UMI CIIM-AIRDM
Seconda Scuola Estiva
per Insegnanti

2 settembre 2015, Marina di Pietrasanta

Produrre definizioni, congetture e argomentazioni: Dal piano alla sfera, dalla sfera al piano

Samuele Antonini
Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Insegnamento della geometria nel I ciclo: quali obiettivi?

- Indicazione nazionali per il curricolo
- Quadro INVALSI per la matematica
- UMI-CIIM: Matematica 2001

Insegnamento della geometria nel I ciclo: quali traguardi?

INFANZIA

- L'alunno **esplora** la realtà, **riflette** sulle proprie esperienze descrivendole, rappresentandole, riorganizzandole con diversi criteri **ponendo le basi per l'elaborazione dei concetti scientifici e matematici**.
- Gioca in modo **costruttivo e creativo** con gli altri, sa **argomentare, confrontarsi, sostenere le proprie ragioni** con adulti e bambini.

Insegnamento della geometria nel I ciclo: quali traguardi?

PRIMARIA

- **Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio**, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo
- **Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche**, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo
- **Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee** e confrontandosi con il punto di vista di altri.
- **Produce semplici modelli** o rappresentazioni grafiche del proprio operato utilizzando elementi del disegno tecnico o strumenti multimediali.

Insegnamento della geometria nel I ciclo: quali traguardi?

SECONDARIA 1° GRADO

- **Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio**, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi
- **Riconosce e risolve problemi** in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
- **Rafforza un atteggiamento positivo** rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

Obiettivi - INVALSI

Quadro di Riferimento per la Matematica

- conoscere e padroneggiare **diverse forme di rappresentazione** e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...)
- acquisire progressivamente **forme tipiche del pensiero matematico** (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...)
- **saper riconoscere le forme dello spazio** (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...)

Obiettivi – UMI CIIM

Matematica 2001

- **esplorare, descrivere e rappresentare** lo spazio, riconoscere e localizzare oggetti e forme
- **riconoscere e descrivere le principali figure** piane e solide
- usare la **visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica** per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica
- osservare, individuare e descrivere regolarità; **produrre congetture**, testarle, **validare le congetture** prodotte; **riconoscere proprietà che caratterizzano oggetti matematici** e **l'importanza delle definizioni** che le descrivono; **giustificare affermazioni** con semplici concatenazioni di proposizioni

Traguardi in sintesi

- Sviluppare “significati geometrici” a partire da esperienze e oggetti concreti.
- Sviluppare abilità specifiche relative a forme di pensiero tipiche della geometria e della matematica.
- Sviluppare un “atteggiamento matematico”, far esperienza del lavoro del matematico.

Come raggiungere tali obiettivi?
Quali indicazioni dalle Indicazioni?
Quali dalla ricerca in didattica?

Dalle Indicazioni Nazionali

SCUOLA DI INFANZIA

Acquisire competenze significa giocare, muoversi, manipolare, curiosare, domandare, imparare a riflettere sull'esperienza attraverso l'esplorazione, l'osservazione e il confronto tra proprietà, quantità, caratteristiche, fatti: significa ascoltare, e comprendere, narrazioni e discorsi, raccontare e rievocare azioni ed esperienze e tradurle in tracce personali e condivise; essere in grado di descrivere, rappresentare e immaginare, «ripetere», con simulazioni e giochi di ruolo, situazioni ed eventi con linguaggi diversi. **(p. 16)**

La scuola del I ciclo. Ambiente di apprendimento. Principi metodologici

Favorire l'esplorazione e la scoperta, *al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze. In questa prospettiva,* ***la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali*** (p. 27)

[ ]

Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio*, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e* ***può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento*****.** (p. 27)

Matematica

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. **[…] (p. 49)**

Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. **(p. 49)**

Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere […] e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti **[…] (p. 49)**

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e struttura che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo. **(p. 49)**

.dalla ricerca in didattica della matematica

Con «matematica» non si intende soltanto i contenuti matematici (il sapere) ma anche «le attività basate (in modo più o meno esplicito e consapevole a seconda di chi le svolge e delle circostanze in cui sono svolte) su elementi del sapere matematico: quindi, per noi la matematica comprende non solo i concetti e gli algoritmi matematici, ma anche le attività di matematizzazione, di problem solving, di produzione e di dimostrazione di congetture, ecc. da chiunque effettuate.» (Boero et al., 1995)

Ipotesi didattiche e scelte metodologiche

Come raggiungere tali obiettivi?

Quali indicazioni dalle Indicazioni?

Quali dalla ricerca in didattica?

L'importanza dell'esperien senso-motoria

L'interazione sociale e il ruolo dell'insegnante

L'uso di strumenti

Ipotesi didattiche e scelte metodologiche

Come raggiungere tali obiettivi?

Quali indicazioni dalle Indicazioni?

Quali dalla ricerca in didattica?

L'importanza dell'esperienza senso-motoria

Ipotesi sulla formazione dei concetti matematici

Le esperienze senso-motorie

"la Geometria prende le mosse **dall'esperienza spaziale, visiva e tattile** (vedere e toccare gli oggetti), o anche **motoria** (noi ci muoviamo tra gli oggetti e li spostiamo)"

(Speranza, 1988).

Le **esperienze di tipo senso-motorio** sono fondamentali per la formazione di concetti anche astratti di matematica

(Arzarello, 2008; Gallese & Lakoff, 2005)

Come raggungere gli obiettivi? Gli *strumenti*

Uno strumento "incorpora" determinate conoscenze e esperienze collettive che ne "garantiscono" il funzionamento.

Legame **esperienza senso motoria – strumenti.**

L'uso di determinati strumenti da parte dell'alunno per risolvere problemi di matematica contribuisce a far sì che egli costruisca **significati personali, potenzialmente "coerenti" con i significati matematici** obiettivo dell'intervento didattico.

(Bartolini Bussi & Mariotti, 1998)

Come raggungere gli obiettivi? Insegnante e interazione sociale

Non si può pensare che **gli allievi [pur] in una situazione ricca e stimolante possano ricostruire da soli** la quantità e varietà di significati matematici messi a punto dall'umanità nel corso dei secoli

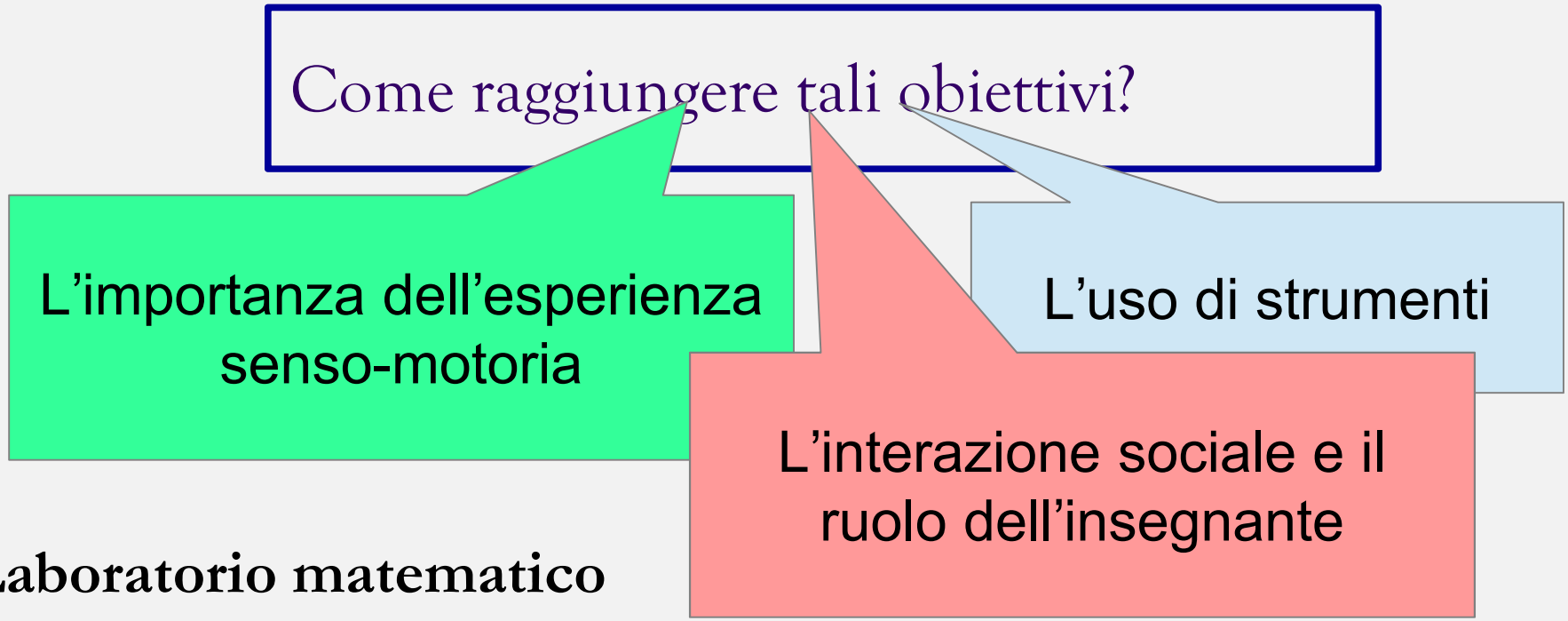
(Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995)

Cruciale il ruolo dell'insegnante

olini Bussi & Mariotti, 1998)

Organizza situazione problematica, gli strumenti, le modalità di interazione
Favorisce l'esplicitazione dei sensi personali, la **verbalizzazione**
Guida l'**evoluzione** di questi verso i significati matematici

Ipotesi didattiche e scelte metodologiche



Laboratorio matematico

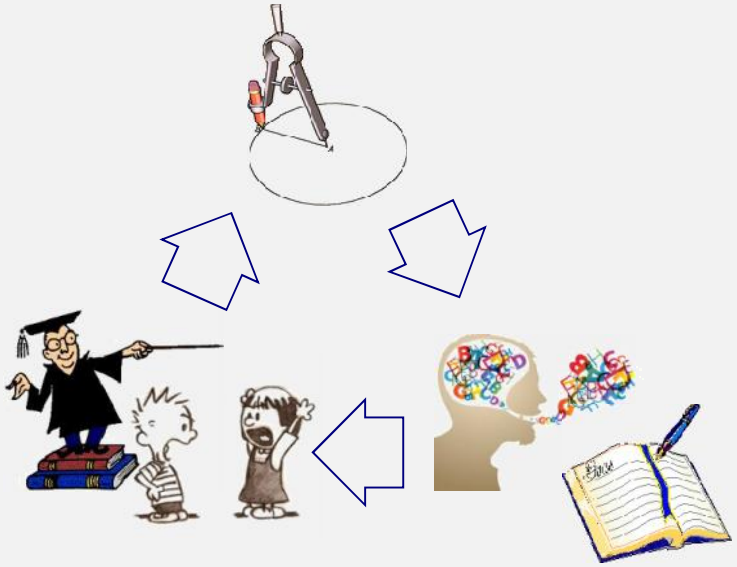
"come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive"

Ipotesi didattiche e scelte metodologiche

Laborato

"come mo anno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le c nze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive"

Sugli aspetti didattici: un quadro metodologico generale



- Attività degli allievi individuale, **a gruppi**, collettiva
- “Descrizione” dell’attività:
  - Resoconto, soluzione,...
  - Scritta, verbale, grafica...
- Condivisione/Discussione collettiva

Esperienze con la sfera passate e in corso

- PLS 2012-13

  6 insegnanti di Scuola Primaria (10 classi)

- Accompagnamento alle indicazioni nazionali per il I ciclo 2013-14

  3 insegnanti della Scuola dell'Infanzia

  4 insegnanti della Scuola Primaria

  2 insegnanti della Scuola Secondaria di I grado

Il progetto PLS: alcuni dati

Anni scolastici 2012/2013 e 2013/2014

4 istituti

6 insegnanti

158 alunni

4 classi III
4 classi IV
2 classi V

Scuola primaria

2 docenti universitari (Mirko Maracci e Samuele Antonini)

Un altro obiettivo

Crescita professionale di insegnanti di scuola primaria

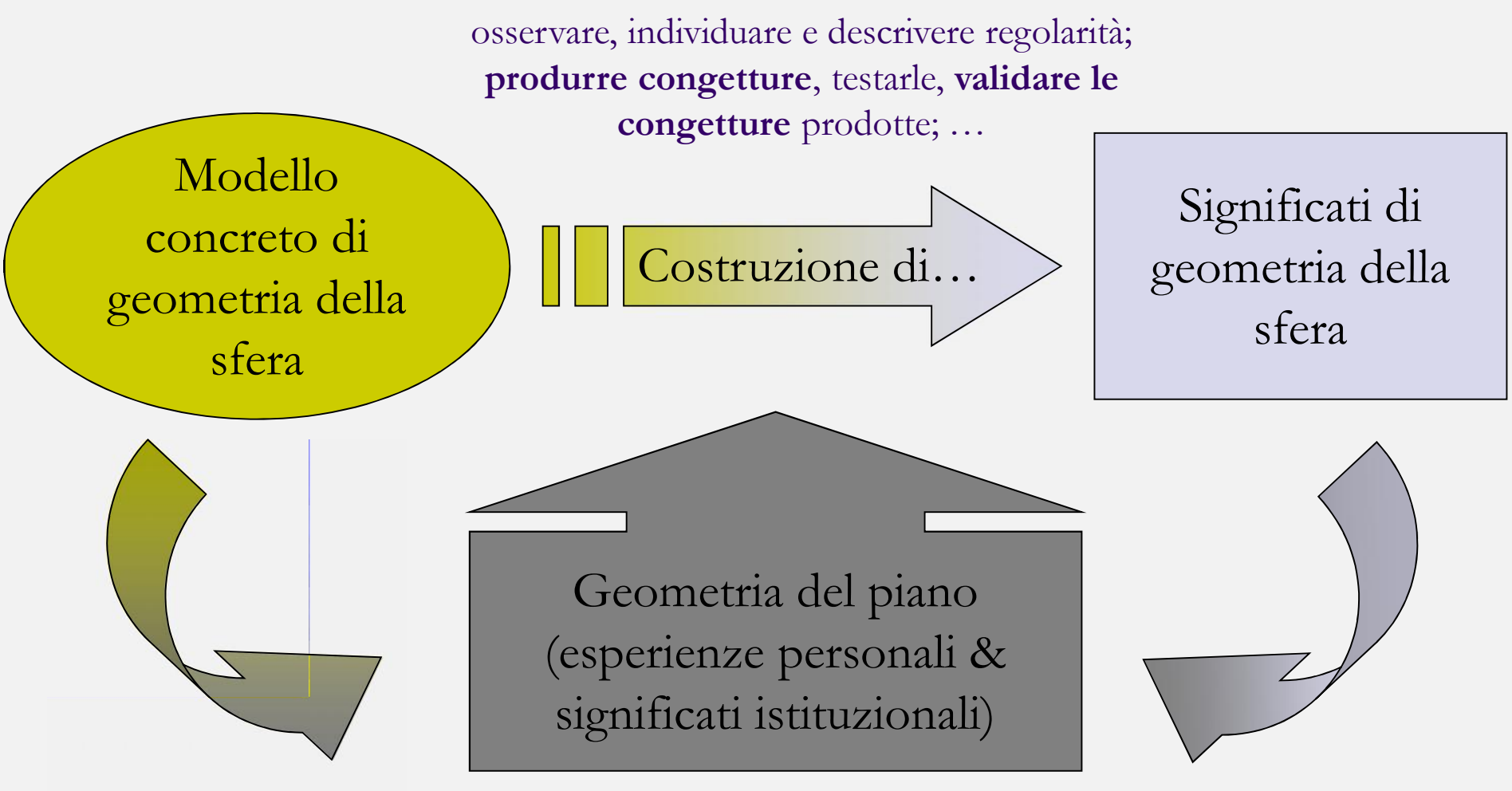
METODOLOGIA

La formazione degli insegnanti si è articolata attraverso la progettazione e l'effettiva attuazione di un'attività rivolta agli studenti, finalizzata alla costruzione di significati nell'ambito della geometria, attraverso l'esplorazione di proprietà di enti geometrici elementari, la produzione di congetture e argomentazioni.

-Incontri mensili docenti universitari-insegnanti:
analisi di problematiche di carattere disciplinare, epistemologico e didattico. Gli insegnanti esplorano le proprietà di alcuni enti geometrici, con l'ausilio di modelli di geometria sferica

- Attività con studenti gestita completamente da insegnanti nelle normali ore di lezione

Perché la geometria della sfera?



Perché la geometria della sfera?

osservare, individuare e descrivere regolarità;
produrre congetture, testarle, **validare le congetture** prodotte; …

Modello concreto di geometria della sfera

Costruzione di…

Significati di geometria della

Rielaborazione dei significati di geometria piana

E’ possibile tracciare una retta su una sfera?

E’ possibile andare dritti su una sfera?

Dipende ..

da cosa significa “andare dritti”

Linee dritte su un pallone

È possibile tracciare linee dritte su un pallone?

Se pensiamo alle rette geometriche, la risposta è no!

Se pensiamo al complesso delle esperienze senso-motorie che danno significato al concetto di “retta” ?
È possibile andare dritti su un pallone?
Effettuare percorsi dritti?

ra: i primi passi

Stabilire una esplicita analogia con le rette del piano (spazio)

Obiettivo: stabilire se è possibile definire qualcosa che possiamo chiamare «retta» su una sfera

Assunto epistemologico: la geometria coglie e formalizza alcuni aspetti della nostra
"spazialità"

È possibile stabilire una esplicita analogia tra piano e sfera sulla base di questi aspetti?

"La Geometria prende le mosse dall'esperienza spaziale, visiva e tattile (vedere e toccare gli oggetti), o anche motoria (noi ci muoviamo tra gli oggetti e li spostiamo)" (Speranza, 1988)

Quali aspetti della nostra esperienza sono colti e formalizzati nella nozione di retta?

Dritti su piano e sfera

Riflessione esplicita sui significati legati all'andare dritti

Costruzione di significati relativi all'andare dritti sulla sfera

L'importanza dell'esperienza senso-motoria

Il percorso didattico

Idea centrale:

Esplorazione diretta di **modelli concreti** di geometria piana e di geometria sferica, mediata dall'uso di **specifici strumenti**.

Quali strumenti ?

Necessità di analisi epistemologica degli oggetti geometrici in gioco

Dritti su piano e sfera

Riflessione esplicita sui significati legati all'andare dritti

L'importanza dell'esperienza senso-motoria

- Le sensazioni corporee legate al movimento (camminare, nuotare):
  - distanza
  - simmetria
- Le esperienze visive
- Il coordinamento tra queste

Retta nel piano e nello spazio

La nozione di retta coglie e formalizza alcuni aspetti della nostra esperienza senso-motoria:

- simmetria
- allineamento
- minima lunghezza

È possibile costruire il significato di "andare dritti su una sfera" a partire da una esplicita elaborazione di questi aspetti?

Quali esperienze è possibile far vivere sul pallone, e quali riflessioni è possibile promuovere che siano riferibili a questi aspetti?

Dal punto di vista della matematica?

Qual è la fondatezza epistemologica ?

"Le linee geodetiche di una superficie sono una generalizzazione delle rette nel piano. Come le rette, esse possiedono parecchie proprietà importanti che le distinguono dalle altre curve tracciate sulla superficie; perciò esse possono essere definite in diversi modi [ ] come le linee *più brevi*, le linee *frontali*, le linee *più rette possibili*."

(Hilbert e Cohn-Vossen, 1932/2001, p. 286/7, corsivo originale, traduzione nostra)

Dal punto di vista della matematica?

Qual è la fondatezza epistemologica ?

"The geodesic lines, or geodesics, of a surface are a generalization of the straight lines of the plane. Like the straight lines, they are endowed with several important properties distinguishing them from all other curves on the surface. Hence they may be defined in various ways [ ] as *shortest* lines, as *frontal* lines, and as *straightest* lines."

(Hilbert e Cohn-Vossen, 1932/2001, p. 286/7, corsivo originale)

Dritti su piano e sfera

Riflessione esplicita sui significati legati all'andare dritti

L'importanza dell'esperienza senso-motoria

- Le sensazioni corporee legate al movimento (camminare, nuotare):
- distanza
- simmetria
- Le esperienze visive
- Il coordinamento tra queste

Come far "rivivere" queste esperienze sulla sfera?

Dritti su piano e sfera

Riflessione esplicita sui significati legati all'andare dritti

L'importanza dell'esperienza senso-motoria

- Le sensazioni corporee legate al movimento (camminare, nuotare):
  - distanza
  - simmetria
- Le esperienze visive
- Il coordinamento tra queste

L'uso di strumenti

Alla ricerca di strumenti che possano

- essere collegati a queste esperienze,
- incorporarne alcuni aspetti
- essere adattati all'uso sul piano e sulla sfera

Breve ana

Proprietà dell'anda

Alla ricerca di strumenti che possono essere collegati a queste proprietà.

Analisi teorica:

Definizioni, teoremi, sistemazione in una teoria matematica

Minima lunghezza

Simmetria

Allineamento

Via sperimentale: ricerca di linee (simmetriche, di minima lunghezza, con proprietà dell'allineamento) con l'uso di opportuni strumenti

Decidiamo di considerare queste proprietà come caratterizzanti delle "linee dritte" su una superficie, anche non piana

Gli *strumenti* dell'"andare dritto"

Minima lunghezza	Spago, elastici ..
Simmetria	Nastro di carta, righe flessibili
Allineamento	Oggetti da allineare (birilli, coni da palestra, alberelli di carta,)

Cosa succede nel piano?

Dritti sul piano: strumenti

Dritti sul piano: strumenti

Gli *strumenti* dell'"andare dritto"

Minima lunghezza	Spago, elastici ..
Simmetria	Nastro di carta, righe flessibili
Allineamento	Oggetti da allineare (birilli, coni da palestra, alberelli di carta,)

Cosa succede nel piano?

Cosa succede sulla sfera?

Retta sferica

Chiamiamo "rette sferiche" quelle linee sulla sfera che soddisfano tre proprietà dell'andare dritti:

- *minima lunghezza,*
- *simmetria,*
- *allineamento.*

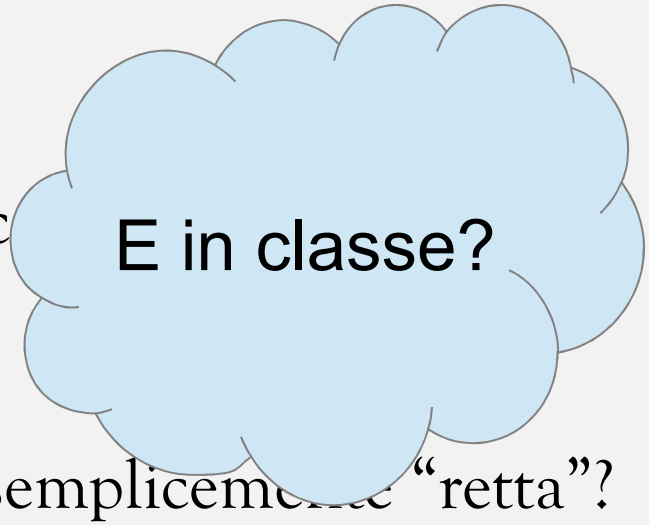
In altri termini sono linee sulle quali gli strumenti utilizzati si comportano come nel caso delle rette piane.

La retta *sferica*

"Definizione": chiamiamo rette sferiche quelle linee sulla sfera che soddisfano tre proprietà (minima lunghezza, simmetria, allineamento) dell'andare dritti; in altri termini sono linee sulle quali gli strumenti utilizzati si comportano come nel caso delle rette piane

Proprietà geometrica: una retta sferica è una circonferenza di raggio massimo

Definizione: una retta sferica è una circ
massimo



Perché chiamarla "retta sferica" e non semplicemente "retta"?

Il percorso didattico

Idea centrale:

Esplorazione diretta di **modelli concreti** di geometria piana e di geometria sferica, mediata dall'uso di **specifici strumenti**.

Agli occhi degli alunni si tratta **"solo"** di oggetti che possono essere manipolati, descritti, ecc.

Strumenti che possono evocare **agli occhi di un "esperto"** proprietà e relazioni geometriche.

Il percorso didattico

Idea centrale:

Esplorazione diretta di **modelli concreti** di geometria piana e di geometria sferica, mediata dall'uso di **specifici strumenti**.

Strumenti che possono evocare **agli occhi di un "esperto"** proprietà e relazioni geometriche.

L'uso di strumenti contribuisce alla **costruzione di significati personali potenzialmente "coerenti"** con i significati matematici obiettivo.

Prima parte

Geometria piana.

Realizzare percorsi dritti e non dritti (camminando, tracciando con scotch, spago, ecc.)

Andare diritto...

Per me andare dritto significa seguire delle linee dritte (Angelica)

Per me andare dritto significa andare nella stessa direzione e non curvare. (July)

NON CURVARE (NOEMI)
NON ANDARE A ZIGZAG (ALESSANDRO.M.)
NON CAMBIARE DIREZIONE (BASSITOU)
SEGUIRE LA STESSA STRADA (CECILIA)

---

non fare curve (Nare)

DRITTO NON VUOL DIRE OBLIQUO (SIMONE)

---

non fare curve e linee spezzate (Luca)

la linea dritta può andare all'infinito (Ale)
Andare dritto è una linea retta (Essia)

NON PIEGARSI (ARIANNA).

RIPETERE LA STESSA STRADA (THOMAS)

L'attività didattica

Andare dritti sul piano

L'attività didattica

Andare dritti sul piano

L'attività didattica

Andare dritti sul piano

DRITTO

STORTA

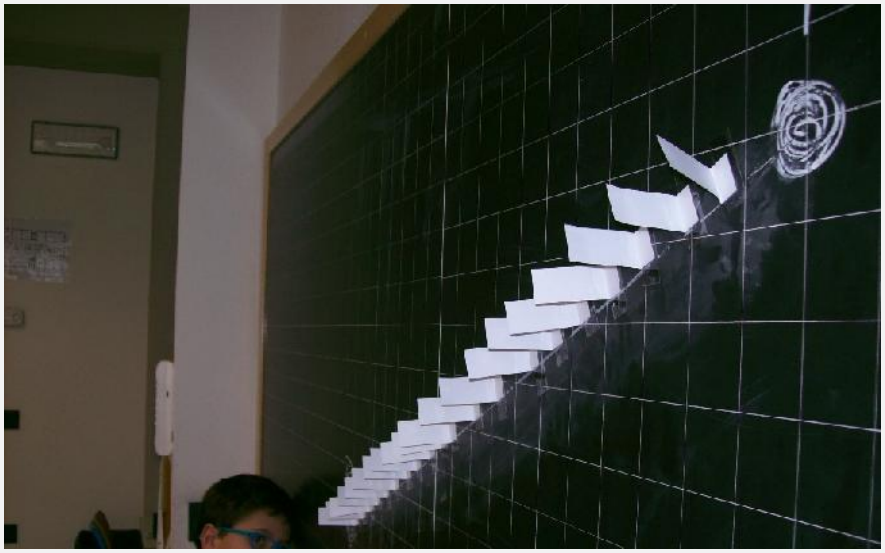
Seconda parte

Sviluppare significato di “retta sferica” consistente con la nozione di geodetica

Pavimento
(piano)

Pallone (sfera)

Lavagna

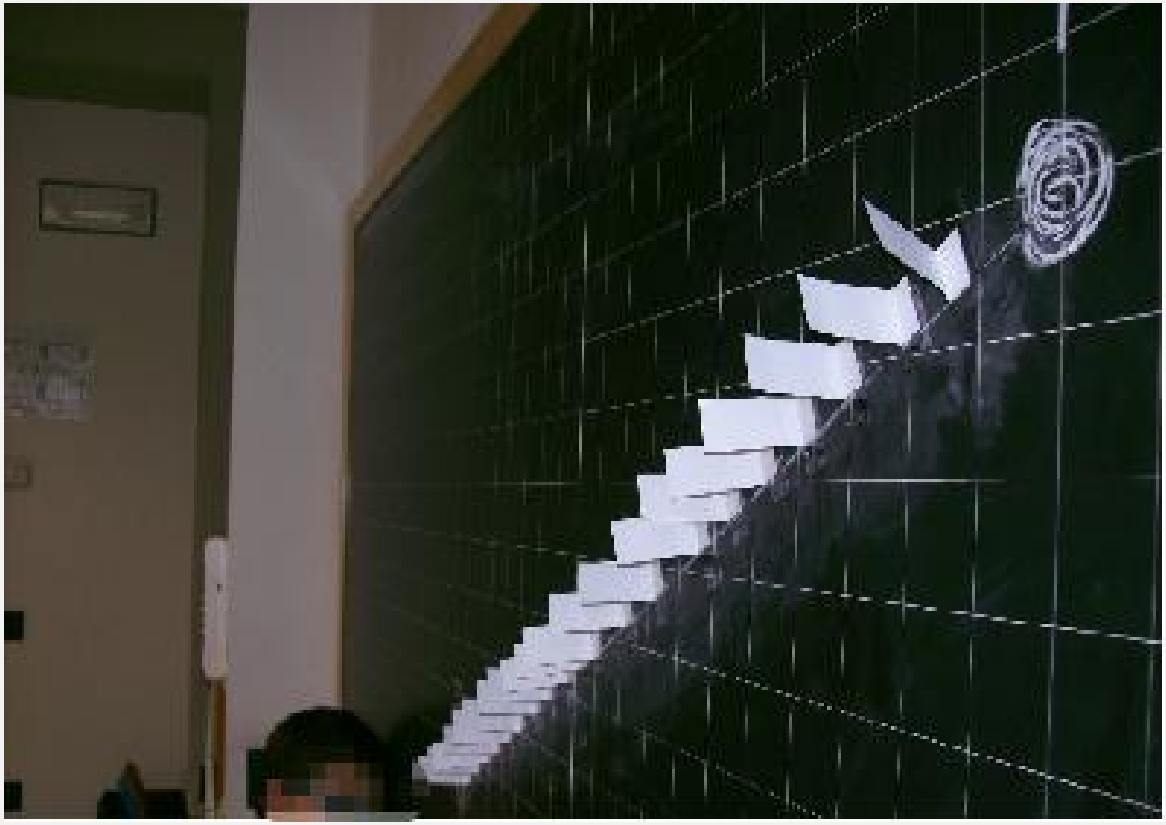


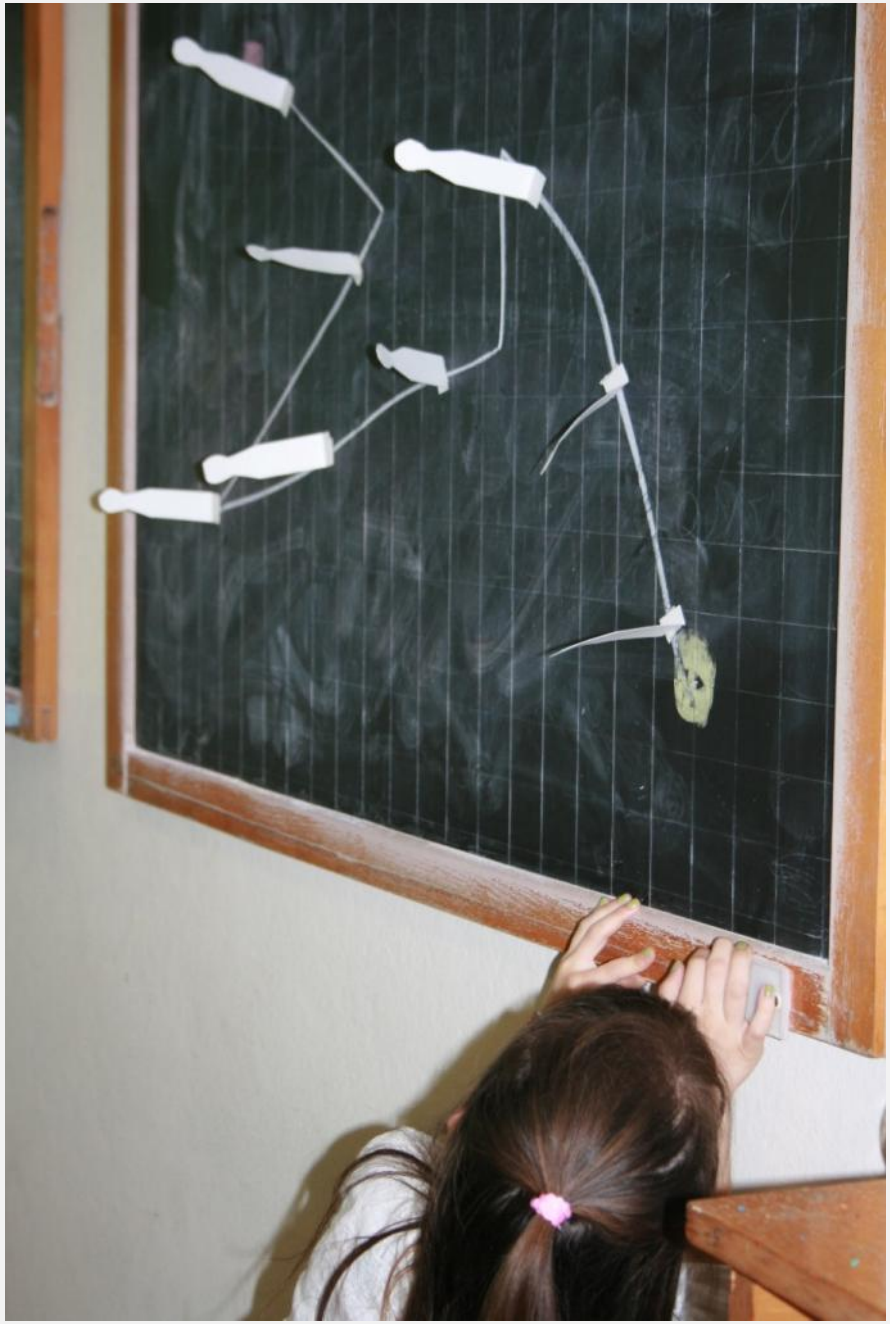
Pavimento
(piano)

Pallone (sfera)

L'attività didattica

Andare dritti sulla lavagna

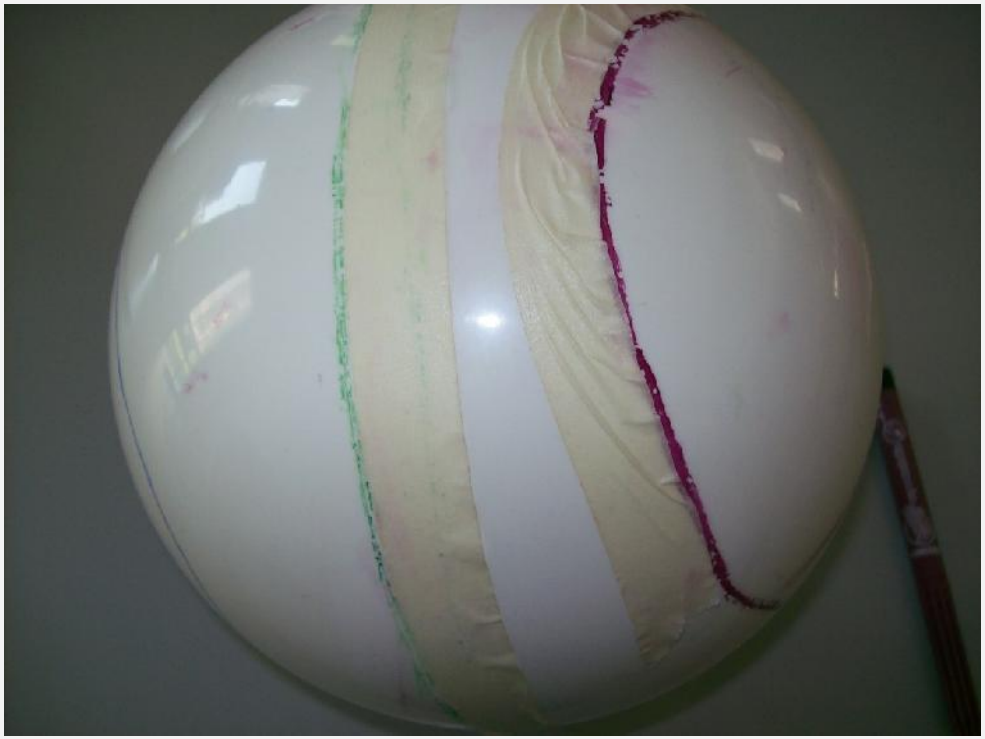




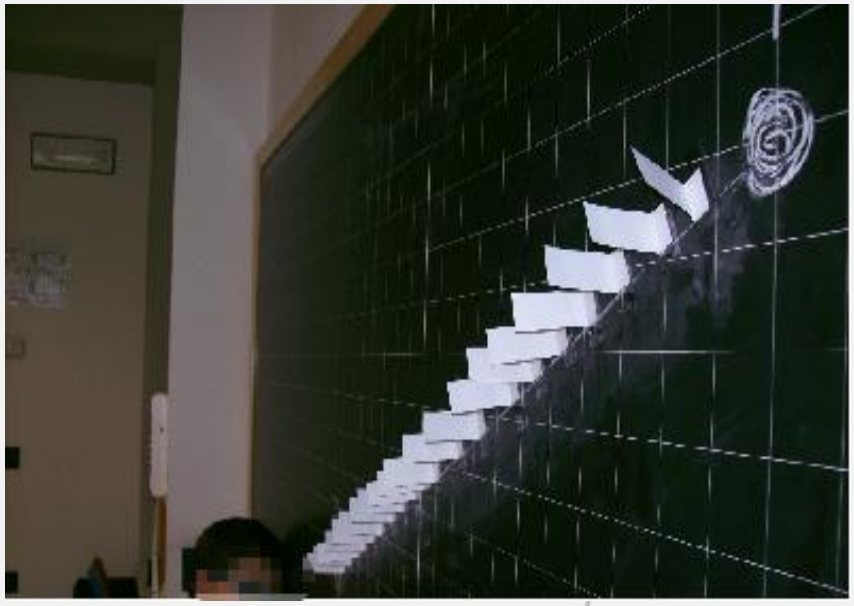
L'attività didattica

Andare dritti sulla lavagna

Dritti: dal piano alla sfera

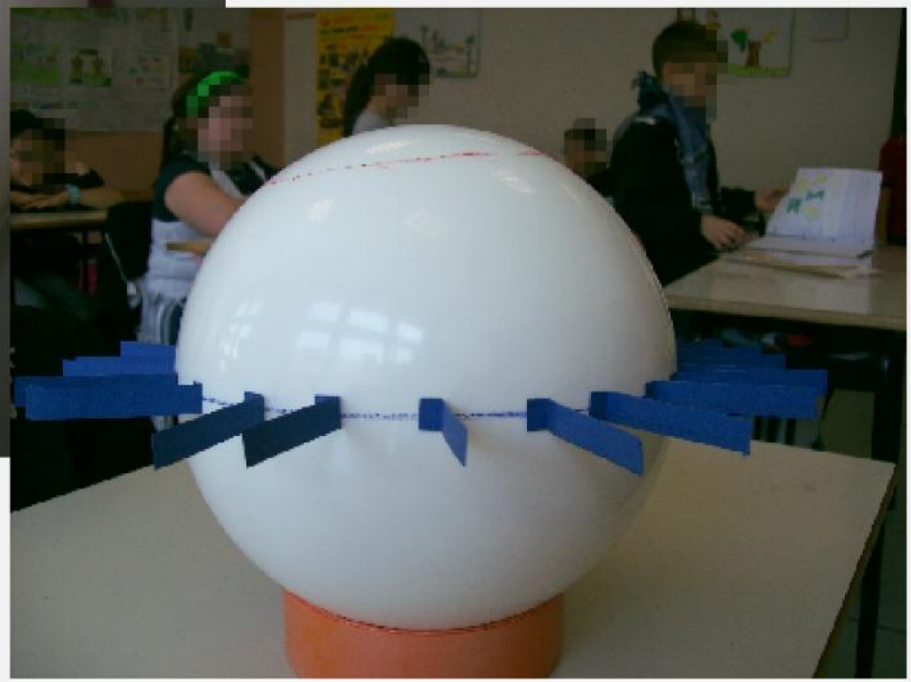


Dritti: dal piano alla sfera



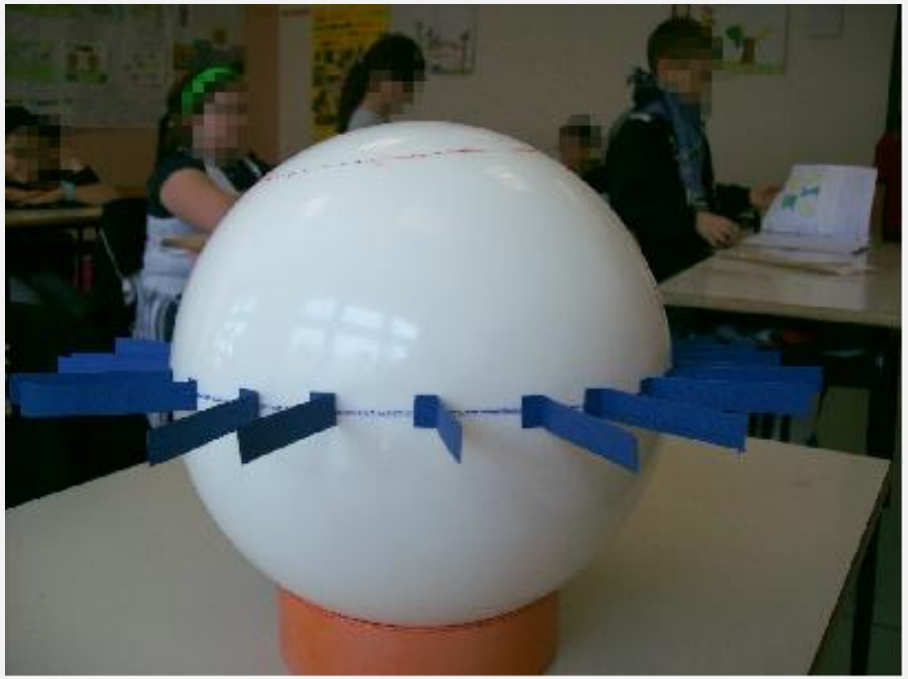
L'attività didattica

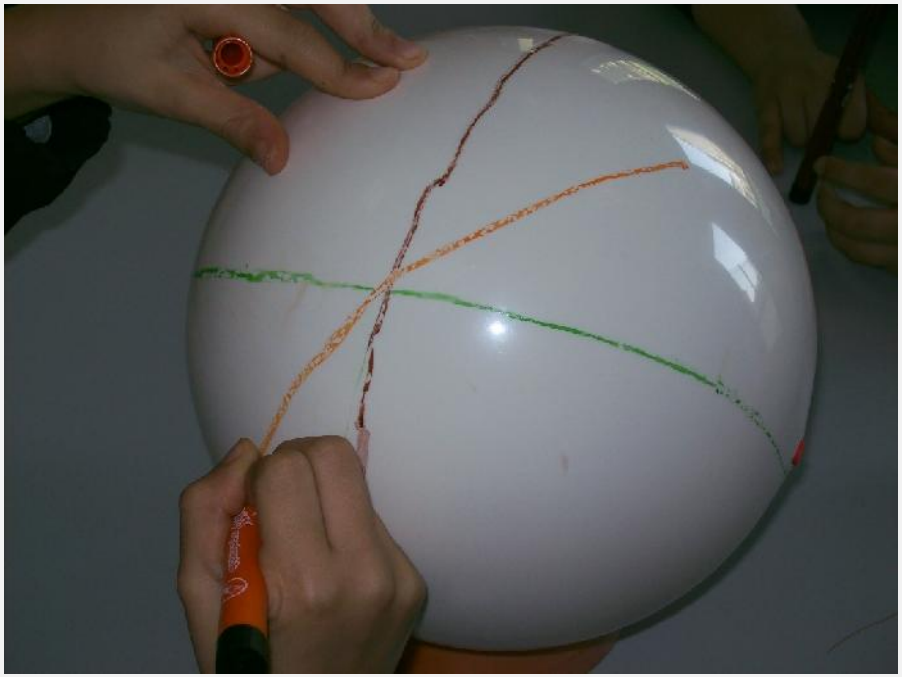
Andare dritti sulla sfera

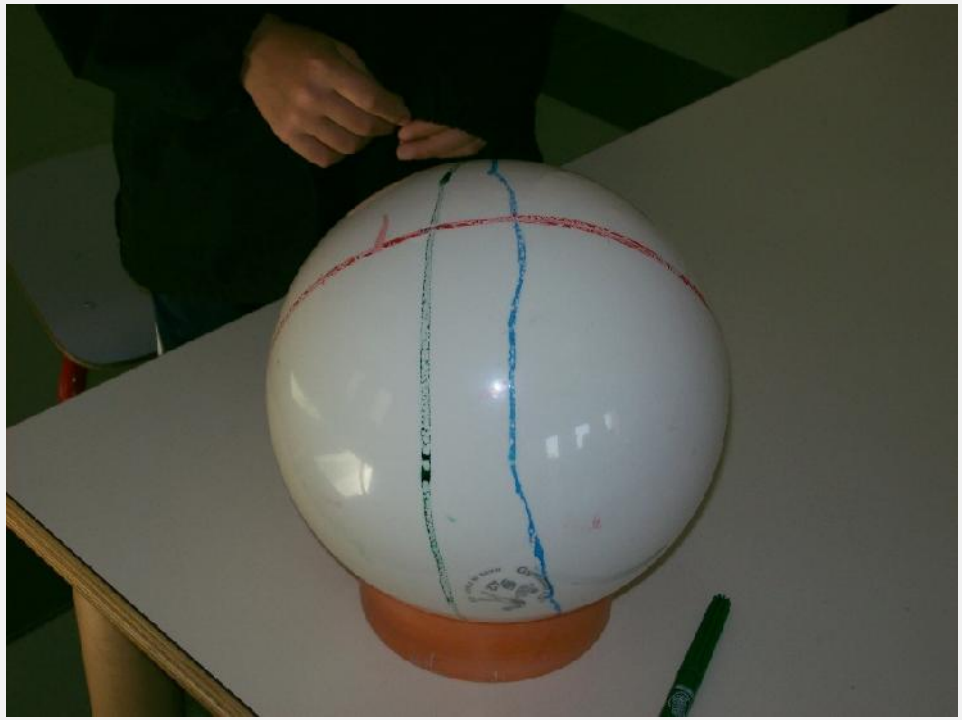


L'attività didattica

Andare dritti sulla sfera

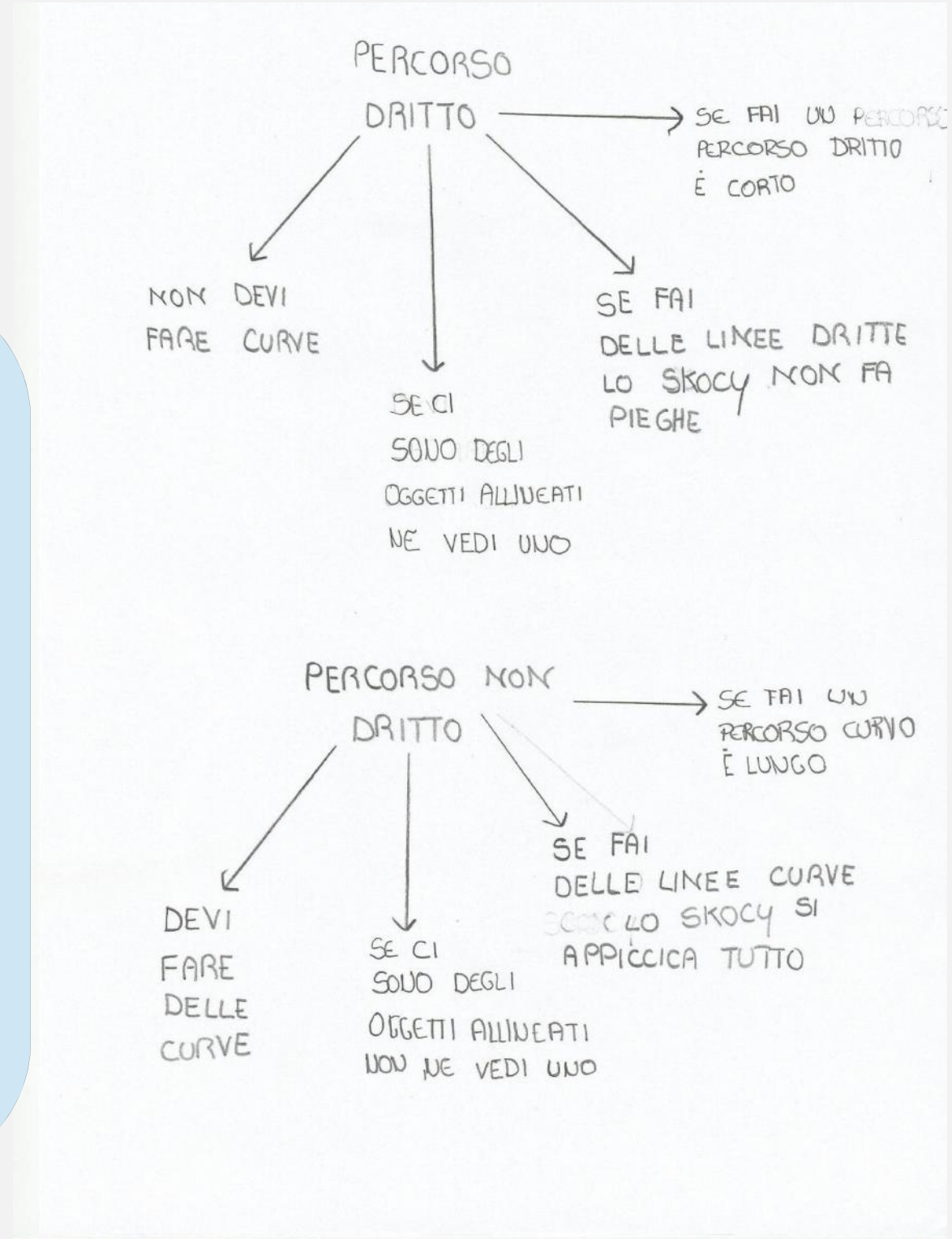






L'attività didattica

Un'elaborazione esplicita in cui termini quali "percorso dritto" siano significativamente messi in relazione a:
esperienze senso-motorie, e uso di strumenti.



Classe V elementare.

Condivisione sul fatto che:

- Il nastro adesivo aderisce bene su un “percorso dritto” mentre è difficile farlo aderire su un “percorso non dritto”

Tentativo di sintesi:

- un percorso dritto sulla sfera è una linea chiusa che divide a metà la sfera.

P: [ ] non sempre può dividere la sfera a metà perfetta [ ] Che se tipo parte da qua e va dritta dritta dritta [ ] gira qua (muove il dito a indicare una circonferenza “verticale” non massima) qui è una parte più grande e qui è più piccola quindi non la divide perfettamente [ ]

Distingue «girare» della sfera dal «girare» del percorso (io vado dritto, è la sfera che è curva)

Classe V elementare.

Condivisione sul fatto che:

- Il nastro adesivo aderisce bene su un “percorso dritto” mentre è difficile farlo aderire su un “percorso non dritto”

Tentativo di sintesi:

- un percorso dritto sulla sfera è una sfera.

Rifiuto perentorio dei compagni

P: [ ] non sempre può d… …e tipo parte da qua e va dritta dritta … …are una circonferenza “verticale” no… …più grande e qui è più piccola quindi non l… …]

RICHIESTA: Il percorso di P è dritto?

VIDEO 1 (13,00-15,00)

G: secondo me può essere tutte e due perché in pratica, quando tu tracci quando tu tracci una linea sulla sfera, la sfera è rotonda [ ] per cui se fai un cerchio (indica una *circonferenza non massimale sulla sfera*) [ ] può sembrare dritto ma secondo me non lo è

F: secondo me non è diritto [ ], perché ha fatto il cerchio [ ] questo vuol dire girare

P [ ] perché la sfera è rotonda. E' la sfera che è rotonda, tu vai sempre dritto, formi un cerchio [ ] la sfera è rotonda e allora tu formi un cerchio

RICHIESTA: Tracciare percorsi sulla sfera e incollare lo scotch

P (dopo aver attaccato lo scotch, che si attorciglia): non viene molto bene però con lo scotch è difficile perché... qui (*indica l'equatore*) è più semplice [ ]

P: lo scotch qui (*indica l'equatore*) è più semplice perché è appoggiato, qui non è appoggiato è più difficile [ ] però non si è tutto aggrovigliato, un po' sì, però se, tipo. lo mettevo più in qua, più in qua (*verso l'equatore*) non si dovrebbe aggrovigliare.

Lo scotch non aderisce bene alla sfera lungo il percorso di P, ma come si vede questo non porta a considerare non dritto il percorso ma ad una rimessa in discussione dell'uso dello scotch.

P: anche secondo me con lo scotch è più difficile, però è sempre dritto perché lo scotch dovrebbe girarsi o contorcesi, qui vengono solo un po' di grinze.

F: e quindi vuol dire che è un percorso non dritto [ ]

F: questo, questo è un cerchio! Perché si vede, dai!

P: Anche questo (indica l'equatore) è un cerchio. F, anche questo (indica l'equatore) è un cerchio ma è dritto, anche questo (indica l'altro) è un cerchio ed è dritto.

Consenso crescente con la posizione di P

G: questo percorso (segue l'equatore) è dritto ma se tu lo fai più piccolo [ ] si che fai più difficoltà soltanto che è la stessa roba, uguale.
voci: è un po' più piccolo ma è uguale

Tensione tra:

- **Il percorso di P non è dritto**
- **Lo scotch è utilizzato in modo non accurato**

VIDEO 2 (21,30-25,00)

Insegnante: Come definiamo adesso il nastro in questo caso?

voci: aggrovigliato, storto, messo male!

F: eh no, messo male, no, eh! è messo tutto aggrovigliato perché non è diritto!

P : quello perché è una superficie piana [ ], se fossimo su una sfera cambierebbe

F: anche sulla sfera viene aggrovigliato [ ] (mostra il cerchio non massimale) vedi? [ ] che viene sempre aggrovigliaaaaaaaaato

P: perché [ ] devi metterlo bene

In conclusione

B: allora, lo scotch è un caso [ ], sì, che lo devi aggrovigliare, ma se avessi un'altra cosa, non lo aggrovigli

P: esatto, perché, lo scotch [ ] non dico che ha questo problema, che ha questa caratteristica. Sulla sfera, se non l'hai messo proprio centrale si aggroviglia.

Congettura: Il percorso di P è dritto

Argomentazione (P)

La modalità (esperienza corporea) per disegnare il percorso di P è la stessa utilizzata per disegnare percorsi dritti
QUINDI
Il percorso di P è dritto

QUINDI

Lo scotch è «messo male» o non è adeguato per testare i percorsi dritti

Congettura: Il percorso di P **non** è dritto

Argomentazione (G):

La sfera è tonda
QUINDI
Non ci sono percorsi dritti

Congettura: Il percorso di P **non** è dritto

Argomentazione (F):

Lo scotch è aggrovigliato
QUINDI
Il percorso di P non è dritto

Gli alunni prendono in considerazione percorsi dritti sulla sfera, anche se tali percorsi non sembrano dritti, e argomentano le loro ipotesi, sia relative agli oggetti matematici, sia relative all'uso e all'efficacia degli strumenti

figurale **concettuale**

Un righello *sferico* proposto dagli alunni

Differenza con kit pronti

Ci sono rette e rette...

Piano	Sfera
Le rette sono illimitate	
Per due punti passa un'unica retta	
Due rette si intersecano in un punto o sono parallele	
Dati 3 punti su una retta, ce n'è sempre solo uno compreso tra gli altri due	
Un punto divide una retta in due parti disgiunte, chiamate semirette	
Due punti distinti su una retta individuano una sola porzione limitata della retta (un segmento)	

Ci sono rette e rette...

Piano	Sfera
Le rette sono illimitate	Le rette sono limitate e “chiuse”
Per due punti passa un’unica retta	Solo se i punti non sono antipodali, se sono antipodali le rette sono infinite
Due rette si intersecano in un punto o sono parallele	Due rette si intersecano sempre in due punti
Dati 3 punti su una retta, ce n’è sempre solo uno compreso tra gli altri due	Dati 3 punti su una retta, di ciascuno di essi si può dire che è compreso tra gli altri due
Un punto divide una retta in due parti disgiunte, chiamate semirette	Un punto non divide una retta in due parti disgiunte
Due punti distinti su una retta individuano una sola porzione limitata della retta (un segmento)	Due punti distinti su una retta individuano sempre due porzioni limitate della retta

È possibile definire *triangolo sferico* "allo stesso modo" del *triangolo piano*?

Obiettivo: stabilire se è possibile definire qualcosa che possiamo chiamare "triangolo sferico"

Osservazione: a differenza di prima (retta sferica), abbiamo per il piano una definizione esplicita di triangolo in termini di altri oggetti geometrici: punti, rette, segmenti…

Dati 3 punti non allineati - chiamiamoli A, B e C – il triangolo di vertici A, B e C è la figura formata dai segmenti AB, BC e AC.

Possiamo "adattare" questa definizione alla sfera per definire il triangolo sferico?

Insegnanti

E’ possibile andare dritti su una sfera?

“Poi ci dite qual è la risposta giusta!”

Triangolo per tre punti

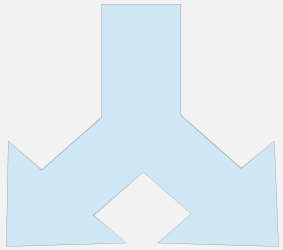
“Questo non mi piace, io non lo chiamo triangolo” (**ri-sistemazione della teoria**)

Quadrato sferico

E’ possibile disegnare un quadrato (un rettangolo, un triangolo) sulla sfera?

Quale tipo di reazioni posso aspettarmi? Da cosa dipendono?

Cosa mettono in gioco?



Ambito quotidiano
Ambito “arte e immagine”

Ambito matematico

Quadrato sferico

E’ possibile disegnare un quadrato (un rettangolo, un triangolo) sulla sfera?

Domande correlate:

Cosa è un quadrato (un rettangolo, un triangolo)?

Cosa è un segmento sferico?

e le rette sferiche parallele?

perpendicolari?

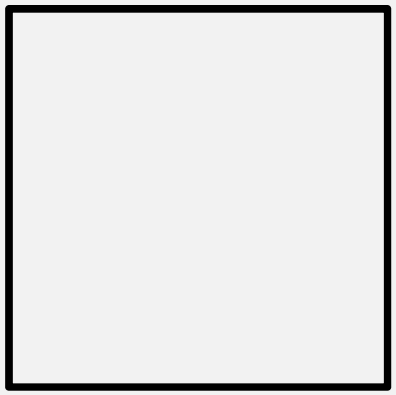
Segmento e semiretta sferica	Diverse possibilità
Rette sferiche parallele	Non esistono rette sferiche parallele. Due rette sferiche distinte si incontrano sempre in due punti
Rette sferiche perpendicolari	Esistono rette sferiche perpendicolari. In particolare ha senso parlare di angoli retti

Disegnare un quadrato

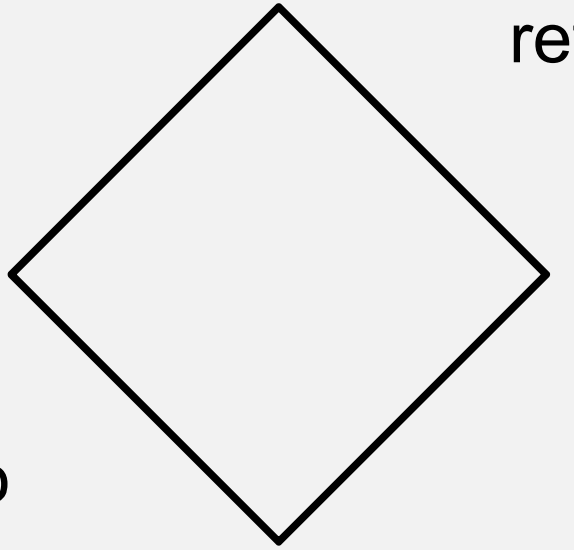
Cosa è un quadrato?

Un quadrilatero con 4 assi di simmetria

Un quadrilatero con le diagonali uguali, perpendicolari che si bisecano tra loro



Un quadrilatero che ha tutti e quattro gli angoli retti e tutti e quattro i lati uguali



Un quadrilatero regolare

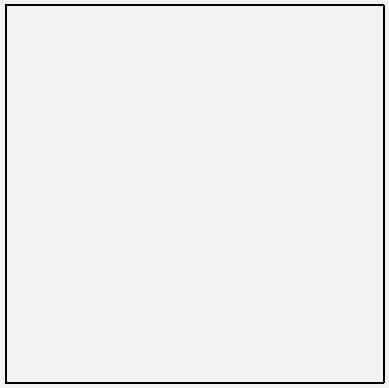
Figura piana quadrangolare con quattro lati e quattro angoli uguali

Disegnare un quadrato sul piano

Consegna:

Disegnate un quadrato su un pallone

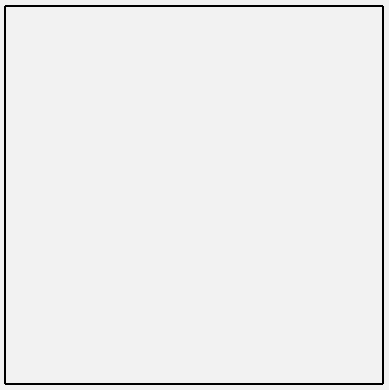
Pensiamo alla procedura che mettiamo in atto per disegnare un quadrato



Disegnare un quadrato sul piano

Consegna:

Disegnate un quadrato su un pallone



Quadrilatero con 4 lati uguali e 4 angoli retti

Quadrilatero con 3 lati uguali e i 2 angoli da essi individuati retti

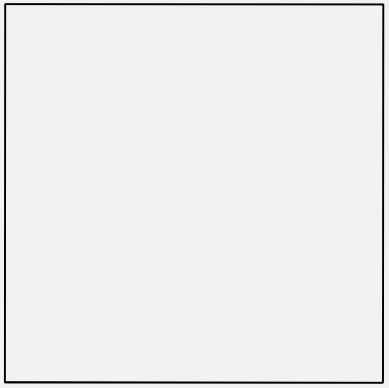
Ogni procedura realizza direttamente solo alcune delle proprietà dell'oggetto che si disegna.

Ogni procedura realizza una particolare definizione dell'oggetto

Disegnare un quadrato sul piano

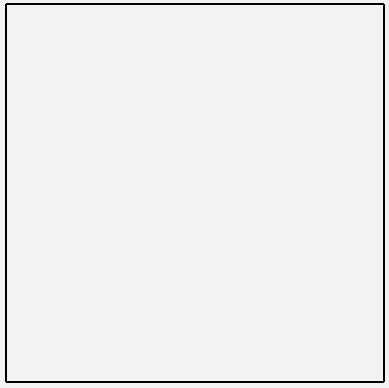
Consegna:

Disegnate un quadrato su un pallone



Quadrilatero con 4 lati uguali e 4 angoli retti

Quadrilatero con 3 lati uguali e i 2 angoli da essi individuati retti

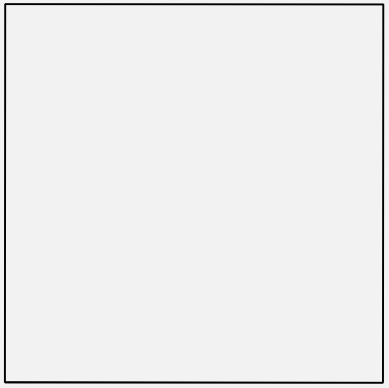


Quadrilatero con 2 lati paralleli uguali tra loro e uguali alla distanza tra loro, e “messi bene”.

Disegnare un quadrato sul piano

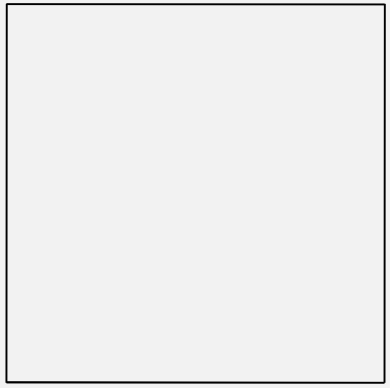
Consegna:

Disegnate un quadrato su un pallone

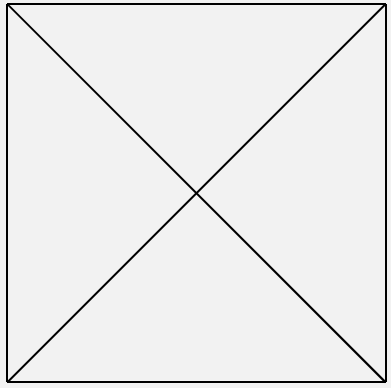


Quadrilatero con 4 lati uguali e 4 angoli retti

Quadrilatero con 3 lati uguali e i 2 angoli da essi individuati retti



Quadrilatero con 2 lati paralleli uguali tra loro e uguali alla distanza tra loro, e “messi bene”.



Quadrilatero con le diagonali uguali, perpendicolari tra loro e che si bisecano l’un l’altra.

Disegnare un quadrato sul piano

Sul piano

Le diverse procedure di disegno realizzano il disegno di uno stesso oggetto: il quadrato.

Le diverse definizione che guidano implicitamente le diverse procedure di disegno sono tra loro equivalenti.
Le molte proprietà del quadrato sono conseguenza delle proprietà espresse in una qualunque di queste definizioni

Disegnare un quadrato sulla sfera

Sul piano

Sulla sfera

Quadrilatero con 3 lati uguali e i 2 angoli da essi individuati retti.

Obbrobrio
Qualcosa che non vogliamo chiamare quadrato

Quadrilatero con 2 lati paralleli uguali, tra loro e uguali alla distanza tra loro, e "messi bene".

Quadrilatero con le diagonali uguali, perpendicolari tra loro e che si bisecano l'un l'altra.

Qualcosa "accettabile" dal punto di vista figurale e che possiamo provvisoriamente chiamare quadrato e di cui possiamo esplorare le proprietà.

Cos'è successo?

Piano

3 lati uguali
2 angoli retti (tra i lati)

4 lati uguali
Lati a 2 a 2 paralleli
4 angoli uguali
4 angoli retti
Diagonali uguali e perpendicolari
Diagonali si incontrano nei punti medi

Sfera

3 lati uguali
2 angoli retti (tra i lati)

Obbrobio !!!!

Cos'è successo?

Piano

2 lati paralleli uguali, tra loro e uguali alla distanza tra loro, e "messi bene".

4 lati uguali
Lati a 2 a 2 paralleli
4 angoli uguali
4 angoli retti
Diagonali uguali e perpendicolari
Diagonali si incontrano nei punti medi

Sfera

2 lati paralleli uguali, tra loro e uguali alla distanza tra loro, e "messi bene".

IMPOSSIBILE !!!

Cos'è successo?

Piano

Diagonali uguali e perpendicola
Diagonali si incontrano nei punti medi

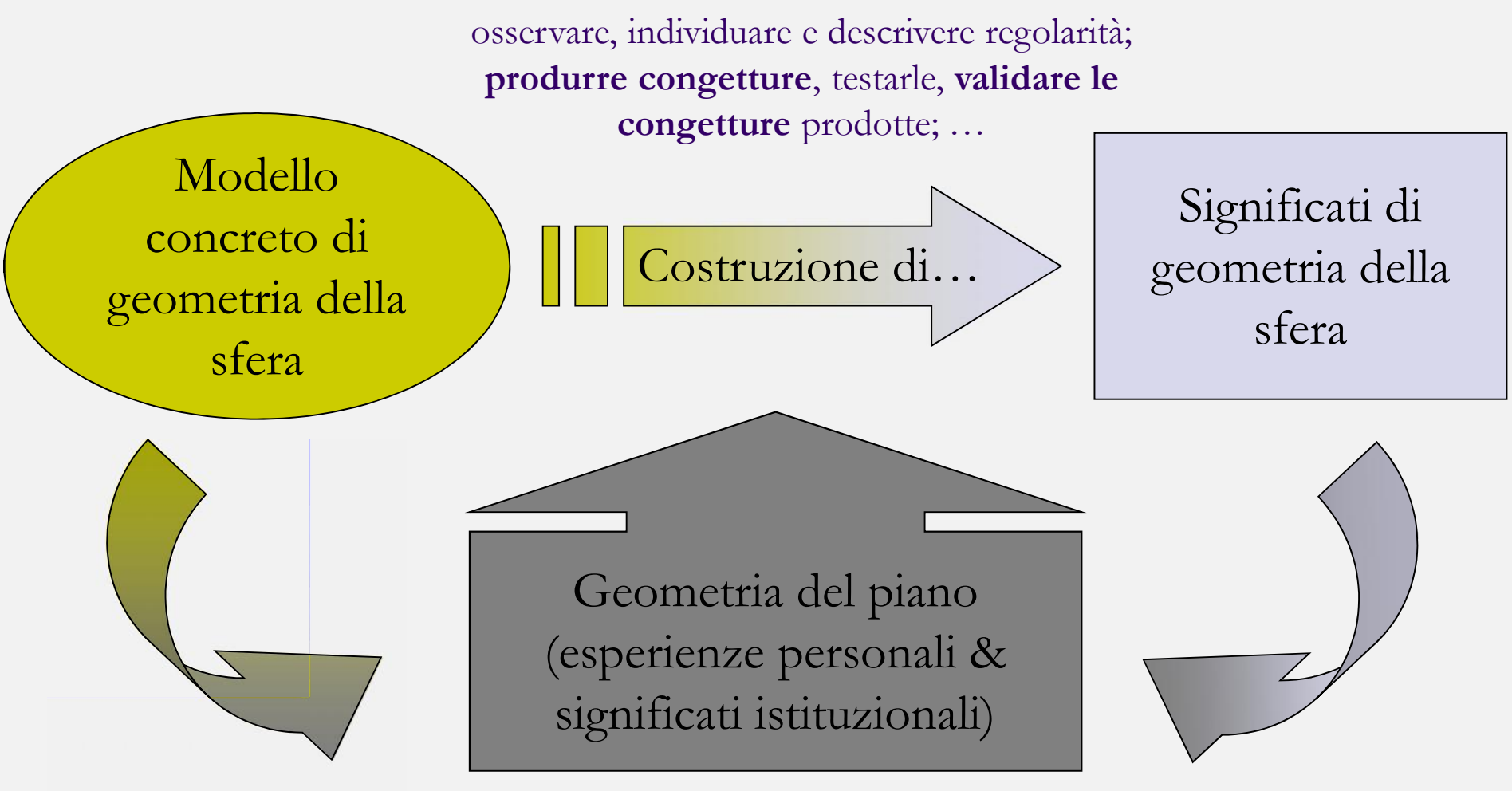
4 lati uguali
Lati a 2 a 2 paralleli
4 angoli uguali
4 angoli retti
Diagonali uguali e perpendicolari
Diagonali si incontrano nei punti medi

Sfera

Diagonali uguali e perpendicolari
Diagonali si incontrano nei punti medi

4 lati uguali
~~Lati a 2 a 2 paralleli~~
4 angoli uguali
~~4 angoli retti~~
Diagonali uguali e perpendicolari
Diagonali si incontrano nei punti medi

Perché la geometria della sfera?



Perché la geometria della sfera?

osservare, individuare e descrivere regolarità;
produrre congetture, testarle, **validare le congetture** prodotte; …

Modello concreto di geometria della sfera

Costruzione di…

Significati di geometria della

Rielaborazione dei significati di geometria piana

Perché la geometria della sfera?

Gli obiettivi dell'insegnamento della matematica e in particolare della geometria, in estrema sintesi

- Sviluppare "significati geometrici" a partire da esperienze e oggetti concreti.
- Sviluppare abilità specifiche relative a forme di pensiero tipiche della geometria e della matematica: operare e comunicare significati con linguaggi specifici, e utilizzare tali linguaggi per rappresentare e costruire modelli; comunicare e discutere, argomentare, comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri…
- Sviluppare un "atteggiamento matematico", far esperienza del lavoro del matematico.

Ruolo delle attività argomentative degli alunni

Gli alunni esplorano i modelli (del piano e della sfera), l'uso degli strumenti e la loro stessa esperienza con gli strumenti e con i modelli concreti. Fanno riferimenti continui a questi elementi nel supportare, confrontare, rifiutare le loro congetture. L'esperienza senso-motoria, percettiva, gli strumenti stessi sono messi in discussione e diventano oggetto dell'argomentazione.

Pertanto, i significati stessi sono discussi e dunque, elaborati.

In conclusione, l'argomentazione gioca il ruolo essenziale nel discutere, elaborare, forzare diversi (e contraddittori) significati ad emergere, promuovendo una elaborazione consapevole.

Con «matematica» non si intende soltanto i contenuti matematici (il sapere) ma anche «le attività basate (in modo più o meno esplicito e consapevole a seconda di chi le svolge e delle circostanze in cui sono svolte) su elementi del sapere matematico: quindi, per noi la matematica comprende non solo i concetti e gli algoritmi matematici, ma anche le attività di matematizzazione, di problem solving, di produzione e di dimostrazione di congetture, ecc. da chiunque effettuate.» (Boero et al., 1995)

Grazie per l'attenzione