



IL GIARDINO DI ARCHIMEDE  
unmuseo  
per la [matematica]

## Un ponte sul Mediterraneo *Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*

In occasione dell'ottavo centenario dalla prima  
pubblicazione del *Liber Abaci* (1202)



IL GIARDINO DI ARCHIMEDE  
unmuseo  
per la [matematica]

Un ponte sul Mediterraneo  
*Leonardo Pisano, la scienza  
araba e la rinascita della  
matematica in Occidente*

In occasione dell'ottavo centenario dalla prima  
pubblicazione del *Liber Abaci* (1202)

Un ponte  
sul Mediterraneo

Leonardo Fibonacci,  
la scienza araba  
e la rinascita della matematica  
in Occidente



# Per iniziare: uno sguardo storico (1 - 4)

L'espansione araba  
La cultura arabo-islamica  
La trasmissione del sapere scientifico

## 1 L'ESPANSIONE ARABA



Viene la metà del settimo secolo un popolo il cui allora emergeva sempre progressivamente sulla scena mondiale.

Grande anche a fine del secolo dell'espansione d'oveste e del regno califonale, iniziato da Tariq bin Zayid di Ispahan, che gli arabi conquistarono in breve tempo un enorme territorio e si trovarono a occupare le proporzioni più inguente.

A un secolo dall'inizio di Maometto, l'Impero arabo si estendeva alla Spagna al nord, occupando e pacificando sotto la legge dell'Islam l'intera penisola iberica e il mare profondamente al nord.

### Cronologia dell'espansione araba

610	Maometto profeta.
630	Conquista di Damasco.
632	Fine di l'espansione.
633	Conquista di Gerusalemme e della Palestina.
634	Conquista di Medina.
635	Conquista di Baalbek.
636	Conquista di Amman.
637	Conquista di Hama.
638	Conquista di Aleppo.
640	Conquista di Damasco.
641	Conquista di Alessandria.
642	Conquista di Egitto.
643	Conquista di Siria.
644	Conquista di Bagdad.
645	Conquista di Giordania.
646	Conquista di Persia.
647	Conquista di Siria.
648	Conquista di Persia.
649	Conquista di Persia.
650	Conquista di Persia.
651	Conquista di Persia.
652	Conquista di Persia.
653	Conquista di Persia.



## 2 LA TRASMISSIONE DEL SAPERE SCIENTIFICO



Nonostante le espulsioni dell'espansione araba e i resti di dirompere di una guerra di conquista, il mondo arabo rimase sempre grande, salido e ben fornito in grado di rivoluzionare per la maggioranza delle cose e per il resto di via che società con ingenti di una la stessa tradizione. L'arabo fu il primo a occuparsi di astronomia e l'unica a occuparsi di astronomia nel loro la storia di tradizione dei testi sui matematici e il mondo di studi. In particolare, sono stati i matematici arabi a occuparsi di astronomia, ma con le opere di Euclide, di Archimede e di Apollonio.

Veniva a contatto con la matematica araba, gli arabi si occuparono di matematica e di astronomia, la matematica araba era a contatto con la matematica occidentale e a contatto con la matematica occidentale.

Dall'inizio del Terzo secolo arabo e della matematica greca con gli arabi ha scritto la matematica araba e l'algebra, sono a contatto con la matematica araba e l'algebra, sono a contatto con la matematica araba e l'algebra, sono a contatto con la matematica araba e l'algebra.



A testimonianza dell'affermazione araba nella matematica araba e l'algebra, sono a contatto con la matematica araba e l'algebra, sono a contatto con la matematica araba e l'algebra.

صفر  
الجذر  
المجدد



# Per iniziare: uno sguardo storico (1 - 4)

## 3 LA FIORITURA MATEMATICA ARABA



Le prime opere matematiche di cui si ha notizia all'interno della cultura araba datano dal nono secolo, un periodo in cui era già in corso per un tempo il processo di assimilazione culturale e linguistica da i popoli dell'Europa.

In effetti, già il primo matematico di rilievo al-Khwarizmi (ca.780-850), proveniente dall'Asia centrale, così come l'autore del *Kitāb al-Jabr wa'l-Muqābala* di al-Fārīdī (974-1040), il matematico e poeta Omar al-Khayyām (1048-1131) era iraniano.

Il destino e l'unità continua sino al 15° secolo il mondo musulmano della matematica. Forte di una tradizione classica ormai ampiamente assimilata, e avvalendosi di già appresi di studiosi provenienti da ogni parte del mondo islamico, l'arabica era la seconda lingua in cui si scrivevano le opere senza precedenti, che ne fecero la prima lingua accademica e scientifica, un modello insuperabile per le civiltà contemporanee.

Tra i matematici che fiorirono in questo periodo, si ricorda Abu Kamil (ca. 850-930), Abū 'Alī Kāmil (940-1000) e al-Haytham, nato in Chirchik come Alhazan (965-1039).

Il ruolo svolto dalla matematica araba è stato quello di un ponte tra la cultura greca e quella latina. Dal mondo arabo si è diffusa in Europa la geometria di Euclide, l'algebra di al-Khwarizmi, la trigonometria.



Abū 'Alī Kāmil al-Haznī e al-Haytham al-Bīrūnī.

## 4 FONTI DEL LIBER ABACI: AL-KHWĀRIZMĪ E ABŪ KĀMIL



Abū 'Alī Kāmil ha scritto nel 1000 il suo libro *Fi al-Bihar al-Hay'at* (Sull'oceano della matematica), in cui espone il suo sistema di calcolo. Il suo sistema, basato sulle quattro operazioni, è quello che oggi si chiama "algebra".

La sua opera ha influenzato profondamente la matematica occidentale, in particolare il lavoro di Fibonacci, che ha tradotto e commentato il suo libro in italiano.

Anche al-Khwarizmi ha scritto un'opera importante, *Al-Jabr wa'l-Muqābala*, che ha influenzato profondamente la matematica occidentale.



Il ruolo di al-Khwarizmi e di al-Fārīdī nel mondo arabo.



### # La fioritura matematica araba # Termini arabi nella matematica occidentale

- \* algebra e almucabala
- \* cosa e censo
- \* zero e cifra
- \* radice e numeri surdi
- \* elcataym
- \* algoritmo
- \* seno

### # Fonti del Liber abaci



algoritmo    *al-khwārizmī*    الخوارزمي

algebra    *al-jabr*    الجبر

almucabala    *al-muqābala*    المقابلة

Al-Khwarizmi, *Al-Jabr wa'l-Muqābala*, 1000. Traduzione di Roberto Cingolani, 1990. Ed. Einaudi, 1990.



# Leonardo Pisano e Il *Liber abaci* (5 - 6)

## 5 LEONARDO FIBONACCI, PISANO



La maggior parte delle notizie su Leonardo Fibonacci si propongono dalle sue tre opere, in particolare dall'*Liber Abaci*. La sua data di nascita non è conosciuta, né il suo esatto luogo di nascita, oggi si tende a situarla poco dopo il 1170. Da lì si dice il padre Guglielmo lo condusse con sé a Bugia, una città sui pendii dell'attuale Algeria, dove era funzionario del console di Pisa. Qui Leonardo apprese le prime nozioni di matematica, che poi perfezionò nel corso di numerosi viaggi in tutto il Mediterraneo, che gli valsero il soprannome di Bigollo. Tornato in patria, scrisse nel 1202 il *Liber Abaci*, opera che gli procurò una vasta fama.

Non si sa se sia esattamente Fibonacci ad aver inventato a Pisa, o se abbia ripreso i suoi viaggi per il mondo, ma è certo che pubblicò una delle opere, la *Practica Geometriae*.

Nel 1212 incontrò a Pisa l'imperatore Federico II, con il quale si accentrò su un viaggio in cartina appreso: la redazione del *Liber Abaci* nel 1220 e dedicata all'imperatore imperatore Michele Seto.

Sei anni dopo questi avvenimenti, entrò solo per l'acquisto della casa per l'imperatore il *Liber Quadratorum*, il *Tratado de Algebra* di Magister Thibaudese.

Dal suo altro opera, un commento al *de mensuris et sibus agrorum* di Euclide con *Liber de Algoris*, si conosce solo il nome, senza che si sappia nemmeno quando furono composte. Un documento del 1241, con il quale il Comune di Pisa gli conferiva una pensione, prova che era ancora in vita a quella data. Da quel momento di Leonardo Pisano non si hanno più notizie.

Un libro matematico quadrato, il secondo degli scrittori italiani. Leonardo Fibonacci, Pisa. Biblioteca di Pisa. Foto: Biblioteca di Pisa.

## 6 IL LIBER ABACI



Foto: Biblioteca di Pisa

Il *Liber Abaci* vide la luce nel 1202. In esso Fibonacci ci mostra il suo punto di vista sulle sue operazioni nei paesi arabi e per il Mediterraneo, e come ha visto il risultato di tali operazioni. Il risultato è un'opera che supera per stile e completezza per alcuni secoli i suoi modelli, e che resterà per molto tempo l'opera più importante nel panorama della matematica occidentale.

Non c'è settore della matematica commerciale che non trovi il suo spazio nel *Liber Abaci*: dall'aritmetica ai prestiti, dai cambi alla locazione del denaro, dall'investimento ai baratti, tutto è spiegato con semplicità e con una serie di esempi tratti dalla pratica commerciale corrente. Per la cultura matematica europea, e che ancora aveva a suoi modelli greci, il *Liber Abaci* è un'opera che ha segnato un punto di svolta, che sta a significare la fine della gestione del denaro per un numero illimitato di persone, e a significare la nascita di una matematica moderna.

- Pisa e il Mediterraneo nel XIII secolo
- L'avvento degli Almohadi e lo sviluppo dei commerci
- Leonardo Fibonacci, Pisano
- Biografia
- Liber abaci



# Dal *Liber abaci* (7 - 15)

- \* La notazione posizionale
- \* Problemi dal *Liber abaci*

## 7 LA NOTAZIONE POSIZIONALE



Manoscritto Liber Abaci, due pagine

Uno dei contributi più importanti del *Liber abaci* è costituito dalla diffusione del sistema indiano e della notazione posizionale. Le regole di cui si è servito Fibonacci sono state elaborate con varie modifiche per la scrittura dei numeri. Gli Egizi e i Romani avevano di regola diversi per le unità, le decine, le centinaia, mentre, ad esempio i Romani indicavano le centinaia con *L*, le decine con *X*, le centinaia con *C*, e quindi per indicare duecento scrivevano *CCII*. I Greci e gli Ebrei usavano invece le lettere dell'alfabeto per i numeri ed scrivevano, due, *β*, tre, *γ*, ... per indicare due, tre e successivamente erano costretti a ripetere *β*, e quindi duecento era scritto *βββ*. Il più vicina al sistema posizionale erano i Babilonici, che usavano un sistema a base sessanta ma che i numeri da zero a 59 si scrivevano in una forma simile agli Egizi e ai Romani, mentre per i numeri maggiori utilizzavano un sistema posizionale per indicare 100, scrivevano cioè *β* seguito da 23, tre sessante e ventitré unità. Invece l'Indiano, tutti questi sistemi avevano una notevole difficoltà a esprimere numeri grandi.

Nella scrittura indiana, inventata dagli indiani e giunta in Occidente attraverso gli arabi, ogni numero da 0 a 9 occupa della sua posizione, quella più a destra è il posto delle unità, poi viene quello delle decine, segue quello delle centinaia, e così via. Nasce qui l'uso molto di un segno, lo zero per indicare che il posto corrispondente è vuoto nel numero. Il 0 è il numero che comincia, nessuno dice tre e zero unità.

# Dal *Liber abaci* (7 - 15)

- \* La notazione posizionale
- \* Problemi dal Liber abaci:

## 8 PROBLEMI DAL LIBER ABACI: REGOLA DEL TRE



Se un Cantore si trova per 40 lire, quanto valgono 100 lire?

Dei due un il suo numero rispetto, si scrive a dritta il primo numero, così la quantità di la merce, accanto a questo si mette il suo prezzo. Si trova il suo la seconda quantità di la merce, si scrive sotto la merce, se è sotto la somma di quello, si scrive sotto il prezzo, si vuole tal e che si vuole sempre un genere anche lo stesso per essere sotto merce o d'altro conto d'altro.

Una volta fatto ciò, si moltiplicano uno il numero sopra, e il prodotto allora per il numero che rimane al di qua il numero cercato.

Nel nostro caso, si scrive a dritta il Cantore, cioè 40 Lire, e alla sua sinistra il prezzo, cioè 100 Lire. Si trova il 100 Lire anche si scrive sotto il Cantore, che come dell'istesso genere.

Or si moltiplicano i numeri sopra, cioè 4 per 100, che fa 400, che divide per 40 da 100 come principio il Cantore.

Unità di peso nella Pisa medievale

4  
libbre di la mercanzia  
Cantore a sua cantoria

6  
caroli e lino  
come il suo peso di cantore

25  
Anelli di cantore  
tra due libbre di lino

39½  
il suo di cantore  
tra due libbre di lino

12  
Cantore di lino  
tra due libbre di lino

12  
il suo  
tra due libbre di lino

158  
Libbre di cantore  
tra due libbre di lino

100  
Cantore  
tra due libbre di lino

40 100  
5

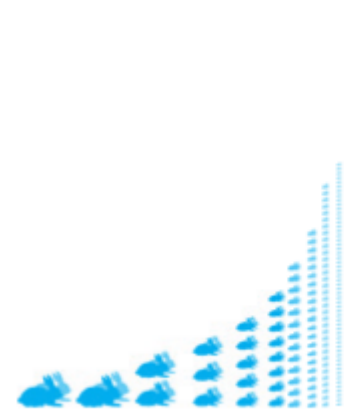
Spaccato manoscritto libro VIII di Pisa



# Dal Liber abaci (7 - 15)

- \* La notazione posizionale
- \* Problemi dal Liber abaci:

## 9 CONIGLI E NUMERI DI FIBONACCI



Quattro coppie di conigli discendono  
in un anno da una coppia.

Un tale ebbe una coppia di conigli in un  
largo campo e, dopo un anno, si accorse che  
per scoprire quanti coppie di conigli  
discendevano da quella in un anno. Per sapere  
ogni coppia di conigli genera un coniglio  
in un anno, e si accorse che a partire  
a partire dal secondo mese di vita.

Per risolvere il problema, supponiamo  
all'inizio che a Novembre ci siano un  
certo numero di coppie di conigli, diciamo  
21, e che a Ottobre ce ne fossero 13.  
Dalla coppia di Novembre, otto sono allora  
di nuovo nati, che non generano.  
Dunque a Dicembre ci saranno le 21 coppie  
di Novembre, più 13 coppie nate dai conigli  
che c'erano già a Ottobre.

Questo è vero sempre, e dunque per trovare  
il numero di conigli - ovvero Fibonacci -  
in un dato mese fa altro che sommare  
il primo numero del mese, e cioè 1 con 1  
per il secondo mese il terzo, il terzo con  
il quarto, il quarto col quinto, e così  
divergendo fino a contare il diciannovesimo  
l'undicesimo, cioè 89 con 146, per trovare  
la quantità finale di 213 coppie di conigli  
e così si può continuare indefinitamente per  
infinitesi di anni.


La successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,  
55, 89, 144, 233, 377, 610 ... si chiama  
coppie di Fibonacci, e i numeri che la  
compongono sono detti numeri di Fibonacci.  
Fu infatti il nome che la serie di Fibonacci  
ebbe naturalmente in natura e nell'arte,  
e oggi il nome di Leonardo Pisano è stato  
il grande pubblico grazie a questa, che  
probabilmente egli considerava una pura  
curiosità.

- 1,
- 1, 2,
- 3, 5, 8,
- 13, 21, 34,
- 55, 89, 144, 233,
- 377, 610, 987, 1.597,
- 2.584, 4.181, 6.765, 10.946,
- 17.711, 28.657, 46.368, 75.025,
- 121.393, 196.418, 317.811, 514.229,
- 832.040, 1.346.269, 2.178.309, 3.524.578,
- 5.702.887, 9.227.465, 14.930.352, 24.157.817,
- 39.088.169, 63.245.986, 102.334.155, 165.580.141,
- 267.914.296, 433.494.437, 701.408.733, 1.134.903.170,
- ...

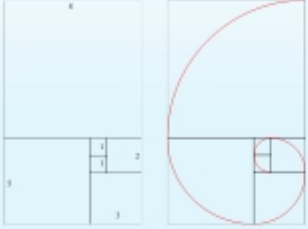


# Dal *Liber abaci* (7 - 15)

- \* La notazione posizionale
- \* Problemi dal *Liber abaci*:



## 10 CONCHIGLIE ED ALTRE CURIOSITÀ



I numeri di Fibonacci si ritrovano sorprendentemente in molti fenomeni naturali: la conformazione del nautilus, la pianta con delle foglie e dei petali di fiori, le mutazioni di alcune piante, la disposizione dei semi nei girasoli e delle spighe sulle paghe.

Queste piante sono disposte in modo da formare due serie di spirali opposte, che si fondono nel centro.


Nella stessa pagina c'è il suo equivalente, i numeri di Fibonacci che ricorrono nei due serie sono numeri di Fibonacci consecutivi. Un'altra proprietà importante di numeri di Fibonacci è che se si va in avanti, il rapporto tra uno di essi e quello che lo precede si avvicina sempre più al numero irrazionale

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868...$$



Questo rapporto, che si trova in molti fenomeni di fisica come soluzione del problema di la divisione del segmento in media ed estrema ragione, viene chiamato "Divisione proporzionale" da Luca Pacioli, che gli dà il suo intero valore con questo titolo, e più tardi "sezione aurea", "rapporto aureo" o "numero d'oro".

Esso è stato un ruolo importante nelle arti: sia un Leonardo di Vinci costruisce le proporzioni del corpo umano sulla base della sezione aurea, che più di trecento è stata al centro degli interessi di Mondrian e di Severini.

Anche ai numeri di Fibonacci e di la sezione aurea il fatto il Matilde di La Camera, mentre la sua della serie di Fibonacci Visconti, a il suo divide la legge su secondo la media e l'estrema ragione.



La sviluppo geometrico con gli altri.  
Una pagina con il quadrato e la spirale, e "le in sezione aurea" di la  
di la sezione aurea (sezione aurea)  
di la sezione aurea.

# Dal *Liber abaci* (7 - 15)

- \* La notazione posizionale
- \* Problemi dal Liber abaci:

## 11 PROBLEMI DAL LIBER ABACI: LA SCACCHIERA



Un altro problema a noi di solito che è giunto  
intatto fino ai nostri giorni è legato  
al gioco degli scacchi.  
Si tramanda che il suo inventore a lui e una  
risposta un chilo di grano per la prima  
casella, due per la seconda, quattro per  
la terza, otto per la quarta, e così via  
sempre raddoppiando fino a giungere  
all'ultima casella della scacchiera,  
la sessantaseiesima.

Fibonacci non menziona la legge,  
ma calcola in 12.884.764.073.709.171.615  
il numero di tutti i livelli di grano.

Un numero così lungo non è da ridere,  
ed è difficile fare un'idea della sua necessità  
in fondo a verità il nostro non sembra  
per tanto particolarmente grande.  
In realtà il numero poteva farci un'idea.  
Leonardo ci offre il seguente esito si potrebbe  
riempire se ogni casella di una tavola 100 caselle  
grana, che pesano 24 sicli e ogni, con  
un siclo composto di 120 denari, ognuna  
di 12 once, le quali a loro volta valgono  
ciascuna 24 denari, che pesano sia sono 24  
grani di frumento? Il risultato è sorprendente  
si vede facilmente 1.121.828.440.000,  
cioè più di un miliardo e 120 mila. "E quale  
numero è apparentemente immenso e quasi  
infinito".



# Dal *Liber abaci* (7 - 15)

## 12 COMMERCIO E MATEMATICA

- \* La notazione posizionale
- \* Problemi dal *Liber abaci*:



MANUSCRIPT OF LIBER ABACI BY LEONARDO DA VINCI

Agli inizi del Trecento l'interesse per il traffico portò alla costituzione di aziende con vari rami in diverse città. La contabilità era fondata da una parte su tecniche di bilancio di corrispondenza, e dall'altra da un collettato sistema di contabilità che la pratica aveva sempre più portò decanto accanto alla più tradizionale per somma, compare il giornale con la scrittura quotidiana in base a una cronologia delle operazioni, poi il libro mastro dove a ogni corrispondente al quale era riservato un conto apposito, detto in dare e avere, e infine altri quadri particolari relativi ai beni patrimoniali e strumentali, alle merci, ai soci.

A queste organizzazioni contabili si aggiungevano presto a più essere nell'ambito dell'attività di commercio le loro contabilità contabili richiedevano ben altre conoscenze, in primo luogo proprio quelle aritmetiche che per un secolo di discussioni erano state finalmente di preoccupazione che si erano di lavoro. Da queste imprese, ormai in molti casi di livello internazionale, vengono le indicazioni per la diffusione, se non di *Liber Abaci* in quanto tale, certamente delle tecniche e delle notazioni matematiche che contiene.



# L'insegnamento del *Liber abaci* e le scuole d'abaco (13-14)

## 13 LE SCUOLE D'ABACO



La diffusione delle cifre arabe e dei suoi metodi di calcolo assieme per la prima volta indicò forse una vera e propria scuola d'abaco.

Queste furono, a partire dal secolo tredicesimo, in cui soprattutto non si conoscono, ma più che altro, dove le attività di cui questi abaco erano il centro, e si occupano di luoghi commerciali, che non tardò di far sì il ricambio per sé il controllo più delle repubbliche.

Non erano ancora, i maestri d'abaco sono lontani da questi al di fuori, i servizi anche le come a considerarsi per un tempo nelle grandi città come in un altro modo un gran numero di abaco privata, che operavano come parte di Calcestruzzo, quando il rapporto degli interessi di mercato rifugiò. Bisogna infatti notare accorgere la prima testimonianza di la presenza di maestri d'abaco non è stata sino a oggi indicata come una prova di cosa di cui e di maestri d'abaco o meno.

Il tema d'abaco realista dei maestri si ispirano per la maggior parte il trattamento di opera del Duomo, che era un'entusiasta riconoscimento come il suo più primo e il stesso suo esponente di la sua attività risente di.

### SCUOLE E MAESTRI D'ABACO

Firenze	1311	Luca de Filiberti
Bologna	1281	Francesco da Bologna
San Gimignano	1279	Michele
Perugia	1277	
Orvieto	1277	
Verona	1248	
Venezia	1242	Luca di Borgo
Padova	1242	Luca di Borgo
Genova	1242	
Prato	1241	
Arezzo	1241	
Lucca	1239	
San Gimignano	1239	
Montecatini	1238	
Firenze	1238	
Arezzo	1238	
Montecatini	1238	
Montecatini	1238	
Montecatini	1238	

## 14 UNA SCUOLA D'ABACO A PISA



Tra i documenti che dimostrano l'insegnamento nelle scuole d'abaco, il più dettagliato è quello redatto da Gerardo di Cremona di Gerardo di Dino, maestro d'abaco a Pisa nel 1144.

Questo è la forma d'angolo a insegnare l'abaco al scuola di Pisa nel 1144 (in questo testo è fatto come appena detto).

- Pisa, quando lo garzone viene a scuola, all'ingresso a fare il figlio, cioè 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

- Pisa l'insegnamento di passare all'istituto, cioè di un altro maestro l'istituto e a un altro resto di di uno, come una e un'altra.

- Pisa l'istituto o scuola di gliore cioè di due lettere quello che rimane a un'altra lettera e così le quattro altre alquanto dente la lettera. Di poi lo potere il tanto.

- Pisa fa lo lettera di un tanto d'altra in un altro per un tanto a 10 con 10 100, lo quale si fa moltiplicare a un'altra e fa altro moltiplicare in un'altra.

- Pisa fa lo moltiplicare di un'altra e fa altro moltiplicare di un'altra.

- Pisa fa lo moltiplicare di un'altra e fa altro moltiplicare di un'altra.

- Pisa fa lo moltiplicare di un'altra e fa altro moltiplicare di un'altra.

- Pisa fa lo moltiplicare di un'altra e fa altro moltiplicare di un'altra.

- Pisa fa lo moltiplicare di un'altra e fa altro moltiplicare di un'altra.

- Pisa fa lo moltiplicare di un'altra e fa altro moltiplicare di un'altra.

- Pisa fa lo moltiplicare di un'altra e fa altro moltiplicare di un'altra.

- Pisa fa lo moltiplicare di un'altra e fa altro moltiplicare di un'altra.

Fonte: Wikipedia

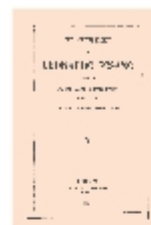


Le "libre abaci" One of the earliest "per arithmetica" Problems of geometry

- \* Fortuna del Liber abaci
- \* Commercio e matematica
- \* Le scuole d'abaco
- \* Le scuole d'abaco a Firenze
- \* Le scuole d'abaco a Firenze: quartiere di S. Maria Novella
- \* Le scuole d'abaco a Firenze: quartiere di S. Croce
- \* Le scuole d'abaco a Firenze: quartiere di S. Giovanni
- \* Le scuole d'abaco a Firenze: quartiere di S. Spirito
- \* Una scuola d'abaco a Pisa

# Fortuna e riscoperta del *Liber abaci* ( fine)

## 15 FORTUNA DEL LIBER ABACI



Leonardo Pisano  
Liber abaci, Biblioteca degli Apostoli  
Il Liber abaci nell'edizione delle Monache di  
Benedetto della Repubblica  
di Monacopoli, 1812 e in un'altra edizione pubblicata nel 1814

Verso la metà del Quattrocento l'evoluzione della stampa viene a accompagnare le modalità di diffusione di la cultura, provocando la progressiva sparizione del sapere colto e di quegli autori le cui opere per un qualche motivo non passarono sotto i torchi.

Non è oggi a questo destino esista le *Fibonacci*, che già durante il Cinquecento era ormai precipiti di un uomo.

Alla fine del Settecento con il riemergere della cultura e le nuove circostanze che in Italia, l'opera di Fibonacci ricopre la sua giusta collocazione storica.

Autografo di questa ricomposta *Fibonacci* furono il senatore Pietro Casati e il bolognese Giambattista Guadagnoli, autore il primo di una *Critica*, trasportato in Italia, prima proposta da una dell'Algebra (1766-1770) e il secondo di un *Dialogo di Leonardo Pisano* (1812). A una seconda più tardi, Giambattista Libri e Michel Charles, si impegnano in una controversia che coinvolgeva su l'altro la soluzione del ruolo di Leonardo nella storia dell'algebra e del fatto si interessava.

Ma il vero momento del nome e di l'opera di Fibonacci fu di nuovo accompagnato, che dopo uno studio approfondito dell'opera e del tempo del lavoro, diede alla luce prima gli *Opuscoli Liber Quadratorum*, *Fibonacci* (1842) in due successive edizioni (1844 e 1846), e poi una monumentale edizione di tutte le opere di Fibonacci presentate fino a noi oltre agli *Opuscoli*, il *Liber Abaci* (1857) e la *Practica Geometrica* (1862). Ancora oggi l'edizione di Boncompagni è la sola che si abbia delle opere di Leonardo.

### ELOGIO DI LEONARDO PISANO

di G. B. GUGLIEMINI

NELLA OGNI ANNO

IN TUTTE LE UNIVERSITÀ DI REGGIO

PER IL DOTTORATO IN SCIENZE MATEMATICHE

DELLA FACOLTÀ

G. B. GUGLIEMINI

PROFESSORE DEL COLLEGGIO TEODORO, IN REGGIO

NELLA Cattedra di Matematica e Fisica nel

1814





# SPUNTI DI LAVORO SUL LIBER ABACI

IL LIBER ABACI



Codex 49.100.100



IL

## LIBER ABBACI

DI

# LEONARDO PISANO

PUBBLICATO

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE MAGLIABECHIANO

C. I, 2016, *Badia Fiorentina*, n.° 73.

DA

**BALDASSARRE BONCOMPAGNI**

SOGRO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI, E SOGRO  
CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO,  
DELLI REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,  
E DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA

1857

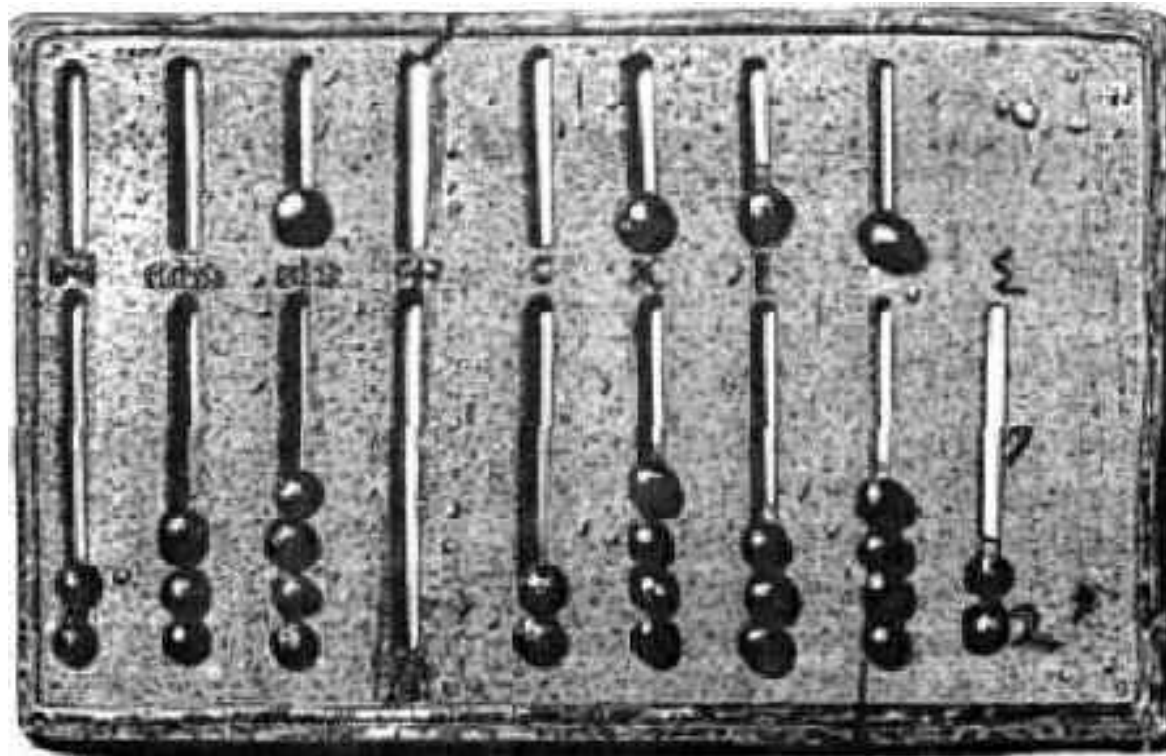
- **L'ABACO**



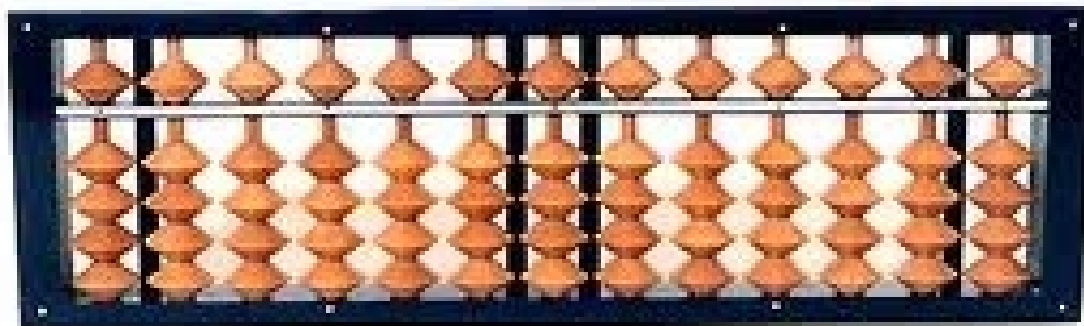
- **L'ABACO**



- **L'ABACO**



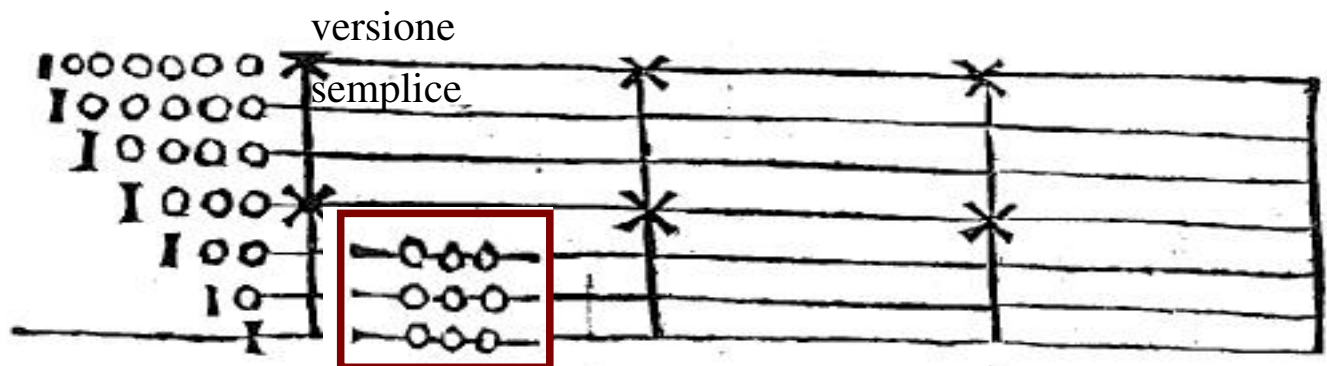
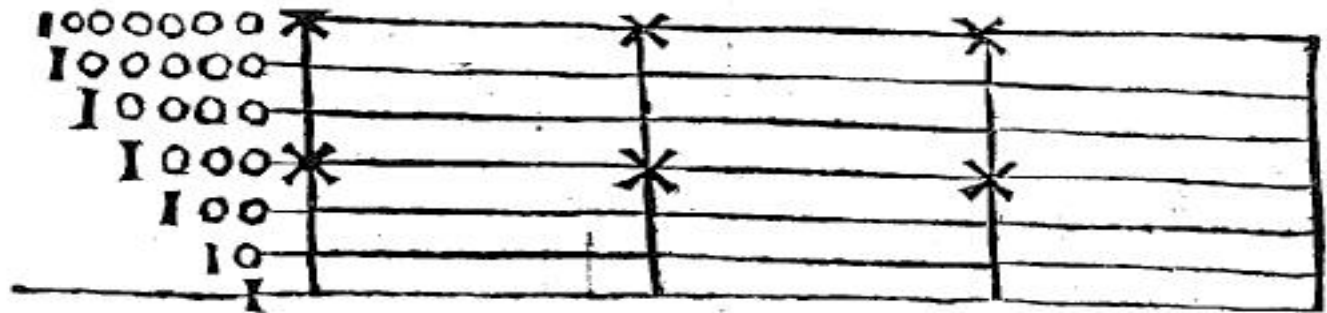
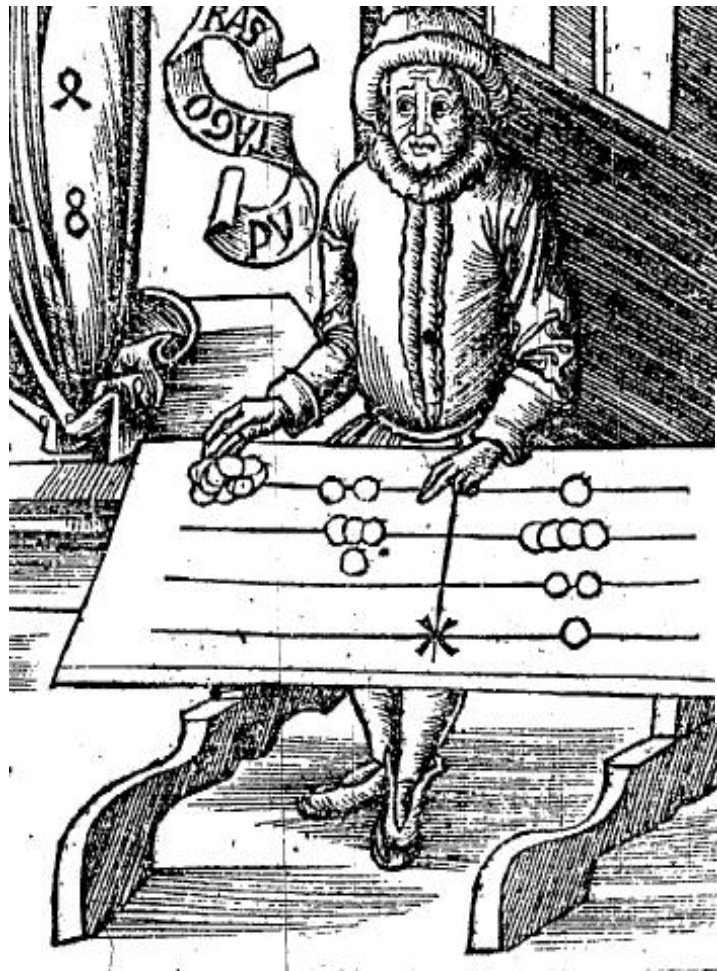
- **L'ABACO**





# • L'ABACO: le tavole di conto

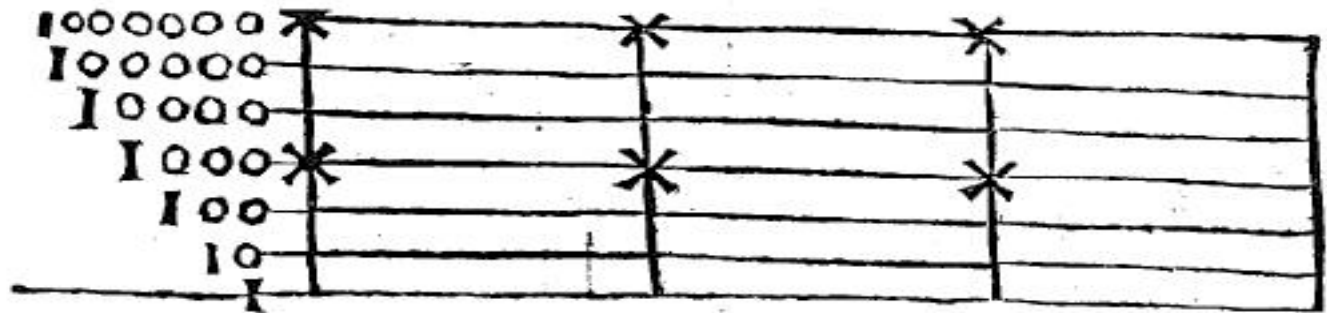
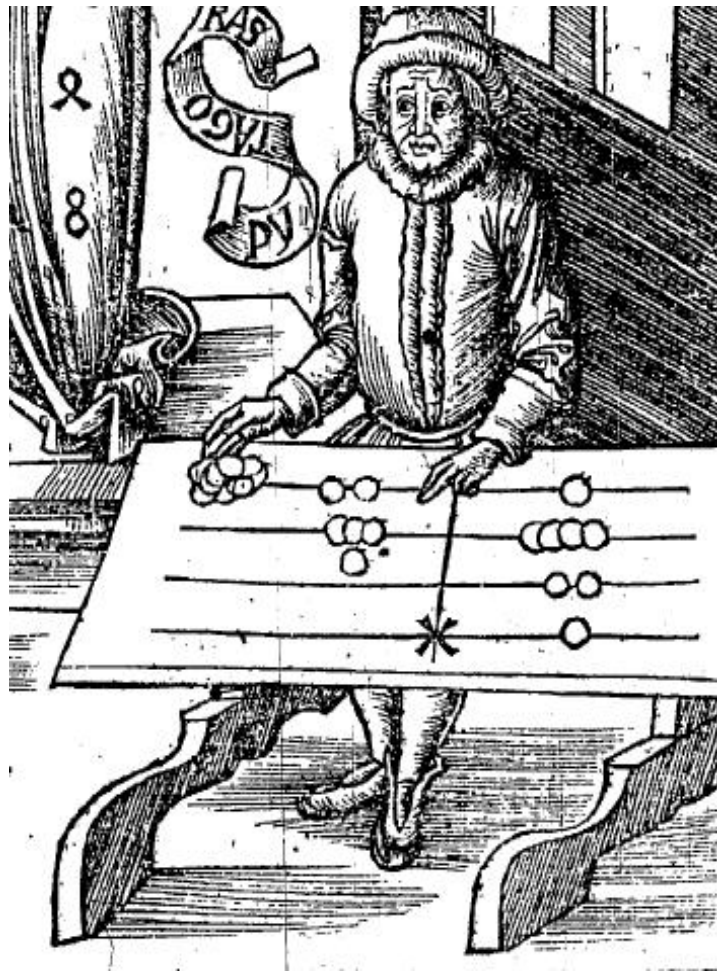
da Reisch, *Margarita Philosophica*, 1504



333

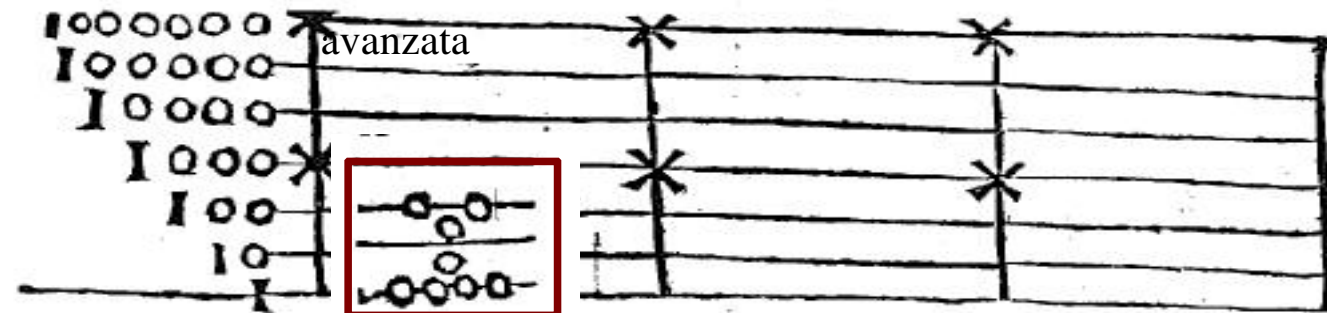
# • L'ABACO: le tavole di conto

da Reisch, *Margarita Philosophica*, 1504



versione

avanzata

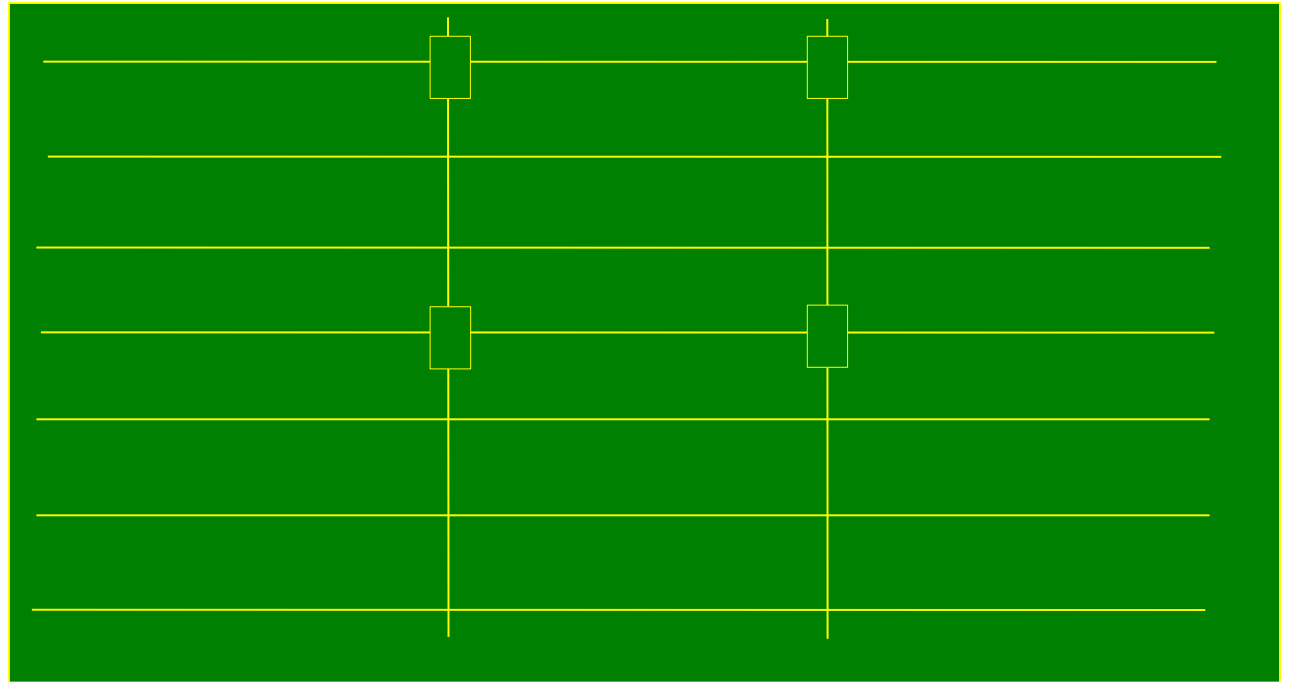


259

- **L'ABACO: le tavole di conto**

trecentocinquantasette

CCCLVII

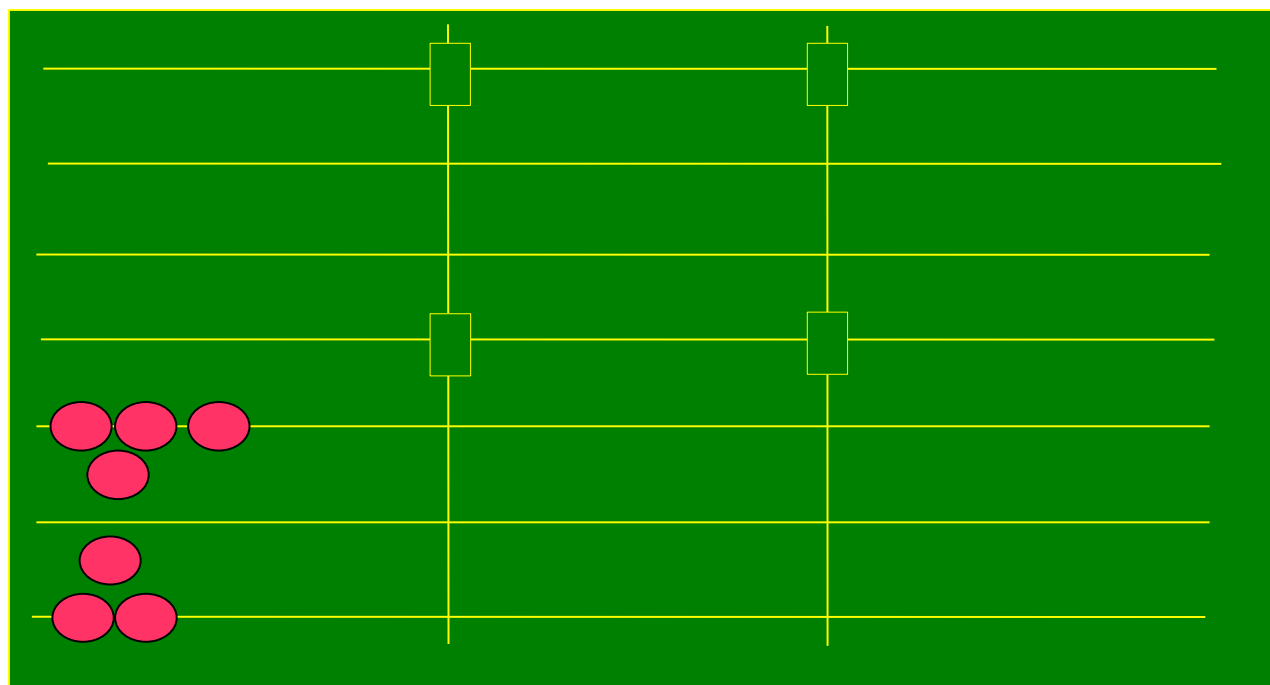


- **L'ABACO: le tavole di conto**

trecentocinquantasette

CCCLVII

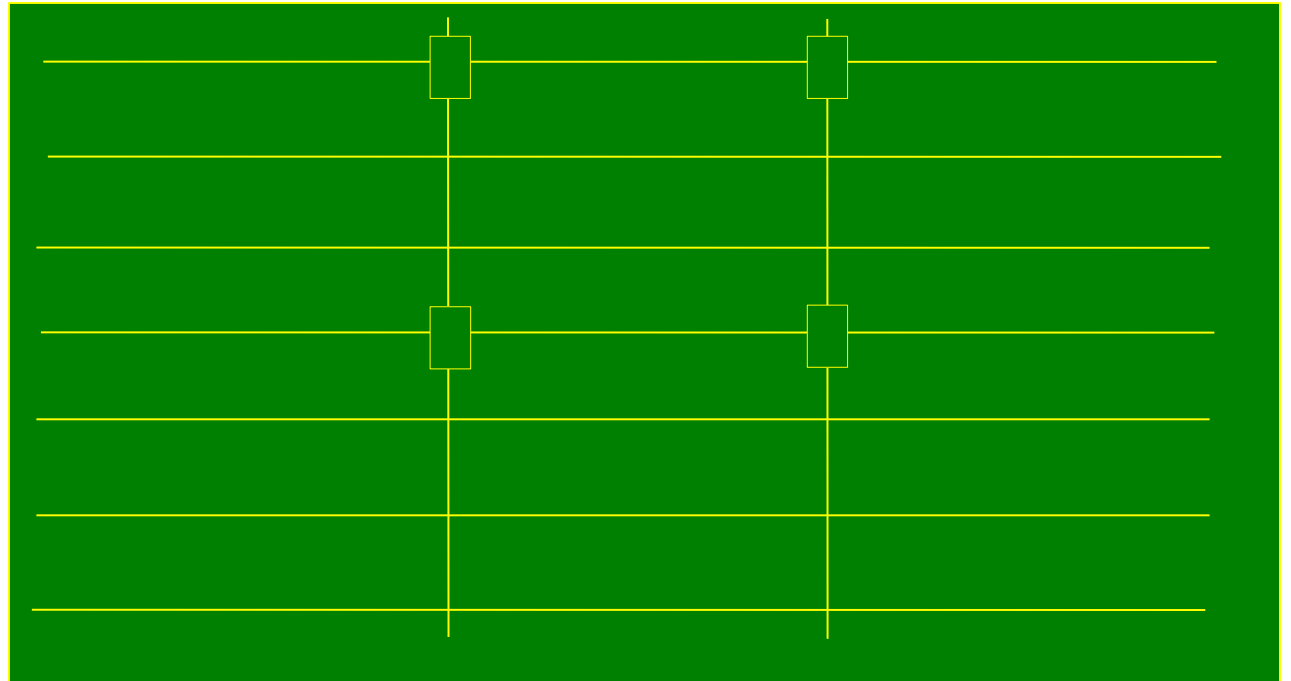
C  
X L  
I V



- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove

DCIX  
DCVIII



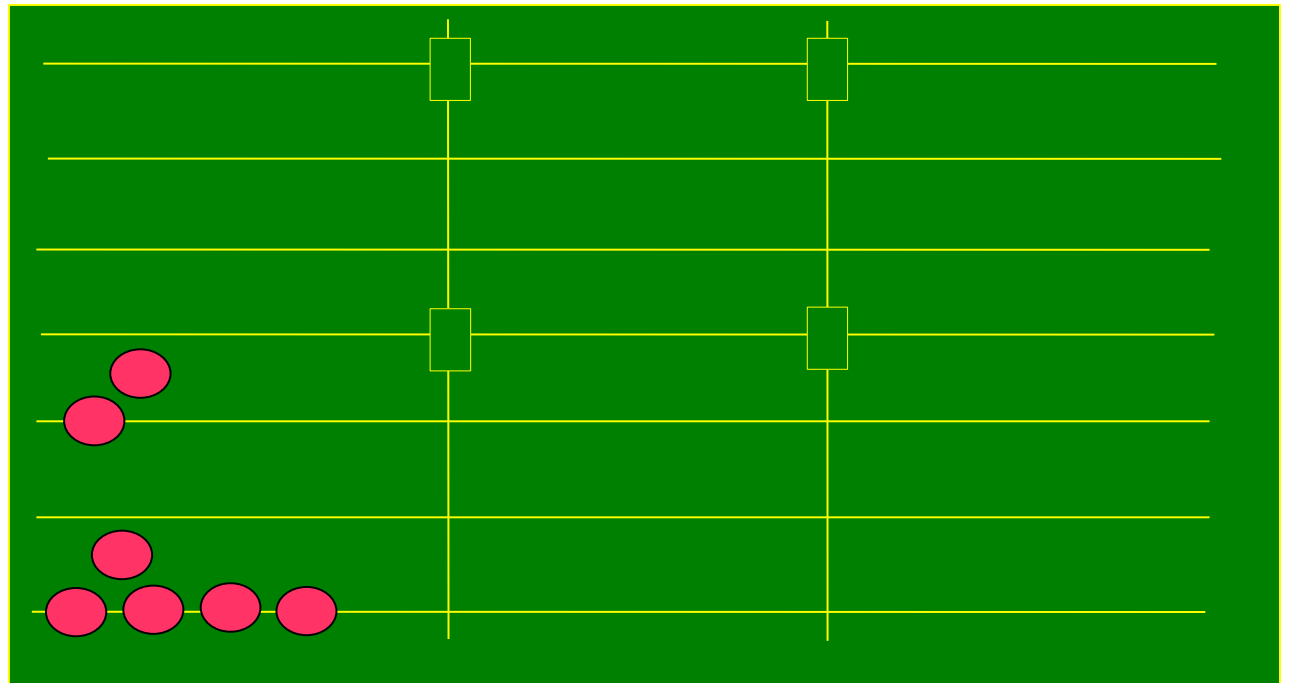


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove

DCIX  
DCVIII

D  
C  
L  
X  
V  
I

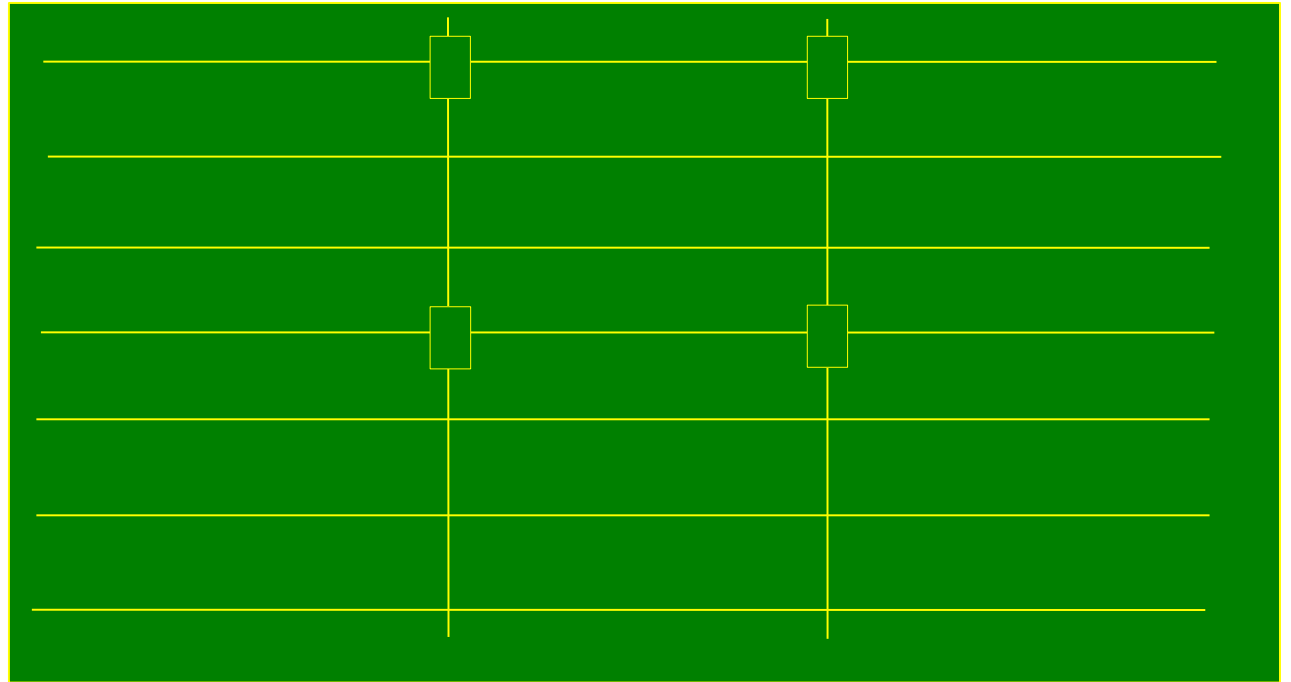


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +  
trecentocinquasette

DCIX  
CCCDVII

D  
C  
L  
X  
V  
I

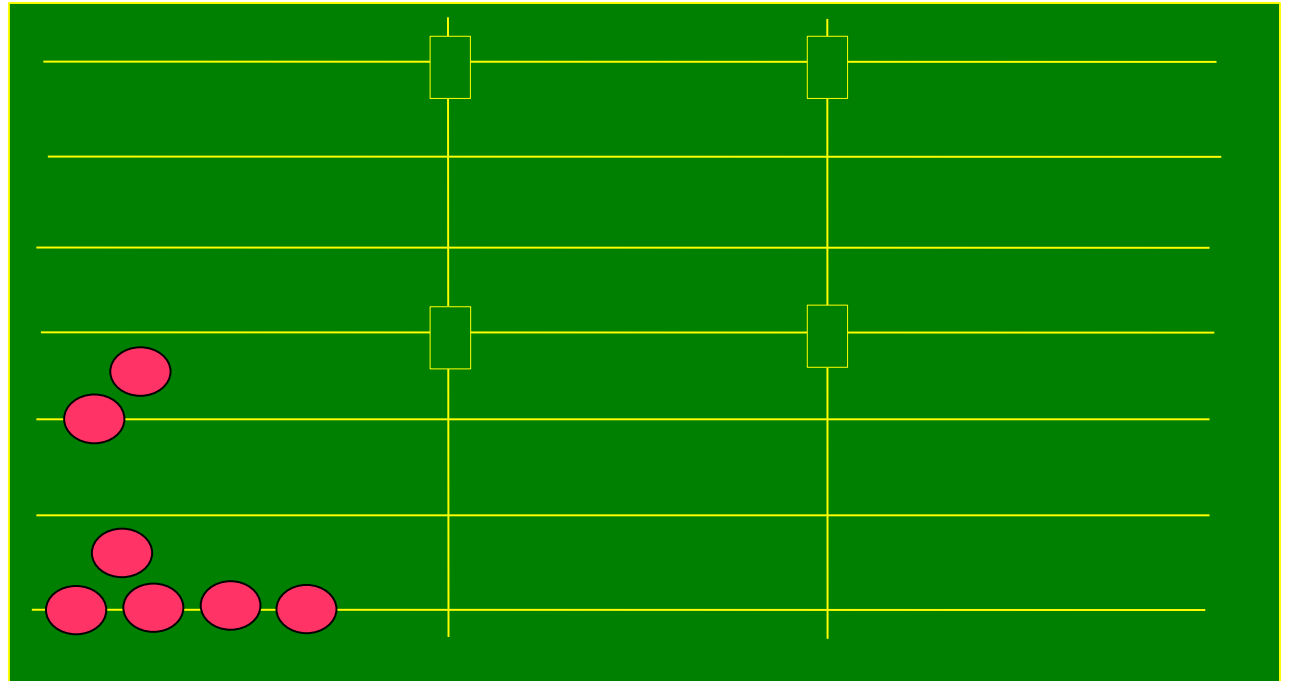


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +  
trecentocinquasette

DCIX  
CCCDVII

D  
C  
L  
X  
V  
I

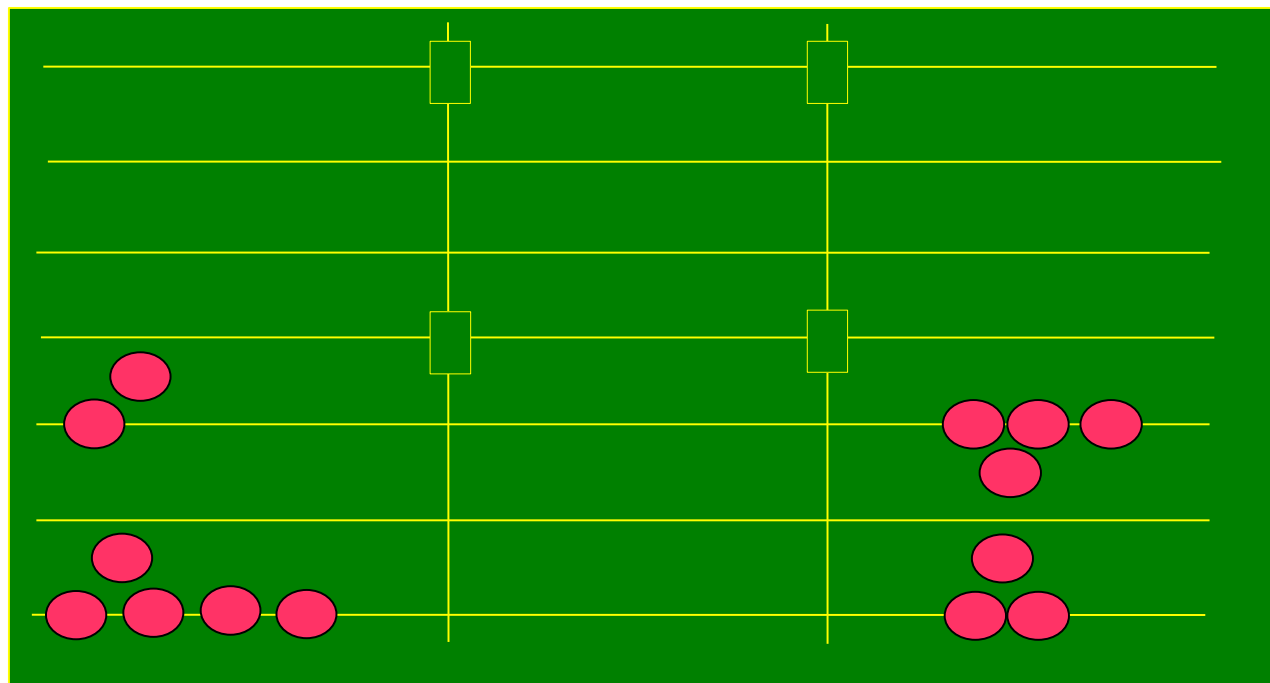


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +  
trecentocinquasette

DCIX  
CCCDVII

D  
C  
L  
X  
V  
I

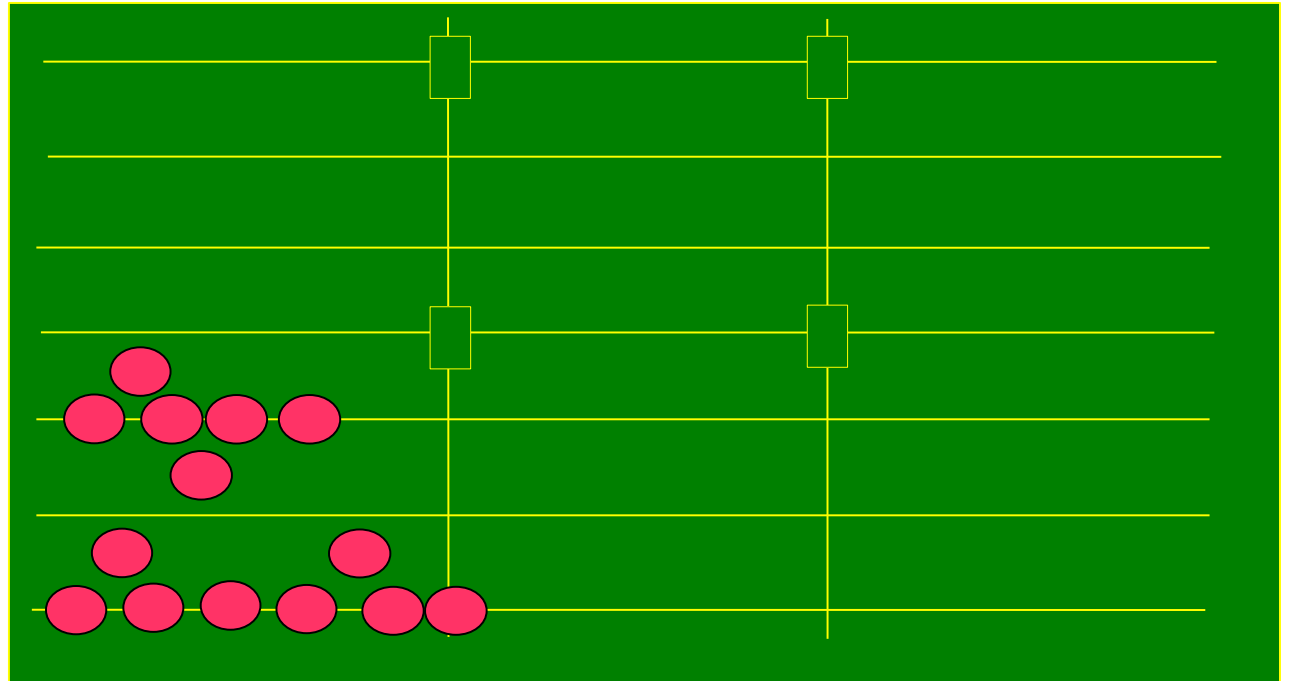


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +  
trecentocinquasette

DCIX  
CCCDVII

D  
C  
L  
X  
V  
I

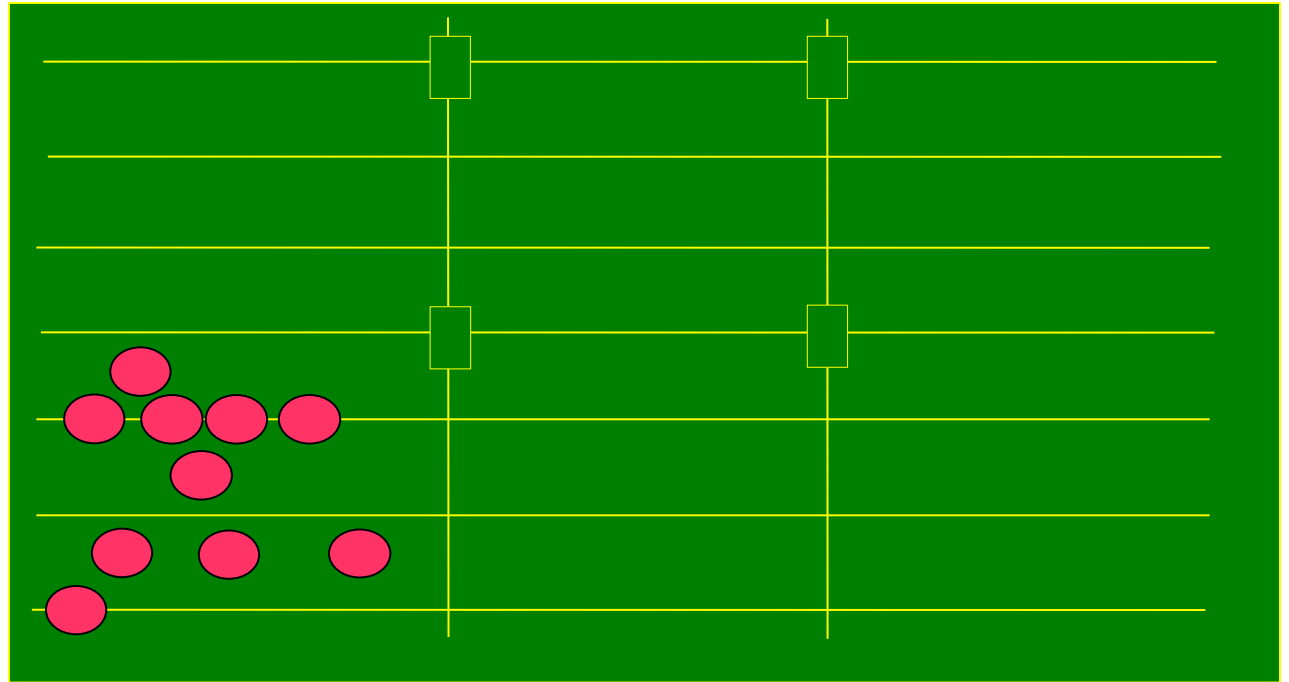


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +  
trecentocinquantesette

DCIX  
CCCDVII

D  
C  
L  
X  
V  
I



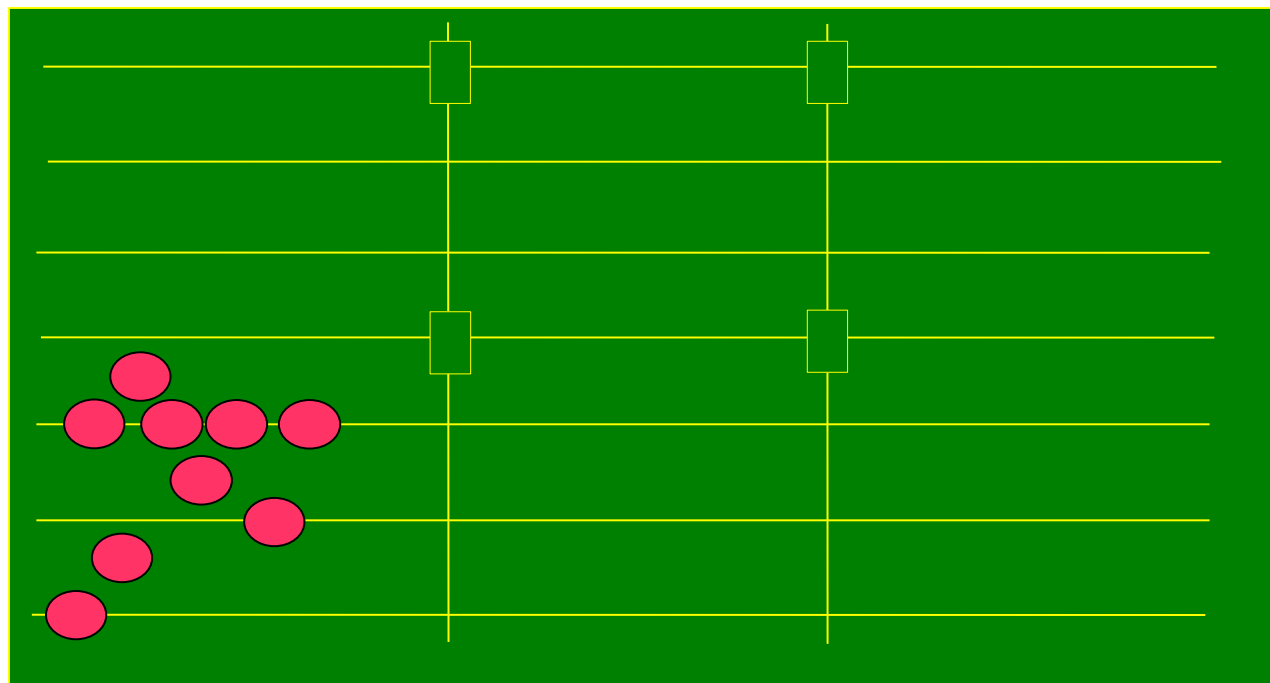


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +  
trecentocinquantesette

DCIX  
CCCDVII

D  
C  
L  
X  
V  
I



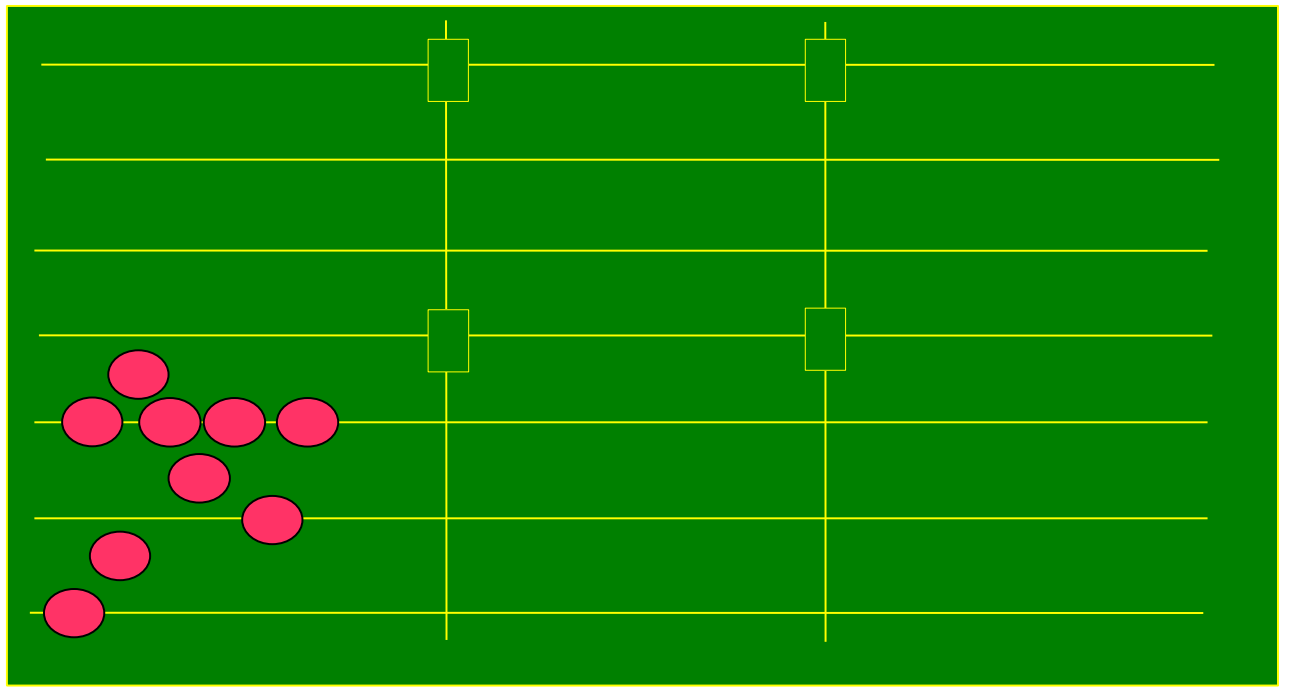
- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +  
trecentocinquasette

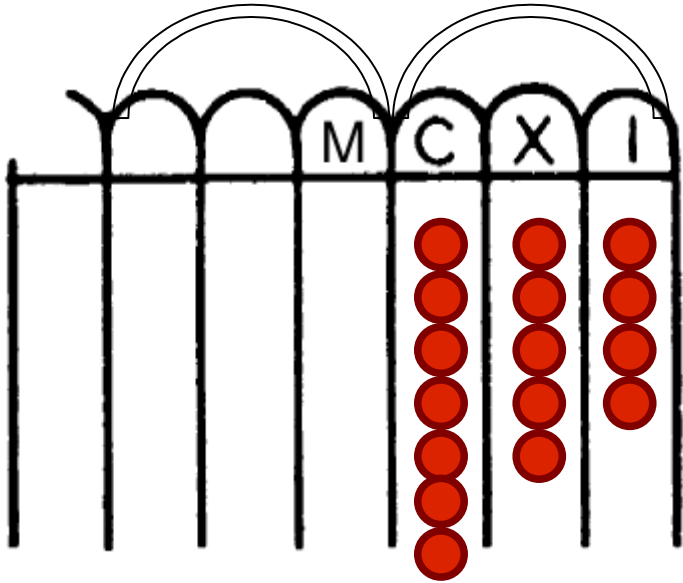
novescentosessantasei

DCCCCLXVI

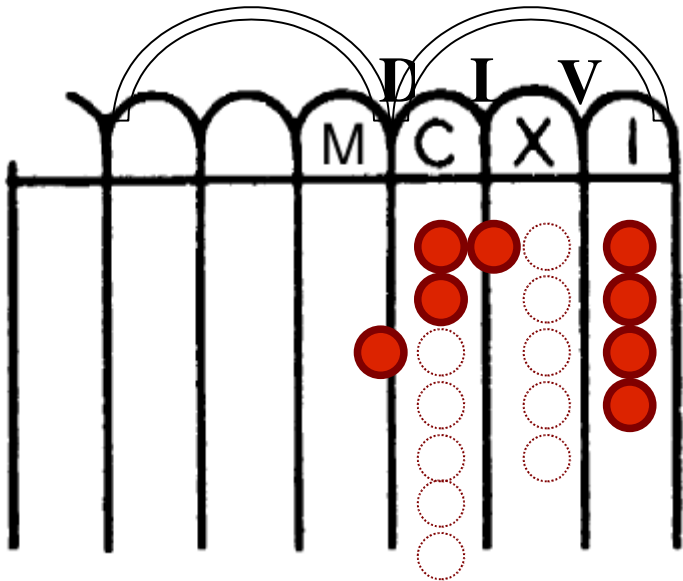
D  
C  
L  
X  
V  
I



- **L'ABACO a colonne**

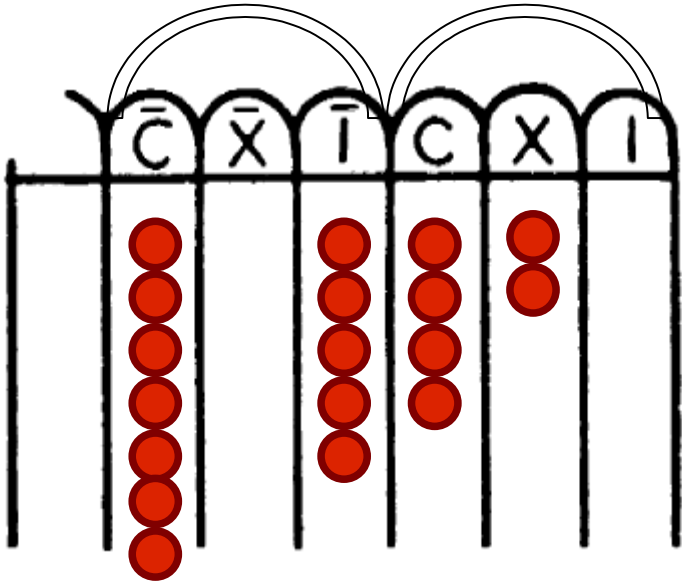


754

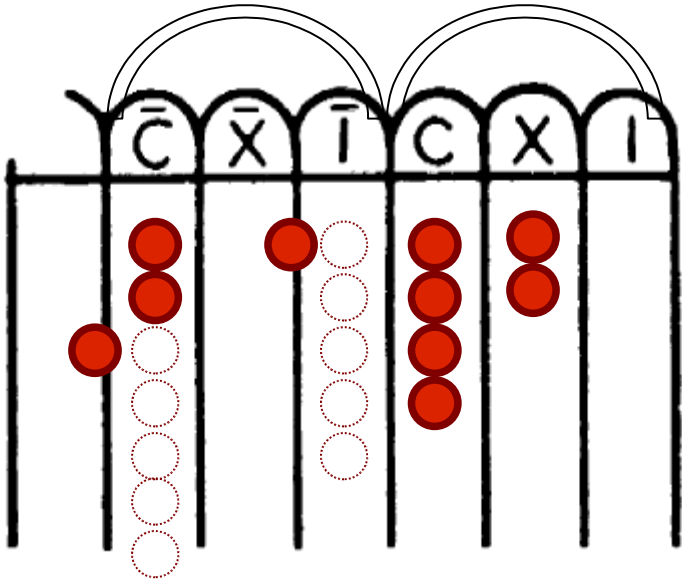


**DCCLIII**

- L'ABACO a colonne

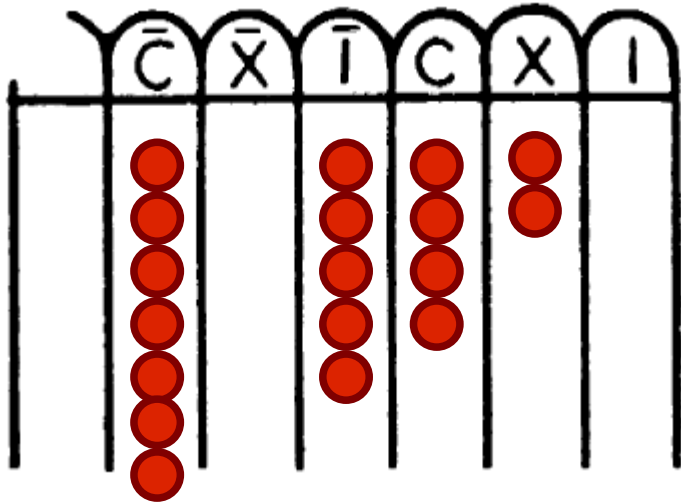


705420



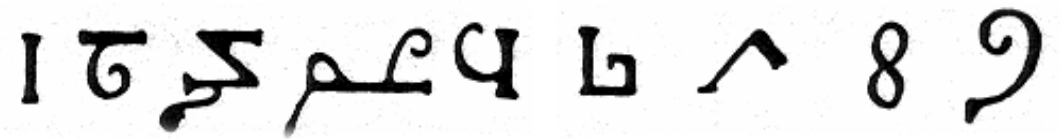
# • L'ABACO di Gerberto

705420

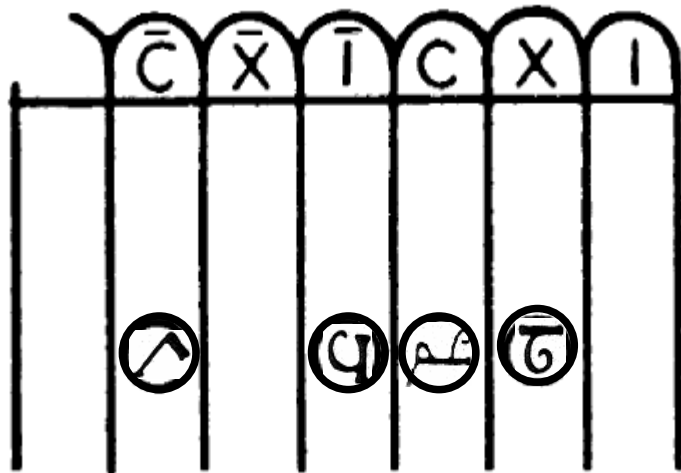


Gerbert d'Aurillac  
 direttore scuola diocesana di Reims  
 (972-987) (viaggi in Spagna)  
 arcivescovo di Reims e Ravenna  
 papa Silvestro II (999-1003)

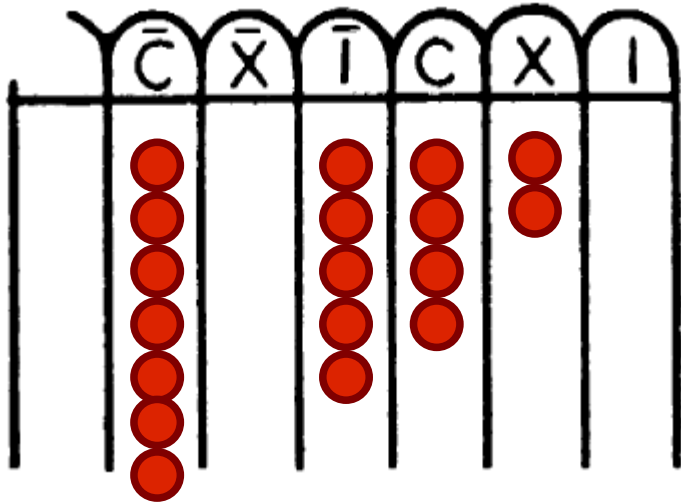
apici



1	2	3	4	5	6	7	8	9
igin	andra	arbas	quima	caltis	temenia	celenti		
	s	ormi	s	s	s	s		
		s						

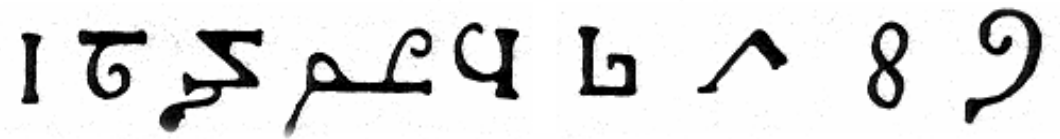


- **L'ABACO di Gerberto**

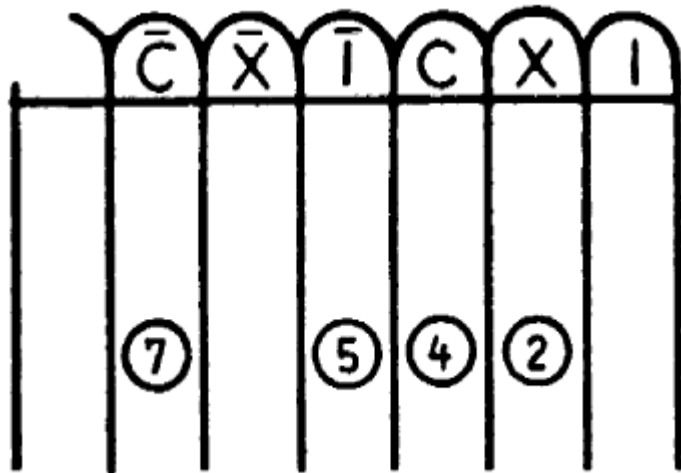


Gerbert d'Aurillac  
 direttore scuola diocesana di Reims  
 (972-987) (viaggi in Spagna)  
 arcivescovo di Reims e Ravenna  
 papa Silvestro II (999-1003)

apici



1	2	3	4	5	6	7	8	9
igin	andra	arbas	quima	caltis	zenis	temenia	celenti	
	s	ormi	s		s	s	s	
		s						

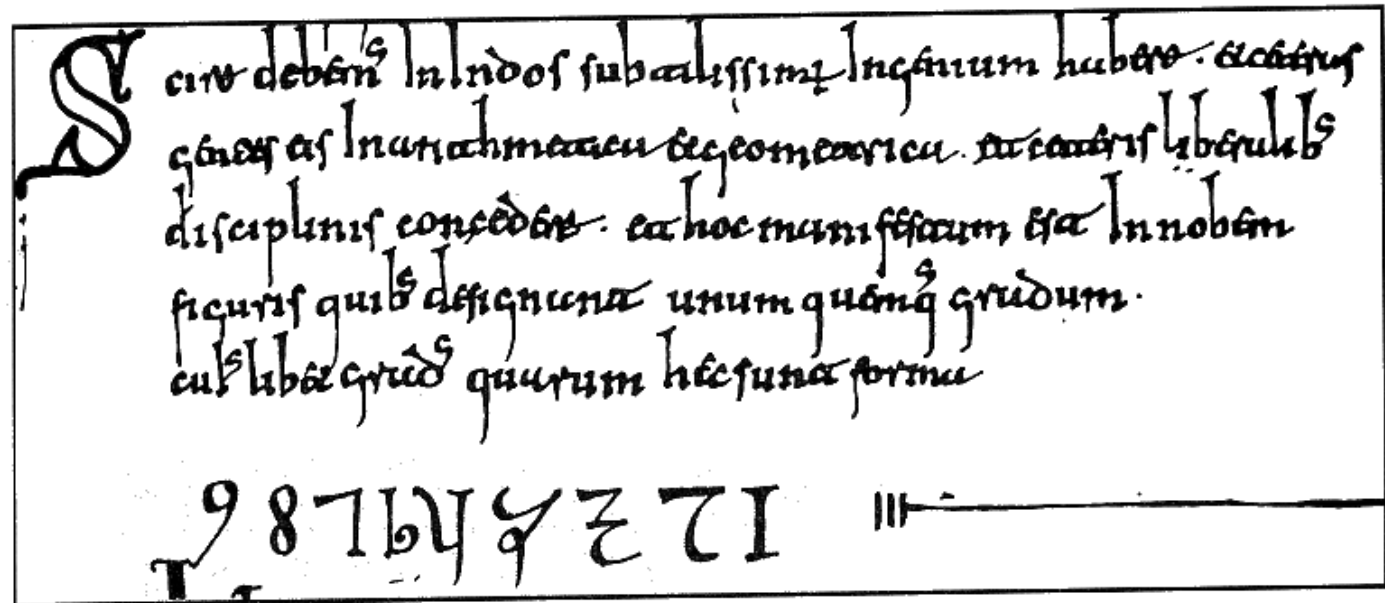




# • Le cifre indo-arabiche

codex vigilanus (976) Spagna del nord

*redatto da un monaco di nome  
Vigila nel 976 nel convento di  
Albelda nel nord della  
Spagna, a commento del terzo  
Libro delle Origini di Isidoro  
di Siviglia*



Scire debemus Indos subtilissimum ingenium habere et ceteras gentes eis in arithmetica et geometrica et ceteris liberalibus disciplinis concedere. Et hoc manifestum est in novem figuris, quibus designant unumquemque gradum cuiuslibet gradus quarum hec sunt forma

cifre arabe occidentali

1 2 3 4 5 6 7 8 9

IL LIBER ABACI



IL

# LIBER ABBACI

DI

# LEONARDO PISANO

PUBBLICATO

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE MAGLIABECHIANO

C. I, 2016, *Badia Fiorentina*, n.° 73.

DA

**BALDASSARRE BONCOMPAGNI**

SOGRO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI, E SOGRO  
CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO,  
DELLI REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,  
E DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA

1066

1857

- *Il Liber abaci*: introduzione



Mio padre, che risiedeva a Bugia quale pubblico notaio per i mercanti pisani, mi prese fanciullo con sé, e considerata la futura utilità e comodità volle che andassi per alcuni giorni a studiare l'abaco. Introdotto così nell'arte delle nove cifre degli Indiani, questa scienza mi piacque tanto, che con molti studi e dispute imparai tutto quanto si studiava di essa in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza, nei luoghi di commercio dove andai in seguito



# ● Il Liber abaci: inizio

*Explicit prologus. Incipiunt capitula.*

De cognitione nouem figurarum yndorum, et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri, et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abaci.

1

De multiplicatione integrorum numerorum.

4

De additione ipsorum ad inuicem.

8 | (\*)

De extractione minorum numerorum ex maioribus.

De diuisione integrarum (sic) numerorum per integros.

De multiplicatione integrarum (sic) numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis.

De additione ac extractione et diuisione numerorum integrarum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partibus reductione.

De emptione et venditione rerum uenaliu et similium.

De baractis rerum uenaliu et de emptione bolsonalie, et quibusdam regulis similibus.

De societatibus factis inter consocios.

De consolamine monetarum atque eorum regulis, que ad consolamen pertinent.

De solutionibus multarum positarum questionum quas erraticas appellamus.

De regula elcataym qualiter per ipsam fere omnes erratice questiones soluantur.

De reperiendis radicibus quadratis et cubitis ex multiplicatione et diuisione seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum.

De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et almuchabale.

*Incipit primum capitulum.*

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cum his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephyrum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur. Nam numerus est unitatum per-fusa collectio siue coagregatio unitatum, que per suos in infinitum ascendit gradus. Ex quibus primus ex unitatibus, que sunt ab uno usque in decem, constat. Secundus ex decenis, que sunt a decem usque in centum, fit. Tertius fit ex centenis que sunt a centum usque in mille. Quartus fit ex millenis que sunt a mille usque in decem milia, et sic sequentium graduum in infinitum, quilibet ex decuplo sui antecedentis constat. Primus gradus in descriptione numerorum incipit a dextera. Secundus uero uersus sinistram sequitur primum. Tertius secundum sequitur. Quartus tertium, et quintus quartum, et semper sic uersus sinistram gradus gradum sequitur. Figura itaque que in primo reperitur gradu se ipsam representat, hoc est: si in primo gradu fuerit figura unitatis, unum representat; si binarii, duo; si ternarii, tria, et ita per ordinem que secuntur, usque si nouenarii: nouem figure quidem que in secundo gradu fuerint, tot decenas representant, quot in primo unitates; hoc est si figura unitatis secundum occupat gradum, denotat decem; si binarij, uiginti; si ternarij, triginta; si nouenarij, nonaginta.

Figura namque que in tertio fuerit gradu, tot centenas denotat, quot in secundo decenas, uel in primo unitates, ut si figura unitatis centum; si binarij, ducenta; si ter-

narij, trecenta, et nouenarij, nongenta. Ipsa igitur que fuerit in quarto gradu tot mil-lenas quot in tertio centenas, aut in secundo decenas, uel in primo unitates denotat; et sic semper mutando gradum, numerus decuplando ascendit. Et ut hoc quod dictum est lucidius declarescat, ipsum cum figuris ostendatur. Si figura septenarij fuerit in primo gradu, et ternarij in secundo, ambe insimul 37 denotant; uel econtra: figura ternarij in primo, et septenarij in secundo, 73 denotabunt. Item si figura quaternarij fuerit in primo, et unitatis in secundo sic 14, nimirum .XIII. denotabunt: uel si figura unitatis fuerit in primo, et quaternarij in secundo sic 41, denotabunt .XLI. Rursus in primo 73, et in secundo faciunt 27; contrarium enim facit 72. Si autem septuaginta tantum scribere uoluerit, ponat in primo gradu 0, et post ipsum ponat figuram septenarii, sic 70; si octua-ginta sequatur zephyrum figuram octonarij sic 80: hac itaque demonstratione quemlibet numerum a decem usque in centum cum duabus figuris scribere potes. Cum tribus uero a centum scribitur usque in mille; ut si figura octonarii fuerit in primo, et qui-narii in secundo, et unitatis in tertio 188, centum quinquaginta octo denotabunt; et econuerso: si figura unitatis fuerit in primo, et quinarii in secundo, et octonarii in tertio 881, octigenta et quinquaginta unum denotabunt; uel econtra: si figura octo-narii fuerit in primo, et unitatis in secundo, et quinarii in tertio, denotabunt 518. Item si permutatim figura quinarii fuerit in primo, octonarii in secundo, et unitatis in tertio, denotabunt 185. Item si figura unitatis fuerit in primo, octonarii in secundo, et quinarii in tertio, nimirum denotabunt 581: tres uero unitates sic 111, centum undecim faciunt. Verum si quinquaginta tantum scribere uolueris, in primo et in secundo gradu ponas zephyra, et in tertio figuram quinarii hoc modo 500; et sic cum duobus zephyris quemlibet centenariorum numerum scribere poteris. Et si centenaria cum de-cenis siue unitatibus scribere uolueris, ponas in primo gradu zephyrum; in secundo de-cenas, et in tertio centenas quas uolueris. Verbi gratia: si in primo gradu fiat zephyrum, et in secundo figura nouenarii, et in tertio binarii, denotabunt 200. Si autem absque de-cenis centenaria cum unitatibus scribere uolueris, pones in secundo gradu, scilicet in loco decenarii zephyrum, et in primo numerum unitatum quem uoluerit, et in tertio centenariorum: ut si in primo fuerit figura nouenarii, et in secundo zephyrum, et in tertio binarii 209; et sic secundum supradictam demonstrationem qualem uolueris, numerus a centum usque in mille scribes cum tribus figuris. Cum quattuor namque a mille usque in decem milia, ut in sequenti cum figuris numeris super notatis ostenditur.

M . I	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMNDC	MMM MCCI	MCCXXXIII	MMMMCCCXXI
1001	2023	3022	3020	5600	30001111	1234	4321

Et sic in reliquis numeris est procedendum. Cum quinque namque figuris scribuntur omnes numeri, incipiendo a decem milia usque ad centum milia. Cum sex uero, a cen-tum milibus usque in mille milia, et sic deinceps, addendo figuram figuris, numerus gradatim in decuplum ascendit. Vnde si contigerit quod aliquem numerum multarum figurarum propter multitudinem figurarum, quis legere uel intelligere nequeat, quali-ter legere et intelligere ipsum debeat, ostendere procurabo.

(\*) Nei margini laterale esterno ed inferiore del recto della carta 1 del sopracitato codice Magliabechiano C. I. 2516. *Badia Fiorentina* n.° 73, presso alla linea 40 ed ultima del medesimo recto, trovasi scritto in due linee in carattere piu moderno del rimanente di questo recto: «Leonardi Pisani Algorismi Geometriae! Inter Codices designatur num: 44: ».

## ● *Il Liber abaci: capitoli*

1. La conoscenza delle nove cifre indiane, e come con esse si scrivano tutti i numeri; quali numeri si possano tenere nelle mani e come, e l'introduzione all'abaco.
2. La moltiplicazione degli interi.
3. L'addizione degli stessi.
4. La sottrazione dei numeri minori dai maggiori.
5. La divisione di numeri interi per numeri interi.
6. La moltiplicazione degli interi con le frazioni, e delle frazioni senza interi.
7. La somma, la sottrazione e la divisione degli interi con le frazioni e la riduzione delle parti di numeri in parti singole.
8. L'acquisto e la vendita delle merci e simili.
9. I baratti delle merci, l'acquisto delle monete, e alcune regole simili.
10. Le società fatte tra consoci.
11. La fusione delle monete e le regole relative.
12. La soluzione di questioni diverse, dette miscellanee.
13. La regola della doppia falsa posizione, e come con essa si risolvano pressoché tutte le questioni miscellanee.
14. Il calcolo delle radici quadrate e cubiche per moltiplicazione e divisione o da estrazione, e il trattato dei binomi e recisi e delle loro radici.
15. Le regole delle proporzioni geometriche; e le questioni di algebra e almucabala

## ● *Il Liber abaci: capitoli*

1. De cognitione novem figurarum yndorum, et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abbaci.
2. De multiplicatione integrorum numerorum.
3. De additione ipsorum ad invicem.
4. De extractione minorum numerorum ex maioribus.
5. De divisione integrorum numerorum per integros.
6. De multiplicatione integrorum numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis.
7. De additione ac extractione et divisione numerorum integrorum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partibus reductione.
8. De emptione et venditione rerum venalium et similium.
9. De baractis rerum venalium et de emptione bolsonalie, et quibusdam regulis similibus.
10. De societatibus factis inter consocios.
11. De consolamine monetarum atque eorum regulis, quae ad consolamine pertineant.
12. De solutionibus multarum positarum quaestionum quas erraticas appellamus.
13. De regula elcataym qualiter per ipsam fere omnes erraticae quaestiones solvantur.
14. De reperiendis radicibus quadratis et cubicis ex multiplicatione et divisione seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum.
15. De regulis proportionibus geometriae pertinentibus: de quaestionibus aliebrae et almuchabalae.



# • I numeri indiani

*Incipit primum capitulum.*

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cum his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.

Le nove cifre degli indi sono queste

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Con queste nove cifre e con questo segno 0, che in arabo si chiama “zefiro”, si scrive qualunque numero, come di seguito si mostra.



— = ≡ ≠ √ √ √ √ √

Brahmi



၁ ၂ ၃ ၄ ၅ ၆ ၇ ၈ ၉ ၀

Indiano (Gwalior)



१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

Sanscrito-Devanagari



١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

Arabo Occidentale (Gobar)

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۰

Arabo Orientale

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

XI sec. (Apici)

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

XV sec.

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

XVI sec. (Durer)

# • Sistemi di numerazione

## 12

### LA NOTAZIONE POSIZIONALE



Operazioni aritmetiche in due tavole d'abaco

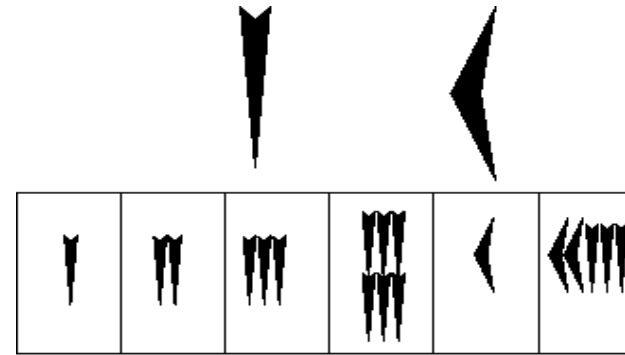
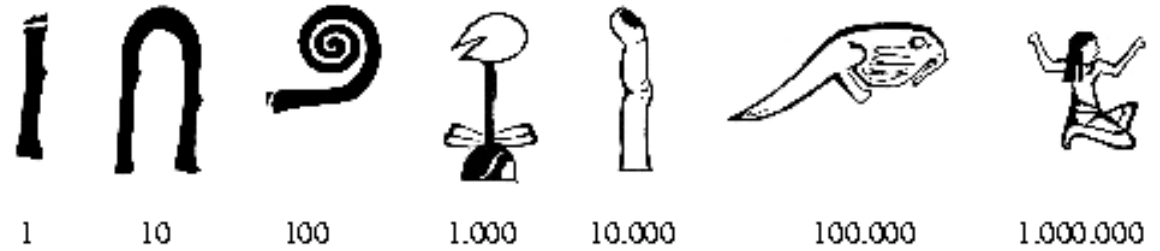
Uno dei contributi più importanti dell'India è costituito dalla diffusione delle cifre arabe e della notazione posizionale. Le antiche civiltà mesopotamiche avevano elaborato una serie di metodi per la scrittura dei numeri. Gli Egizi utilizzavano i geroglifici diversi per le unità, le decine, le centinaia, eccetera, ad esempio i Romani utilizzavano le unità con I, le decine con X, le centinaia con C, e quindi per indicare direttamente scrivavano CCXXI. I Greci e gli Ebrei usavano invece le lettere dell'alfabeto per i grandi numeri di scrittura, che si facevano per indicare dieci, settanta e, trenta e via, cento e via, diecimila e, e quindi diventavano una scrittura di più vicina a un sistema posizionale come iabilimenti, che avevano un valore assegnato fisso: i numeri da uno a 99 si scrivevano in una forma simile agli Egizi e ai Romani, mentre per i numeri maggiori utilizzavano un sistema posizionale per indicare 100, scrivendo un 5 seguito da 20, ma secondo le varie usanze. Tranne l'abaco, tutti questi sistemi incontravano molte difficoltà a esprimere numeri grandi.

Nella scrittura indiana, inventata dagli indiani e giunta in Cina, attraverso gli arabi, ogni numero vale a seconda della sua posizione, quello più a destra è il posto delle unità, poi procedendo verso sinistra vengono le decine, le centinaia, e così via. Nasce così la necessità di un segno, lo zero, per indicare che il posto corrispondente è vuoto nel numero. 200 si scrive due centinaia, nessuno decina e tre unità.

A	B	Γ	Δ	E	Ϛ	Z	H	Θ
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	Ϛ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω	Ϟ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϟ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

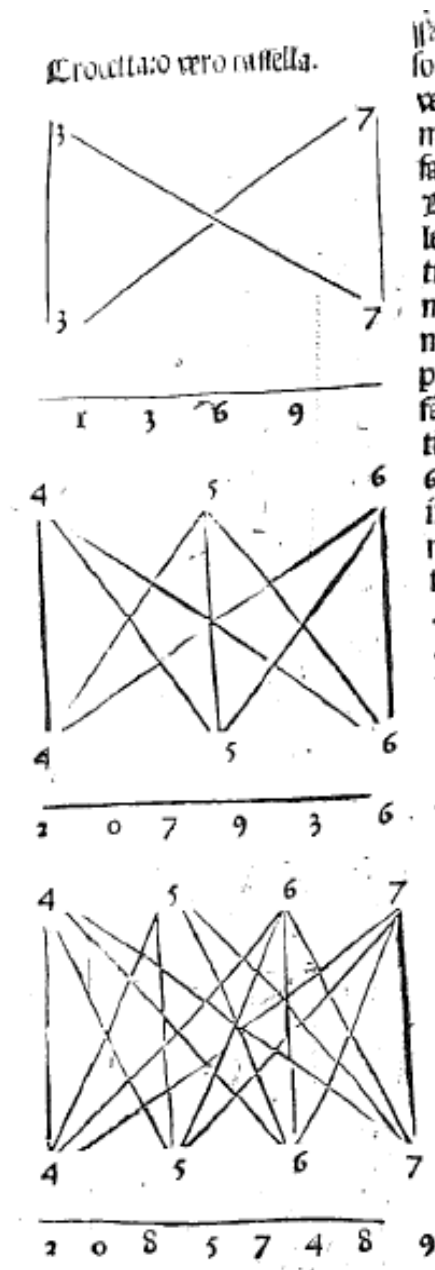
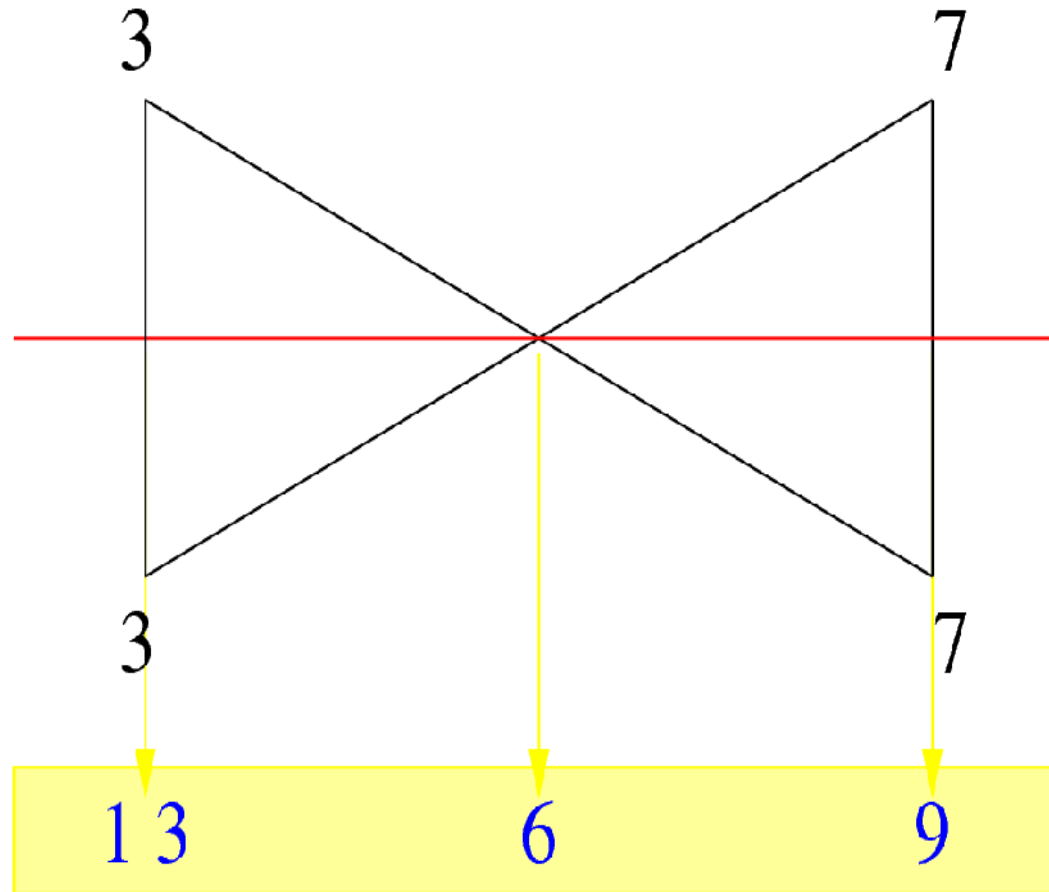
# • Le operazioni: moltiplicazioni – cap. 2

Ad cuius rei euidentiā sint equales numeri 345 et 345, quos insimul multiplicare oportet, qui collocentur ad inuicem sicuti in pagina collocati esse cernuntur; et multiplicet 5 per 5 erunt 25, ponat 5 super utrumque 5, sicuti in secunda descriptione cernitur, et pro decenis seruet in manu 2 et multiplicet 3 superioris numeri per 4 subterioris, et 5 inferioris per 4 superioris; quibus additis cum 2 seruatis, erunt 42: ponat 2 super utrumque 4, sicuti in tertia continetur descriptione, et seruentur pro quattuor decenis 4; et multiplicet 5 superioris per 3 subterioris et 5 inferioris per 3 superioris, et 4 per 4, et summa ipsarum trium multiplicationum addatur cum 4 in manu seruatis, erunt 50: ponat 0 super utrumque 3, ut in quarta descriptione ostenditur, et seruentur in manu 5, et multiplicet 4 superioris per 3 inferioris, et 4 inferioris per 3 superioris, et addantur cum 3, erunt 29: ponat 9 post 0, ut in quinta patet descriptione, et seruentur in manu 2, et multiplicet 3 per 3, erunt 9, que addat cum 2, erunt 11, que ponat, ut in sexta et ultima descriptione ostenditur. Que multiplicatio si recta est, per supradictum modum cognoscitur, uidelicet ut addantur figure de 345 superioribus, et dematur inde 9, remanebunt 3; similiter fiat de 345 inferioribus et remanebunt similiter 3; et multiplicentur 3 per 3, de quibus dematur 9, remanet 0 quod habeat pro pensa, tunc colligantur figure que sunt in summa multiplicationis, scilicet 1 et 1 et 2 et 5, erunt 9, de quibus trahantur 9, remanet 0 ut oportet. Assignabo quidem quare multiplicatio secunde figure per secundam additur cum multiplicatione primarum figurarum, in tertiis; quia ut dictum est primus gradus quicumque multiplicat ipsum gradum, facit secundus gradus, quicumque multiplicat secundum gradum, facit post ipsum quem multiplicat. Et sic est primus gradus multiplicat tertium, tertium gradum facit. Et cum secundus multiplicat secundum, facit eundem, silicet tertium, qui est secundus post ipsum quem multiplicat. Ergo oportet cum multiplicatio secundi gradus per secundum

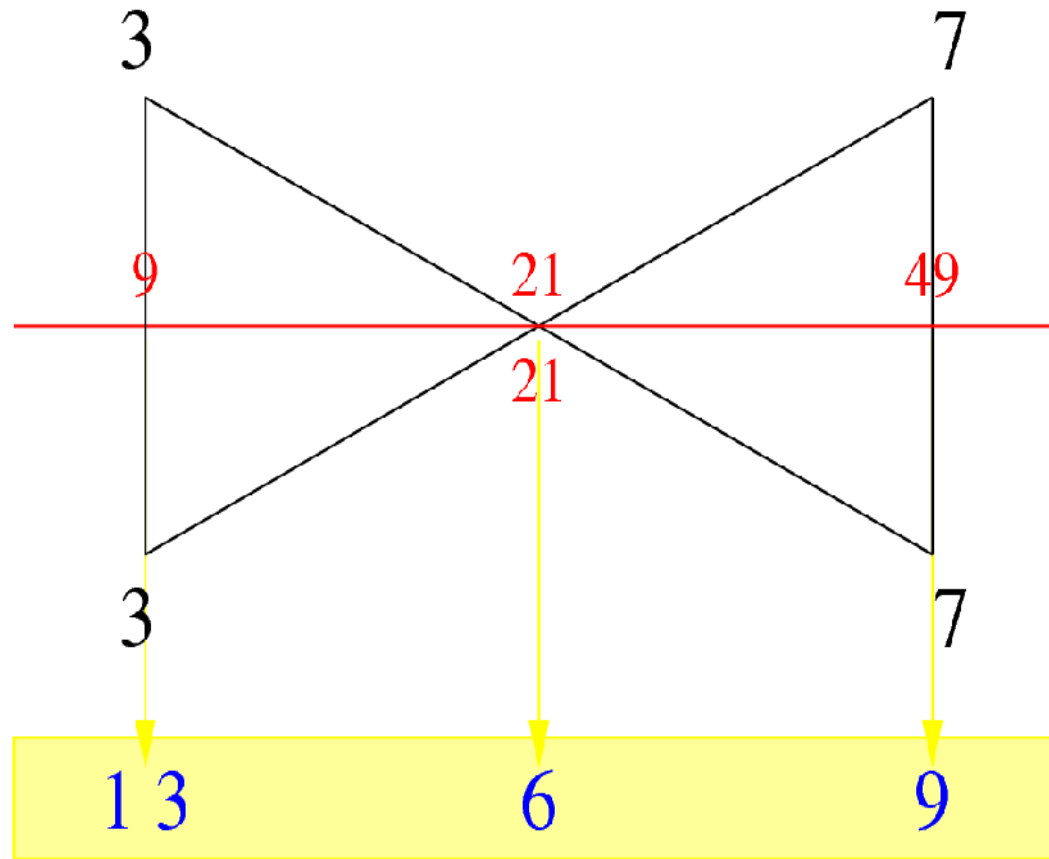
Ad cuius ... figurarum = (6  
6 recte, lin. 18-15; pag.  
lin. 20 — pag. 12, lin. 2).

prima	345
	345
secunda	5
	345
	345
tertia	25
	345
	345
quarta	025
	345
	345
quinta	9025
	345
	345
Ultima	119025
	345
	345

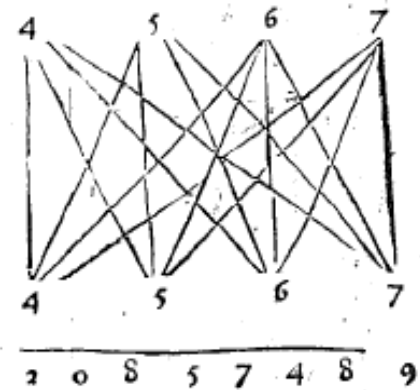
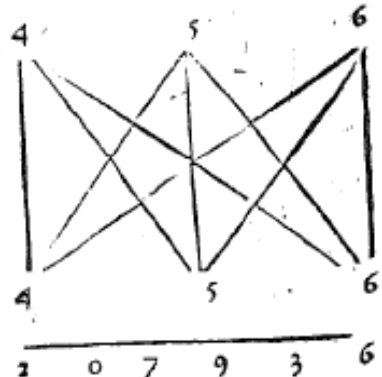
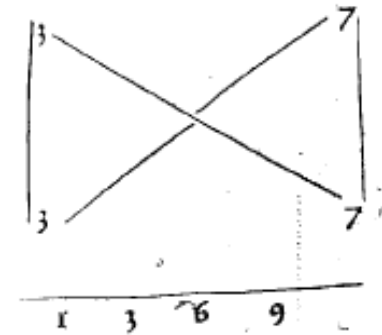
- Algoritmi per le moltiplicazioni – *crocetta*



- Algoritmi per le moltiplicazioni – *crocetta*

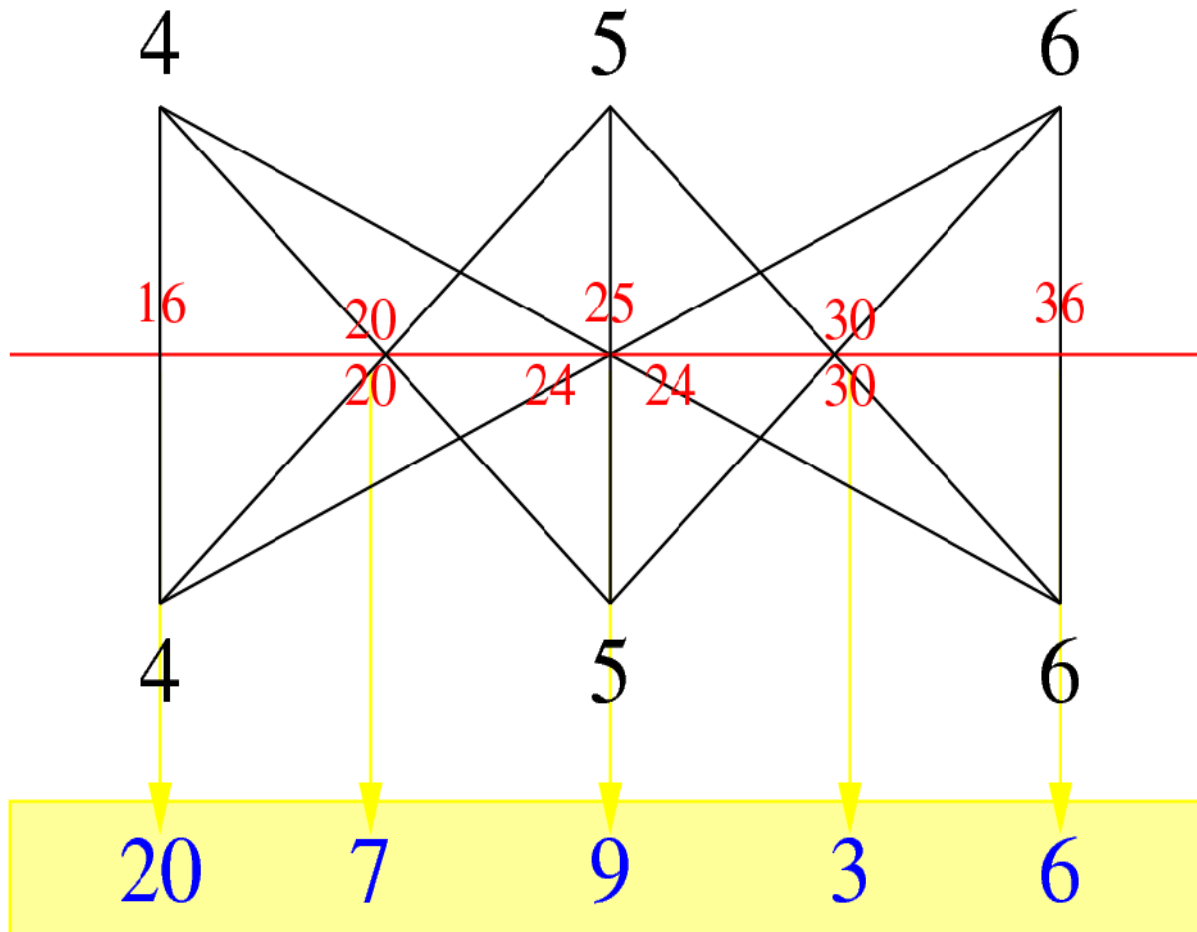


Crocetta vero raffella.

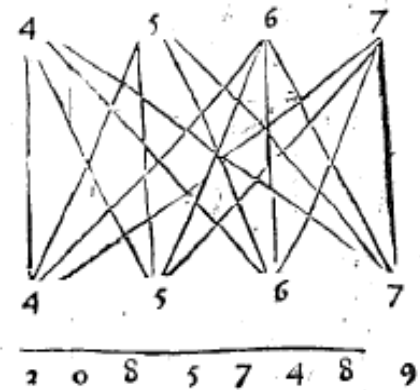
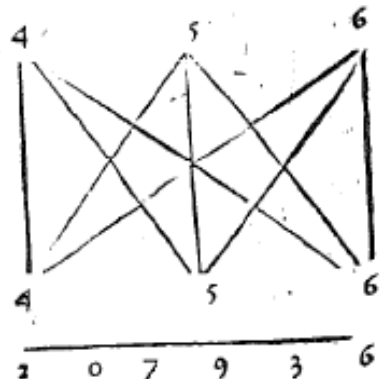
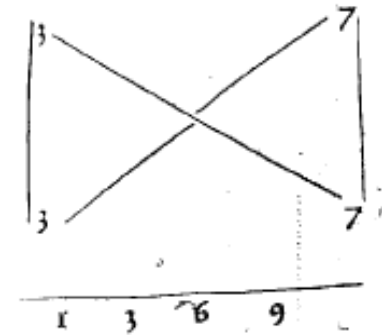


l'è  
 for  
 ve  
 m  
 fa  
 z  
 le  
 tip  
 m  
 m  
 po  
 fa  
 ti  
 6  
 in  
 ti  
 4  
 t  
 v  
 e  
 e

- Algoritmi per le moltiplicazioni – *crocetta*



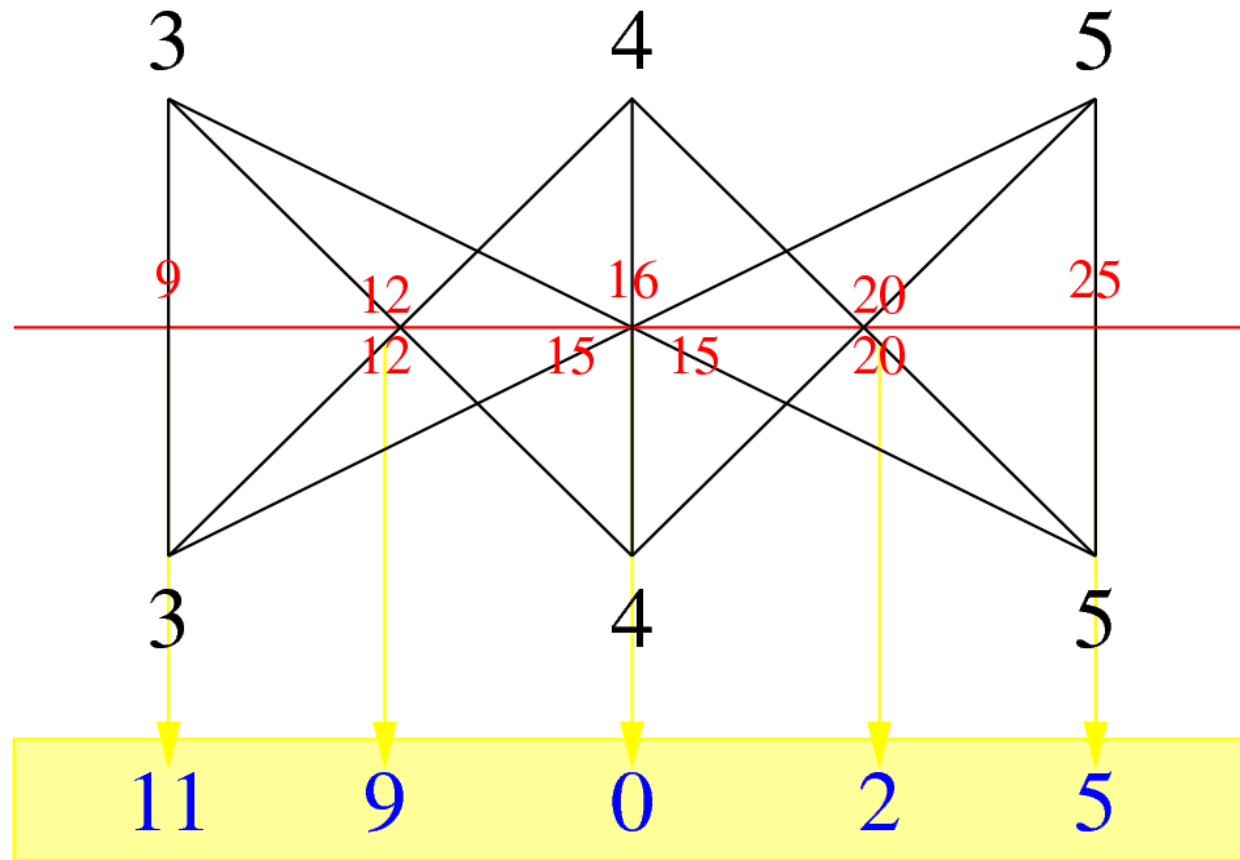
Crocetta vero raffella.



lib.  
for  
ve  
m  
fa  
2  
le  
ti  
m  
m  
po  
fa  
ti  
6  
in  
ti  
4  
t  
v  
e  
e



- Algoritmi per le moltiplicazioni – *crocetta*



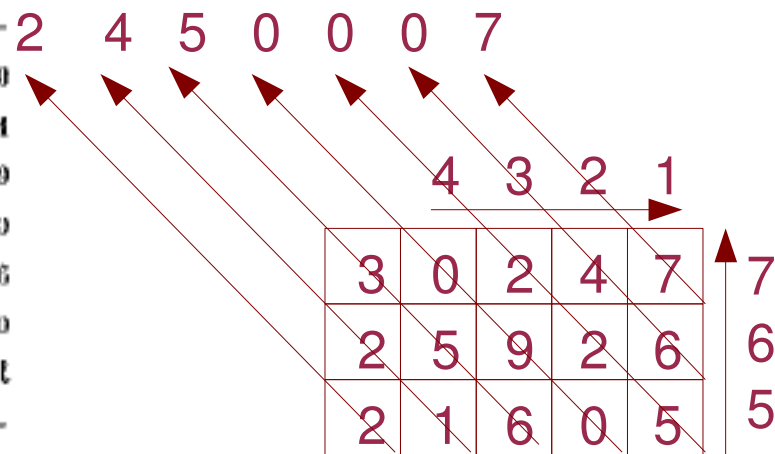
Ad cuius ... figurarum ... (6 recto, lin. 18-15 ; pag. lin. 20 — pag. 12, lin. 2).

prima	345	345
secunda	5	345
tertia	25	345
quarta	025	345
quinta	9025	345
Ultima	119025	345

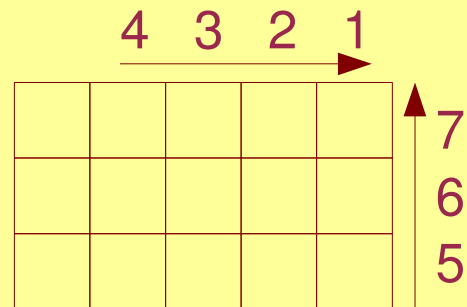
# • Algoritmi per le moltiplicazioni – *quadrilatero*

Est enim alius modus multiplicandi ualde laudabilis, maxime in multiplicandis magnis numeris, quem ostendam in multiplicatione de 567 in 4321. Constituatur quadrilaterum in forma scacherii, habens puncta 5 in longitudine, scilicet unum plus numero figurarum maioris numeri, et habeat in latitudine puncta 3, sicuti sunt tres figure in minori numero, et ponatur maior numerus super quadrilaterum supradictum, et minor ponatur ante ipsum, ut hic cernitur, et multiplicetur prima figura minoris numeri, scilicet 7, per 1, scilicet per primam maioris numeri facies 7, que ponantur in primo puncto superioris linee, scilicet sub ipso 1, et multiplicentur 7 per secundam figuram maioris numeri, scilicet per 2, erunt 14, ponantur 4 sub 2 post posita 7, scilicet in secundo puncto superioris linee, et seruetur 1, cum quo addatur multiplicatio eorundem 7 in 3, erunt 22, ponantur 2 in tertio puncto post 4 posita, et seruentur 2, cum quibus addatur multiplicatio de 7 in 4, scilicet in ultimam figuram maioris numeri erunt 30, ex quibus ponatur 0 in quarto puncto et 3 in quinto. Simili quoque modo multiplicabuntur 6 singulariter per 1 et per 2 et per 3 et per 4, exhibunt 6 in primo puncto secunde linee, et 2 in secundo, et 9 in tertio, et 5 in quarto, et 2 in quinto; quod idem fiat de quinque que sunt in ultimo gradu minoris numeri, et habebitur 5 in primo puncto tertie linee, et 0 in secundo, et 6 in tertio, et 1 in quarto, et 2 in quinto. Deinde pro 7 que posita sunt in primo puncto ponantur 7 super 1, et addantur 6 et 4 que sibi inuicem sunt opposita; post ipsa 7 erunt 10: ponatur 0 super 2 et seruetur 1, cum quo addatur 5 et 2 et 2 que item sibi inuicem sunt opposita: post predicta 6 et 4 erunt 10: ponatur iterum 0 super tertium gradum, scilicet super 3, et seruetur iterum 1 quod addatur cum 0 et 9 et 0 que item sibi inuicem sunt opposita: post dicta 5 et 2 et erunt 10: ponatur iterum 0 super 4, scilicet super ultimum gradum maioris numeri et seruetur iterum 1: quod addatur cum 6 et 5 et 3 que sunt in sequenti oppositione erunt 15: ponantur 5 in quinto gradu, et seruetur unum quod addatur cum .1. et .2. que sunt in sequenti oppositione, erunt 4 que ponantur in sexto gradu. Deinde ponantur 2 in septimo gradu pro 2 que sunt in angulo quadrati post dictam oppositionem de 1 et 2 et habebis predictam summam.

2 4 5 0 0 7					
4 3 2 1					
3	0	2	4	7	1 2 3
2	5	9	2	6	
2	1	6	0	5	

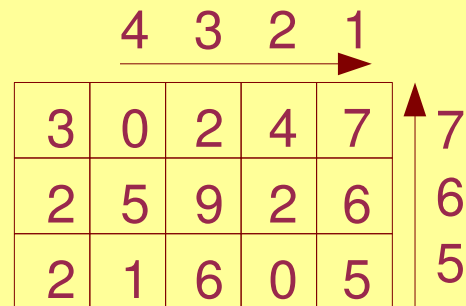


- Algoritmi per le moltiplicazioni – *quadrilatero*

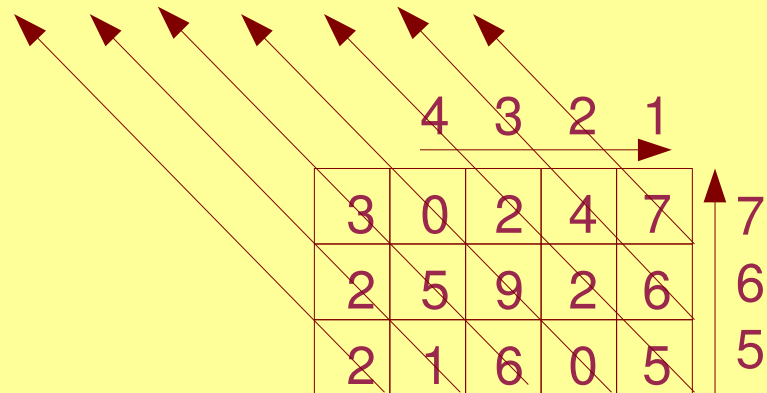


- Algoritmi per le moltiplicazioni – *quadrilatero*

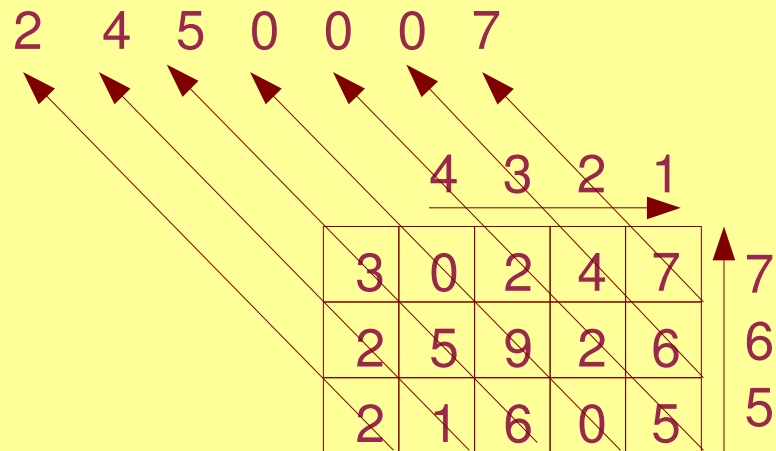
	4	3	2	1	
3	0	2	4	7	7
2	5	9	2	6	6
2	1	6	0	5	5



- Algoritmi per le moltiplicazioni – *quadrilatero*



- Algoritmi per le moltiplicazioni – *quadrilatero*

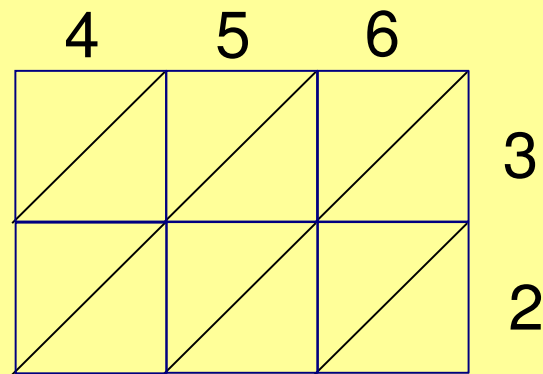


- Algoritmi per le moltiplicazioni – *gelosia*

	9	3	4	
2	2	0	1	
9	7	9	2	3
3	0	0	0	4
	9	3	4	
	3	1	1	
	6	2	6	4
	2	3	6	

Aritmetica di Treviso, 1478

- Algoritmi per le moltiplicazioni – *gelosia*

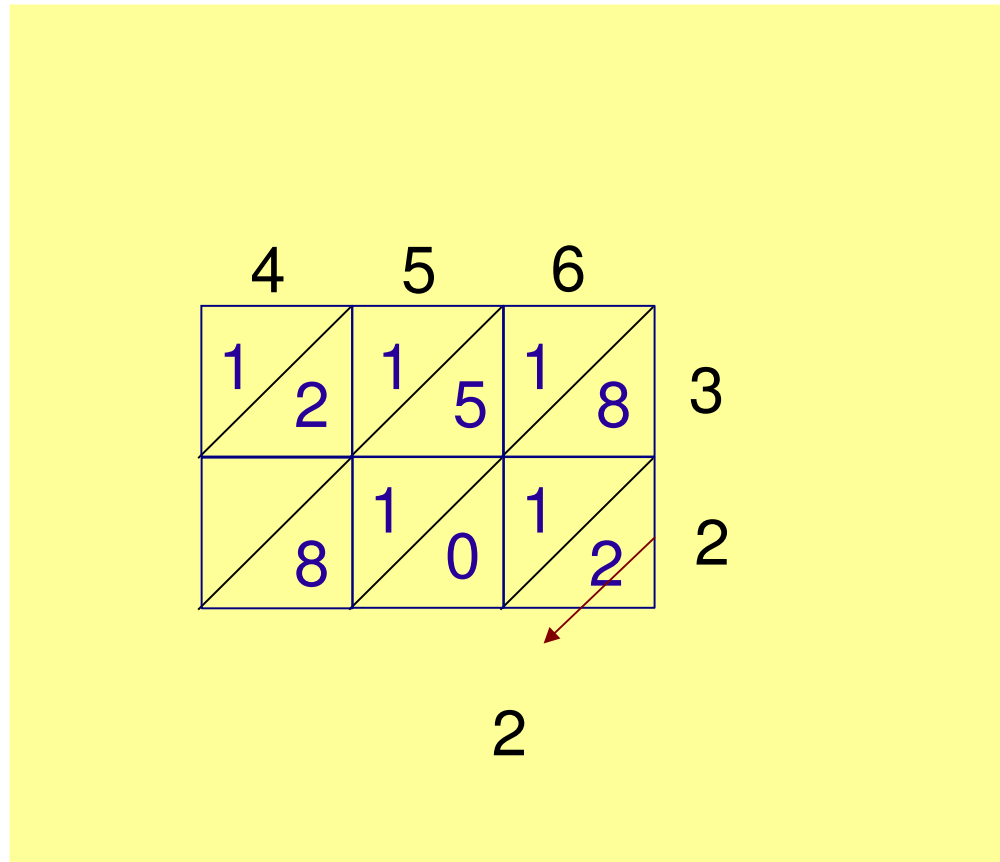




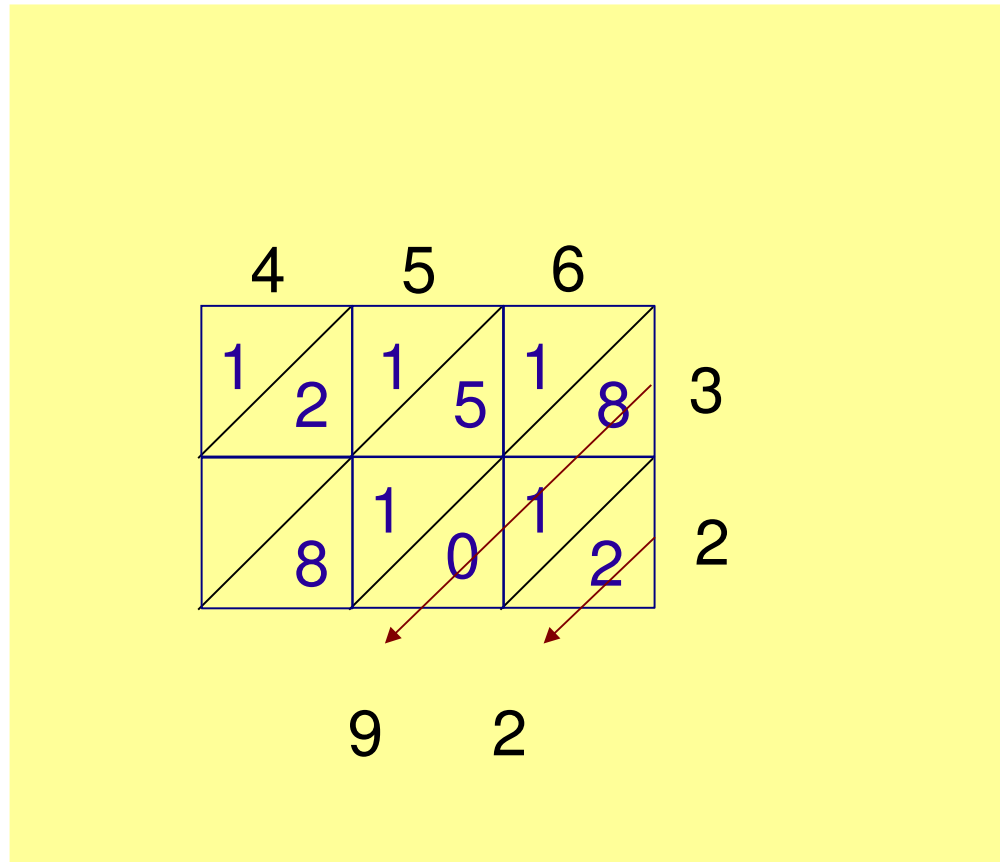
- Algoritmi per le moltiplicazioni – *gelosia*

	4	5	6	
3	1 2	1 5	1 8	
2	8	1 0	1 2	

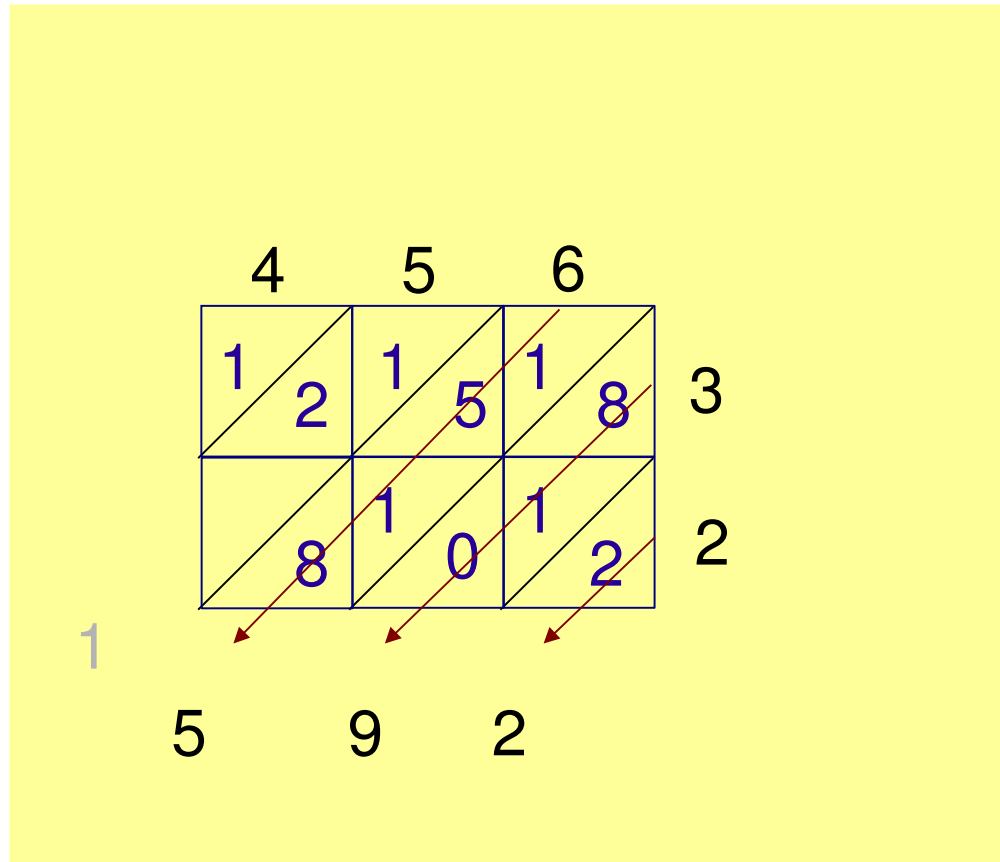
- Algoritmi per le moltiplicazioni – *gelosia*



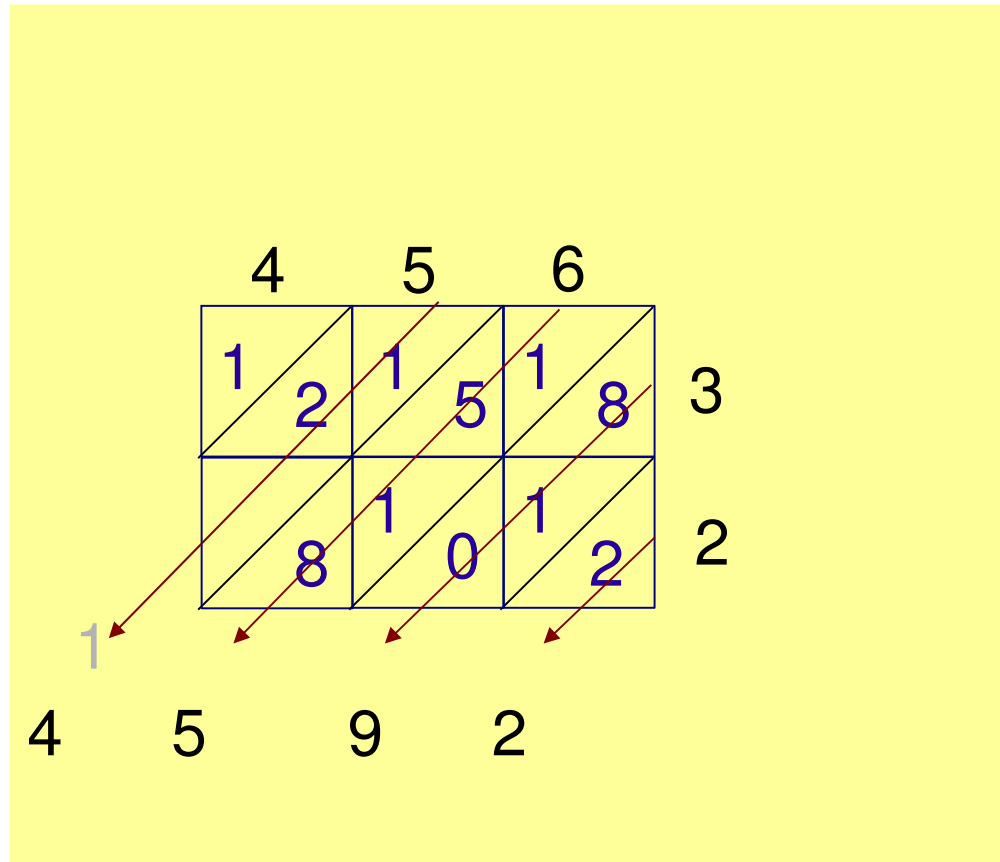
- Algoritmi per le moltiplicazioni – *gelosia*



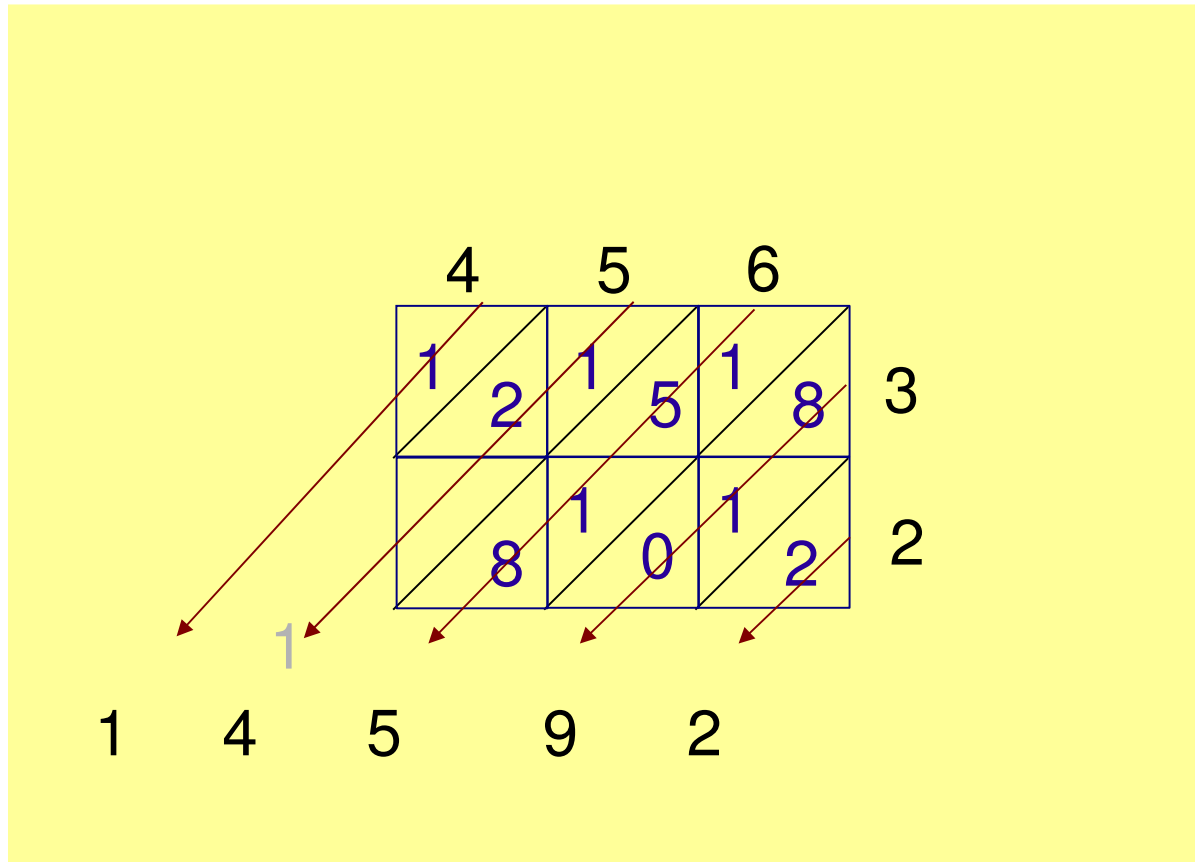
- Algoritmi per le moltiplicazioni – *gelosia*



- Algoritmi per le moltiplicazioni – *gelosia*



- Algoritmi per le moltiplicazioni – *gelosia*



- **Addizione - *summa***

*Incipit capitulum tertium de additione integrorum numerorum.*

Cum autem quoslibet numeros et quotcumque quis addere uoluerit, collocet eos in tabula, secundum quod in multiplicationibus numerorum prediximus, hoc est primum gradum cunctorum numerorum quos addere uoluerit sub primo ipsius qui ante in iunctionem positus fuerit. Et secundum sub secundo, et deinceps qui sequatur. Et tunc incipiat in manibus colligere numeros figurarum que in primis gradibus cunctorum numerorum que in iunctionem positi fuerint, ab inferiori numero usque ad superiorem, ascendendo: ponat itaque unitates super primum gradum numerorum et decenas in manu reseruet, quibus decenis superaddat numeros qui in secundis gradibus extiterint, et ponat unitates super secundum gradum, et iterum decenas reseruet. Cum quibus collectionem tertii gradus numerorum super addat, et sic ponendo unitates, et decenas reseruando,

gradatim numeros colligendo, potest collectionem cunctorum numerorum usque ad infinitum habere. Et ut melius intelligatur iunctiones duorum numerorum et etiam tertij, nec non et plurium ostendantur.

tabula dealbata

- **Addizione - *summa***



summa

Ut si quesieris scire aditionem de 25 cum 49 colloce 49 sub 25 tamquam deberet eos ad inuicem multiplicare, et addat 9 cum 5, erunt 14: ponat 4 super primum gradum et pro decenis reseruet in manu 1 quod addat cum 4 et cum 2, erunt 7 que ponat, et sic habebuntur pro eorum collectione 74, ut hic ostenditur.

74
25
49

Item si uoluerit scire collectionem de 123 cum 4567, describat eos ut hic cerauntur; et addat 7 cum 3, erunt 10; ponat 0 et retineat 1 quod addat cum 6 et cum 2, erunt 9 que ponat. Item addat 5 cum 1 que sunt in tertio gradu, erunt 6 que ponat super eundem gradum, et per 4 que sunt in quarto gradu inferioris numeri, ponet 4 in quarto gradu exeuntis summe, cum non sit aliqua figura super ipsa in alio numero, scilicet in 123, et sic habebit pro eorum additione 4690.

4690
123
4567

Item si uoluerit addere 4321 cum 506789, descriptis eis ordine prescripto, addat 9 cum 1, erunt 10: ponet 0 et retineat 1 quod addat cum 8 et cum 2, erunt 11: ponet 1, retineat 1 quod addat cum 7 et cum 3, erunt 11. Iterum ponat 1 et retineat 1 quod addat cum

511110
4321
506789



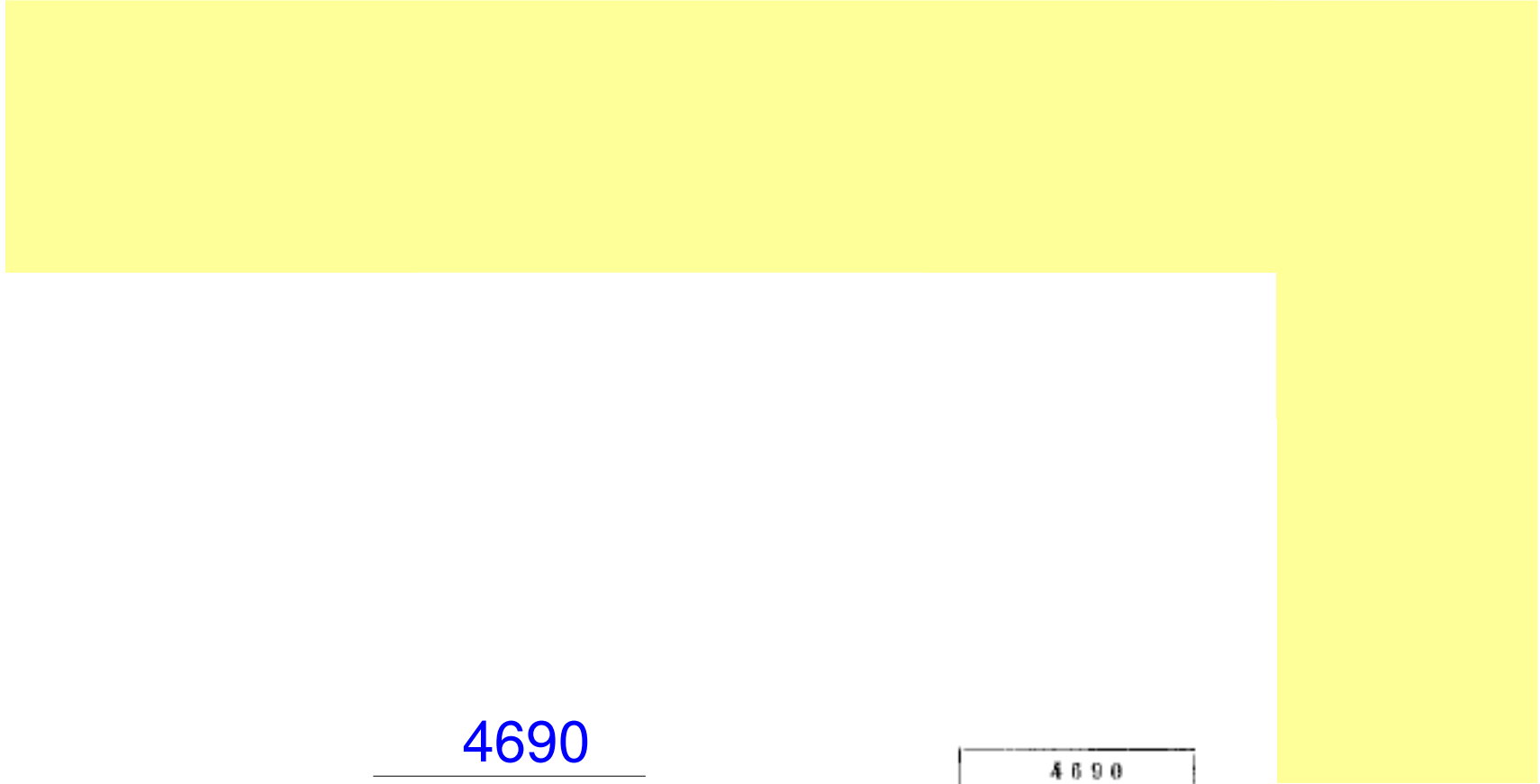
- Addizione - *summa*



123  
4567

4000
123
4567

- Addizione - *summa*



$$\begin{array}{r} 4690 \\ \hline 123 \\ 4567 \end{array}$$

4 6 9 0
1 2 3
4 5 6 7

- **Addizione - *summa***

lire denari soldi

1 lira = 20 soldi

1 soldo = 12 denari

4 migl. 6 cent. 9 dec. 0 unità

---

1 cent. 2 dec. 3 unità

4 migl. 5 cent. 6 dec. 7 unità

10 lire 13 soldi 5 denari

---

4 lire 8 soldi 6 denari

3 lire 13 soldi 7 denari

2 lire 11 soldi 4 denari

- Sottrazione – cap. 4

*De extractione minorum numerorum ex maioribus.*

46

---

85

39

## • LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

• Quod cantare si vendatur pro libris XL, et queratur quantum valeant rotuli 5.

◦ Se un cantare si vende per 40 lire, quanto valgono 5 rotoli?

Soluzione.

Secondo la regola del tre, scrivi su una stessa riga i 100 rotoli (cioè 1 cantare) e a sinistra il loro prezzo, cioè 40 lire; poi scrivi 5 rotoli sotto i 100 rotoli, poiché numeri dello stesso genere vanno uno sotto l'altro: rotoli sotto rotoli e lire sotto lire.

<i>l.</i>	<i>R.</i>
40	100
2	5

Moltiplica ora in diagonale i numeri che si trovano agli estremi, cioè 40 e 5, che fa 200. Dividi poi per 100. Viene 2 lire come prezzo di 5 rotoli.

1 cantare pisano = 100 rotuli

1 rotulo = 12 once

1 oncia = 39 denari di cantare e mezzo

1 denaro di cantare = 6 carrube

1 carruba = 4 grani di frumento

## • LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

• Item rotuli 100 per libras 40; quot rotulos habuero per libras 2.

◦ Se un cantare, cioè 100 rotoli, si vende per 40 lire, quanti rotoli avrò per 2 lire?

Soluzione.

Secondo la regola del tre, scrivi su una stessa riga i 100 rotoli e a sinistra il loro prezzo, cioè 40 lire; poi scrivi 5 rotoli sotto i 100 rotoli, poiché numeri dello stesso genere vanno uno sotto l'altro: rotoli sotto rotoli e lire sotto lire.

Moltiplica ora in diagonale i numeri che si trovano agli estremi, cioè 40 e 5, che fa 200. Dividi poi per 100. Viene 2 lire come prezzo di 5 rotoli.

<i>l.</i>	<i>R.</i>
40	100
2	5

1 cantare pisano = 100 rotuli

1 rotulo = 12 onces

1 oncia = 39 denari di cantare e mezzo

1 denaro di cantare = 6 carrube

1 carruba = 4 grani di frumento

## • LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

• Si canna pisana, que est brachia 4 cuiuslibet panni vendatur pro soldis 7 et queratur quantum valet brachium 1.

◦ Se una canna pisana, cioè 4 braccia, di una certa stoffa si vende per 7 soldi quanto costa 1 braccio?

soldi                      braccia

7                              4

?                              1

$$? = (7 \times 1) : 4 = \frac{7}{4} = \boxed{1 + \frac{3}{4}} \text{ soldi}$$

$$= 12 + 9 \text{ denari} = 21 \text{ denari}$$

1 canna pisana = 4 braccia

1 lira = 20 soldi

1 soldo = 12 denari

• De baractis mercium atque alium similium – Cap.9

REGOLA DEL TRE COMPOSTO

*Regula uniuersalis in baractis mercium primum de pipere ad linum.*

Cum autem uolueris quamlibet mercem cum qualibet alia merce cambiare, hoc est baractare, addiscas pretium uniuscuiusque mercis; quod pretium semper debet esse unius monete. Et describas illarum mercium unam in capite tabule, et pretium illius mercis scribas in tabula retro uersus sinistra in eadem lineatione, sicuti in negotiationibus in antecedenti capitulo describere docuimus. Deinde sub pretio illius mercis in aliam lineam describes pretium alterius mercis; et retro describes mercem illius pretii. Et si merces, quam aliam mercem baractare uolueris, fuerit ex superiori merce de prima uidelicet descripta in tabula, pones quantitatem illius mercis, quam habueris sub eadem merce. Et si fuerit ex alia merce, describere quantitatem illius super ipsam mercem, ut sicuti modo diximus describendum esse pretium unius mercis sub pretio alterius, ita describantur similes merces sub simili merce. Et descriptis itaque ipsis quinque numeris, tunc ultimum eorum per numerum pretii oppositis multiplica; et quot inde prouenerit, in alium numerum eidem pretio oppositum ducere studeas; quorum numerorum summam per reliquos duos numeros diuide, et habebis optatum. Verbi gratia brachia 20 panni ualeant libras 3 pisaninorum; et Rotuli 42 cotonis ualeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot Rotuli cotonis habebuntur. Pone itaque brachia 20 in tabula; post que pone libras 3, scilicet eorum pretium, sub quibus pone libras 5; post quas 5 pone Rotulos 42; deinde brachia 50 pone sub brachiis 20, et multiplica 50 per 3, que sunt eis ex aduerso, erunt 150; que multiplica per 42, cum sint ex aduerso eisdem tribus; et quot prouenerit diuide per reliquos numeros, scilicet per 20 et per 5, hoc est per 100, uenient 63; et tot Rotuli bombicis habebuntur pro brachiis 50 panni.

3. scilicet ... mercis ... (fol. 49 recta, lin. 49-54; pag. 118, ll. 34-42).





## • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

<u>rotuli</u>	<u>lire</u>	<u>braccia</u>
	3	20
42	5	

Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

# • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

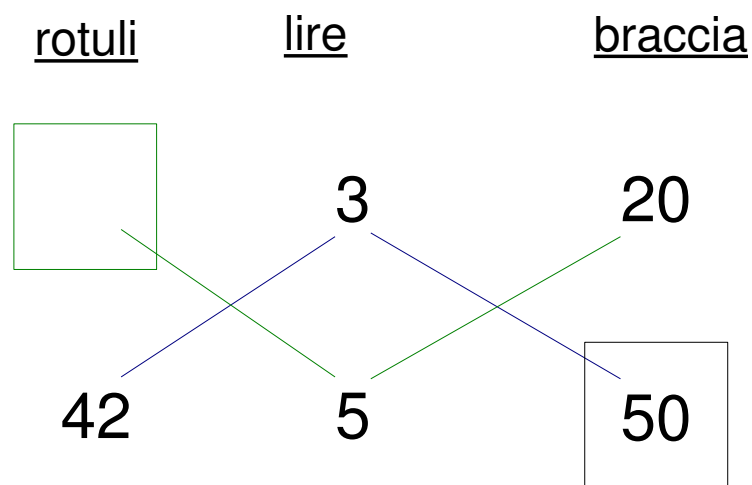
<u>rotuli</u>	<u>lire</u>	<u>braccia</u>
	3	20
42	5	50

Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

## • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

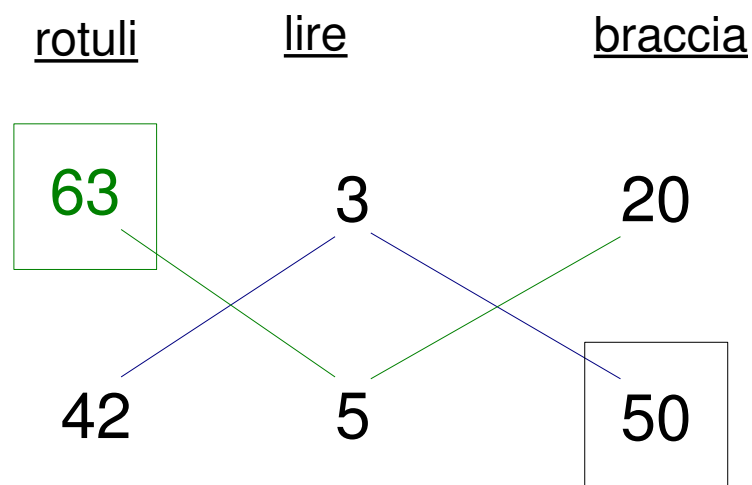


Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

## • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.



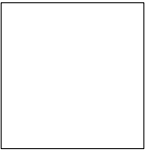
Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

rotuli

lire

braccia

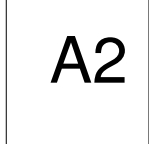


a1

A1

B1

b1

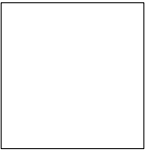


• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

merceB

lire

merceA

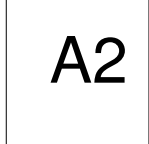


a1

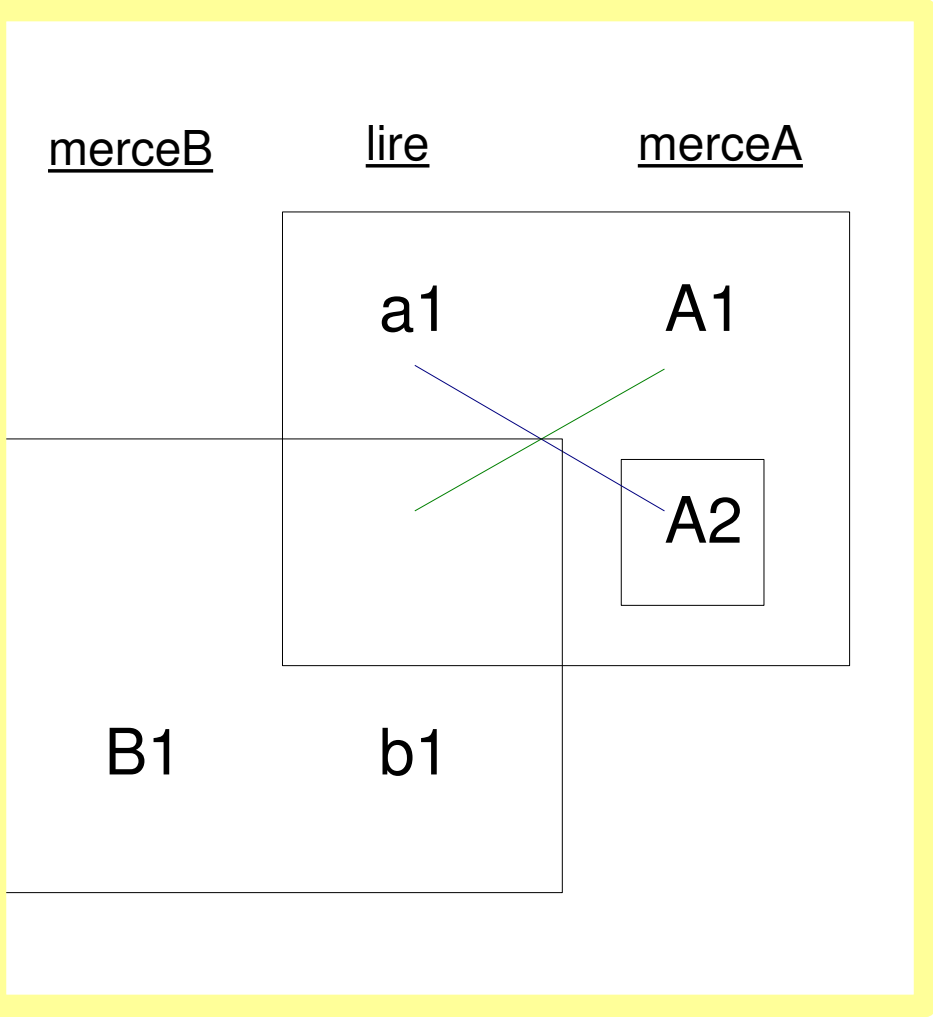
A1

B1

b1



• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

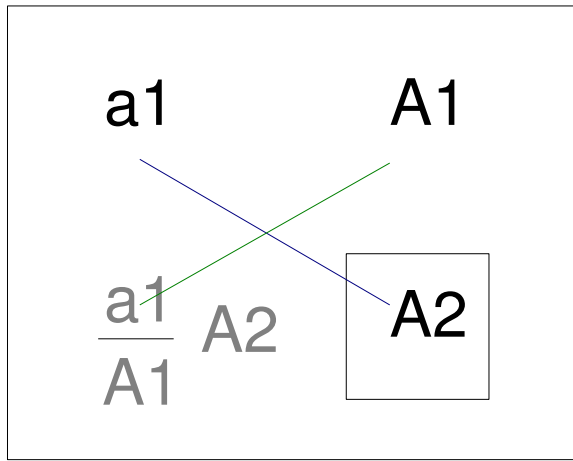


• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

merceB

lire

merceA



B1

b1



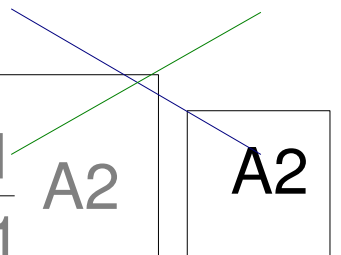
# • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

merceB      lire      merceA

a1      A1

$\frac{a1}{A1}$  A2      A2

B1      b1



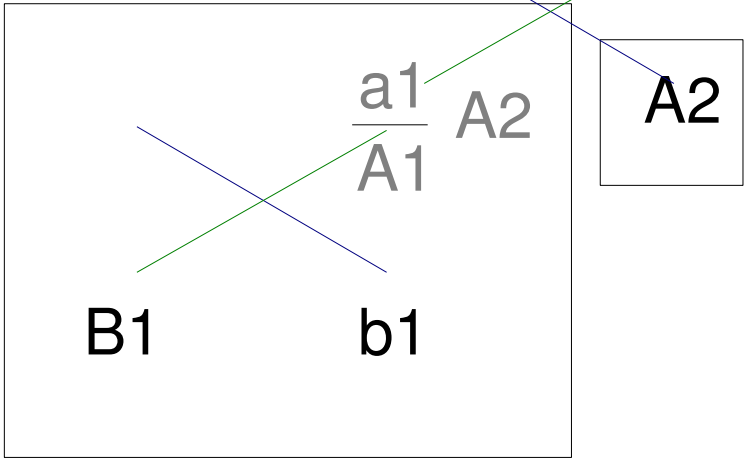
# • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

merceB      lire      merceA

a1      A1

$\frac{a1}{A1}$  A2      A2

B1      b1



# • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

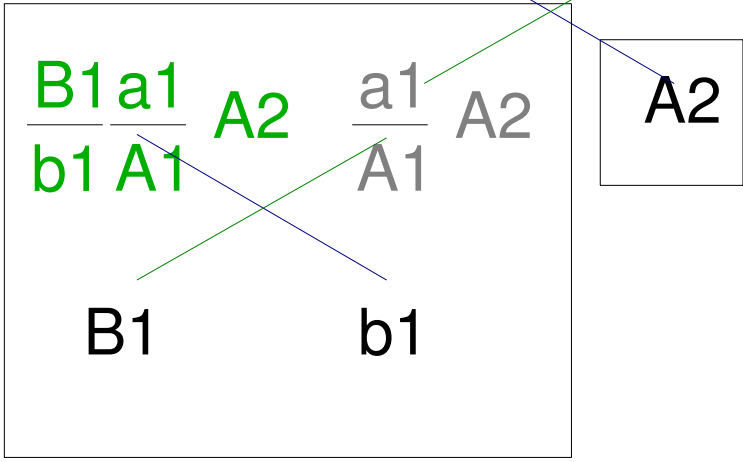
merceB

lire

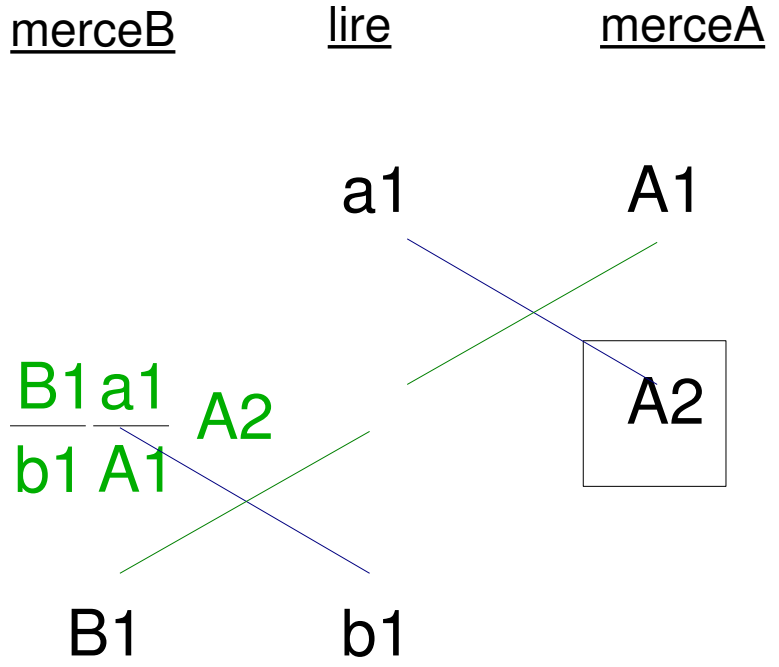
merceA

a1

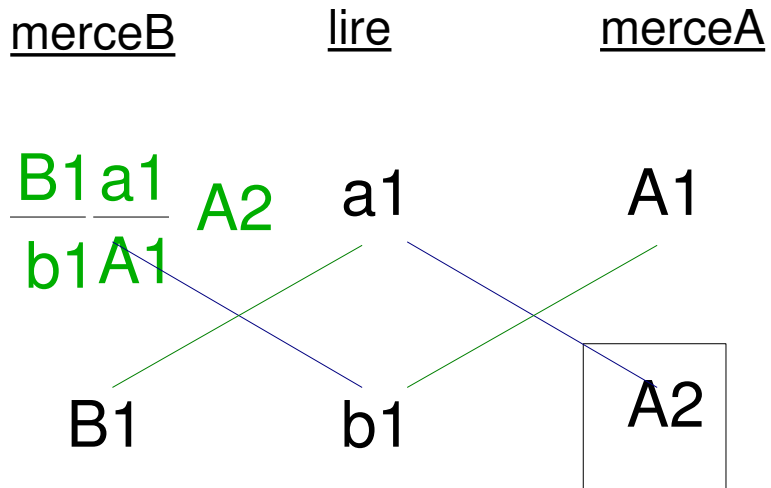
A1



# • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9



# LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9



$$\frac{B2}{A2} = \frac{\frac{a1}{A1}}{\frac{b1}{B1}} = \frac{\frac{B1}{a1}}{\frac{b1}{A1}}$$

lire per 1 quant di merce (pointing to  $\frac{a1}{A1}$ )  
 merce per 1 lira (pointing to  $\frac{B1}{a1}$ )

## • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Quinque equi comedunt sextaria 6 ordei in diebus 9; queritur in quot dies eadem ratione decem equi comedent sextaria 16.

◦ Cinque cavalieri consumano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si domanda in quanti giorni 10 cavalieri consumano 16 sestari di orzo.

## • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Quinque equi comedunt sextaria 6 ordei in diebus 9; queritur in quot dies eadem ratione decem equi comedent sextaria 16.

◦ Cinque cavalieri consumano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si domanda in quanti giorni 10 cavalieri consumano 16 sestari di orzo.

dies

ordeum

equites

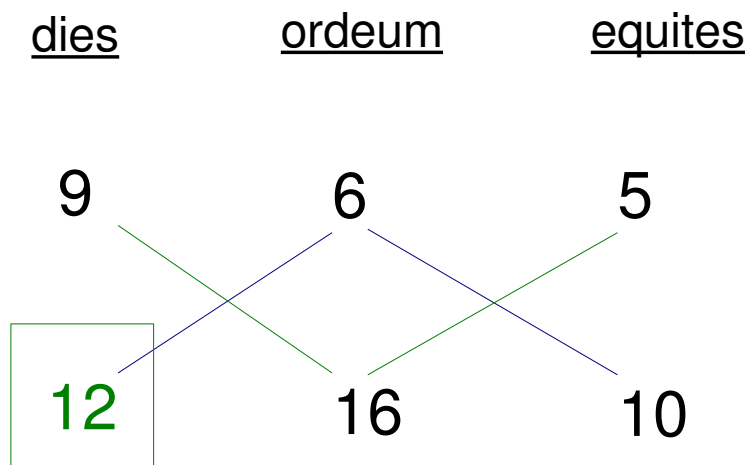
Soluzione.

Scrivi su una riga 5 cavalieri, 6 sestari, 9 giorni (iniziando da destra); poi sotto 5 scrivi 10 cavalieri e sotto 6 scrivi 16 sestari. Moltiplica 5 per 16 per 9, che fa 720; dividi per 10 e per 6, viene 12.

## • LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Quinque equi comedunt sextaria 6 ordei in diebus 9; queritur in quot dies eadem ratione decem equi comedent sextaria 16.

◦ Cinque cavalieri consumano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si domanda in quanti giorni 10 cavalieri consumano 16 sestari di orzo.



Soluzione.

Scrivi su una riga 5 cavalieri, 6 sestari, 9 giorni (iniziando da destra); poi sotto 5 scrivi 10 cavalieri e sotto 6 scrivi 16 sestari. Moltiplica 5 per 16 per 9, che fa 720; dividi per 10 e per 6, viene 12.



## • De societatibus factis inter consocios – Cap.10

### DIVISIONE DEGLI UTILI

*Incipit capitulum decimum de societatibus factis inter consocios.*

Cum autem prepositum fuerit de quibusdam consociis qui insimul societatem fecerunt, quorum unusquisque inequaliter suam portionem in ipsa societate habuerit, et cum ipsa societate aliquam quantitatem lucrati fuerint; quam quantitatem inter se secundum portiones eorum diuidere uoluerint. Et uoluerit scire quot unicuique de ipso lucro continget; pone portionem primi socii in capite tabule in dextera parte; deinde in eadem linea uersus sinistram portiones aliorum per ordinem ponere studeas; et lucrum quod fecerint, in alio capite tabule in eadem linea depingas, in sinistra uidelicet parte. Tunc aggregabis portiones omnium sociorum in unum, et aggregatam summam seruabis. In qua singulariter diuides multiplicationes portionis uniuscuiusque socii in totum lucrum; et sic habebis hoc quod unicuique de ipso lucro contigerit.

## • De societatibus factis inter consocios – Cap.10

### DIVISIONE DEGLI UTILI

Qualora si trattasse di soci che hanno fatto società insieme, dei quali ciascuno ha messo una parte diversa nella società, e con questa società si fosse guadagnata una certa quantità, e questa quantità volessero dividere secondo le parti;

se si vuole sapere quanto del profitto tocchi a ciascuno, scrivi la parte del primo socio all'estremità destra della tavola, poi sulla stessa linea scrivi ordinatamente verso sinistra le parti degli altri soci, e all'altra estremità poni il profitto; poi somma tutti i capitali in uno, e metti da parte la somma, per la quale dividerai il prodotto del capitale di ogni socio per il profitto. In questo modo avrai quanto dell'utile totale tocca a ciascuno.

# • DIVISIONE DEGLI UTILI – cap.10

## società di due uomini

• Si proponatur de duobus hominibus, qui societatem insimul fecerunt, quorum unus misit in prescripta societate libras 18 alicuius monete, et alter misit in eadem libras 25, et lucrati fuerunt inde libras 7; et queratur quot unicuique de ispis libris 7 contingerit, sic facies.

◦ Se due uomini fanno insieme una società, e uno mette 18 lire di una certa moneta, l'altro 25, e si guadagnano 7 lire; se si vuole sapere quanto di queste 7 lire tocchi a ognuno, fai così:

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 43 \\
 \hline
 2 \frac{40}{43}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 25 \\
 \hline
 43 \\
 \hline
 43 \\
 \hline
 2 \frac{40}{43}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 18 \\
 \hline
 43 \\
 \hline
 2 \frac{40}{43}
 \end{array}$$

Scrivi a partire da destra la parte del primo socio, del secondo e il guadagno: 18, 25, 7. Somma 18 con 25: viene 43 che metterai a denominatore a 18 e a 25. Ora moltiplica il 7 del guadagno per 18/43 e troverai quanto del guadagno tocca al primo socio. Viene  $2 + \frac{40}{43}$ , cioè 2 lire, 18 soldi e  $7 + \frac{11}{43}$  di denari. Il resto tocca all'altro. Puoi anche trovarlo moltiplicando 7 per  $\frac{25}{43}$ .

## • De consolamine monetarum – Cap.11

*Incipit capitulum undecimum de consolamine monetarum.*

Moneta quidem dicitur quelibet denariorum quantitas; et ellicitur ex quavis argenti, et eris commixtione. Maior autem moneta dicitur, in cuius libra fuerit plus argenti, quam in ea, que fieri desideratur. Minor uero, in qua minus. Moneta consolari dicitur, quando ponitur in libra ipsius aliqua data argenti quantitas. Et cum dicimus: habeo monetam ad uncias quantaslibet, ut dicamus ad 2, intelligimus quod in libra ipsius monete habeantur uncie 2 argenti. Consolatur enim moneta tribus modis. Primus modus est, quando consolatur ex data quantitate argenti uel eris. Secundus cum consolatur ex quibuslibet datis monetis cum argenti, uel eris, uel utriusque additione tertius: quando tantum ex datis monetis consolatur; que omnia, ut in hoc capitulo perfecte contineantur, ipsum in differentiis septem diuidimus; quarum prima erit de consolamine monete ex data argenti, uel eris quantitate:

## • De consolamine monetarum – Cap.11

*Incipit capitulum undecimum de consolamine monetarum.*

Moneta quidem dicitur quelibet denariorum quantitas; et ellicitur ex quavis argenti, et eris commixtione. Maior autem moneta dicitur, in cuius libra fuerit plus argenti, quam in ea, que fieri desideratur. Minor uero, in qua minus. Moneta consolari dicitur, quando ponitur in libra ipsius aliqua data argenti quantitas. Et cum dicimus: habeo

moneta  
monete  
est, qu  
ex qui  
quando  
tineant  
monete

titolo di una moneta:

tra 0 e 12

once d'argento in una libbra di moneta

1 libbra = 12 once

1. fusione di argento e bronzo
2. fusione di monete con argento e bronzo
3. fusione di monete

## • De consolamine monetarum – Cap.11

- Quidam habet libras 7 argenti, ex quibus vult facere monetam ad uncias 2 argenti in libra; et vult scire quantitatem totius consolaminis, nec non et eris iunctionem.

Un tale ha 7 libbre di argento, dalle quali vuol fare monete a 2 once per libbra; si vuole sapere la quantità da fondere e il bronzo da aggiungere.

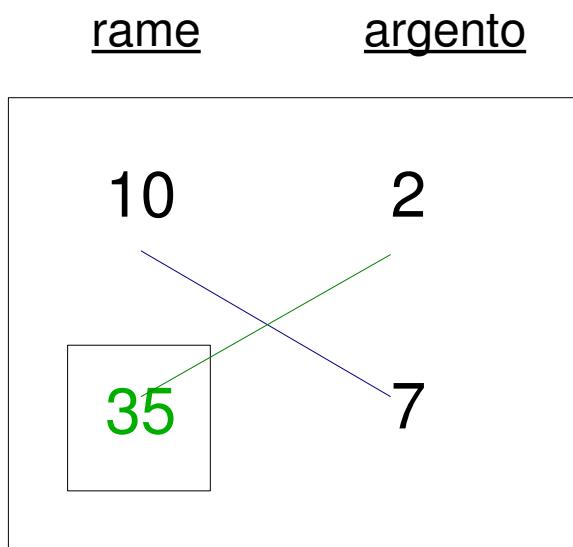
Soluzione 1.

Di queste 7 libbre d'argento fanne once, e saranno 84. Dato che in ogni libbra di moneta ci sono 2 once d'argento, quante volte 2 once entrano in 84, tante volte si può fondere una libbra di monete da queste once d'argento. Ma in 84 once due once entrano 42 volte; dunque da 84 once d'argento si possono fondere 42 libbre di monete. Dalle quali, tolte le 7 libbre d'argento, rimangono 35 libbre di bronzo da aggiungere.

## • De consolamine monetarum – Cap.11

- Quidam habet libras 7 argenti, ex quibus vult facere monetam ad uncias 2 argenti in libra; et vult scire quantitatem totius consolaminis, nec non et eris iunctionem.

Un tale ha 7 libbre di argento, dalle quali vuol fare monete a 2 once per libbra; si vuole sapere la quantità da fondere e il bronzo da aggiungere.



Soluzione 2.

Poiché in ogni libbra devono esserci 2 once d'argento il resto delle once, cioè 10, per ogni libbra sarà di rame. Dunque per ogni 2 once di argento che si hanno bisogna prenderne 10 di rame. Scrivi allora 2 libbre di argento e 10 di rame su una riga e 7 libbre di argento sotto l'argento, come nello schema. Moltiplica 7 per 10 e dividi per 2: vengono 35 libbre di rame.

## • Cap. 12 Pars tertia de questionibus arborum et similium

- Est arbor cuius  $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{3}$  latet sub terra; et sunt palmi 21; queritur quanta sit arboris illius longitudo.

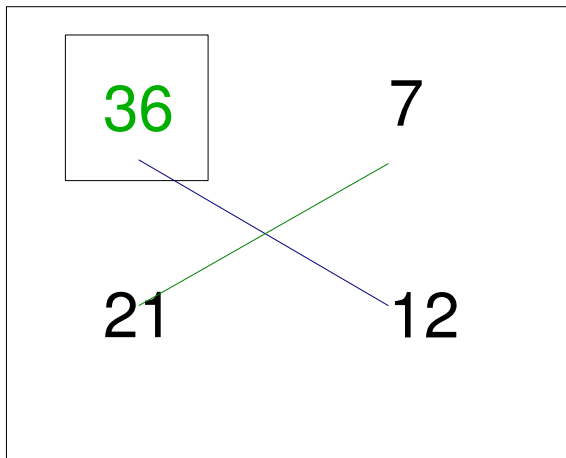
- C'è un albero, di cui  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{3}$  stanno sotto terra e sono 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.



# • LA FALSA POSIZIONE – Cap 12, III

• Est arbor cuius  $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{3}$  latet sub terra; et sunt palmi 21; queritur quanta sit arboris illius longitudo.

◦ C'è un albero, di cui  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{3}$  stanno sotto terra e sono 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.



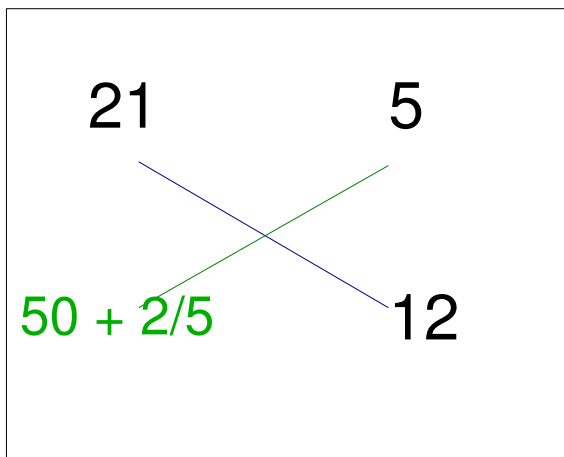
Soluzione.

Supponiamo che la lunghezza dell'albero sia 12 (scelto perché divisibile sia per 3 che per 4). Prendiamo  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{3}$  del 12 che abbiamo supposto come lunghezza. Si ottiene 7. Se avessimo ottenuto 21 avremmo a caso trovato che l'albero era 12 palmi. Ma poiché 7 non è 21 avremo che 7 sta a 21 come la lunghezza ipotizzata dell'albero, cioè 12, sta a quella da trovare. In altre parole: se per 12 che suppongo trovo 7, cosa devo prendere per ottenere 21? Secondo la regola delle tre cose moltiplica gli estremi, cioè 12 e 21, e dividi per l'altro numero, cioè 7. Si ottiene 36.

# • LA FALSA POSIZIONE – Cap 12, III

• Item est arbor cuius  $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{3}$  latet sub terra. Residuum vero quod est super terram est palmi 21.

◦ C'è un albero, di cui  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{3}$  stanno sotto terra. Il rimanente, che sta sopra la terra, è 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.



Soluzione.

Supponiamo che la lunghezza dell'albero sia 12 da cui tolti  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{3}$ , che fa 7, restano sopra la terra 5 palmi. Dunque dirai: per 12 che ho posto, viene 5; cosa devo porre perché venga 21? Moltiplica allora gli estremi, cioè 12 per 21, e dividi per il medio 5; verrà  $50 + \frac{2}{5}$ .

# • LA DOPPIA FALSA POSIZIONE – Cap 13

elcataym

• Valeat enim cantare, scilicet rotuli 100, libras 13; et queratur quantum valeat rotulus 1.

◦ Se un cantare, cioè 100 rotoli, vale 13 lire, quanto vale 1 rotolo?

soldi	1	2
err.(lire)	8	3
diff.ip.(soldi)	1	3/5
diff.err.(lire)	5	3

2soldi  
7+1/5 denari

3/5 soldi=(12·3)/5 denari

Soluzione.

Supponiamo che 1 rotolo valga 1 soldo, allora 100 rotoli valgono 100 soldi, cioè 8 e 5 lire; l'errore della prima supposizione è dunque 8 lire. Supponiamo ora che 1 rotolo valga 2 soldi, allora 100 rotoli valgono 200 soldi, cioè 10 lire; l'errore della seconda supposizione è dunque 3 lire. Un aumento di uno (da 1 soldo a 2 soldi) nella supposizione iniziale ha portato dunque a una diminuzione di 5 (da 8 a 3 lire) nell'errore del risultato finale. Si dirà allora: per 1 che ho aumentato, mi sono avvicinato di 5; quanto dovrò ancora aumentare per avvicinarmi di altri 3? Si moltiplica 1 per 3 e si divide per 5. Poiché 1 soldo sono 12 denari verrà  $(12 \cdot 3)/5$  cioè  $7 + 1/5$  denari, che aggiunti ai 2 soldi della seconda ipotesi danno 2 soldi e  $7 + 1/5$  denari.

# • LA DOPPIA FALSA POSIZIONE – Cap 13

elcataym

• Quidam habuit monetam que erat ad uncias 3 et aliam monetam que erat ad uncias 6; et voluit ex eis facere libram 15 monete que essent ad uncias 5; et queritur quantum de una quaque moneta in predicto consolamine mittere debuit.

• Un tale ha delle monete a 3 once d'argento e altre a 6 once d'argento per libbra. Vuole con queste fare 15 libbre di monete a 5 once d'argento. Quante monete di ciascun tipo deve fondere?

Per 15 libbre a 5 once d'argento occorrono in tutto 75 once d'argento.

libb.tipoI	3	4	Supponiamo di prendere 3 libbre della prima moneta. Abbiamo allora $3 \times 3 = 9$ once d'argento dalla prima moneta e dalle 12 libbre che mancano e che devo prendere della seconda moneta ottengo altre $12 \times 6 = 72$ once d'argento. In totale 81 once; dunque in questa prima ipotesi ho un errore di 6
err.	6	3	
diff.ip.	1	1	once. Supponiamo ora di prendere 4 libbre della prima moneta. Abbiamo allora $4 \times 3 = 12$ once d'argento dalla prima moneta e dalle 11 libbre che mancano e che devo prendere della seconda moneta ottengo altre $11 \times 6 = 66$ once d'argento. In totale 78 once; dunque in questa seconda ipotesi ho un errore di 3 once.
diff.err.	3	3	

Dunque aumentando di una libbra la prima moneta ho diminuito di 3 l'errore. Quanto allora devo aumentare ancora la prima moneta per diminuire ancora di 3 once?

Moltiplica 1 per 3 e dividi per 3. Viene 1, e dunque dovr` usare 5 libbre della prima moneta e 10 della seconda.

4+1  
libbre tipoI

• **CAP. 12, De solutionibus multarum positarum quaestionum quas erraticas appellamus.**

*Quot paria coniculatorum in uno anno ex uno pario germinentur.*

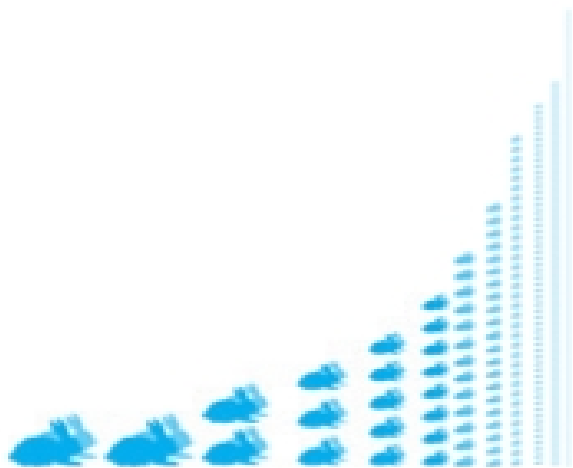
Quidam posuit unum par coniculatorum in quodam loco, qui erat undique pariet circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinerentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculatorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8 ex quibus paria 5 geminant alia paria 5: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21

parium
1
primus
2
Secundus
3
tercius
5
Quartus
8
Quintus
13
Sextus
21
Septimus
34
Octauus
55
Nonus
80
Decimus
144
Undecimus
233
Duodecimus
377

## • Il problema dei conigli, cap. 12

• Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret quot ex eo paria germinarentur in uno anno, cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare et in secundo mense ab eorum nativitate germinant.

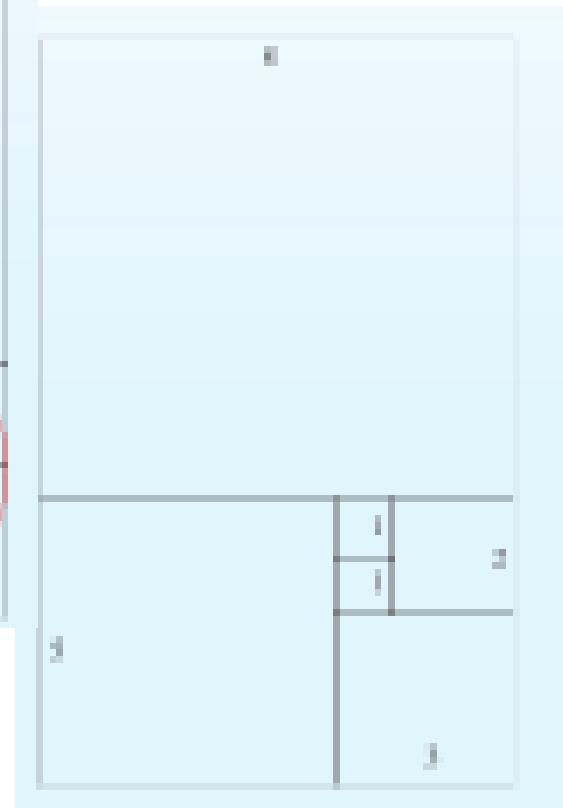
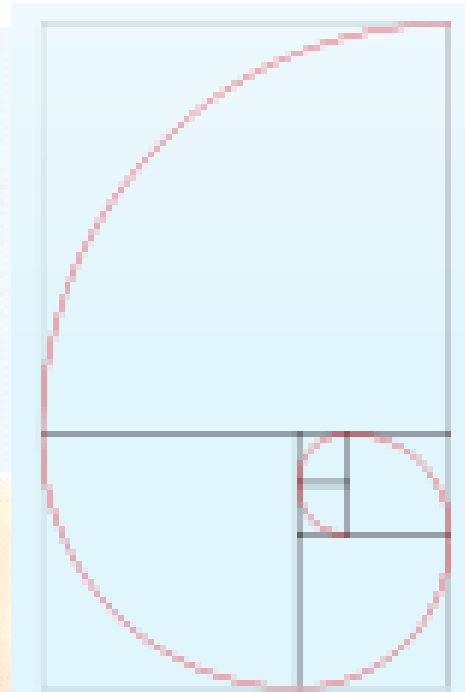
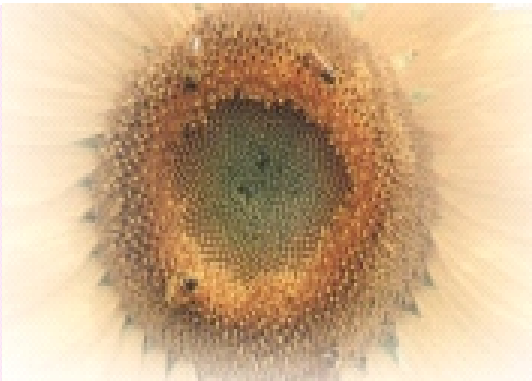
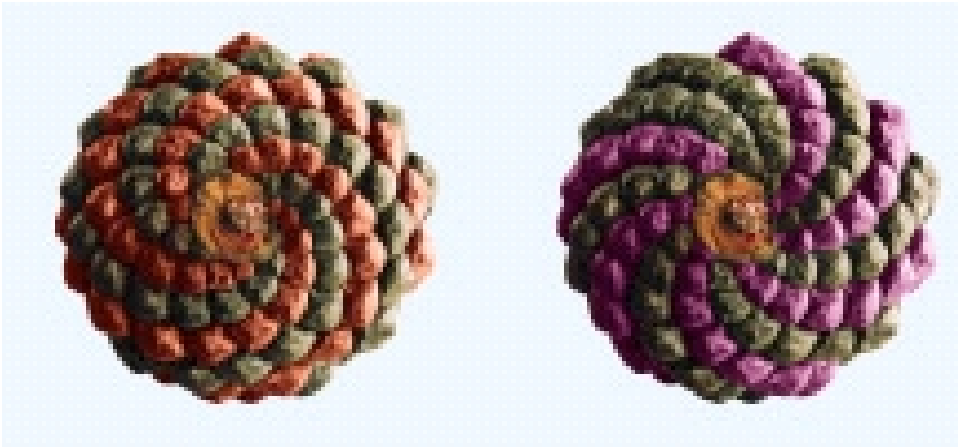
◦ Un tale mise una coppia di conigli in un luogo chiuso per sapere quante coppie sarebbero nate in un anno da quella coppia sapendo che in ogni mese da una coppia nasce un'altra coppia e che ogni coppia inizia a riprodursi nel secondo mese di vita.



Nel primo mese la coppia si riproduce e dunque dopo un mese ci sono 2 coppie. Nel secondo mese la prima coppia si riproduce ancora e dunque vi sono 3 coppie. Di queste 2 rimangono gravide. Nel terzo mese nascono 2 nuove coppie e dunque vi sono 5 coppie, di cui 3 rimangono gravide. Nel quarto mese vi sono 8 coppie di cui 5 rimangono gravide. Nel quinto vi sono 13 coppie di cui 8 rimangono gravide. Nel sesto 21 coppie di cui 13 gravide. Nel settimo 34 coppie di cui 21 gravide. nell'ottavo 55 di cui 34 gravide. ...

- Il problema dei conigli, cap. 12

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ....



## • Progressioni geometriche, cap. 12

• Septem vetule vadunt Romam quarum quelibet habet burdones 7, et in quolibet burdone sunt saculi 7 et in quolibet saculo panes 7 et in quilibet panis habet cultellos 7 et quilibet cultellus habet vaginas 7. Queritur summa omnium predictorum.

◦ Sette vecchie vanno a Roma; ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti.

*Sette case; in ognuna sette gatti; ogni gatto uccide sette topi; ogni topo aveva mangiato sette grani; ogni grano produce sette hekat. Qual'è il totale di tutti?*

Papiro di Rhind



## • Progressioni geometriche, cap. 12

• Septem vetule vadunt Romam quarum quelibet habet burdones 7, et in quolibet burdone sunt saculi 7 et in quolibet saculo panes 7 et in quilibet panis habet cultellos 7 et quilibet cultellus habet vaginas 7. Queritur summa omnium predictorum.

◦ Sette vecchie vanno a Roma; ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti.

```
  137256
    7
   49
  343
 2401
16807
117649
```

Soluzione.

Moltiplica il numero delle vecchie, 7, per il numero dei muli, 7; viene 49. Moltiplica 49 per i 7 sacchi, viene 343. Moltiplica per 7 pani; viene 2401. Moltiplica per 7 coltelli; viene 16807. Moltiplica per 7 guaine; viene 117649. Sommando tutto viene 137256.

## • Progressioni geometriche, cap. 12

• Est arbor que habet ramos 100, et in quolibet ramo sunt nidi 100; et in quolibet nido sunt ova 100; et in quolibet ovo sunt aves 100.

◦ Un albero ha 100 rami, in ogni ramo ci sono 100 nidi, in ogni nido 100 uova e in ogni uovo 100 uccelli. Qual è la somma di tutti?

Soluzione.

Prendi i 100 rami e aggiungi due zeri per avere i nidi, viene 10000. Metti altri due zeri per le uova, viene 1000000.

Metti altri due zeri per gli uccelli, viene 100000000.

Per sommare metti un 1 al posto del terzo, del quinto e del settimo zero. Viene 101010100.

- Progressioni geometriche, cap. 12

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

- Progressioni geometriche, cap. 12

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

# • Il problema della scacchiera

*Incipit pars 9<sup>a</sup> de duplicatione scacherij, et quorundam aliarum regularum.*

Duplicatio quidem scacherij duplici modo proponitur; quorum unus est cum sequens punctum sui antecedentis duplum sit; alius, cum sequens punctum omnium antecedentium punctorum duplum esse proponatur. Unde qualiter utrum duplicatio fieri debeat, ad presens ostendere procuramus. Prima namque duplicatio duplici modo fieri potest, videlicet si de puncto in punctum duplicando usque ad ultimum punctum egrediendo operabimur: alius modus est, ut duplices tantum primum punctum, et habebis duo; que duo multiplica in se, erunt 4; que 4 sunt 1, magis numero duplicationis duorum punctorum. Verbi gratia. In primo puncto pone 1. In secundo 2; quibus iunctis, faciunt 3; quibus tribus superscripta 4 sunt 1 plus; quibus 4 in se multiplicatis, faciunt 16; qui numerus est uno magis duplicatione dupli duorum punctorum, videlicet de punctis 4. Verbi gratia: in primo est 1. In secundo 2. In | tercio 4. In quarto 8; quibus insimul iunctis, faciunt 15; que sunt 1, minus de 16. Item 16 in se multiplica, faciunt 256; que sunt 1, plus numero duplicationis dupli .iiii.<sup>or</sup> punctorum superscriptorum, scilicet de

secundo 2. In tercio 4. In quarto 8. In quinto 16. In sexto 32. In septimo 64. In octavo 128; quibus insimul iunctis, faciunt 255; quorum 255 superscripta 256 sunt, 1 plus, ut prediximus: quare multiplicatis 256 in se, faciunt 65536, que sunt 1, magis duplicatione dupli unius linee, scilicet de punctis 16: propter eandem ergo multiplica 65536 in se, faciunt 4294967296; que similiter sunt uno magis numero duplicationis dupli duarum linearum, videlicet de punctis 32, que dimidium optinent scacherij. Unde multiplica 4294967296 in se, reddunt 18446744073709551616; que sunt 1, magis duplicatione totius scacherij; quo numero in se ipso multiplicato, reddunt 1, magis duplicatione duorum scacheriorum, scilicet 340282366920939463483374607431768211456; et sic multiplicando possemus procedere in infinitum.

fol. 137 recto.



## • Il problema della scacchiera

• Duplicatio quidem scacherii duplici modo proponitur; quorum unus est cum sequens punctum sui antecedentis duplum sit; alius cum sequens punctum omnium antecedentium punctorum duplum esse proponatur.

◦ Il raddoppio della scacchiera si può fare in due modi; uno è che in ogni casella della scacchiera c'è un numero doppio del precedente ...

1	2	4	8	16	32	64	128
256	...						

Il primo tipo di raddoppio si può calcolare in due modi.

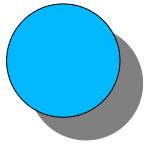
Nel primo modo si procede raddoppiando di punto in punto, fino all'ultima casella

# • Il problema della scacchiera

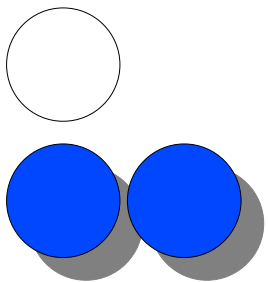
- Il raddoppio della scacchiera si può fare in due modi; uno è che in ogni casella della scacchiera c'è un numero doppio del precedente ...

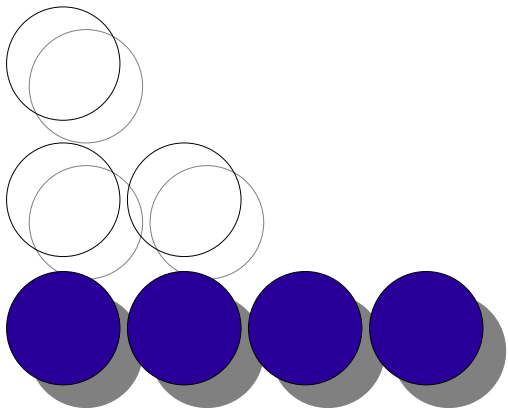
		3	7	15	31	63	127	...
1	2	4	8	16	32	64	128	
2 <sup>256</sup>	2 <sup>29</sup> ...	2 <sup>10</sup>	2 <sup>11</sup>	2 <sup>12</sup>	2 <sup>13</sup>	2 <sup>14</sup>	2 <sup>15</sup>	
65536	...							
2 <sup>24</sup>								
2 <sup>32</sup>								
2 <sup>40</sup>								
2 <sup>48</sup>								
2 <sup>54</sup>						...	2	

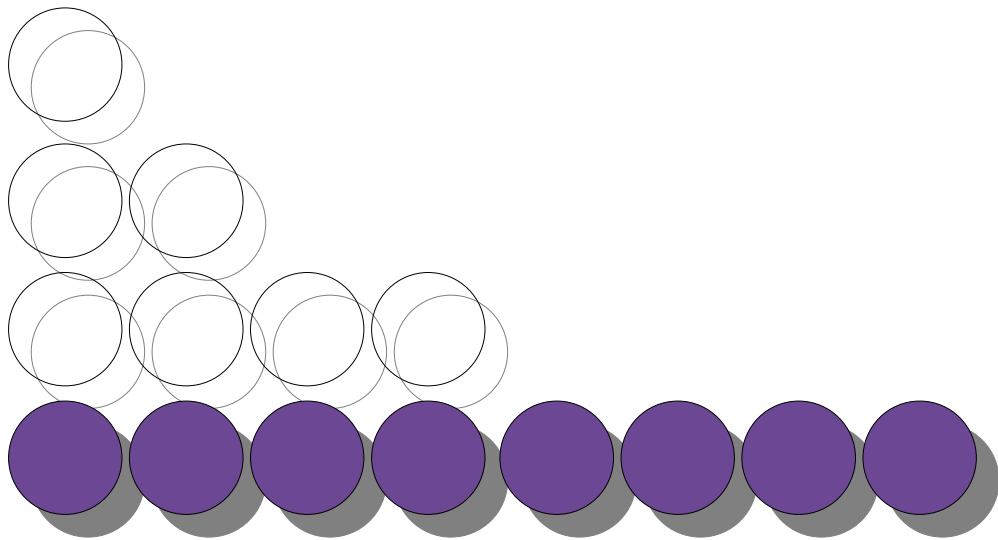
Nel secondo modo si osserva che sommando la casella numero uno e numero due si ottiene 3, valore che è inferiore di 1 rispetto alla casella successiva dove c'è il raddoppio della casella due, sommando la casella numero uno, numero due e numero tre si ottiene 7, valore che è inferiore di 1 rispetto alla casella successiva dove c'è il raddoppio della casella tre, e così via. Se allora, raddoppiata la prima casella, moltiplico il valore 2 per se stesso, e poi il 4 per se stesso, e poi il 16 per se stesso ottengo rispettivamente i valori 4, 16, 256 che mi danno la somma aumentata di uno delle prime due, quattro, otto caselle; proseguendo moltiplico 256 per se stesso e ottengo 65536 che mi dà la somma aumentata di uno delle prime sedici caselle, moltiplico 65536 per se stesso e ottengo 4294967296 che dà la somma aumentata di uno delle prime trentadue caselle, moltiplico quest'ultimo valore per se stesso e ottengo la somma aumentata di uno dell'intera scacchiera: 18446744073709551616 .

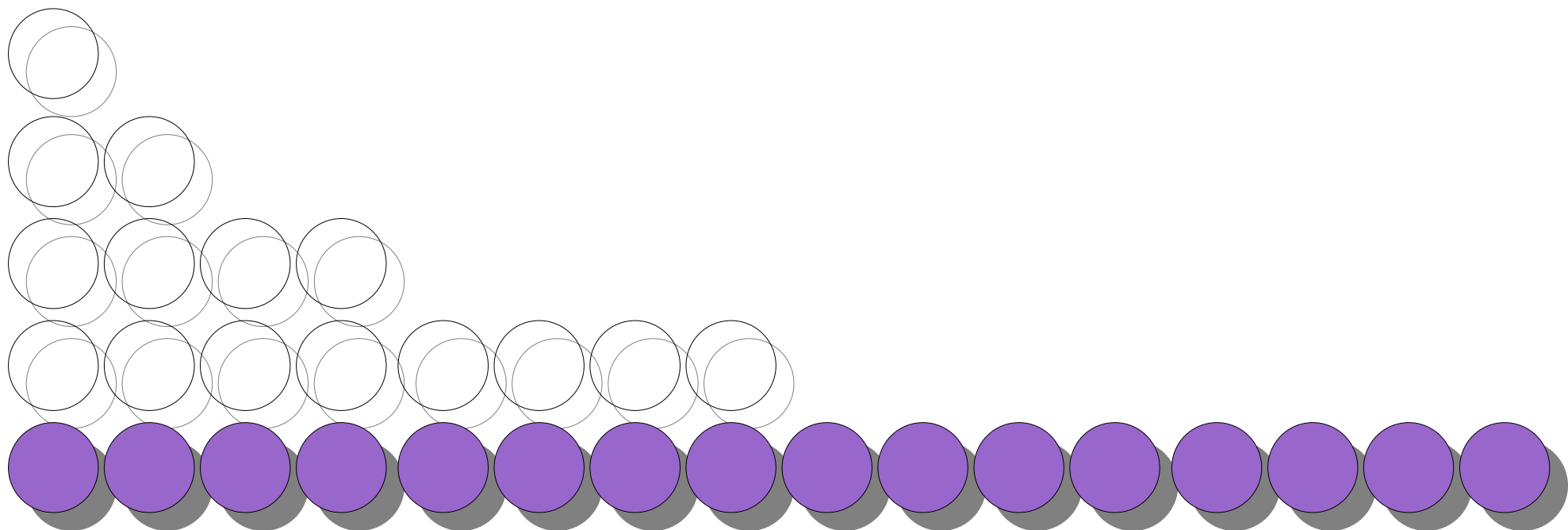


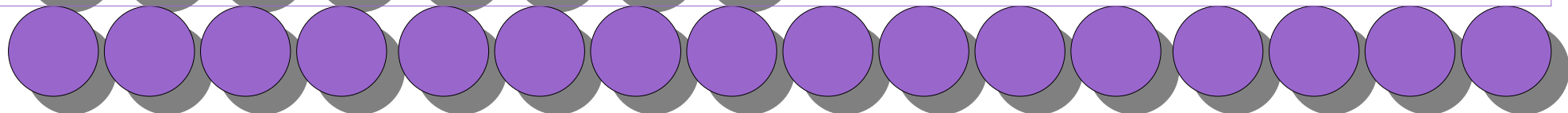
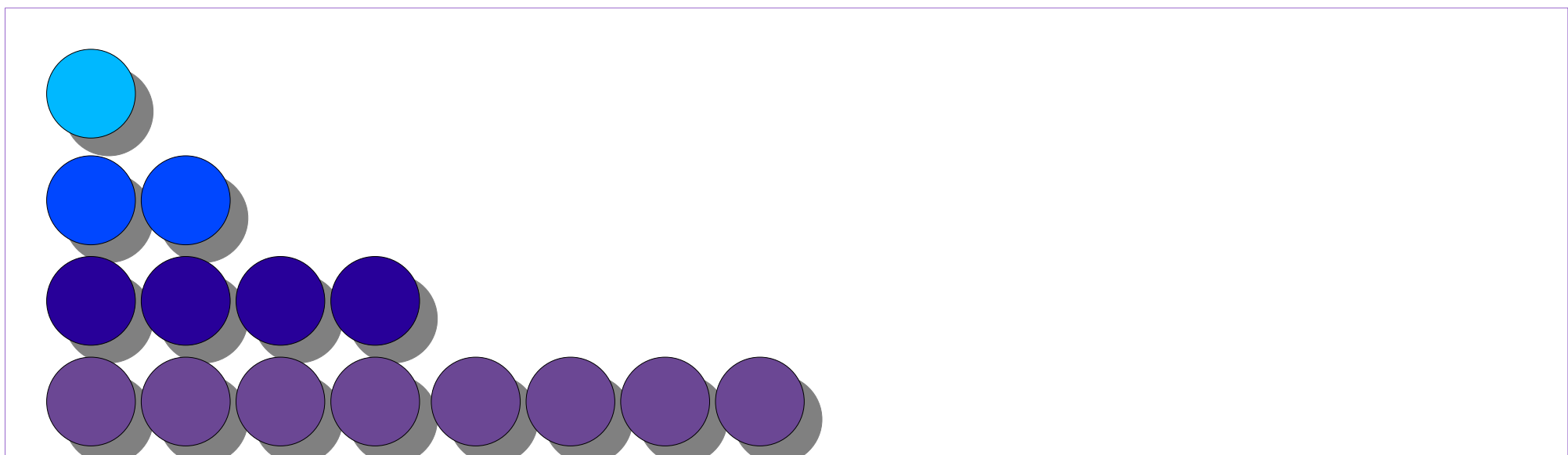


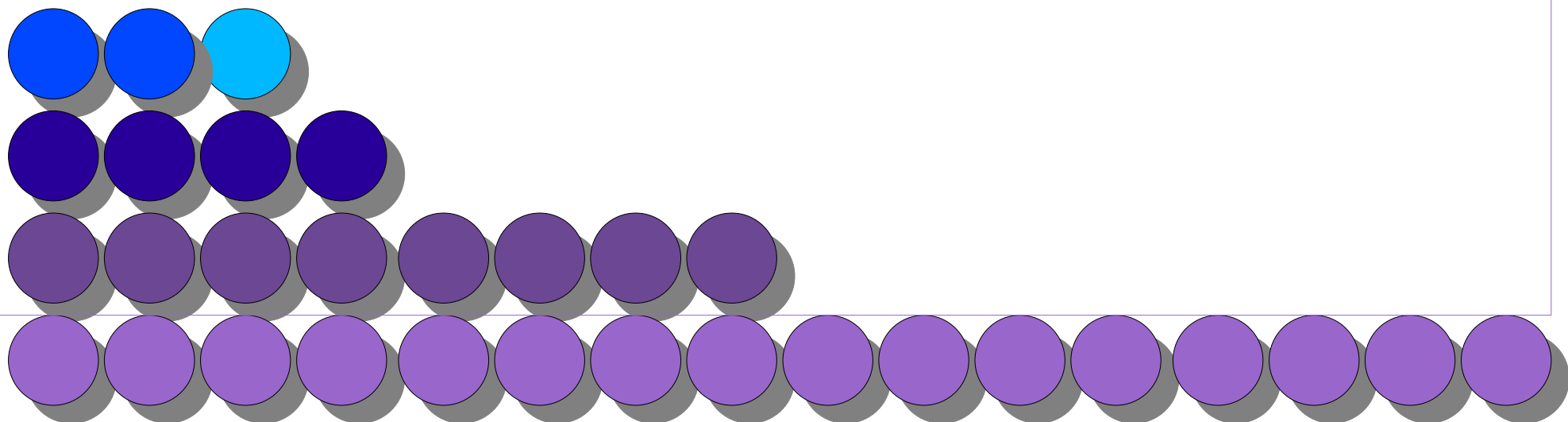
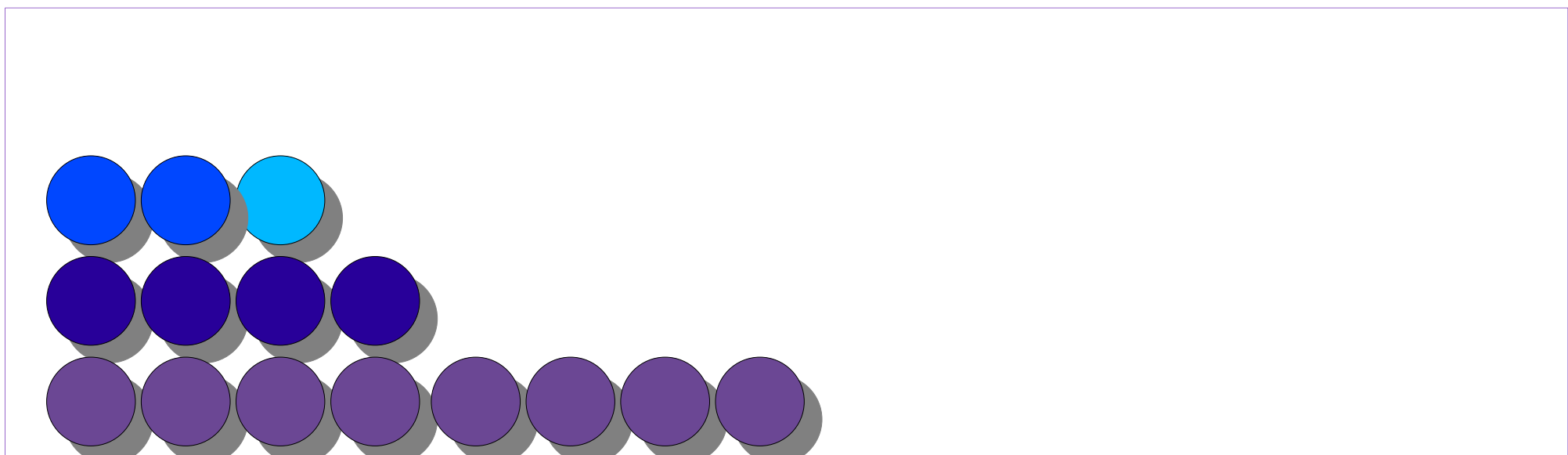


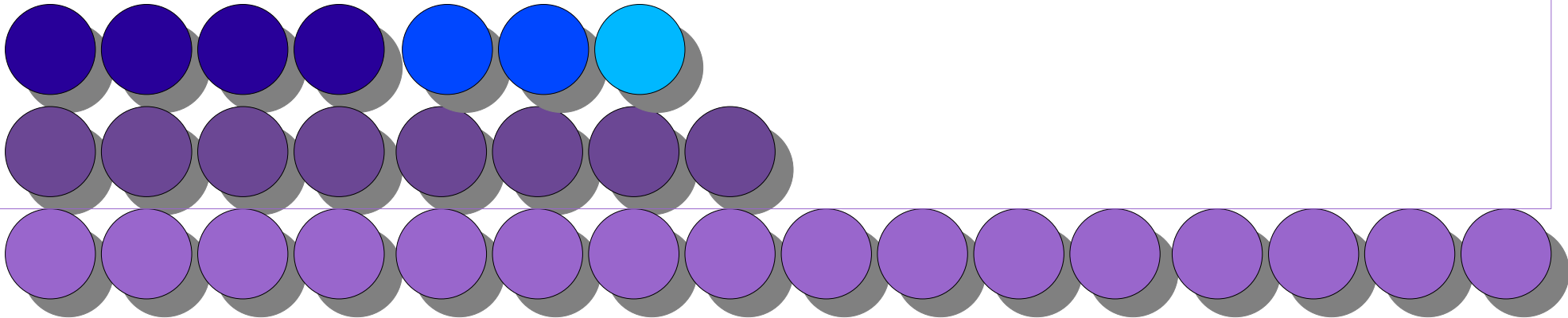
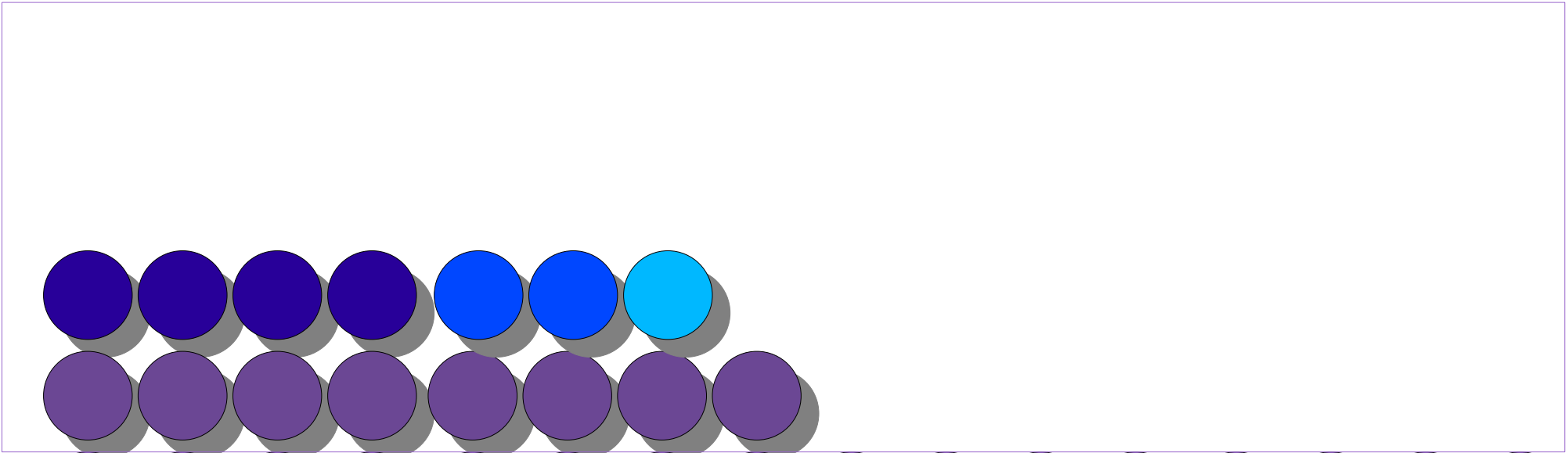


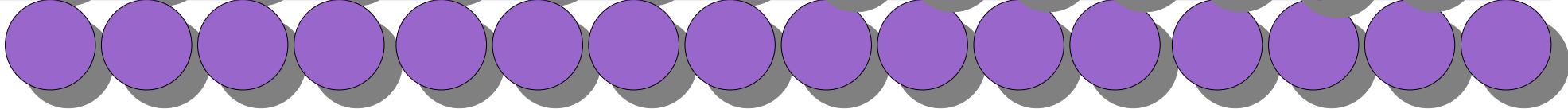
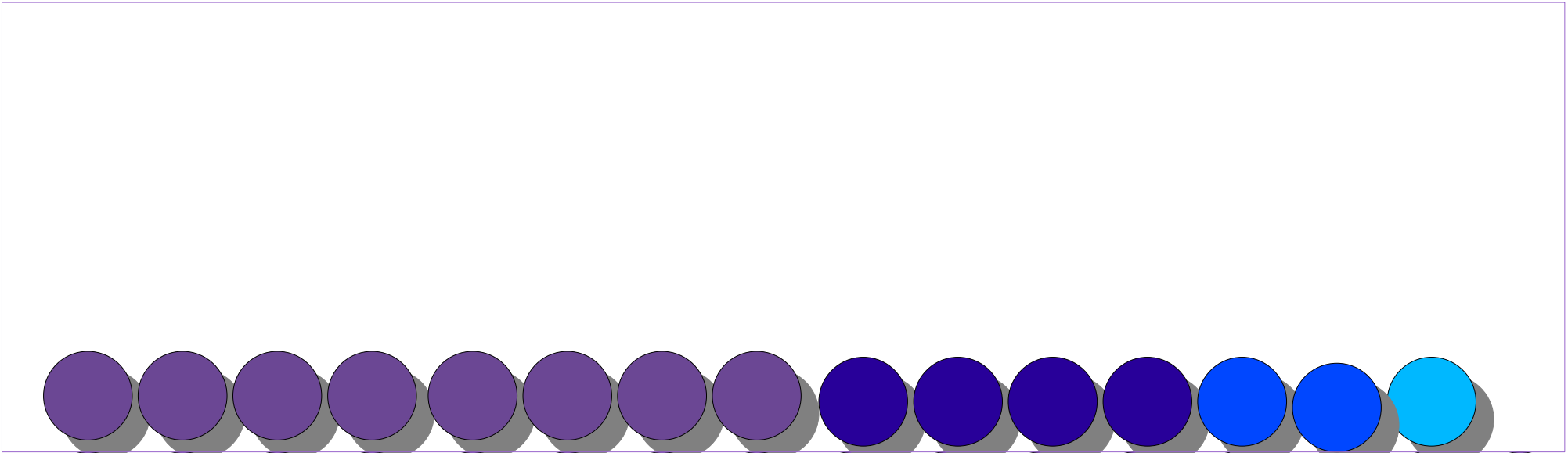




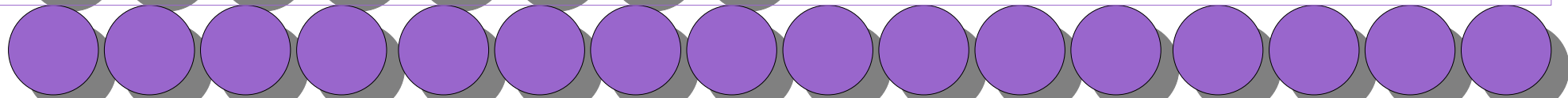
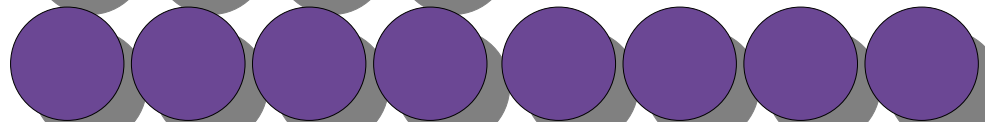
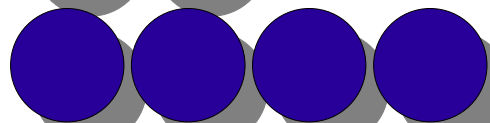
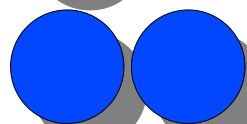
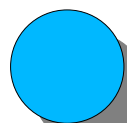
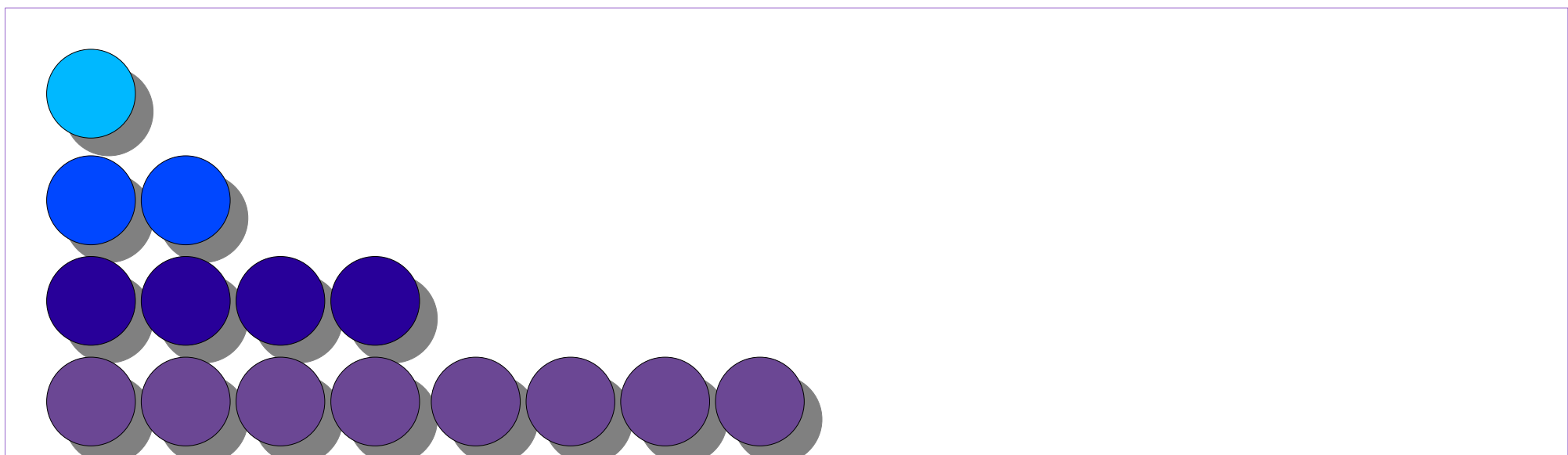












# • Il problema della scacchiera

$$1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

	1	2	4	8	16	32	64	128
1	1	2	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$
$2^8$	256	$2^9$ ...	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$	$2^{13}$	$2^{14}$	$2^{15}$
$2^{16}$	65536	...						
$2^{24}$								
$2^{32}$	4292967296							
$2^{40}$								
$2^{48}$								
$2^{54}$						...		$2^{63}$

$$\rightarrow 256 - 1 = 2^8 - 1$$

$$\rightarrow 256 \times 256 - 1 = 2^{16} - 1$$

$$\rightarrow 65536 \times 65536 - 1 = 2^{32} - 1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 4292967296 \times 4292967296 - 1 &= 2^{64} - 1 \\ &= 18446744073709551616 - 1 \end{aligned}$$

## • Il problema della scacchiera

18 446 744 073 709 551 615

Sed cum numerus duplicationis scacherij post multitudinem intelligi nequeat; qualiter apertius intelligi possit, ostendere procuramus. Sumantur bizantiij 65536, qui colliguntur ex duplicatione duarum linearum, scilicet 16 punctorum; et impleatur ex hijs arca una; et eas cum ipsa arca duplicando per ordinem; et sic habebimus in septimo decimo puncto, uidelicet in primo puncto tercie linee, archas duas; secundo eiusdem linee archas 4. In tercio 8. In quarto 16. In quinto 32. In sexto 64. In septimo 128. In ultimo eiusdem linee 256. In primo quarte

linee 5  
In sept  
habebi  
duplica  
si una  
in ult  
ciuitat  
arce 6  
oportet

Supponiamo che i numeri rappresentino altrettanti bisanti (il bisante è una moneta d'oro imperiale); le prime due righe della scacchiera assommeranno a 65.536 bisanti, che riempiono una cassa. Alla terza riga si ricomincia con 2, 4, 8, casse, finché alla fine della quarta riga si saranno riempite 65.536 casse, che faranno una casa. La quinta e la sesta riga daranno allora 65.536 case, una città; e infine le ultime due righe moltiplicheranno il numero delle città fino a 65.536. In totale, se si parte con un bisante, tutta la scacchiera ammonterà a 65.536 città, ognuna delle quali sarà composta di 65.536 case, che conterranno ciascuna 65.536 casse con 65.536 bisanti ognuna.

- De quaestionibus aliebrae et almuchabalae, Cap. 15, III

*Incipit pars tertia de solutione quarundam questionum secundum Modum  
algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem.*

Maumcht

Ad compositionem quidem elgebre (*sic*), et elmulchabale tres proprietates, que sunt in quolibet numero, considerantur, que sunt radix, quadratus, et numerus simples. Cum itaque aliquis numerus multiplicatur in se, et prouenit aliquid. Tunc factus ex multiplicatione quadratus est multiplicati; et multiplicatus sui quadrati est radix. Vt cum multiplicatur 3 in se, ueniunt 9. Sunt enim 3 radix de 9; et 9 sunt quadratus ternarii. Et cum numerus non habet respectum ad quadratum uel radicem, tunc simpliciter numerus appellatur: he autem in solutionibus questionum inter se equantur sex modis, ex quibus tres sunt simplices, et tres compositi. Primus quidem modus est,

# • EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

*Incipit pars tertia de solutione quarumdam questionum secundum Modum  
algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem.*

Maunclit

Ad compositionem quidem elgebre (*sic*), et elmulchabale tres proprietates, que sunt in quolibet numero, considerantur, que sunt radix, quadratus, et numerus simples. Cum itaque aliquis numerus multiplicatur in se, et prouenit aliquid. Tunc factus ex multiplicatione quadratus est multiplicati; et multiplicatus sui quadrati est radix. Vt cum multiplicatur 3 in se, ueniunt 9. Sunt enim 3 radix de 9; et 9 sunt quadratus ternarii. Et cum numerus non habet respectum ad quadratum uel radicem, tunc simpliciter numerus appellatur: he autem in solutionibus questionum inter se equantur sex modis, ex quibus tres sunt simplices, et tres compositi. Primus quidem modus est,

NUMERO

RADICE (numero incognito) o COSA

CENSO (numero moltiplicato in sé)

- censo uguale a radici ( $x^2 = bx$ )
- censo uguale a numero ( $x^2 = c$ )
- radici uguali a numero ( $bx = c$ )
  
- censo e radici uguali a numero ( $x^2 + bx = c$ )
- censo uguale a radici e numero ( $x^2 = bx + c$ )
- censo e numero uguali a radici ( $x^2 + c = bx$ )

- **Quando census et radices equantur numero**

*Censo e radici uguali a numero*

- Sic facias: accipe quadratum medietatis radicum et adde eum super numerum datum; et eius quod provenerit radicem accipe; de qua numerum medietatis radicum tolle; et quod remanserit erit radix quesiti census.

- Fai così prendi il quadrato della metà delle radici e aggiungilo al numero dato; da quello che viene prendi la radice; da questa toglì metà delle radici.

- **Quando census et radices equantur numero**

*Censo e radici uguali a numero*

- Fai così prendi il quadrato della metà delle radici e aggiungilo al numero dato; da quello che viene prendi la radice; da questa togli metà delle radici.

Verbi gratia: census et decem radices equantur 39. Dimidium itaque ex radicibus est 5; quibus in se multiplicatis faciunt 25; quibus additis cum 39 faciunt 64; de quorum radice que est 8 si auferatur medietas radicum, scilicet 5, remanebunt 3 pro radice quesiti census. Quare census est 9, et ipsius decem radices sunt 30; et sic census et decem radicem equantur 39.

- **Quando census et radices equantur numero**

*Censo e radici uguali a numero*

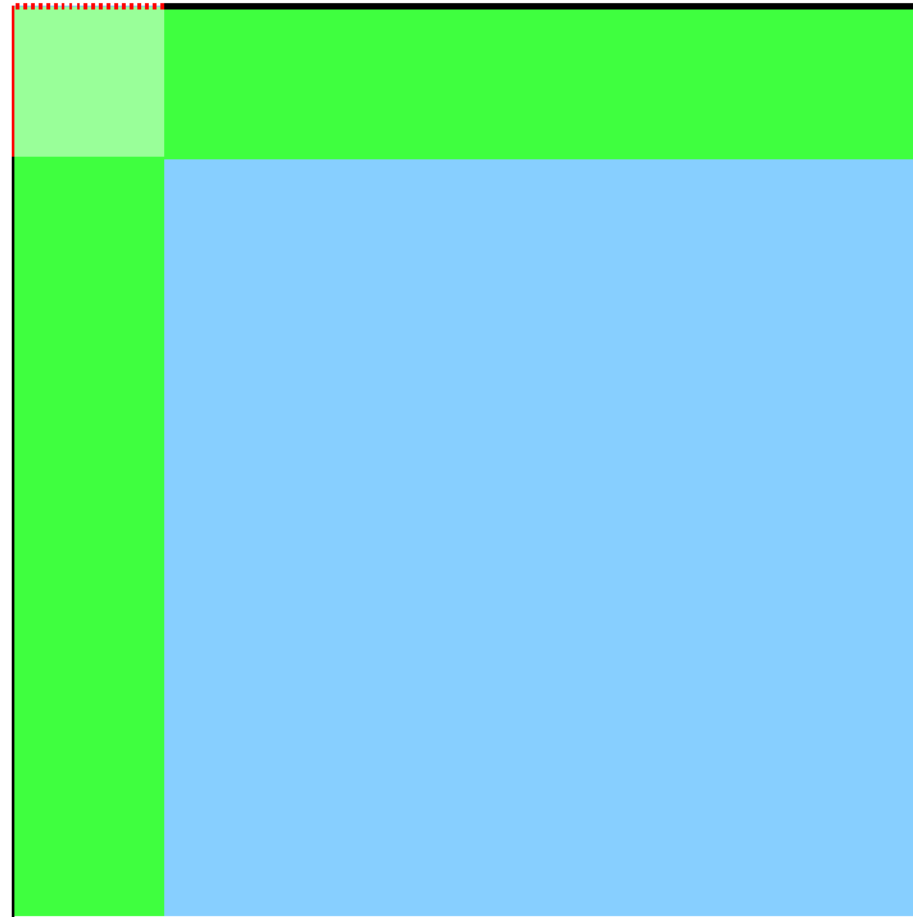
- Fai così prendi il quadrato della metà delle radici e aggiungilo al numero dato; da quello che viene prendi la radice; da questa togli metà delle radici.

Esempio: un censo e dieci radici siano uguali a 39. La metà delle radici è 5 che moltiplicato per se stesso fa 25; questo aggiunto a 39 fa 64; dalla cui radice, che è 8, se si toglie metà delle radici, cioè 5, rimarrà 3 che dà la radice del censo richiesto. Quindi il censo è 9, e le sue dieci radici sono 30; e così il censo con le dieci radici fanno 39.



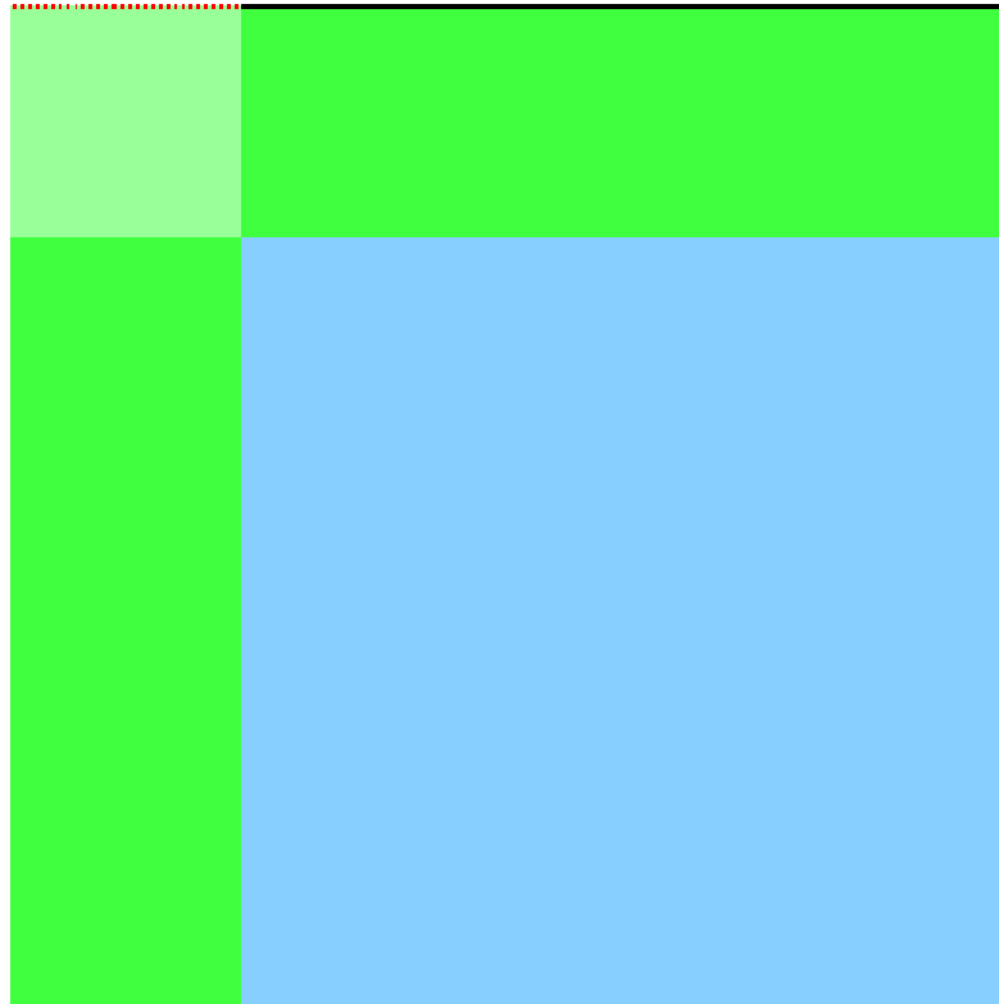
- **Quando census et radices equantur numero**

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1*



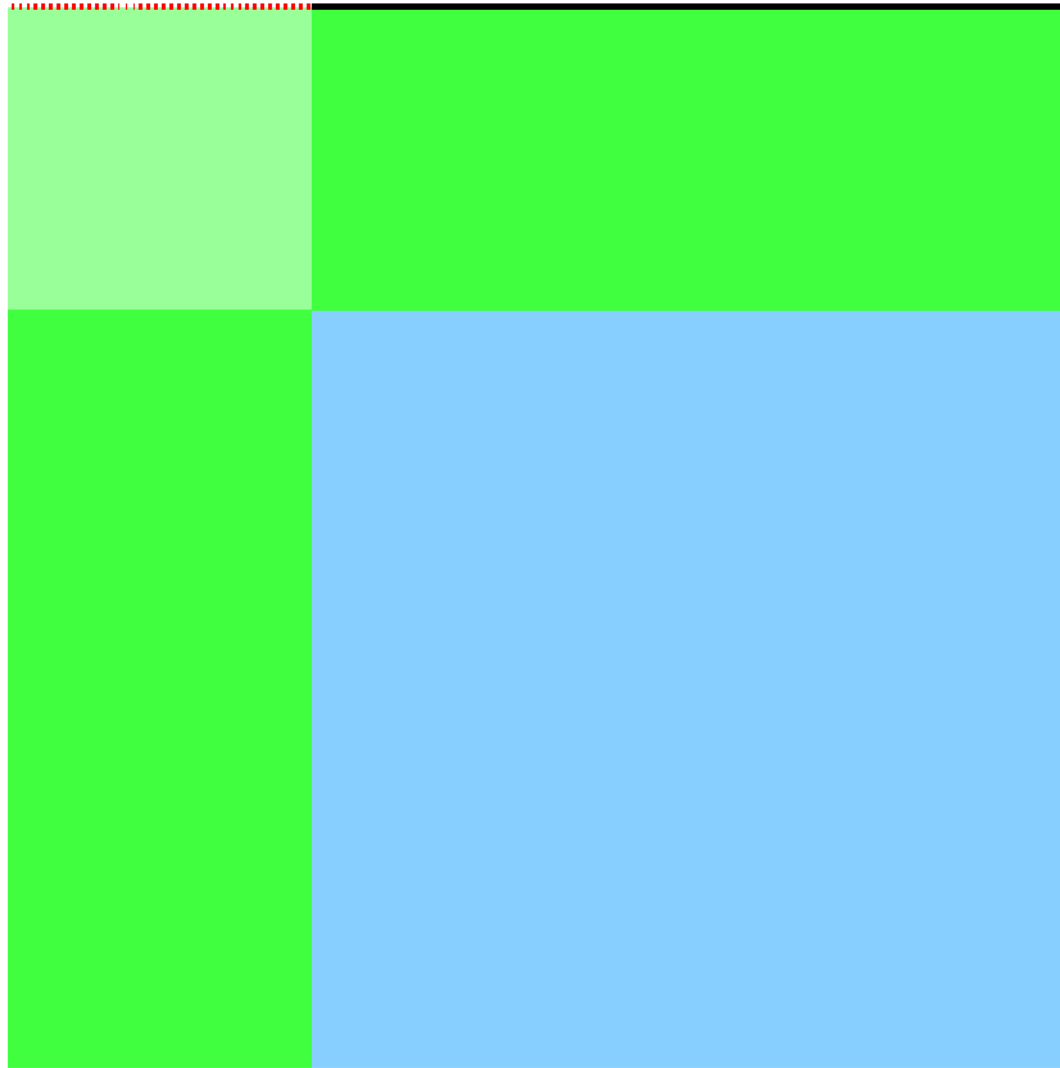
- Quando census et radices equantur numero

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1*



- Quando census et radices equantur numero

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1*



- Quando census et radices equantur numero

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1*

un censo e dieci radici siano uguali a 39

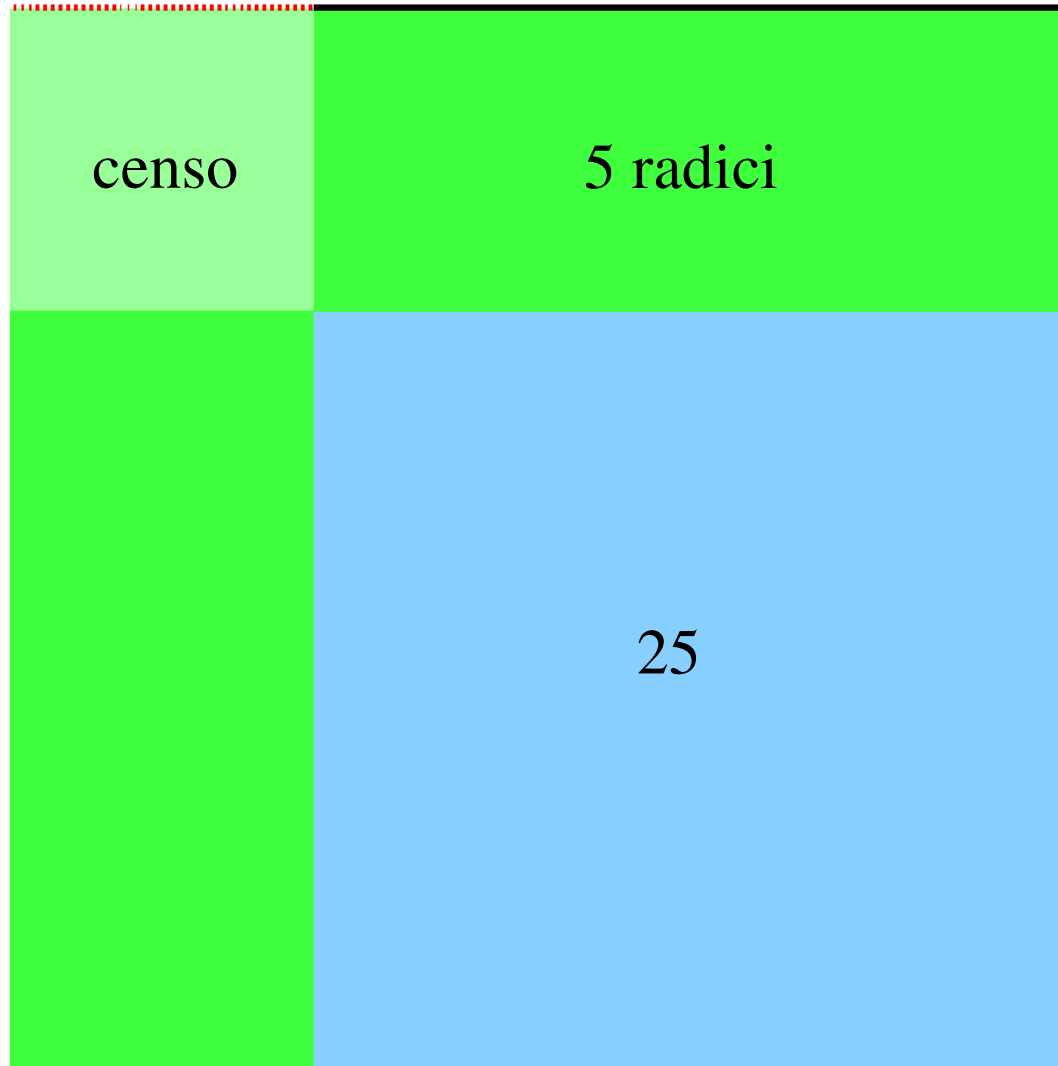
radice

5

censo

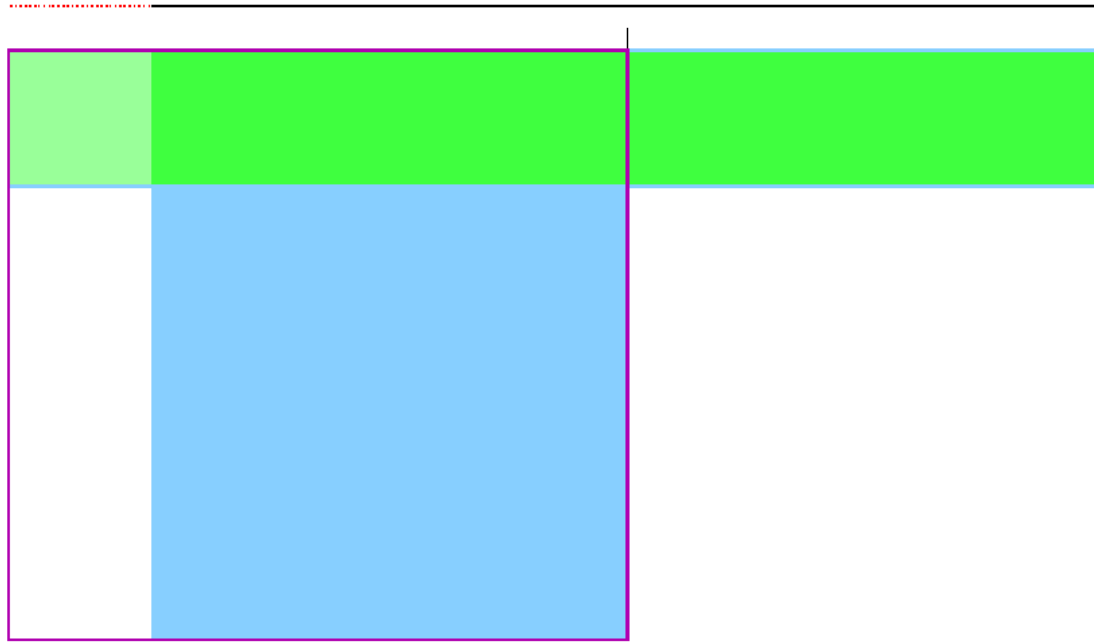
5 radici

25



- **Quando census et radices equantur numero**

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 2*

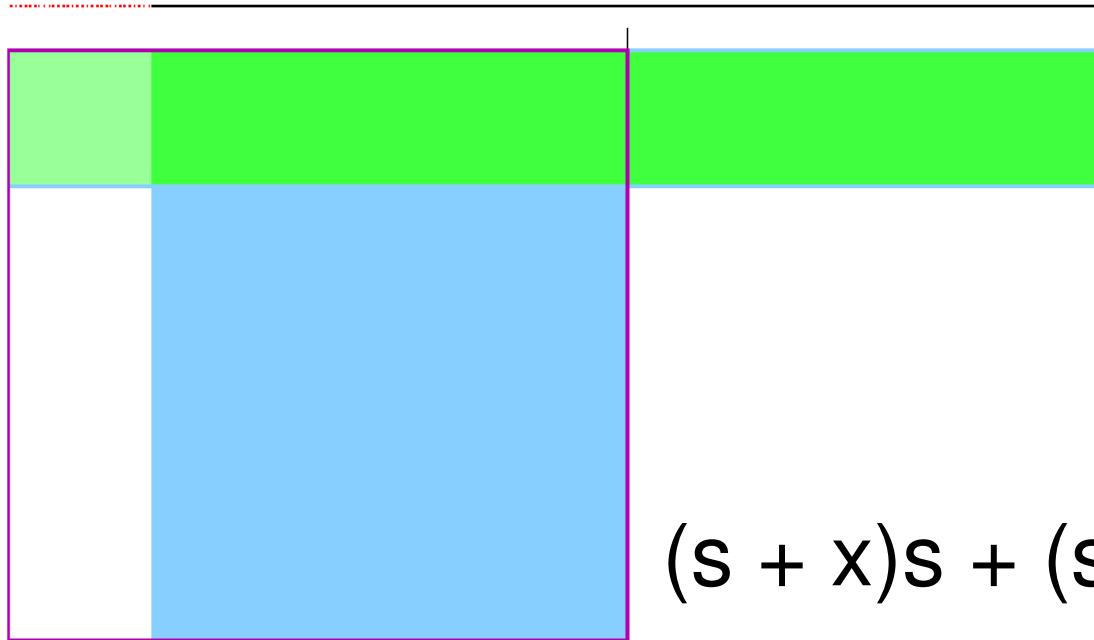


**Euclide  
Elem. II, 6**

Se si divide un segmento in parti uguali e ad una parte si aggiunge un altro segmento, il rettangolo costruito con l'intero segmento più il secondo segmento e con il secondo segmento insieme con il quadrato della metà è uguale al quadrato costruito sul secondo segmento più metà del primo.

- Quando census et radices equantur numero

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 2*



**Elem. II, 6**

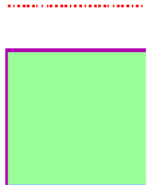
$$(s + x)s + (s / 2)^2 = (s / 2 + x)^2$$

Se si divide un segmento in parti uguali e ad una parte si aggiunge un altro segmento, il rettangolo costruito con l'intero segmento più il secondo segmento e con il secondo segmento insieme con il quadrato della metà è uguale al quadrato costruito sul secondo segmento più metà del primo.

- Quando census et radices equantur numero

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 2*

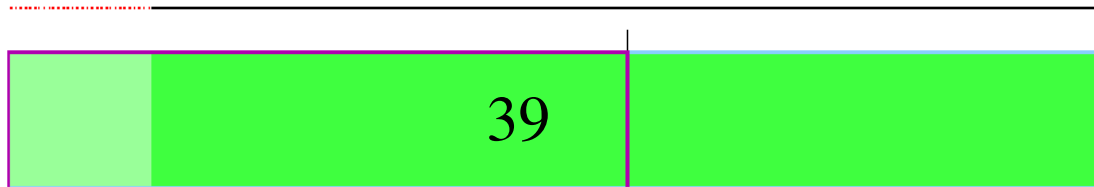
un censo e dieci radici siano uguali a 39



- Quando census et radices equantur numero

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 2*

un censo e dieci radici siano uguali a 39

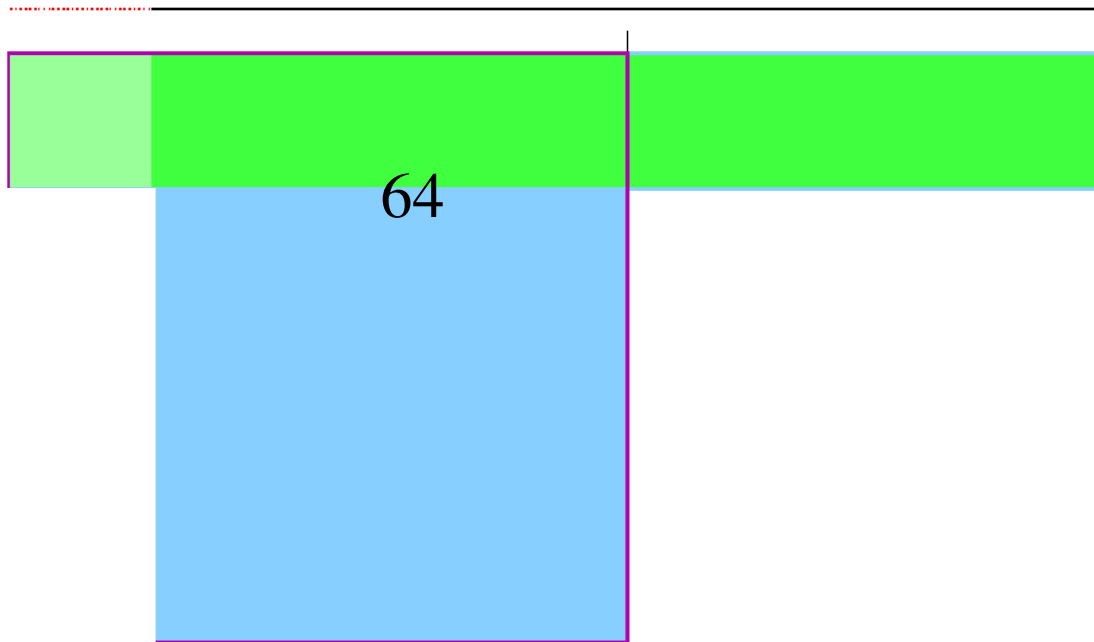




- Quando census et radices equantur numero

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 2*

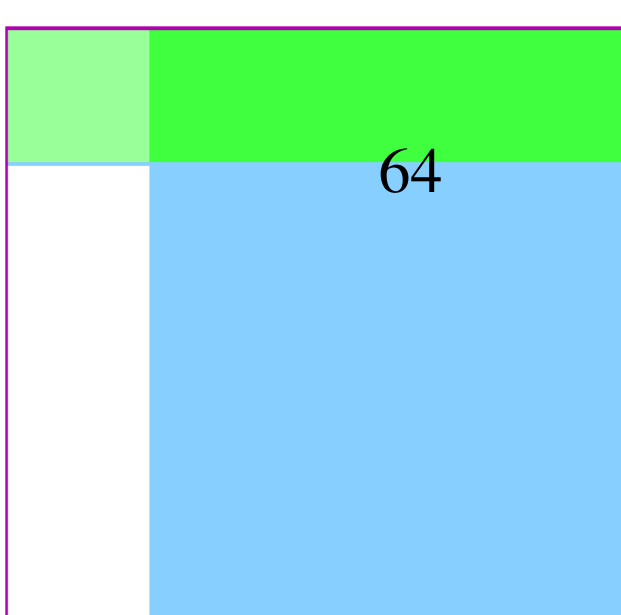
un censo e dieci radici siano uguali a 39



- Quando census et radices equantur numero

*Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 2*

un censo e dieci radici siano uguali a 39



# • Quando radices et numerus equantur censui

## *Censo uguale a radici e numero*

• Tunc quadratum medietatis radicum addes super numerum; et super radicem eius, quod provenerit, adde numerum medietatis radicum; et habebis radicem quesiti census.

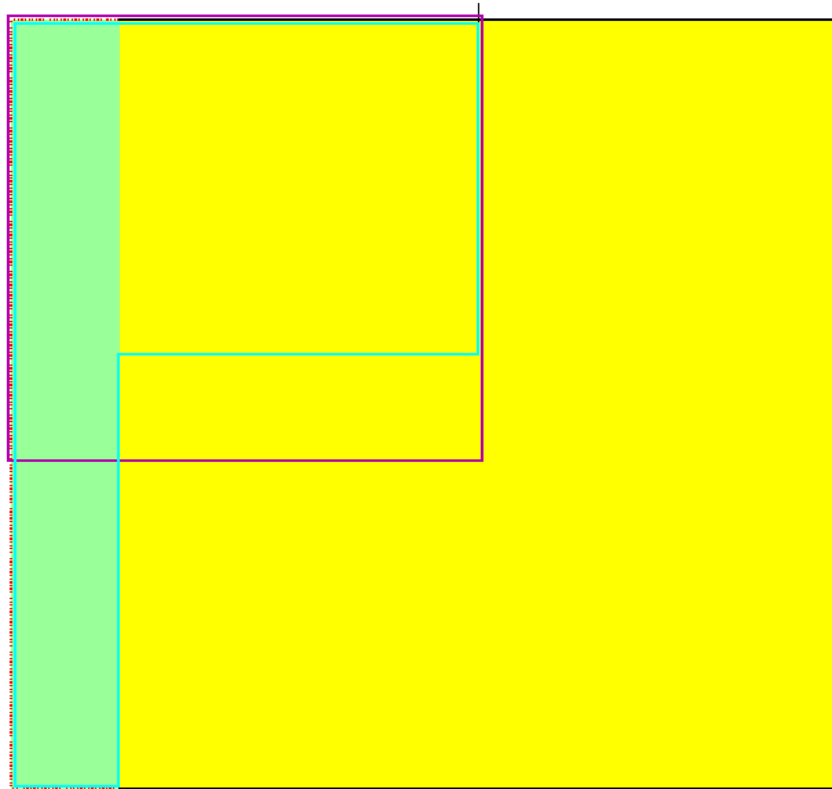
◦ Allora aggiungi il quadrato di metà radici al numero; alla sua radice aggiungi il numero di metà radici; avrai la radice del censo cercato.

Esempio: un censo sia uguale a dieci radici e 39 denari. Aggiungi dunque il quadrato di metà radici, cioè 25, a 39; far` 64; alla cui radice, che è 8, aggiungi 5, cioè metà radici; verrà 13 che dà la radice del censo richiesto. Quindi il censo è 169.

# • Quando radices et numerus equantur censui

## *Censo uguale a radici e numero*

Esempio: un censo sia uguale a dieci radici e 39 denari.



Si costruisce il quadrato pari al censo con lato incognito (in rosso tratteggiato) maggiore di 10. Su uno dei suoi lati si costruisce un rettangolo con l'altro lato pari a 10 (in giallo). poich' la superficie del rettangolo giallo ` pari a 10 radici, il rettangolo verde che resta deve essere pari a 39.

Costruiamo ora un quadrato su met` del lato di 10. Questo quadrato pi` la striscia verde (cio` la superficie con il bordo azzurro), per la stessa proposizione Elem. II, VI, ` pari al quadrato col bordo viola, che ` dunque 64.

Aggiungendo al suo lato, 8, met` del lato di 10, si ottiene il lato del censo, 13, e dunque il censo, 169.

# • Quando census et numerus equantur radicibus

*Censo e numero uguale a radici*

• Et cum occurrerit quod census et numerus equentur radicibus scias hoc fieri non posse nisi numerus fiat equalis vel minor quadrato medietatis radicum: qui si equalis fuerit habebitur pro radice census numerus medietatis radicum; et si numerus qui cum censu equatur radicibus fuerit minus quadrato medietatis radicum, extrahe ipsum numerum ex ipso quadrato et eius quod remanserit radicem extrahe ex numero medietatis radicum; et si quod remanserit non erit radix quesiti census tunc addes id quod extraxisti super numerum de quo extraxisti et habebis radicem quesiti census.

# • Quando census et numerus equantur radicibus

## *Censo e numero uguale a radici*

E se capitasse che censo e numero siano uguali a radici sappi che questo non può essere a meno che il numero sia minore o uguale al quadrato di metà radici.

Se fosse uguale si avrebbe per radice del censo il numero di metà radici.

E se il numero che con il censo è uguale a radici fosse meno del quadrato di metà radici, sottrailo da quel quadrato e sottrai la radice di ciò che resta dal numero di metà radici.

# • Quando census et numerus equantur radicibus

## *Censo e numero uguale a radici*

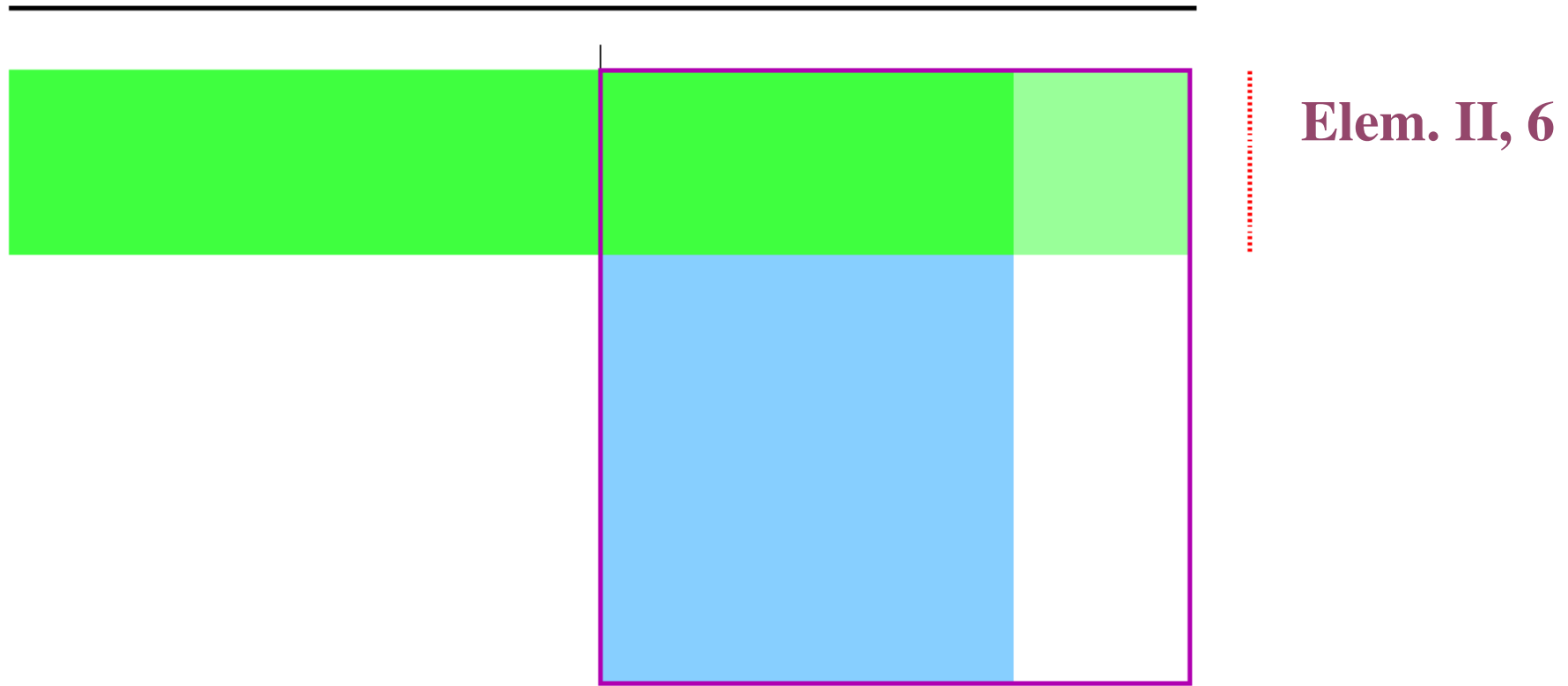
Esempio: un censo e 40 uguale a 14 radici.

Dimezzando le radici si ha 7, dal loro quadrato, cioè 49, toglì 40, rimane 9; sottrai la sua radice, cioè 3, da metà delle radici, cioè 7; rimarrà 4 come radice del censo cercato e il censo è 16; questo sommato con 40 fa 56 che sono 14 radici dello stesso censo, poiché moltiplicando la radice di 16 per 14 viene 56.

Oppure somma la radice di 9 con 7, verrà 10 come radice del censo cercato; e così il censo sarà 100 che sommato a 40 fa 140 che sono 14 radici di 100 poiché dal prodotto della radice di 100 per 14 viene 140. E così se non si resolvesse la questione con la sottrazione, si risolverà senza dubbio con l'addizione.

# • Quando census et numerus equantur radicibus

*Censo e numero uguale a radici -costruzione geometrica*

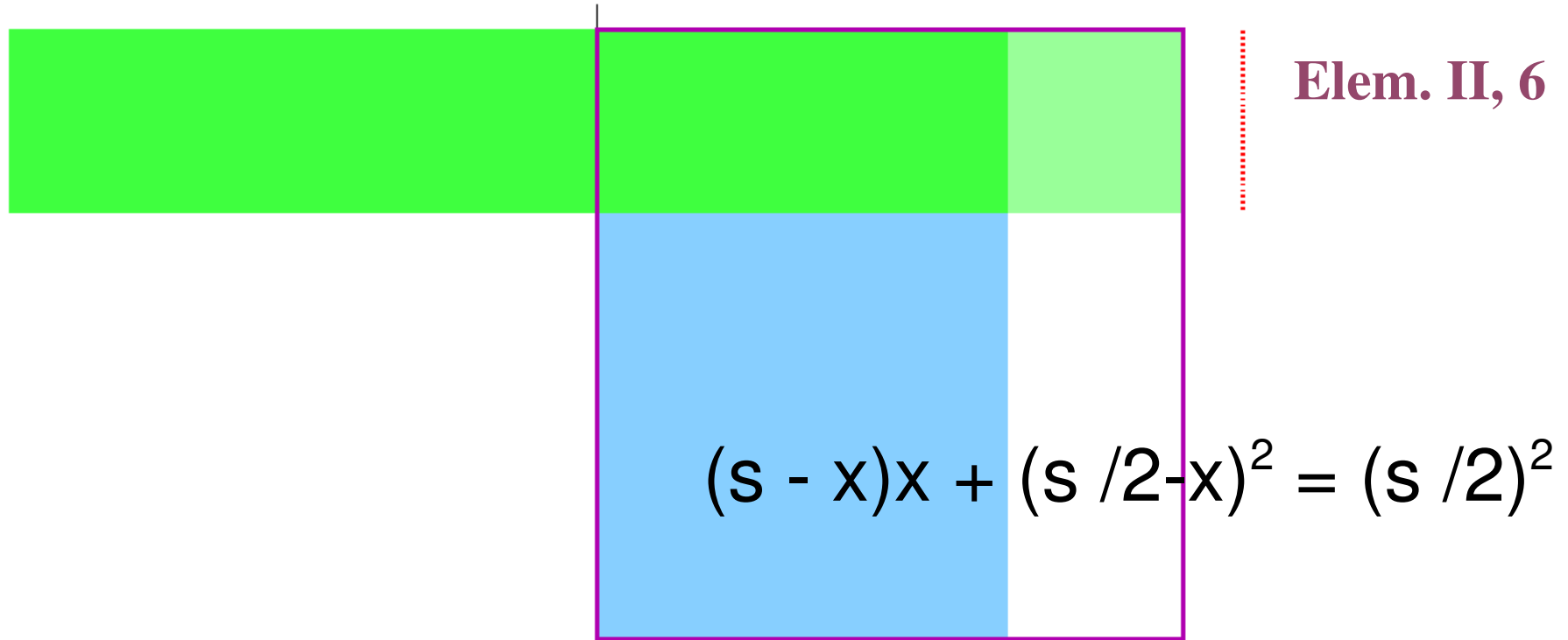


Se si divide un segmento in parti uguali e in parti disuguali, il rettangolo delle parti disuguali, più il quadrato della differenza tra la parte maggiore e la metà della linea, è uguale al quadrato della metà.



# • Quando census et numerus equantur radicibus

*Censo e numero uguale a radici -costruzione geometrica*

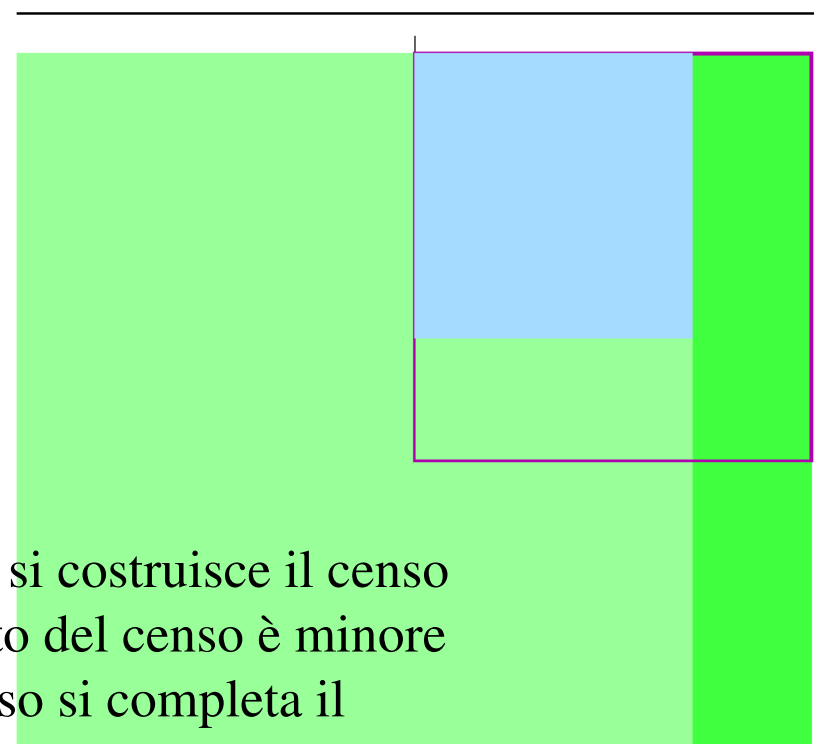
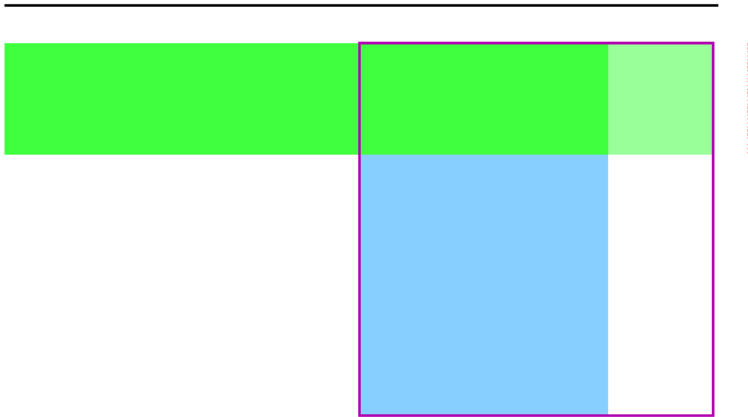


Se si divide un segmento in parti uguali e in parti disuguali, il rettangolo delle parti disuguali, più il quadrato della differenza tra la parte maggiore e la metà della linea, è uguale al quadrato della metà.

# • Quando census et numerus equantur radicibus

## *Censo e numero uguale a radici -costruzione geometrica*

un censo e 40 uguale a 14 radici

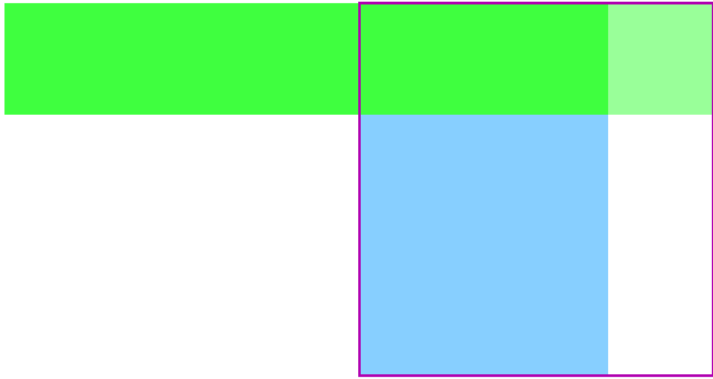


Si traccia un segmento lungo 14 e su una parte si costruisce il censo (quadrato verde chiaro). Ci sono due casi: il lato del censo è minore della metà di 14 oppure è maggiore. In ogni caso si completa il rettangolo che ha come lati 14 e il lato del censo (parte in verde scura e verde chiara). Questo rettangolo sar` pari a 14 radici. Poich` il quadrato verde chiaro ` il censo, la parte rimanente (verde scuro) sar` 40. Questa sommata al quadrato azzurro ` , per la prop. V del libro II, uguale al quadrato con il bordo viola, cio` 49. Dunque il quadrato azzurro ` 9 e il suo lato ` 3.

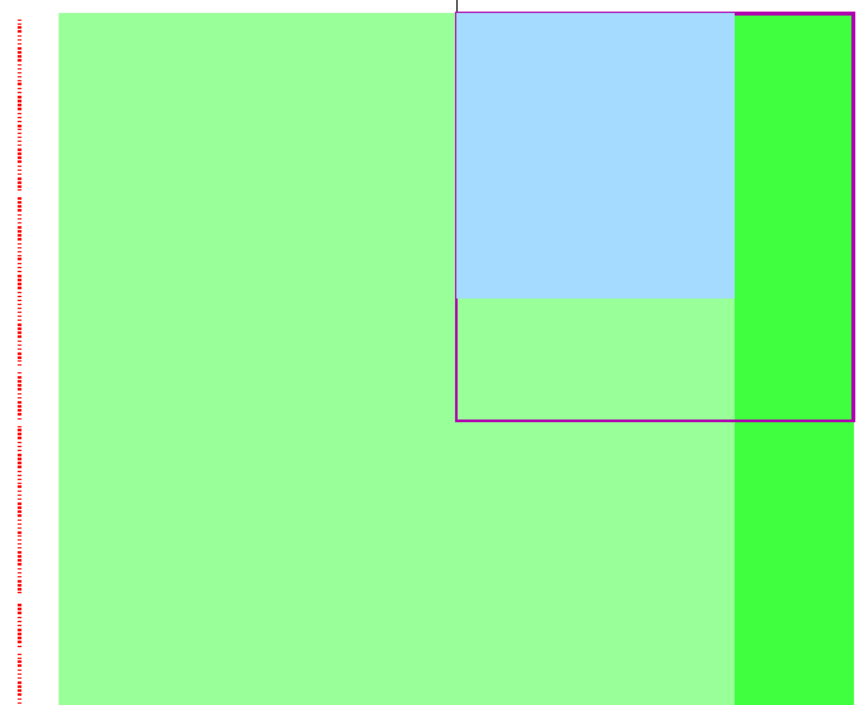
# • Quando census et numerus equantur radicibus

*Censo e numero uguale a radici -costruzione geometrica*

un censo e 40 uguale a 14 radici



Primo caso:  
Per ottenere il lato del  
censo da 7 tolgo 3.



Secondo caso:  
Per ottenere il lato del  
censo a 7 aggiungo 3.

# • **Expliciunt introductiones algebre et almuchabale**

## **Incipiunt questiones eiusdem**

- Divisi in duas partes 12 et multiplicavi unam earum per 27; et quod provenit fuit equale quadrato alterius partis.

- Ho diviso in due parti 12 e ho moltiplicato una delle due parti per 27; quel che è venuto era uguale al quadrato dell'altra parte.

### **Passo 1: equazione**

Fa' così prendi la cosa come una delle due parti; rimarranno 12 meno la cosa per l'altra; moltiplicati questi per 27 viene 324 meno 27 cose; moltiplica la cosa per la cosa, cioè la prima parte per se stessa; viene il censo che è uguale a 324 denari meno 27 cose.

# • **Expliciunt introductiones algebre et almuchabale**

## **Incipiunt questiones eiusdem**

- Divisi in duas partes 12 et multiplicavi unam earum per 27; et quod provenit fuit equale quadrato alterius partis.

- Ho diviso in due parti 12 e ho moltiplicato una delle due parti per 27; quel che è venuto era uguale al quadrato dell'altra parte.

censo uguale a 324 meno 27 cose.

### **Passo 2: restauratio (algebra)**

Aggiungendo queste (27) cose da entrambe le parti viene che il censo e 27 cose sono uguali a 324 denari; e cos` questa questione si ` ridotta a una delle tre regole composte, a quella cio` in cui censo e radici sono uguali a numero.

# • **Expliciunt introductiones algebre et almuchabale**

## **Incipiunt questiones eiusdem**

- Divisi in duas partes 12 et multiplicavi unam earum per 27; et quod provenit fuit equale quadrato alterius partis.

- Ho diviso in due parti 12 e ho moltiplicato una delle due parti per 27; quel che è venuto era uguale al quadrato dell'altra parte.

censo e 27 cose uguali a 324

### **Passo 3: regola**

Dunque per procedere secondo quella regola moltiplica  $13 + \frac{1}{2}$ , cioè metà radici, in sé, saranno  $182 + \frac{1}{4}$ ; sommale con 324, saranno  $506 + \frac{1}{4}$ , la cui radice trova così fanne quarti, saranno 2025, e a questo numero trova la radice, sarà 45; dividila per la radice di 4, che sta sotto il segno di frazione, cioè per 2, verrà  $22 + \frac{1}{2}$ , di questo estrai la metà delle radici, rimarrà 9 per la radice del censo che è una parte; a questa arrivare a 12 manca 3, che è la seconda parte.

