

Maria Alessandra Mariotti  
Dipartimento di Ingegneria  
dell'Informazione e  
Scienze Matematiche  
Università di Siena  
mariotti21@unisi.it

Mirko Maracci  
Dipartimento di Matematica  
Università di Pavia  
mirko.maracci@unipv.it

*Congetturare e  
dimostrare in un  
ambiente di  
geometria  
dinamica*

Convegno UMI CIIM  
17, 18, 19 ottobre 2013, Salerno

# Di cosa parleremo

- La produzione di un “disegno” in ambiente di geometria dinamica (AGD)
- Il comando di trascinamento in un AGD
- Trascinamento e congetture
- Analisi di esempi dalla classe
- Discussione sulle implicazioni didattiche

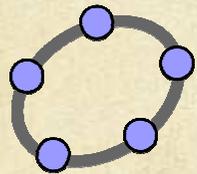
# Introduzione

"... the changes in the solving process brought by the dynamic possibilities of Cabri come from an **active** and **reasoning visualisation**, from what we call an interactive process between **inductive** and **deductive reasoning** "

(Laborde & Laborde, 1991 p. 185)

# Ambienti di Geometria Dinamica (AGD)

Cosa è davvero cambiato rispetto a carta e matita ?  
Riflettiamo su un esempio molto semplice



Tracciare prima su un foglio di carta e poi sulla finestra di Geogebra due rette tra loro perpendicolari.

Redigere un testo che illustri la procedura seguita per realizzare i due disegni.

Quali sono le principali analogie e le principali differenze tra le procedure seguite?

Quali sono le principali analogie e le principali differenze tra il disegno su carta e quello in Geogebra?

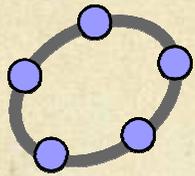
# Quali sono le principali principali differenze

Esplicitazione: primo passo per la **presa di consapevolezza** delle relazioni in gioco

- La produzione di un disegno può essere una **sequenza di azioni organizzate** temporali, spaziali e logiche.
- Una costruzione in un AGD richiede l'**esplicitazione** di tale sequenza, che non è più "solo" realizzata ma è **comunicata al sistema attraverso l'uso di comandi**.
- Un AGD introduce elementi non esplicitamente richiesti o definiti.
- Alcuni elementi di un disegno in un AGD, non tutti, possono essere **trascinati**.

Non è detto che tutte le relazioni in gioco vengano esplicitate in un comando

# Trascinamento e movimento



Costruire un parallelogramma e gli assi di due suoi lati opposti.

Alcuni degli elementi del disegno in Geogebra possono essere “trascinati” (selezionali premendo il tasto sinistro del mouse e, tenendo il tasto premuto, sposta il mouse, infine rilascia il tasto).

Fare un’ esplorazione sistematica: quali elementi possono essere trascinati? Cosa accade agli altri elementi del disegno?

Tras

Vengono **preservate le relazioni spaziali** tra gli elementi del disegno definite nella costruzione attraverso l'**uso dei comandi** dell' ADG. Ne vengono preservate altre?

nto

Alcuni ele

essere **trascinati**, ma non tutti.

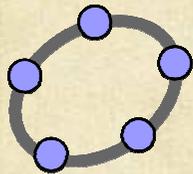
Il trascinamento modifica il disegno **preservando alcune relazioni spaziali**. Quali?

Il movimento di una figura è percepito nel contrasto tra

- cosa (relazioni spaziali) varia, e
- cosa (relazioni spaziali) resta invariato: **invarianti**.

# Invarianti

Le **relazioni spaziali** tra gli elementi del disegno definite nella costruzione attraverso l'uso dei comandi dell'ADG sono **invarianti rispetto al trascinamento**. Ve ne sono altri?



Costruire un triangolo  $ABC$ , le altezze relative ai lati  $BC$  e  $AC$  e una retta passante per  $C$  e per il punto di intersezione,  $H$ , tra le due altezze. Cosa sai dire della retta  $CH$  appena tracciata? Trascina i punti base, cosa osservi della retta  $CH$ ?

# Trascinamento

Potenzialità  
didattiche

Il **trascinamento** modifica il  
**relazioni:**

**Invarianti per trascinamento**

Una costruzione provoca il fenomeno di mantenere:

- le **PROPRIETÀ DI COSTRUZIONE** cioè le  
relazioni definite nella costruzione  
dei comandi dell'ADG
- tutte le **CONSEGUENZE** delle proprietà di  
costruzione

**Invarianti di  
costruzione**

**Invarianti derivati  
dalla costruzione**

Trascinamento

Potenzialità  
didattiche

Complessità  
di mantenere il  
controllo concettuale

Una ... il fenomeno di mantenere:

- le PROPRIETÀ DI COSTRUZIONE, cioè le relazioni tra le parti dei costrutti

- tutte le proprietà delle proprietà di costruzione

Simultaneità  
degli invarianti

Invarianti di  
costruzione

Invarianti derivati  
dalla costruzione

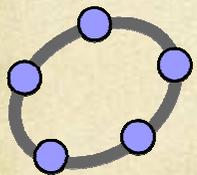
# Trascinamento per...

Una prima analisi delle potenzialità didattiche porta a distinguere due situazioni:

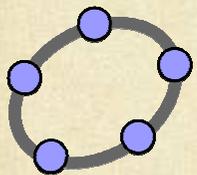
- Uso del trascinamento per **testare se la costruzione effettuata è corretta**, ovvero se la costruzione corrisponde allo scopo che si era prefissa.  Problemi di costruzione
- Uso del trascinamento al fine di **produrre una congettura**, ovvero data una certa configurazione formulare un enunciato che esprima la dipendenza logica tra proprietà riconoscibili per trascinamento in tale configurazione.  Problemi di congettura

# Problemi aperti di congettura

Una consegna che pone una domanda senza rivelare o suggerire una risposta attesa, e che **richiede esplicitamente una congettura** e la sua prova ...



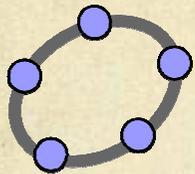
Dato un quadrilatero cosa si può dire del quadrilatero che ha come vertici i punti medi dei suoi lati?



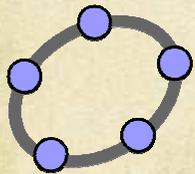
Quale figura formano le bisettrici degli angoli di un parallelogramma?

Quali sono gli invarianti di costruzione? Quali quelli derivati?

# Problemi aperti di congettura



Dato un quadrilatero, costruire i punti medi delle sue diagonali. Sotto quali condizioni sul quadrilatero i punti medi coincidono?



Dato un quadrilatero costruire gli assi dei suoi lati. Siano  $M$ ,  $N$ ,  $R$  e  $Q$  i punti di intersezione delle coppie di assi di lati adiacenti. Sotto quali condizioni sul quadrilatero i punti  $M$ ,  $N$ ,  $R$  e  $Q$  coincidono?

**Quali sono gli invarianti in questo caso?**

# Diverse esplorazioni in un AGD

- **esplorare una COSTRUZIONE ROBUSTA**

Porta a “scoprire” conseguenze di una serie di ipotesi, rappresentate tramite una costruzione robusta.

Per esempio: dato un quadrilatero cosa si può dire del quadrilatero che ha come vertici i suoi punti medi?

- **esplorare una COSTRUZIONE MOLLE/“SOFT”:**

Porta a “scoprire” le condizioni sotto cui si verificano determinate conseguenze, rappresentate tramite costruzioni non robuste.

Per esempio: Dato un quadrilatero, costruire i punti medi delle sue diagonali. Sotto quali condizioni sul quadrilatero i punti medi coincidono?

# Analisi degli invarianti

Una prima distinzione

- Invarianti di costruzione
- Invarianti derivati

Ma anche

- Invarianti imposti tramite un movimento guidato.

# Dall'esplorazione alla congettura

**Asimmetria** del comportamento degli oggetti costruiti  
rispetto al trascinamento: **cosa posso trascinare e cosa no?**

Individuazione di **relazioni invarianti** tra gli oggetti costruiti.

**Asimmetria** tra invarianti:

- invarianti di **costruzione**
- invarianti **derivati**
- invarianti **imposti**

**Simultaneità** tra proprietà invarianti: **esistenza di una relazione logica** che le lega.

# Dall'esplorazione alla congettura

Quali dati percettivi?  
Quali tipi di invarianti?

La produzione di una congettura si basa su:

- L'interpretazione geometrica
- L'interpretazione della similitudine in termini di relazione condizionale tra le proprietà geometriche evocate dagli invarianti.

Le congetture elaborate esprimono in modo esplicito una relazione condizionale?

Dati percettivi devono essere interpretati in modo da esprimere una relazione condizionale tra le proprietà geometriche

**cristallizzazione di un processo dinamico di esplorazione in una proposizione condizionale**

# Conggetture in un AGD

Quali tipi di invarianti vengono messi in relazione tra loro?

- uno o più invarianti **derivati** sono messi in relazione con gli invarianti **costruiti**

Cogliere proprietà invarianti come conseguenza della costruzione

- l'invarianza di un particolare proprietà (invarianti **imposti**) è messa in relazione con un particolare 'movimento'

Ricerca sotto-configurazioni nelle quali si evidenzia un legame condizionale tra proprietà

# Modalità di trascinamento

Trascinamento libero	<p>Azione: Trascinamento di un punto/oggetto di base + Traccia su questi oggetti</p> <p>Obiettivo: Identificare i movimenti di oggetti dipendenti</p> <p>Focus: invariante</p> <p>Le <b>Ipotesi</b> sono fissate Si cerca la <b>Tesi</b></p>
Trascinamento di mantenimento (+ Traccia attiva)	<p>Azione: Trascinamento di un punto/oggetto di base + Traccia su questi oggetti</p> <p>Obiettivo1: Mantenere i movimenti di oggetti dipendenti</p> <p>Focus1: invariante</p> <p>Obiettivo2: Interpretare il movimento degli oggetti trascinati/intepretare la Traccia ottenuta</p> <p>Focus2: movimento oggetti indipendenti</p> <p>La <b>Tesi</b> è fissata Si cercano le <b>Ipotesi</b></p>

Le **potenzialità semiotiche** delle

modalità di trascinamento:

**trascinamento libero**

AGD	Matematica
<b>Invarianti di costruzione</b>	Significato di <b>Premessa</b> di un enunciato condizionale
<b>Invarianti derivati</b>	Significato di <b>Conclusione</b> di un enunciato condizionale
<b>Simultaneità degli invarianti</b>	Significato di <b>Conseguenza logica</b> tra premessa e conclusione di un enunciato condizionale

Le **potenzialità semiotiche** delle

modalità di trascinamento:

**trascinamento di mantenimento + traccia**

AGD	Matematica
Invarianti imposti intenzionalmente	Significato di <b>Conclusione</b> di un enunciato condizionale
Relazioni realizzate tramite il movimento mirato a... (e visualizzate tramite la traccia)	Significato di <b>Premessa</b> di un enunciato condizionale
Simultaneità degli invarianti Esperienza senso-motoria	Significato di <b>Conseguenza logica</b> tra premessa e conclusione di un enunciato condizionale

# Conclusioni

Complessità dell'uso di AGD: il comando trascinamento

Difficoltà/Necessità di controllo... ma anche **potenzialità**

- rispetto alla risoluzione di specifici problemi di geometria
- rispetto ai significati teorici di: **congettura, premesse, conclusioni, conseguenza logica**

Necessità di una **organizzazione didattica specifica:**

- Lavorare sulla **consapevolezza**
- **Introdurre intenzionalmente** diverse **modalità** di esplorazione
- Sfruttare il **potenziale didattico** del trascinamento rispetto al **significato teorico di una congettura.**

Grazie

# Bibliografia (in italiano)

Baccaglini-Frank, A. (2012). Potenzialità Didattiche di Alcune Attività in Geometria Dinamica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 35B(1), pp. 27-50

Mariotti, M. A. (2010). Riflessioni sulla dinamicità delle figure. In Accascina, G. & Rogora E. (Eds.) *Seminari di Geometria Dinamica*, (pp. 271-296). Roma: Edizioni Nuova Cultura.

Mariotti, M.A. (1998) Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate*, 21B(3), pp. 209-252.

Mariotti, M. A. (1996). Costruzioni in geometria. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 19B(3), pp. 261-288.

# Bibliografia (in inglese)

Baccaglioni-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal for Computers and Mathematical Learning*, v.15, pp. 225-253.

Leung, A., Baccaglioni-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, v. 84, pp.439-460.

Mariotti, M. A. (2010). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM* v. 45, pp. 441-452.

Mariotti, M. A. (*in press*). Transforming Images in a DGS: The Semiotic Potential of the Dragging Tool for Introducing the Notion of Conditional Statement (chapter 8). In: *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education*. Springer.