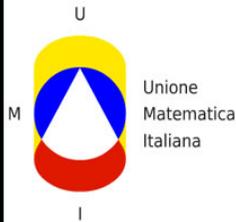


XXXI Convegno UMI-CIIM

Salerno, 17-18-19 ottobre 2013



DipMat
.DIEM



Le “vignettes” del progetto Klein



Ferdinando Arzarello
Dipartimento “G. Peano”
Università di Torino

L'inizio della storia: Felix Klein

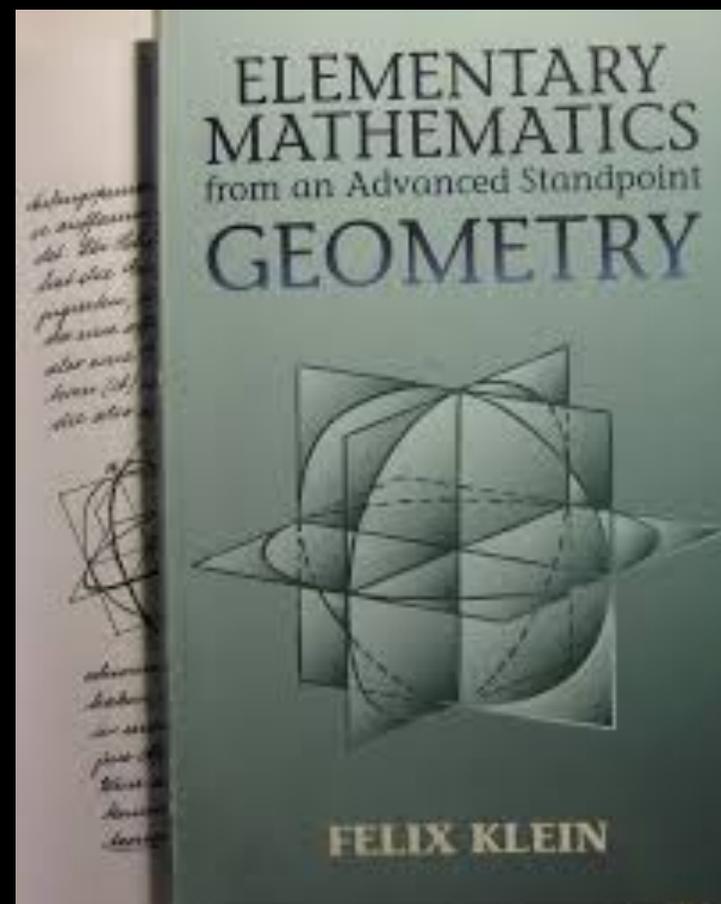
Nel 1908 furono pubblicate le lezioni di Felix Klein per gli insegnanti della secondaria.

Il libro sfidava insegnanti e matematici a farsi carico delle relazioni tra la matematica come disciplina scolastica e matematica come disciplina scientifica.



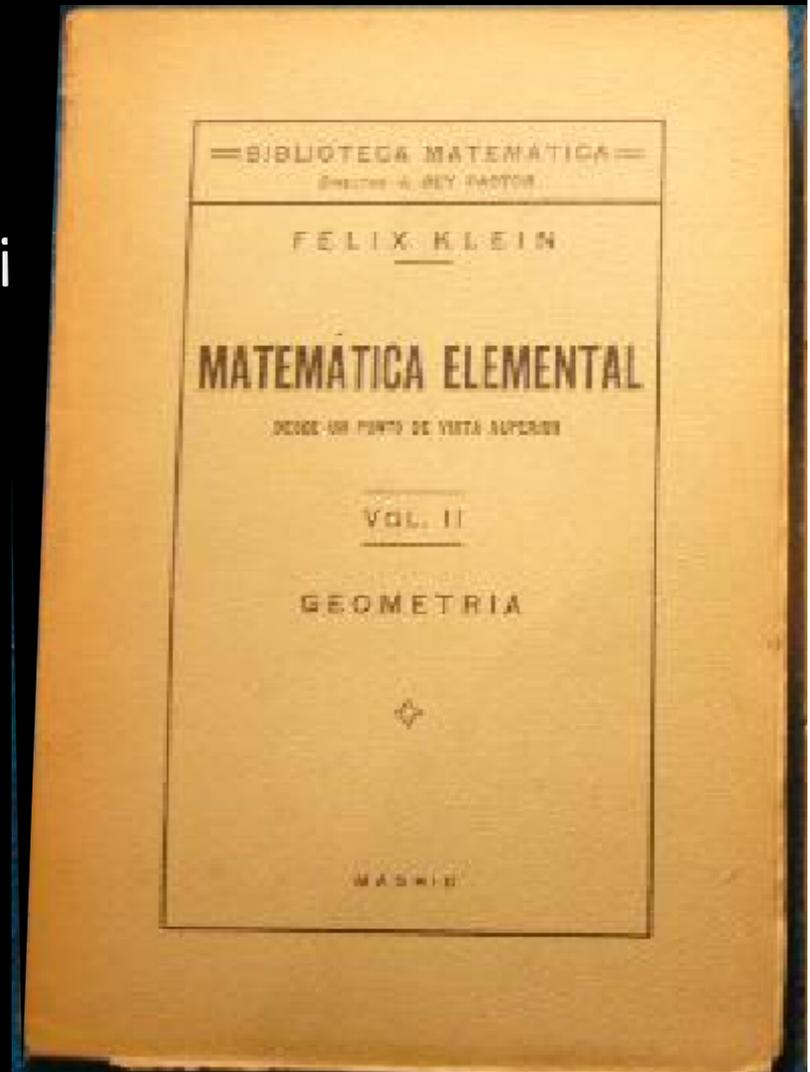
Conseguentemente:

Il Progetto Klein nel 21° secolo (PK21) vuole introdurre gli insegnanti agli sviluppi recenti della matematica creando un valido collegamento con la loro attività quotidiana in classe.



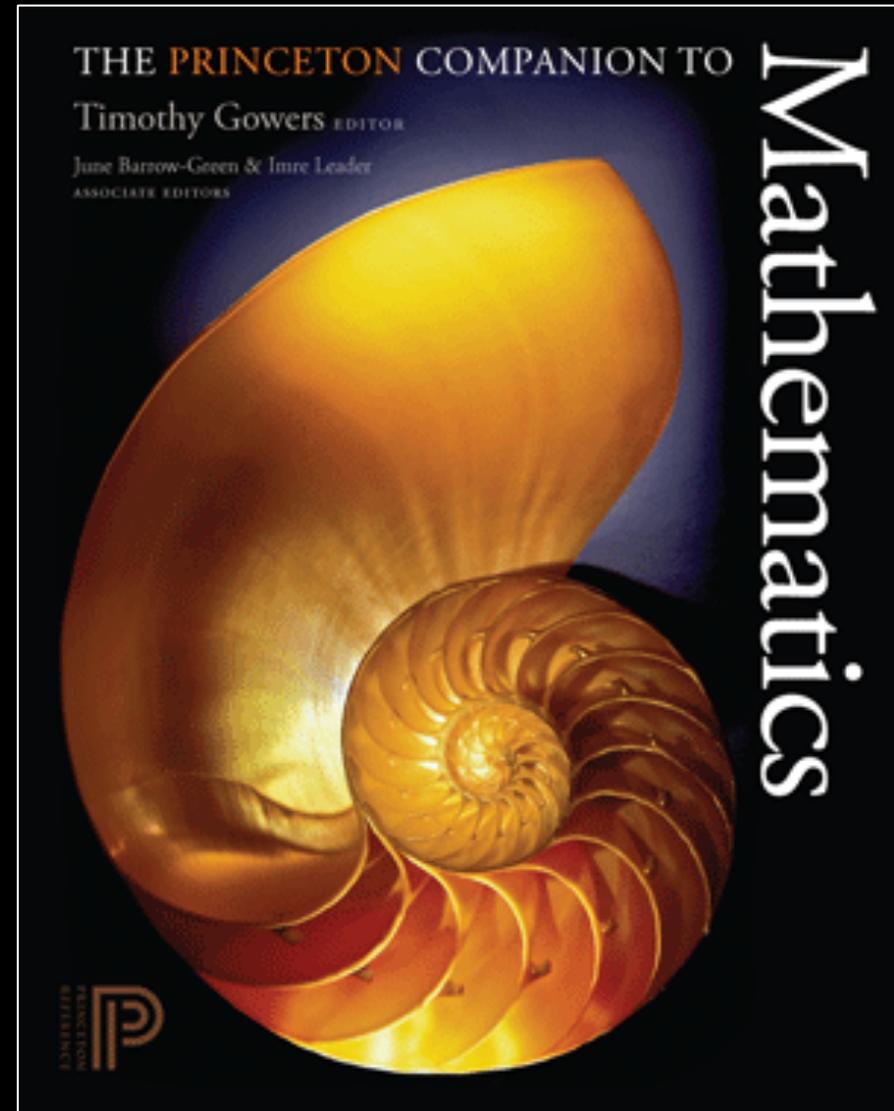
Come?

All'inizio PK21 fu ideato con l'idea di produrre una versione moderna del libro di Klein con un CD. Successivamente si è avuta l'idea di produrre anche delle "Vignettes" (storie matematiche), rendendole disponibili in un Blog. L'iniziativa è poi cresciuta con seminari e lavori in differenti parti del mondo, per condividere e coinvolgere le comunità di ricercatori/insegnanti nel progetto.



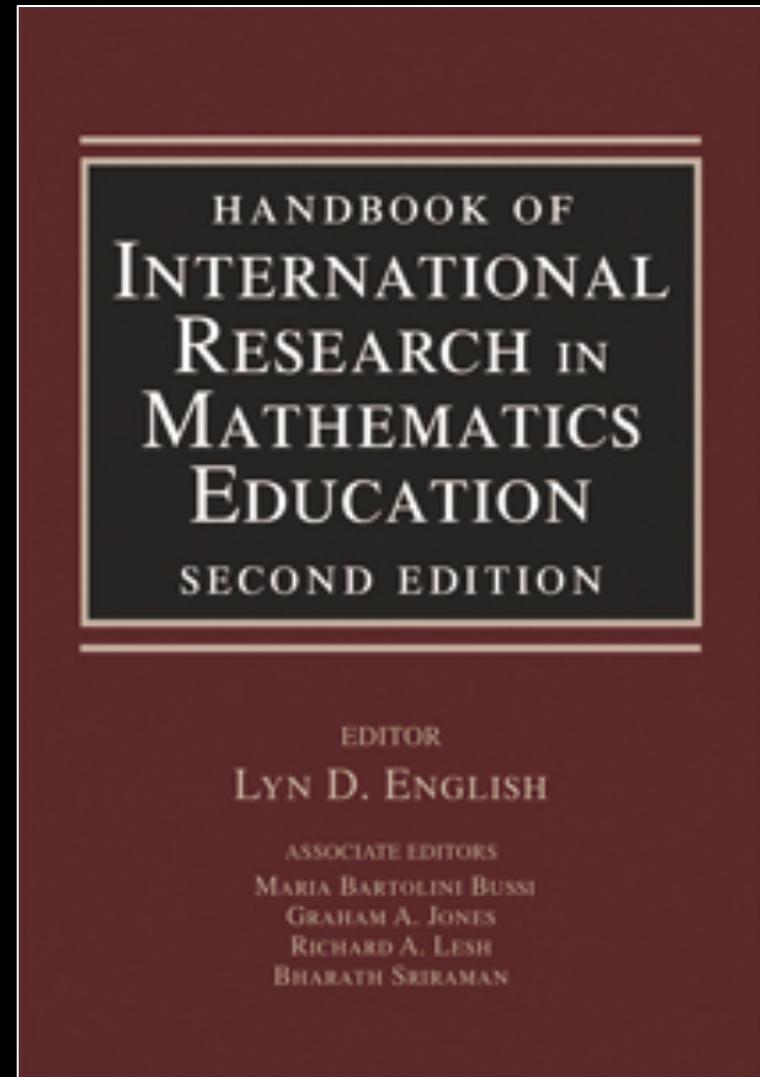
E quindi

PK21 riguarda la
matematica:
i suoi temi,
i suoi problemi,
le sue sfide
e le sue applicazioni.



E quindi

Si riferisce alla situazione educativa del 21° secolo, che è molto diversa da quella in cui lavorava Klein.



Obiettivi di Klein

“Il mio compito sarà di mostrare le mutue connessioni tra i problemi nei vari campi.

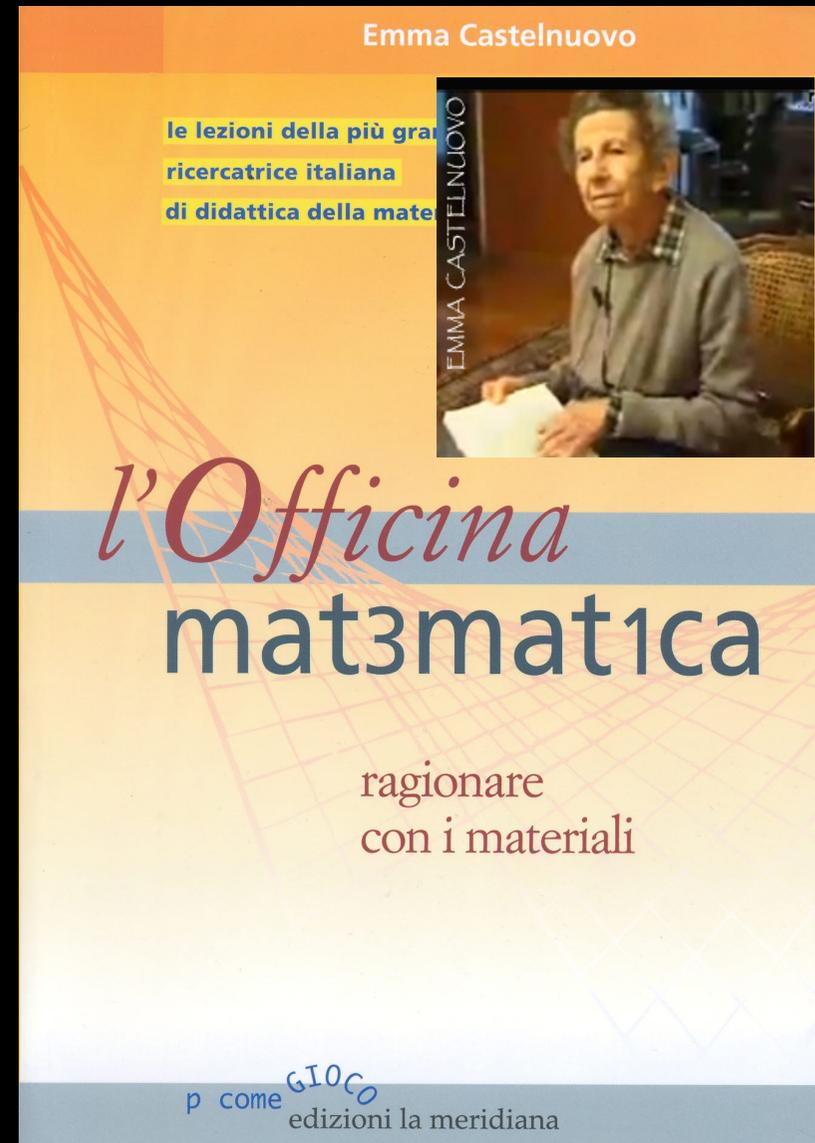
...

Spero che traiate dalla matematica uno stimolo profondo per il vostro insegnamento.”

“Questo libro è pensato solo come uno sprone mentale, non come un manuale dettagliato.”

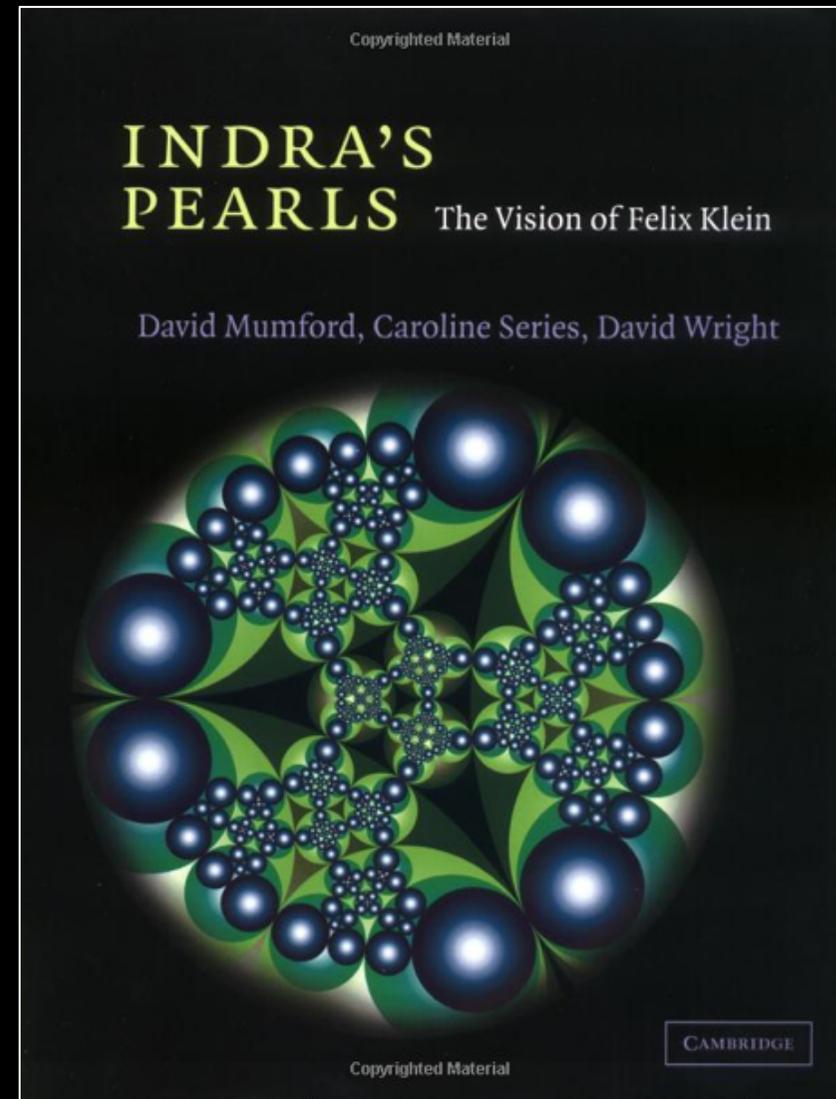
Perciò

PK21 ha come suo focus il piacere e l'ispirazione dei suoi lettori nel campo della matematica...
...così che questi diventino insegnanti ancora più appassionati.

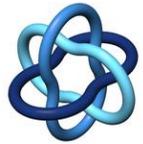


Detto altrimenti

PK21 mira a soddisfare le esigenze degli insegnanti di matematica che desiderano aggiornarsi su quegli sviluppi recenti della disciplina, che possono essere trasposti nell'insegnamento secondario.



Che cos'è il Progetto Klein?



International Mathematical
Union (IMU)



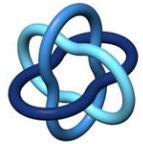
International Commission
on Mathematical Instruction

È un progetto congiunto dell'ICMI e dell'IMU,
diretto da un "International Design Team".



G. Cohen (AUS), C. Rousseau (CND), H.G. Weigand (D), Y. Yamamoto (BR),
F. Arzarello (I), M. Artigue (FR), B. Barton (NZ), W. McCallum (USA)

Che cos'è il Progetto Klein?



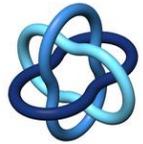
International Mathematical
Union (IMU)



International Commission
on Mathematical Instruction

Suo obiettivo è raggiungere TUTTI gli insegnanti di matematica – non solo mirare agli entusiasti, ma attirare possibilmente anche quelli che possono così riscoprire il loro amore per la matematica.

Quindi



International Mathematical
Union (IMU)

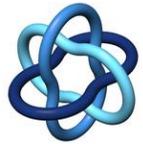


International Commission
on Mathematical Instruction

I matematici, gli studiosi in didattica della matematica e gli insegnanti giocano un ruolo importante nel progetto.

È importante che lavorino insieme, in modo il più possibile inclusivo.

Quello che non è il progetto



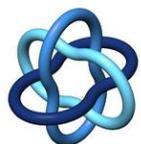
International Mathematical
Union (IMU)



International Commission
on Mathematical Instruction

PK21 è **neutro** rispetto ai curricula scolastici: la loro struttura, contenuti, modalità di insegnamento e di valutazione, linee guida ecc. I materiali non sono per la classe ma per gli **insegnanti**.

Le nostre sfide



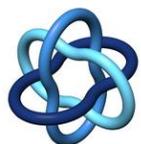
International Mathematical
Union (IMU)



International Commission
on Mathematical Instruction

- È obiettivo del progetto produrre materiali / organizzare workshop che siano:
- matematicamente rilevanti;
 - collegati alla matematica e alle applicazioni contemporanee;
 - a un livello matematico adeguato alla scuola secondaria;
 - che gli insegnanti desiderino leggere o frequentare.

Le nostre sfide



International Mathematical
Union (IMU)



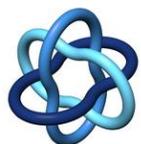
International Commission
on Mathematical Instruction

È obiettivo del progetto produrre materiali /
organizzare workshop che siano:

- matematicamente rilevanti;
- collegati alla matematica e alle applicazioni contemporanee;

**In questo i matematici hanno la
responsabilità primaria**

Le nostre sfide



International Mathematical
Union (IMU)



International Commission
on Mathematical Instruction

È obiettivo del progetto produrre materiali /
organizzare workshop che siano:

**In questo i didattici hanno la
responsabilità primaria**

- a un livello matematico adeguato alla scuola
secondaria;
- e che gli insegnanti desiderino leggere/
frequentare.

I materiali

Stiamo attualmente producendo:

- “Vignettes” (brevi storie matematiche su di un argomento specifico, che involino alla lettura);
- “Il libro” (abbastanza corto, ma che copra gli argomenti principali in qualche modo).

Le “vignettes”

Tipicamente le “vignettes” non superano le 10 pagine e trattano un argomento di matematica “contemporanea” (ultimi 100 anni).

Sono scritte in modo che gli insegnanti:

- siano invogliati a iniziarne la lettura;
- desiderino continuare la lettura fino in fondo;
- siano stimolati ad approfondire l'argomento e...
- ... a leggerne un'altra.



The shocking behaviour of moving fluids

Posted on [October 11, 2013](#) by [Antoine Nectoux](#)

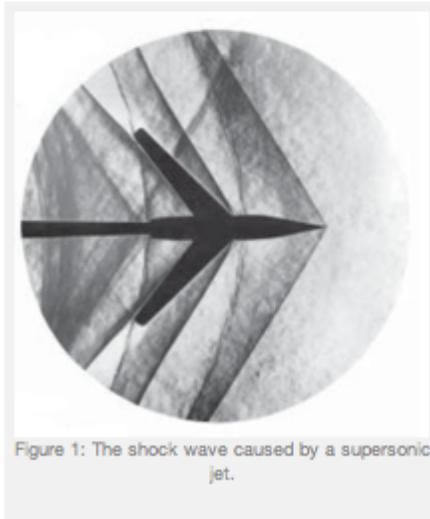


Figure 1: The shock wave caused by a supersonic jet.

motivated by this topic.

Originating authors are David Mumford and Christiane Rousseau.

Foreword: This vignette is more difficult than others. However, in a few pages, it tells you how to explain in simple terms one of the most difficult open problems at the beginning of the 21st century. The vignette contains enrichment material, that you can choose to read or skip. The editors of the Klein blog hesitated for a while posting this vignette. After testing it with teachers during two Klein workshops, who expressed that they enjoy being challenged by more difficult vignettes, they decided to test it on the blog. They are eager to hear your comments, and if some of you were

English

Contact us

If you are interested in translating a vignette into your language, or submitting a vignette, [send us an email](#).

Receive notice of every new vignette.

Enter your email address.

Email Address

Search

List of vignettes

- [The shocking behaviour of moving fluids](#)
- [Recurrence and induction](#)
- [Public-key cryptography](#)
- [A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves](#)
- [Symmetry Step by Step](#)
- [Map colouring and Gröbner Bases](#)

Le idee comuni delle “vignettes”

Le “vignettes” si propongono di trasmettere il seguente messaggio:

- La matematica è una disciplina viva all'interno della scienza: non tutto è stato detto e si verificano continuamente nuovi sviluppi.
- La scienza e la tecnologia offrono problemi alla matematica e la matematica permette nuove scoperte alla scienza e alla tecnologia.

Le idee comuni delle “vignettes”

Più precisamente, si propongono di comunicare:

- Come lavorano i matematici
 - Il potere di un'idea “furba”
 - La forza dell'interdisciplinarietà
- Riducendo al minimo gli aspetti tecnici
 - Intrecciandosi con la cultura dell'insegnante
 - Accompagnando l'insegnante oltre quello che già sa

Attirano alla lettura

Ogni “vignette” deve catturare l’attenzione del lettore.

Per questo sono fondamentali:

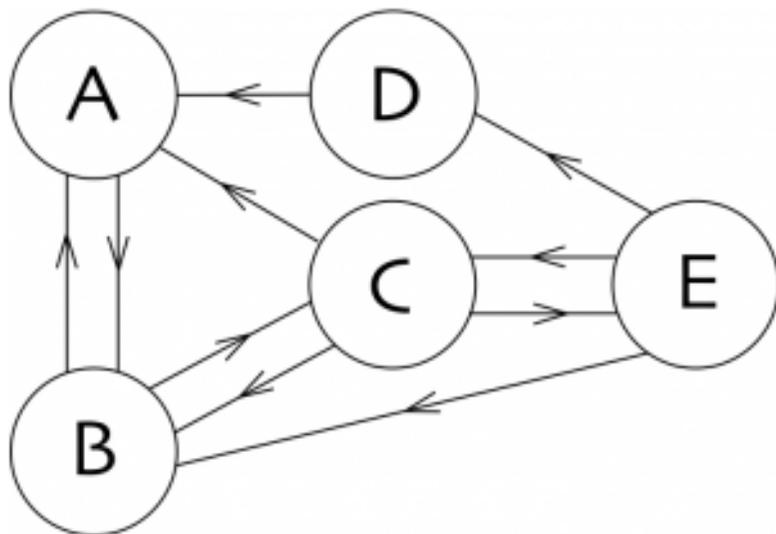
- il titolo
- la prima immagine

La prima pagina contiene un “gancio”: un punto di attacco, una questione fondamentale, che sia intrigante e sproni ad andare avanti nella lettura.

Per esempio

Come funziona Google: catene di Markov e autovalori

Posted on [October 1, 2013](#) by [Antoine Nectoux](#)



nessuno riesce ad esplorare milioni di voci.

[Continue reading →](#)

Christiane Rousseau.

Fin dall'inizio, Google è diventato il motore di ricerca. Ciò deriva dalla supremazia del suo algoritmo di ranking: l'*algoritmo PageRank*. Infatti, con l'enorme quantità di pagine sul World-Wide-Web, molti ricercatori si ritrovano con migliaia o milioni di risultati. Se essi non sono propriamente ordinati, la ricerca può risultare di poco aiuto, dal momento che

Spingono a continuare la lettura

Il livello matematico è cruciale; ogni “vignette”:

- Inizia dal noto (“la base”)
- Passa a un pezzo di matematica significativo (“il pivot”)
- Contiene qualcosa di nuovo (“la ricerca”)

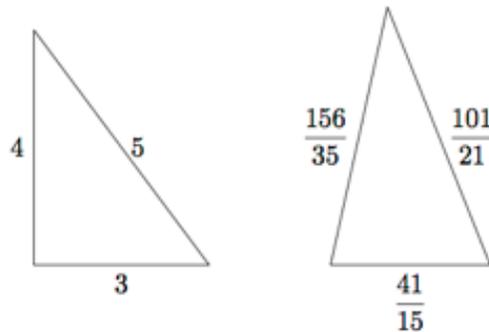
Lo stile è altrettanto cruciale:

- Stile accattivante per un insegnante (diverso da quello matematico standard)
- Non “parlare di” ma “accompagnare nella lettura”

Esempio

La storia di due triangoli: i triangoli di Erone e le curve ellittiche

Posted on [September 17, 2013](#) by [Antoine Nectoux](#)



Se due triangoli hanno la stessa area e lo stesso perimetro, sono necessariamente congruenti? La risposta si rivela negativa. Per esempio, il triangolo con lati 3, 4 e 5 ha la stessa area e lo stesso perimetro del triangolo con lati $\frac{41}{15}$, $\frac{101}{21}$ e $\frac{156}{35}$.

Entrambi i triangoli hanno perimetro 12:

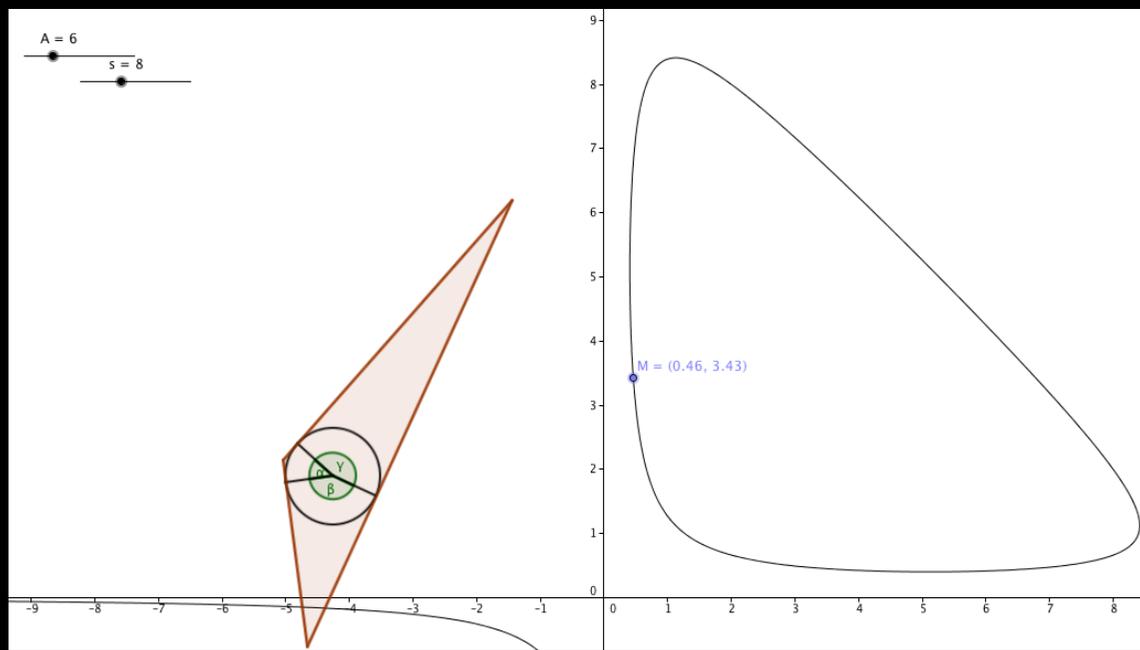
Lo spazio dei triangoli

Come possiamo individuare esempi di questo tipo? Il segreto è trovare il modo giusto di rappresentare lo spazio di tutti i triangoli. Ci sono molti modi possibili per farlo. Uno è quello di rappresentare un triangolo mediante la terna (a, b, c) che consiste nei suoi tre lati presi in ordine casuale. In questo modo rappresentiamo un triangolo mediante un punto dello spazio tridimensionale. Non tutti i punti corrispondono ad un triangolo; per esempio, tutte le componenti devono essere positive. Riesci a pensare ad altre restrizioni?



Finiscono con una “morale”

La storia descritta in questo articolo mostra la notevole unità della matematica, a cominciare dalla scuola superiore per finire nella ricerca. Lungo la strada abbiamo incontrato un'idea fondamentale nella matematica moderna: l'idea di risolvere un problema riguardante un particolare tipo di oggetto (i triangoli con area 6 e perim. 12, per esempio) situando l'oggetto in uno spazio più generale (lo spazio di tutti i triangoli) e trovando il modo più conveniente per parametrizzarlo.



Spingono a leggere altro sul tema

Ogni “vignette” deve mettere in grado il lettore di approfondire l’argomento con una varietà di documenti/indicazioni associati:

- Note storiche
- Riferimenti bibliografici
- Ulteriori applicazioni
- Collegamenti con altre aree della matematica
- Commenti relativi al curriculum
- Collegamenti a materiali per la classe
- ...

Spingono a leggerne un'altra

Attenzione a:

- Media: quelli usati comunemente dagli insegnanti
- Linguaggi: le traduzioni (Inglese, Francese, Tedesco, Italiano, Spagnolo, Portoghese, Mandarino,...)
- Accessibilità: TUTTI gli insegnanti

Le “vignettes” oggi esistenti in Italiano:

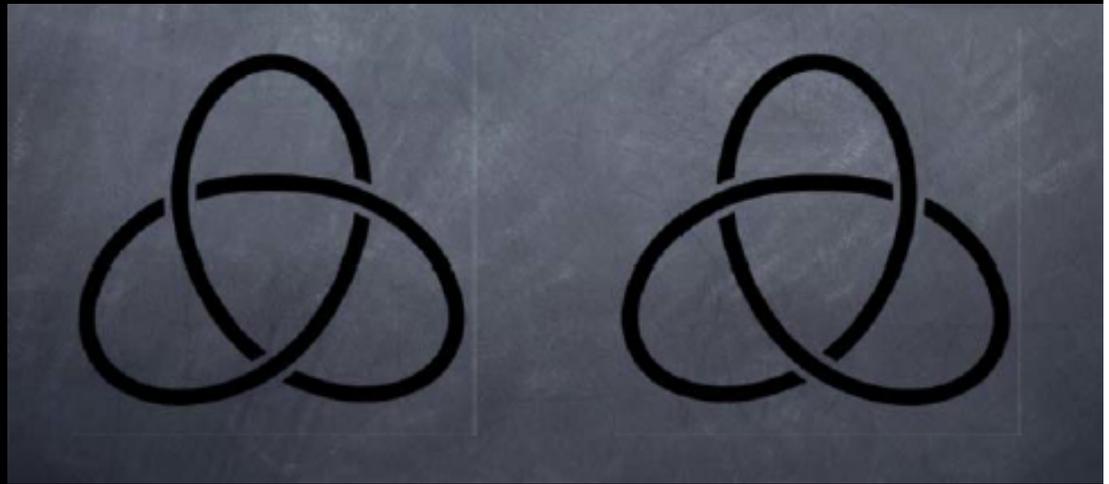
- Come funziona Google: catene di Markov e autovalori
- Votazione equa: la ricerca dell'oro
- Dimensioni superiori
- Il microscopio di Banach per trovare un punto fisso
- Qual è il modo per impacchettare le arance? La congettura di Keplero sull'impacchettamento delle sfere.
- La legge di Benford: imparare a intercettare le frodi
- Colorazioni di mappe e basi di Gröbner
- La dimensione
- La storia di due triangoli: i triangoli di Erone e le curve ellittiche
- Le successioni di Goodstein: la potenza di una deviazione che passa per l'infinito
- Matrici e immagini digitali

Un esempio di progettazione

Gli **invarianti** in problemi di classificazione (esempi da geometria e algebra) \rightarrow equivalenze

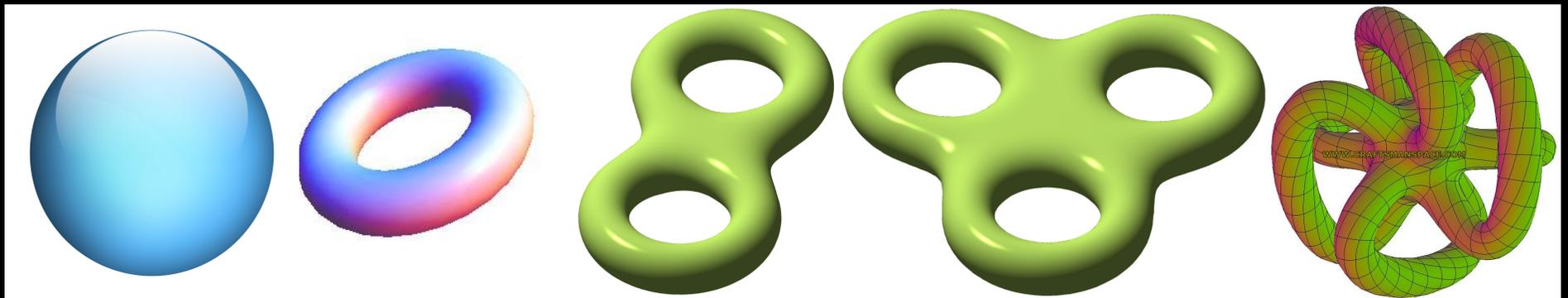
Un es.: il minimo numero di intrecci in un nodo \rightarrow equivalenza tra nodi ?

Ma un nodo “sinistro” e “destro” possono non essere equivalenti:
il n° di intrecci non è un invariante completo.



Un esempio di progettazione

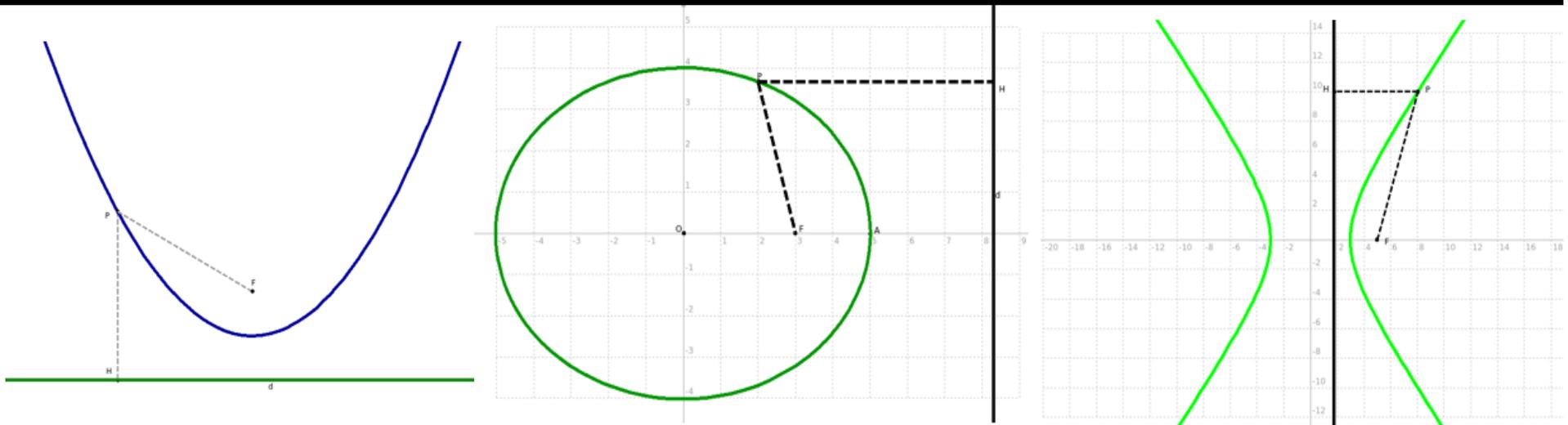
Il genere di una superficie è un **invariante completo** (così come la caratteristica di Eulero): equivalenza = inv. completa
→ classificazione delle superficie compatte orientabili senza confini.



Un esempio di progettazione

Conica come luogo dei punti P tali che il rapporto tra la distanza $|PF|$ da un punto fisso F (Fuoco) e $|PH|$ da una retta fissa (direttrice) è costante ($= e$):

$$|PF|/|PH| = e$$



Un esempio di progettazione

Conica come luogo dei punti P tali che il rapporto tra la distanza $|PF|$ da un punto fisso F (Fuoco) e $|PH|$ da una retta fissa (direttrice) è costante ($= e$):

$$|PF|/|PH| = e$$

L'eccentricità è un invariante completo per le coniche rispetto alla relazione di equivalenza per similitudine.

La traduzione in italiano

La traduzione è stata fatta da due studentesse di dottorato di Torino, Monica Panero e Marina De Simone, grazie a un finanziamento dell'UMI.



I workshop Klein

Sono punti d'incontro dove matematici, didattici, insegnanti si incontrano e lavorano alla produzione di materiali per il Progetto Klein.

Non sono solo importanti i materiali ma le interazioni negli incontri.

La matematica contemporanea è un ottimo terreno su cui tutti possono “giocare” insieme.

I seminari Klein

- Brasile
- Svezia
- Spagna
- Portogallo
- USA
- Nuova Zelanda
- Francia
- Germania
- Cambogia
- ...???

Attività Polo Didattico
dell'Accademia Scienze di
Torino 2013-2014

In rete con i Poli
Accademici coordinati
dall'Accademia Nazionale
dei Lincei

(presentazione: 25-11
Acc. Sci. Torino)

<http://blog.kleinproject.org/>

Klein Project Blog

Connecting mathematical worlds



[Home](#) [About](#) [What is a Klein vignette?](#) [Licence](#)

Vi invito a entrare nel progetto...

- Leggendo e commentando le vignette esistenti, tenendo presente la filosofia del progetto
- Lavorando con altri alla creazione di nuove vignette
- Lavorando con altri alla produzione di documenti di supporto
- Diffondendo informazioni sul progetto
- Suggerendo ulteriori espansioni del progetto
- ...

Chi è interessato mi scriva!

Vi invito a far parte del progetto...

<http://umi.dm.unibo.it/progetti/klein-project/>

www.blog.kleinproject.org

www.kleinproject.org

ferdinando.arzarello@unito.it

<http://umi.dm.unibo.it/progetti/klein-project>

Progetto Klein

Il Progetto Klein (<http://blog.kleinproject.org/>) mira alla costituzione di una comunità di apprendimento basata sui contatti tra le scuole e la ricerca matematica contemporanea.

Uno strumento di veicolazione di questo legame sono le cosiddette “*vignettes Klein*”, cioè un breve scritto che illustra uno specifico tema della matematica.

Se avete proposte per “*vignettes*”:

- in italiano siete pregati di contattare il prof. Ferdinando Arzarello (ferdinando.arzarello@unito.it),
- in altre lingue di andare al seguente link http://blog.kleinproject.org/?page_id=2 dove trovate le modalità relative.

Per ulteriori informazioni scrivere a Ferdinando Arzarello: ferdinando.arzarello@unito.it

(traduzione dall'inglese delle vignettes a cura di Marina De Simone e Monica Panero)



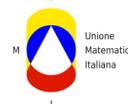
Allegati

Lista della “*vignettes*” (traduzione dall'inglese delle vignettes a cura di Marina De Simone e Monica Panero):

- **Come funziona Google: catene di Markov e autovalori**
- **Votazione equa: la ricerca dell'oro**
- **Qual è il modo per impacchettare le arance? La congettura di Keplero sull'impacchettamento delle sfere**
- **La legge di Benford: imparare a intercettare le frodi**
- **Colorazioni di mappe e basi di Gröbner**
- **La storia di due triangoli: i triangoli di Erone e le curve ellittiche**
- **Dimensioni superiori**
- **Il microscopio di Banach per trovare un punto fisso**
- **La dimensione**

Grazie per l'attenzione!

Progetto Klein



Connecting mathematical worlds



[Home](#) [About](#) [What is a Klein vignette?](#) [Licence](#)

Grazie per l'attenzione!