Il problema della fattorizzazione di polinomi nell'ambito dei Numeri Reali.[1]

Alejandro Cuneo
Università degli Studi di Bergamo

Le Funzioni Polinomiali

Tema sempre presente nei programmi (indicazioni) scolastici. Perché?

Il fatto che un certo argomento possa comparire o meno nei programmi nazionali non è rilevante a meno che i docenti possano indipendentemente giustificare quanto sia opportuno che un certo argomento venga insegnato a scuola. Le giustificazioni possono essere varie, e ognuna dipende da una certa visione della matematica. Possiamo adesso analizzare un paio tra le possibili risposte:

Perché si possono fare tanti esercizi belli? (scegliendo bene i coefficienti)

Infatti, ci sono le operazioni con polinomi (somma, differenza, prodotto, divisione con resto) e la combinazione di queste, e poi diversi metodi di fattorizzazione. Certo bisogna scegliere bene i coefficienti dei polinomi giacché non può esistere un algoritmo di fattorizzazione universale, oppure per evitare che l'applicazione degli algoritmi risulti di una lunghezza impraticabile. Tanti docenti fanno una scelta di questo tipo, convinti de che l'aspetto algoritmico della matematica sia di per se quello più importante, al di là del collegamento tra matematica e realtà nella quotidianità. Questo collegamento con le situazioni reali si considera solo in modo indiretto, attraverso la pretesa (immotivata) che l'esercizio con gli algoritmi "aiuta a ragionare" anche in altre situazioni.

Oppure perché hanno un'importanza nella vita quotidiana, nel senso che sono uno strumento per gestire tante situazioni, basandosi solo sulle due operazioni fondamentali.

Nel libro di Villani-Bernardi-Zoccante-Porcaro "Non solo calcoli" presentato a questo convegno, si risponde alla domanda dell'importanza dei polinomi con una presentazione che condivido in pieno e riporto qui:

"… Si tratta delle funzioni più semplici: vi sono coinvolte solo le due operazioni fondamentali dell'addizione e della moltiplicazione. Le funzioni polinomiali dal punto di vista analitico sono di facile studio: il calcolo dei limiti non presenta problemi, ne quello delle derivate e degli integrali.

Si consideri poi che l'insieme dei polinomi e chiuso rispetto alla derivazione e all'integrazione indefinita, proprietà che hanno reso possibile l'approssimazione di altri tipi di funzioni tramite funzioni polinomiali…"

Così, le funzioni polinomiali costituiscono uno strumento molto potente e gestibile per modellizzare una grande quantità di fenomeni.

---

[1] Per questa pubblicazione, le diapositive presentate al laboratorio sono integrate con commenti dell'autore in *corsivo*.

Fattorizzazione di polinomi

Volendo gestire tante situazioni mediante i polinomi, e per studiare queste agevolmente, è chiaro il vantaggio di trovarne un'espressione fattorizzata, capace di dare ulteriori informazioni sulla situazione che si vuole studiare.

Ma è sempre possibile trovare una fattorizzazione?

I polinomi di grado 1 sono irriducibili, e quando andiamo a analizzare quelli di grado 2 troviamo subito esempi irriducibili (x^2+1)

Sembra ragionevole aspettarsi che anche tra i polinomi di grado superiore ce ne saranno alcuni irriducibili.

Teorema Fondamentale dell'Algebra (Formulato nell'ambito dei Numeri Reali)

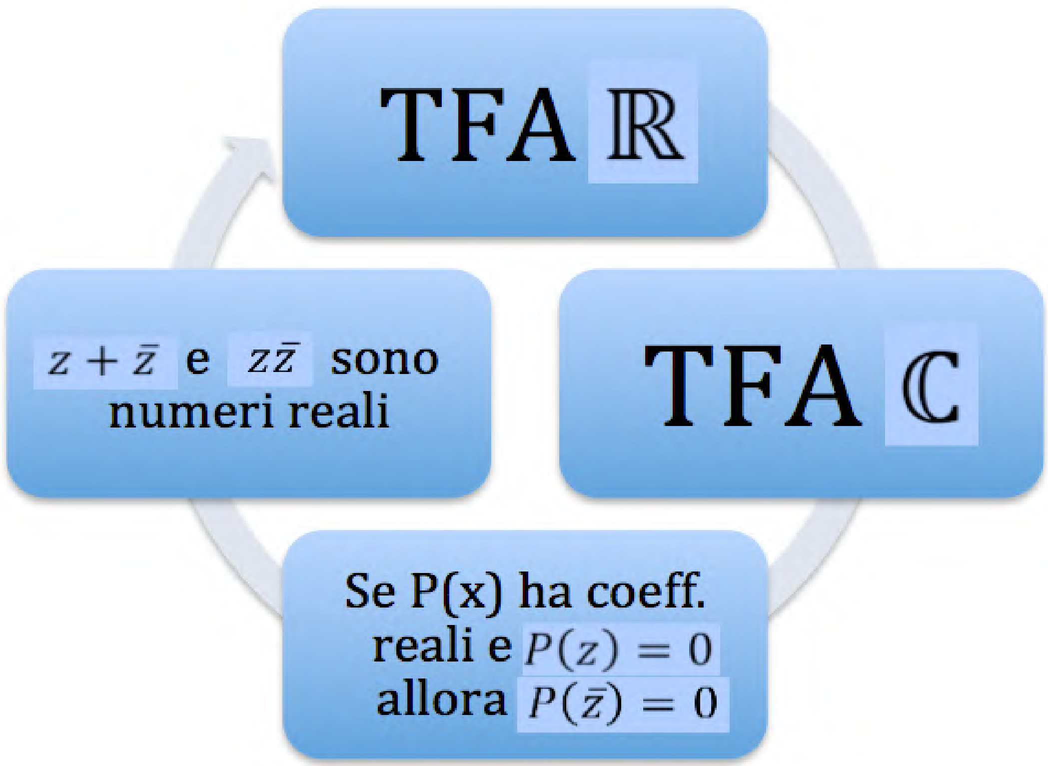
Invece, contro le aspettative, esiste un teorema che ci assicura che **ogni polinomio reale si può esprimere come un prodotto di polinomi di grado uno o due**. Cioè, non ci sono polinomi irriducibili di grado maggiore di due.

Allora vorrei capire come mai questo risultato è vero! Da cosa dipende? Quali sono le idee fondamentali alle quali devo fare riferimento per convincermi di questo fatto?

La dimostrazione

La dimostrazione fa riferimento al Teorema Fondamentale dell'Algebra tra i complessi.

Cioè, ogni polinomio a varabile e coefficienti complessi si può esprimere come prodotto di polinomi lineari. I polinomi a coefficienti reali sono adesso un caso particolare del risultato generale. Per questi vale il risultato che se un numero complesso è radice allora lo è anche il suo coniugato. Il prodotto $(x-z)(x-\bar{z})$ *con* z *e* $\bar{z}$ *coniugati è uguale a* $x^2-(z+\bar{z})x+z\bar{z}$ *e i suoi coefficienti sono numeri reali. Allora se nel caso particolare dei polinomi a coefficienti reali si fa il prodotto dei fattori provenienti da radici complesse coniugate e si restringe la variabile solo a valori reali si arriva al risultato che si voleva dimostrare, e che abbiamo chiamato Teorema Fondamentale del Algebra nell'ambito dei Numeri Reali, cioè che ogni polinomio a variabile e coefficienti reali si può esprimere come prodotto di polinomi di primo o secondo grado.*



Un problema aperto

Per provare un fatto tutto all'interno dei numeri reali siamo passati a un campo più ampio, dimostrando un risultato più generale, per tornare poi indietro all'ambito di partenza.
Facendo così, è molto difficile individuare nella prova gli elementi che rispondono alla domanda del perché il risultato è vero, e separare questi dagli altri che riguardano solo il risultato più generale.
E' ragionevole domandarsi se l'uso dei numeri complessi è realmente necessario per provare un teorema che rimane, nella sua formulazione, sempre all'interno dei numeri reali.

Dunque, per rispondere a questa domanda (che proviene dalla didattica), è opportuno avere a disposizione una prova che rimanga all'interno del campo dei numeri reali. Di seguito presento la dimostrazione che ho elaborato, cercando di seguire la via che mi è sembrata più illuminante sulle questioni sollevate sopra. Questo è anche un esempio di come i fondamenti della matematica non si sono sviluppati ancora abbastanza per essere fonte di risposte a basilari domande didattiche, e sono in questo senso un fertile campo di significativa ricerca.

Riassunto della prova

Visto che il tempo non è sufficiente per presentare tutti i dettagli, in questa presentazione mi soffermerò solo sulle idee principali della dimostrazione. Gli interessati ai dettagli tecnici sono invitati a visionarli in una successiva mia pubblicazione. Questo è lo schema di quanto segue:

- Il problema: Trovare un punto dove il resto della divisione di un polinomio per uno di grado due è nullo
- Idee per trasformare il problema:
  - Aspetti ricorsivi,
  - struttura di parabole intrecciate,
  - termini di grado massimo
- Nuovo problema: Trovare la curvatura di queste parabole
- Risoluzione: Terra e mare

Impostando il problema in modo “quasi costruttivo”

La via più naturale di affrontare il problema è partire dalla divisione di un polinomio per un altro di grado due e cercare di studiare quando il resto si annulla.

$$(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0) = (x^2 + zx + w)\times\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i x^{n-i-1}\right) + R_1x + R_0$$

- Obiettivo: Trovare una coppia di valori (z,w), coefficienti del polinomio di secondo grado per la quale il resto e nullo.
- Ci possiamo limitare ai polinomi monici di grado pari

Per cominciare si possono calcolare i coefficienti k_i del quoziente.

Aspetti ricorsivi

$$k_1^{(n)} = 1, \qquad k_2^{(n)} = a_{n-1} - z \qquad , k_{i+2}^{(n)} = a_{n-(i+1)} - wk_i^{(n)} - zk_{i+1}^{(n)} \text{ for i>0}$$

$$k_1^{(n)} = a_n$$

$$k_2^{(n)} = a_n(\underline{-z}) + a_{n-1}$$

$$k_3^{(n)} = a_n(\underline{z^2 - w}) + a_{n-1}(-z) + a_{n-2}$$

$$k_4^{(n)} = a_n(\underline{-z^3 + 2zw}) + a_{n-1}(z^2 - w) + a_{n-2}(-z) + a_{n-3}$$

$$k_5^{(n)} = a_n(\underline{z^4 - 3z^2w + w^2}) + a_{n-1}(-z^3 + 2zw) + a_{n-2}(z^2 - w) + a_{n-3}(-z) + a_{n-4}$$

$$k_6^{(n)} = a_n(\underline{-z^5 + 4z^3w - 3zw^2}) + a_{n-1}(z^4 - 3z^2w + w^2) + a_{n-2}(-z^3 + 2zw) + a_{n-3}(z^2 - w) + a_{n-4}(-z) + a_{n-5}$$

$$k_7^{(n)} = a_n(\underline{z^6 - 5z^4w + 6z^2w^2 - w^3}) + a_{n-1}(-z^5 + 4z^3w - 3zw^2) + a_{n-2}(z^4 - 3z^2w + w^2) + a_{n-3}(-z^3 + 2zw) + a_{n-4}(z^2 - w) + a_{n-5}(-z) + a_{n-6}$$

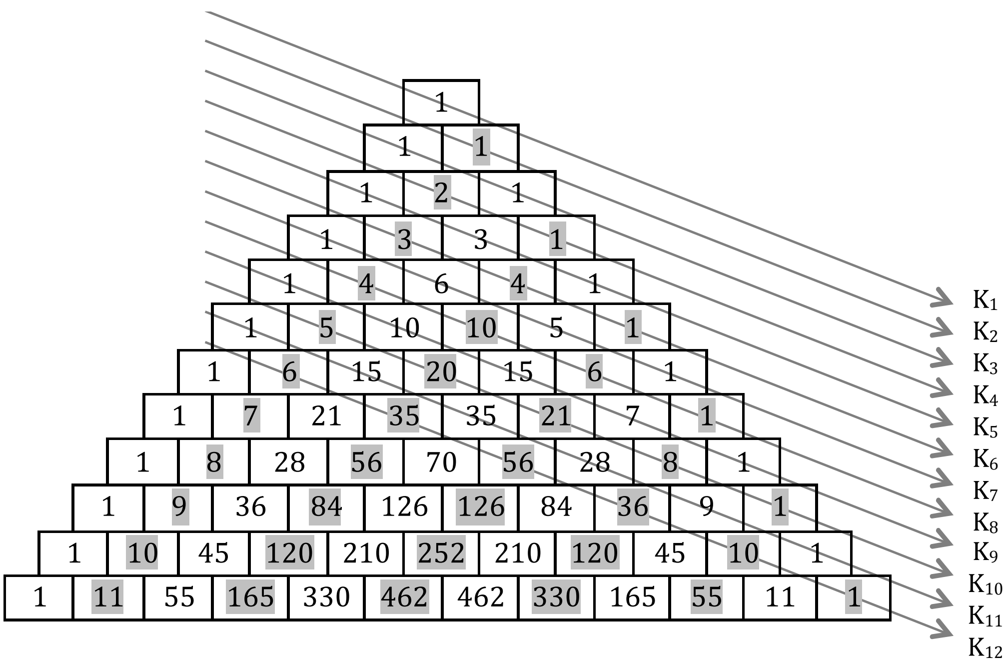
$$k_8^{(n)} = a_n(\underline{-z^7 + 6z^5w - 10z^3w^2 + 4zw^3}) + a_{n-1}(z^6 - 5z^4w + 6z^2w^2 - w^3) + a_{n-2}(-z^5 + 4z^3w - 3zw^2) + a_{n-3}(z^4 - 3z^2w + w^2) + a_{n-4}(-z^3 + 2zw) + a_{n-5}(z^2 - w) + a_{n-6}(-z) + a_{n-7}$$

$$k_9^{(n)} = a_n(\underline{z^8 - 7z^6w + 15z^4w^2 - 10z^4w^3 + w^4}) + a_{n-1}(-z^7 + 6z^5w - 10z^3w^2 + 4zw^3) + a_{n-2}(z^6 - 5z^4w + 6z^2w^2 - w^3) + a_{n-3}(-z^5 + 4z^3w - 3zw^2) + a_{n-4}(z^4 - 3z^2w + w^2) + a_{n-5}(-z^3 + 2zw) + a_{n-6}(z^2 - w) + a_{n-7}(-z) + a_{n-8}$$

Per calcolare questi coefficienti si parte dall’algoritmo ricorsivo della divisione, qui ho ordinato i termini raggruppando quelli che moltiplicano lo stesso coefficiente del dividendo. Si nota subito che i termini della prima parentesi in ogni espressione sono nuovi, mentre nelle parenesi che seguono, si ripetono termini già comparsi prima.

I coefficienti

$$1$$
$$-z$$
$$z^2 - w$$
$$-z^3 + 2zw$$
$$z^4 - 3z^2w + w^2$$
$$-z^5 + 4z^3w - 3zw^2$$
$$z^6 - 5z^4w + 6z^2w^2 - w^3$$
$$-z^7 + 6z^5w - 10z^3w^2 + 4zw^3$$
$$z^8 - 7z^6w + 15z^4w^2 - 10z^2w^3 + w^4$$



Ci concentriamo adesso solo sui termini delle prime parentesi in ciascun'espressione. Su di questi si possono fare tante osservazioni: Sono a segno alterno, le potenze di z diminuiscono di due in due, le potenze di w crescono di uno in uno, il numero di termini delle espressioni cresce ogni due passaggi (per cui sembra buona idea dividere i casi pari dai dispari), i numeri che compaiono nelle espressioni compaiono tutti nel triangolo de Tartaglia su diagonali secondarie.

Una formula non ricorsiva

$$k_i^{(n)}(z,w) = \left(\sum_{p=1}^{[i+1/2]} a_{n-i+2p-1} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \binom{2p-j-1}{j-1} z^{2(p-j)} w^{j-1}\right) - \left(\sum_{p=1}^{[i/2]} a_{n-i+2p}\, z \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \binom{2p-j}{j-1} z^{2(p-j)} w^{j-1}\right)$$

Questa formula per k_i coglie tutte le osservazioni fatte nella slide precedente: divide i casi pari e dispari, presenta segno alterno, include i coefficienti dal triangolo di tartaglia, le potenze di z che scendono di due in due e quelle di w che crescono di uno in uno. La correttezza di questa formula si dimostra per induzione. Con questa formula in mano è facile ottenere anche le formule del resto, giacché:

$$R_1^{(n)}(z,w) = a_1 - wk_{n-2}^{(n)} - zk_{n-1}^{(n)} = k_n^{(n)}(z,w)$$

$$R_1^{(n)}(z,w) = \left(\sum_{p=1}^{n/2} a_{2p-1} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i-1}{i-1} z^{2(p-i)} w^{i-1}\right) - \left(\sum_{p=1}^{n/2} a_{2p} z \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} z^{2(p-i)} w^{i-1}\right)$$

$$R_0^{(n)}(z,w) = a_0 - wk_{n-1}^{(n)}$$

$$R_0^{(n)}(z,w) = a_0 - w\left(\left(\sum_{p=1}^{n/2} a_{2p} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i-1}{i-1} z^{2(p-i)} w^{i-1}\right) - \left(\sum_{p=1}^{n/2-1} a_{2p+1}\, z \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} z^{2(p-i)} w^{i-1}\right)\right)$$

Queste rappresentano delle superfici che tagliate con il piano degli assi z e w, originano delle curve di zeri. Per dimostrare il teorema si deve far federe che le curve di zeri di R_1 intersecano le curve di zeri di R_0. Perché il risultato dovrà valere per ogni polinomio, l'esistenza di queste soluzioni dovrà essere indipendentemente dei coefficienti a_i. Per questo motivo sembra ragionevole studiare prima le sotto-espressioni che si ripetono in tutte due le formule e che non dipendono di questi coefficienti.

Sotto-espressioni

$$S_1^{(p)}(z,w) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} z^{2(p-i)} w^{i-1}$$

$$S_0^{(p)}(z,w) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i-1}{i-1} z^{2(p-i)} w^{i-1}$$

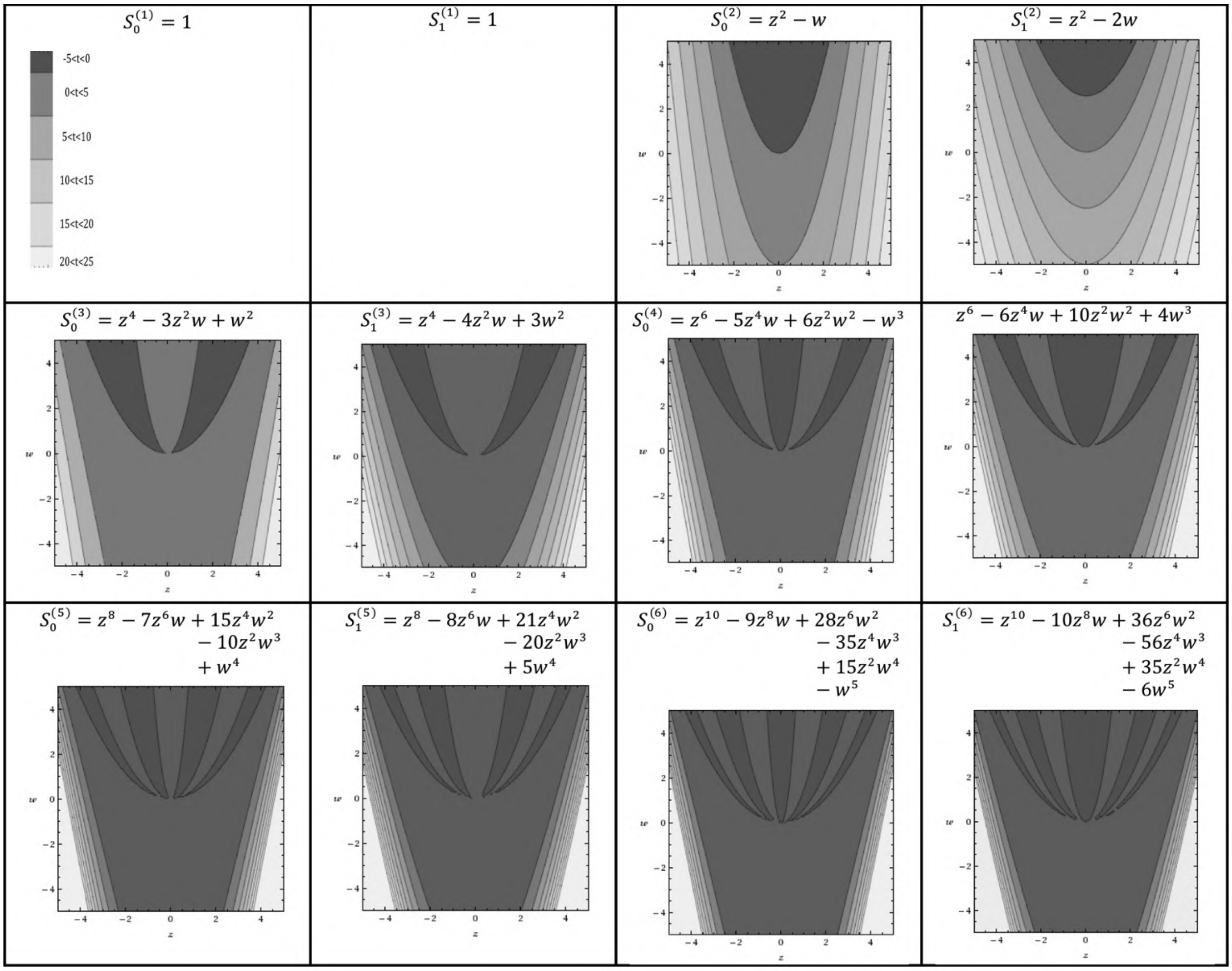
Si vede più chiaramente la struttura di queste espressioni dopo il cambio di variabile $w=Az^2$ *per z diverso da zero, dove A è la curvatura di una parabola con vertice all'origine.*

$$S_1^{(p)}(z,Az^2) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} z^{2(p-i)} (Az^2)^{i-1} = z^{2p-2} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} A^{i-1}$$

$$S_0^{(p)}(z,Az^2) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i-1}{i-1} z^{2(p-i)} (Az^2)^{i-1} = z^{2p-2} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i-1}{i-1} A^{i-1}$$

In questa nuova forma risulta chiaro che per certi valori di A (curvature delle parabole) le espressioni potrebbero annullarsi, diventando queste parabole curve di zeri della superficie. Osservate i contour plot di S_1 *e* S_0 *per alcuni valori di p.*

Struttura di parabole annidate



Da questi grafici si nota che il numero di parabole di zeri sembra essere sempre p-1

La curvatura delle parabole

Dire che le parabole di zeri di S_1 sono esattamente p-1 è equivalente a dire che queste superfici si possono scrivere come prodotto di p-1 fattori del tipo Az^2-w, con p-1 precisi valori di A. Per dimostrare ciò si può fare la divisione di S_1 per un fattore di questo tipo e analizzare per quali valori di A il resto è zero, chiameremo U_p questo resto.

$$S_1^{(p)}(z,w) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} z^{2(p-i)} w^{i-1}$$

$$= (A^{-1}z^2 - w) \times \left(\sum_{l=1}^{p-1} z^{2(p-l)-2} w^{l-1} \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} A^{l-i+1} \right)$$

$$\boxed{+\, w^{p-1} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} A^{p-i}}$$

$$U_p(A) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} A^{p-i}$$

Le proprietà di Up

$$U_p(A) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{2p-i}{i-1} A^{p-i}$$

$$U_{p+1}(A) = (A-2)U_p(A) - U_{p-1}(A),\ U_1(A) = 1, \qquad U_2(A) = (A-2), \qquad p \geq 2$$

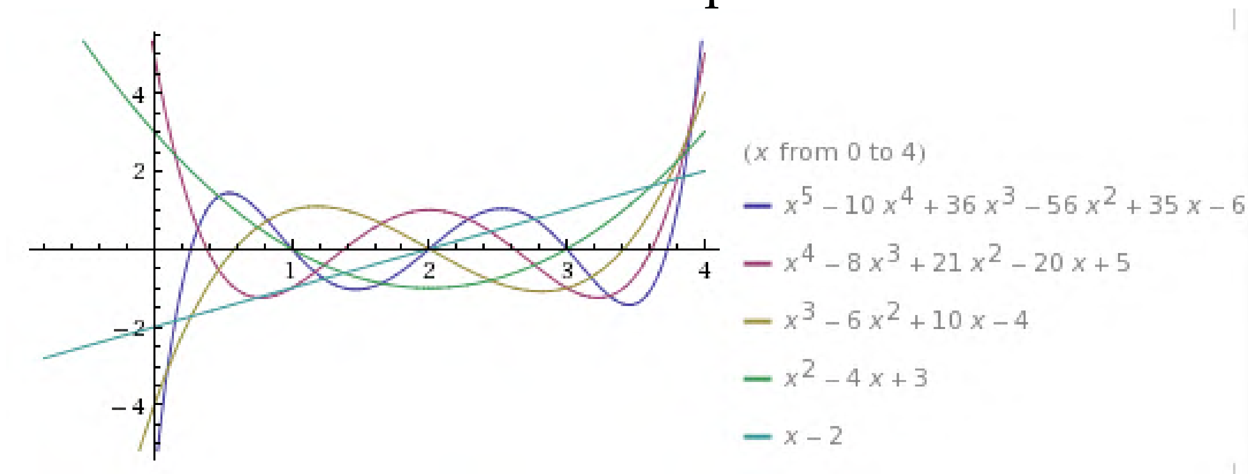
$$\binom{2p-i}{i-1} + 2\binom{2p-i+1}{i-2} - \binom{2p-i}{i-3} = \binom{2p-i+2}{i-1}.$$

Se p è dispari allora $U_p(2+A) = U_p(2-A)$,
se p è pari allora $U_p(2+A) = -U_p(2-A)$

$U_p(A) \neq 0$ quando A≤0, allora anche $U_p(A) \neq 0$ quando A≥4
Di conseguenza, tutti gli zeri di $U_p(A)$ sono nell'intervallo 0<A<4

La prima proprietà mostra come Up ha una struttura ricorsiva, cioè si può ottenere dai due precedenti, la seconda dice che questi polinomi sono simmetrici rispetto al valore 2, con simmetria pari quando p è dispari e simmetria dispari quando p è pari. La terza (che si deduce dalla seconda) dice che tutti gli zeri del polinomio sono nell'intervallo aperto tra zero e quattro.

Grafici Up



Fra 0 e 4 queste funzioni hanno un comportamento che ricorda la funzione seno

Funzione seno

Il seno del multiplo di un angolo ha una formula ricorsiva che dipende dai due multipli precedenti, in modo simile a quello che accadeva per Up. Grazie a questo si può trovare una formulazione trigonometrica per Up fra zero e quattro.

$$\sin((n+1)\theta) = 2\cos\theta \sin n\theta - \sin((n-1)\theta)$$

$$U_{p+1}(A) = (A-2)U_p(A) - U_{p-1}(A),$$

$$U_1(A) = 1, \qquad U_2(A) = (A-2),$$

$$2\cos\theta = A - 2 \quad \Longrightarrow \quad U_p(2\cos\theta + 2) = \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$$

$$0 < A < 4 \qquad\qquad 0 < \theta < \pi$$

Le parabole di S_1

Con questa formulazione gli zeri sono facilmente calcolabili, trovando le curvature delle p-1 parabole cercate.

Gli zeri di $U_p(A) = \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$, fra $0 < A < 4$ sono $\theta_k = \frac{k\pi}{p}$ $k = 1,2,\dots,p-1$

Questi sono tanti quanti il grado del polinomio; allora gli zeri di $U_p(A)$ sono $A_k^{(p)} = 2\cos\frac{k\pi}{p} + 2$ con $k = 1,2,\dots,p-1$

$$S_1^{(p)}(z,w) = p\prod_{i=1}^{p-1}\left({A_i^{(p)}}^{-1}z^2 - w\right)$$

Analogamente per S_0

$$\begin{aligned} S_0^{(p)}(z,w) &= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\binom{2p-i-1}{i-1}z^{2(p-i)}w^{i-1} \\ &= (A^{-1}z^2 - w)\times\left(\sum_{l=1}^{p-1}z^{2(p-l)-2}w^{l-1}\sum_{i=1}^{l}(-1)^{i-1}\binom{2p-i-1}{i-1}A^{l-i+1}\right) \\ &\quad + w^{p-1}\boxed{\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\binom{2p-i-1}{i-1}A^{p-i}} \longrightarrow V_p(A) \end{aligned}$$

$$V_{p+1}(A) = (A-2)V_p(A) - V_{p-1}(A), \quad V_1(A) = 1, \qquad V_2(A) = (A-1), \qquad p \geq 2$$

Se $0 < A < 4$ Sia $A = 2\cos\theta + 2$, $(0 < \theta < \pi)$

Allora $V_p(2\cos\theta + 2) = -\frac{\sin p\theta + \sin(p-1)\theta}{\sin\theta} = -\frac{\sqrt{A}\sin\left(\frac{2p-1}{2}\theta\right)}{\sin\theta}$

Gli zeri di $V_p(A) = \frac{\sqrt{A}\sin\left(\frac{2p-1}{2}\theta\right)}{\sin\theta}$, con $0 < A < 4$ sono $\theta_k = \frac{2k\pi}{2p-1}$ for $k = 1,2,\dots,p-1$

Questi sono tanti quanti il grado del polinomio; allora gli zeri di $V_p(A)$ sono $B_k^{(p)} = 2\cos\frac{2k\pi}{2p-1} + 2$

$k = 1,2,\dots,p-1$

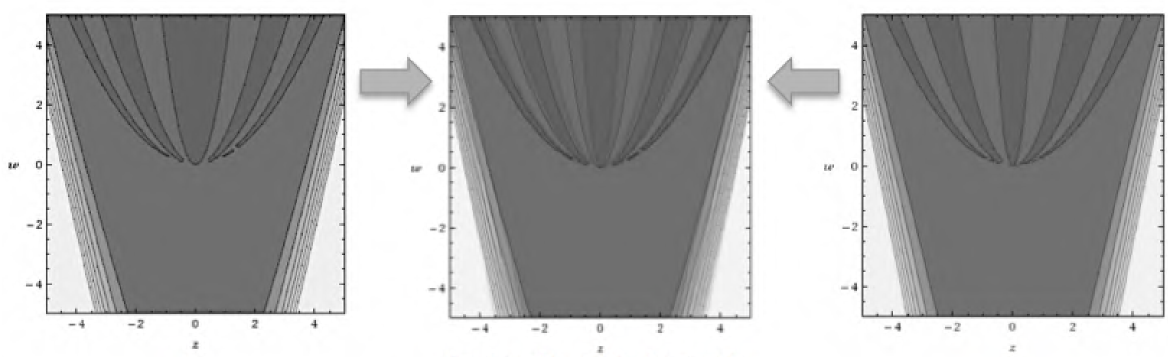
$$S_0^{(p)}(z,w) = \prod_{i=1}^{p-1}\left({B_i^{(p)}}^{-1}z^2 - w\right)$$

Parabole intrecciate

$$S_1^{(p)}(z,w) = p\prod_{i=1}^{p-1}\left({A_i^{(p)}}^{-1} z^2 - w\right) \qquad S_0^{(p)}(z,w) = \prod_{i=1}^{p-1}\left({B_i^{(p)}}^{-1} z^2 - w\right)$$

$$A_k^{(p)} = 2\cos\frac{k\pi}{p} + 2 \;\text{ con } k = 1,2,\dots,p-1 \qquad B_k^{(p)} = 2\cos\frac{2k\pi}{2p-1} + 2 \;\text{ con } k = 1,2,\dots,p-1$$

$$A_{k+1}^{(p)} < B_k^{(p)} < A_k^{(p)}$$



S_1 — Overlap of S_1 and S_0 showing the structure of interwaved parabolas — S_0

Calcolate le curvature delle parabole di S_1 e S_0 risulta che questi valori sono intercalati, e conseguentemente le parabole corrispondenti se "intrecciano" come si osserva nella figura centrale dove i grafici di S_1 e S_0 sono sovrapposti.

Termini di grado massimo

$$w = Az^2$$

$$S_1^{(p)}(z, \mathrm{A}z^2) = pz^{2p-2} \prod_{i=1}^{p-1} \left(A_i^{(p)^{-1}} - A \right) \qquad S_0^{(p)}(z, \mathrm{A}z^2) = z^{2p-2} \prod_{i=1}^{p-1} \left(B_i^{(p)^{-1}} - A \right)$$

$$R_1^{(n)}(z, \mathrm{A}z^2) = \left(\sum_{p=1}^{n/2} a_{2p-1}\, z^{2p-2} \prod_{i=1}^{p-1} \left(B_i^{(p)^{-1}} - A \right) \right) - \left(\sum_{p=1}^{n/2} a_{2p} p z^{2p-1} \prod_{i=1}^{p-1} \left(A_i^{(p)^{-1}} - A \right) \right)$$

$$R_0^{(n)}(z, \mathrm{A}z^2) = a_0 + A \left(\left(\sum_{p=1}^{n/2-1} a_{2p+1}\, p z^{2p+1} \prod_{i=1}^{p-1} \left(A_i^{(p)^{-1}} - A \right) \right) - \left(\sum_{p=1}^{n/2} a_{2p}\, z^{2p} \prod_{i=1}^{p-1} \left(B_i^{(p)^{-1}} - A \right) \right) \right)$$

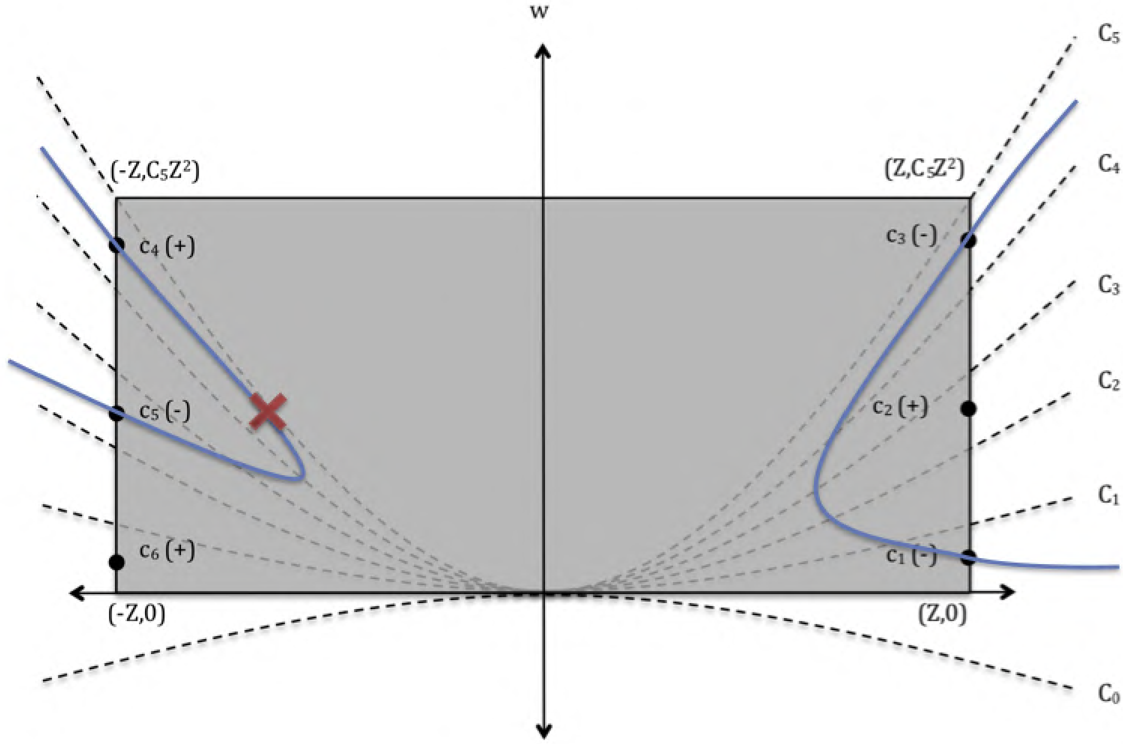
Se $|z|$ è abbastanza grande

$$R_1^{(n)}(z, \mathrm{A}z^2) \cong -\tfrac{n}{2} z^{n-1} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(A_i^{\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}} - A \right) = -zS_1^{\left(\frac{n}{2}\right)}(z, \mathrm{A}z^2).$$

$$R_0^{(n)}(z, \mathrm{A}z^2) \cong -Az^n \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(B_i^{\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}} - A \right) = -Az^2 S_0^{\left(\frac{n}{2}\right)}(z, \mathrm{A}z^2).$$

Ottenute le fattorizzazioni di S_1 e S_0 si può re-inserirle nelle formule del resto con l'opportuno cambio a coordinate paraboliche che semplifica ulteriormente le espressioni. Concentrandosi adesso sui termini di grado massimo, ci rendiamo conto che le curve di zeri di R_1 e R_0, per valori sufficientemente grandi, presenteranno lo stesso comportamento intrecciato di S_1 e S_0.

Terra e mare



Il rettangolo della figura rappresenta il limite oltre al quale si può essere sicuro che le curve di zeri di R_1 e R_0 presenteranno il comportamento intrecciato. Le parabole tratteggiate sono quelle che separano le curve di zeri di R_1 e R_0 al di fuori dal rettangolo. I punti neri sui lati dal rettangolo sono i punti di intersezione da le curve di zeri di R_0 con il rettangolo. Esiste solo uno di questi punti per sezione giacche altrimenti si supera il grado. Inoltre, a questi punti corrisponde un valore di R_1, che si alterna da positivo a negativo.

Usando la terminologia di Gauss, possiamo chiamare terra alle zone di positività di una superficie continua, mari a quelle negative e coste alle curve di zeri. Se una costa di R_0 entra nel rettangolo attraverso uno dei punti segnalati, allora per ragioni di continuità deve uscire dal rettangolo attraverso uno dei rimanenti punti, come illustra la curva a destra nel disegno. Per ragioni di finitezza, si può assicurare che esiste sempre una di queste coste che collega due punti vicini, come nella curva disegnata a sinistra.

Ma questi punti vicini, dal punto di vista di R_1 sono uno positivo e uno negativo, quindi, per il teorema del valore intermedio, in questa costa di R_0 che li collega, ci deve essere un punto dove anche R_1 è zero. Questo e il punto indicato della crocetta.

Questo punto (con le sue coordinate z_0,w_0, che sono i coefficiente del divisore quadratico della prima formula) è quello che si cercava dall'inizio, nel quale il resto diventa zero e di conseguenza il generico polinomio risulta divisibile per uno di grado due, completando la dimostrazione.

Da cosa dipende il risultato

- Ognuna delle due parti del resto della divisione di un polinomio per uno di grado due si può esprimere come una combinazione lineare di superfici, tutte con curve di zeri composte di parabole annidate.
- Le parabole corrispondenti ai termini di grado massimo di una e l'altra parte del resto sono intrecciate, e questo fatto assicura che le curve di zeri del resto devono incrociarsi.
- Le espressioni per il resto hanno una natura ricorsiva che permette de dimostrare per induzione le sue proprietà.

Bibliografia

Benjamin Fine, Gerhard Rosenberg;

The Fundamental Theorem of Algebra, Springer

C.F Gauss

First Proof, doctoral thesis Helmstadt- (in-werke,3,1-30), 1799
Second Proof, Comm. Soc. Goett. 3, 1814/15, 107-142
Third Proof, Comm. Soc. Goett. 3 (in-werke, 3) 1816, 59-64
Fourth Proof, Abhand. Der Ges. Der Wiss. Zu Goett. 4. 1848/50, 3-34

Barry Mazur

Imagining Numbers (particularly the square root of minus 15)

Theodore J. Rivlin

The Chebyshev Polynomials, John Wiley & sons

L. Fox and I.B Parker

Chebyshev Polynomials in numerical analysis. Oxford University Press.

Paul J. Nahin

An Imaginary Tale, the story of , Princeton University Press.

A. De Moivre, G Jones

De Reductione Radicalium ad Sempliciores Terminus, Seu de extrahenda radice quacunque data ex Binomio *a*+2*b* , vel *a*+2-*b*. Philosphical Transactions of The Royal Society 1737-1738 40, 463-478