

Sia benedetto questo errore!
La pericolosa intuizione del caso limite
da Guido a Emma Castelnuovo

Claudio Fontanari

<http://www.science.unitn.it/~fontanar/>

Salerno, 18 ottobre 2013

Emma Castelnuovo

È possibile un'educazione al "saper vedere" in matematica?

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 22 (1967),
n. 4, pp. 539–549, digitalizzazione disponibile in rete al sito:

[http://www.bdim.eu/
item?fmt=pdf&id=BUMI_1967_3_22_4_539_0](http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=BUMI_1967_3_22_4_539_0)

Le generazioni di allievi si moltiplicano, a triennio succede triennio. Cambiano le mode, si evolvono i costumi; i bambini di 11 anni che riceviamo oggi alla scuola media sono ben diversi da come eravamo noi a quell'età (...) Eppure, ad una serie di questioni di geometria e di aritmetica che si presentano nei primi giorni di scuola vengono date le stesse risposte oggi come ieri, dai bimbi di città come da quelli di campagna, dai figli di professionisti come da quelli di famiglie che non hanno una tradizione culturale.

- I bambini non vedono che se un quadrato articolabile si trasforma in un rombo l'area cambia, e sostengono che siccome il perimetro rimane invariato anche l'area deve rimanere invariata.
- Non vedono che se uno spago legato viene tenuto a mo' di rettangolo fra l'indice e il pollice delle due mani, avvicinando e allontanando le dita di una stessa mano l'area cambia, e sostengono anche qui che l'area non può cambiare perchè il perimetro è sempre lo stesso, e avvalorano questa tesi dicendo che se diminuisce l'altezza del rettangolo aumenta la base e quindi le dimensioni si compensano.

Perché non vedono?

Perché affermano cose assurde mentre si comportano da adulti in questioni della vita d'ogni giorno ben più complesse? Perché non vedono? In alcuni di questi problemi si tratta, in fondo, solo di guardare un oggetto. Eppure non c'è mai stata un'epoca come l'attuale in cui il senso della vista sia tanto esercitato; sappiamo benissimo quale attrazione esercitino i fumetti e la televisione. Ma, facciamo un esempio di tutti i tempi: un bambino, fin dalla più tenera età, non si stanca di osservare un mulino che ruota sotto la spinta dell'acqua, o una gru che sale e scende. È vero, ma un mulino fermo non gli interessa più e nulla gli dice una gru che non è in azione.

Ora, in matematica, non sono abituati a vedere situazioni dinamiche, per cui un quadrato snodabile e uno spago tenuto a mo' di rettangolo variabile nulla dicono loro: perché "non sanno vedere". Vogliamo scuoterli? Attiriamo la loro attenzione sul fatto che il quadrato-rombo può "schiacciarsi" e che il rettangolo di spago può ridursi a due fili sovrapposti. I casi "limite" parlano da sé: due oggetti mobili che non erano fino ad ora per nulla significativi diventano d'un tratto un problema matematico. (...) Basterebbero questi esempi per capire come l'atteggiamento matematico sorga dal "saper vedere" un concreto dinamico, costruttivo.

Emma Castelnuovo

L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva. Il materiale per l'insegnamento della matematica, La Nuova Italia Editrice, Firenze 1965, pp. 41– 65.

Somma degli angoli di un triangolo (p. 49)

Vogliamo che gli allievi fissino l'attenzione sugli angoli di un triangolo, osservino i tre angoli, e che questa osservazione nasca spontaneamente. Ora, gli angoli, come i lati, come qualunque elemento di una figura, non vengono osservati se la figura è statica; l'osservazione nasce non appena c'è una variazione. Il confronto di due triangoli o di alcuni triangoli potrà far dire che questo angolo è maggiore di quello o che alcuni angoli sono uguali, ma è un'osservazione che non dice nulla, che non porta a nulla. Per far sì che l'osservazione sia costruttiva nel senso matematico del termine occorre considerare infiniti casi, occorre vedere un caso insieme ai precedenti e a quelli che lo seguono; in breve, occorre far muovere la figura per gradi insensibili.

I casi limite (pp. 50–51)

(...) Dite ai bambini di osservare tutti questi triangoli e di scrivere le loro impressioni. (...) Vi diranno che quando un angolo diminuisce, gli altri aumentano e che – si è sempre portati, anche con una certa leggerezza, a vedere un qualche cosa di costante – quello che si perde in un angolo viene compensato da quello che si guadagna negli altri. Non è forse questa un'intuizione della proprietà sulla somma degli angoli del triangolo? La somma degli angoli è dunque costante; ma, qual è questo valore costante? I casi limite conducono a intuire questo valore.

Sia benedetto questo errore! (p. 51)

(...) È certo che questa esperienza, come del resto tutte quelle realizzate con procedimenti di continuità, ha un pericolo, il pericolo del caso limite, quello cioè di generalizzare la proprietà che si legge nel caso limite. Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore (e non mancano esempi anche elementari dove si mette in evidenza come la continuità conduca a un errore), sia benedetto questo errore! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza.

Emma Castelnuovo

Didattica della matematica. La Nuova Italia Editrice, Firenze 1963.

L'idolo della perfezione (p. 5)

Guido Castelnuovo [espone] delle riflessioni fortemente indicative per un moderno insegnamento ¹ e a cui, rilette a distanza di più di cinquanta anni, potrebbero ispirarsi oggi i compilatori dei programmi di matematica: *È questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegnamo a diffidare dell'approssimazione, che è realtà, per adorare l'idolo di una perfezione che è illusoria. Noi vi rappresentiamo l'universo come un edificio, le cui linee hanno una perfezione geometrica e ci sembrano sfigurate e annebbiare in causa del carattere grossolano dei nostri sensi, mentre dovremmo far comprendere che le forme incerte rivelateci dai sensi costituiscono la sola realtà accessibile, alla quale sostituiamo, per rispondere a certe esigenze del nostro spirito, una precisione ideale...*

¹G. Castelnuovo, *La scuola nei rapporti con la vita e la scienza moderna*, conferenza tenuta a Genova nel 1912 in occasione del III Congresso della Mathesis, e riprodotta in *Archimede*, n. 2–3, 1962.

Io sono uno spirito mite e tollerante (p. 157)

Si dirà che è impossibile dare al bambino una nozione certa di funzione, che è pericoloso parlare del concetto di limite in termini vaghi, si dirà che quanto si insegna deve essere perfetto per non originare idee false che poi sarebbe difficile sradicare per sostituirlle con appropriate definizioni. Mi torna alla mente quanto scriveva, nel lontano 1912, Guido Castelnuovo a questo proposito: *Ciò che si sa dal professore o dall'allievo – mi fu detto –, sia pur limitato, ma deve sapersi perfettamente. Orbene, io sono uno spirito mite e tollerante; ma tutte le volte che questa frase mi fu obiettata, un maligno pensiero mi ha attraversato come un lampo la mente.*

Noi nulla sappiamo perfettamente (p. 157)

Oh, se potessi prendere in parola il mio interlocutore, e con un magico potere riuscissi a spegnere per un istante nel suo cervello tutte le cognizioni vaghe per lasciar sussistere soltanto ciò che egli sa perfettamente! Voi non immaginate mai quale miserando spettacolo potrei presentarvi! Ammesso pure che dopo una così crudele mutilazione qualche barlume rimanesse ancor nel suo intelletto, e di ciò fortemente dubito, somiglierebbe questo ad un gioco di fuochi folletti sperduti in tenebre profonde e sconfinite. La verità è che noi nulla sappiamo perfettamente... ²

²G. Castelnuovo, *La scuola nei rapporti con la vita e la scienza moderna*, conferenza tenuta a Genova nel 1912 in occasione del III Congresso della Mathesis, e riprodotta in *Archimede*, n. 2–3, 1962.

Bibliografia e sitografia

Guido Castelnuovo

Opere matematiche: memorie e note, pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 2002–2007, 4 vv.

[http://archivi-matematici.lincei.it/
Castelnuovo/Biografia/index.htm](http://archivi-matematici.lincei.it/Castelnuovo/Biografia/index.htm)

Guido Castelnuovo: una biografia ipertestuale, a cura di Paola Gario. Opera realizzata con il contributo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

[http://archivi-matematici.lincei.it/
Castelnuovo/Lezioni_E_Quaderni/menu.htm](http://archivi-matematici.lincei.it/Castelnuovo/Lezioni_E_Quaderni/menu.htm)

Lettere e quaderni dell'Archivio di Guido Castelnuovo, a cura di Paola Gario.

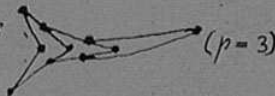
G. Castelnuovo, *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III, 1889

In questo lavoro ci proponiamo due fini: esporre un metodo utile in molte ricerche della teoria delle curve; presentare alcune formole che ci sembrano notevoli e in se stesse, e per le loro conseguenze. A queste formole noi siamo giunti applicando il principio della conservazione del numero a curve degeneri.

L'idea consiste nel considerare una curva non come un ente geometrico isolato, ma come membro di una famiglia ottenuta variando con continuità i suoi parametri (o moduli). Da questo punto di vista, se una proprietà invariante per deformazioni è verificata da una curva speciale (eventualmente degenera) di una famiglia, allora tale proprietà vale anche per la curva generica della stessa famiglia.

C. Segre a G. Castelnuovo, 20 settembre 1888

Torino 20 IX 88
 Car. mo Castelnuovo,
 Alcuni dei teoremi che mi comunichi mi paiono veramente importanti. Importante l'idea di servirsi di curve di genere p degeneri. Mi pare che due curve di generi p', p'' aventi k punti comuni (in uno spazio ordinario o super.) si possano considerare insieme come una degenerazione di una curva d'ordine somma e di genere $p' + p'' + k - 1$ (la quale acquistando k punti doppi nei k punti suddetti si riduce in realtà al genere $p' + p'' - 1$, che risulta subito proiettando su un piano). Come casi particolari ponendo che l'una delle due curve componenti sia una retta appoggiata all'altra in 1 o 2 punti si ha ciò che tu dici. Erodo che questo concetto di usare curve di genere p degeneri debba servire molto utilmente nelle questioni di cui ti occupi. Qui accanto ho voluto accennare come esempio una degenerazione di curva



Guido Castelnuovo, Memorie Scelte, Bologna 1937, Aggiunta p. 69

L'idea che mi ha permesso di raggiungere rapidamente questo e altri risultati consiste nel sostituire ad una curva irriducibile d'ordine n e genere p di un iperspazio, una curva composta di una curva d'ordine $n - 1$ e di una retta unisecante o bisecante, secondo che quest'ultima curva ha genere p o $p - 1$. Questo *principio di degenerazione* è semplicemente ammesso; la prima dimostrazione che lo spezzamento non altera i numeri richiesti fu data per via topologica (ricorrendo alle superficie di Riemann) da F. Klein in un suo corso del secondo semestre 1892 (...). Per via algebrica occorre far vedere che la curva spezzata può esser riguardata come limite di una curva irriducibile variante entro un sistema continuo, ciò che, sotto ipotesi assai larghe, ha dimostrato F. Severi nelle *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Anhang G. (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1921).

Moduli Spaces and their Birational Geometry

Han-Bom Moon

Department of Mathematics
University of Georgia

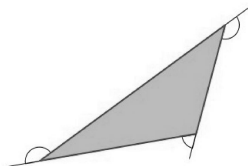
February 25, 2013

Using degeneration

Degeneration on a moduli space is very useful technique to prove many problems. Here is a toy example.

Question

Show that the sum of angle defects of a triangle is always 360° .

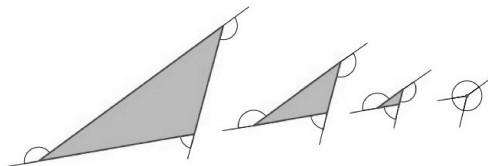


Using degeneration

Degeneration on a moduli space is very useful technique to prove many problems. Here is a toy example.

Question

Show that the sum of angle defects of a triangle is always 360° .



- When we deform our triangle to smaller similar triangles, the sum of angle defects is a constant.
- For the degenerated triangle (a point), the sum is 360° .