

Conferenza per Salerno

La ricerca in didattica della matematica e la sua applicazione concreta in aula.

Bruno D'Amore

NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia

Mescud, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

1. Una prova Invalsi

Nell'anno scolastico 2008 ó 2009, tra le prove nazionali italiane invalsi di matematica destinate agli studenti delle classi quinte di Scuola Primaria, appariva la seguente proposta:

D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo?

A. Renata.
B. Fabio.
C. Maria.
D. Non si può sapere.

I risultati nazionali in percentuale sono stati i seguenti: mancata risposta: 0,2; A: 42,9; B: 2,2; C: 49,5; D: 5,1.

A prima vista, il risultato è eccellente: il 49,5% di studenti italiani dà la risposta esatta.

Ma, se si legge da un altro punto di vista, il 50,5% di studenti italiani NON dà la risposta esatta ad un problema che nulla ha a che vedere con le competenze / conoscenze matematiche ma solo con il buon senso e con la capacità di leggere un testo e di immaginarsi la situazione.

Puntiamo tutta l'attenzione sulle due risposte che hanno un certo "senso":

- senso corretto, quello sperato (risposta C): ha il passo *più* lungo chi fa *meno* passi per misurare l'aula: 49,5% di risposte;
- senso sbagliato (risposta A): ha il passo *più* lungo chi ha fatto *più* passi per misurare l'aula: 42,9% di risposte.

Abbiamo chiesto commenti su questo risultato a insegnanti di matematica di diversi livelli, a genitori non insegnanti, a colleghi matematici nulla aventi a che fare con la ricerca in didattica della matematica; commenti informali, beninteso, solo per capire che tipo di percezione essi hanno di questo risultato. Facile immaginare le risposte: la "colpa" è degli studenti che "non sanno più leggere" e che "non sanno concentrarsi"; poi della scuola che "non insegna più a ragionare"; e poi degli insegnanti che "non sanno insegnare" e "pretendono sempre meno". Sono commenti così ovvii e scontati che nemmeno ci mettiamo ad esaminarli.

Abbiamo chiesto il parere, in particolare, ad insegnanti di livello primario, i più interessati al risultato; in questo caso appare una spiegazione del fenomeno che non faceva capolino negli altri casi, una lamentela su come le prove proposte dall'invalsi siano "diverse da quelle cui gli studenti sono abituati"; il D9 rientra fra i problemi poco comuni, una specie di trabocchetto diabolicamente teso agli studenti; riportiamo una frase, fra tutte: «Noi i bambini li abituiamo a certe situazioni problematiche, e in quelle loro sono bravi e competenti; poi arrivano queste e loro non le riconoscono».

Dunque, esistono "situazioni problematiche costruite secondo un certo accordo fra bambini e insegnanti" e "situazioni problematiche diverse da quelle, dunque inattese".

2. Le prove e i risultati

Abbiamo rifatto il test esattamente identico in Colombia, in Spagna, a Cipro, in Francia; i risultati ottenuti sono sostanzialmente identici.

Sorprende il fatto che la somma delle percentuali date alle risposte diverse dalla corretta (C) siano sostanzialmente identiche? No, non ci sorprende affatto. (Su tutto quanto qui narrato, ma più ricco di dati, si veda: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2013).

Abbiamo provato a dialogare con alcuni di questi bambini, tutti attorno ai 10 anni di età, per verificare se vi fossero eventuali cause *legate al testo*. È facile vedere, infatti, che il testo è viziato da quelli che si chiamano *dati impliciti* o *supposti* (Zan, 2012); per esempio, non è detto che i tre bambini citati nel testo della prova Invalsi stiano misurando la stessa aula. La ricerca in didattica ha molto bene messo in evidenza che molti dei testi degli esercizi e dei problemi proposti nelle aule sono inficiati da questo vizio e che i bambini si reinventano implicitamente il testo proposto, riformulandolo in modo spontaneo, più consono alle loro esigenze; anzi, la ricerca ha evidenziato questo fatto chiedendo esplicitamente ai bambini di riformulare i testi dei problemi per poterli rendere adatti e più facilmente risolvibili a bambini di altre classi. Si veda, per esempio, D'Amore et al. (1995).

Ma le interviste (informali) mettono in evidenza che tutti i risolutori hanno senza alcuna ombra di dubbio ipotizzato, in accordo con l'anonimo estensore del testo Invalsi, che i tre bambini stessero misurando la loro stessa aula, anzi che appartenessero alla stessa classe, anzi (secondo molti) che fossero amici.

Dunque, il problema non è questo. C'è dell'altro.

3. La teoria delle situazioni e il contratto didattico

La teoria delle situazioni, ideata da Guy Brousseau fin dalla fine degli anni '60 e resa oggetto condiviso di studio internazionale fin dai primi anni '80, spiega perfettamente quel che succede.

Ci sono accordi non detti, non espliciti che fanno sì che insegnanti ed allievi costruiscano modalità di interpretazione dei test e di soluzione degli stessi. La teoria è talmente nota che ci sembra offensivo stare qui a spiegare oltre.

Le tipiche indicazioni normative che l'insegnante dà allo studente, *leggi bene il testo*, *individua i dati utili*, *leggi la domanda* etc., costringono senza alcuna possibilità di scampo il bambino-solutore a disinserire la sua capacità logico - critica basata sull'esperienza anche extra scolastica (più lunghi sono i passi, minore è il numero che esprime la misura della stanza) e farsi carico di clausole implicite: *più lunga uguale più passi* (non importa di che cosa si stia parlando), senza prendere in esame la situazione, ma solo afferrando acriticamente le consegne numeriche. Cioè si guardano i numeri e la relazione fra essi, non il significato semantico della proposta e della situazione proposta.

La frase di un bambino infuriato perché il ricercatore-insegnante lo costringeva a ragionare invece che a risolvere («Uffa, ma io devo risolvere il problema, non devo mica ragionare»), la dice lunga sul comportamento contrattuale che il bambino assume.

Nel nostro problema ci sono dei dati, tre numeri: 26, 30, 28; e una domanda che contiene la frase: *più lungo*. Per 5 anni i bambini sono stati invitati a ragionare sul fatto che *più lungo* sta in sintonia con *maggiore*, che si indica con $>$; mettiamo in ordine i tre numeri: $30 > 28 > 26$. La risposta non può che essere 30. Nulla importa la condizione descritta, nulla la logica invocata dal testo: si devono rispettare gli accordi presi con l'insegnante.

Ma, ripetiamo, queste cose sono così note che non andiamo oltre; riteniamo che tutti i nostri lettori le conoscano e le sappiano applicare criticamente a questa situazione.

La cosa che può colpire è il fatto che gli insegnanti vivano come *trabocchetto* teso ai bambini il test proposto, perché non corrisponde agli standard, alla domanda che, secondo molti di loro, sta alla base dell'attività di risoluzione dei problemi: qual è l'operazione aritmetica (razionale) da fare? La maggior parte degli insegnanti intervistati dice esplicitamente che loro insegnano ai bambini a riconoscere se, nella risoluzione di un problema, va usata l'addizione, o la sottrazione, o la moltiplicazione, o la divisione. Ed i libri di testo rispondono infatti a questa scelta didattica, distinguendo fin dalla prima primaria sezioni con esercitazioni nella modalità seguente: problemi di addizione, problemi di sottrazione etc.; anzi, spesso appaiono anche sezioni così titolate: problemi impossibili, problemi con dati mancanti, problemi con dati sovrabbondanti (mancano quasi sempre i problemi con dati contraddittori che non sono mai piaciuti agli insegnanti fin dalla loro proposta nei cosiddetti Nuovi Programmi per la Scuola Elementare del 1985; qualcuno li include fra i problemi impossibili) (D'Amore, Sandri, 1993).

In queste situazioni, dopo 5 anni di condizionamento e di insegnamento, che cosa può fare un allievo, se non comportarsi secondo contratto?

Dicevamo sopra che questo comportamento e questa reazione degli insegnanti potrebbe sorprendere, ma noi non siamo affatto sorpresi. Tutto, tutto ciò, è parte degli studi rivelatori di Guy Brousseau e dei suoi allievi, all'interno della teoria delle situazioni. Fenomeni ben spiegati scientificamente, in modo dettagliato, senza ombra di dubbio, senza scappatoie (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010).

4. Altro esempio

Sempre traendo spunto dalle prove Invalsi, visto che se ne parla tanto í Nel 2012, in I media, è stato dato il seguente quesito:

Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?

- A. $10 \times 0,5$
- B. $10 \times 0,1$
- C. $10 : 0,5$
- D. $10 : 0,1$

Ed ecco il risultato ottenuto su un campione di oltre 20.000 studenti:

A: 71,2%; B: 4,9%; C: 10,0%; D: 10,8%; Non risponde: 2,2%.

Meraviglia, sorpresa, sconcerto, rabbia da parte degli insegnanti? No, ovvia risposta da parte degli studenti, diciamo noi. Se ci avessero chiesto in via preventiva quale sarebbe stato il risultato, lo avremmo azzeccato in pieno.

Nel libro D'Amore (1999) nei capitoli 4, 5 e 12, si spiega esattamente che cosa si nasconde dietro questa risposta così gettonata, chiamando in causa tre tipologie di ricerche:

- (1) la teoria delle immagini e dei modelli nella costruzione della conoscenza matematica,
- (2) gli studi affascinanti e precisissimi di Efraim Fischbein (1920 - 1998),
- (3) alcune considerazioni di Gérard Vergnaud dei primi anni '80.

Tutto spiegato in poche pagine, tanto che non vale la pena entrare qui in dettagli.

Se lo studio della didattica della matematica fosse più diffuso fra gli insegnanti, essi saprebbero che cosa fare per evitare la scelta massiccia della risposta A:

- (1) aspettare a far creare agli studenti il modello (sbagliato) di moltiplicazione, lasciarlo ancora come una immagine che opera in \mathbb{N}^2 in attesa di ampliare il dominio numerico a \mathbb{Q} ,
- (2) abbandonare lo stereotipo di *schieramento* come unico modello figurale intuitivo della moltiplicazione, fornendo invece altri modelli intuitivi per un unico modello formale, ed evitare in tutti i modi il sorgere di modelli parassiti,

(3) ampliare l'insieme delle situazioni che danno senso alle situazioni di moltiplicazione e divisione.

5. Due parole in più e qualche esempio sul contratto didattico

Fin dagli anni '70 fece l'ingresso nel mondo della ricerca in didattica della matematica l'idea di *contratto didattico*, lanciata da Guy Brousseau (IREM Bordeaux, 1978), idea che si rivelò subito fruttifera e che venne definitivamente sancita da tre famosi studi, due dello stesso Brousseau (1980a,b) ed uno di Brousseau e Pères (1981) (il celeberrimo *caso Gaël*).

Le riflessioni sui mezzi per realizzare questo progetto cominciano con l'osservazione delle classi tra il 1972 ed il 1975. Esse emergono all'interno del suo corso di III ciclo nel 1975 e diventano l'oggetto di testi diffusi dal 1979, pubblicati nel 1980, e poi con lo studio degli scacchi elettivi.

Il fallimento *elettivo* in matematica è quel tipico fallimento riservato al solo dominio della matematica, da parte di studenti che invece, più o meno, sembrano ... arrangiarsi nelle altre materie. Furono gli studi della seconda metà degli anni '80 a decretare il trionfo e la teorizzazione piena di questa idea; stiamo pensando, per esempio, a lavori dello stesso Guy Brousseau (1986). [Per una presentazione dell'idea di contratto didattico si veda Schubauer-Leoni (1996); per una storia bibliograficamente documentata ed attuale dell'idea di contratto didattico si veda D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010).].

Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato enormi frutti, di estremo interesse. Oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, all'incapacità logica o all'età immatura, sono invece stati chiariti; alla base ci sono motivazioni molto più complesse ed interessanti. Il lettore può trovare altri esempi significativi in (Polo, 1999).

Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di *l'età del capitano* e messo in luce da un celebre studio pubblicato nel 1980 a Grenoble (IREM Grenoble, 1980) e da un vasto e lungo dibattito circa tale risultato e le sue interpretazioni. Racconteremo qui di seguito in che cosa consiste, ma in modo un po' più personale, così come l'abbiamo vissuto direttamente (D'Amore, 1993b).

In una classe IV elementare (allievi di 9-10 anni) di un importante centro agricolo, abbiamo proposto oralmente il celeberrimo problema (nel quale il *capitano* diventa un *pastore*): «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?». In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18». Di fronte allo sgomento dell'insegnante, abbiamo reagito spiegandole che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili (per una delle tante forme di impossibilità) (D'Amore e Sandri, 1993), dunque i bambini avevano, per così dire, in modo estremamente semplicistico, introdotto nel contratto didattico una clausola (di fiducia nell'insegnante, o di immagine della matematica) del tipo: «Se l'insegnante ci dà un problema, questo deve essere certamente risolto».

Gli studi condotti dall'IREM di Grenoble hanno spinto Adda (1987) a coniare l'espressione *effetto età del capitano* per «designare la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica» (Sarrazy, 1995).

Tale effetto rientra peraltro tra quelli cosiddetti di attesa di *rottura* del contratto didattico (Brousseau, 1988): se anche l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche.

Un altro modo di affrontare questo tipo di questioni riguarda invece, più in generale, i modelli concettuali di «problema» che si fanno gli allievi. Fondamentale a questo riguardo è un lungo studio di Rosetta Zan (1991-1992) condotto con i bambini della scuola primaria, al quale faremo riferimento. Per prima cosa appare evidente che i bambini distinguono il problema *reale*, concreto, quello legato alla vita extra-scolastica, dal problema *scolastico*: sanno che quando si dice *problema* a scuola nelle ore di matematica, non ci si riferisce a problemi reali, ma a qualche cosa di artificioso, prefabbricato, con caratteristiche già tutte codificate. Inoltre: «il problema viene caratterizzato dai più attraverso il tipo di procedura che mette in atto per la risoluzione: viene cioè definito implicitamente dalla necessità di eseguire operazioni», come ben sanno tutti gli insegnanti del mondo.

Ciò che caratterizza il problema è dunque *l'operazione* che occorre eseguire per risolverlo, più alcuni elementi strutturali (una situazione, alcuni dati numerici che caratterizzano la situazione) ed alcuni elementi variabili (il tipo di situazione, i protagonisti, gli oggetti).

Da ciò «emerge (...) in modo inequivocabile che il problema scolastico è per i bambini il problema aritmetico: sono solo 2 bambini di quinta (su 123) che portano un esempio alternativo, in particolare un esempio geometrico!».

È di estremo interesse per i nostri scopi vedere quali sono le risposte dei bambini alla domanda su quali siano i comportamenti da mettere in atto durante la risoluzione di un problema scolastico: «Su questo punto le indicazioni dei bambini sono unanimi: bisogna leggere e rileggere il testo, ragionare, stare calmi e lavorare da soli»; esse rivelano norme esplicite di un contratto comportamentale, evidentemente richieste (lavorare da soli) o suggerite (leggere e rileggere il testo) dagli insegnanti.

E poi, aggiungo io sulla base delle mie esperienze: fare un circoletto rosso sui dati (ovviamente solo numerici), sottolineare in verde la domanda (se una domanda esplicita c'è), capire se il risultato deve diventare più grande o più piccolo e da qui inferire il tipo di operazione che serve; e il micidiale: prima di risolvere, disegnare il diagramma di flusso.

Tornando al problema Invalsi iniziale, in queste condizioni, una volta segnati in rosso i dati numerici e sottolineata in verde la domanda, come scegliere la operazione necessaria per dare la risposta è una bella sfida per chiunque!

Si vede come tutto il mondo della risoluzione dei problemi sia invischiato da clausole esplicite di comportamento (le norme e le sollecitazioni) e da clausole implicite nel contratto didattico, non dette dall'insegnante, ma create dagli allievi nel tempo in base a ricorrenze che hanno portato a modelli generali di problema, il che costituisce vincoli insuperabili.

Su parecchi dei temi qui trattati in modo sbrigativo, si veda il testo *Problemi* (D'Amore, 1993a). Vorremmo anche far notare come vi sia contraddizione tra attese e dichiarazioni esplicite degli allievi. Moltissimi allievi dichiarano che lo scopo per cui viene dato da risolvere un problema da parte dell'insegnante è quello di vedere se gli allievi sanno *ragionare*, come è testimoniato nello studio della Zan (1991-1992); ma poi il problema è identificato con la sua risoluzione.

In D'Amore (1996b) ricordavamo una situazione nella quale, dopo aver dato un problema del tipo del pastore, rivelavamo ai bambini che tale problema non poteva essere risolto; suscitavo così la reazione di uno di essi: «Ah, ma così non vale. Quando il problema non si può risolvere, l'insegnante ce lo dice. Ce lo dovevi dire anche tu».

Sembrano leciti vari commenti.

Da un lato, ecco un altro esempio di clausola non esplicita ma creata dalla consuetudine, dall'abitudine, dal costume. «Quando vi do un problema che non si può risolvere, vi avverto, così prestate particolare attenzione», sembra aver suggerito (forse esplicitamente) l'insegnante ai bambini di quella classe. E ciò elimina ogni fattore educativo legato al proporre problemi impossibili. Se l'insegnante avesse anche solo detto: «Ecco, vi avverto, questo problema non si può risolvere; a voi chiedo perché», sarebbe già stata un'altra situazione, molto più educativa.

Un altro commento potrebbe essere sul senso che ha l'attività didattica di dare in classe problemi di questo tipo. Se lo scopo è quello di migliorare la qualità dell'attenzione critica, della lettura consapevole, facendo in modo che:

- non si instauri il dogmatico e riduttivo modello generale di problema evidenziato nel lavoro della Zan (1991-1992),
- non si instaurino clausole indesiderate del contratto didattico, che potrebbero essere deleterie, allora avvertire ogni volta falsa lo scopo ed annulla il risultato.

6. Ancora esempi e riflessioni sul contratto didattico

In D'Amore (1993a) è raccontata una curiosa esperienza. Consideriamo il testo seguente:

«I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita scolastica di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati: 1. due di essi non possono pagare; 2. da Bologna a Verona ci sono 120 km; 3. un pullmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali). Quanto verrà a spendere ciascuno?».

Inutile dire che si tratta di un problema complesso, che si voleva realmente effettuare la programmazione di una gita, che gli studenti avrebbero dovuto discutere del problema e cercare la risoluzione in gruppo eccetera. Il problema viene proposto alla classe divisa in gruppi. Tutti i gruppi fanno uno stesso errore: nel calcolare la spesa per i chilometri percorsi, moltiplicavano 500 per 120, senza tener conto del ritorno. Su questo punto c'è una vasta bibliografia che tende a giustificare questo fatto. Una delle giustificazioni più ricorrenti è una sorta di... dimenticanza strategica o affettiva: l'andata di una gita è emotivamente un momento forte, il ritorno no.

Per cercare di capire meglio la questione, spezzammo il problema in varie componenti o fasi, con tante "domandine" parziali specifiche; ma l'errore si ripeteva. Sugerimmo allora ad alcuni insegnanti di far mimare le scene dell'andata e del ritorno, di disegnare i vari momenti della gita. Il caso incredibile che trovammo e che descrivemmo in D'Amore (1993a) è quello di un bambino che ha disegnato il pullman sotto una doppia freccia: in una c'è scritto «Bologna→Verona 120 km», nell'altra «Verona→Bologna 120 km», dunque c'è perfetta consapevolezza del fatto che in una gita ci sono andata e ritorno; ma poi quello stesso bambino, al momento di risolvere, utilizza di nuovo solo il dato per l'andata.

Di questo problema si sono occupati Castro, Locatello e Meloni (1996). Essi hanno verificato come i bambini non si sentano autorizzati ad usare un dato che esplicitamente non appare nel testo. Abbiamo bambini che, in interviste successive all'esecuzione del test, messi di fronte alla problematica del calcolo della spesa del ritorno, hanno proprio detto: «... ma se tu volevi anche il ritorno dovevi scriverlo», «Il ritorno non mi è passato per la testa, non c'è nel testo una frase per il ritorno, era meglio metterla»; molti parlano dei dati, dei numeri: «Per risolvere si devono usare i numeri del problema» (cioè i dati che appaiono esplicitamente nel testo) (Castro, Locatello, Meloni, 1996).

L'analisi fatta da questi Autori è molto dettagliata e a quella rinviamo chi fosse interessato; a noi preme mettere in evidenza un'altra considerazione che scaturisce da questi studi sul contratto didattico: conta poco il senso della richiesta, quel che conta è far uso dei dati numerici esplicitamente proposti come tali.

In questo senso si può leggere il comportamento degli studenti di fronte ad un celebre problema di Alan Schoenfeld (1987a):

«Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?».

È ben noto che dei 45000 allievi quindicenni esaminati da Schoenfeld, solo meno di un quarto (il 23%) riuscì a dare la risposta attesa: 32. Lo scopo dichiarato dell'Autore in quell'articolo era di discutere di *metacognizione*.

A distanza di parecchi anni, recentemente abbiamo voluto analizzare di nuovo la stessa situazione (D'Amore, Martini, 1997) ed abbiamo trovato alcune novità. La prova è stata fatta a vari livelli scolastici lasciando libertà agli studenti di usare o no la macchina calcolatrice. Abbiamo avuto molte risposte del tipo: 31,333333 soprattutto da parte di chi usava la macchina calcolatrice; altre risposte: $31,\bar{3}$ e 31,3. Il controllo semantico, quando c'è, porta alcuni a scrivere 31 (gli autobus «non si possono spezzare»), ma ben pochi si sentono *autorizzati* a scrivere 32.

Il nostro lavoro è complesso, perché analizza varie questioni. Ma qui vogliamo solo mettere in evidenza alcune clausole del contratto didattico:

- lo studente non si sente autorizzato a scrivere quel che non appare: se anche fa un controllo semantico sugli autobus come oggetti non divisibili in parti, ciò non lo autorizza a scrivere 32; c'è addirittura chi non si sente autorizzato neppure a scrivere 31; non si può parlare semplicemente di errore da parte dello studente, a meno che non si intenda per errore l'incapacità di controllare, una volta ottenuta la risposta, se essa è semanticamente coerente con la domanda posta; ma allora scatta un altro meccanismo: lo studente non è disposto ad ammettere di aver fatto un errore e preferisce parlare di «trucco», di «trabocchetto»; per lo studente un errore matematico o in matematica, è un errore di calcolo o assimilabile ad esso, non di tipo semantico;
- una clausola del contratto didattico che entra in gioco è quella che abbiamo chiamato: *di delega formale*; lo studente legge il testo, decide che l'operazione da effettuare è la divisione e che i numeri con i quali deve operare sono, nell'ordine, 1128 e 36; a quel punto scatta la clausola *di delega formale*: non tocca più allo studente ragionare e controllare; sia che faccia i calcoli a mano, *tanto più* se fa uso della calcolatrice, si instaura la clausola di delega formale che ... disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina; il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi.

D'altra parte, che lo studente non abbia interesse per eventuali incoerenze interne al proprio operato è già stato abbondantemente messo in evidenza dalla ricerca internazionale; si vedano i lavori di Schoenfeld (1985), Tirosh (1990), Tsamir e Tirosh (1997), D'Amore e Martini (1998).

7. Un ulteriore esempio

Studi approfonditi sul contratto didattico hanno dunque permesso di rivelare appunto che i bambini ed i ragazzi hanno attese particolari, schemi generali, comportamenti che nulla hanno a che fare *stricto sensu* con la matematica, ma che dipendono dal contratto didattico instaurato in classe.

Vediamo un ulteriore esempio, ancora relativo ad una ricerca sui problemi con dati mancanti e sugli atteggiamenti degli allievi di fronte a problemi di questo tipo (D'Amore, Sandri, 1998). Ecco un testo proposto in III elementare (allievi di 8-9 anni) ed in II media (allievi di 12-13 anni):

«Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?».

Ed ecco un prototipo del genere di risposte più diffuse in III; scegliamo il protocollo di risposta di Stefania, che riportiamo esattamente come lo ha redatto l'allieva:

Stefania:

Nel borsellino rimane più soldi giovanna
 $30-10=20$
 $10\times 10=100$

La risposta «Giovanna» (58,4% di tali risposte in III primaria) è giustificata dal fatto che (come abbiamo già abbondantemente visto) lo studente ritiene che, se l'insegnante affida un problema,

questo *debba poter essere risolto*; dunque, anche se si dovesse accorgere che manca il dato della somma iniziale, se lo inventa *implicitamente* più o meno come segue: «Questo problema *deve* poter essere risolto; dunque, forse Giovanna e Paola partivano dalla stessa somma». A quel punto, *la risposta è corretta*: Giovanna spende meno e quindi le resta più danaro, e ciò giustifica la prima parte scritta (a parole) della risposta di Stefania. Dopo di che scatta un altro meccanismo legato ad un'altra clausola (del tipo: immagine della matematica, attese presupposte da parte dell'insegnante): «Non può bastare così, in matematica si devono sempre fare dei calcoli, l'insegnante se li aspetta di certo». A quel punto, il controllo critico crolla e, come abbiamo visto, qualsiasi calcolo va bene ... Abbiamo chiamato questa clausola del contratto didattico: *esigenza della giustificazione formale* (egf) studiandola in vari dettagli.

Tale clausola egf è molto presente anche nella scuola media. La percentuale di risposte «Giovanna» scende dal 58,4% (della III primaria) al 24,4% (della II media); ma solo il 63,5% degli allievi di II media denuncia in qualche modo l'impossibilità di dare una risposta; dunque il 36,5% dà una risposta: oltre 1/3 di ciascuna classe.

Ecco un prototipo di risposta avuta allo stesso problema in II media; abbiamo scelto il protocollo di risposta di un'allieva, riportandolo esattamente come da lei prodotto:

Silvia:

Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è Giovanna [poi corretto in Paola]

perché:

Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000.,

10.000	20.00
Giovanna	Paola

20.000-10.000=10.000 (soldi di Giovanna)

10.000+10.000=20.000 (soldi di Paola)

Nel protocollo di Silvia si riconoscono in azione le stesse clausole del contratto didattico messe in opera nel protocollo di Stefania, ma la sua analisi è più complessa. Per prima cosa, si nota un tentativo di organizzazione logica e formale più impegnativo. Silvia dapprima scrive «Giovanna» perché ha ragionato come Stefania; poi, però, a causa della clausola egf, ritiene di *dover* produrre calcoli. È probabile che Silvia si renda conto, anche se in modo confuso, che le operazioni che sta facendo sono slegate dal problema, le fa solo perché ritiene di *dover fare* qualche calcolo. Ma, per quanto assurde, finisce con assumere tali operazioni come fossero plausibili; tanto è vero che, dato che da questi calcoli insensati ottiene un risultato che contrasta con quello dato in via intuitiva, preferisce violentare la propria intuizione ed accetta piuttosto quanto ottenuto per via formale. I calcoli le danno «Paola» come risposta e non «Giovanna», come invece aveva intuitivamente supposto; e dunque barra «Giovanna» ed al suo posto scrive «Paola».

Qualche deleteria clausola del contratto didattico, soprattutto la egf, ma anche una immagine formale (a vuoto, deleteria) della matematica, ha vinto, sconfiggendo la ragione ...

8. Non solo primaria í

Nella scuola primaria il condizionamento risolutivo dei problemi causato dal contratto didattico è forte, tanto che riteniamo necessario che l'insegnante si faccia carico dello studio della didattica della matematica, per capire che cosa sta succedendo nella sua aula.

Ma ciò potrebbe indurre a credere che stiamo parlando di un fenomeno legato a bambini, un fenomeno collegato con l'età infantile che poi passa, grazie alla maturità critica dell'adolescente.

Non è così.

Non solo non è così, ma la ricerca e l'attività didattica in aula mostrano che nella scuola secondaria la cosa diventa terribilmente complicata, proprio a causa di clausole oramai instaurate che non possono essere superate, molto legate alle convinzioni che lo studente ha creato a proposito della matematica e delle sue personali relazioni con essa.

La ricerca ha evidenziato situazioni che lasciano senza parole e che falsano totalmente l'azione d'aula dell'insegnante, perché modificano completamente il rapporto fra i contenuti insegnati (il punto di vista dell'insegnante) e quelli percepiti (il punto di vista dello studente).

Riferimenti bibliografici

- Adda J. (1987). Erreurs provoqués par la représentations. Atti CIEAEM, Sherbrooke. Univ. di Sherbrooke.
- Baldisserri F., D'Amore B., Fascinelli E., Fiori M., Gastaldelli B., Golinelli P. (1993). I palloncini di Greta. Atteggiamenti spontanei in situazioni di risoluzione di problemi aritmetici in età prescolare. *La matematica e la sua didattica*. 4, 444-451. *Infanzia*, 1, 31-34. [Pubblicato anche in: Gagatsis A. (ed.) (1994). 239-246 in greco, 571-578 in francese. Pubblicato anche in: *Cahiers de didactique des mathématiques*, 16-17, 1995, 11-20 in greco, 93-102 in francese].
- Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Ottawa: Agence d'Arc.
- Bergeron J.C., Herscovics N., Kieran C. (eds.) (1987). *Proceedings of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal.
- Brousseau G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*. 101, 3-4, 107-131.
- Brousseau G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*. 41, 177-182.
- Brousseau G. (1984). The crucial role of the didactical contract. *Proceedings of the TME 54*.
- Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- Brousseau G. (1988). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collègue. *Petit x*. 21, 47-68.
- Brousseau G., Pères J. (1981). *Le cas Gaël*. Université de Bordeaux I, Irem.
- Castro C., Locatello S., Meloni G. (1996). Il problema della gita. Uso dei dati impliciti nei problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 166-184.
- Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- D'Amore B. (1993a). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid: Sintesis, 1996].
- D'Amore B. (1993b). Il problema del pastore. *La vita scolastica*. 2, 14-16.
- D'Amore B. (ed.) (1996a). *Convegno del decennale*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme. Bologna, Pitagora.
- D'Amore B. (1996b). Immagini mentali, lingua comune e comportamenti attesi, nella risoluzione dei problemi. *La matematica e la sua didattica*. 4, 424-439. [Pubblicato in lingua inglese in: D'Amore B., Gagatsis A. (eds.) (1997). *Didactics of Mathematics - Technology in Education*. Thessaloniki, Erasmus. 11-24].
- D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Versione in lingua spagnola ampliata ed aggiornata: 2006, *Didáctica de la matemática*. Prefazioni di Colette Laborde, Guy Brousseau e Luis Rico Romero. Bogotá: Magisterio]. [Versione in lingua

- portoghese ampliata ed aggiornata: 2007, *Elementos de didáctica da matemática*. Prefazioni di Colette Laborde, Guy Brousseau, Luis Rico Romero e Ubiratan D'Ambrosio. São Paulo: Livraria da Física].
- D'Amore B. (2007). Voci per il dizionario: Frabboni F., Wallnöfer G., Belardi N., Wiater W. (Eds.) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Torino: Bollati Boringhieri. Voci: Didattica disciplinare (pp. 72-75), Formazione in scienze naturali (pp. 140-142), Formazione in matematica (pp. 145-147), Scienza (pp. 335-337). [Esiste una versione di questo testo in lingua tedesca].
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del contratto*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni scolastiche reali. *Bollettino dei docenti di matematica*. [Bellinzona, Svizzera]. 66, 43-52. ISBN: 978-88-86486-88-0.
- D'Amore B., Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 2, 131-146. [Questo articolo è stato ristampato in lingua inglese su: Gagatsis A., Rogers L. (Eds.) (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Erasmus ICP 954 G 2011/11. Thessaloniki. 53-72].
- D'Amore B., Martini B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-175. [Pubblicato in lingua francese su: *Scientia paedagogica experimentalis*. XXXV, 1, 95-118].
- D'Amore B., Martini B. (1998). Il contesto naturale. Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 21A, 3, 209-234.
- D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*. 3, 344-346. [Questo articolo è stato ristampato in: Gagatsis A. (Ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Erasmus ICP 93G 2011/II. Thessaloniki. 247-252 (in greco), 579-584 (in francese). Questo articolo è stato inoltre ristampato su: *Cahiers de Didactique des Mathématiques*. 16-17, giugno 1995, 11-28 (in greco), 103-110 (in francese)].
- D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18. [Pubblicato in lingua francese su: *Scientia paedagogica experimentalis*. XXXV, 1, 55-94].
- Gagatsis A. (ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Thessaloniki: Erasmus.
- Gallo E., Giacardi L., Roero C.S. (eds.) (1996). *Conferenze e seminari 1995-1996*. Associazione Subalpina Mathesis - Seminario di Storia delle Matematiche. Viola. Torino.
- Huberman M. (ed.) (1988). *Assurer la réussite des apprentisages scolaires*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.
- IREM Bordeaux (1978). Étude de l'influence de l'interprétation des activités didactiques sur les échecs électifs de l'enfant en mathématiques. Project de Recherche CNRS, Enseignement élémentaire des mathématiques, Cahier de l'IREM de Bordeaux I. 18, 170-181.
- IREM Grenoble (1980). Quel est l'âge du capitaine? *Bulletin de l'APMEP*. 323, 235-243.
- Laborde C. (ed.) (1988). *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactiques des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Perret-Clermont A.-N., Nicolet M. (eds.) (1988). *Interagir et connaître*. Cousset: Delval.
- Polo M. (1999). Il contratto didattico come strumento di lettura della pratica didattica con la matematica. *L'educazione matematica*. XX, VI, 1, 4-15.
- Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*. 112, 85-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*. 1998, 2, 132-175].

- Sarrazy B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique: rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes arithmétiques au cycle trois*. Tesi di dottorato in Sciences de l'Éducation, Univ. de Bordeaux II.
- Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld A.H. (1987a). What's all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld A.H. (ed.) (1987b). 189-215.
- Schoenfeld A.H. (ed.) (1987b). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.
- Schubauer-Leoni M.L. (1996). Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento. In: Gallo E., Giacardi L., Roero C.S. (eds.) (1996). *Conferenze e seminari 1995-1996*. Associazione Subalpina Mathesis - Seminario di Storia delle Matematiche. T. Viola, Torino. 21-32.
- Tirosh D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on the learning problems in mathematics*. 12, 111-129.
- Tsamir P., Tirosh D. (1997). Metacognition e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica*. 2, 122-131.
- Zan R. (1991-1992). I modelli concettuali di "problema" nei bambini della scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. In 3 parti: I: 1991, 14, 7, 659-677; II: 1991, 14, 9, 807-840; III: 1992, 15, 1, 39-53.
- Zan R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 35 A.