



Definire in classe

Maria Alessandra Mariotti
Università di Siena
mariotti21@unisi.it

Di cosa parleremo

- Attività di brainstorming
- Seminario: Qualche riflessione su cosa significa definire in Matematica e in particolare in Geometria
 - Qualche esempio per approfondire
- Laboratorio
 - Analisi di due problemi alla luce delle considerazioni fatte nei due seminari.

Le definizioni

Dal dizionario etimologico:

- Dal latino **definire**, limitare circoscrivere, ... comprensivo della particella intensiva **de** e del verbo **finire**, por fine, terminare, determinare, delimitare, ...

Dal vocabolario Italiano ...

- Determinare il contenuto di un concetto, dichiarare con brevi e precise parole le qualità essenziali di una cosa, in modo da distinguerla nettamente da un'altra: *d. la virtù, la giustizia; definisci che cos'è un triangolo; non saprei d. il suo carattere; sono sentimenti così vaghi che non si possono d.; d. una persona, descriverla, indicarne le qualità.*

Le definizioni

Dal dizionario etimologico:

- Dal latino **definire**, limitare circoscrivere, ...
comprendente della particella intensiva **de** e del verbo **finire**, por fine, terminare, determinare, delimitare, ...

Dal vocabolario Italiano ...

- Determinare il contenuto di un concetto, dichiarare con brevi e precise parole le qualità essenziali di una cosa, **in modo da distinguerla nettamente da un'altra**: d. la virtù, la giustizia, ...; cos'è un triangolo; non saprei di che sentimenti così vaghi; d. una persona, descriverla



E in
Matematica?

Attività di brainstorming

- Dare esempi di definizioni in Geometria
Per ciascun esempio
 - Formulare la definizione
 - Fare un esempio di situazione/problema che la coinvolge
- A gruppi di 5-6 confrontare le proprie definizioni dal punto di vista Matematico, e dal punto di vista didattico.



Discussione

Definire in Matematica

- Due diversi aspetti del definire
 - Introdurre gli oggetti base di una teoria
 - Introdurre nuovi elementi all'interno della teoria stessa.
- Perché è importante distinguere questi due momenti e non confonderli?
- Quali problemi didattici si pongono nei due casi?

Definire in Matematica

- Introdurre gli oggetti base di una teoria
 - Definizioni implicite attraverso gli assiomi ...
- Da un punto di vista teorico nessun problema ... ma dal punto di vista epistemologico e cognitivo problemi ce ne sono ...
- Consideriamo dunque il problema degli ***enti primitivi***

Gli enti primitivi (?)

- Punti, rette, piano/i , spazio ...
 - Dal punto di vista della Storia (da Euclide a Hilbert): abbiamo visto cambiare il senso delle definizioni
 - Dalle definizioni Euclide alle definizioni di Hilbert
 - Nella scuola: che cosa è cambiato? Quale è il senso delle definizioni degli **enti primitivi**?

Oggetti o concetti?

- Il concetto intuitivo di **retta** come concetto che emerge da una situazione
- Esempio 1: 'disegnare' con strumenti/artefatti ... riga e compasso
- Esempio 2: 'disegnare' con la piegatura della carta ...
- Esempio 3: disegnare per modellizzare una situazione 'reale' (ad esempio le ombre del sole)

Dalla discussione del laboratorio di ieri ...

- Ricordiamo l'esperienza del quadrato sulla sfera ...
- Il quadrato di carta da spalmare sulla sfera
- Come interpretare il fatto che se prendo un quadrato piccino sembra essere possibile ?
- Come interpretare
- L'angolo, ... cosa è un angolo tra linee (curve)?

- Segmenti?
 - Come parti di circonferenze : quali?
- Rette? Distanza più breve ...
- Segmento come arco di una circonferenza qualsiasi che passa per quei due punti

- Retta sferica

Disegnare con artefatti ?



Analizziamo l'uso di questi artefatti?



Confrontare le definizioni possibili

- Nel caso del bicchiere ottengo una figura rotonda
- Nel caso del compasso ottengo ancora una figura rotonda, ma
- l'uso del compasso ha la potenzialità diverse rispetto all'uso del bicchiere ...

L'esempio di Veronica

Definire in Matematica

- Per quanto riguarda le definizioni interne alla Teoria: una definizione non porta alcun contributo, anzi ...
 - Un definizione è buona proprio quando è possibile “cancellarla” ...
- Da un punto di vista epistemologico
 - Ogni definizione fa emergere un elemento ‘nuovo’ (dalla teoria già nota), ma tale elemento deve meritare di essere ‘definito’ ...
 - Come ci si merita una definizione ?

Conseguenze

- Confusione tra arbitrarietà e convenzioni
- Uso ambiguo di termini del linguaggio comune e del linguaggio scientifico
- Il fenomeno dell''ostensione'
- Quando dare una definizione ?
- Superfetazione terminologica

Definizione di linea mista ...

d. Linee **spezzate**, ovvero costituite da soli segmenti (fig. 5a), e linee **miste**, costituite da segmenti e parti curve (fig. 5b).

figura 5a

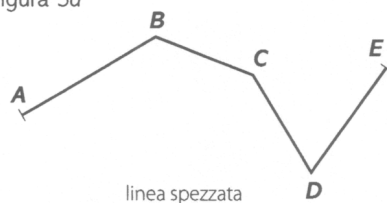
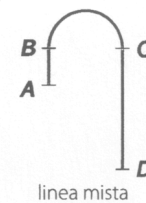


figura 5b

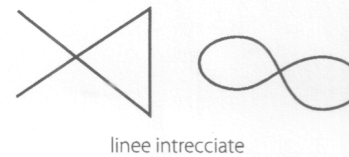


e. Linee **semplici** (senza incroci) come nella figura 6a, e linee **intrecciate** (con incroci) come nel caso della figura 6b.

figura 6a



figura 6b



Definire in Matematica

- Nominare / Dare un nome
 - A fronte dell'emergere di un particolare concetto, l'uso di un segno (in particolare, un'espressione verbale) lo rende evidente
 - Dare un 'nome' e il processo di oggettivazione
 - Ricordare l'esempio del primo giorno: il numero che sta a metà ...
 - Segni personali → segni matematici

Definire in Matematica

- Descrivere versus caratterizzare
 - **Descrivere**: lista di proprietà possibilmente 'esaustiva' (coerente con quanto si fa nella pratica)
 - **Caratterizzare**: dare un sistema 'minimale' di proprietà dalle quali si deducono tutte le altre.

Il caso delle definizioni legate a *classificazioni*

- Differenziare versus assimilare, ovvero dal particolare al generale

Un esempio significativo

Quando è che i solidi regolari diventano ...
'regolari'

- Come spiegare il fatto che l'ottaedro compare tardi?
- Perché il cubo non si chiama esaedro o il tetraedero è noto prima come piramide?

I solidi Regolari

La vera storia dei solidi regolari comincia dunque al momento in cui gli uomini si sono accorti che esisteva tale idea. La scoperta di questo o quel oggetto particolare era secondaria. *La scoperta cruciale è stata proprio la scoperta del concetto di solido regolare ...* Abbiamo il concetto matematico di solido regolare solo perché qualche matematico lo ha inventato. (Waterhouse, 1972-1973, p. 214; traduzione mia)

Classificazione

- Il punto chiave sta nella scelta del/dei criterio/i rispetto al/i quale/i si decide di classificare /concettualizzare

Un alternativa all'ostensione e alla descrizione

...

- Un esempio: le costruzioni ...
 - Con un segmento (asticciole tutte uguali) che triangoli posso costruire? Che quadrilateri? ...
 - Con due segmenti?
 - Con tre? Triangolo? ...

Concetti spontanei e concetti scientifici

- Da un punto di vista pratico, distinguere risulta più spontaneo
- Da un punto di vista teorico, gli elementi chiave sono le proprietà delle quali si occupa la teoria
- **Esempio:** cosa accade se prendiamo la simmetria (assiale) come elemento chiave la classificazione dei poligoni potrà essere fatta in base agli assi di simmetria ...

I quadrilateri

- Quadrilateri con un solo asse di simmetria:
- Quadrilateri con due assi di simmetria

Concetti spontanei e concetti scientifici

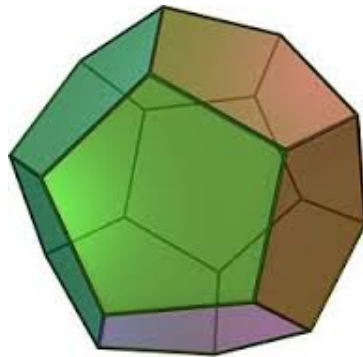
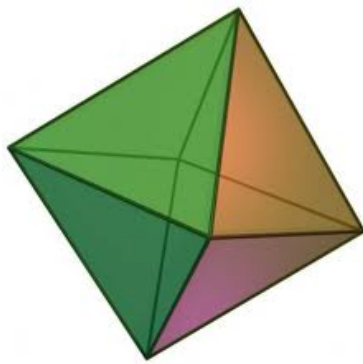
- Ma l'assenza di un sistema è la differenza cruciale che distingue i concetti spontanei da quelli scientifici ... tutte le particolarità del pensiero del bambino derivano dall'assenza di sistematicità nei concetti spontanei - una conseguenza del limitato sviluppo delle relazioni di generalità "(Vygotsky, 1962, p. 116)

Concetti spontanei e concetti scientifici

- Ma l'assenza di un sistema è la differenza cruciale che distingue i concetti spontanei da quelli scientifici. I concetti spontanei sono caratterizzati da una particolare vaghezza e derivano dall'esperienza diretta. I concetti scientifici, invece, sono caratterizzati da una sistematicità e da una generalità " (Vygotskij, 1962, p. 116)

Obiettivo didattico:
acquisire sistematicità

- Cubo e piramide ... cambiano nome, mentre ottaedro, icosaedro e dodecaedro ... testimoniano il cambiamento di punto di vista, il punto di vista sistematico di cui i termini sono espressione.



- La sistematicità è una caratteristica dei concetti scientifici ma non dei concetti spontanei:
 - la classificazione scientifica risulta chiara ed inequivocabile; l'appartenenza o meno ad una classe è subordinata alla presenza o meno di tali proprietà ... Il riconoscimento di un elemento della classificazione è subordinato ad una argomentazione che parte dalla proprietà caratterizzanti.
 - la classificazione spontanea risulta *fuzzy*, instabile e non completamente esauriente ...

Esempi classici

- Un quadrato è un rettangolo?
- Qual è la base di un triangolo?



Un esempio

Il problema del perimetro

Lavoro di gruppo

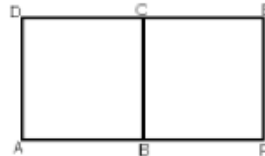
- Analizzare i problemi riportati nella scheda
- Interpretare i risultati relativi al campione nazionale, cercando di utilizzare le riflessioni fatte nei due seminari.

Individuare i concetti Geometrici coinvolti e cercare di usare la nozione di *concetto figurale* per ipotizzare i processi risolutivi messi in atto dagli studenti descrivere le possibili dinamiche tra componente figurale e componente concettuale (tra immagini e concetti) che possono aver portato sia a risposte corrette che a risposte errate

SNV06- D18

Testo della domanda

D18. Il rettangolo AFED è formato da due quadrati congruenti ABCD e BFEC con un lato in comune.



Il perimetro di ciascuno dei quadrati misura 24 cm. Quanto misura il perimetro del rettangolo AFED?

Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e poi riporta sotto il risultato.

.....
.....
.....

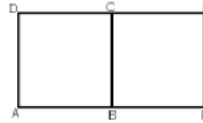
Risultato: cm

Risultati dal campione Nazionale

Item	Risposta omessa	Risposta errata	Risposta Corretta
D18	12,7	68,5	18,8

Testo della domanda

D18. Il rettangolo AFED è formato da due quadrati congruenti ABCD e BFEC con un lato in comune.



Il perimetro di ciascuno dei quadrati misura 24 cm. Quanto misura il perimetro del rettangolo AFED?

Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e poi riporta sotto il risultato.

.....
.....
.....

Risultato: cm

Caratteristiche

SCOPO DELLA DOMANDA

Calcolare il perimetro di una figura geometrica composta.

Indicazioni nazionali

Determinare il perimetro di una figura utilizzando le più comuni formule o altri procedimenti.

- saperi geometrici coinvolti:
 - figure piane familiari (quadrato e rettangolo),
 - la congruenza e
 - il perimetro.
- la congruenza tra due figure è intesa come possibilità di sovrapporre le due figure,
- il perimetro è definito come misura del bordo/ contorno, ovvero “somma delle misure dei lati”.
- Il testo contiene una immagine del rettangolo coerente con la descrizione verbale (rettangolo formato da due quadrati)

Conflitto tra figurale e concettuale

- Il segmento CE è allo stesso tempo fondamentale e da trascurare
- i lati sono legati al concetto di bordo in modo tale che il segmento (il lato) in comune è parte del bordo dei due quadrati ma se viene 'incollato' perde la sua caratteristica di bordo e 'scompare'

Conflitto tra figurale e concettuale

- Il segmento CE è allo stato fondamentale e da fatto
- i lati sono legati al con modo tale che il segmento comune è parte di due quadrati ma se viene 'incollato' perde la sua caratteristica di bordo e 'scompare'

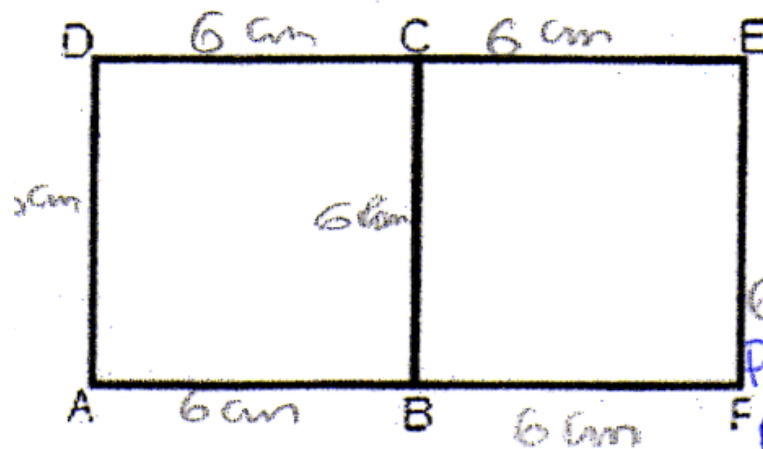


Rottura tra figurale e concettuale

Il perimetro: quale definizione?

- Perimetro come misura del contorno / bordo: CE è parte del bordo o no? CE è un lato o no?
- Aspetto 'operativo' del concetto di perimetro → somma delle misure dei lati → determinare i pezzi le cui misure devo sommare → ...

Esempio di risposta



$$P_{ABCD} = 2h \text{ cm}$$

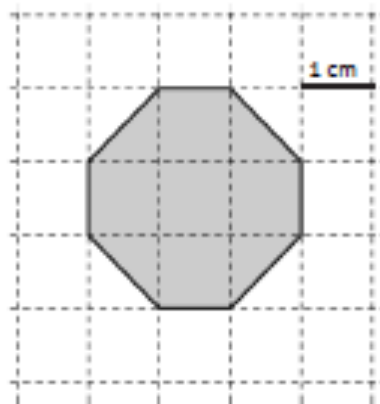
$$P_{BFEC} = 2h \text{ cm}$$

$$l = \frac{P}{h} = 2h : h = 6 \text{ cm}$$

$$P_{ABFECD} = 2h + 2h = 4h$$

$$P_{AFED} = 4h - 12 = 36 \text{ cm}$$

D11. Giulio dice che l'ottagono rappresentato in figura ha il perimetro di 8 cm.



Giulio ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Giulio ha ragione perché

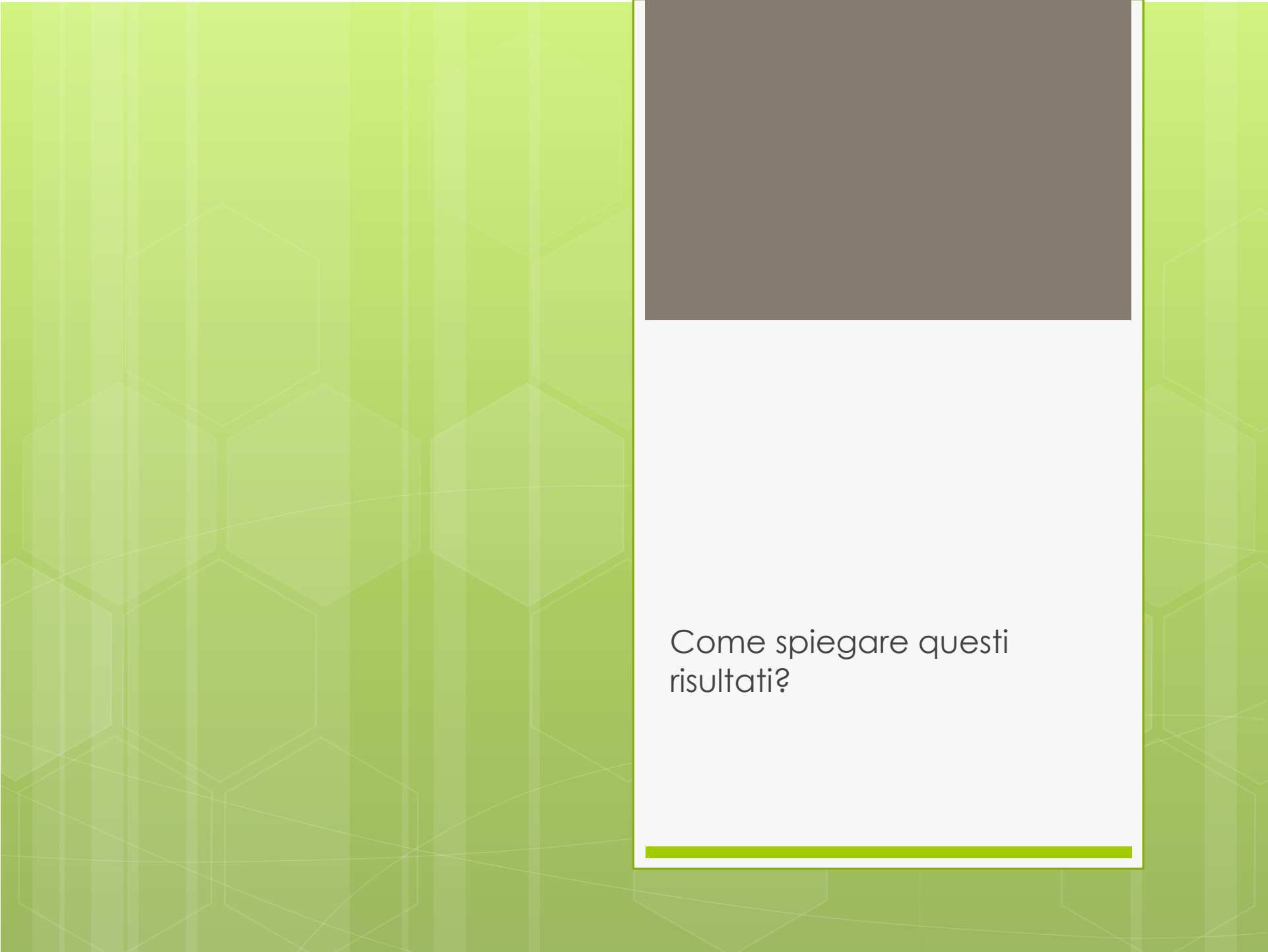
.....
.....

Giulio non ha ragione perché

.....
.....

Risultati dal campione nazionale

Item	Risp. Omessa	Risp. Errata	Risp. Corretta
D11	6,0	79,7	14,3

The slide features a green background with a pattern of overlapping hexagons. A white rectangular box is positioned on the right side, containing a dark grey header area at the top and a white area below. The text 'Come spiegare questi risultati?' is centered in the white area. A thick green horizontal bar is located at the bottom of the white area.

Come spiegare questi
risultati?

Analizziamo il problema

Quali processi per arrivare ad una risposta?

- Riconoscimento della figura
 - Regolare?
- Effetti di 'regolarizzazione' secondo il principio della buona forma

Analizziamo il problema

- Quali risposte sono corrette?
 - Sono corrette tutte le risposte che fanno riferimento al fatto che la diagonale del quadretto è maggiore del lato oppure quelle che rilevano che la lunghezza del perimetro è maggiore di 8 cm misurando con il righello.
- Le motivazioni sono tra loro molto diverse?
 - Empirica?
 - Teorica?

Analizziamo il problema

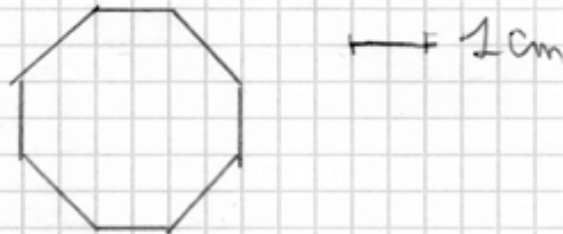
- Quali risposte sono corrette?
 - Sono corrette tutte le risposte che fanno riferimento al fatto che la diagonale del quadretto è maggiore del lato oppure quelle che rilevano che la lunghezza del perimetro è maggiore di 8 cm misurando con il righello.
- Le motivazioni sono diverse tra loro
 - Empirica?
 - Teorica?

Si sta distinguendo
tra disegno e
figura?

Esempi di risposte

1. GIUVO HA RAGIONE PERCHÉ SE UN QUADRATTO VALE UN CM E HA TUTTI I LATI UGUALI QUINDI OGNUNO UN CM, ESSENDO UN OTTAGONO (8 LATI) HA INEQUIVOCABILMENTE IL PERIMETRO DI 8 CM

Giulio dice che l'ottagono ha il perimetro di 8 cm



Non ha ragione perché l'ottagono è irregolare perché i lati obliqui sono 1, 2 cm (nel mio foglio)



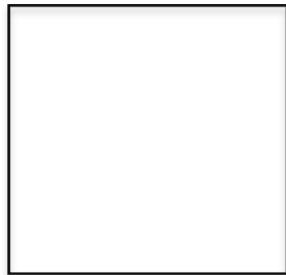
Il disegno in geometria

Il disegno come problema

Disegno / figura

L'ambiguità della parola *figura*

disegno come tracciato materiale, una delle possibili rappresentazioni di una *figura geometrica*, ma non la sola ...



Quadrato

Una distinzione utile

Nel seguito distingueremo il disegno e la figura, indicando con *disegno* il disegno tracciato concretamente su un foglio di carta (o su un altro supporto).

Alcuni

matem

che van rar

modo, la figura è un elemento del mondo matematico e non del mondo sensibile.

Ma cosa è
"l'oggetto
matematico"?

(Arsac, 1989, p. 86)

Potenzialità e pericoli del disegno

- Una distinzione fondamentale:
 - Disegno come la traccia grafica sul foglio (o altra qualsiasi traccia ad esempio un insieme di pixel sullo schermo)
 - Figura come il concetto matematico
- Il primo è possibile agire concretamente
La seconda è possibile agire logicamente sulle proprietà ...

Come armonizzare
disegno e figura?

Che cosa c'è di particolare nei disegni in Geometria?

- Un disegno rappresenta relazioni spaziali espresse dal concetto geometrico tramite relazioni spaziali tra le tracce grafiche prodotte sul foglio



TRIANGOLO

Dai disegni alle definizioni

Se sembra impossibile evitare il ricorso ai disegni (esempi) ...

È certo che niente può garantire la convergenza tra la concettualizzazione 'spontanea' e quella 'matematica'

Ecco l'emergere di "stereotipi" ... o "misconcetti" ...

Costruire l'altezza

Dato un triangolo



Che ne è dell'altezza?

Concetti e rappresentazioni

Un disegno può essere considerato una rappresentazione (segno) che rinvia ad un significato astratto ...

... nel caso di una figura geometrica, tale significato rimanda a ciò che abbiamo chiamato Concetto Figurale

Ma un segno non significa niente se non in quanto qualcuno stabilisce un rapporto di significazione

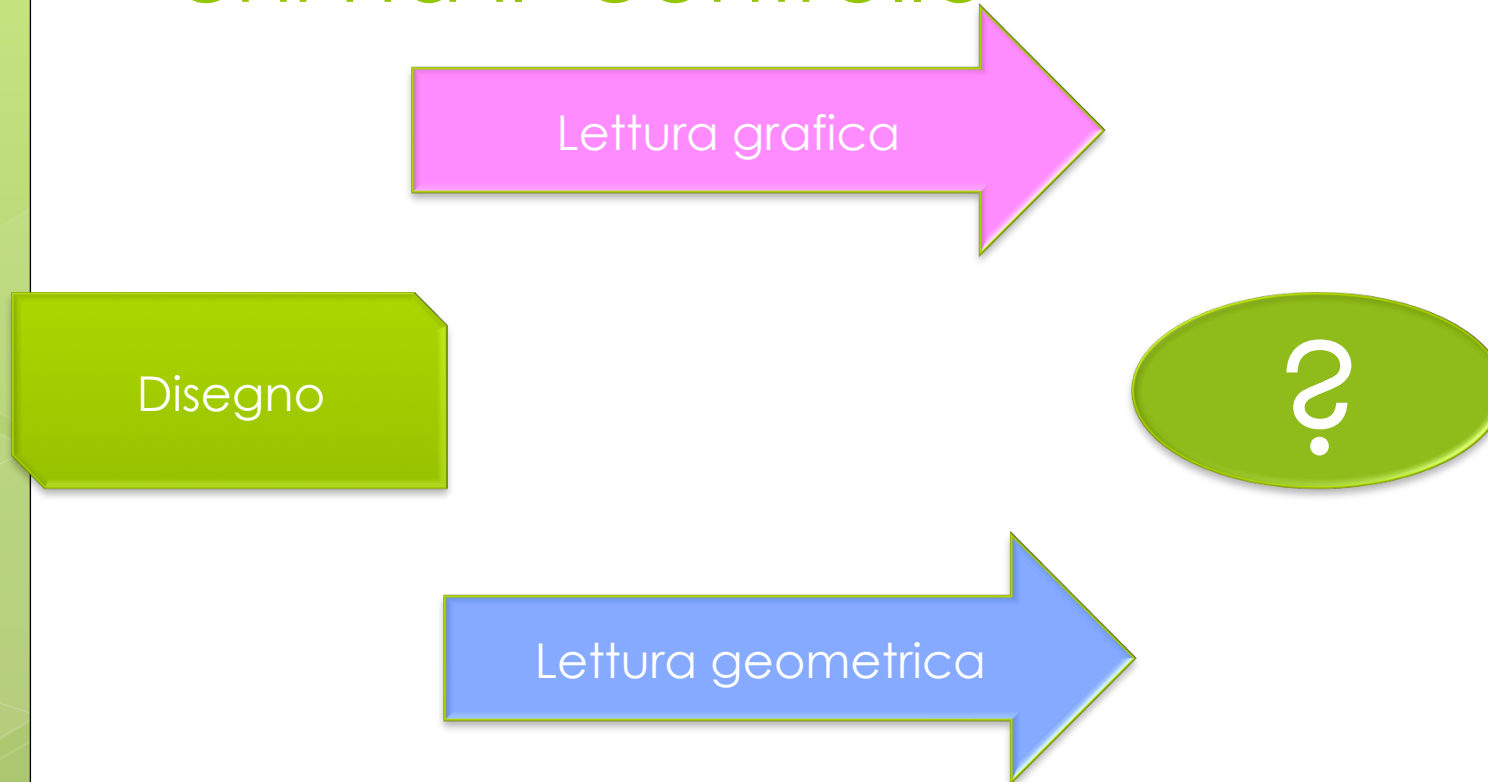
Disegnare come attività di rappresentazione – difficoltà

Disegno è in sé un
oggetto fisico e può
rappresentare un
oggetto **Fisico**



Disegno è un
oggetto fisico che
reppresenta di un
oggetto **Teorico**

Rapporto tra disegno e figura: chi ha il controllo



Controllo tra disegno e figura

Il controllo tra disegno e figura dipende da un atto mentale del soggetto ...

- Come rendere consapevoli gli allievi del passaggio dalla lettura spontanea alla lettura geometrica?

Suggerimenti

- Non dare per scontata la lettura geometrica
- Lasciare libertà di esprimere letture diverse ...
- Trovare problemi che per la loro soluzione richiedano 'letture geometriche'
- Problemizzare il disegno: le costruzioni geometriche

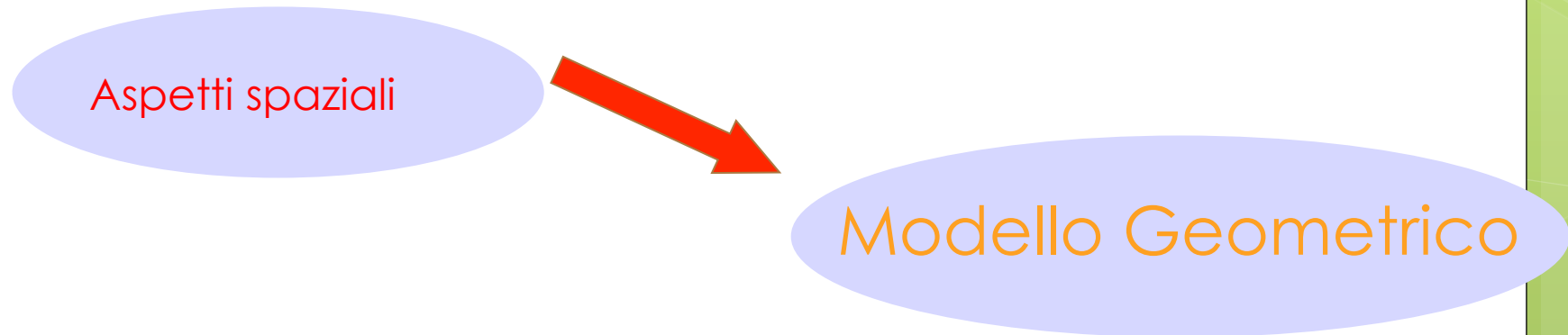
Potenzialità e pericoli del disegno

- Il problema dei prototipi
 - Figure regolari

- Il sistema di riferimento privilegiato

Disegno e modellizzazione

- un fenomeno e il suo modello



Una caratteristica chiave del disegno:
rappresenta **proprietà spaziali** attraverso
proprietà spaziali.

Definire come problema

- Perché stabilire una definizione può essere considerato un particolare "problema", nel nostro caso un problema "geometrico"?
- La geometria come discipline che studia le forme, ovvero modi diversi per stabilire **equivalenze tra forme** (Dedò). Definire significa
 - stabilire i tipi di forme che ci interessano.
 - e studiare la struttura dello spazio geometrico che ne consegue.

Conseguenze

- Nessuna definizione è 'assoluta'
- Le proprietà non sono intrinseche, ma dipendono da chi classifica
- Si attenua il processo 'induttivo' che fa partire tutto dall'osservazione ...
- Mette in primo piano il **controllo concettuale**

Attività di definizione

- Attività e non accettazione passiva ...
- Appropriazione di strumenti intellettuali culturalmente significativi
- Ricostruzione del significato

Dialettica figurale - concettuale



Il ruolo
dell'insegnante

La classe come ambiente sociale

- Apporti diversi provengono da soggetti diversi innescando la dialettica tra figurale e concettuale.
- Nel tentativo di raggiungere un accordo come comunità i contributi devono essere armonizzati.
- Condizioni di interazione impongono sia l'esplicitazione (verbale e non) di concettualizzazioni implicite (controllo verbale connesso al controllo concettuale), sia il riferimento al particolare oggetto in gioco (controllo figurale).
- L'intervento dell'insegnante è finalizzato sia al controllo del processo di interazione, eventualmente innescando tale processo a partire da situazioni decisamente conflittuali, sia guidando verso un equilibrio tra le due componenti