

**“Matematica Moderna”  
e progetti italiani di riforma  
negli anni '60 e '70**

*Marta Menghini, Sapienza – Università di Roma*

## 1932 – David George Birkhoff

*A set of Postulates for Plane Geometry based on scale and protractor*

**Serie di articoli (Veblen 1904, Moore 1908, Birkhoff & Beatley 1930, e poi ancora Blumental 1953, MacLane 1959 fino a Moise 1962) su nuovi sistemi di assiomi per la geometria euclidea.**

- **assiomi di ordine**
- **congruenza stabilita con il ricorso alla misura, ovvero ad una corrispondenza fra segmenti e numeri reali**

**Birkhoff affronta esplicitamente il problema dell'insegnamento della geometria e al suo lavoro faranno riferimento tutti gli autori successivi.**

- Concetti primitivi sono

\* *distanza* fra due punti A e B

\* *misura dell'angolo* individuato da una terna ordinata A, O, B

I relativi postulati sono “incorporati” (embodied) in *riga graduata* e *goniometro*

**I.** *I punti A, B, ... di qualunque retta l possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri reali x in modo che  $|x_B - x_A| = d(A, B)$*

**II.** *Per due punti passa una ed una sola retta*

**III.** *analogo a I. riferito agli angoli*

**IV.** *Se in due triangoli qualunque ABC e A'B'C' per una costante  $k > 0$ ,  $d(A', B') = kd(A, B)$ ,  $d(A', C') = kd(A, C)$ , e  $B'\hat{A}'C' = \pm B\hat{A}C$  allora  $d(B', C') = kd(B, C)$  e anche i due restanti angoli sono uguali.*

**(I criterio similitudine per i triangoli)**

Da questi 4 postulati “forti” si deduce l'usuale geometria euclidea.

## *Influenze sull'insegnamento della matematica*

**Birkhoff & Ralph Beatley, *Basic Geometry*, 1941**

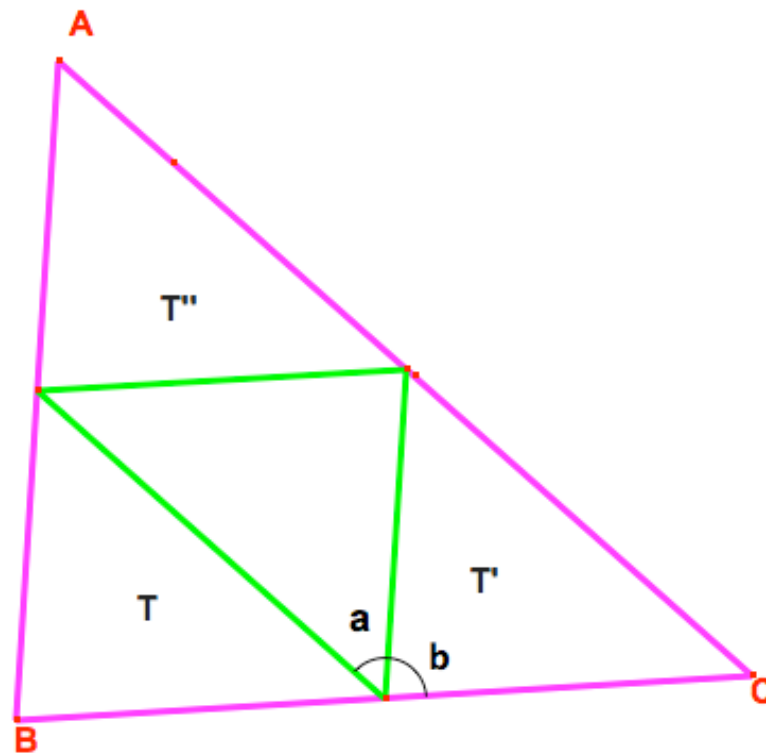
- successive edizioni fino al 1959.

**Rispetto all'articolo del 1932, il linguaggio è semplificato e i postulati sono diventati 5. Molti esercizi ed esempi.**

***I teoremi base:***

***La somma degli angoli di un triangolo è  $180^\circ$***

- unicità della perpendicolare...
- teorema di Pitagora
- unicità della parallela...



**Le idee di Birkhoff presero lentamente piede: diversi libri di testo ispirati alla sua assiomatica, materiali prodotti anche dallo School Mathematics Study Group.**

**Parallelamente, negli USA, movimento di derivazione bourbakista: New Math movement (Max Bebermann, 1951-52).**

**Contenuti: teoria degli insiemi, funzioni, relazioni e logica - metodologia della scoperta.**

**1964: Gustave Choquet scrive l' *Assiomatica a base metrica*, che prevede un'applicazione del piano in  $\mathbb{R}^+$  detta *distanza* - non fa riferimento a Birkhoff.**

**Il parallelo fra i due autori è fatto da A. Pescarini (prefazione italiana al testo di Choquet) e nella guida al progetto Prodi:**

***“l'impostazione seguita [per la geometria] è nel filone inaugurato da Birkhoff ed è abbastanza vicina ad uno schema assiomatico proposto da G. Choquet”.***

## 1935 - Il gruppo Bourbaki

- Collettivo di matematici costituitosi nel 1935 a Parigi con l'intento di risollevarla la matematica – in particolare francese, carente soprattutto in campo algebrico.
- Il nucleo fondante: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, Szolem Mandelbrojt, André Weil...
- Segretezza: Nessuno deve conoscere i nomi dei componenti del gruppo.
- Lavori firmati tutti con lo stesso pseudonimo.
- A cinquant'anni si doveva lasciare il gruppo.
- Progetto ambizioso: la sistemazione e la presentazione di tutta la matematica sulla base della teoria assiomatica degli insiemi.

*Dieudonné: “...il nostro lavoro doveva fornire in primo luogo uno strumento. Doveva essere qualcosa di utilizzabile non solo in una piccola parte della matematica, ma nel più gran numero possibile di domini della matematica. Fu da questa esigenza che emerse il ruolo centrale attribuito all'idea di struttura matematica”.*

1939, “*Éléments de mathématiques*”, libro I: *Théorie des ensemble*.

Seguono: algebra, funzioni di una variabile reale, topologia generale, spazi vettoriali topologici, ...

Non temi nuovi ma stabilire e ordinare le basi della matematica secondo una visione unitaria.

Ragionamenti in forma assiomatica, astrazione di tutte le evidenze intuitive.

**“Strutture madri”:**

algebriche, d'ordine, topologiche

Oggi: *Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki*

(<http://www.bourbaki.ens.fr/>)

## *Influenza del bourbakismo sull'insegnamento della matematica:*

**Negli anni '50.**

**Fondazione della *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement Mathématique* (CIEAEM).**

**Gruppo di studio e di lavoro, guidato Caleb Gattegno**

**Comprende: lo psicologo Jean Piaget, il filosofo e logico Evert W. Beth, l'epistemologo Ferdinand Gonseth, i matematici Gustave Choquet (presidente), Jean Dieudonné, Hans Freudenthal e André Lichnerowicz, e insegnanti di scuola: Emma Castelnuovo, Lucienne Félix, Willy Servais.**

**Istanze didattiche: nuove metodologie, l'uso del materiale concreto, lo studio degli aspetti psicologici, l'attenzione al percorso completo dell'alunno, ma...**

**In *Piaget et al.* (1955) tutti gli autori concordano sulle opportunità che la Matematica Moderna offre all'insegnamento, e Dieudonné afferma che l'essenza della matematica è ragionare su strutture astratte.**



## **Il concetto di struttura nell'opera di Piaget**

**Le strutture madri corrispondono alle strutture naturali, psicologiche insite nella mente di ogni bambino e utilizzate nel processo di apprendimento.**

**Tre strutture fondamentali affini a quelle di Bourbaki:**

- basate sui concetti di reversibilità ed inversione (corrispondenti alle strutture algebriche),**
- basate sul concetto di reciprocità dette strutture di relazione (ovvero le strutture d'ordine)**
- le strutture spaziali o infralogiche che si rifanno ai concetti di vicinanza, limite e continuità (come le strutture topologiche).**

**Importante è anche il ruolo degli insiemi per l'approccio al *concetto cardinale di numero naturale*, che per Piaget – e dopo un po' nella didattica della scuola elementare – *precede* il concetto ordinale di numero.**

## **Un successo della componente bourbakista dei membri della CIEAEM:**

### **Il convegno di *Royaumont*, 1959**

- Organizzato dall'O.E.C.E. sulla riforma dell'insegnamento della matematica.**
- Ciascuno dei diciotto paesi membri fu invitato a partecipare con rappresentanti della scuola e dell'Università (per l'Italia Luigi Campedelli ed Emma Castelnuovo).**
- Presiedeva il Convegno Marshall Stone, allora Presidente dell'ICMI**
- Tre sezioni:**
  - I) Nuove concezioni nell'ambito della matematica (presieduta da Jean Dieudonné, Francia)**
  - II) Nuove concezioni nell'ambito dell'insegnamento della matematica (presieduta da Howard Fehr, U.S.A.)**
  - III) Problemi di attuazione della riforma (presieduta da Pierre Théron, Ispettore ministeriale, Francia)**

**Obiettivo: un programma di riforma europeo.**

**Nella premessa agli atti del convegno e nell'intervento introduttivo di Marshall Stone, sono almeno tre gli aspetti giudicati rilevanti per una riforma dell'insegnamento matematico:**

- la matematica insegnata deve far riferimento al mondo delle applicazioni;**
- la matematica insegnata nella scuola deve permettere il collegamento con l'insegnamento universitario;**
- l'insegnamento della matematica richiede una nuova metodologia.**

**Il “Manifesto” del convegno:**

**Dieudonné concentra il suo intervento sul problema della preparazione degli alunni in vista dell'Università.**

**L'intervento di Dieudonné è un atto d'accusa contro la geometria euclidea.**

***Di essa si può salvare solo la descrizione del sistema di assiomi. Con l'aggiunta di alcune "conseguenze utili" e di qualche esercizio interessante il tutto può essere svolto in tre ore di lezione. Va invece eliminato lo studio delle proprietà dei triangoli.***

## Rifiuto della geometria euclidea

(anche in “Algèbre linéaire et géométrie élémentaire”, 1964).

- inutile frantumazione in ambito scolastico: dietro a geometria analitica, trigonometria, geometria proiettiva, ... vi è solo l'algebra lineare.
- anello di congiunzione fra matematica e fisica, e quindi fra matematica e *esperienza*.

Per trattare la geometria si deve stabilire un sistema di assiomi per le *operazioni* su un insieme di vettori (non definiti).

- 1) un'applicazione  $(x, y) \rightarrow x + y$  di  $E \times E$  in  $E$  ;
- 2) un'applicazione  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  di  $\mathbb{R} \times E$  in  $E$  ;
- 3) un'applicazione  $(x, y) \rightarrow (x|y)$  di  $E \times E$  in  $\mathbb{R}$  (( $x|y$ ) prodotto scalare)

verificanti gli **"assiomi della geometria piana euclidea"**:

(V1) Per ogni coppia  $(x, y)$  di elementi di  $E$  , si ha  $x + y = y + x$ .

Etc.: proprietà somma, elemento neutro...

(V6) Per ogni numero reale  $a$  e per ogni  $(x, y)$  di  $E$ , si ha  $a(x+y) = ax + ay$ .

**Si possono allora trattare "l'algebra lineare a due dimensioni (basi, rette, dipendenza lineare, gruppi di traslazioni e di omotetie, forme lineari e equazioni di curve), [...]ciò che si chiama geometria piana affine";**

**(E1) Per ogni coppia  $(x, y)$  di elementi di  $E$ , si ha  $(y | x) = (x | y)$ .**

**(E2) Per ogni terna  $(x, y, z)$  di elementi di  $E$ , si ha  $(x + y | z) = (x | z) + (y | z)$ .**

**...**

**con l'aggiunta del prodotto scalare, si possono trattare le proprietà metriche: ortogonalità, cerchi, rotazioni, simmetrie, angoli e gruppi di isometrie.**

**Prima dei 14 anni ci si limiterà ad un lavoro sperimentale, senza introdurre il sistema d'assiomi.**

**Proposte didattiche più concrete nel 1960:**

**Dubrovnik una sessione di lavoro in cui un gruppo di esperti (per l'Italia Mario Villa) elabora un programma per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria.**

*Paul Libois* è probabilmente l'autore dei programmi di geometria per il livello 11-15 anni, *Gustave Choquet* di quelli per il livello 15-18 anni.

*Sintesi delle posizioni dei vari paesi.*

Lo studio della geometria includerà inizialmente i *gruppi di trasformazioni* (come collegamento con l'algebra), poi le *proprietà affini* delle figure piane, le *trasformazioni affini* (e in particolare i sottogruppi delle traslazioni, e omotetie), le coordinate (con riferimento alla corrispondenza tra retta e numeri reali), i vettori e le *proprietà di spazio vettoriale*, la geometria analitica.

In un secondo momento le *proprietà metriche*: il *prodotto scalare di due vettori*, la *perpendicolarità*, norma, trigonometria.

*Coniche; studio assiomatico.*

**Le proprietà euclidee classiche sono state studiate in massima parte nella scuola media, e non necessitano di uno studio sistematico a questo livello. E' importante che gli alunni capiscano che oltre alla geometria e allo spazio euclideo esistono altre geometrie e altri spazi (spazio affine).**

**I programmi di *algebra* di Dubrovnik:**

**11-15 anni:**

- Nozioni elementari di teoria degli insiemi**
- Applicazioni di un insieme su un altro; numero cardinale**
- ... Sistemi di numerazione in altre basi, in particolare 2.**
- ... calcolo approssimato**

**15 – 18 anni:**

- Teoria degli insiemi, applicazioni, relazioni, gruppi anelli corpi, ..., primo approccio ad un'introduzione formale dei numeri reali,**
- Ricorsione, divisibilità, numeri primi, classi resto, anello dei polinomi, insiemi (operazioni logiche), gruppi (isomorfismi, omomorfismi),...**
- applicazioni lineari, matrici, teoria dei gruppi, coniche (forme e funzioni quadratiche).**

**I convegni dell'O.E.C.E., provocarono un discreto movimento di riforma in Europa, anche a livello ufficiale.**

**Belgio: Georges Papy**

**Francia: Commissione Lichnerovicz**, già presidente dell'ICMI, membro della CIEAEM. Va affiancato anche il nome di André Revuz. Come in Belgio, le riforme erano accompagnate da tentativi di coinvolgere ampiamente il modo della scuola. In Francia nacquero gli IREM.

**Matematica moderna (teoria degli insiemi, logica, strutture, numeri complessi, ...) e *pedagogia attiva*.**

**Riforme partite intorno agli anni '70 e terminate drammaticamente dopo il 1980.**

**Il fallimento della riforma francese è da meditare.**

**Ma hanno imparato qualcosa...**



## **Inghilterra: SMP**

coesistevano programmi tradizionali e programmi più moderni, come quello proposto dall'**SMP** (tradotto a cura dell'UMI).

La geometria euclidea tradizionale lasciò gradualmente il posto alle trasformazioni geometriche e alle proprietà dei vettori, alle matrici, e anche alla teoria degli insiemi. Approccio mai troppo teorico.

## **L'insegnamento in Italia, da Royaumont ai Programmi di Frascati**

**Il Ministero istituì in diversi tipi di scuole secondarie "classi pilota" per la sperimentazione di un insegnamento moderno della matematica.**

**Gli insegnanti di tali classi usufruirono di corsi di aggiornamento e di volumi riguardanti gli argomenti essenziali di algebra astratta, struttura logica della geometria e matematiche applicate (Villa 1965, 1966).**

**Atteggiamento generale favorevole alla riforma; apprezzata la possibilità di collegamenti "trasversali" tra gli argomenti classici (concetto di struttura, di insieme, di vettore, di funzione...) e, per quanto riguarda la geometria, una trattazione "per tipo di proprietà" più che "per figure".**

**Proposte di nuovi programmi per la scuola secondaria superiore per una riforma che avrebbe dovuto effettuarsi nell'ottobre 1966:**

**convegni di Gardone, Camaiore e Frascati, sessioni di lavoro, organizzate dal centro studi del Ministero, dalla CIIM e da altri, nella Villa Falconieri di Frascati.**

**Personaggi: Ugo Morin, vice-presidente dell'UMI, Luigi Campedelli, presidente della CIIM, Tullio Viola, presidente della Mathesis, Emma Castelnuovo, insegnante di Scuola media, Mario Villa, direttore del Centro Didattico Nazionale.**

**Lo scopo di tutti i programmi era di "aderire alle nuove esigenze scientifiche e didattiche, ma anche di aggiornare notazioni espressioni, definizioni, all'attuale livello scientifico".**

**Un'ampia parte relativa a teoria degli insiemi, strutture d'ordine, strutture algebriche doveva precedere l'insegnamento della geometria.**

**1966 e 1967 un'ampia commissione riunita a Villa Falconieri sotto l'egida dell'U.M.I. e della C.I.I.M., elaborò i *Programmi di Frascati*.  
Nella commissione, Giovanni Prodi**

## **Argomenti di *geometria*:**

**I anno - Piano come insieme di punti e rette come suoi sottoinsiemi. incidenza, parallelismo, direzione. (L.d.C.: Proprietà affini del piano: incidenza, parallelismo, direzione; traslazioni, vettori e simmetria centrali)**

**- Proprietà di ordinamento della retta e di partizione del piano. Segmenti, figure convesse: angoli e poligoni. (Proprietà topologiche)**

**II anno - Congruenze (o isometrie) – confronto di segmenti – perpendicolarità – traslazioni, rotazioni e simmetrie – applicazioni ai segmenti, agli angoli, ai triangoli, ai poligoni – circonferenza e cerchio – poligoni regolari – teorema di Talete e teorema di Pitagora. (L.d.C.: Proprietà metriche del piano: Lunghezza del segmento e ampiezza dell'angolo (cenni sulle rispettive misure))**

**III anno - Piano vettoriale geometrico: combinazioni lineari, coordinate, traslazioni. Sistemi di equazioni lineari in due incognite. Equazione cartesiana delle rette, sistema di due rette.**

**- Numeri complessi. Prodotto scalare.**

**- Gruppo delle congruenze e delle similitudini del piano.**

**IV anno - Circonferenza, ellisse, iperbole e parabola e molto spazio allo spazio.**

**Estensioni e argomenti facoltativi:**

**Geometria analitica dello spazio, ampliamento proiettivo dello spazio affine (o euclideo) e gruppi di trasformazioni, Geometrie non euclidee**

**La geometria analitica continua a fare il suo ingresso tardi, nel triennio, perché, pur parlando di trattazione intuitiva dei numeri reali, non si vuole introdurre la "misura" al biennio.**

## **Progetti Italiani e nuovi argomenti.**

***Programmi di Frascati:* ampia influenza sui progetti italiani e i libri di testo a questi legati (ma scarsa in percentuale).**

**Gruppi Università – Scuola per la sperimentazione di nuovi curricula, ufficializzati con un contratto fra UMI e CNR, a partire dagli anni 75-76  
I gruppi di ricerca riferivano sugli esiti delle loro sperimentazioni nei convegni UMI-CIIM (1976 e segg.)**

**I nuclei:**

**Pisa (Prodi), Pavia (Ferrari), Trieste (Dolcher) (stesso programma), Parma (Speranza) e Savona (Spotorno), Napoli (Morelli), Torino (Valabrega), Roma (Mancini Proia), Bologna (D'Amore), Cosenza (Costantini).**

**Inoltre**

**Contratto CNR con la Mathesis (Progetto OPI e RICME, scuola elementare Pellerrey), e con l'Università di Genova (Boero, Scuola Media)**

**Più che la matematica moderna, sembrava importante la metodologia e la libertà di sperimentare nuovi argomenti.**

**Argomenti e metodi di “Matematica Moderna” nati in qual periodo - quanto è rimasto?**

**Libertà (nella scelta degli assiomi per la geometria).**

**Choquet viene incontro alle esigenze di tipo “italiano” con l'assiomatica a base metrica; lo studio del piano metrico precede quello del piano affine; le isometrie sono introdotte tramite un assioma di esistenza della simmetria assiale.**

**Molti progetti seguivano questo tipo di assiomatica (Prodi, Mancini Proia, Morelli...) con varianti.**

**assioma di distanza - assioma di simmetria**

**Adesso sostanzialmente assiomi di Euclide /Hilbert, ma senza assiomi di “trasporto” o di “congruenza” di Hilbert.**

## *Trasformazioni geometriche*

Tutti i progetti ne fanno un'ampia trattazione. Principalmente isometrie e similitudini.

*Affinità e proiettività compaiono fra le possibili estensioni dei Programmi di Frascati e in alcuni progetti (Mancini Proia, ...)*

## *Programma di Erlangen.*

P. d. Frascati, PNI(1984), IN(2010): invarianti

## *Vettori, prodotto scalare.*

Tutti i progetti, PNI, UMI(2000), IN(2010)

## *Spazio vettoriale.*

In Mancini, Prodi e altri: nominato per inciso; UMI: struttura dell'insieme dei vettori, IN: dipendenza e indipendenza lineare

## *Gruppi, corpi e anelli.*

*Prodi, Mancini Proia, ...; in PNI “strutture algebriche”; UMI: operazioni negli insiemi numerici. Eccessivamente tacciati di bourbakismo?*



## *Insiemi.*

**Tutti i progetti; UMI: insiemi numerici; OSA(2003): insiemi numerici e anche linguaggio degli insiemi, IN: linguaggio degli insiemi e delle funzioni**

## *Probabilità.*

**Nei Programmi di Frascati la probabilità appare solo nell'ultimo anno. Tutti i progetti (tranne Speranza) la anticipano al biennio. Per Prodi è l'argomento portante nella scoperta matematica. Da allora in tutti i programmi e testi, con statistica**

## *Logica delle proposizioni.*

**Mancini Proia, Speranza, D'Amore, PNI, UMI, OSA**

## *Insegnamento per problemi.*

**Tutti i progetti. Per Prodi sono un punto di partenza essenziale. Il testo di Villani Spotorno è un testo sui modelli matematici.**

**Oggi: lavoro di gruppo, problem-solving, *laboratorio*.**

***Aritmetica: divisibilità e numeri primi, MCD, mcm (come combinazione lineare...)***

**Prodi, ...; PNI, UMI, IN: non tutto ma dimostrazioni in  $\mathbb{N}$**

***Classi resto.***

***Prodi, Mancini, PNI, UMI: cenno***

***Applicazioni iniettive, suriettive***

***Geometrie finite***

***Numerazione in base diversa da 10***

***Programmazione lineare***

***Grafici ed equazioni***

***Informatica: automi, diagrammi di flusso, ..., grafi.***