

La Matematica come occasione e stimolo per la formulazione di un giudizio critico

Francesca Bonenti
Relatore: Prof. Mario Marchi

*Ogni conoscenza umana parte da intuizioni, procede attraverso i concetti e
culmina in idee*

Immanuel Kant

(epigrafe in: **Grundlagen der Geometrie**, David Hilbert)

1 Motivazioni

Questa ricerca nasce dalla convinzione che non si può parlare di *matematica* senza prima aver operato direttamente sul campo.

Il motivo per cui è stata scelta una ricerca su questo tema è perchè, da una parte si ritiene che la capacità di formulare giudizi critici sia un contributo essenziale al pensiero costruttivo, dall'altra perchè la matematica è una disciplina che in modo unico è in grado di stimolare e sviluppare la crescita di questa capacità.

Il lavoro prodotto è stato ispirato dalla ricerca quotidiana, guardando l'esperienza intellettuale che mira a una conoscenza sempre più alta, capace di aprire e delineare orizzonti di ricerca sempre nuovi.

2 La problematica

Il punto di partenza è una analisi di cosa si intenda per *conoscenza scientifica* e quindi su basa su una descrizione psicologica delle procedure mentali che riconosciamo operare nella nostra mente per la costruzione del pensiero matematico.

Intenderemo per *conoscenza scientifica* la capacità di emettere giudizi che abbiano valore interpersonale e ambito di validità univocamente determinato.

Lo sviluppo del *pensiero matematico* fa parte di questa conoscenza e si ottiene attraverso la *concettualizzazione* (ovvero quel processo che attraverso le procedure di astrazione e generalizzazione fa sì che nella nostra mente venga elaborato in modo critico e creativo l'insieme di tutte le sensazioni, intuizioni e immagini che provengono dalla realtà empirica, al fine di produrre idee

e concetti astratti e generali).

La domanda che subito sorge è se questo processo di costruzione del pensiero matematico porti a delle *verità*.

Innanzitutto, si intende per ricerca della verità la ricerca dell'uomo al fine di sapere o poter effettuare affermazioni con certezza, cioè senza paura di essere smentito. La verità di cui ci interessiamo può essere vista da due punti di vista differenti: dall'interno della matematica (quindi quando quest'ultima viene vista come teoria formale i cui gli oggetti sono definiti implicitamente da una lista di assiomi) o dall'esterno (cioè considerando la matematica come un prodotto dell'uomo realizzato con l'obiettivo di capire, rappresentare e indagare certi oggetti informali che in qualche misura sono già presenti nella nostra intuizione).

In quest'ultimo caso, se si analizza la verità di una proposizione assertiva della matematica sulle scienze, si stabilisce una corrispondenza tra quanto essa afferma e quanto è confermato dalla realtà empirica, cioè si introduce il problema del confronto con la realtà.

Se invece consideriamo la matematica dall'interno, il problema della verità è il problema di tutta la ricerca fondazionale che è ancora aperto, perchè non esiste una scuola che possa dire definitivamente cosa sia la verità. In questa prospettiva, l'assenza di contraddizioni tra le conseguenze degli assiomi è l'unica garanzia della sensatezza del discorso e quindi di verità.

È noto che il progetto di Hilbert era quello di poter dimostrare con i suoi strumenti formali che all'interno della matematica non potevano esserci contraddizioni. Peccato che, dopo Gödel, sappiamo che non sia possibile dimostrare la non contraddittorietà di una teoria formale dall'interno della teoria stessa. Eppure occorre prendere atto, con stupore, dell'inattesa *efficacia* della matematica nel descrivere la realtà naturale. E. Wigner, nel 1960, osserva¹ che la struttura matematica di una teoria fisica può indirizzare addirittura verso previsioni empiriche nella fisica stessa. Dopo di lui R. W. Hamming² sostiene, con degli esempi, che certe importanti scoperte nel mondo della scienza siano avvenute non con esperimenti ma con semplici riflessioni matematiche. La matematica entra quindi a fare parte delle scienze come linguaggio e per potere utilizzare una teoria matematica nella costruzione per esempio di una teoria fisica occorre poter istituire un isomorfismo tra l'universo di oggetti della teoria fisica e quello della teoria matematica. Il controllo finale richiede che i risultati matematici che si ottengono devono corrispondere a fatti veri nel nostro universo fisico. Se non lo fossero, vuol dire che la teoria matematica impiegata non si adegua alle esigenze della fisica e quindi bisogna cambiare tale teoria.

L'ultimo passo nel percorso di costruzione di un pensiero matematico che

¹E. Wigner. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics* (13), 1, 1960.

²R. W. Hamming. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. *The American Mathematical Monthly* (87), 2, 1980.

porta alla verità, è la ricerca della garanzia di consistenza. A questo proposito, l'utilizzo di *modelli matematici* è un passaggio strategico nel processo di comprensione della verità. Si possono considerare due tipi di modelli: da una parte vi sono i modelli che realizzano una sostituzione della realtà con una costruzione matematica astratta e formale e che servono per convalidare l'efficacia dello strumento matematico stesso, dall'altra i modelli che assicurano la non contraddittorietà di una teoria matematica e quindi garantiscono l'esistenza e la verità di quest'ultima.

Queste riflessioni sono il risultato dell'esperienza di ricerca che ha portato ad approfondire la presente tematica studiando, in particolare, le due modellizzazioni di seguito illustrate.

3 Modello di piano ellittico³

È la nota classificazione delle geometrie non-euclidee dovuta a Klein: geometria iperbolica o geometria ellittica. Per distinguere questi diversi tipi di geometria si può utilizzare una classica definizione dovuta a Saccheri. Egli aveva introdotto una particolare configurazione costituita da un quadrilatero (a, b, c, d) tale che $\overline{d}, \overline{a} \perp \overline{a}, \overline{b} \perp \overline{b}, \overline{c}$, $(a, d) \equiv (b, c)$ e $(\overline{a}, \overline{b}|c, d) = +1$. Per tale configurazione, già nella sua opera, aveva dimostrato che $\delta := (\widehat{a, d, c}) = 1R$, oppure $\delta < 1R$, o anche $\delta > 1R$ e inoltre che se tale risultato vale in un quadrilatero, allora vale per tutti. Si può quindi parlare di caso dell'angolo retto, acuto o ottuso.

Saccheri aveva poi dimostrato che il caso $\delta = 1R$ equivale al postulato delle parallele, aveva creduto di dimostrare che $\delta < 1R$ fosse impossibile mentre $\delta > 1R$ porta a una contraddizione.

Studi successivi hanno messo in evidenza che il caso $\delta < 1R$ è invece ammissibile e caratterizza la ormai classica geometria non euclidea iperbolica. Il caso $\delta > 1R$ (caso ellittico) porta invece effettivamente a una contraddizione che si può eliminare solo assumendo la non validità dell'assioma di Archimede.

Nell'ambito della presente ricerca si è provata la esistenza di un modello (non archimedeo) di geometria ellittica che è immerso in un piano proiettivo definito su un campo non archimedeo.

³F. Bonenti, H. Karzel, M. Marchi. Absolute planes with elliptic congruence. *Mitt. Math. Ges. Hamburg* (31), 2012, 121.

4 Modello di ottimizzazione del mercato elettrico⁴

Il cambiamento climatico è un problema globale, l'Europa ha assunto un ruolo leader nella politica delle emissioni con l'introduzione dell'European Emission Trading Scheme (EU-ETS), regolata dalla Direttiva 2003/87/CE sostituita con la nuova Direttiva 2009/29 che entrerà in vigore all'inizio del 2013 e che regolerà la terza fase dell'EU-ETS con particolare attenzione alla tutela dei settori industriali esposti alla concorrenza internazionale. La nuova Direttiva prevede l'aumento dei settori coperti dall'EU-ETS, impone un sistema di vendita ad aste per l'assegnazione dei permessi di emissione e incoraggia l'uso di energie rinnovabili. Va osservato che durante le prime due fasi della sua applicazione, l'EU-ETS ha contribuito alla crescita dei prezzi dell'elettricità.

Scopo del presente lavoro è analizzare l'impatto dell'applicazione dell'EU-ETS sul settore elettrico italiano attraverso un *power generation expansion model*. L'importanza dello studio di tale settore nasce dal ruolo che il settore stesso ricopre nella maggior parte dei processi produttivi.

Tenendo conto dell'interazione tra i diversi operatori di mercato, si è adottata una rappresentazione su base tecnologica del mercato energetico per valutare l'incidenza dei costi legati alle emissioni di CO₂, sulla determinazione dei prezzi del bene finale e sulle scelte di investimento, quali il passaggio da tecnologie inquinanti a tecnologie pulite. Il modello di equilibrio che si è sviluppato consente di analizzare contemporaneamente l'azione di diversi operatori di mercato e di determinare in modo endogeno il prezzo dell'energia e dei permessi di emissione. Il prezzo dell'elettricità, determinato in modo endogeno, risulta influenzato dalla struttura dei costi e dai margini di efficienza degli impianti di generazione utilizzati.

Il modello sviluppato è stato implementato come problema di complementarità e risolto in GAMS usando il solver PATH.

⁴F. Bonenti, G. Oggioni, E. Allevi, G. Marangoni. Evaluating the EU ETS impacts on profits, investments and prices of the Italian electricity market (under review).