LA GEOMETRIA PRATICO-INTUITIVA NELLA STORIA DELL'INSEGNAMENTO

Marta Menghini

Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma

Due aspetti della geometria:

- astratto "speculativo" (Platone, Elementi di Euclide)
- pratico (applicazioni)

Nell'*insegnamento*:

- approccio deduttivo / razionale
- approccio pseudo-pratico/intuitivo.

Nel XIX e XX secolo enfasi sul secondo aspetto → geometria sperimentale e metodi che hanno favorito la trattazione della geometria nella scuola di base.

La Geometria pratica

Sempre stata presente nella storia della geometria.
Popolazioni diverse svilupparono abilità pratiche diverse.

Del mondo greco ricordiamo *principalmente* il sistema di logico culminato con l'opera di Euclide che ha fortemente influenzato l'insegnamento della geometria.

I Romani: geometria pratica, anche per *l'insegnamento* nelle loro scuole.

"Riguardo alla geometria, si afferma che in parte è utile per le tenere età. Sostengono, infatti, che gli animi ne sono stimolati e l'ingegno sollecitato […] ma pensano che quella scienza, a differenza delle altre, non è utile quando è acquisita, ma nell'atto di venire appresa (Quintiliano, Istitutio Oratoria, I, 34, ecc.)

Ruolo educativo - attenzione al processo di apprendimento.

“DE PRACTICA GEOMETRIAE”, Fibonacci (1223).

Corrente che caratterizza la geometria del Basso Medioevo:

- **regole e metodi molto pratici per il calcolo di distanze e aree**
- **problemi che, nel corso del Medioevo, si trasformarono in "giochi matematici" (come nei *Ludi matematici* di Leon Battista Alberti).**

Testo di Fibonacci:

- utilizzato nelle Scuole d'abaco, scuole comunali per alunni che volevano imparare un mestiere. *Più che memorizzare regole*.

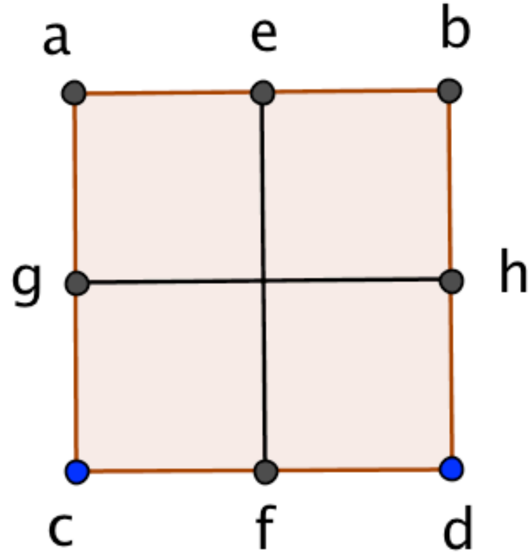
- non in contrasto con gli Elementi di Euclide. La sua geometria è semplicemente una cosa diversa. Usa numeri, aritmetica, esempi pratici; le dimostrazioni sono spesso solo verifiche numeriche.

- non ci sono strumenti per misurare o disegnare; non si parla di angoli.

- lo scopo è di "misurare tutti i tipi di campi" e "dividere campi” fra eredi.

***Calcolo della superficie di un quadrato*: la regola è data con un esempio.**

Dato un campo quadrilatero, equilatero e equiangolo di 2 pertiche per lato, dico che la sua area si trova moltiplicando il lato ac per il suo lato adiacente ab, cioè 2 pertiche per due pertiche.



Le rette ab e cd siano divise in due parti uguali nei punti *e* e *f*, si tracci la retta *ef*. Lo stesso [...] si tracci la retta *gf*. Allora il quadrilatero *abcd* è diviso in quattro quadrati, ognuno dei quali misura una pertica per lato. Quindi ci sono 4 *pertiche piane* in tutto il quadrilatero *abcd*.

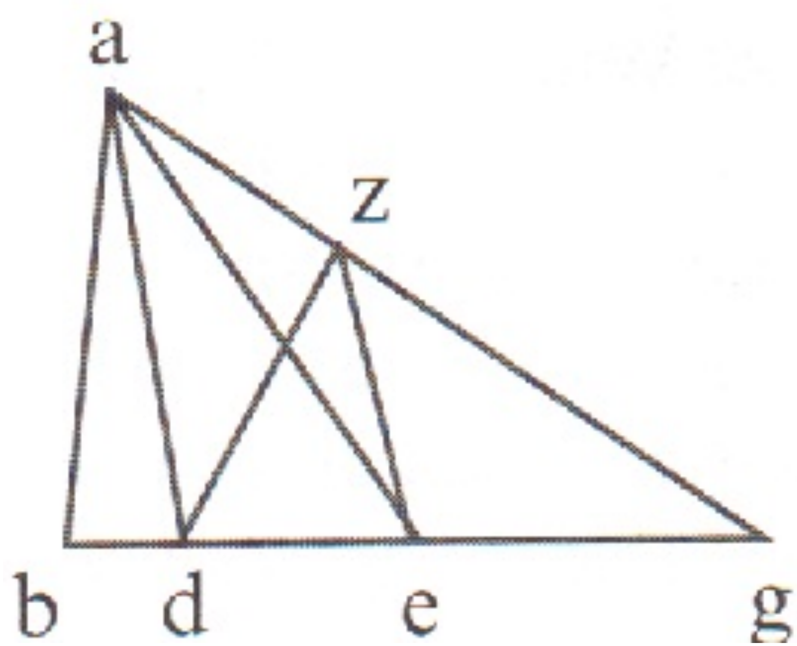
"Dimostra" che i quadrilateri sono effettivamente dei quadrati ...

La "divisione dei campi" in parti equivalenti: problemi più astratti

Iniziamo a trovare "rompicapo", sfide.

"dividere un triangolo in due parti uguali con una linea che parte da un dato punto su un lato":

Nel triangolo abg, sia dato il punto d. Divido il lato bg in due parti in e, traccio ad e ae, poi ez parallela a ad, e dz.



Dim: *ade* e *adz* equivalenti. A entrambi aggiungo il triangolo *abd.* Il triangolo *abe* è la metà di *abg*. Quindi anche il quadrilatero *abdz* è la metà di abg.

Problemi tipici dei testi di geometria pratica - non si trovano in Euclide.

Libri simili a quello di Fibonacci sono esistiti per oltre 300 anni.

“GEOMETRIAE LIBRI”: Pierre de la Ramée (Petrus Ramus), (1569).

Testo di geometria pratica; strumenti da disegno e lavoro, ma…

Ramus filosofo e educatore. Si presenta come alternativo a Euclide.

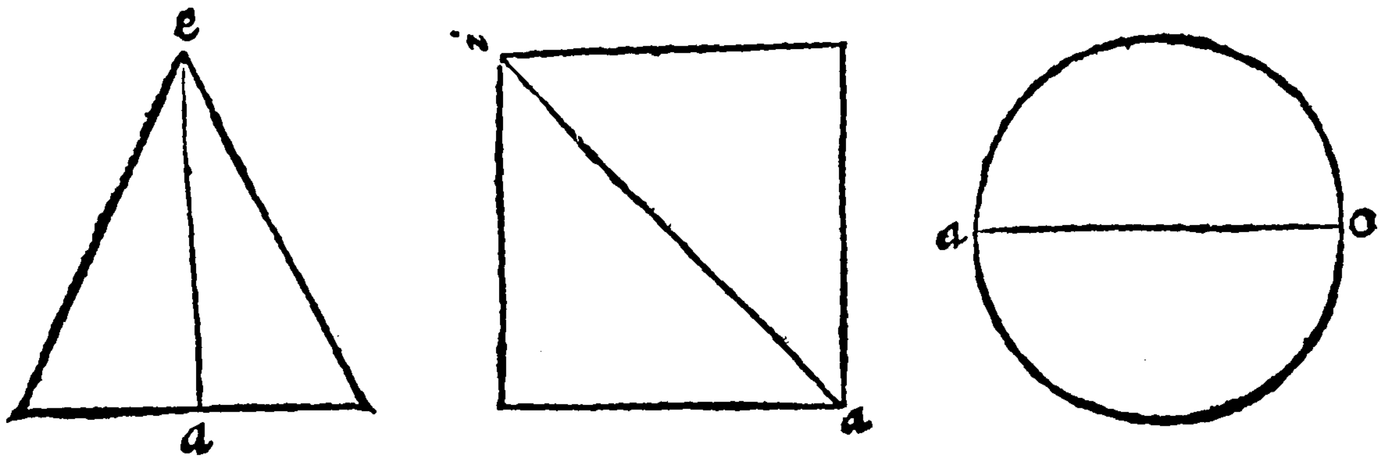
"la geometria è l'arte di misurare bene".

Per misurare bene, è necessario considerare la natura di tutto ciò che deve essere misurato: per confrontare queste cose una con l'altra ...

Presentazione di figure geometriche attraverso disegni, misure e costruzioni semplici: geometria *osservativa* per far acquisire *familiarità* con figure e proprietà.

Anche oggetti e relazioni insolite (giochi).

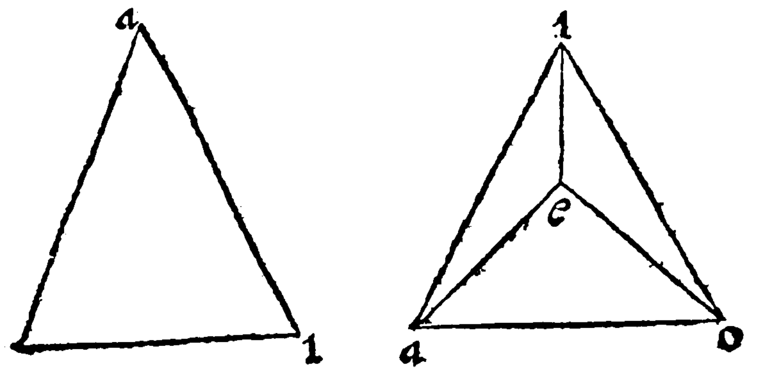
Il diametro è una linea retta inscritta in una figura per il suo centro.



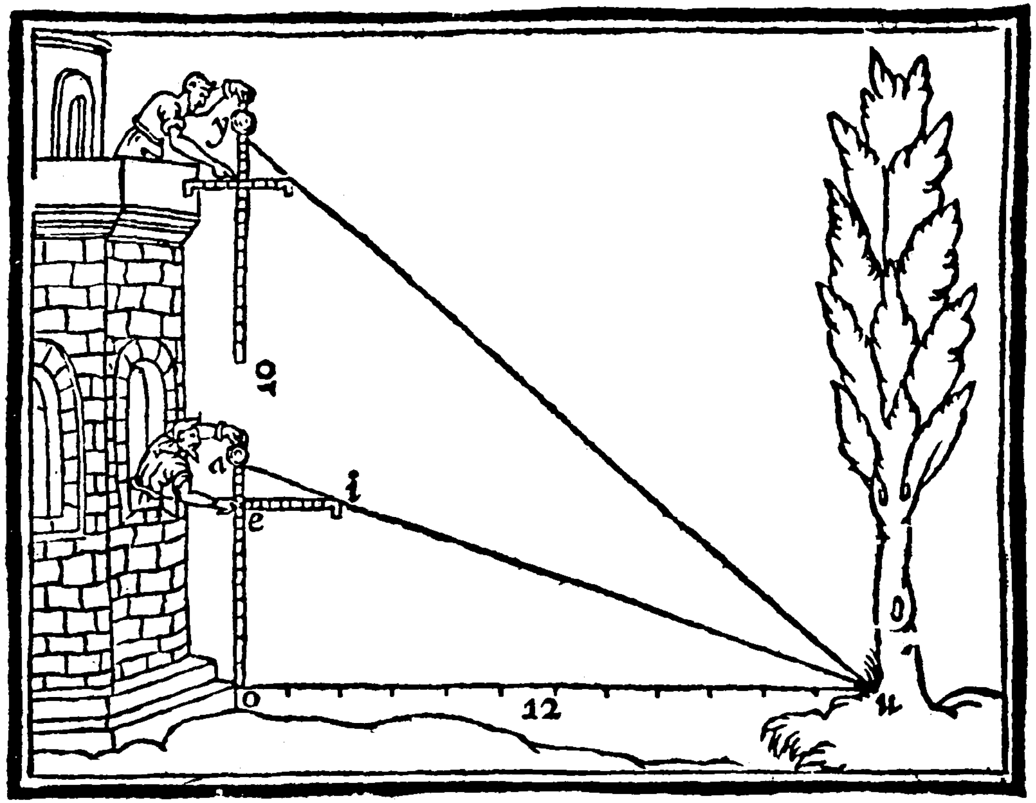
I diametri di una stessa figura sono infiniti.

Se una figura ha diametri tutti uguali allora è un cerchio.

11. *Una figura prima è una figura che non può essere suddivisa in figure più semplici.*



Problemi "classici" di geometria pratica:



Nel testo anche dimostrazioni supportate da costruzioni geometriche.

I “rompicapo” della geometria pratica del Medioevo e i “giochi” di Ramus caratteristici di una *libertà* che non appartiene alla tradizione Euclidea. Euclide non è “giocoso”.

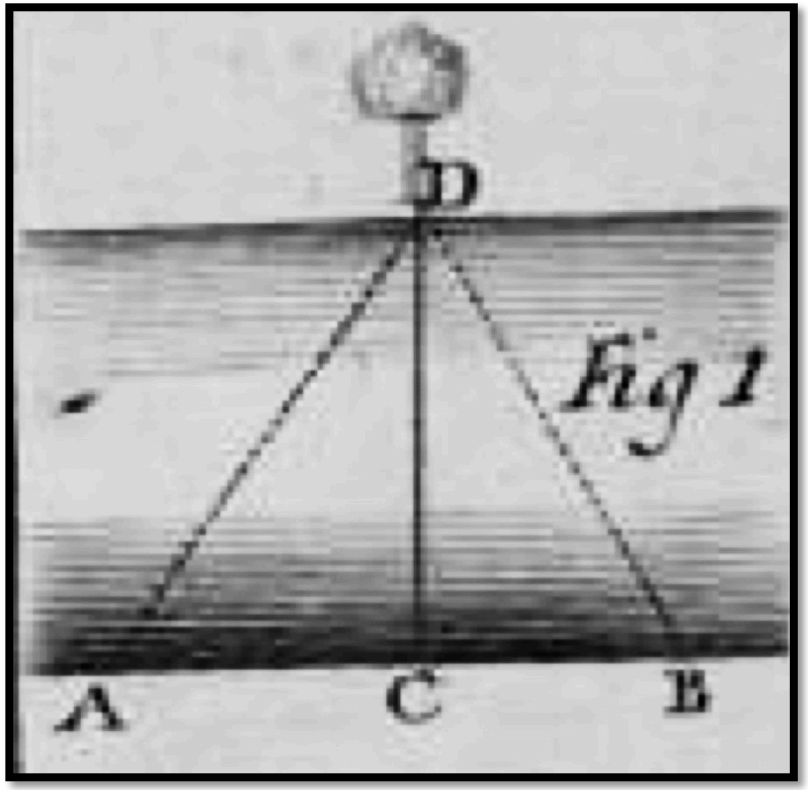
“ELEMENTS DE GÉOMETRIE, Alexis Clairaut 1741

Inizia con la misurazione dei campi, ma…*non* è un testo di geometria pratica.

Dalla misura come *obiettivo* alla misura come un *mezzo* per insegnare geometria per problemi.

Risolvere un problema "costruendo" gli elementi che si vogliono misurare. Attenzione al *processo* di costruzione e sulla *narrazione*.

[…] un uomo posto in D sulla riva di un fiume vuol sapere, quanto v’è dal luogo dove egli sta, all’altra riva AB.
E’ chiaro che […] bisogna prender la più corta di tutte le linee rette DA, DB etc., che si posson tirare dal punto D alla retta AB.
[…] questa linea più corta […] è la linea DC, che si suppone non pendere né verso A, né verso B.



Questa è dunque quella linea (chiamata perpendicolare) sulla quale bisogna riportare la nota misura per aver la distanza DC dal punto D alla retta AB. [...] Dunque era necessario, che vi fosse un metodo per tirar delle perpendicolari."

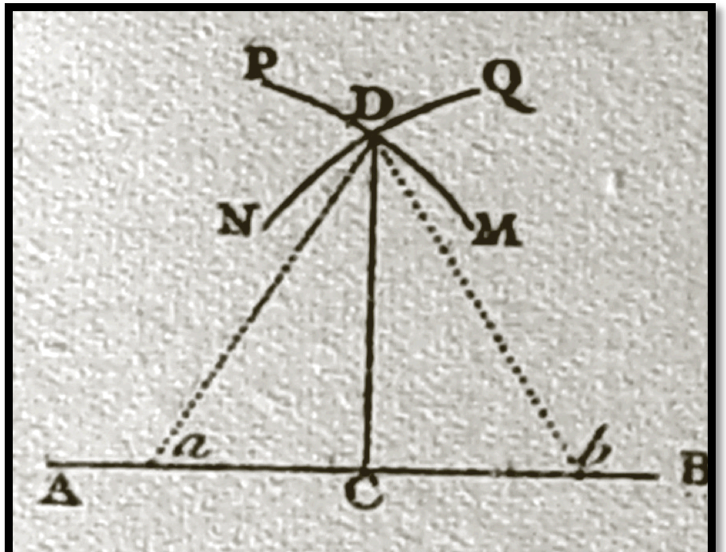


Fig. 5.

Altri casi in cui è necessaria una perpendicolare, per esempio per disegnare un rettangolo, e poi:

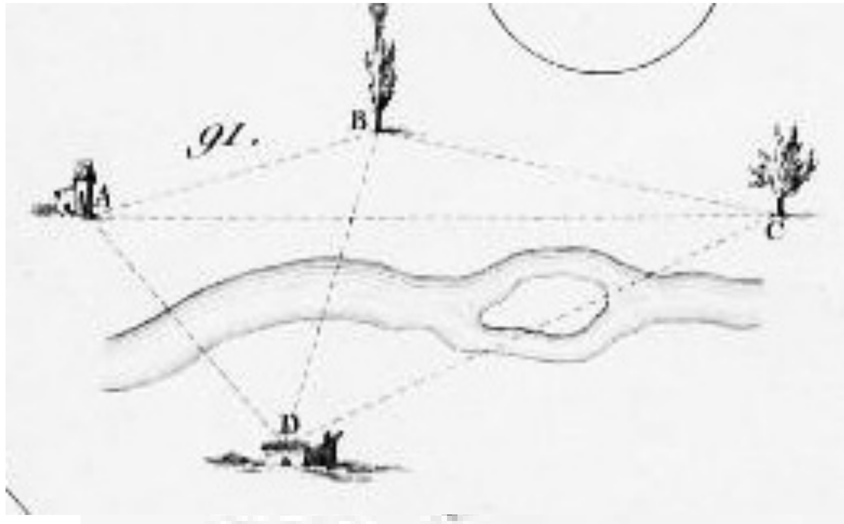
il punto C potrebbe essere trovato con prove ripetute, ma questo metodo lascerebbe la mente insoddisfatta, allora: si prenda una comune misura, per esempio una corda, un compasso di una determinata apertura, ...

Descrizione molto precisa; importanza del "momento" di apprendimento, citato da Quintiliano.

Il testo di Clairaut non contiene dimostrazioni, ma costruzioni e argomentazioni.

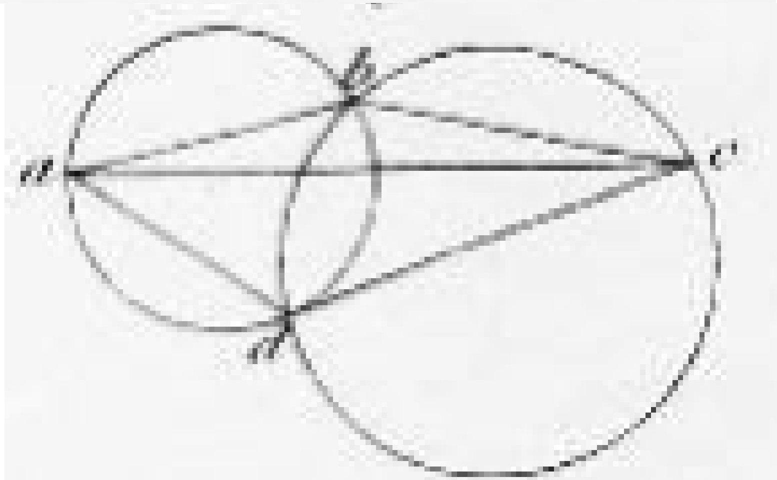
Nella terza parte anche modelli concreti per la geometria dello spazio.

Seconda parte più rigorosa, come afferma Clairaut stesso: consentiti solo riga e compasso. Continua con il metodo di soluzione di problemi.



Non presenta i teoremi classici di Euclide; unica dimostrazione: teorema relativo agli angoli alla circonferenza.

L'applicazione del teorema è uno dei pochi problemi impegnativi.



Le sfide di Clairaut consistono piuttosto nella richiesta allo studente di seguirlo nel processo di soluzione di un problema, prestando attenzione alle costruzioni necessarie.

Successo di Clairaut circa un secolo dopo la stesura.

1836 tradotto per le scuole irlandesi; 1852 ristampato in francese e adottato. Utilizzato nelle scuole tecniche italiane (i primi 3 anni di istruzione tecnica) fino agli inizi del 20 ° secolo.

“ANFANGSGRÜNDE DER GEOMETRIE”, Franz von Mocnik, 1846.

Adottato nei territori austro-ungarici, e nord d'Italia prima dell'unificazione, indirizzato alle scuole tecniche e professionali.

Testo per le applicazioni pratiche della geometria, *ma* in un sistema scolastico esteso; emergono prime teorie pedagogiche.

Prima parte: *Formenlehre* (Pestalozzi) comprende disegno a mano libera, alcuni suggerimenti relativi alla visione prospettica e a misure pratiche.

Seconda parte: *Grundlehre*, costruzioni con riga e compasso e dimostrazioni.

Problemi di agrimensura:

Vogliamo piantare un palo in un campo, allineato con altri due pali A e B, dobbiamo metterci dietro al palo B mentre un assistente va con il palo C dove esso pressappoco dovrebbe essere piantato. Poi gli possiamo indicare con la mano dove spostarsi in modo che possiamo vedere il palo C allineato con A e B

***Disegno a mano libera*: linee orizzontali a distanze uguali; somma o differenza di segmenti (non c'è riferimento a misure numeriche); disegno approssimato di multipli o sottomultipli di un segmento.**

Immagini geometriche, come le diagonali di un quadrato, aiutano gli alunni a tracciare le perpendicolari (a mano libera).

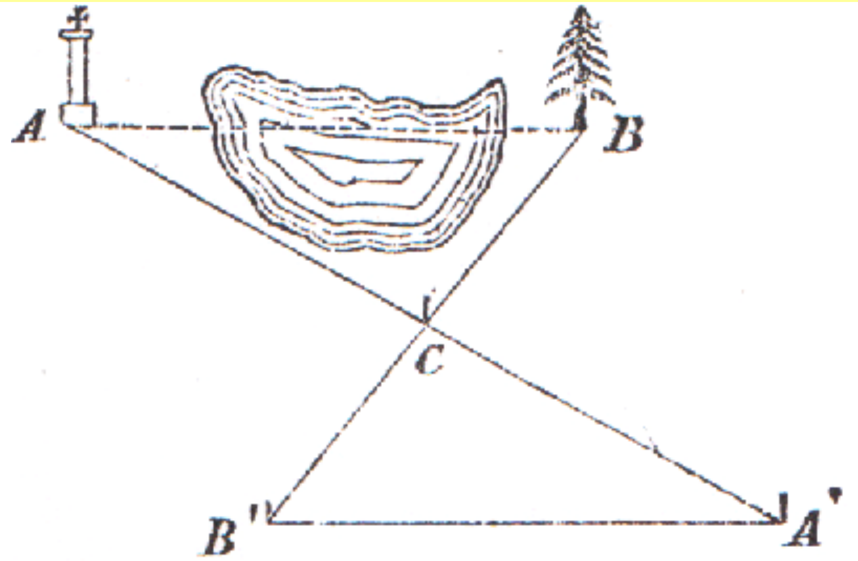
Strumenti per misurare e disegnare sono introdotti solo dopo che un concetto è stato esplorato con il disegno a mano libera.

Il lavoro proposto mira a dare all'allievo *familiarità* con gli argomenti; qualcosa in comune con Ramus. Aumenta lentamente il livello di rigore.

Esempio: Nella prima parte, triangoli congruenti sono triangoli che hanno tre lati uguali e tre angoli uguali.

Nella seconda parte: dimostrazione dell'uguaglianza di due triangoli che hanno tre lati uguali. Costruzione, con riga e compasso, di un triangolo uguale a un altro, e di un triangolo dati tre elementi.

E applicazioni pratiche:



GEOMETRIA SPERIMENTALE E GEOMETRIA INTUITIVA

Inizio 20° secolo:

- **necessità di nuove metodologie per l'insegnamento della geometria.**
- **considerazione più ampia dei processi mentali dell'alunno**
- **proposte per una geometria introduttiva (propedeutica) basata su considerazioni intuitive o sperimentali e sul disegno prima di iniziare la trattazione della geometria razionale.**
- **introduzione dell'insegnamento della geometria nella scuola media**
- **preludio nel 19° secolo; forte impulso internazionale, impegno di matematici importanti: Felix Klein, Emile Borel, Carlo Bourlet, John Perry, Charles Godfrey, Peter Treutlein.**

In molti paesi nuovi programmi e libri di testo.

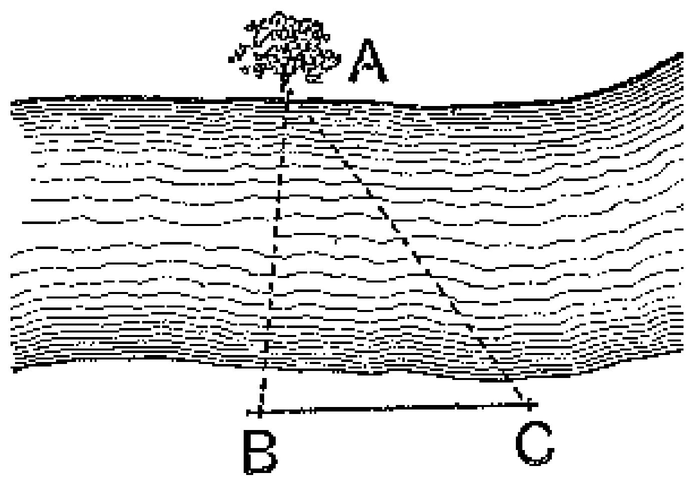
Influenza internazionale della *geometria sperimentale* di Perry (1901): valore educativo di procedure *sperimentali* nel primo approccio alla geometria euclidea. *la materia deve essere insegnata con riferimento alla sua utilità*.

GEOMETRIA PRATICA, Joseph Harrison (1903) scritto in base alle proposte di Perry.

Prefazione: molte scuole britanniche dotate di *laboratori* in cui effettuare "*lavori sperimentali che coinvolgono misure quantitative*", è l'ora di "*riconoscere che la matematica elementare dovrebbe essere insegnato in relazione a tale tipo di lavoro*". Non è una geometria propedeutica, il corso non prosegue con la geometria razionale. (Non esempio positivo).

Dettagliata descrizione degli strumenti di misura e disegno e del loro uso. Problema iniziale analogo a quello di Clairaut:

La figura mostra come la larghezza di un fiume potrebbe essere accertata da una persona su una sponda. Potrebbe selezionare e misurare una base BC. Poi notare qualche oggetto voluminoso A sull'altra sponda, e con un sestante misurare i due angoli ABC e ACB. Potrebbe quindi tracciare su un foglio il triangolo ABD, e misurarne larghezza.



(Harrison non suggerisce di lavorare in scala ...)

Le “dimostrazioni” presenti nel testo:

"L'angolo inscritto in una semicirconferenza è un angolo retto":

Verifica: Disegna una qualunque semicirconferenza di diametro AA’. Traccia diversi angoli ABA’ nella semicirconferenza. Verifica [con il goniometro] che in tutti i casi l'angolo ABA’ è di 90 °.

Fibonacci verifica i teoremi assegnando misure numeriche ai segmenti coinvolti, Harrison li verifica misurando.

Ma: nulla che possa essere considerato un stimolo per l’alunno.

Molte obiezioni a questa metodologia, ma

Approccio intuitivo - sperimentale alla geometria considerato un aiuto per superare le difficoltà causate dalla deduzione logica del testo di Euclide.

Testi di geometria *intuitiva* o *propedeutica* dedicati alle classi inferiori, influenzati dall'intera corrente di testi di geometria pratica:

disegno a mano libera (Veronese, 1901), uso di strumenti da disegno (Borel, 1905), l'uguaglianza dei triangoli stabilita attraverso la possibilità di costruirli (Clairaut), misura, uso dei numeri, lavoro per problemi (molti di agrimensura)... Si aggiunge l'uso della piegatura della carta e del materiale concreto (già presente in Clairaut).

(Ri)proposte le *trasformazioni geometriche*, corrispondenti ad operazioni eseguibili in pratica, utili per confrontare segmenti e figure, e per introdurre semplici concetti: le rette parallele possono essere introdotte tramite la simmetria centrale o la traslazione.

Metodi della geometria pratica *non solo* per la scuola dell'obbligo.

Alternativa alla geometria razionale* classica con ricorso alla misura (uso dei numeri), uso di strumenti di disegno e misura, nuove dimostrazioni (con trasformazioni geometriche), nuovi teoremi, riferimento a problemi concreti che lo studente doveva risolvere *attivamente.

Henrici e Treutlein (1881-1883), Borel (1905), Godfrey e Siddons (1903), e, intorno al 1960, i testi del SMP (1970).

L'introduzione della geometria intuitiva in Italia agli inizi del '900.

Esigenza di un approccio intuitivo alla geometria riconosciuta prima che in molti paesi Europei:

1881- ***Geometria Intuitiva e disegno geometrico*** **introdotti nei primi tre anni del ginnasio. La geometria intuitiva doveva**

> ***procurare ai giovanetti, con metodi facili e per quanto sia possibile con prove di fatto, le prime e più importanti nozioni della geometria, … far desiderare lo studio razionale della stessa geometria, che è riservato al liceo.***

1884- il ministro Coppino abolisce lo studio della geometria intuitiva nel ginnasio inferiore. Decisione dovuta a Eugenio Beltrami:

> ***la determinazione dei limiti e dell'indole di questo insegnamento non è suscettibile di forma assoluta e non è … supplita … da una tradizione secolare.***

Ciò non riguarda la Scuola Tecnica, dove dal 1867 si suggerisce un metodo grafico-intuitivo anche per produrre semplici deduzioni.

1900 - la geometria intuitiva del ginnasio inferiore è ripristinata. Per evitare inconvenienti, il programma prevede soltanto *nozioni elementari riguardanti la terminologia delle figure geometriche più semplici, e le regole di calcolo per le lunghezze, aree e volumi, nonché i primi rudimenti di disegno geometrico*.

Il nuovo programma

costituisce una ripetizione ed un ampliamento delle nozioni acquistate dagli alunni nelle scuole elementari ed è visto sotto l'aspetto pratico…

LIBRI DI TESTO AGLI INIZI DEL 1900:

***Giuseppe Veronese* (1901).**

Non cerca di spiegare teoremi, ma di spiegare gli *assiomi*

per anticipare quello che gli alunni vedranno in seguito: assiomi di incidenza, di ordinamento, di *congruenza*.

Parola assioma mai menzionata.

Un segmento di una retta non è congruente ad una sua parte, per esempio il segmento AB della figura non è congruente a CD. Ciò può essere verificato ad occhio, o con una striscia di carta o con il compasso.

A C D B

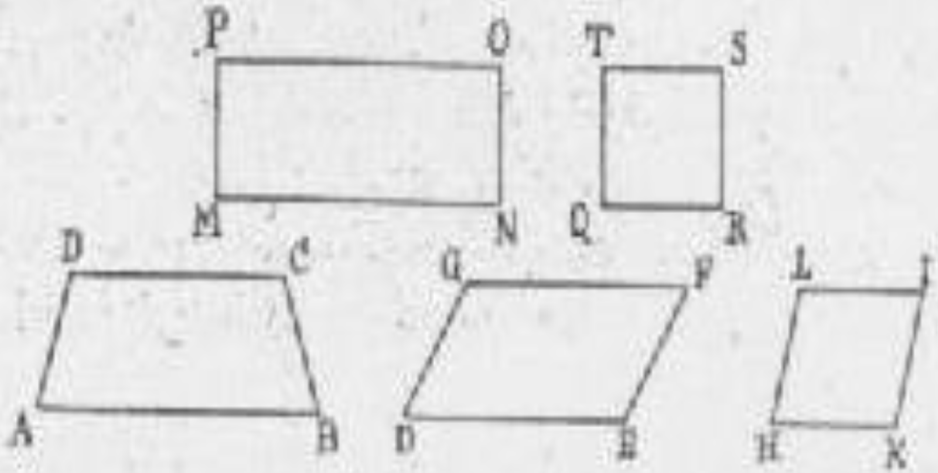
Oppure, con riferimento agli assiomi di ordinamento:

Ogni segmento della retta è invertibile. Cioè il segmento AB è uguale allo stesso segmento, considerato nella direzione opposta BA […] per verificare che il segmento rettilineo AB è uguale al segmento BA basta ricorrere alla lista di carta o ad un filo teso o al compasso

Assiomi non difficili, ma ovvi; difficile comprendere il valore dell’argomentazione.

Definizioni elementari di particolari triangoli, quadrilateri e poligoni senza nominare proprietà, con riferimento ad una figura.

42. Fra i quadrangoli vanno notati: il **trapezio** che ha



e lati paralleli (**basi**) come il quadrangolo *ABCD*; il
rallelogramma che ha due coppie di lati paralleli, come
EFG.

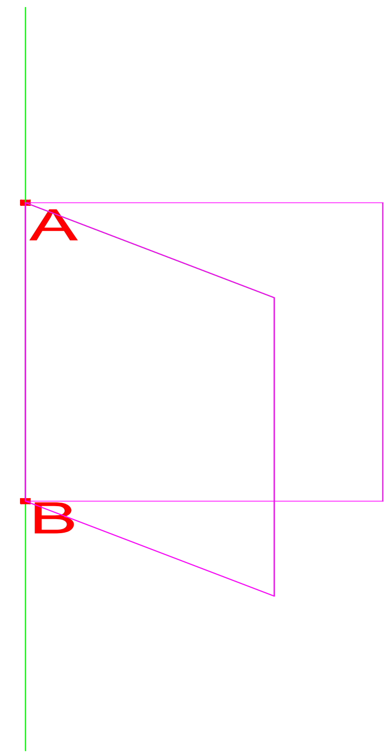
Giovanni Frattini (1901).

Illustra proprietà (di fatto *assiomi di incidenza*) per il piano e per lo spazio. Per esempio,

per una retta e per un punto fuori di essa passa un piano, e non vi passa che quello.

Si consideri una retta AB e un punto O fuori di essa.

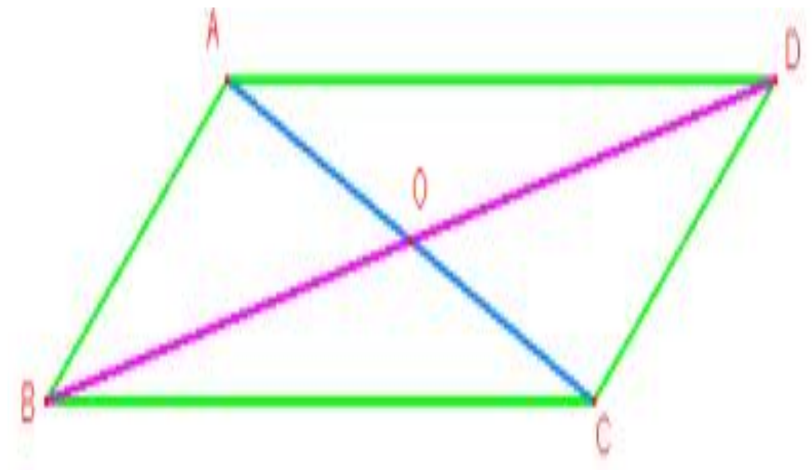
Per la retta si faccia mentalmente passare un piano, e poi s'immagini che una delle due bande nelle quali il piano è diviso dalla retta, giri intorno a la retta stessa, come un'immensa banderuola intorno all'asta. La banda, compiendo un giro, descriverà tutto lo spazio: passerà dunque a un certo istante per il punto O, ma non vi passerà che una volta sola.



Più peso alle proprietà dei poligoni, con qualche semplice dimostrazione.

In un piano per un punto a una retta si può condurre una perpendicolare, e non si può condurre che quella.

Si pieghi infatti il piano, quasi immenso foglio di carta, per ottenerne l'angolo retto; e si faccia in modo che, delle piegature, una segua la retta alla quale si vuol condurre la perpendicolare, e l'altra contenga il punto pel quale la perpendicolare deve passare. Quindi si spieghi il foglio, e vi si vedrà impressa la traccia della perpendicolare dal punto alla retta.



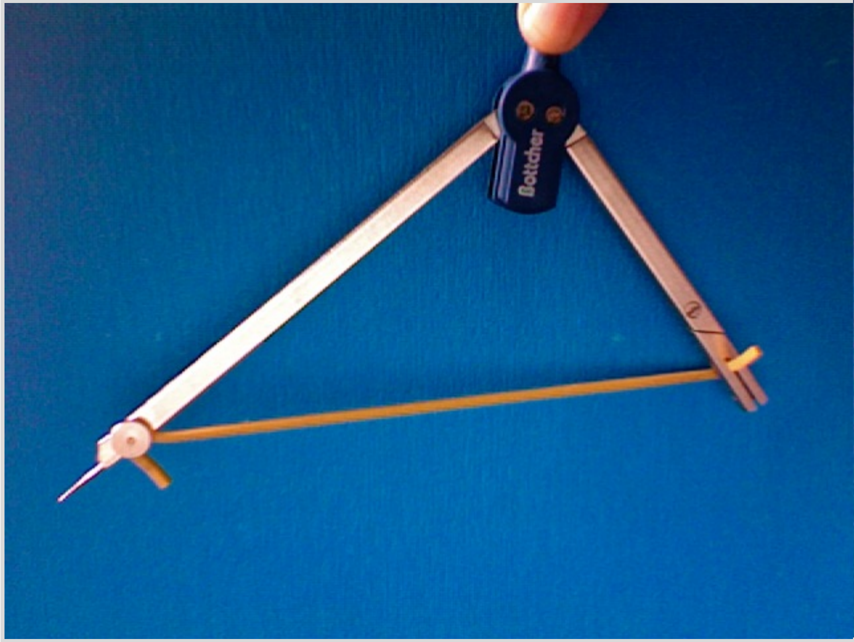
Le diagonali di un parallelogramma si dividono scambievolmente per metà.

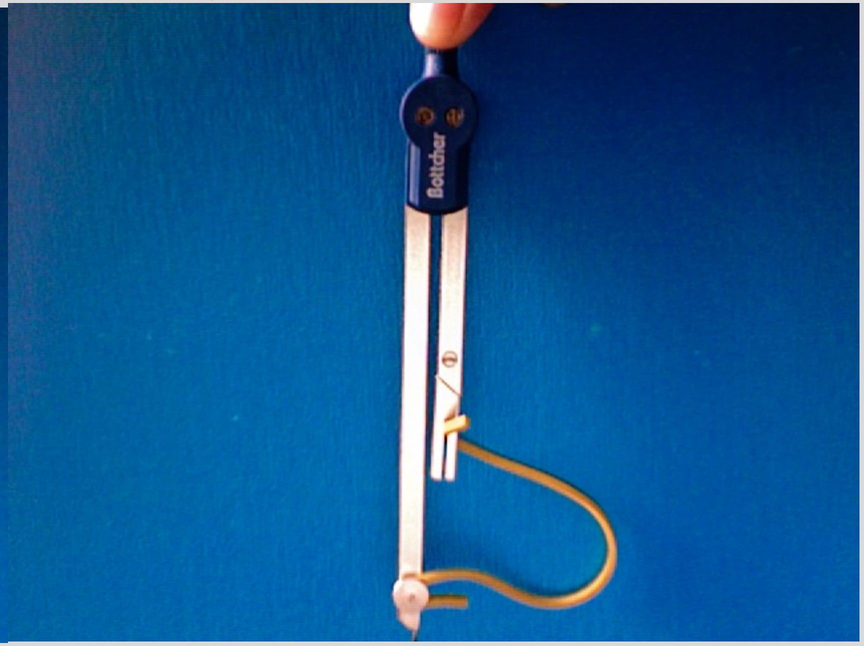
Se il parallelogrammo … venisse staccato dal foglio del disegno, il vuoto potrebbe essere colmato, rimettendo il parallelogramma nella posizione di prima, o mettendo l'angolo A sull'eguale C, il lato AD sull'eguale CB … In tal modo le diagonali delle figura, rovesciate, tornerebbero nella posizione di prima. Lo stesso farebbe il loro punto di incontro. E i due segmenti OC e OA si scambierebbero: segno che sono uguali..

Simmetria centrale, usata in modo pratico, come strumento.

Ciascun lato di un triangolo è maggiore della differenza tra gli altri due.

S'immagini infatti un triangolo di cui due lati sieno rappresentati da aste unite a cerniera come le gambe di un compasso, e il terzo da un filo teso. Ravvicinando le due aste, fino a riportare la minore sulla maggiore, il filo si rallenta tra un estremo e l'altro della loro differenza. Questa differenza è dunque minore della lunghezza del filo, cioè del terzo lato del primitivo triangolo.





Frattini presenta dimostrazioni con metodi pratici. Cerca di coinvolgere gli alunni "immaginando" materiali concreti.

Altri libri di testo

Costanzo e Negro (1905). Non ci sono argomentazioni di carattere sperimentale né dimostrazioni, ma troviamo spesso la frase "l'esperienza insegna e la geometria elementare dimostra" o "con la solita verifica sperimentale…"

Veronese (1907) aggiunge alcune verifiche pratiche (costruire un triangolo equilatero usando come compasso una striscia di carta lunga quanto la base), ma presenta anche vere e proprie dimostrazioni (per es. sull'uguaglianza degli angoli alterni interni).

Pisati (1907). "… nelle scuole medie inferiori voler prescindere interamente dall'indirizzo formale sarebbe grave errore. Le menti degli alunni nei primi anni sono di natura formaliste… L'insegnamento intuitivo della geometria non è poi più facile di quello formale". Il testo presenta teoremi e dimostrazioni classiche.

Ulteriori sviluppi

1905, Ministro Bianchi: ***di rifuggire da esposizioni e dimostrazioni fatte in modo astratto, e di usare semplici ragionamenti induttivi*.**

1905 - 1909 Commissione Reale (membro Giovanni Vailati): basare l'insegnamento della geometria su esercizi grafici e sulla costruzione di figure.

1919 - Severi:

Bisogna che nei primi gradi delle scuole l'insegnamento della matematica sia esclusivamente intuitivo. Col taglio della carta, coi modelli e con mille altri accorgimenti di cui si trovano esempi nei libri di testo inglesi, bisogna suscitare la "curiosità" degli allievi. [...] la geometria si dovrà considerarla, in questa fase, come una vera e propria scienza fisica.

Resterà quel che resterà ...

1923 - riforma Gentile. ***L'insegnamento della geometria non deve avere altro scopo che quello di mantenere vivo il ricordo delle nozioni geometriche apprese nelle scuole elementari e di fissare bene la nomenclatura*.**

Il testo di *Francesco Severi* (1926) non si attiene alle indicazioni. Numerosi teoremi (fino a angoli al centro e alla circonferenza) dimostrati in modo classico, salvo introdurre i movimenti (rotazione e simmetria) come ausilio alla dimostrazione, evitare la parola teorema e presentare gli assiomi con metodi pratici.

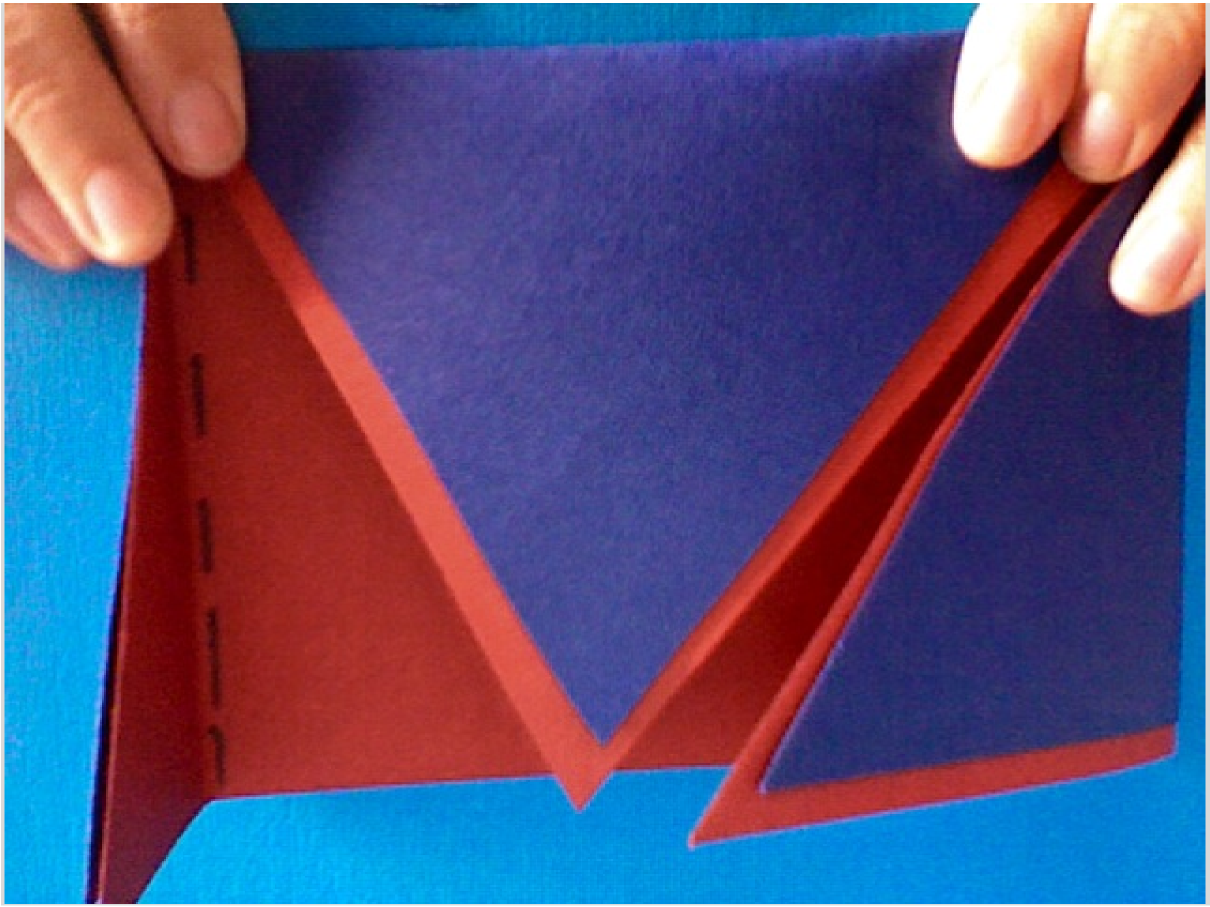
1940 - unificati, nella *Scuola Media*, i trienni inferiori del ginnasio, della scuola tecnica e dell'istituto magistrale.

Per la geometria: ***valorizzare le proprietà evidenti attraverso numerosi e convenienti esempi ed esercizi, che possano talvolta anche acquistare carattere dimostrativo...***

Ugo Amaldi (1941).

Arresta il processo di *razionalizzazione* della geometria. Misure e costruzioni geometriche integrate con gli altri argomenti. Figure e riferimenti alla vita pratica. Tagliare e piegare per verificare proprietà di triangoli e quadrilateri.

Per conoscere la somma degli angoli di un triangolo:



Oppure: *tracciare sul pavimento una grande triangolo, prolungandone un po' i lati. Un ragazzo percorrerà con un braccio teso in avanti i lati del triangolo fino alla posizione di partenza. Avrà ruotato di 360° (somma dei tre angoli esterni). Con gli angoli interni adiacenti daranno 3x180°=540°. Togliendo i 360° degli angoli esterni, rimangono 180° corrispondenti alla somma degli angoli interni.*

1945. Commissione Alleata all'Educazione. Per la scuola media: attenzione all'aspetto pratico e sperimentale.

Nel 1948 appare il testo *Geometria Intuitiva* di Emma Castelnuovo.

Procede sulla scia del testo di Amaldi: disegni, figure, riferimenti alla realtà e integrazione delle costruzioni e delle misure.

Si rivolge allo studente, per chiedergli di seguire un ragionamento o di fare una verifica, o per porre problemi.

Suggerisce l'uso di "materiale povero", come il *metro snodabile*, per confrontare diagonali, angoli, area di rombo e quadrato.

Conclusioni

Le *sfide matematiche* della geometria pratica del tardo Medio Evo entrate solo occasionalmente nei libri di testo, ma eredità della geometria pratica in una certa libertà nella scelta di problemi e metodi (inclusa l'intuizione).

Cambiamento di significato del termine "pratico", da "utile per le applicazioni" a "che può essere eseguito concretamente"; cambiamento avvenuto verso la fine del Medio Evo all'interno della stessa geometria pratica. Questo è il significato che più ha valenza didattica.

La geometria pratica suggerisce metodologie per una conoscenza che "include il processo di apprendimento".

Aspetto più rilevante per un approccio intuitivo: il ruolo *attivo* dell'alunno.

In diversi momenti i programmi hanno cercato di negare questo ruolo; interpretato diversamente dai vari autori. Emma Castelnuovo lo ha valorizzato al massimo.