Per un apprendimento sensato della matematica

Ferdinando Arzarello
Dipartimento di Matematica "G. Peano"
Università di Torino

2ª SCUOLA ESTIVA PER INSEGNANTI UMI CIIM AIRDM
Marina di Pietrasanta, 31 agosto 2015

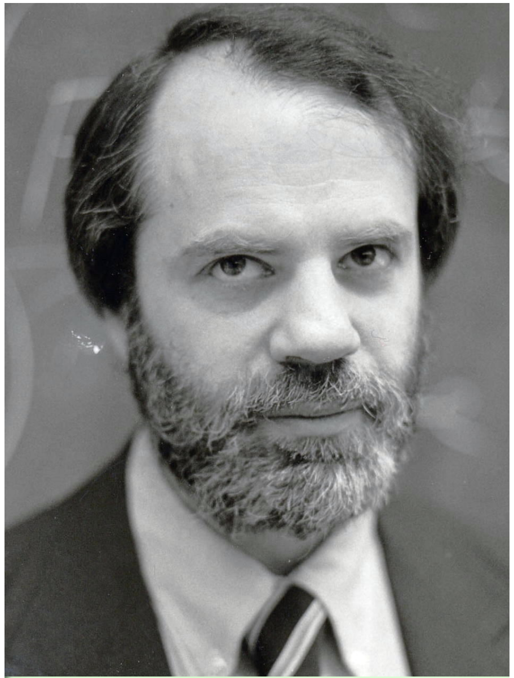
In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.

(G. Cantor, Tesi dottorale, Berlino, 1867)

Il compito assegnatoci:

Nelle Indicazioni Nazionali si sottolinea l'importanza di sviluppare nell'allievo *"un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare* e *applicare, ma riconosciuta* e *apprezzata come contesto per affrontare* e *porsi problemi significativi (…)"*.

Cosa si intende per 'regole' nella pratica didattica? Perché una visione della matematica 'ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare' è considerata negativa? Da cosa proviene una visione di quel tipo? Da quali esperienze? Da quali pratiche? Come si può prevenire / scardinare tale visione?



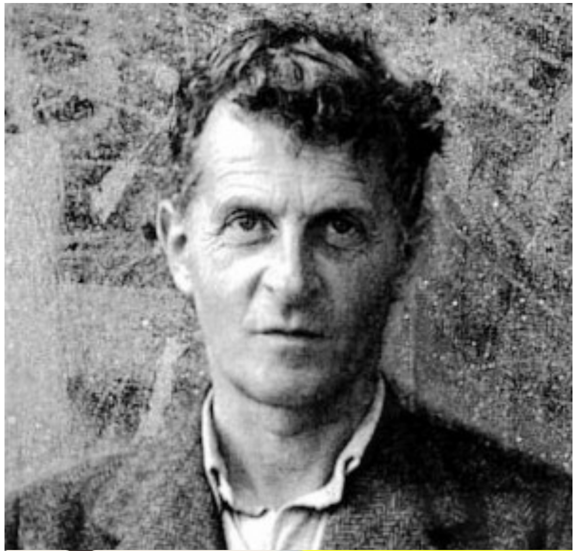
Il Paradosso di Wittgenstein - Kripke

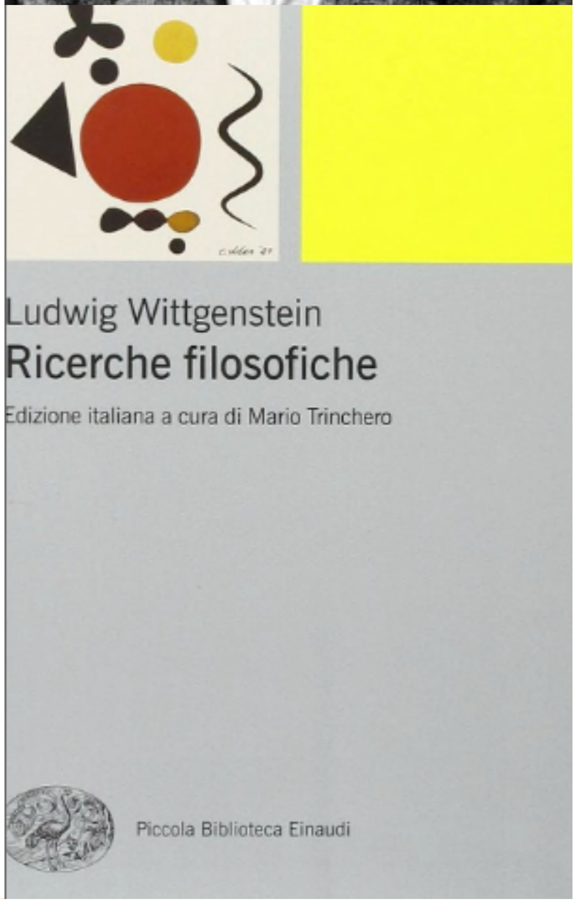
Seguire una regola è impresa impossibile da realizzare privatamente, poiché una regola è intelligibile, comprensibile, solo all'interno dell'insieme delle modalità di comportamento comune agli individui di una certa comunità, ambiente culturale, in cui vige.

È una pratica acquisita in base all'interazione sociale (giochi linguistici).

Adattato da "Ricerche Filosofiche"

(1941-1953; in ital. 1967)

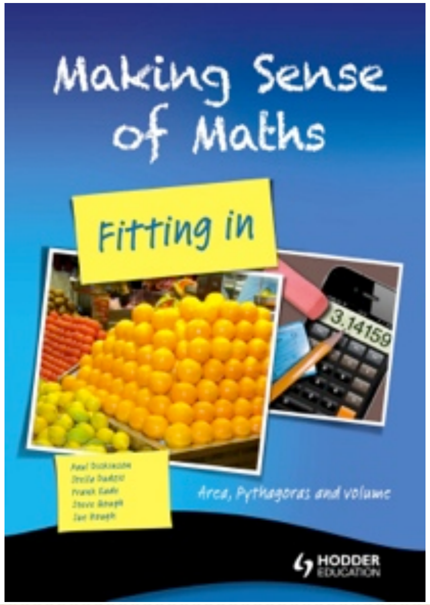




Un aspetto didattico del paradosso è che, essendo le classi ambienti culturali in cui le attività e le pratiche quotidiane definiscono e danno significato agli argomenti che vi si insegnano, gli allievi da tali pratiche elaborano, più o meno consciamente e più o meno coerentemente, ma inesorabilmente, (un protocollo di) regole da seguire, per es. per avere successo o perlomeno "sopravvivere" alle richieste degli insegnanti.

Di qui nasce quello che possiamo chiamare:

il senso degli studenti per la matematica.



Il guaio è che può risultare una grossa differenza tra il significato inteso per la matematica da noi insegnanti e quello trasmesso culturalmente agli allievi – il loro senso per la matematica come risultato delle loro esperienze e pratiche in questo dominio.

Il mio intervento:

- riflette su questo intreccio tra **pratiche** di classe, **regole** (implicite o esplicite) indotte e **il senso matematico** che ne risulta per gli studenti;
- propone pratiche che inducano un diverso senso per la matematica (con le conseguenti possibili regole che ne risultano).

Cercherò di trasmettere il senso del mio intervento attraverso un esempio.

Successivamente elaborerò alcuni pensieri e riflessioni generalizzando quanto illustrato dall'esempio.

Cercherò perciò di simulare ora con voi una situazione di classe: vi prego di rispondere non pensando di essere i vostri studenti ma così come vi viene naturale.

S. I. Brown & M.I.Walter, The Art of Problem Posing, 2005, Lawrence Erlbaum publ.
A. Schoenfeld, Problematizing the didactic triangle, ZDM, 2012.

Passo 1: "Quali risposte sono possibili?"

- *Scarabocchiando dei conti ho prodotto questa configurazione:*

1 • 3	3
2 • 4	8
3 • 5	15
4 • 6	24
5 • 7	35

DOMANDA 1 (D1) : *"Che cosa osservate?"*

Io per esempio ho osservato che:

O1. Ci sono sempre due fattori, che riproducono la successione dei naturali partendo da 1 e da 3.

O2. In ogni uguaglianza i fattori differiscono di 2.

O3. I prodotti ottenuti (3, 8, 15, 24, 35) sono quasi quadrati perfetti: manca 1 per ottenerli.

O4. Anche le differenze tra i prodotti formano uno schema interessante:

8 - 3	5
15 - 8	7
24 - 15	9
35 - 24	11

O5. …

Si può anche usare un foglio excel:

1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	11
10	12
11	13
12	14
13	15
14	16
15	17

Si può anche usare un foglio excel:

1	3	3	4
2	4	8	9
3	5	15	16
4	6	24	25
5	7	35	36
6	8	48	49
7	9	63	64
8	10	80	81
9	11	99	100
10	12	120	121
11	13	143	144
12	14	168	169
13	15	195	196
14	16	224	225
15	17	255	256

Passo 2: "Come sarebbe se … ?"

Cambiamo per es. la O2: supponiamo ora che i fattori differiscano di 4 [(~ O2)$_4$]. Otteniamo:

1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

Ricordando l'osservazione O3 ci si domanda (D1)*:

- e i quadrati?
- ci saranno ancora?
- li possiamo scoprire di nuovo?

A caccia dei quadrati (D2):

?

1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

1 • 5	5	4 + 1	9 – 4
2 • 6	12	9 + 3	16 - 4
3 • 7	21	16 + 5	25 - 4
4 • 8	32	25 + 7	36 - 4
5 • 9	45	36 + 9	49 - 4

Qual è più “simile” all’osservazione O3: A o B?

x•y	=	O3
1 • 3	3	4 - 1
2 • 4	8	9 - 1
3 • 5	15	16 - 1
4 • 6	24	25 - 1
5 • 7	35	36 -1

x•y	=	A	B
1 • 5	5	4 + 1	9 – 4
2 • 6	12	9 + 3	16 - 4
3 • 7	21	16 + 5	25 - 4
4 • 8	32	25 + 7	36 - 4
5 • 9	45	36 + 9	49 - 4

(D1.1)* Perché?

Siamo partiti dalle osservazioni:

O1. Ci sono sempre due fattori, che riproducono la successione dei naturali partendo da 1 e da 3.

O2. In ogni uguaglianza i fattori differiscono di 2.

O3. I prodotti ottenuti (3, 8, 15, 24, 35) sono quasi quadrati perfetti: manca 1 per ottenerli

O4. Anche le differenze tra i prodotti formano uno schema interessante.

Abbiamo modificato O2 passando a $(\sim O2)_4$, e poi abbiamo cercato nei risultati ottenuti la condizione più simile a O3, sia $(O3)^*$ e dato una risposta R1 del tipo:

$$(\sim O2)_4 \rightarrow (O3)^*.$$

Vediamo se possiamo proseguire su questa strada?

x•y	=	O3
1 • 7	7	□ - d
2 • 8	16	□ - d
3 • 9	27	□ - d
4 • 10	40	□- d
5 • 11	55	□ -d

E poi?

E poi ancora?

…

Il linguaggio algebrico può alla fine spiegare queste regolarità; in questo excel può essere di aiuto:

n	n+2	n(n+2)	n(n+2)+1	(n+1)	(n+1)^2
1	3	3	4	2	4
2	4	8	9	3	9
3	5	15	16	4	16
4	6	24	25	5	25
5	7	35	36	6	36
6	8	48	49	7	49
7	9	63	64	8	64
8	10	80	81	9	81
9	11	99	100	10	100
10	12	120	121	11	121

$$n(n+2)+1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Il linguaggio algebrico può alla fine spiegare queste regolarità:

$x = n$

$y = n + 2k$

$x \bullet y = n \bullet (n + 2k)$

$x + y = 2n + 2k$

$(n + k)^2 = n^2 + 2k + k^2$

$[(x+y)/2]^2 = (n + k)^2 - k^2$

1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

e anche qualcosa in più…

Ecco un altro problema da investigare, che nasce ancora da una modifica di O2: $(\sim O2)_z$: trovare prodotti $xy = z$ in modo che z sia la differenza di due quadrati.

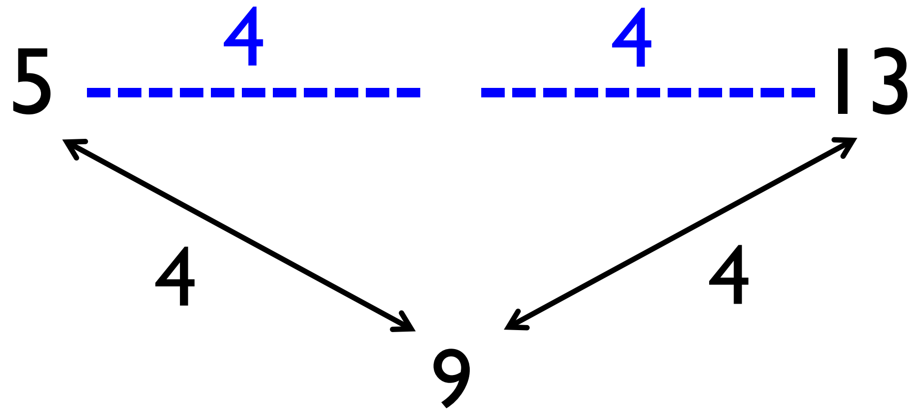
Esempi:

$5 \times 13 = 65 = 9^2 - 4^2$

$4 \times 18 = 72 = 11^2 - 7^2$

x•y	=	O3
1 • 7	7	□ - □
2 • 8	16	□ - □
3 • 9	27	□ - □
4 • 10	40	□ - □
5 • 11	55	□ - □

… e si indaghi sulla seguente figura (D_z):



Un nuovo algoritmo per la moltiplicazione!

NB. Se i due fattori sono uno dispari e uno pari, occorre modificare la situazione:

5 ----$\overset{4}{-}$-------   ------$\overset{4}{-}$------13 ---14

4   4

9

$5 \times 14 = 5 \times 13 + 5 = 9^2 - 4^2 + 5 = 70$

È interessante discutere la differenza didattica e cognitiva che c'è fra un serie di problemi nati con la nostre sequenze e problemi che direttamente chiedano di trovare/dimostrare le formule algebriche che sono dietro alle nostre tabelle.

1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

x•y	=	O3
1 • 7	7	$h^2 - k^2$
2 • 8	16	$h^2 - k^2$
3 • 9	27	$h^2 - k^2$
4 • 10	40	$h^2- k^{22}$
5 • 11	55	$h^2 - k^2$

Riassumiamo in uno schema quanto abbiamo fatto:

I. Una situazione: osservare (Oi), formulare domande (Dj), dare risposte (Rk)

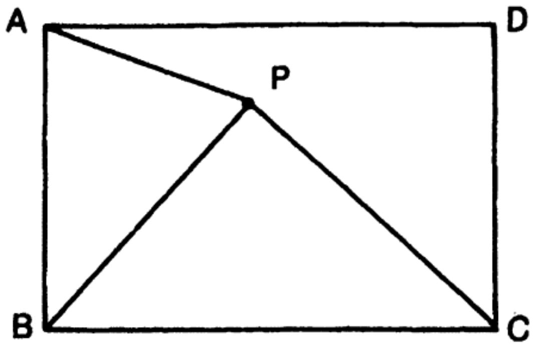
II. Modificare una (o più) Oi negandola (quindi variando la situazione) → $(\sim Oi)_k$.

III. Nascono nuove osservazioni (Oi)*, ulteriori domande (Dj)*, e risposte (Rk)*.

Perché è così?

Che cosa capita se non è così?

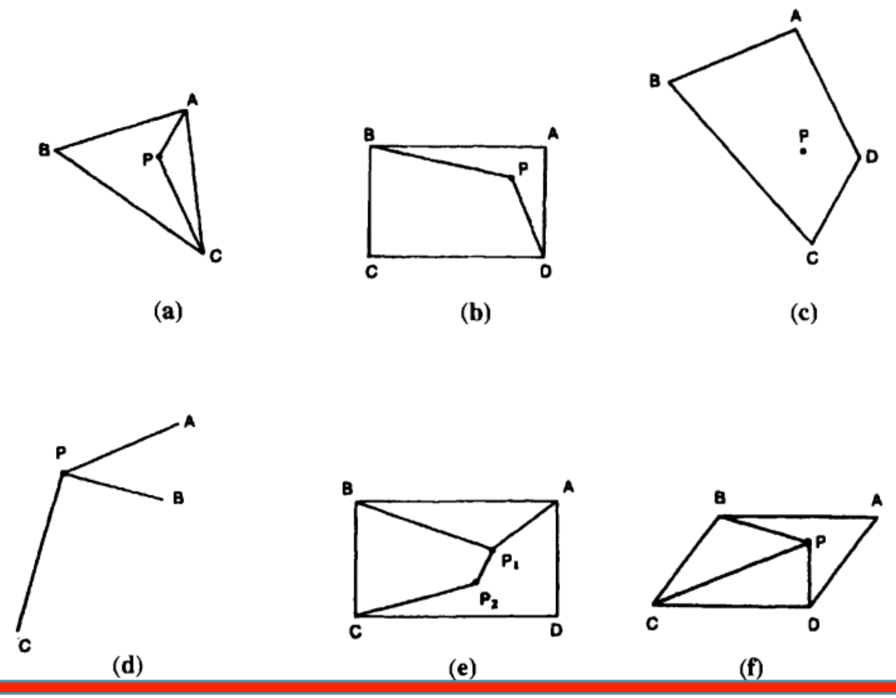
È possibile montare queste situazioni anche da problemi standard: "Dato un punto P all'interno del rettangolo ABCD, tale che PA = 3, PB = 4, PC = 5, quanto vale PD?"



Una situazione:
osservare (Oi)
formulare domande (Dj)
dare risposte (Rh)

Che cosa capita se non è così?

Se (~ Oi) (Dj)*?
→ (Rk)*



Otteniamo così a partire da una situazione di partenza tante variazioni degli schemi seguenti:

Se (~ Oi) (Dj)*? → (Rk)*	Se (Oi) (Dj)? → (Rk)

La dinamica dello schema: dall'accettare la situazione data a una sua sfida con conseguenti indagini.

L’intero processo può essere così schematizzato attraverso vari livelli (*metodo della ricerca variata*, **MRV**):

- Livello 0. Scegliere un punto di partenza

Livello 1. Fare l’elenco degli attributi (Oi); fare domande (Dj)?

Livello 2. Che cosa capita se non è così (~Oi)

Livello 3. Porre conseguenti questioni/ problemi (Dj)*?

Livello 4. Analizzare le (Dj)*

Livello 5. Metariflessione:

Se (~ Oi) allora (Dj)*? → (Rk)*

Se (Oi) allora (Dj)? → (Rk)

MRV ha conseguenze didattiche e cognitive importanti e si presta a un’analisi epistemologica proficua per le pratiche d’insegnamento.

Lo sviluppo di MRV in classe può servire:

- *in negativo*, come antidoto ai fini di "prevenire/ scardinare una visione della matematica ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare", secondo la richiesta fatta dai responsabili della scuola estiva.
- *in positivo*, come strumento trasversale che: sviluppa *un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi*, in cui sia supportata adeguatamente la **costruzione di competenze matematiche**.

I principali aspetti, didattici, cognitivi, epistemologici di **MRV**

1. Considerazioni epistemologiche
2. MRV = come sarebbe se…?
3. Un costrutto dinamico:

   CON ←→ Ps/p & ARG

1. Considerazioni epistemologiche

Il ragionamento matematico e i suoi possibili limiti in quanto ragionamento puramente formale.

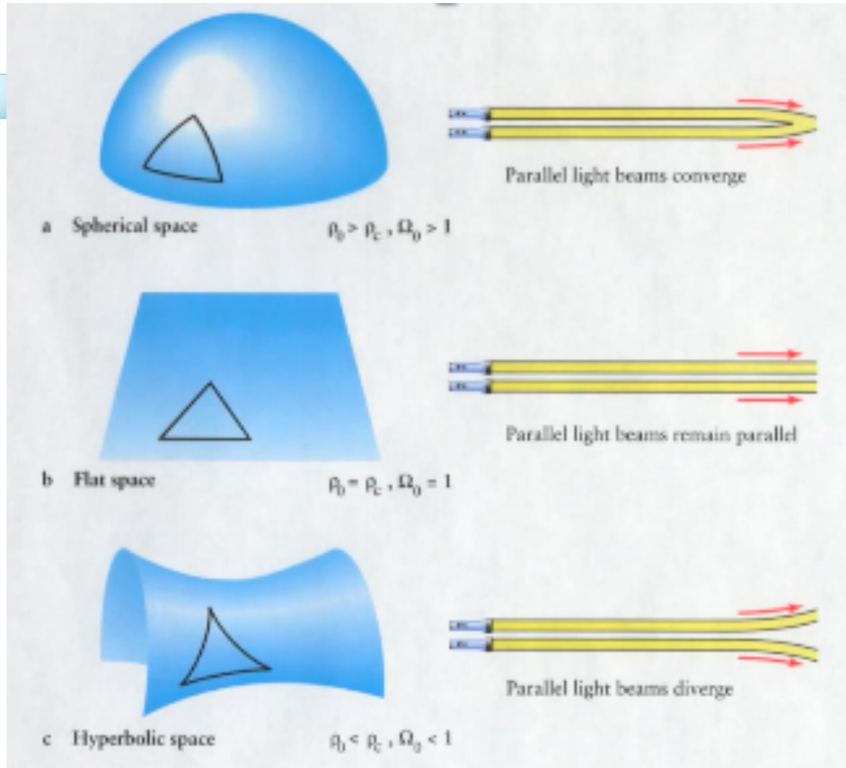
I sistemi formali (aritmetica, geometria, algebra, analisi, ecc,) consistono in insiemi di simboli e di regole rigorose per manipolarli.

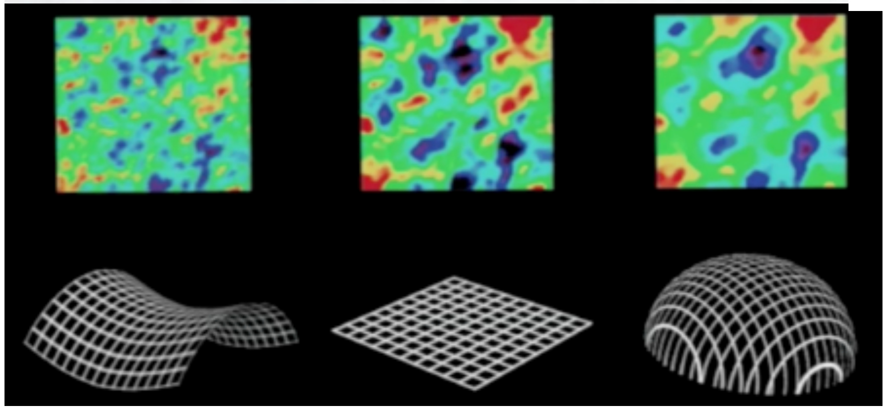
Seguendo queste "non si sbaglia": i risultati sono validi nel sistema formale che si considera.

Ma se si applica tale sistema a qualcosa di diverso (il mondo reale, nei suoi aspetti – fisici, economici, biologici, ecc. – come pure altri sistemi matematici –per es. l'analisi alla teoria dei numeri, cioè la cosiddetta teoria analitica dei numeri) si sta applicando la matematica e il discorso si fa più complesso.

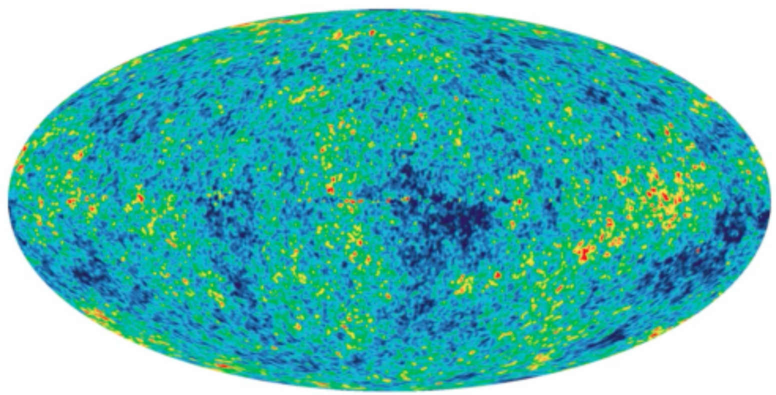
Bisogna allora stare attenti: il risultato complessivo sarà valido solo se lo sarà anche il processo applicativo di questo.

Esempio: qual è la geometria “giusta”?





Tutte le tre geometrie possibili a priori per il nostro universo (euclidea, ellittica, iperbolica) sono coerenti come sistemi formali ma occorre capire quale modellizza correttamente i dati in nostro possesso. Lo si è fatto con i dati forniti dalle ultime sonde (2001-2013: WMAP, FERMI, PLANCK).



Il modello della dinamica reale/formale

UN SISTEMA FORMALE

(2)

IL/I SISTEMA/I FORMALE/I

Nel pensiero matematico reale il ragionamento formale e quello informale sono profondamente intrecciati: un obiettivo dell'insegnamento dovrebbe essere di rendere operativo questo ciclo virtuoso nelle pratiche di classe.

UNA SITUAZIONE REALE

(4)

LA SITUAZIONE REALE

(1) Aspetti della sit.ne reale che sono rappresentati nel sist. f.le

(2) Trattamenti fatti in un sist. f.le/ Conversioni da un sist. a un altro

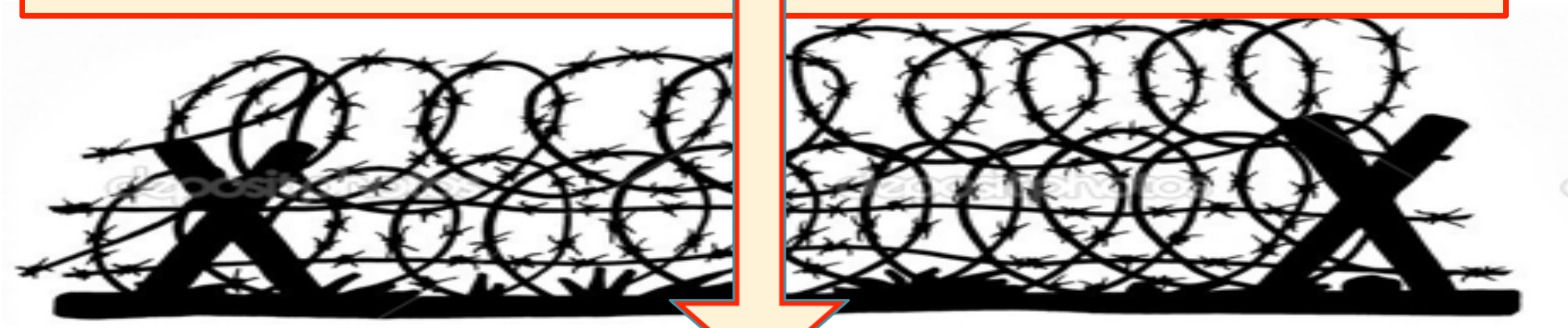
(3) Interpretazione dei risultati del/dei sist. f.li nella sit.ne reale

(4) Interpretazione/teorizzazione del fenomeno

Si origina un grosso problema didattico e cognitivo quando il ciclo è interrotto: si produce quella che si può chiamare la "**sospensione di senso**" per gli enunciati matematici.

Il modello della sospensione del senso

IL SISTEMA FORMALE $\underset{\longleftarrow}{\overset{(2)}{\longrightarrow}}$ **IL** SISTEMA FORMALE



Il senso degli enunciati matematici

Spesso nelle pratiche di classe si hanno due mondi separati o addirittura un solo mondo.

La sospensione di senso

- può produrre effetti catastrofici nel modo in cui i nostri allievi interpretano i (testi dei) problemi e degli enunciati matematici.

- crea compartimenti stagni, ed è spesso indotta dalle pratiche didattiche cui gli allievi sono esposti.

Esempi

1. I problemi verbali

"Carlo aveva 7 mele ne dà 4 a Maria: quante gliene rimangono?"
Gli allievi imparano che nella risoluzione importa dare la risposta giusta e per economia di pensiero tendono a individuare le parole chiave che permettono loro di risolvere i problemi in fretta.

Il testo interpretato tende a ridursi ad alcune parole chiave:

….7…..4….rimangono

Non importa il senso della (o delle frasi). La procedura è

TESTO → decodifica con le parole chiave

…x…y…parola chiave → calcolo.

Capitano guai quando la decodifica non corrisponde al senso della frase.

2. *L'età del capitano* (Gustave Flaubert, Giuseppe Peano, Stella Baruch)

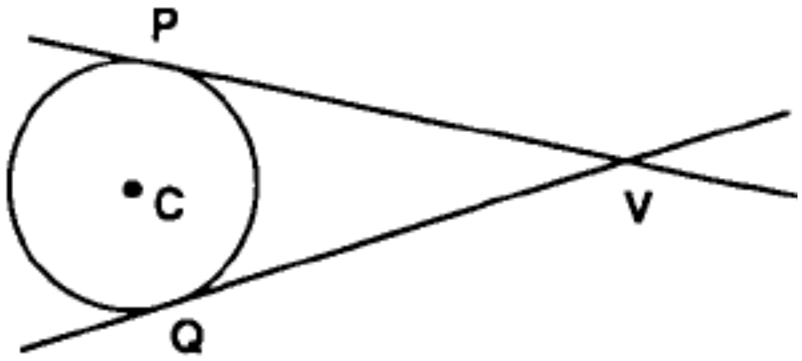
3. Il problema del bus e della gita scolastica (1148 tra allievi e professori per la gita; i bus contengono 54 posti ciascuno; quanti bus? NB: 1148:54 = 21,25…ovvero 21 col resto di 14).

4. La scissione tra enunciati "dimostrati" e pratiche costruttive in geometria.

"Ho sempre pensato che la mancata comprensione del senso fosse la causa prima dell'insuccesso in Matematica. Questa idea è diventata per me una certezza quando, all'inizio degli anni '80, ho esaminato i risultati di una ricerca svolta da un équipe dell'IREM, che aveva posto agli alunni delle elementari problemi deliberatamente privi di senso comune: su una nave ci sono 26 persone e 10 capre; qual è l'età del capitano? E i bambini rispondevano: 36 anni! Oppure, sempre senza batter ciglio, davano una risposta numerica che combinava (in diversi modi) i numeri presenti nella domanda! L'episodio - altro che barzelletta! - mi ha talmente colpito che L'âge du capitaine è diventato il titolo del mio libro". (Stella Baruk)

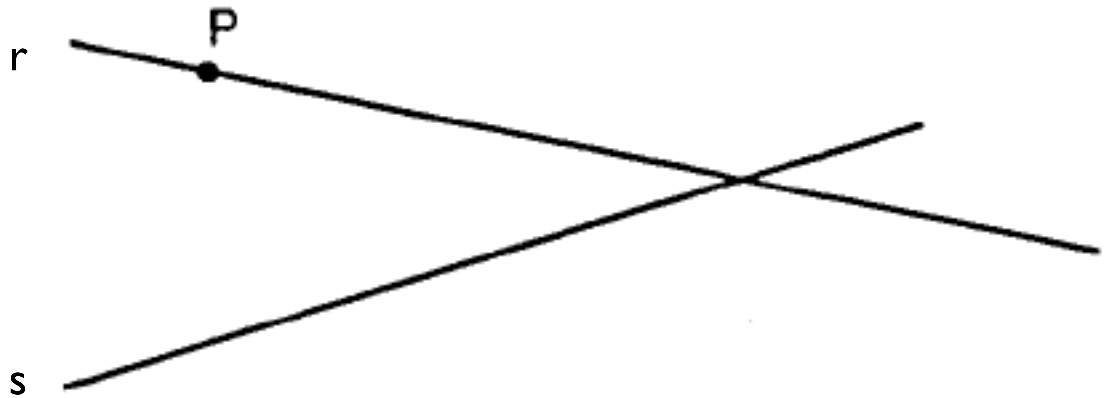
S. Baruk, "L'âge du capitaine". De l'erreur en mathématiques. Paris, Seuil, 1985

Problema A



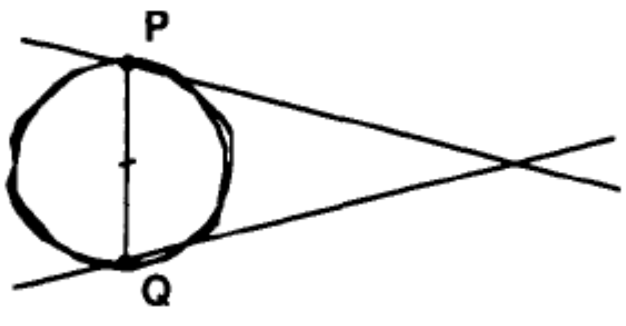
La crf è tangente alle due rette in P e Q.
Dimostra che PV = PQ e che VC è la bisettrice dell'angolo <PVQ.

Problema B

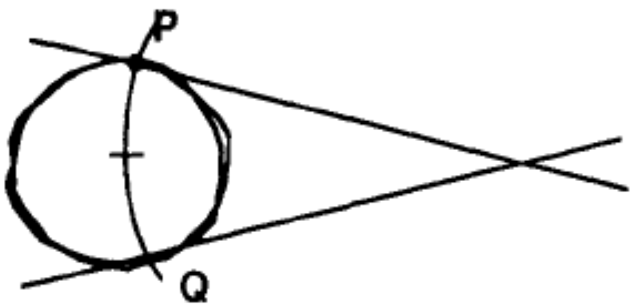


Costruire con riga e compasso (oppure con GeGe) una circonferenza tangente alle due rette e che abbia P come punto di tangenza alla retta r.

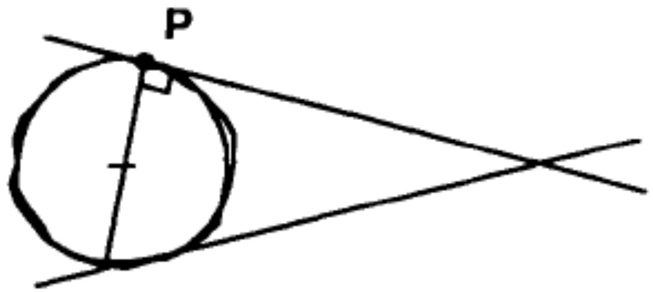
Di 200 studenti che avevano avuto un corso di geometria euclidea al college in USA, e che avevano visto il problema A, i 2/3 produssero le congetture seguenti (Schoenfeld, 1991, p.219):



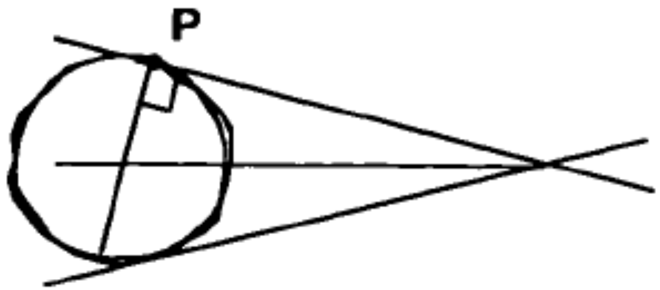
a. First Conjecture



b. Second Conjecture

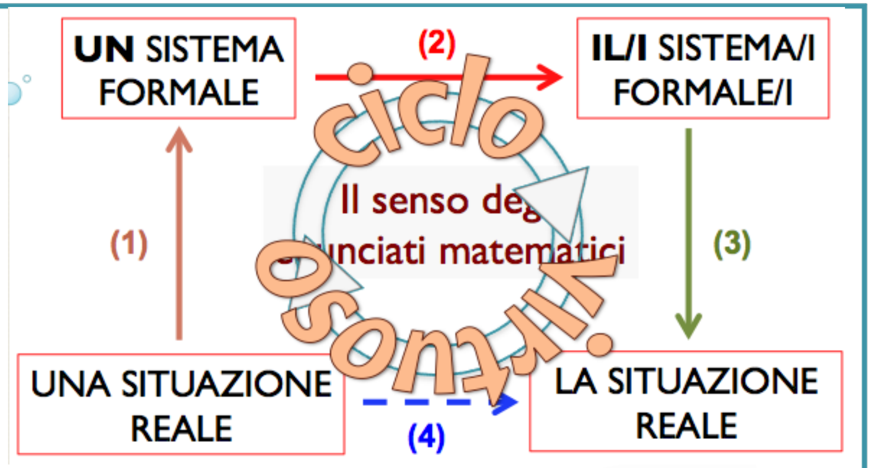


c. Third Conjecture



d. Fourth Conjecture

Un esempio di ciclo virtuoso: “sensate esperienze e dimostrazioni matematiche”



A caccia di quadrati:

?

1	1
3	4
5	9
7	16
9	25

MRV in azione: Numeri e natura

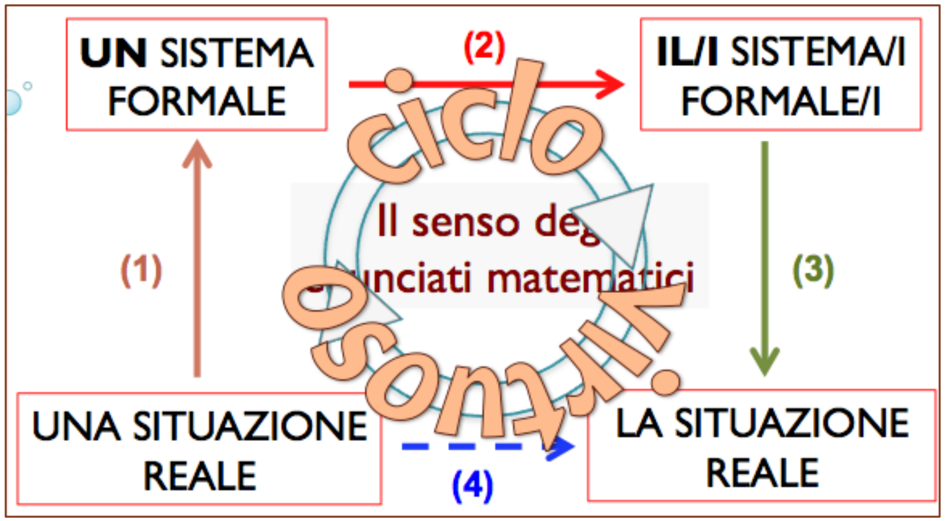
Il primo esperimento scientifico moderno (1604)

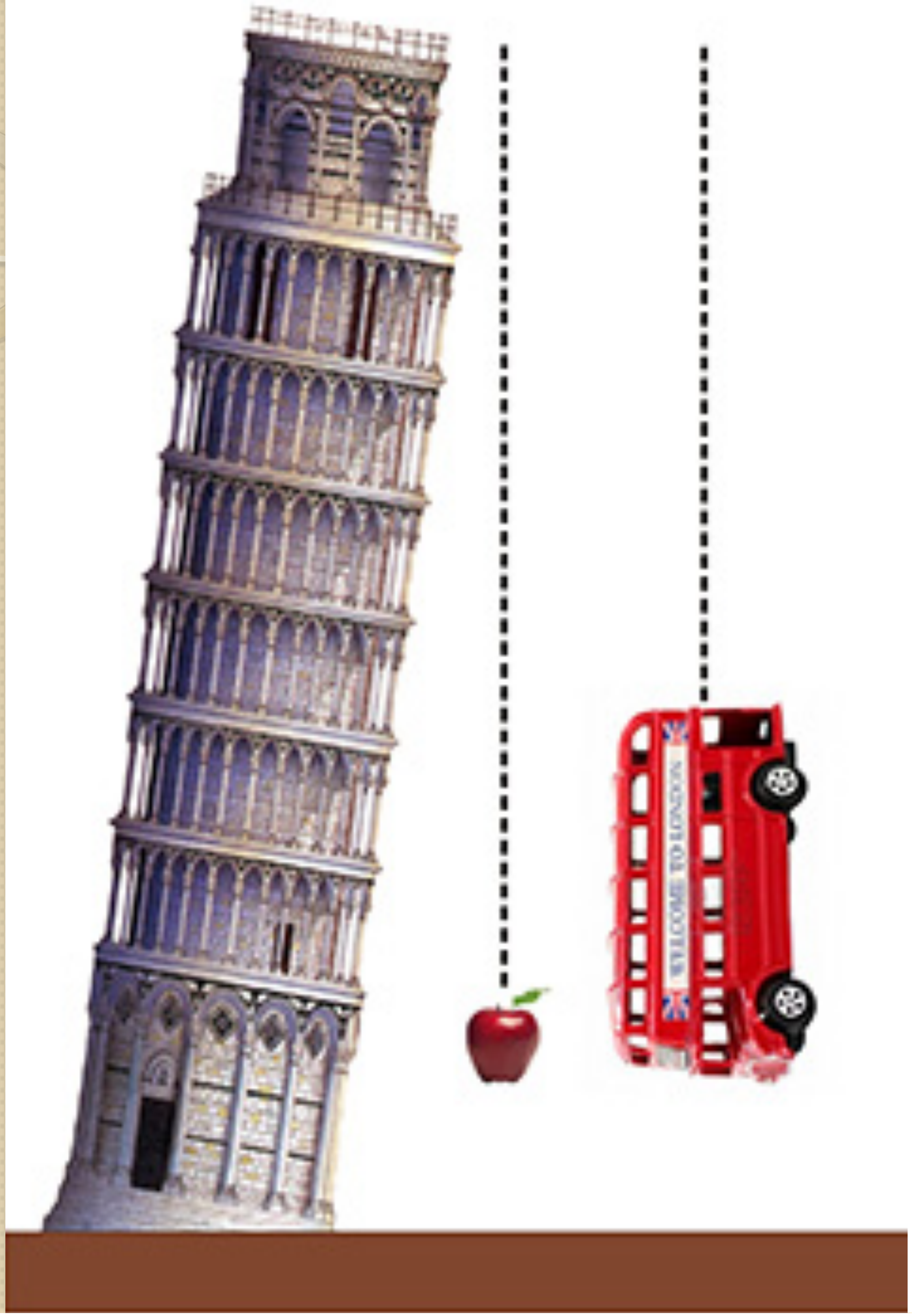
1	1
3	4
5	9
7	16
9	25

Il metodo di Galileo

"Pare che quello degli effetti naturali che a ***sensata esperienza*** *ci pone dinanzi agli occhi o le* ***necessarie dimostrazioni*** *ci concludono, non debba in conto alcuno esser revocato in dubbio."*

(Lettera a Cristina di Lorena, 1615)



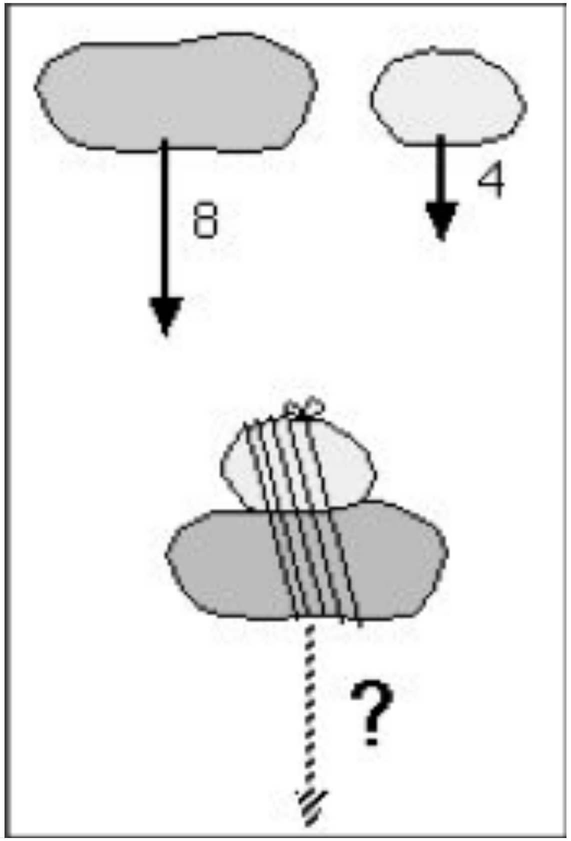


La caduta dei gravi:

Galilei Vs Aristotele

Il MRV di Galilei per dimostrare che Aristotele sbagliava

"Ma se questo è, ed è insieme vero che una pietra grande si muove, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque congiungendole ambedue insieme, il composto di loro si muoverà con velocità minore di otto gradi: ma le due pietre, congiunte insieme, fanno una pietra maggiore che quella prima, che si muoveva con otto gradi di velocità; adunque questa maggiore si muove meno velocemente che la minore; che è contro vostra supposizione." (Discorsi, 1638)



La sensata esperienza

Come Aristotele, Galileo trovò troppo difficile misurare direttamente le traiettorie di corpi in caduta libera perché l'occhio non è abbastanza veloce, e gli orologi esistenti non erano abbastanza esatti per poter misurare intervalli di tempo così brevi.

Invece di usare un mezzo più denso per rallentare la caduta, Galileo cercò, per così dire, di diluire l'influenza della gravita sul loro moto facendo rotolare delle palle lungo piani inclinati.




DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,

intorno à due nuoue ſcienze

Attenenti alla

MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,

del Signor

GALILEO GALILEI LINCEO,

Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo Grand Duca di Toſcana.

Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,

Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

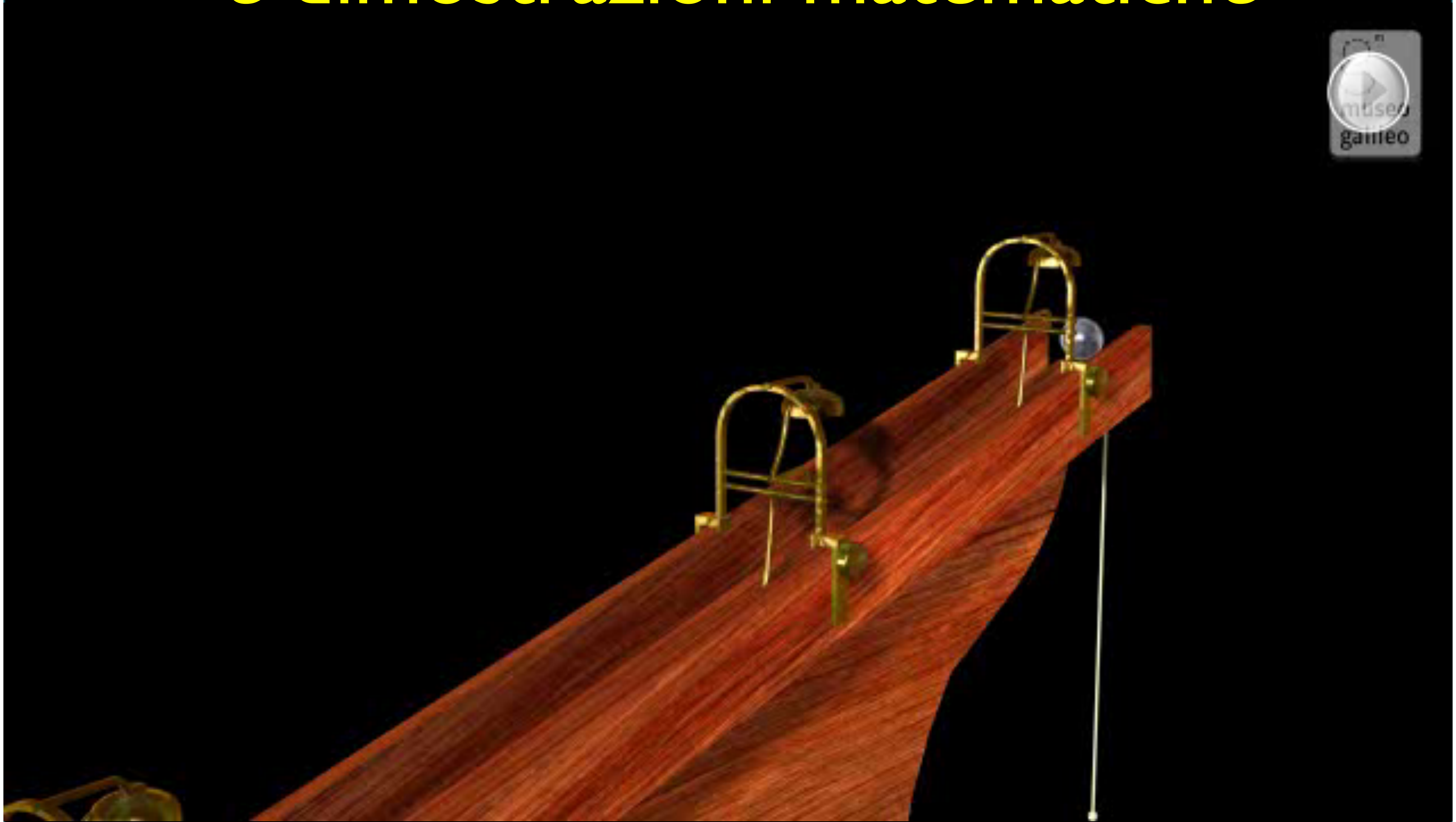
http://www.fmboschetto.it/didattica/DimostrazioniMatematiche.pdf

Salviati: “In un regolo, o vogliàn dir corrente, di legno, lungo circa 12 braccia, e largo per un verso mezo bracio e per l'altro 3 dita, si era in questa minor larghezza incavato un canaletto, poco più largo d'un dito; tiratolo drittissimo, e, per averlo ben pulito e liscio, incollatovi dentro una carta pecora zannata e lustrata al possibile, si faceva in esso scendere una palla di bronzo durissimo, ben rotondata e pulita;…

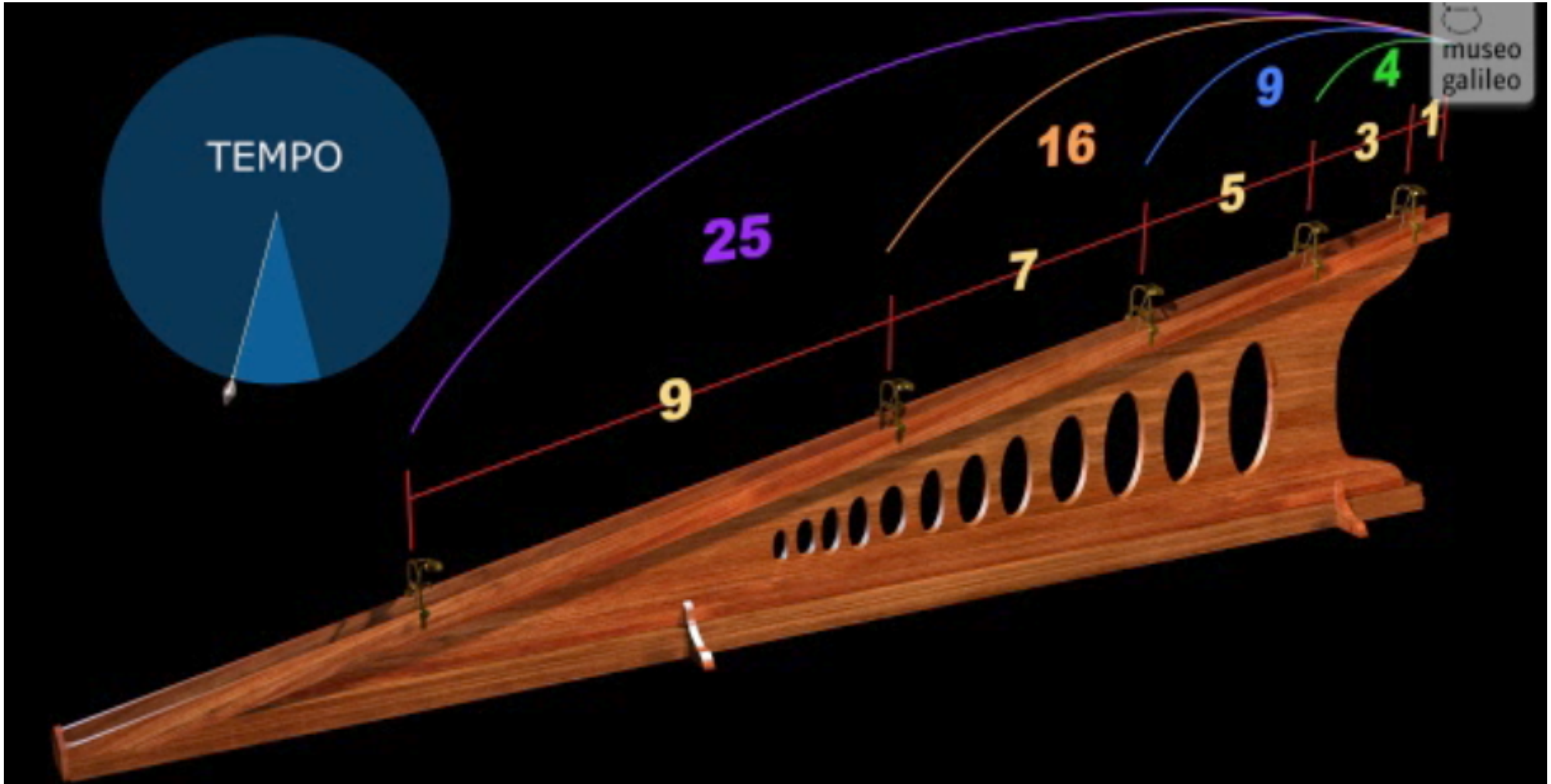
Galilei, G. (1638). Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze…, Giornata terza, Del moto naturalmente accelerato.

… costituito che si era il detto regolo pendente, elevando sopra il piano orizzontale una delle sue estremità un braccio o due ad arbitrio, si lasciava (come dico) scendere per il detto canale la palla, notando, nel modo che appresso dirò, il tempo che consumava nello scorrerlo tutto, replicando il medesimo atto molte volte per assicurarsi bene della quantità del tempo, nel quale non si trovava mai differenza né anco della decima parte d'una battuta di polso."

Sensate esperienze
e dimostrazioni matematiche



http://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html



Usando MRV si conclude che:

- alla base del piano inclinato il corpo ha sempre la stessa velocità indipendentemente dall'inclinazione e dalla lunghezza del piano.
- in altre parole, la velocità raggiunta alla base del piano inclinato dipende dalla quota alla quale il corpo si trova inizialmente.

Quindi anche in caduta libera avrà la stessa velocità.

I principali aspetti, didattici, cognitivi, epistemologici di **MRV**

1. Considerazioni epistemologiche
2. MRV = come sarebbe se…?
3. Un costrutto dinamico:
   CON ←→ Ps/p & ARG

2. MRV = COME SAREBBE SE…?

- È uno schema di pensiero e di organizzazione delle azioni dalla vita di tutti i giorni, usato da tutti, anche inconsciamente, che:

  2.1 promuove il pensiero ipotetico;

  2.2 è un motore per il ragionamento e le argomentazioni;

  2.3 promuove l'intreccio della logica della ricerca con la logica deduttiva;

  2.4 varia la situazione e favorisce così la comprensione;

  2.5 ha importanti conseguenze didattiche.

2.1 MRV promuove il pensiero ipotetico

"… molteplici sono le funzioni cognitive coinvolte in […] attività discorsive in cui gli alunni costruiscono (scoprono) significati nelle situazioni didattiche in cui operano, ovvero producono ipotesi.

La costruzione di un significato nuovo può essere più o meno cosciente; si può avere ad es. una classificazione fatta concretamente dagli alunni, la produzione di un'ipotesi o la genesi di una condizionalità (rilevabile dall'uso di specifici marcatori linguistici del tipo: quando, mentre, se…allora, perché).

Si parla comunque di ipotesi quando il processo di produzione di un significato nuovo è cosciente per l'allievo.

(Dalla Matematica per il Cittadino, 2001)

Le attività argomentative in cui si producono ipotesi o si generano condizionalità sono riconducibili a due modalità principali, che opportunamente coltivate appaiono fondamentali per permettere la transizione nel lungo periodo al pensiero teorico proprio della matematica. Esse sono caratterizzate dal diverso modo con cui il soggetto si rapporta al mondo esterno rispetto al suo mondo interno.

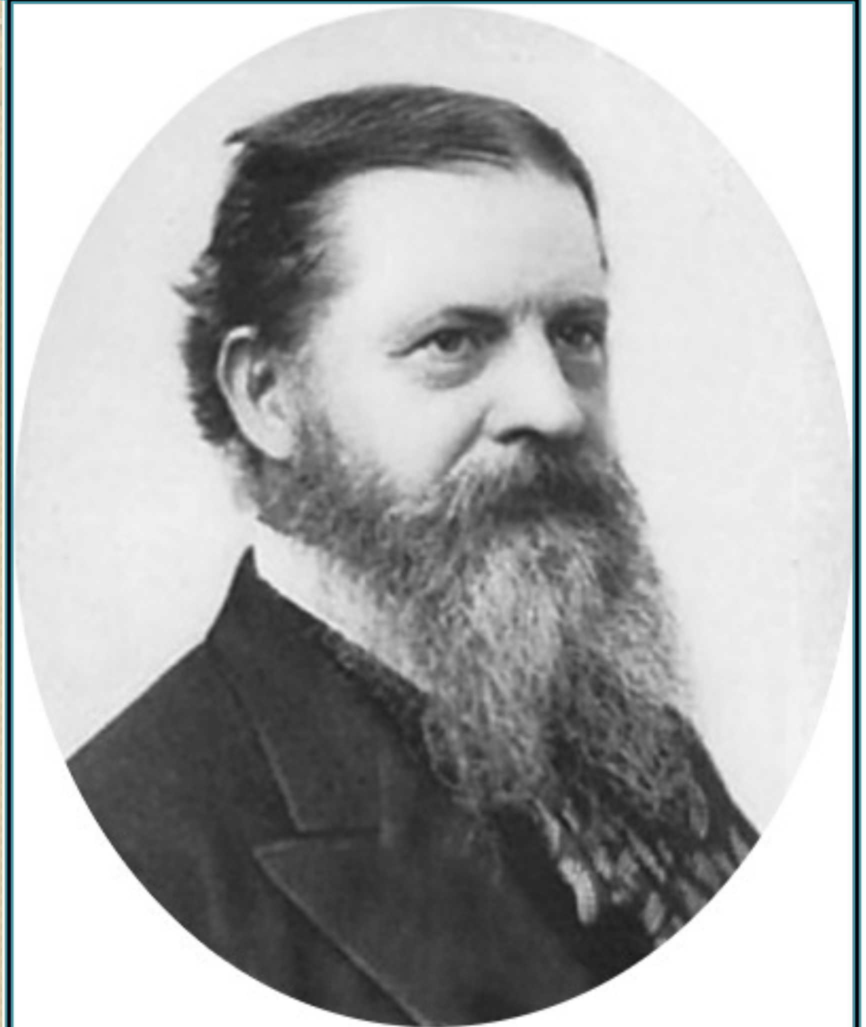
La prima modalità è caratterizzata dalla produzione di *congetture interpretative* di ciò che si vede (percepisce), ad es. al fine di organizzarlo. La seconda è caratterizzata dalla produzione di *congetture previsionali* (ad es. ipotesi su una situazione futura).

Si può intendere in generale l'attività argomentativa come un discorso:

- che permette al soggetto di tornare su ciò che si è fatto, visto (ecc.), producendo interpretazioni, spiegazioni, risposte a domande del tipo "perché è così?"

- che permette al soggetto di anticipare fatti, situazioni, ecc., producendo previsioni, discorsi ipotetici su mondi possibili, risposte a domande "come sarà?", "come potrebbe essere?"

2.2 MRV come motore per il ragionamento e le argomentazioni

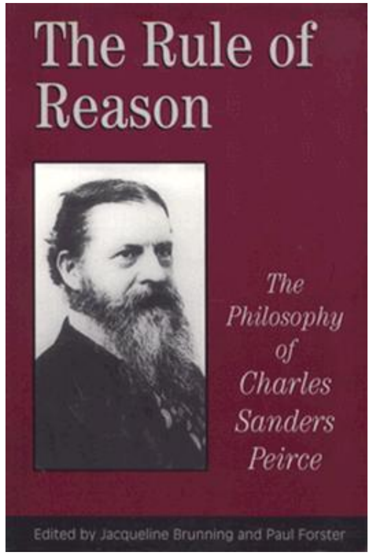


C.S. Peirce, 1839-1914

La scoperta in matematica e nelle scienze è spesso basata su un meccanismo cognitivo studiato per primo da C.S. Peirce: l'abduzione

(= produzione di ipotesi = C → A).

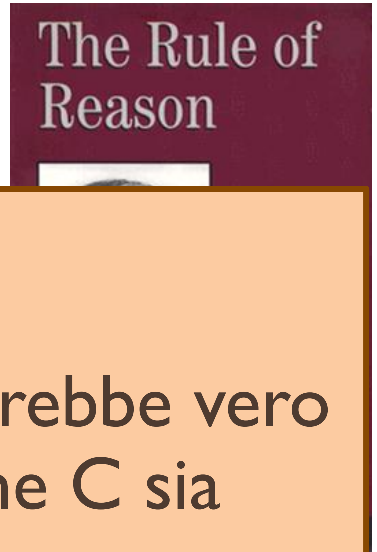
Deduzione



Osservo:	C
So che:	C → A
Deduco:	A

Caso
Regola
Risultato

Abduzione 1



"La forma generale di un'abduzione è:

- si osserva un fatto A;
- se C fosse vero, certamente A sarebbe vero
- quindi è ragionevole assumere che C sia vero"

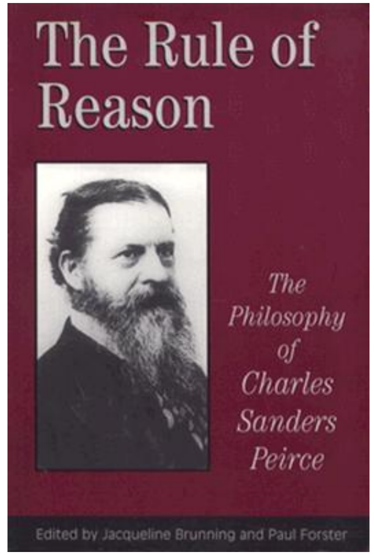
(Peirce, 1960, p. 372).

Supponiamo di sapere che quel sacco è pieno di fagioli bianchi.
Si considerino gli enunciati:

A) questi fagioli sono bianchi (RISULTATO) ;
B) se i fagioli provengono da quel sacco allora sono bianchi (REGOLA);

L'abduzione può essere trattata usando la teoria della probabilità (modello bayesiano: Polya, 1957, Sillogismo euristico, p. 186-190).

Abduzione 1



Osservo:	A
So che:	C → A
Inferisco:	C

Risultato

Regola

Caso

Abduzione 2

Peirce dette successivamente un'altra interpretazione dell'abduzione:

"il processo con cui si inferiscono certi fatti e/o leggi e ipotesi che rendono plausibili certi enunciati, che spiegano o scoprono fenomeni o osservazioni (eventualmente nuovi); è il processo di ragionamento in cui si formano e valutano delle ipotesi esplicative"

(Magnani, 2001)

Osservo:	A, C
mi domando:	? → ?
abduco:	C → A

Risultati

?

Regola

Arzarello (2002)

selezionare un'ipotesi
da molte

Ci sono due modi diversi di produrre "ipotesi"

osservo: RISULTATO

seleziono: REGOLA

abduco: CASO

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ C \rightarrow A \end{array}}{C}$$

vedo e collego due fatti: RISULTATI

abduzione: REGOLA

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ ? \\ C \end{array}}{C \rightarrow A}$$

Costruire un' ipotesi

Baccaglini-Frank & Mariotti (2011)

2.3 MRV promuove l’intreccio della logica della ricerca con la logica deduttiva: la logica di Sherlock Holmes

Logica della ricerca e logica deduttiva: il legame fondamentale tramite le abduzioni.

Porre domande anziché eseguire mosse deduttive: un esempio dai racconti di Sherlok Holmes: Silver Blaze

Background: il famoso cavallo Silver Blaze è stato rubato dalla scuderia nel cuore della notte, e il mattino dopo il suo padrone ha trovato lo stallo vuoto

Ispettore: «C'è qualche punto su cui vorreste attirare la mia attenzione?»

Sherlock Holmes: « Sul curioso incidente del cane di notte»

Ispettore: «Il cane non ha fatto niente nella notte!»

Sherlock Holmes: « Proprio questo è il curioso incidente»

Sherlock Holmes ha in effetti posto tre domande

1) C'era un cane di guardia nelle scuderie quando il cavallo è stato rubato? Sì

2) Il cane ha abbaiato?

No, non ha nemmeno svegliato i ragazzi che dormono nella scuderia.

3) A chi un cane da guardia addestrato non abbaia nel cuore della notte?

Al proprietario, naturalmente.

Le tre domande sono formulate nella logica della ricerca e, trasposte alla logica deduttiva, diventano:

1) C'era un cane da guardia nelle scuderie.

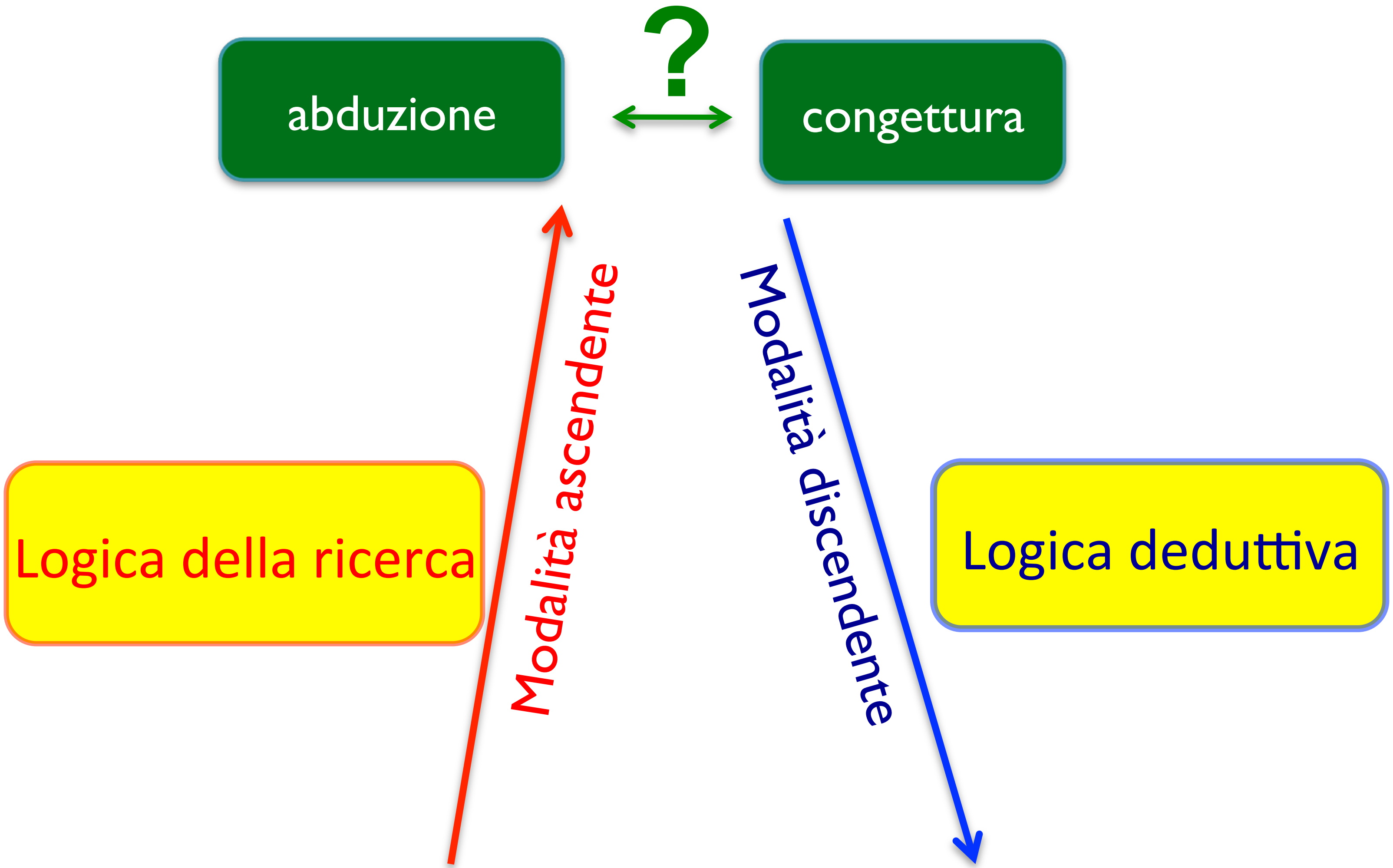
2) Il cane non ha abbaiato quando il cavallo è stato rubato.

3) Un cane da guardia addestrato non abbaia solo al proprietario.

4) Quindi il ladro è il proprietario

Un' abduzione caratterizza la modalità della logica della ricerca e può segnare la transizione alla logica deduttiva.

L’abduzione: cerniera tra logica della ricerca e logica deduttiva



2.4 MRV varia la situazione e favorisce così la comprensione.

Per capire meglio qualcosa consideriamola da più punti di vista e variamone le sue proprietà a una a una, "per vedere l'effetto che fa".

La teoria della variazione, dalla pedagogia cinese classica:

- **CONTRASTO**: *Per avere esperienza di qualcosa una persona deve fare esperienza di qualcosa di diverso per fare un confronto.*
- **GENERALIZZAZIONE**: *Per capire che cosa è 'tre' devo fare esperienza di una varietà di situazioni in cui 'tre' appare.*
- **SEPARAZIONE**: *Per fare esperienza di un certo aspetto di qualcosa e al fine di separare questo aspetto da altri aspetti, bisogna variarlo mentre gli altri aspetti non cambiano.*
- **FUSIONE**: *Se ci sono vari aspetti critici che chi apprende deve prendere in considerazione insieme, di essi deve fare esperienza simultaneamente.*

(Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M., 2004, p. 16)

2.5 Le conseguenze didattiche di MRV

- L'insegnante supporta l'uso di questo schema, la sua organizzazione nelle pratiche didattiche, promuovendo la transizione dal suo uso nella vita di tutti i giorni al contesto matematico.

  Così facendo permette la costruzione di competenze matematiche, in cui le **conoscenze** si intrecciano con le **competenze argomentative** degli allievi in situazioni in cui **risolvono e si pongono dei problemi**.

Dai **Traguardi** per lo sviluppo delle competenze al termine…

- …della scuola **primaria**:

Costruisce ragionamenti *formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri.*

- … della scuola secondaria di **primo grado**:

Produce argomentazioni *in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).*

Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando ***concatenazioni di affermazioni****; accetta di cambiare opinione riconoscendo le* ***conseguenze logiche di una argomentazione corretta****.*

MRV induce un atteggiamento aperto alla ricerca, in cui l'allievo:

- pone e si pone problemi;
- produce ipotesi, definizioni, argomentazioni;
- non è imbalsamato nel tipico schema chiuso: situazione data → risolvi/dimostra.

Vantaggi cognitivi e didattici di MRV

- Le variazioni sono generate dagli studenti stessi (con il supporto dell'insegnante, più marcato all'inizio, più attenuato quando il metodo si afferma nella classe):

  QUINDI il controllo passa dagli "altri" a se stessi nel porre il problema: una concezione più ampia di che cos'è un problema e una maggiore condivisione emotiva.

- Le variazioni affrontano uno stesso argomento sotto più punti di vista:

  QUINDI si genera una comprensione più profonda e più ampia.

Si produce un senso per la matematica condiviso e positivo.

I principali aspetti, didattici, cognitivi, epistemologici di **MRV**

1. Considerazioni epistemologiche
2. MRV = come sarebbe se…?
3. Un costrutto dinamico:

   CON ←→ Ps/p & ARG

3. CON ←→ Ps/p&ARG in classe

Che cosa significa
"fare matematica" in classe?

Con MRV le attività matematiche di Risoluzione/Posizione di problemi e le produzioni argomentative si sviluppano intrecciandosi grazie a reciprochi feed-back con le competenze strumentali (CON) generando una **struttura dinamica di base**: CON ←→ Ps/p&ARG

MACRO-AREE DI COMPETENZE

CONOSCERE (CON)

RISOLVERE/PORSI PROBLEMI (Ps/p):

ARGOMENTARE (ARG)

Adattato da Boero (2015)

MACRO-AREE DI COMPETENZE

- CONOSCERE: si riferisce a competenze riguardanti la conoscenza e l'uso delle nozioni matematiche, delle loro rappresentazioni semiotiche, delle loro proprietà, delle tecniche operative connesse, e delle relazioni tra le nozioni stesse.

MACRO-AREE DI COMPETENZE

RISOLVERE/PORSI PROBLEMI: si riferisce a competenze che riguardano: individuare ed esplicitare le informazioni necessarie per affrontare un problema; variare queste informazioni (per contrasto, generalizzazione, separazione, fusione di proprietà) in modo da generare problemi simili; costruire (o individuare) i ragionamenti risolutivi appropriati, con attenzione agli strumenti di rappresentazione ("registri") utilizzati, e rendere conto di essi; controllare tali ragionamenti e i risultati che ne conseguono e confrontarli in relazione alle situazioni problematiche considerate e in interazione coi pari.

Si veda anche Matematica per il cittadino 2001, Risolvere e porsi problemi

MACRO-AREE DI COMPETENZE

- ARGOMENTARE: si riferisce a competenze che riguardano: produrre ipotesi esplicative di proprietà o fenomeni in base alle proprie conoscenze e al contesto di riferimento; accertare la validità di una affermazione o di un procedimento o di un ragionamento in relazione alle proprie conoscenze e al contesto di riferimento, producendo o individuando ragioni di validità o di non validità; esporle (o sceglierne una esposizione) nelle forme richieste dalla natura dell'oggetto valutato e dal suo contesto di riferimento.

Le definizioni con MRV

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof*
(1938 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). New York.
Ristampato nel 1966

Ricordiamo alcune delle conseguenze metodologiche di MRV coi problemi:

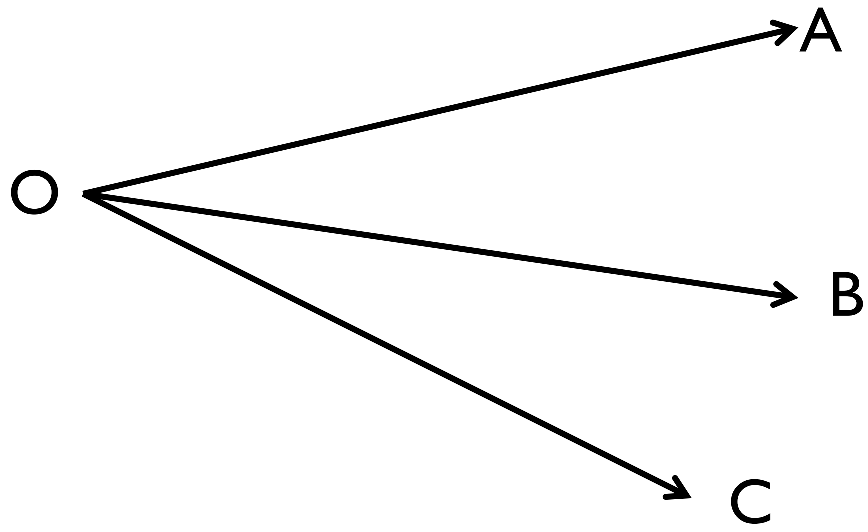
1. il controllo passa dagli "altri" a se stessi nel porre il problema: una concezione più ampia di che cos'è un problema e una maggiore condivisione emotiva.
2. Le variazioni affrontano uno stesso argomento sotto più punti di vista: si genera una comprensione più profonda e più ampia.

Trasferiamo queste proprietà alle definizioni e otterremo un metodo per affrontare le definizioni in classe.

ESEMPIO

- Angoli adiacenti.

Come catturare a parole una "definizione ostensiva" di *angoli adiacenti*?

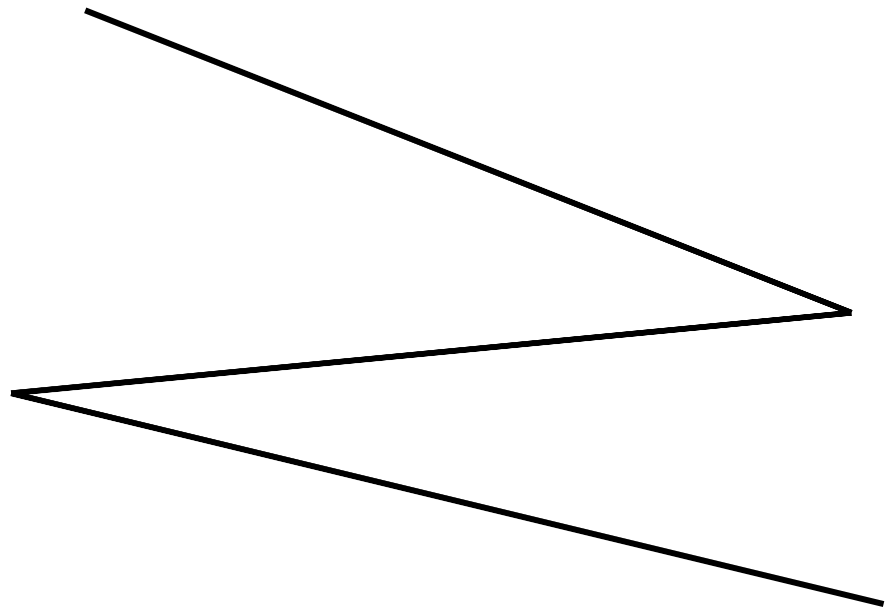


Gli studenti propongono definizioni e le criticano discutendo gli eventuali punti deboli.

Proposta 1.

Angoli con un lato in comune.

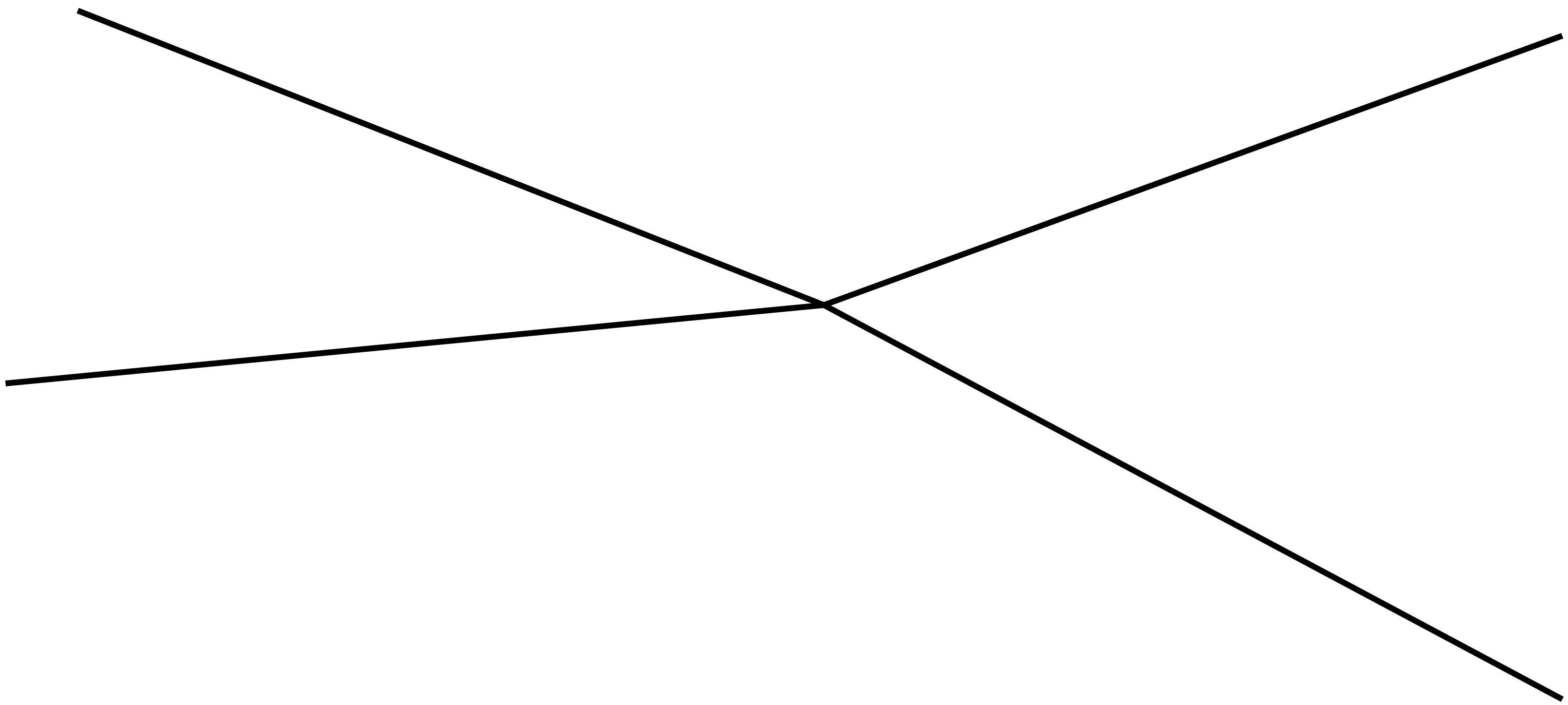
Controesempio con la figura:



Proposta 2.

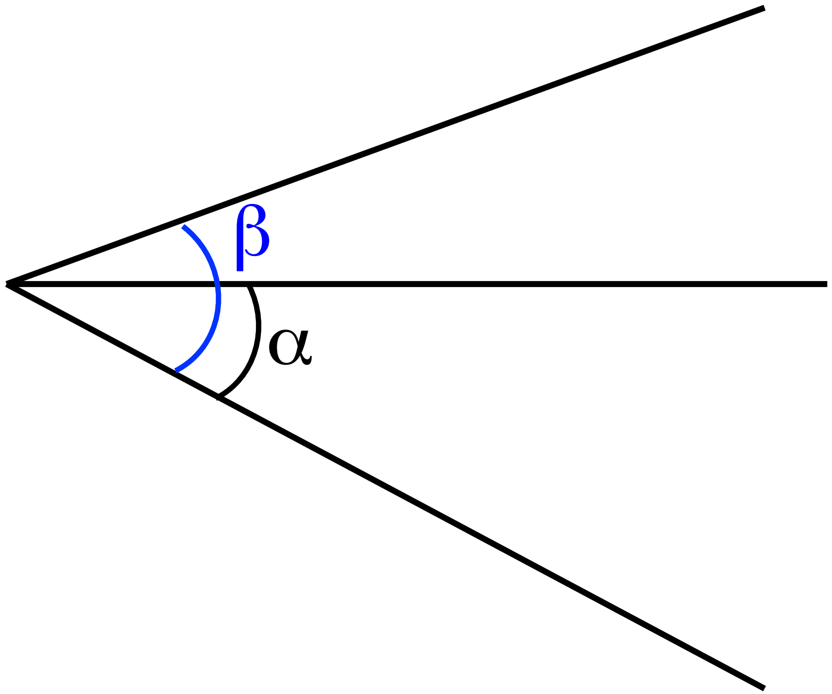
Angoli con un vertice in comune.

Controesempio con la figura:



Proposta 3.
Angoli con un vertice e un lato in comune.

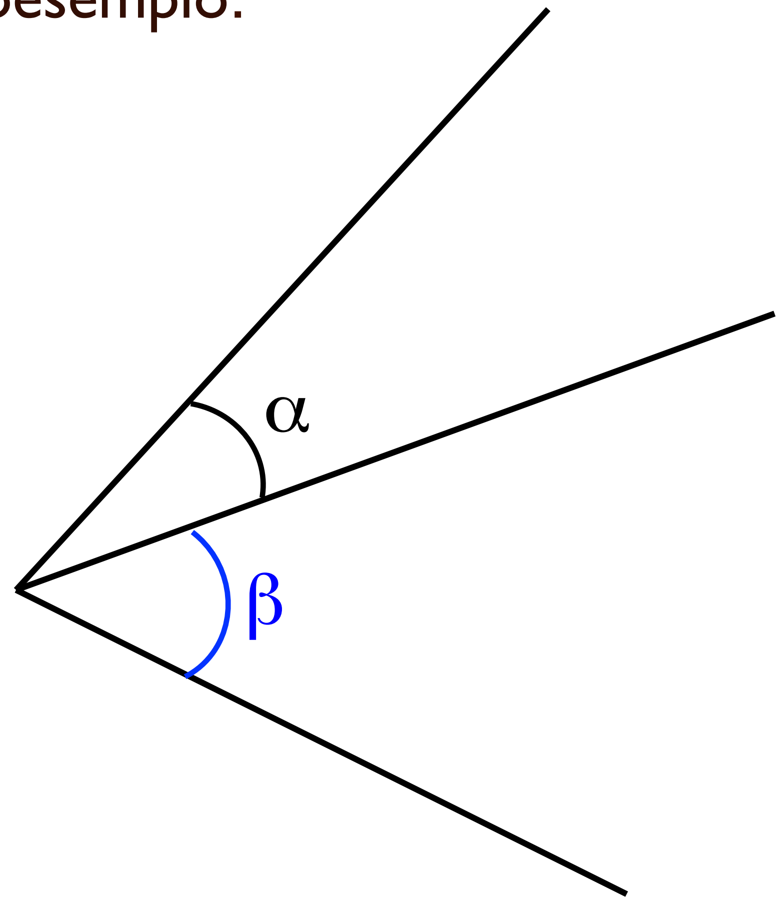
Controesempio con la figura:



Proposta 4.

Angoli con un vertice in comune e con un lato in comune compreso tra gli altri due.

Nessun controesempio:



Traguardi per lo sviluppo di competenze

- …della scuola **primaria**:

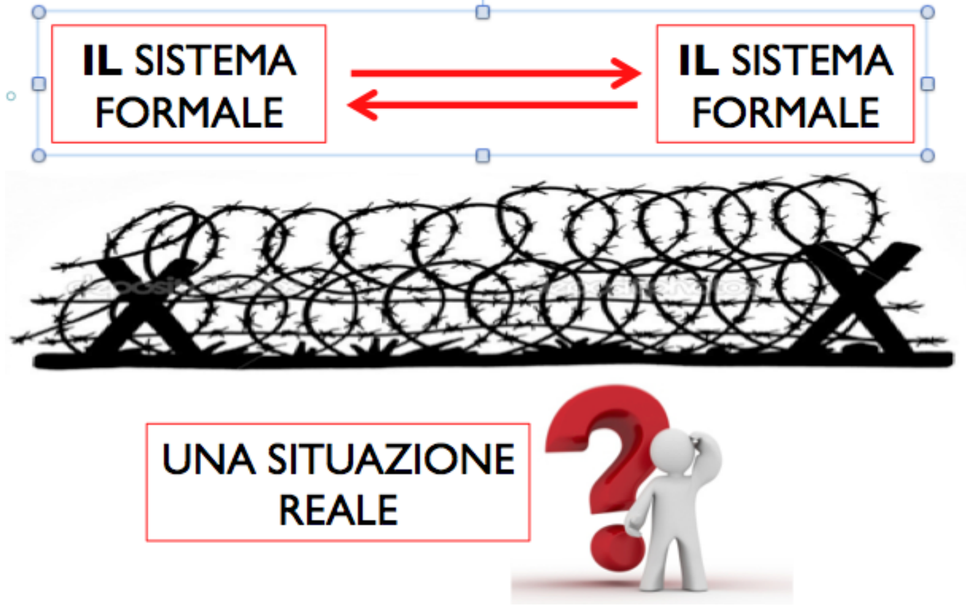
*Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e **confrontandosi con il punto di vista degli altri**.*

- … della scuola **secondaria di primo grado**:

Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).

*Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e **controesempi adeguati** e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.*

Questo approccio ad alcune definizioni è coerente col metodo MRV e contribuisce a fare comprendere



meglio il senso del processo definitorio in matematica, evitando nel contempo la sospensione del senso matematico.

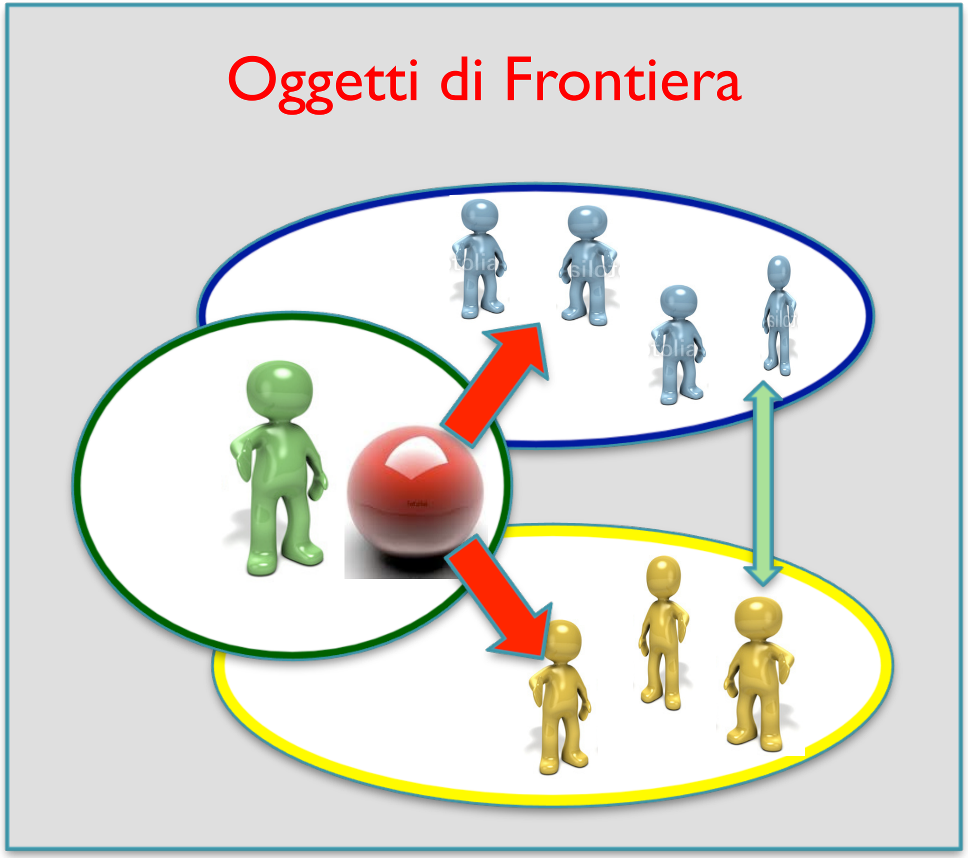
Si tratta di un Ps/p & ARG che si intreccia con CON in modo profondo.

Il ruolo del docente con MRV

IL RUOLO DEL DOCENTE:

DA TRASMETTITORE

A PROMOTORE DI “SENSE MAKING” IN CLASSE TRAMITE IL MRV (→ **BROKER**)



Il nostro oggetto di frontiera

Schema del nostro processo

- Livello 0. Scegliere un punto di partenza

Livello 1. Fare l'elenco degli attributi (Oi); fare domande (Dj)?

Livello 2. Che cosa capita se non è così (~Oi)

Livello 3. Porre conseguenti questioni/ problemi (Dj)*?

Livello 4. Analizzare le (Dj)*

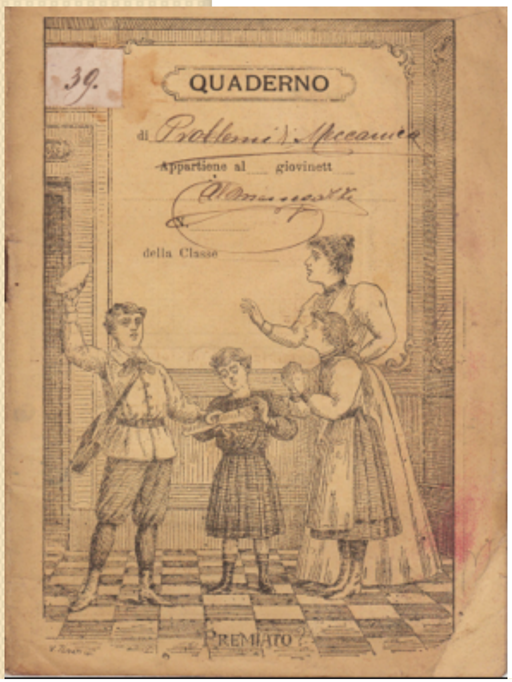
Livello 5. Metariflessione:

Se (~ Oi) allora (Dj)*? → (Rk)*

Se (Oi) allora (Dj)? → (Rk)

Un modo per rafforzare il coinvolgimento degli allievi in questa creazione attiva di una matematica sensata è di avere un **quaderno di matematica per i problemi** in cui raccolgono le loro attività secondo lo schema dei livelli 1- 5 prima descritti.

Il livello 5 corrisponde all'enunciazione di teoremi da loro scoperti.



Conclusioni (?!)

Nella mia presentazione ho cercato di rispondere al compito postomi dalla Scuola Estiva, discutendo i seguenti punti:

1. Il senso degli studenti per la matematica e il pericolo delle sospensioni di senso indotte da certe pratiche didattiche.

2. Il suggerimento del metodo MRV come metodo contro tale sospensione di senso, in quanto coinvolge gli studenti come attori del processo.

3. MRV aiuta gli studenti a considerare un argomento da più punti di vista, quindi a comprenderlo in modo più profondo.

4. MRV come motore per generare argomentazioni sensate attraverso il P s/p e supportare la transizione da forme "naturali" di argomentazioni (abduzioni) a forme più matematiche di ragionamento (deduzioni).

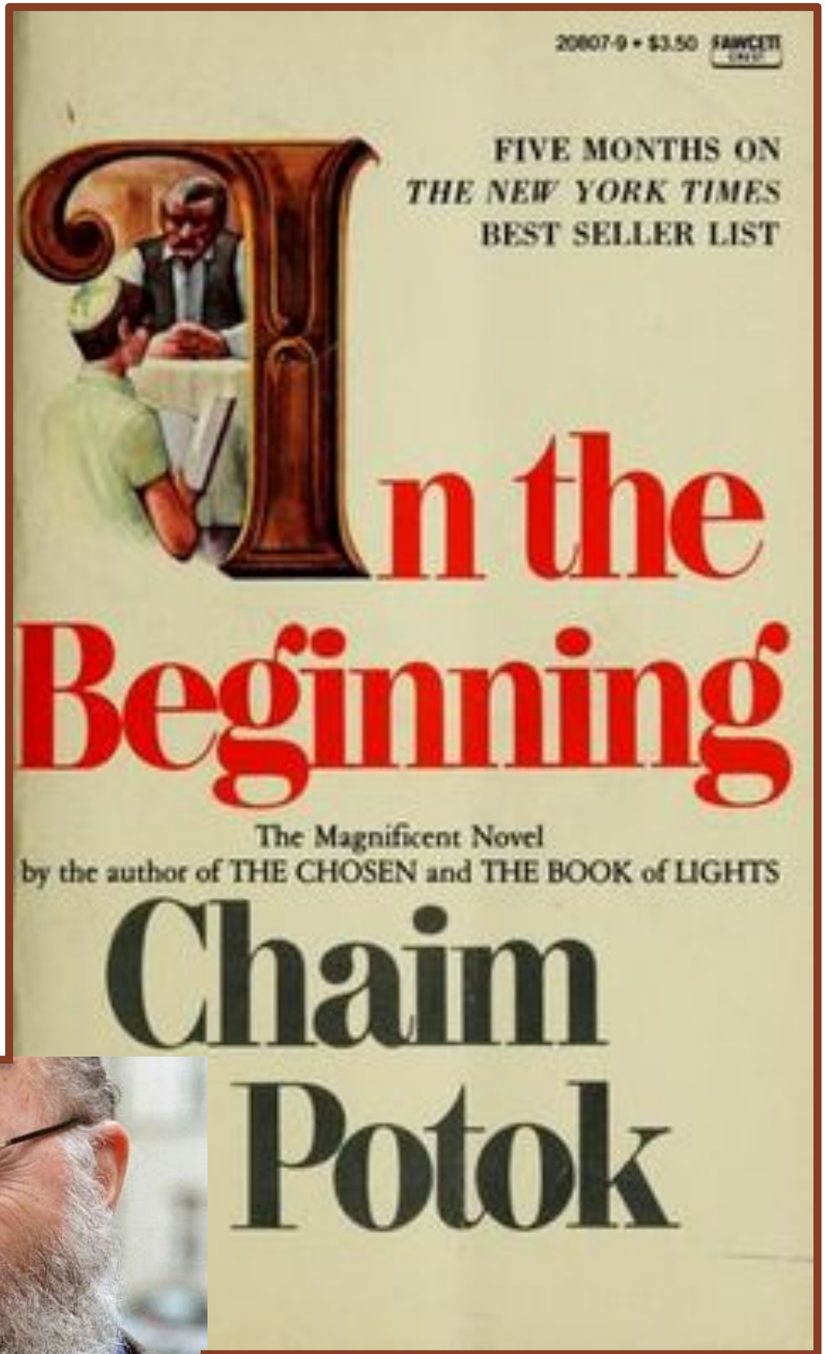
5. L'intreccio didattico e cognitivo nella struttura dinamica CON ←→ P s/p & ARG come base per l'insegnamento della matematica.

6. Il ruolo dell'insegnante come broker.

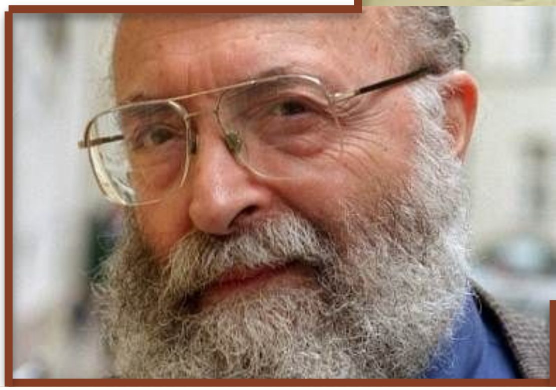
"Voglio raccontarti una cosa che mio fratello Davide, che riposi in pace, mi disse una volta.

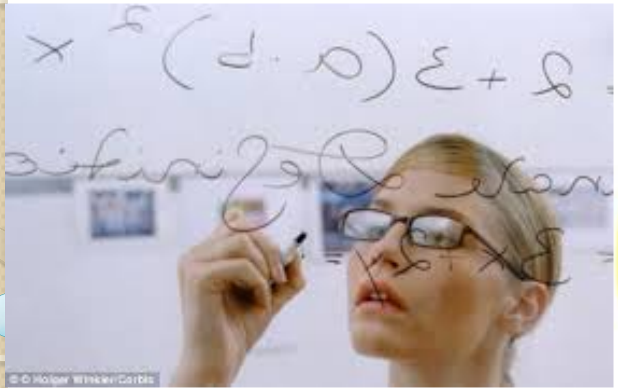
Disse che è importante imparare le domande importanti, tanto quanto le risposte importanti.

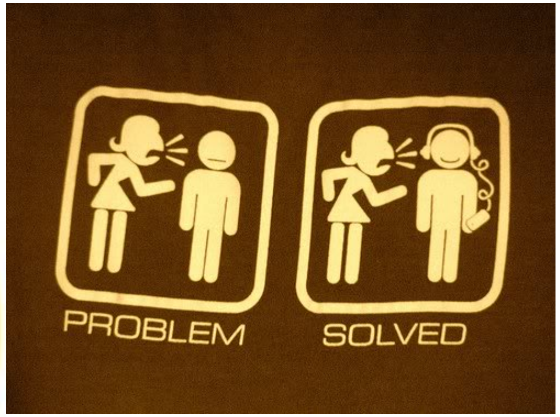
È particolarmente importante imparare le domande alle quali ci possono non essere buone risposte."



(Chaim Potok,
the Beginning.
New York: Knopf,
pp. 295-296
Traduz. in Garzanti).





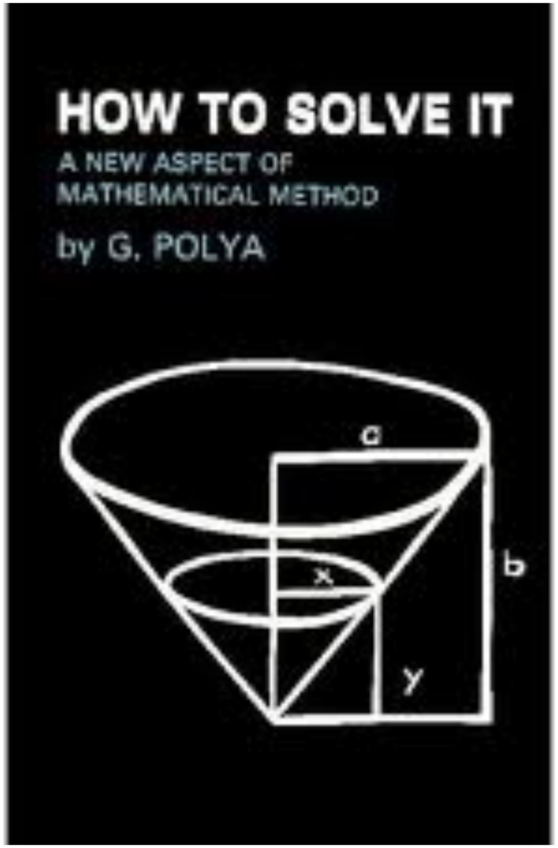


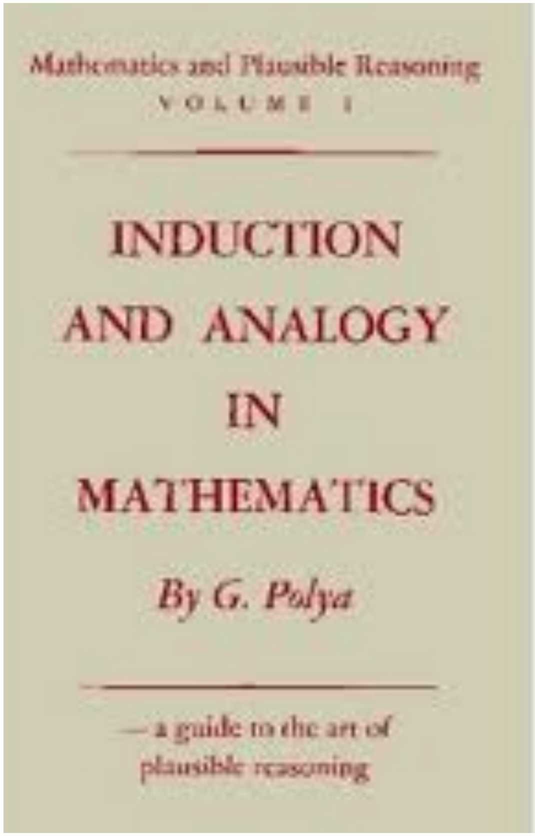
Grazie

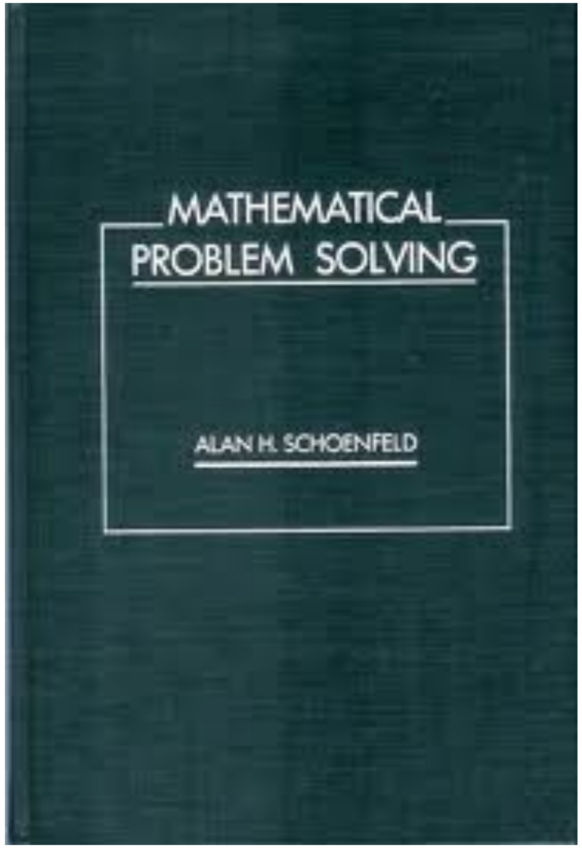
Appendici

A1
La letteratura sulla risoluzione di problemi

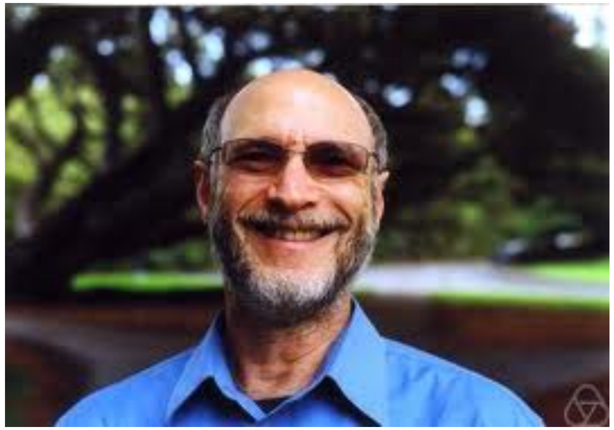
Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof*
(1938 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). New York.
Ristampato nel 1966







Polya G., 1967, *Come risolvere i problemi di matematica, Logica e euristica nel metodo matematico*, MI: Feltrinelli.
Polya G., 1970-71, *La scoperta matematica, Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, 2 Voll., MI: Feltrinelli.



Alan Schoenfeld

Conoscenze e Comportamenti necessari per un’adeguata caratterizzazione delle attività di risoluzione di problemi

RISORSE

EURISTICHE

CONTROLLO

SISTEMI DI CREDENZE

(A. Schoenfeld)

RISORSE

Conoscenze matematiche possedute dal solutore e che sono collegate al problema.

Intuizioni e conoscenze informali riguardanti il dominio conoscitivo del problema.

Fatti.

Procedure algoritmiche.

Procedure non algoritmiche ma di routine.

EURISTICHE

Strategie e tecniche per progredire in problemi non standard, regole pratiche per concreti metodi risolutivi, ivi compresi:

- disegnare figure; introdurre opportune rappresentazioni
- indagare su problemi collegati
- riformulare il problema; lavorare all'indietro
- procedure di validazione

CONTROLLO

Decisioni globali che riguardano la scelta e l'implementazione di risorse e strategie

Pianificare

Monitorare e valutare

Prendere decisioni

Atti metacognitive coscienti

SISTEMI DI CREDENZE

Il modo in cui si vede la matematica, l'insieme (non necessariamente cosciente) dei fattori che determinano i comportamenti di un solutore riguardanti:

- se stesso
- l'ambiente
- l'argomento
- la matematica

UN UTILE ESERCIZIO:

Autoanalisi e analisi nella risoluzione dei problemi.

Scrivo	Penso
$1 \cdot 3 = 3$	Ho guardati i risultati per un po' e ho visto che ci potevano entrare i quadrati
$2 \cdot 4 = 8$	
$3 \cdot 5 = 15$	
$4 \cdot 6 = 24$	
$5 \cdot 7 = 35$	

Ri

A2
ARGOMENTAZIONI:
il modello di Toulmin

Uno strumento di lavoro per l'insegnante al fine di analizzare le produzioni argomentative degli allievi e sapere distinguere se si tratta di un'argomentazione o no.

Il modello di Toulmin (ridotto):

DATA ⟶ **CLAIM** (affermazione)

|

WARRANT (giustificazione)

|

(BACKING) (supporto)

ESEMPIO 1

"Harry è un cittadino britannico in quanto è nato alle Bermuda"

Claim: *Harry è un cittadino britannico*

Data: *Harry è nato alle Bermuda*

Warrant: *Chi nasce alle Bermuda è cittadino britannico*

Backing: *Leggi britanniche*

ESEMPIO 2

TESTO A (III primaria)

I numeri pari sono numeri interi divisibili per 2; i numeri dispari sono i numeri interi che non sono pari. Per riconoscere un numeri pari si guarda se l'ultima cifra a destra è pari.

TESTO B (III primaria)

I numeri pari sono quelli divisibili per 2, che se un numero finisce per 0, 2, 4, 6, 8 è pari, che quando prendo ad esempio 34 è pari=30+4 con 30 divisibile per 2 e 4 pari fa pari + pari che è pari

ANALISI ALLA TOULMIN: TESTO A

I numeri pari sono numeri interi divisibili per 2; i numeri dispari sono i numeri interi che non sono pari.

(DEFINIZIONE)

Per riconoscere un numeri pari si guarda se l'ultima cifra a destra è pari.

(CRITERIO OPERATIVO DI RICONOSCIMENTO, SENZA GIUSTIFICAZIONE)

Un passo argomentativo potrebbe essere aggiunto così:

(infatti) se l'ultima cifra a destra è pari (data), il numero è pari (claim) perché…(warrant)

TOULMIN PER TESTO B:

I numeri pari sono quelli divisibili per 2, che se un numero finisce per 0, 2, 4, 6, 8 è pari, che quando prendo ad esempio 34 è pari=30+4 con 30 divisibile per 2 e 4 pari fa pari + pari che è pari

Un numero finisce per 0,2,4,6,8 (data) è pari (claim)

Ad esempio 34 (data particolarizzato) è pari (claim particolarizzato: ***esempio generico*** *di Balacheff*) perché…

(**warrant complesso**)

34=30+4 (nuovo data)

34=30+4 è somma di numeri pari (sub-claim) perchè

30 è pari (in quanto divisibile per 2) e 4 è pari (**sub-warrant 1**)

la somma di numeri pari è pari (**sub-warrant 2**)

Quindi 34 è pari (ritorno al claim particolarizzato)

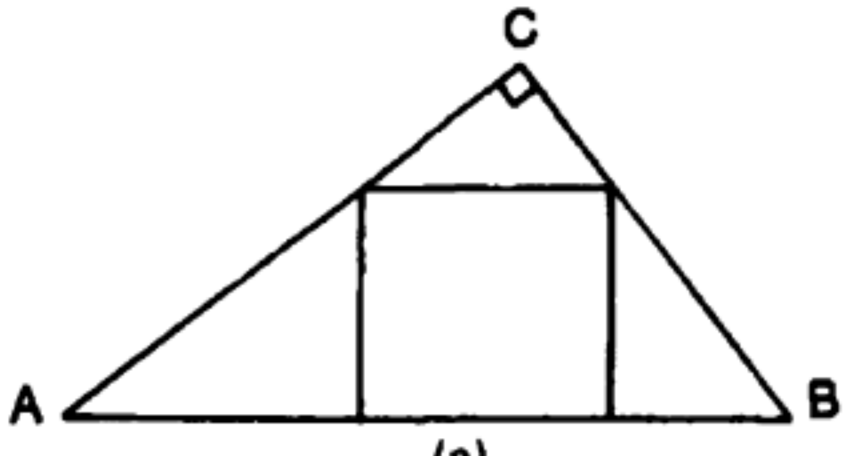
Perché somma di numeri pari (sub-claim che diventa **warrant** per il claim particolarizzato)

(backing: le proprietà dei numeri e della somma di numeri)

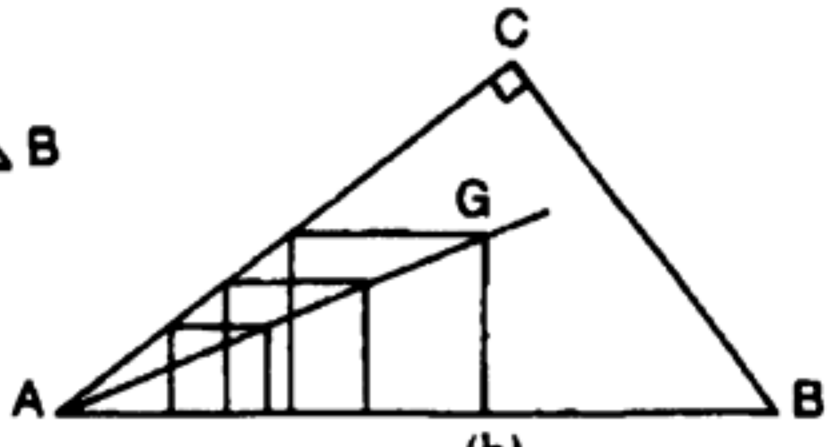
A3
Qualche compito finale

Problema 1
(da un celebre problema di Polya)

Inscrivere un quadrato in un triangolo rettangolo con un lato del quadrato su di un lato del triangolo.



(a)



(b)

Caratterizzazione del problema.

O1. Il problema tratta, in parte, di triangoli.

O2. Il problema tratta di un triangolo rettangolo.

O3. Il problema tratta di una figura inscritta.

O4. La figura inscritta è un quadrato.

O5. La figura inscritta ha un lato su un lato del quadrato.

O6. La forma esterna è un triangolo.

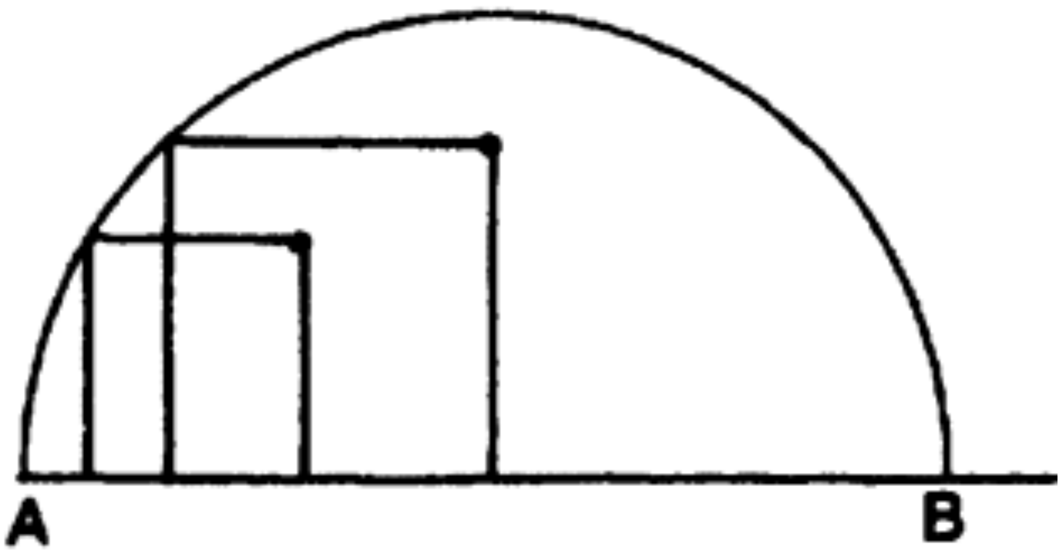
O8. Si tratta di due diverse figure .

O9. Le figure sono piane.

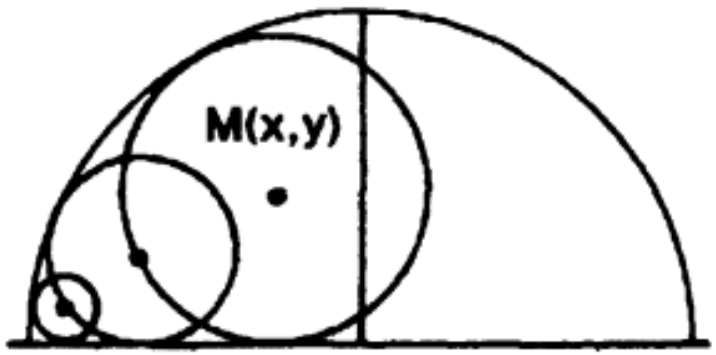
Passiamo alla parte
“Che cosa capita se non è così?”

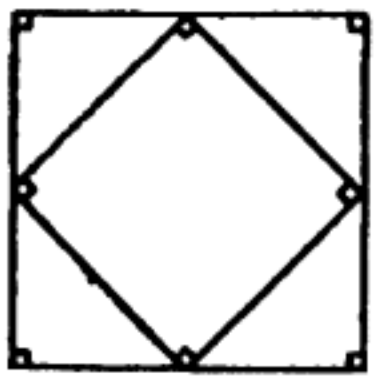
Per esempio:

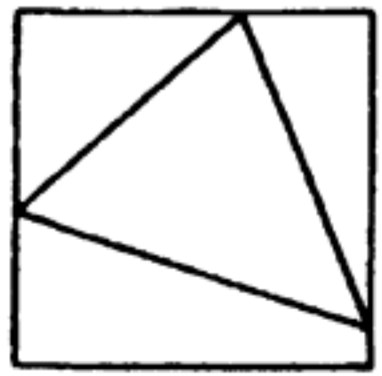
(~ O1)$_s$. Il problema tratta, in parte, di semicirconferenze.

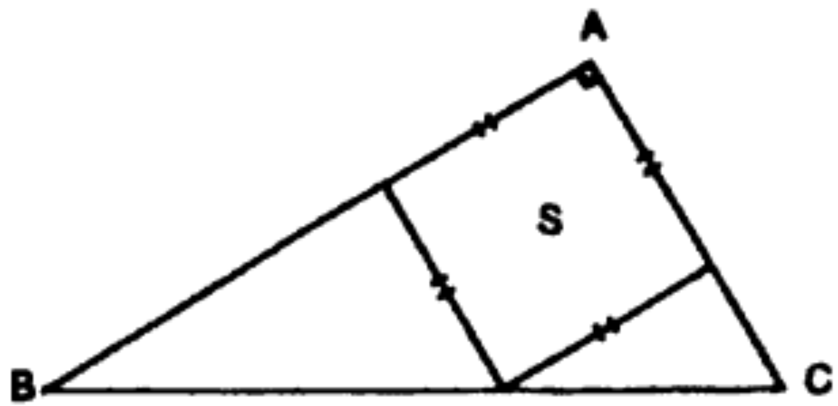


Altri (~ O1)

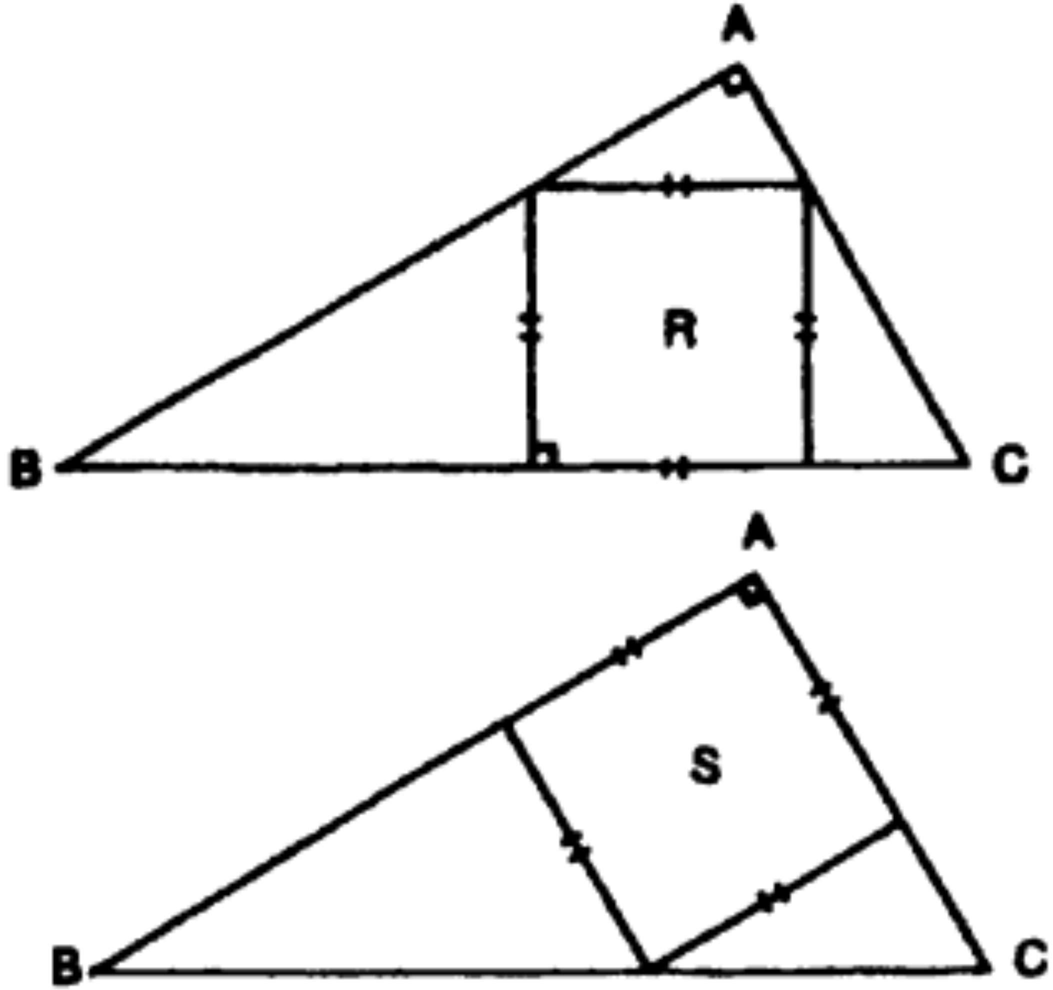




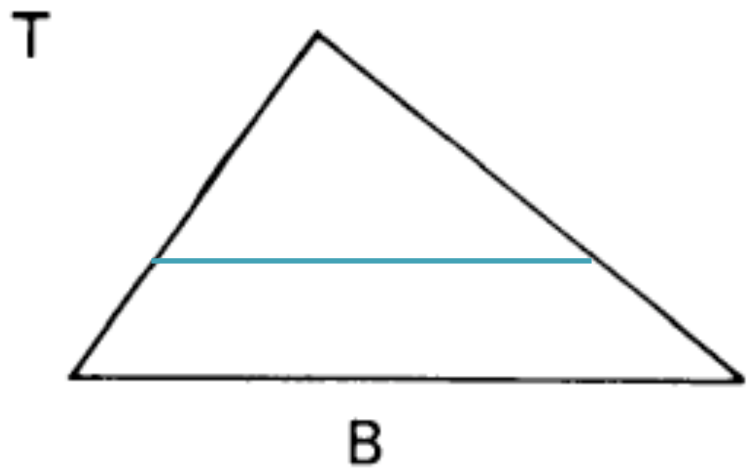


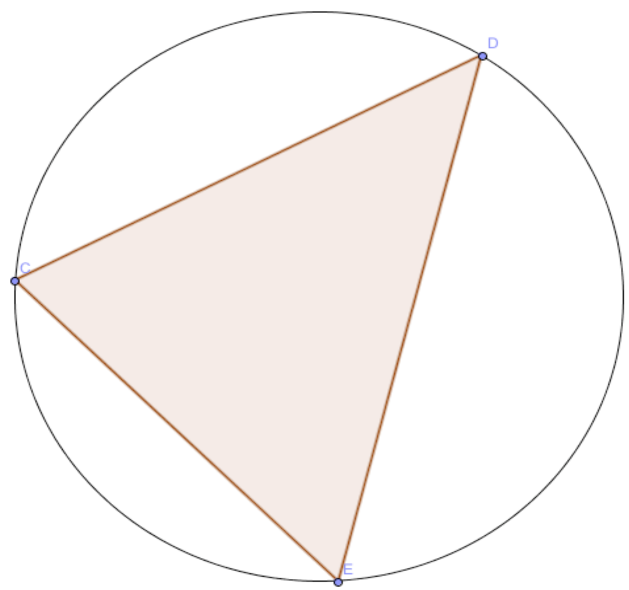


Confronto tra le aree R e S



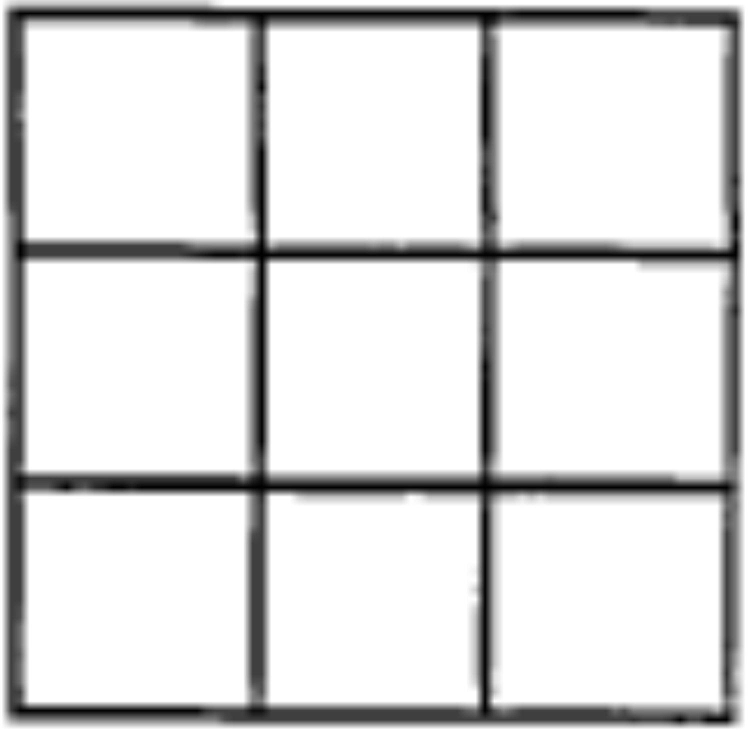
Problema 2





Problema 3

Problema 4



Inserire i numeri da 1 a 9 in modo che sommando sulle righe, sulle colonne e sulle diagonali si ottenga sempre lo stesso risultato.