate le aree cerebrali associate alla memoria visuospatiali e alle immagini mentali
- **Indipendenza fra i meccanismi alla base del linguaggio e quelli alla base del calcolo** (parietofrontale bilaterale e la circonvoluzioni temporale inferiore bilaterale)

Butterworth,
1999

In aritmetica (e in algebra) sono sfruttati aspetti visuo-spaziali

I matematici hanno sfruttato da sempre il fatto che **configurazioni spaziali di simboli potessero essere usate per mettere in evidenza le strutture di espressioni, strutture “a nodo”** (nested structures). Per esempio, separare il numeratore e il denominatore con una **linea di frazione** orizzontale, usare **parentesi aperte e chiuse** per *delimitare le strutture algebriche e definire la priorità*.

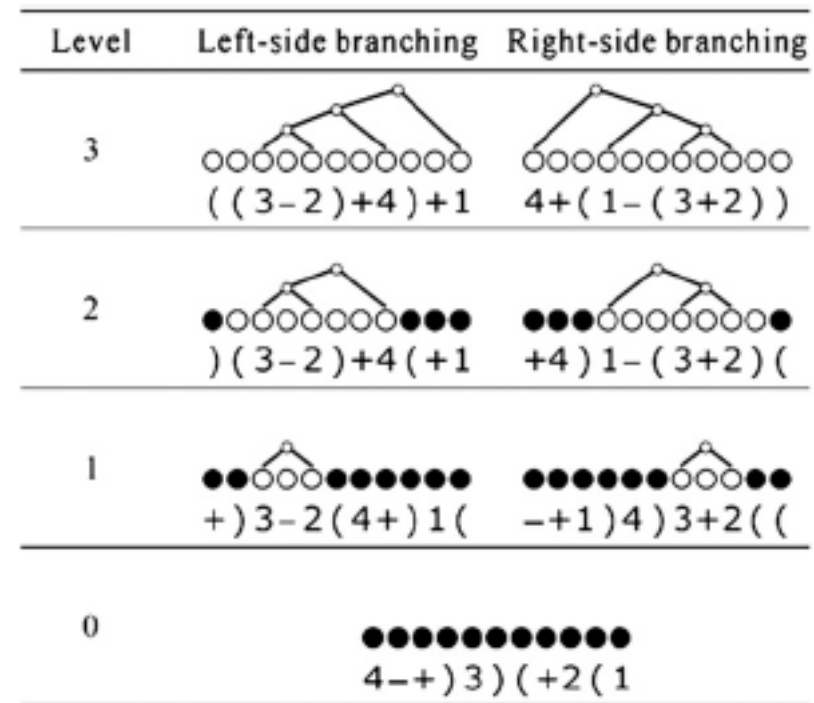
Configurazioni spaziali e sintassi di espressioni matematiche: risultati della ricerca

Alcune ricerche hanno messo in evidenza che le strutture cerebrali responsabili dell'analisi di strutture nidificate - strutture di espressioni numeriche come $1+(4-(2+3))$ - non sono condivise con quelle dedicate alla sintassi delle espressioni linguistiche.

Si sono considerati 11 simboli combinati in modo diverso fra loro:

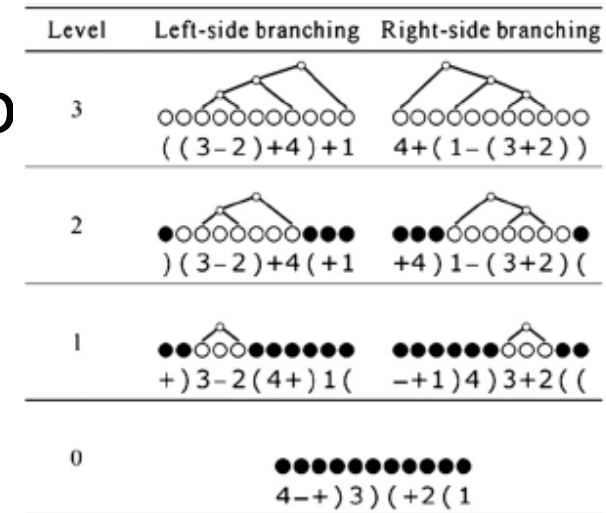
- In modo errato, come $4-+) 3) (+ 2 (1$
- In modo corretto come $((3-2)+4)+1$

Definendo 4 livelli di complessità crescente:



Maruyama, M., Pallier, C., Jobert, A., Sigman, M., & Dehaene, S. (2012). The cortical representation of simple mathematical expressions. *NeuroImage*, 61(4), 1444–1460.

Osserviamo che nel dominio numerico,
qualsiasi espressione
sintatticamente ben formata è
anche semanticamente corretta.



Quindi, nello schema sopra, la **sintassi** e la **semantica** non possono essere considerate separatamente, ed è per questo che l'interesse di questa ricerca si concentra su come il cervello gestisce/rappresenta espressioni matematiche elementari a “incastri”.

Attenzione:

Cosa dovrebbe essere l'algebra?

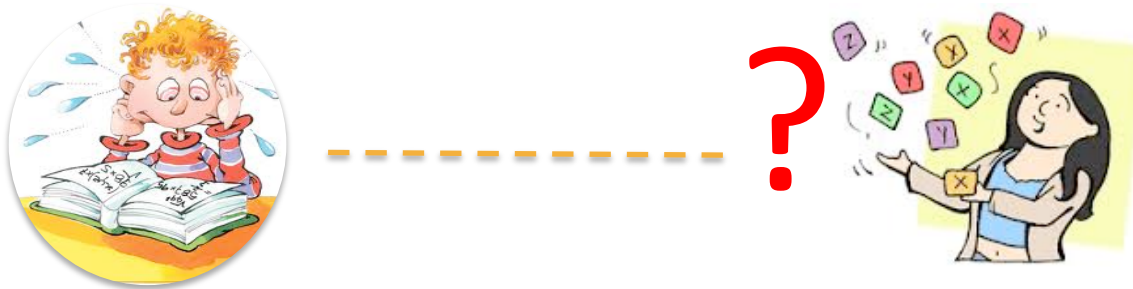
1. Uno strumento per esprimere/
descrivere il mondo.
2. Uno strumento per risolvere i
problemi.
3. Uno strumento culturale che aiuta a
pensare in modo astratto.

Spesso nell'insegnamento (e per ricercatori di altre discipline) diventa

1. Manipolazione senza significato di simboli
2. Non necessaria nella vita
3. Vista come difficile, arida, astratta, inutile
4. Discriminante nelle scelte di studio superiore.

Discalculia e apprendimento dell'algebra

dal punto di vista delle neuroscienze



Qual è la natura delle difficoltà di studenti con discalculia in algebra?

Difficoltà in Algebra di studenti con DD

Sfard, 1992
Thomas & Tall,
1988

Difficoltà di natura semantica: **attribuire significato delle nozioni algebriche** (variabile, incognita, parametro, espressione algebrica, equazione, soluzione di una equazione, identità ...)

(Baccaglini-Frank e Robotti 2013; Robotti e Ferrando, 2013)

- Costruire un senso per i simboli algebrici
- Gestire competenze di natura aritmetica (per esempio uso di fatti aritmetici) Le difficoltà aritmetiche incidono sulla prestazione algebrica ma quest'ultima ha una natura diversa.
- Gestire nuove competenze relative all'uso di regole di trasformazione algebrica.
- Memoria per le regole algebriche
- Conoscere i fatti algebrici (ex $a \cdot a = a^2$)

Aritmetica e Algebra

cambio di significato dei simboli

SIMBOLI	ARITMETICA	ALGEBRA
+/- x/:	Operazioni binarie; Operazioni eseguibili con algoritmi che portano a un “risultato” $3+4=7$, $5-7 = -2$	Operazioni binarie, ma anche operazioni ‘sospese’ $3+x$, $2x+5y$ Operazioni ‘eseguibili’ con regole di calcolo (proprietà) $3x + x - 7x = -3x$ le operazioni non sono più 4
-	Segno per numero negativo; segno differenza	Operazione unaria: $-x$
=	Segno orientato di operatore Operazioni = risultato $12 + 7 = 19$	Relazione: uguaglianza, uguaglianza aperta; equivalenza, uguaglianza funzionale $2(a+b) = 2a+2b$ $7x-4 = 28 + 15$ $Y=3x-2$

Aritmetica e Algebra

cambio di significato dei simboli

SIMBOLI	ARITMETICA	ALGEBRA
a,b,c,d,e,f,...x,y,z, ...	Formule in geometria e fisica $A = b \times h / 2$ $V = \pi r^3$ $v = s / t$	Incognite, variabili, parametri, numeri in generale Espressioni algebriche
Sintassi dei caratteri	Significato additivo della scrittura posizionale 324 significa 3 centinaia più 2 decine più 4 unità	Significato moltiplicativo ab significa a moltiplicato b

Come possiamo migliorare i processi di insegnamento-apprendimento in metemática?

Interventi centrati prevalentemente sul significato

Idee per la didattica con soggetti discalculici della scuola secondaria

- la **costruzione e il recupero del significato** delle nozioni algebriche e geometriche si possono realizzare tramite un registro di rappresentazione di tipo visuo-spaziale piuttosto che di tipo prevalentemente verbale.
- **L'approccio visuo-spaziale**, che caratterizza l'idea didattica più innovativa, sembra essere efficace sia per attribuire significato ai concetti algebrici (variabile, espressioni, equazioni, ecc.) sia alle procedure manipolative (legate, per esempio, alla soluzione delle equazioni e realizzate tramite l'applicazione di regole e proprietà).
- Ciò suggerisce l'importanza, dal punto di vista didattico, delle **modalità, degli strumenti e dei contesti** con i quali i concetti matematici vengono proposti. Gli strumenti (siano essi carta e penna, abaco, software...) possono mediare l'introduzione di una nuova nozione matematica in modi diversi fornendone, di fatto, diverse rappresentazioni sulla base delle quali elaborare immagini e modelli mentali.

Ruolo della tecnologia

- Occorrono strumenti che consentano di mediare l'introduzione di nozioni matematiche attraverso rappresentazione di tipo grafico piuttosto che verbale.
- la ricerca in didattica mostra che ciò è possibile sfruttando le rappresentazioni fornite da diversi strumenti di mediazione didattica (digitali e non).
- In particolare ci interessano **strumenti software** che consentono alle rappresentazioni di avvalersi della caratteristica di *dinamicità*, essenziale per poter *rendere esplicite le relazioni matematiche fra gli oggetti matematici* in gioco e per poterne costruire i *significati*.

La tecnologia può

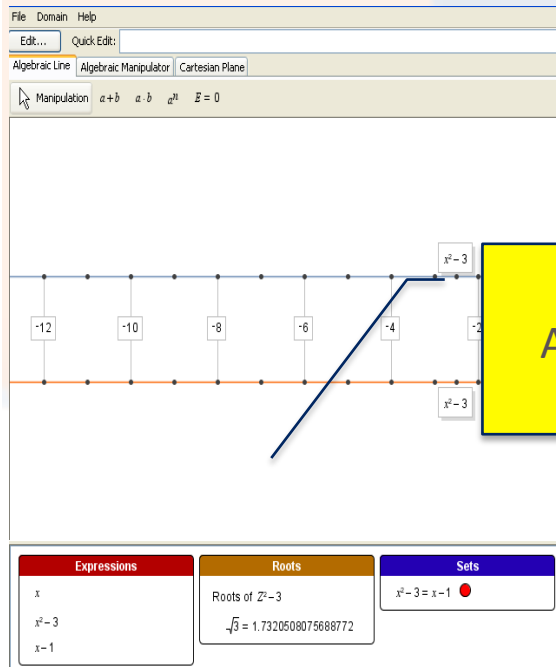
- Compensare vari deficit
- **Abilitare**, nel senso didattico del termine, cioè fornire supporto per dare accesso al significato dei concetti matematici

COME?



AINuSet – Algebra of Numerical Sets

Algebraic Line

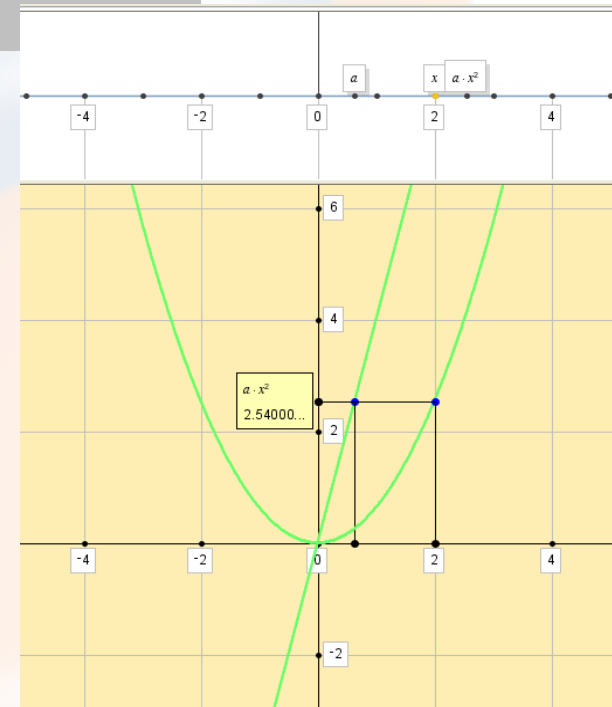


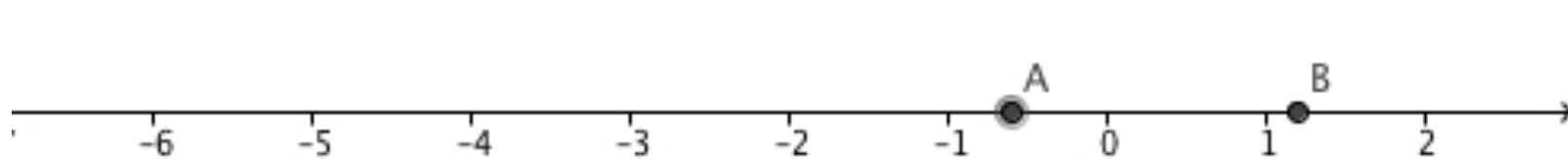
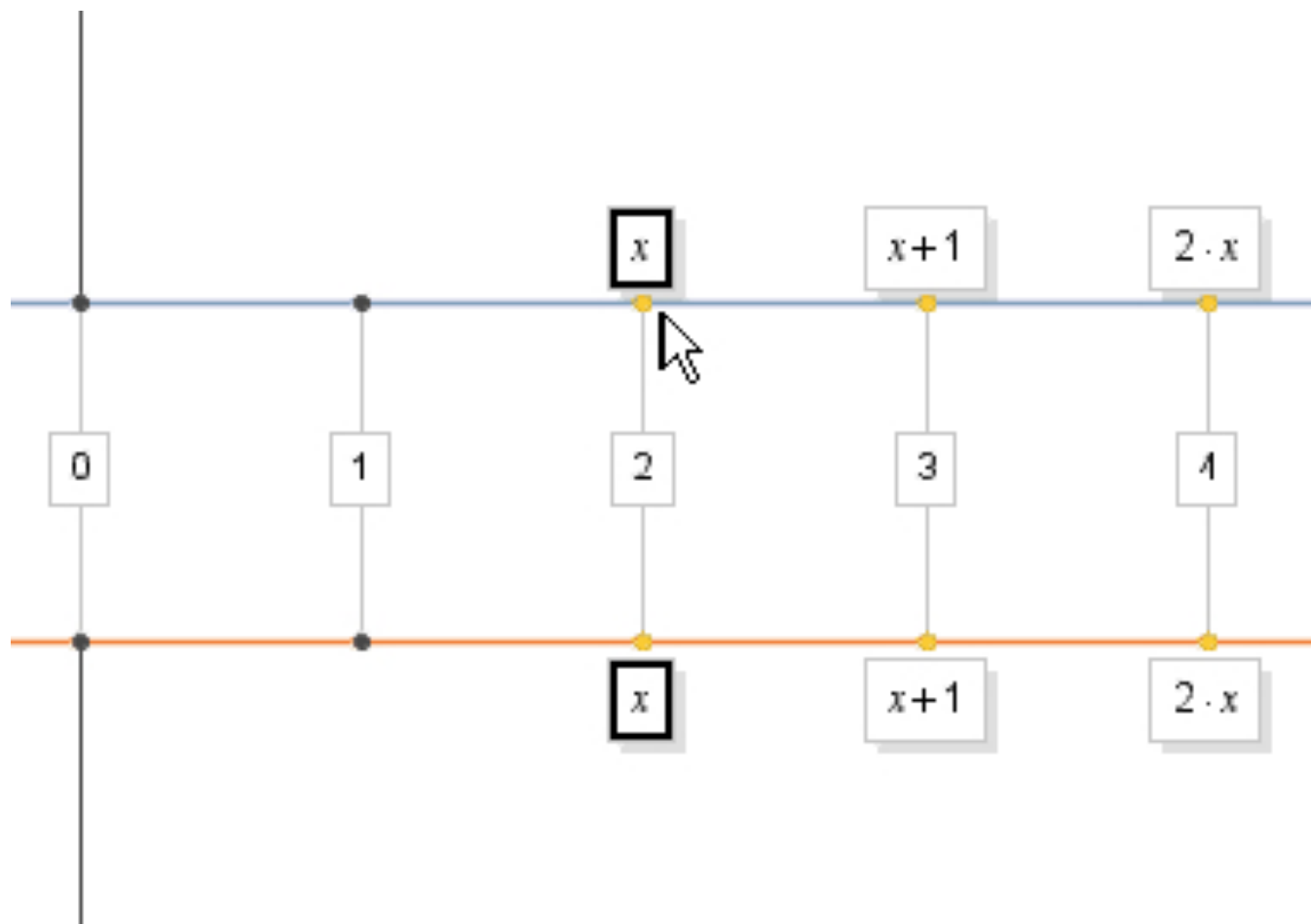
Aspetti Semantici

Algebraic Manipulator	
Sartorian Plane	
Use Rules	Show Import... Export... Clear
Addition	Multiplication
$A+B \Leftrightarrow B+A$	$A \cdot B \Leftrightarrow B \cdot A$
$A+(B+C) \Leftrightarrow (A+B)+C$	$A \cdot (B \cdot C) \Leftrightarrow (A \cdot B) \cdot C$
$A \Leftrightarrow A+0$	$A \Leftrightarrow A \cdot 1$
$A+A \Leftrightarrow 0$	$A \cdot 0 \Leftrightarrow 0$
$A-B \Leftrightarrow A+(-B)$	$-A \Leftrightarrow -1 \cdot A$
$a_1+a_2+\dots \Rightarrow x$	$1 \Leftrightarrow -1 \cdot -1$
$n \Rightarrow a+b$	$A \cdot \frac{1}{A} \Leftrightarrow 1$
Powers	$\frac{A}{B} \Leftrightarrow A \cdot \frac{1}{B}$
$A^n \Leftrightarrow A \cdot A \cdot \dots$	$\frac{1}{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots} \Leftrightarrow \frac{1}{A_1} \cdot \frac{1}{A_2} \cdot \dots$
$A^{n_1+n_2+\dots} \Leftrightarrow A^{n_1} \cdot A^{n_2} \cdot \dots$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \Rightarrow x$
$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots)^n \Leftrightarrow A_1^n \cdot A_2^n \cdot \dots$	$n \Rightarrow p_1 \cdot p_2 \cdot \dots$
$(A^n)^m \Leftrightarrow A^{n \cdot m}$	
$A^{-n} \Leftrightarrow \frac{1}{A^n}$	
$A^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{A}$	
	</

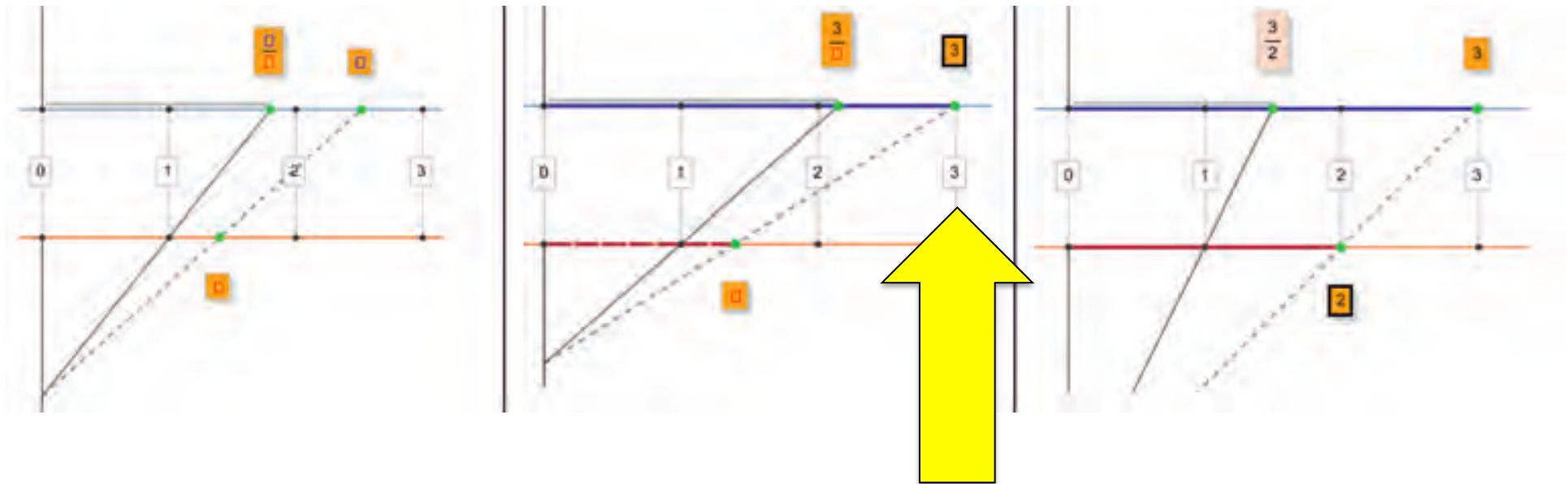
Aspetti Sintattici

Cartesian Plane



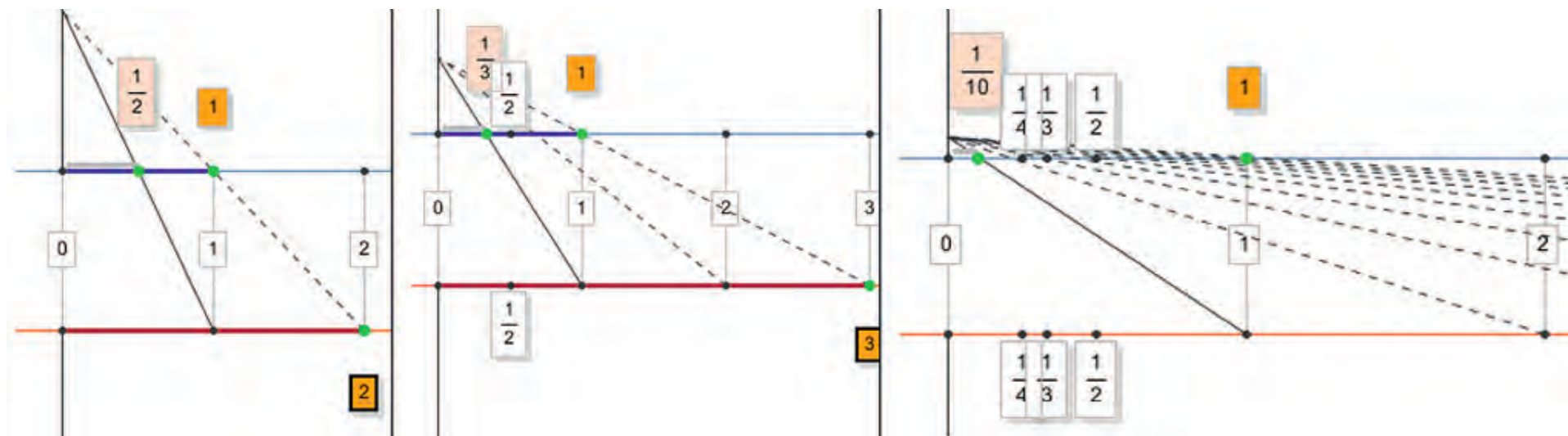


Costruzione della frazione $\frac{3}{2}$ mediante il modello geometrico della divisione sulla Retta Algebrica.



aggiusta la retta in modo
che passi per 3 e per 2

**Costruzione di frazioni aventi 1 come
numeratore per osservare che
all'aumentare del denominatore la
frazione è sempre più piccola.**



Tangente e derivata

Esplora

Alice e Filippo non hanno ben chiaro il legame tra le nozioni di tangente e derivata e discutono tra di loro.

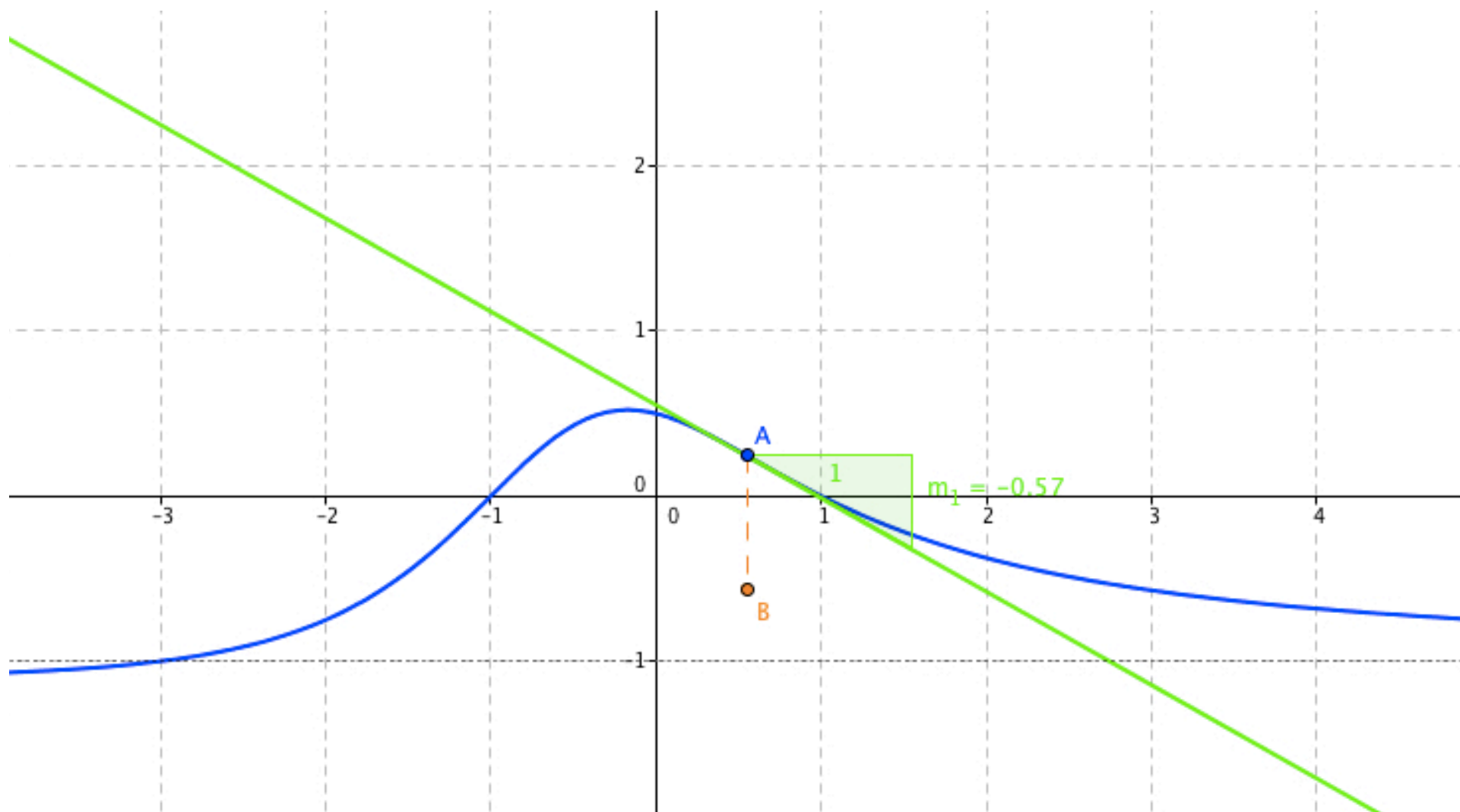
Alice: Senti Filippo, io ho studiato le definizioni di derivata e di tangente, e so anche le regole per calcolare la derivata delle funzioni base e addirittura quella di altre funzioni... ma alla fine non so bene che cosa immaginarmi quando parlo di derivata. Invece quando penso alla tangente di una funzione mi vedo una retta che è tangente al grafico...ma che cosa c'entra con la derivata? Che confusione...

Filippo: Beh, non sono la persona migliore per parlarti di teoria, ma la prima cosa che io visualizzo per aiutarmi a legare la tangente alla derivata è proprio la "m" della retta tangente, cioè il coefficiente angolare, e questo te lo dà, per ogni punto, la derivata.

L'insegnante sottolinea come i due ragazzi abbiano esplicitato una questione interessante che vale la pena approfondire. Costruisce così il file `funz_tg.ggb` perché possano rifletterci ancora un po'. La funzione proposta nel file è

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + x + 2}$$

Agli studenti si chiede di capire cosa rappresenta la traccia del punto B.



Tangente e derivata

* Data la funzione $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x+2}$ determinare l'equazione della tangente alla funzione nel punto $x = 1$ [Nota per insegnante: si suggerisce di riprendere i ragionamenti fatti da Alice e Filippo, eventualmente usando il file funz_tg.ggb e tg_mvaria.ggb)

Esplora

Data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + x + 2}$$

determinare se esiste un punto del suo dominio in cui il coefficiente angolare della tangente vale 1. Se esiste, trovarne le coordinate precise, altrimenti spiegare perché non esiste.

(alcuni) ruoli della tecnologia

- Strumenti software come Cabri-géomètre o GeoGebra consentono di costruire figure che possono essere assimilate a *concetti figurali*, perchè mantengono le proprietà geometriche (caratteristica di dinamicità) e funzionano come immagini mentali e possono essere manipolate in luogo delle immagini mentali
- Possono supportare la memoria di lavoro visuo-spaziale
- Possono contribuire a diminuire il blocco di fronte a consegne difficili, sostengono il soggetto nell'agire in base alle informazioni fornite.

Una piccola raccomandazione

Non è tutto oro quello che luccica!

- Non esistono strumenti che possono insegnare al posto dell'insegnante
- Non esistono tecniche didattiche o strumenti che vanno bene per tutti
- Non esistono metodologie didattiche per fare le cose alla svelta

Diffidate da chiunque vi promette qualcosa del genere!

*Grazie
e
Buon Lavoro*



Bibliografia



Aritmetica in pratica *Strumenti e strategie dalla tradizione cinese per l'inizio della scuola primaria*

Maria Giuseppina Bartolini
Bussi, Alessandro Ramploud,
Anna Baccaglini-Frank

Bibliografia



Imparare con il Tubò pitagorico
*Esercizi e strategie per l'uso delle
tabelline nelle moltiplicazioni e divisioni*

Andrea Maffia, Anna Baccaglini-Frank

Bibliografia



Numeri in movimento

*Attività per apprendere l'aritmetica
con la pascalina*

Michela Maschietto, Ketty Savioli

Bibliografia

- ASPFI (2011). *Il progetto PerContare*. All'indirizzo percontare.asphi.it
- Baccaglini-Frank, A. (2013a). Analisi delle Potenzialità di Applicazioni Multi-Touch per la Costruzione del Significato di Numero Naturale. *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 36 A N.3, 237-262.
- Baccaglini-Frank, A. (2013b). Cap. 13, L'uso di ambienti digitali per l'apprendimento. In Elisabetta Genovese, Enrico Ghidoni, Giacomo Guaraldi (a cura di), *Discalculia nei giovani adulti Indicazioni e strumenti per uno studio efficace*. (153 -158) Erickson Editore.
- Baccaglini-Frank, A. (2013c). Cap. 14, Agevolare la costruzione di significati matematici con l'uso di software. In Elisabetta Genovese, Enrico Ghidoni, Giacomo Guaraldi (a cura di), *Discalculia nei giovani adulti Indicazioni e strumenti per uno studio efficace*. (159-190).
- Baccaglini-Frank, A. (2014). Trattamento dello zero nel progetto PerContare. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 37 A N.3, 257-282.
- Baccaglini-Frank, A. e Gamberini, F (2014a). *Guida alle attività per la matematica classe prima*. Disponibile online presso l'indirizzo percontare.asphi.it
- Baccaglini-Frank, A. e Gamberini, F (2014b). *Guida alle attività per la matematica classe seconda*. Disponibile online presso l'indirizzo percontare.asphi.it
- Baccaglini-Frank, A. & Scorza, M. (2013a). Il Progetto PerContare – pratiche per una “buona didattica” e metodi per la rilevazione di bambini con difficoltà in matematica. Al convegno “Incontri con la matematica XXVII”, Castel S. Pietro Terme, 8-9-10 novembre 2013.

Bibliografia

Baccaglini-Frank, A. e Scorza, M. (2013b). Gestire gli studenti con DSA in classe uso delle mani e della linea dei numeri nel progetto PerContare. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, e P. Vighi, Quaderni GRIMeD n. 1, 183-190.

Baccaglini-Frank, A. e Robotti, E. (2013). *Gestire Studenti con DSA in Classe - Alcuni Elementi di un Quadro Comune*, In: 'Atti del XVIII Convegno Nazionale GRIMeD, 23 - 24 Marzo 2013', Bologna: Pitagora ed.

Canalini Corpacci, R. & Maschietto, M. (2011), Gli artefatti-strumenti e a comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 nella classe: genesi strumentale. *Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 34 A N.2, 161-188.

Dehaene, S. (2010), *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*. Raffaello Cortina Editore, Milano.

Ianniti, A. & Lucangeli, D (2005). Perché i calcoli sono difficili? Ipotesi e modelli psicologici dell'abilità di calcolo. *Difficoltà in Matematica*, 1(2), 153-170.

Lucangeli, D. (2005). *National survey on learning disabilities*. Rome: Italian Institute of Research on Infancy.

Maruyama, M., Pallier, C., Jobert, A., Sigman, M., & Dehaene, S. (2012). The cortical representation of simple mathematical expressions. *NeuroImage*, 61(4), 1444–1460.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. In L. English & J. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning*. Springer

Bibliografia

Noël, MP. (2005). Finger gnosis: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, 11: 1–18.

Parrish, S. (2010). *Number talks: Helping children build mental math and computation strategies, grades K-5*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Steffe, L., Cobb, P., & Von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction in human infants. *Nature*, 358, 749-759.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica – Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.