

XXXII Convegno UMI-CIIM

Livorno, 16-18 ottobre 2014

La formazione al pensiero teorico in matematica: esempi ed esperienze con insegnanti e allievi ai diversi livelli scolastici

Argomentare e dimostrare nel paese degli esempi e dei controesempi: esperienze nella scuola superiore di secondo grado

Samuele Antonini
Università di Pavia



TEOREMI

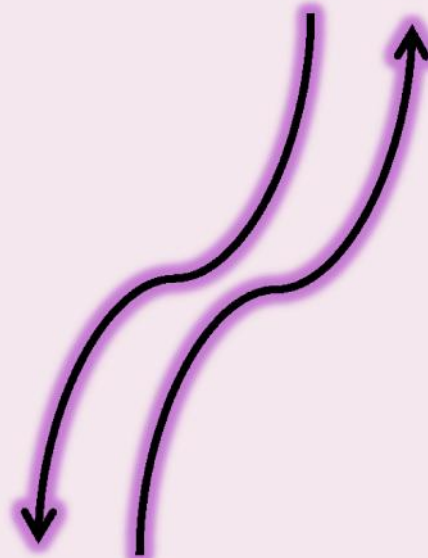
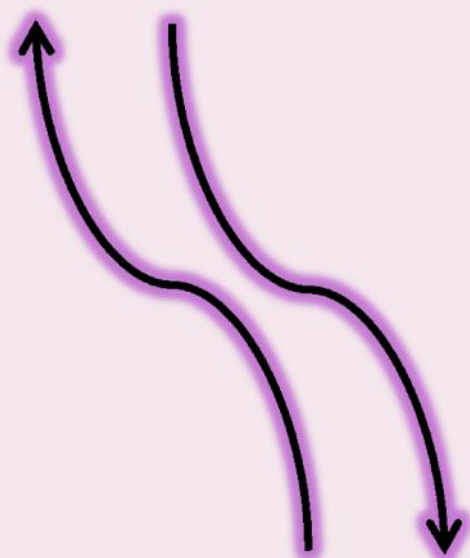
DEFINIZIONI

OGGETTI MATEMATICI

TEOREMI



DEFINIZIONI



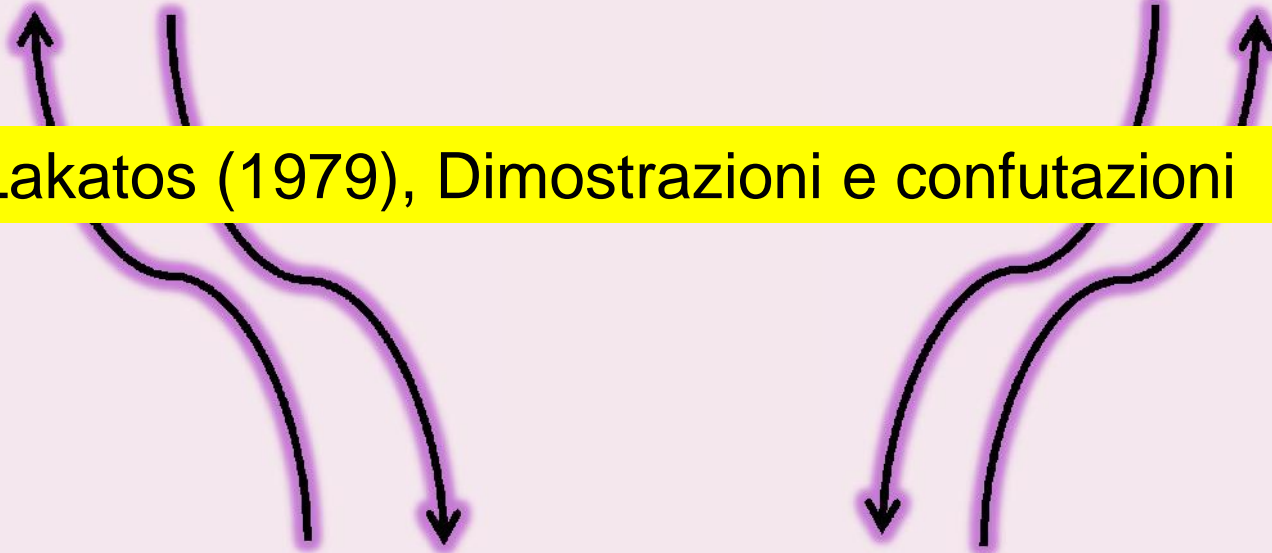
OGGETTI MATEMATICI

TEOREMI

DEFINIZIONI



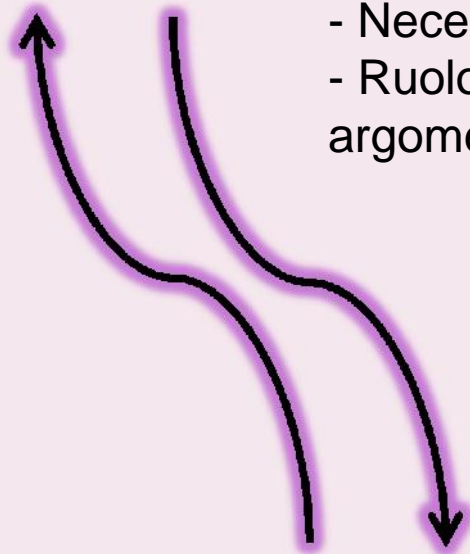
Lakatos (1979), Dimostrazioni e confutazioni



OGGETTI MATEMATICI

TEOREMI

- Enunciato: proprietà, relazioni tra oggetti matematici
- Necessità delle ipotesi e controesempi
- Ruolo degli esempi nella produzione di congetture, argomentazioni, dimostrazioni



OGGETTI MATEMATICI

TEOREMI

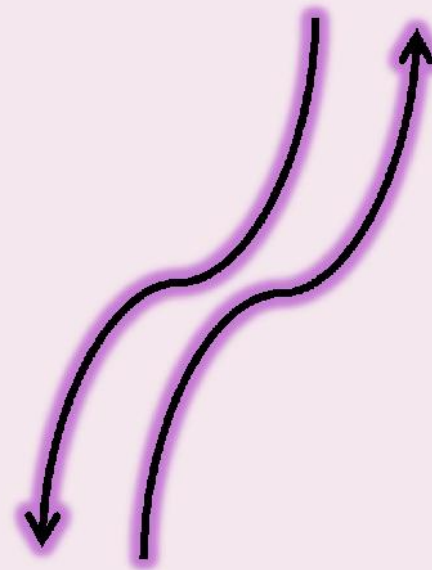
- Enunciato: proprietà, relazioni tra oggetti matematici
- Necessità delle ipotesi e controesempi
- Ruolo degli esempi nella produzione di congetture, argomentazioni, dimostrazioni

- Bisogno di evidenza empirica
- Generalità di enunciati vs. controesempio come eccezione
- Enunciato: condensazione di significato vs. evaporazione di significato

OGGETTI MATEMATICI

DEFINIZIONI

- Ruolo degli esempi nella formulazione di definizioni (punto di vista epistemologico), e acquisizione di concetti (punto di vista cognitivo)
- Galleria di esempi e non-esempi



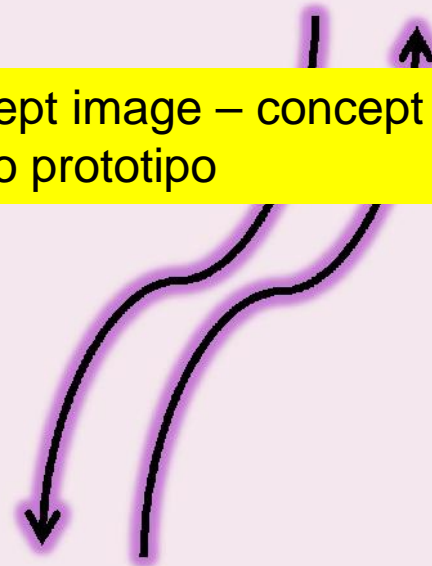
OGGETTI MATEMATICI

DEFINIZIONI

- Ruolo degli esempi nella formulazione di definizioni (punto di vista epistemologico), e acquisizione di concetti (punto di vista cognitivo)
- Galleria di esempi e non-esempi

Concept image – concept definition
Effetto prototipo

OGGETTI MATEMATICI

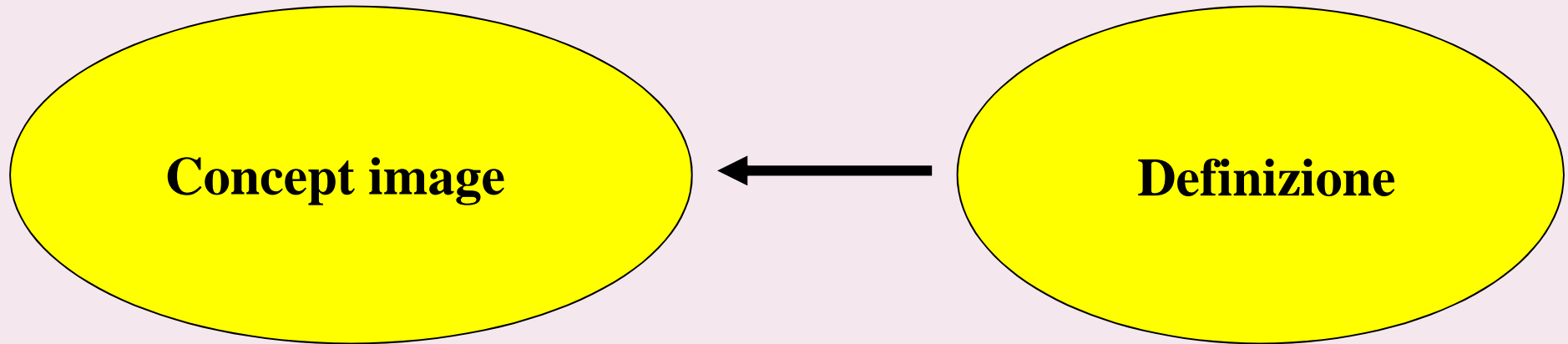




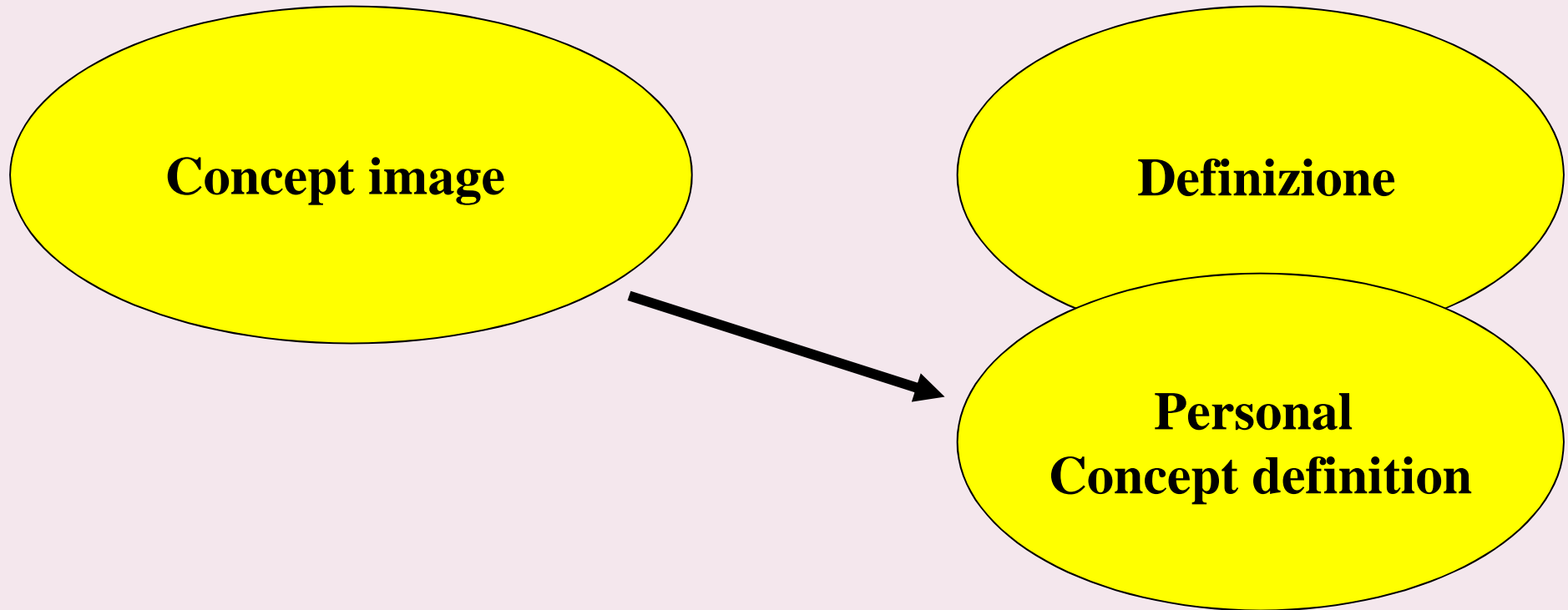
Concept image

Definizione

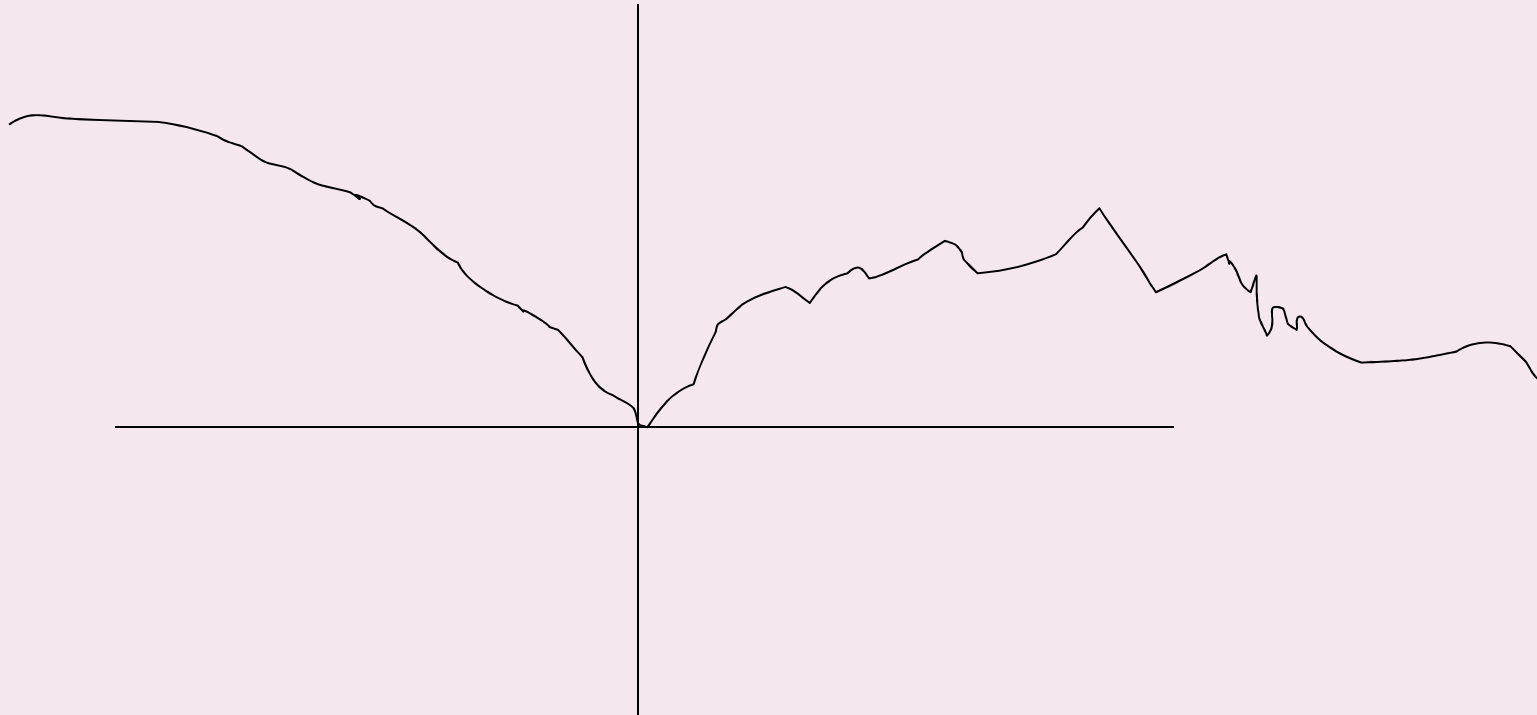
Ci aspettiamo.....



MA...



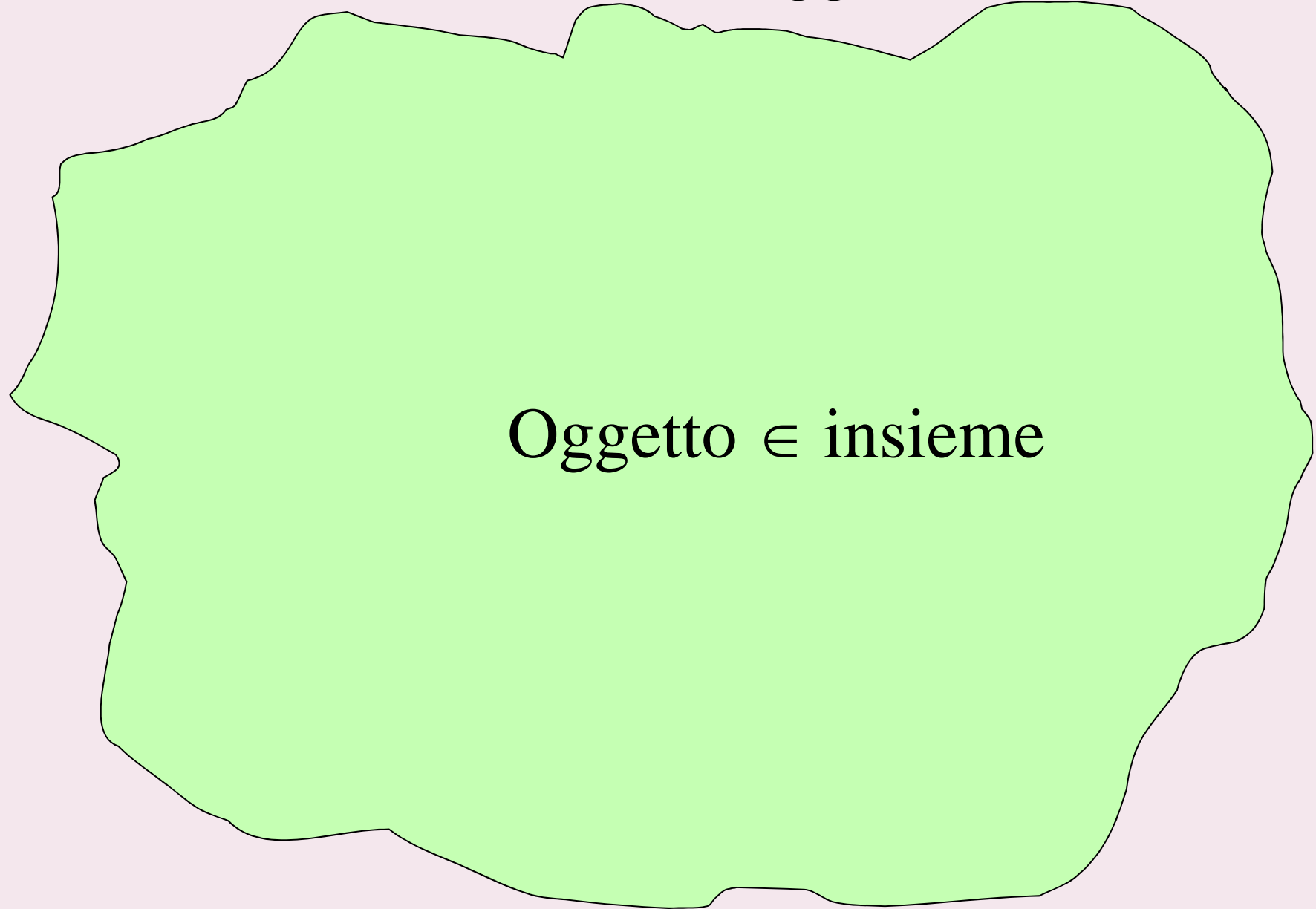
Esempio



non so se è una funzione perché non so se questo grafico ha una formula, se non ce l'ha, non è una funzione (da Tall & Vinner)

Matematica

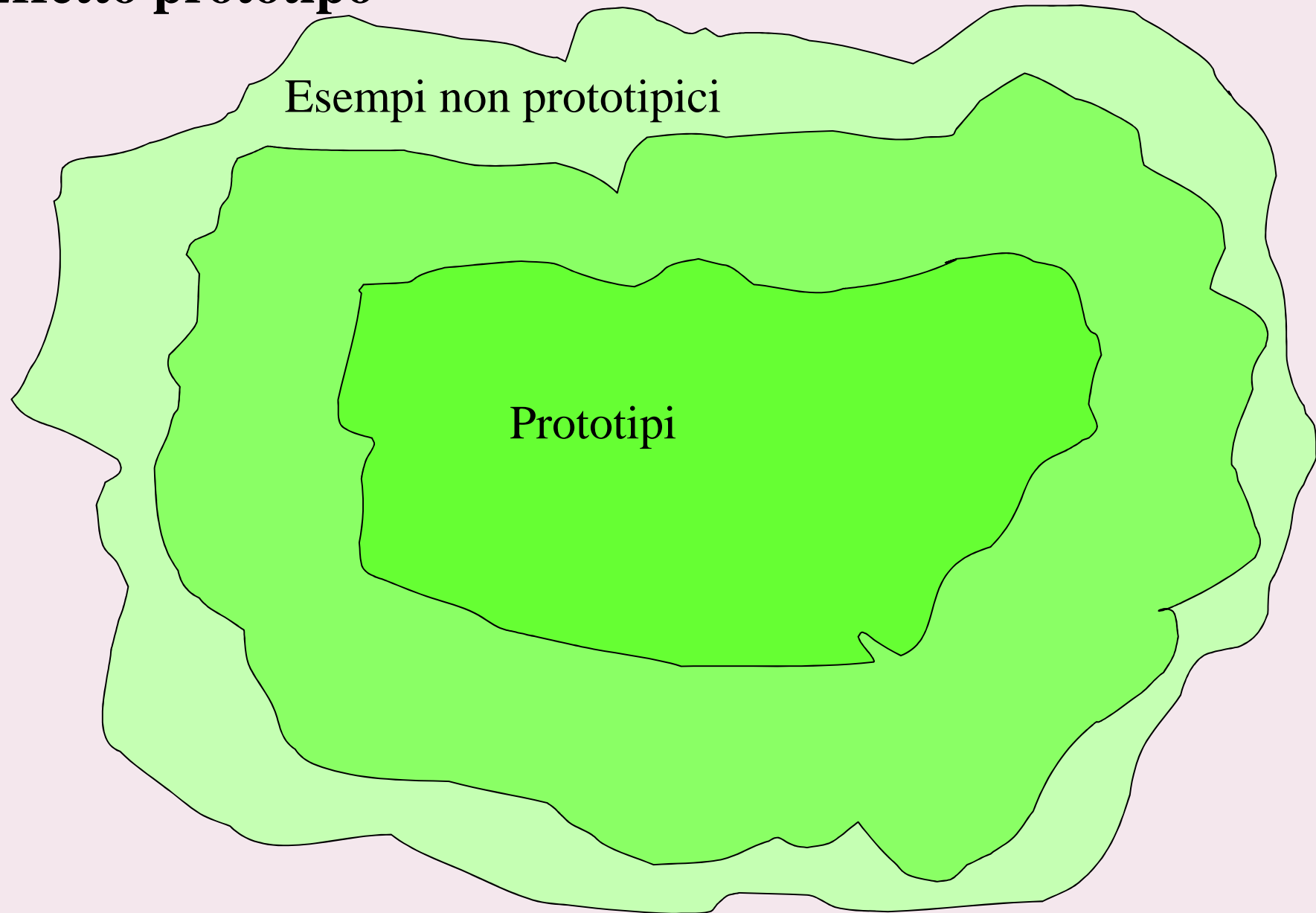
Oggetto \notin insieme



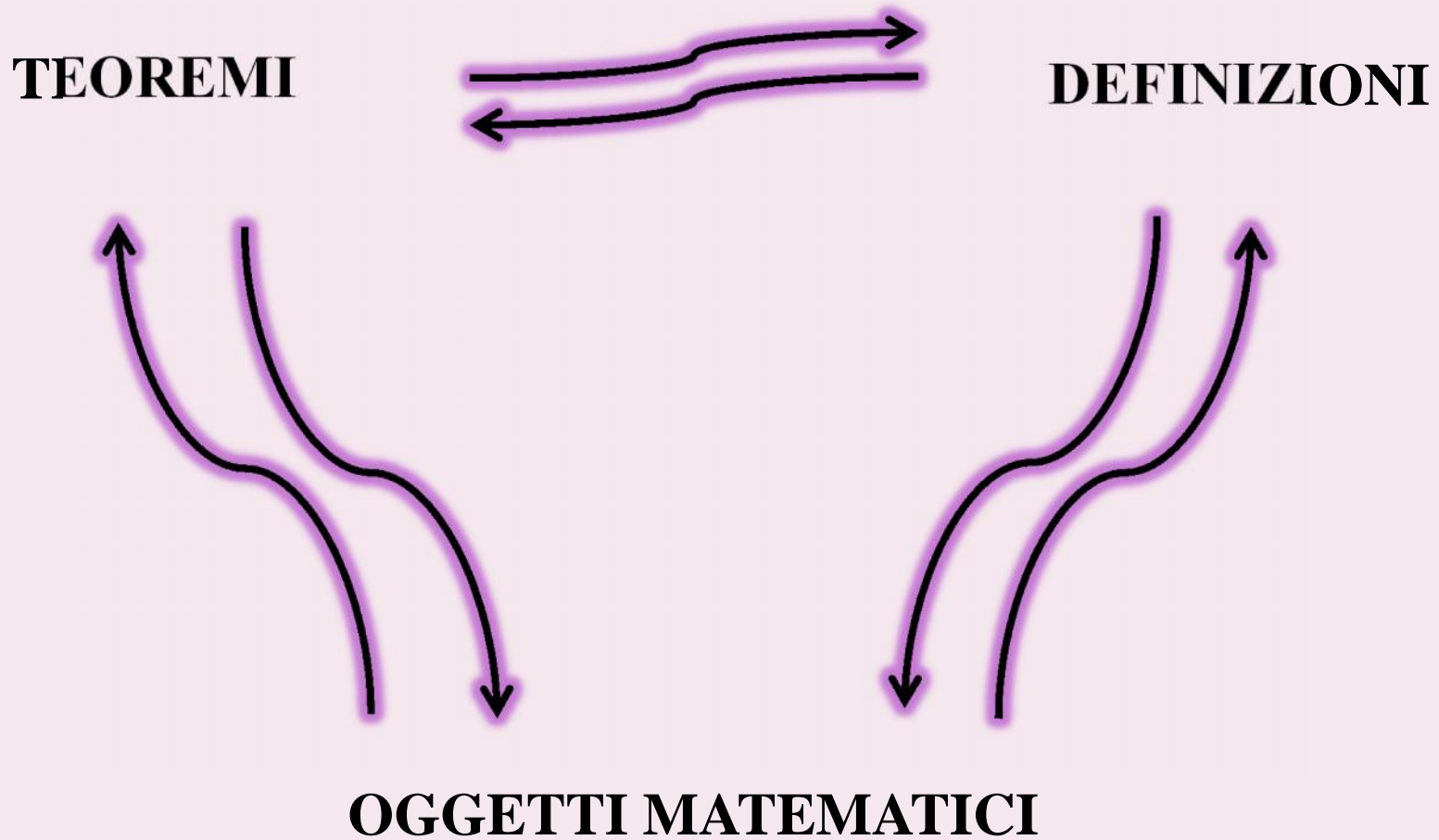
Oggetto \in insieme

Punto di vista cognitivo
Effetto prototipo

Categorie cognitive
(Lakoff, 1987, Rosch, 1977)



Passiamo all'azione

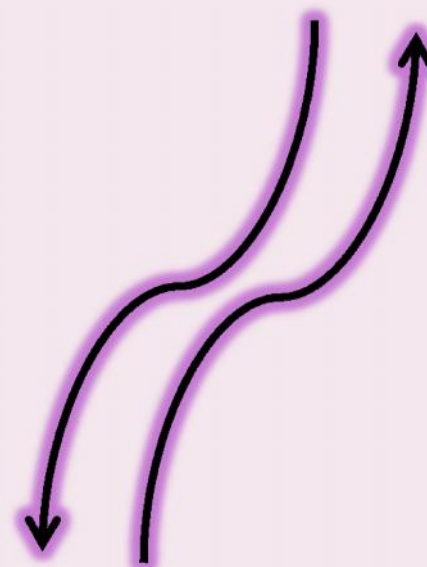
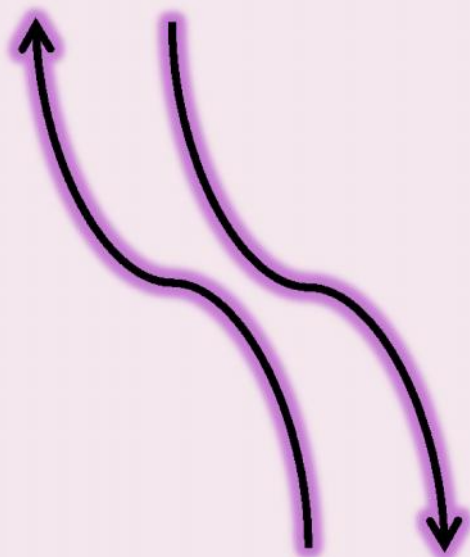


Passiamo all'azione

Congettare
Argomentare
Dimostrare



DEFINIZIONI



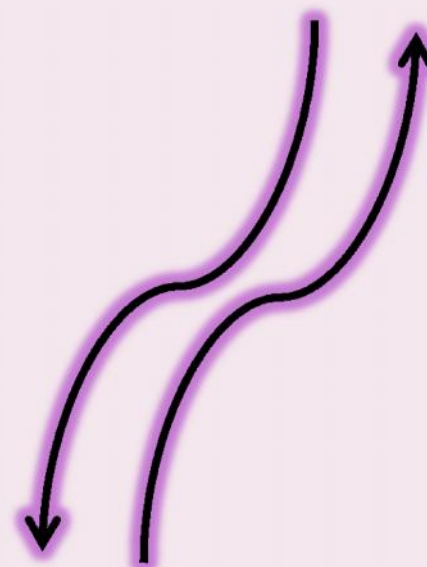
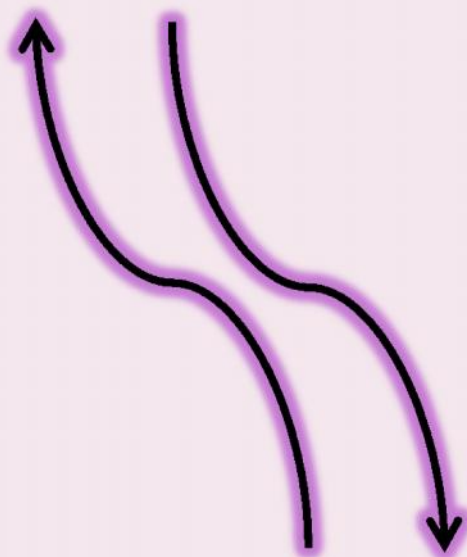
OGGETTI MATEMATICI

Passiamo all'azione

Congettare
Argomentare
Dimostrare



Definire



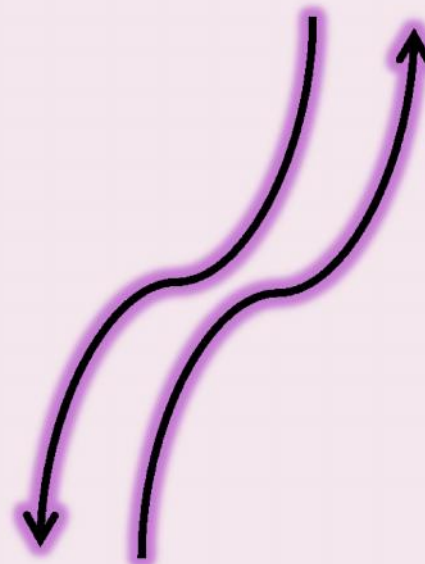
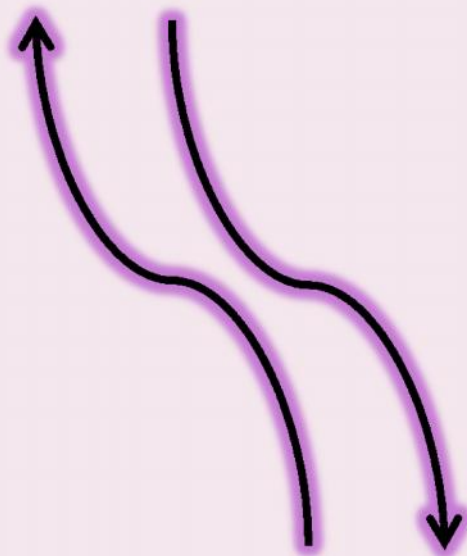
OGGETTI MATEMATICI

Passiamo all'azione

Congettare
Argomentare
Dimostrare



Definire



Costruzione, trasformazione
di oggetti matematici

Esempi... per matematici...

Gelbaum & Olmsted, *Counterexamples in analysis*, 1964

Capobianco & Molluzzo, *Examples and Counterexamples in Graph Theory*, 1978

Khaleelulla, *Counterexamples in topological vector spaces*, 1982

Romano & Siegel, *Counterexamples in probability and statistics*, 1986

Fornaess & Steniones , *Lectures on counterexamples in several complex variables*, 1987

Stoyanov, *Counterexamples in probability*, 1987

Gelbaum & Olmsted, *Theorems and counterexamples in Mathematics*, 1990

Wise & Hall, *Counterexamples in probability and real analysis*, 1993

Steen & Seebach, *Counterexamples in topology*, 1995

Generare esempi: strumento diagnostico e strumento di apprendimento/insegnamento

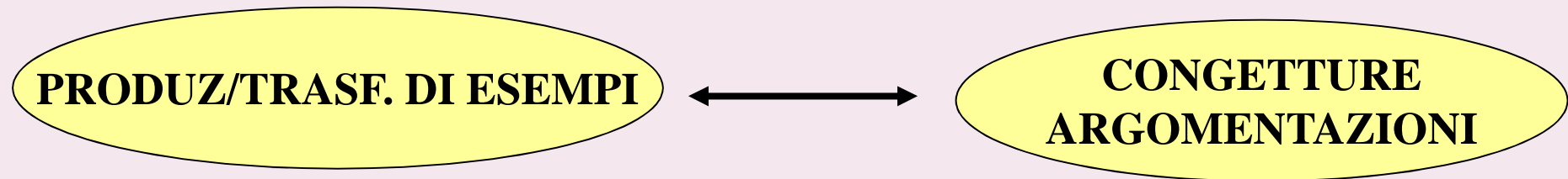
Chiedere di produrre un esempio è uno strumento di ricerca che apre una *finestra (window)* nella mente dello studente (Zazkis & Leikin, 2007, p. 15)

Gli esempi generati dagli studenti *riflettono (mirror)* le loro concezioni degli oggetti matematici in gioco (p. 15).

Generare esempi: miglior strategia per la comprensione iniziale di un concetto...(Dahlberg & Housman, 1997, p. 283)

...più efficace chiedere agli studenti di generare i propri esempi prima di fornire i nostri (Dahlberg & Housman, 1997, p. 297-298)

Esempio: una attività.....



- Estensione del repertorio di esempi
- Processi di costruzione e trattamento di oggetti matematici
- Produzione di congetture, argomentazioni, dimostrazioni

IL CONTESTO

Due classi quinte di un Liceo Scientifico tradizionale
(Prof.ssa Marina Ascari)

Attività svolta all'interno di una normale programmazione didattica

Precedentemente trattati in modo tradizionale: concetto di funzione, dominio, limiti e derivabilità

Verifica iniziale

- Fai un esempio di una funzione con dominio \mathbb{R} e con 2 punti di non continuità.
- Fai un esempio di una funzione con dominio \mathbb{R} e con 2 punti di non derivabilità.
- Fai un esempio di funzione definita su \mathbb{R} non continua nel punto $x=5$, tale che $f(5)=2$ e i limiti destro e sinistro per x che tende a 5 siano uguali.

Attività... in generale

Congetturare, Argomentare, Dimostrare,
Costruire oggetti matematici,
Trasformare oggetti matematici

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

Fai l'esempio, se possibile, di 2 grafici di funzione e di 2 funzioni in forma algebrica per ognuno dei campi di esistenza proposti:

$(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; $[-1, 5]$; $(-1, 5)$; $[-1, 5)$; $(-1, 5]$;

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

Fai l'esempio di funzioni (tracciando il grafico o esplicitando la corrispondenza), **i più strani possibile**, tali che...

Se possibile fai due esempi di funzione **continua** su $[-3,4)$ senza massimo, almeno una anche limitata

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

Se possibile costruisci due esempi di funzione **continua** in $[4,6]$ senza minimo.

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

1) Fai 2 esempi (in forma grafica e algebrica) di funzioni periodiche che verificano le seguenti proprietà:

- Non limitata;
- Limitata;
- Con periodo 5 .

2) Modifica le funzioni del punto 1) affinché diventino:

- Periodica di periodo 8 ;
- Non periodica.

•Trasformazione/trattamento di esempi

•Riflessione sui processi

(dopo alcuni problemi)

Descrivere il procedimento e spiegare ad uno studente di un'altra quinta liceo scientifico come trovare gli esempi di funzione richiesti.....

- Produzione di esempi (diverse rappresentazioni)
- Produzione di esempi non prototipici
- Produzione di esempi impossibili
- Trasformazione/trattamento di esempi
- Riflessione sui processi

... ultimi passi

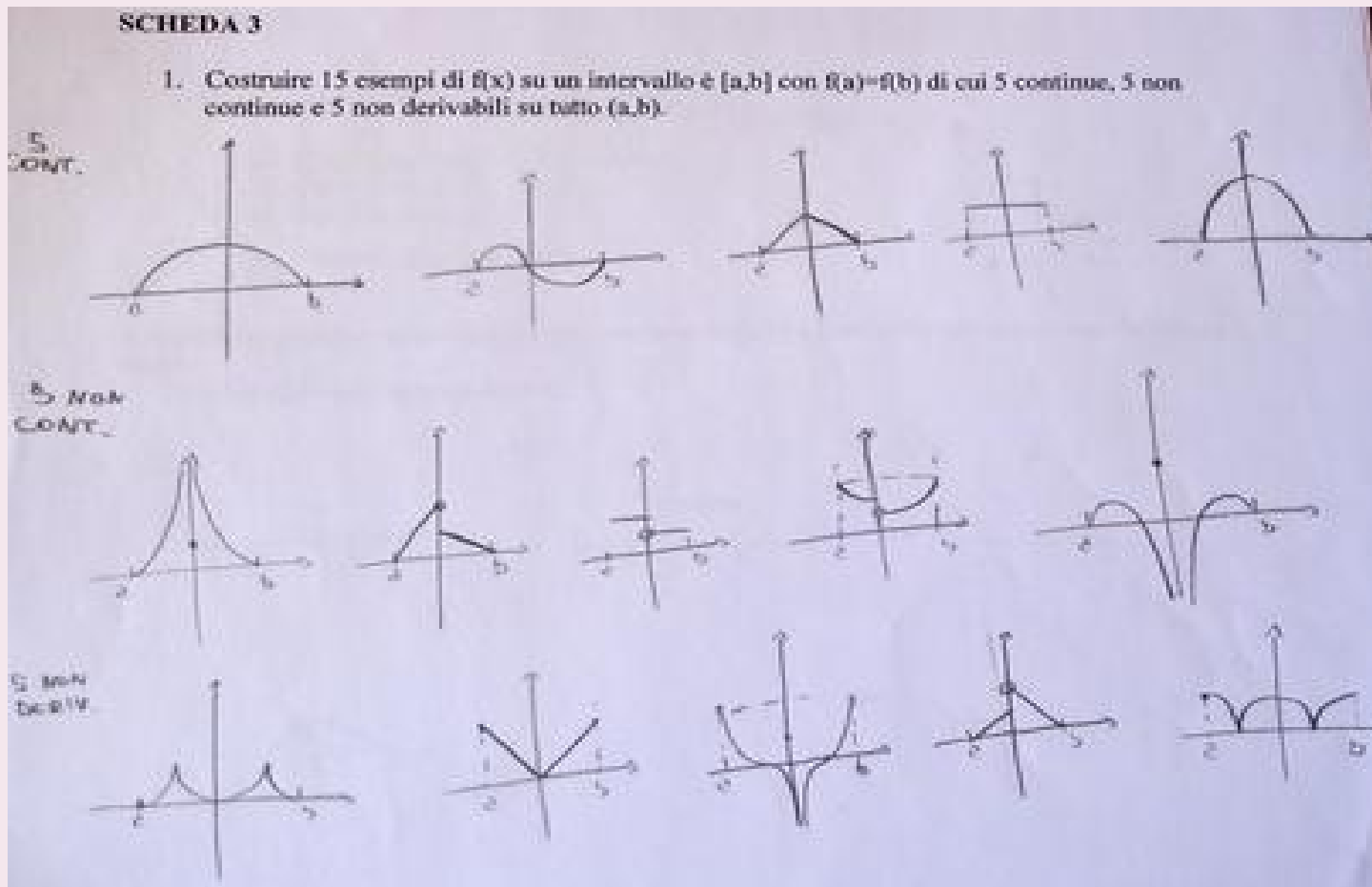
Costruire 15 funzioni definite su un intervallo $[a,b]$ tali che $f(a)=f(b)$, di cui 5 continue, 5 non continue e 5 non derivabili.

ALCUNI... ESEMPI

Costruire 15 funzioni definite su un intervallo $[a,b]$ tali che $f(a)=f(b)$, di cui 5 continue, 5 non continue e 5 non derivabili.

ALCUNI... ESEMPI

Costruire 15 funzioni definite su un intervallo $[a,b]$ tali che $f(a)=f(b)$, di cui 5 continue, 5 non continue e 5 non derivabili.



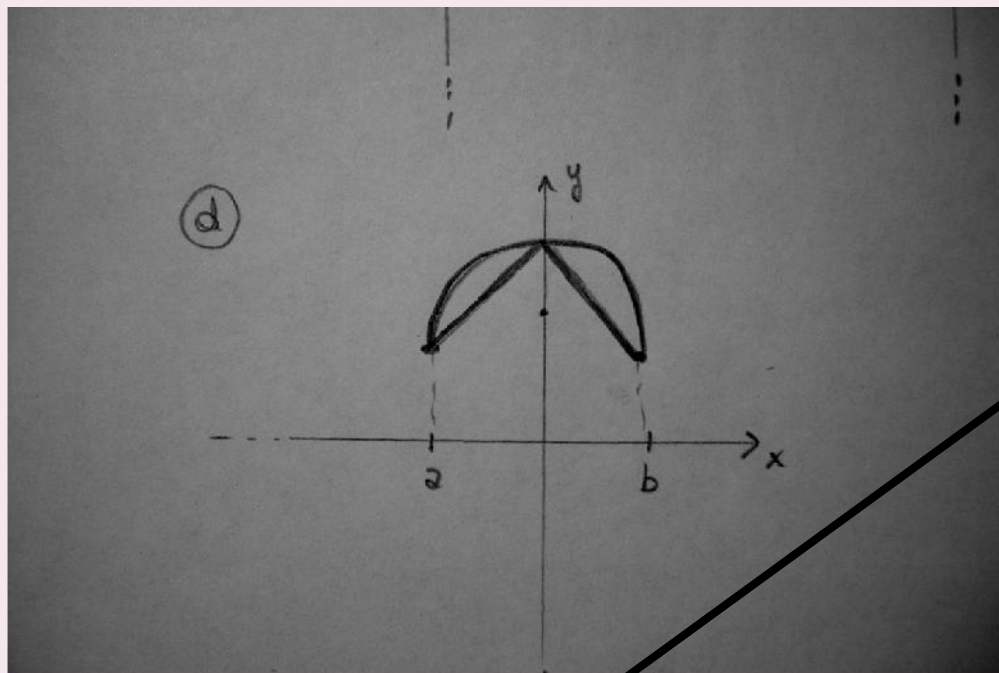
Dai processi di produzione di esempi alla congettura e argomentazione

Costruisci, se possibile, una funzione f continua su $[a,b]$ e derivabile sull'aperto (a,b) tale che $f(a)=f(b)$ e $f'(x)$ sia diversa da zero per ogni x .

“La funzione deve fare la curva e tornare indietro”

“Non può fare la curva se non ha un punto stazionario quindi ha tangente orizzontale”

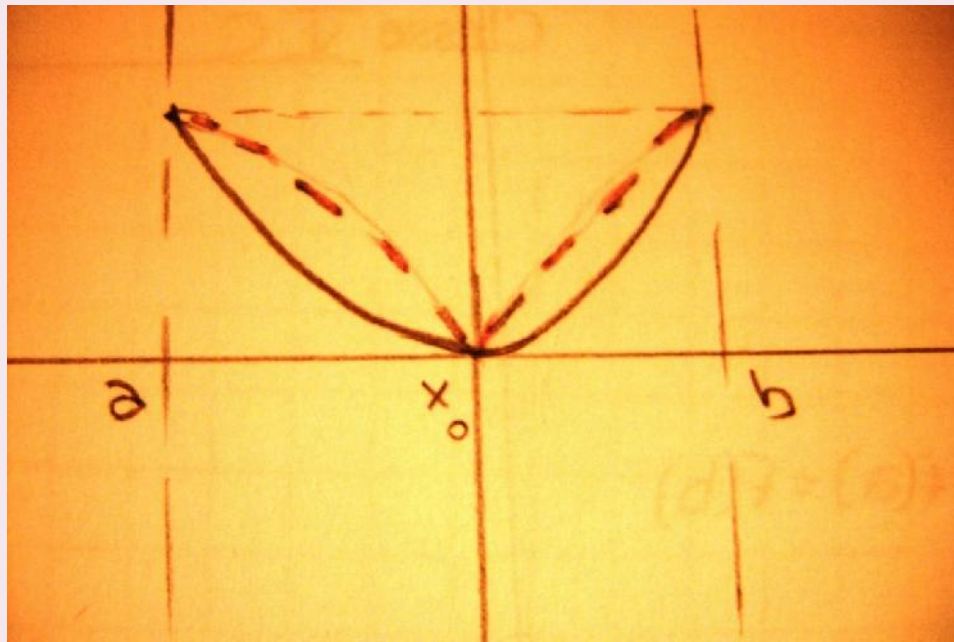
Costruisci, se possibile, una funzione f continua su $[a,b]$ e derivabile sull'aperto (a,b) tale che $f(a)=f(b)$ e $f'(x)$ sia diversa da zero per ogni x .



**Procedure per
costruire gli esempi**

*Anna: O cade la derivabilità o cade la II condizione
($f'(x)$ sia diversa da 0 per ogni x)*

Costruisci, se possibile, una funzione f continua su $[a,b]$ e derivabile sull'aperto (a,b) tale che $f(a)=f(b)$ e $f'(x)$ sia diversa da zero per ogni x .

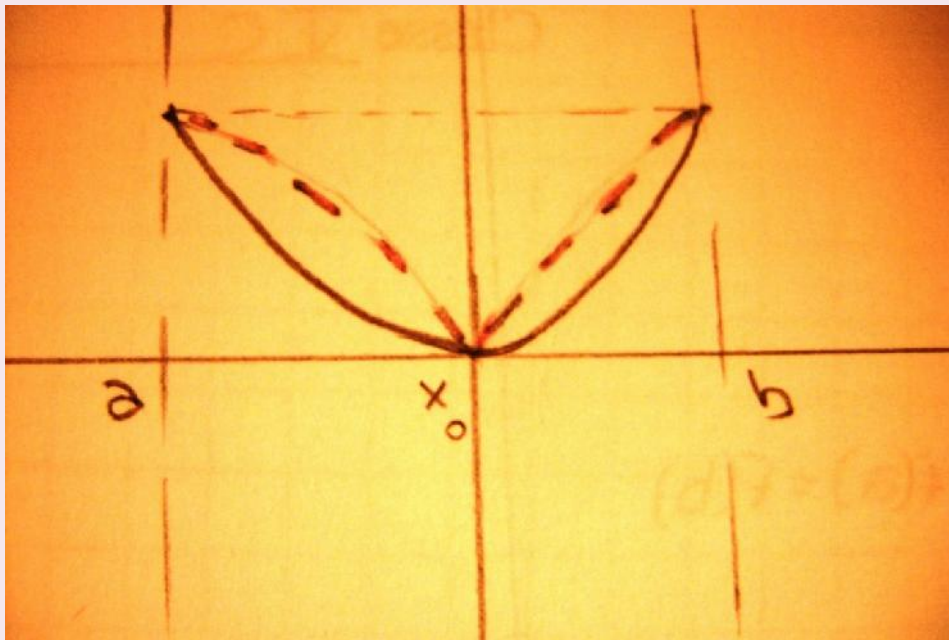


Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere $f(a)=f(b)$. Non può essere un segmento parallelo all'asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Dimostrazione classica:

f costante

f non costante quindi max o min interno ad $[a,b]$



Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere $f(a)=f(b)$. Non può essere un segmento parallelo all'asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Resnick and Greeno (Resnick & Greeno 1990; Resnick, 1992; Greeno, 1991): l'acquisizione dei concetti è fortemente legata alle azioni sugli oggetti

Piaget (1964): *To know an object is to act on it. To know it is to modify, to transform the object and to understand the process of this transformation and, as a consequence, to understand the way the object is constructed*

XXXII Convegno UMI-CIIM

Livorno, 16-18 ottobre 2014

La formazione al pensiero teorico in matematica: esempi ed esperienze con insegnanti e allievi ai diversi livelli scolastici

Argomentare e dimostrare nel paese degli esempi e dei controesempi: esperienze nella scuola superiore di secondo grado

Samuele Antonini
Università di Pavia

