XXXI Convegno UMI-CIIM

FARE MATEMATICA NELLA SCUOLA DI TUTTI

Salerno 17 – 19 ottobre

LABORATORIO DI STORIA DELLE MATEMATICHE

Problemi di quadratura prima del Calcolo

Dott. V. Gavagna (Università di Salerno)

Questo opuscolo coincide solo in parte con il materiale fornito ai docenti che hanno seguito i laboratori a Salerno. A parte alcune differenze marginali, la differenza sostanziale sta nella presenza dell'appendice, che contiene le risposte alle "domande rosse", oggetto di discussione durante i suddetti laboratori.

L'opuscolo ha il solo scopo di presentare materiale (non troppo elaborato) che possa suggerire a qualche docente delle possibili attività in classe. Invito chiunque rilevasse errori o avesse suggerimenti a contattarmi all'indirizzo **vgavagna@unisa.it**

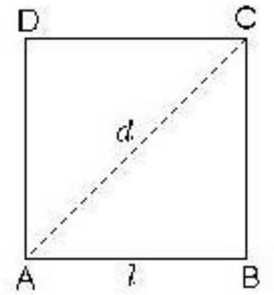
Sommario

La geometria di misura

Semplificando un (bel) po', potremmo distinguere due temi principali della geometria greca: la *geometria di posizione*, che sostanzialmente studia le curve, e la *geometria di misura*, il cui scopo è quello di determinare aree e volumi di figure piane e solide.

A dispetto di questa etichetta, nella geometria greca non si *misura* una grandezza geometrica nel senso che oggi viene attribuito a questa espressione.

Immaginiamo il caso più semplice, in cui si debba *misurare* un segmento AB. Cosa significa? Significa assumere un altro segmento u come *unità di misura* e vedere quante volte u è contenuto in AB: il numero che esprime il rapporto tra AB e u è la lunghezza di AB rispetto all'unità u. A questo punto il gioco sembra fatto: se abbiamo un altro segmento CD, basterà ripetere l'operazione per avere la lunghezza del segmento del CD e così via per ogni segmento. Ma è proprio così facile?



Questa volta consideriamo due segmenti particolari, molto facili da costruire geometricamente: il lato AB e la diagonale AC di un quadrato qualsiasi. Anche se sembra molto strano, non è possibile trovare un segmento, per quanto piccolo si scelga, che sia contemporaneamente sottomultiplo di AB e di AC: queste due grandezze, che non hanno unità di misura comune, si dicono infatti *incommensurabili*. In altri termini, se assumiamo una qualsiasi unità di misura ad esempio il lato AB – e per comodità possiamo assumere come unità proprio il lato AB — il numero che esprime la lunghezza della diagonale AC è il numero irrazionale $\sqrt{2}$.[1]

Nell'aritmetica greca, tuttavia, il "numero è pluralità di unità", come afferma la seconda definizione del Libro VII degli *Elementi* di Euclide. I numeri irrazionali, dunque, non sono contemplati nel sistema numerico greco e questo impedisce di misurare le grandezze nel senso che abbiamo indicato sopra.

Lo scoglio dell'incommensurabilità costringe a collocare il problema della determinazione dell'area e del volume delle figure nel contesto della teoria delle proporzioni. In altre parole, "la misura delle grandezze, tra le quali figurano in primo piano le aree delle figure piane e i volumi dei solidi, non verrà espressa con un numero, ma confrontando la grandezza in questione con altre grandezze simili, in

[1] Sul rapporto tra incommensurabilità e numeri irrazionali e sulla dimostrazione di irrazionalità di $\sqrt{2}$ si veda, ad esempio la scheda della mostra *Pitagora e il suo teorema* http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/exh_pitagora/schede.php?id=7#2.

modo da stabilire una rete di relazioni quantitative”.[2] Per questo motivo, infatti, nella matematica greca non troveremo espressioni del tipo “il volume di un cono retto si determina moltiplicando l’area del cerchio di base per l’altezza e dividendo per 3” quanto piuttosto “un cono retto è la terza parte del cilindro ad esso circoscritto” oppure, per restare in ambito prettamente archimedeo, si dirà che “una sfera è pari ai due terzi del cilindro equilatero ad essa circoscritto”.

Il problema generale teorico di determinare l’area di una figura piana o il volume di un solido si traduce, quando è possibile, in un procedimento per trasformare le figure di partenza (usando solo riga e compasso) in un quadrato equiesteso o rispettivamente in un cubo. Per questo motivo, nella geometria greca, si parla di *quadratura* di una figura piana (cioè “rendere quadrata”) e di *cubatura* di una solida.

La quadratura delle figure rettilinee: Euclide e i poligoni


DE GLI
ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRI QVINDICI
CON GLI SCHOLII ANTICHI.
TRADOTTI PRIMA
IN LINGVA LATINA DA M.
FEDERICO COMMANDINO DA VRBINO,
& con Commentarij illustrati,
ET HORA D'ORDINE DELL'ISTESSO
TRASPORTATI NELLA NOSTRA VULGA-
re, & da lui riueduti.
CON PRIVILEGIO.
IN VRBINO, APPRESSO
DOMENICO FRISOLINO
M. D. LXXV.

Nei primi due libri degli *Elementi* di Euclide viene completamente risolto il problema di quadrare una figura rettilinea qualsiasi, ovvero un poligono. Le proposizioni fondamentali sono la 42 e 45 del Libro I e la 14 del Libro II.

Le immagini che seguono sono tratte da una delle prime edizioni a stampa degli *Elementi* in volgare italiano: si tratta dell’edizione apparsa nel 1575, curata da uno dei più importanti matematici-filologi del Rinascimento, l’urbinate Federico Commandino (1509?-1575) [3].

Nel seguito, daremo l’enunciato in una formulazione più familiare al lettore moderno e faremo poi seguire il testo commandiniano dell’intera proposizione, che può essere proposta in classe, sia come esempio di dimostrazione euclidea, sia come esempio di volgare scientifico rinascimentale.

[2] E. Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall’antichità al Novecento*, Pisa, Istituti Editoriali e poligrafici internazionali” 2007, p.10.

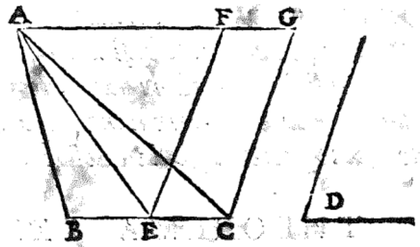
[3] In alternativa, per l’edizione inglese si può consultare l’edizione elettronica curata da D.E.Joyce ed essenzialmente basata sulla traduzione di Thomas Heath (edizioni 1908 e 1925) e disponibile in rete alla pagina http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html. In rete si trova anche l’edizione ottocentesca di O.Byrne dei primi sei libri degli *Elementi*, ovvero quelli dedicati alla geometria piana http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html. L’edizione di Byrne presenta una rilettura “visuale” delle dimostrazioni euclidee.

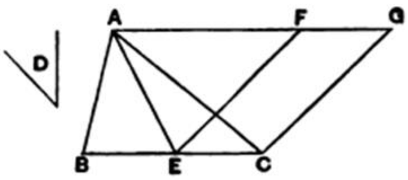
Elementi, I.42 *Costruire, in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale a un triangolo dato*

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XLII

Conſtituire nel angolo rettilineo dato vn parallelogrammo vguale al dato triangolo.

Sia il dato triangolo A B C, l'angolo rettilineo dato ſia D. biſogna nell'angolo rettilineo vguale ad eſſo D conſtituire un parallelogrammo vguale al triangolo A B C. ſeghiſi B C per mezo nel punto E: & giunta A E nella linea retta E C, &
23. di queſto. nel punto ch'è in eſſa E conſtituiſcaſi l'angolo C E F, vguale all'angolo D, & per A
31. di queſto. tiriſi la A G parallela alla E C, & per C tiriſi la C G parallela alla F E. adunque F E C G è parallelogrammo. & perche la
38. di queſto. B E è vguale alla E C, ſarà anche il triangolo A B E vguale al triangolo A E C, concioſiacoſa che ſiano nelle baſi vguali B E E C, & nelle medeſime parallele
34. di queſto. B C A G. il triangolo dunque A B C è doppio del triangolo A E C. & è etiandio il parallelogrammo F E C G doppio del triangolo, perche ha la medeſima baſe, & è nelle medeſime parallele. onde il parallelogrammo F E C G è vguale al triangolo A B C: & ha l'angolo C E F vguale all'angolo dato D. adunque ſi è conſtituito nell'angolo C E F, che è vguale al dato angolo D, il parallelogrammo F E C G vguale al dato triangolo A B C. il che biſognaua fare.





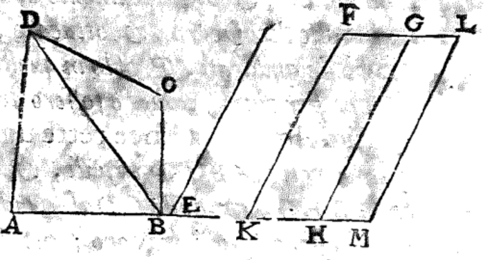
In questo problema, Euclide mostra come costruire un parallelogrammo *ECGF*, avente un angolo fissato *D,* equiesteso al triangolo dato *ABC*. Se *D* è retto, il parallelogramma equivalente al triangolo è un rettangolo. La costruzione è molto semplice: basta tracciare la parallela *AG* per *A* al lato *BC*, considerare il punto medio *E* dello stesso lato *BC* e, assumendo poi che l'angolo *FEC* sia uguale all'angolo dato *D*, si prolunghi *EF* fino ad incontrare *AG* e si tracci per *C* la parallela a *EF*. Euclide poi dimostra che il *ECGF* così costruito è congruo a *ABC*.

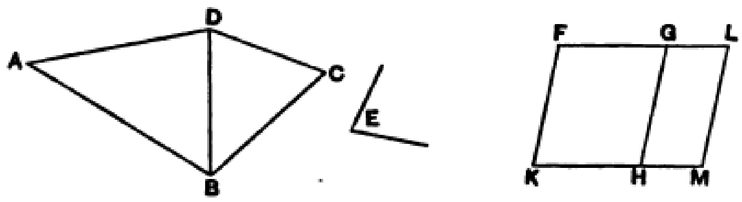
Elementi I.45 *Costruire un parallelogrammo uguale*[4] *a una figura rettilinea data in un angolo dato rettilineo*

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XLV.

Constituire in vn'angolo rettilineo dato vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo.

Sia il dato rettilineo A B C D, & l'angolo rettilineo dato E. bisogna in vn'angolo vguale ad E constituire vn parallelogrammo vguale al rettilineo A B C D. giungasi B D, & constituiscasi il parallelogrammo FH, vguale al triangolo ADB
42. di questo. nell'angolo H K F, vguale ad E, & poi alla linea retta G H adattisi il parallelo-
per l'antecedente. grammo G M, vguale al triangolo D B C, nell'angolo G H M, che è vguale ad E. & perche l'angolo E è vguale ad amendue H K F G H M, sarà anche H K F vguale à G H M. pongasi K H G commune. adunque gli angoli F K H K H G sono
29. di questo. vguali à gli angoli KHG G H M. ma F K H K H G sono vguali à due retti. adunque K H G G H M saranno vguali à due retti, & però nella linea retta G H, & nel dato punto H, che è in essa, le due linee rette K H H M non poste dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti vguali à due retti. adunque la K H è per dirit
14: di questo. to alla H M. & perche nelle parallele K M F G cade la linea retta H G, gli angoli
29. di questo. alterni M H G H G F sono vguali. pongasi H G L commune. gli angoli dunque M H G H G L sono vguali à gli angoli H G F H G L. ma gli angoli M H G H G L sono vguali à due retti. onde anchor gli angoli H G F H G L saranno uguali à due retti. adunque la F G è per diritto alla G L. & perche
34. di questo. la K F è vguale & parallela alla H G, ma anchor la H G alla M L, sarà la K F vgua
30. di questo. le & parallela alla M L. & sono cōgiunte dalle linee rette KM FL. adunque le K M
F L anchora sono vguali & parallele. onde K F L M è parallelogrammo. & essendo il triangolo A B D vguale al parallelogrammo H F, & il triangolo D B C al parallelogrammo G M, sarà tutto il rettilineo A B C D vguale à tutto'l parallelogrammo K F L M. si è dunque constituito nell'angolo F K M, che è vguale al dato angolo E, il parallelogrammo K F L M, vguale al dato rettilineo A B C D. il che bisognaua fare. 33. di questo.





[4] Oggi diremmo "equiesteso". Per rimanere aderenti alla lettera del testo euclideo, nelle citazioni puntuali degli *Elementi* conserveremo il termine "uguale".

Per trasformare un poligono in un parallelogramma, basta osservare che i poligoni si possono scomporre i triangoli e, per la proposizione precedente (I.42), ogni triangolo si può trasformare in un parallelogramma. Quello che bisogna però dimostrare è che i parallelogrammi hanno la stessa altezza (ed è quello che fa Euclide nella I.45).

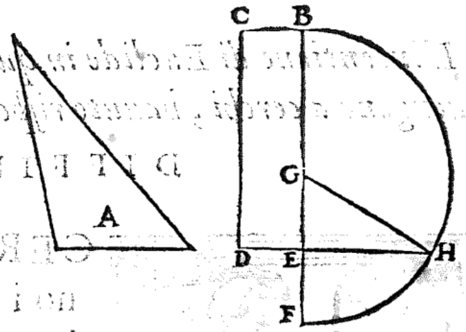
Si noti che, se l'angolo rettilineo assegnato *E* è un angolo retto, la proposizione spiega come costruire un rettangolo equiesteso a un poligono fissato.

Si arriva così alla proposizione fondamentale che chiude i primi due libri degli *Elementi* dedicati alla geometria del triangolo.

Elementi, II.14, *Costruire un quadrato uguale a una figura rettilinea data*

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIIII.

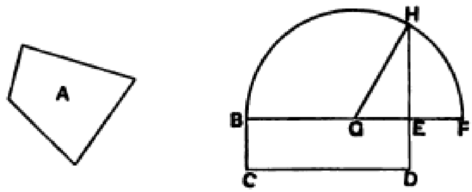
Conſtituire vn quadrato vguale ad vn dato rettilineo.



Sia il dato rettilineo A. biſogna conſtituire vn quadrato vguale al rettilineo A. conſtituiſcaſi il parallelogrammo rettangolo B C D E, vguale al rettilineo A. ſe dunque B E è vguale ad E D, ſarà fatto quello che ſi proponeua, percioche al rettilineo A ſi è conſtituito il quadrato B D uguale. ma ſe B E non è vguale ad E D, vna di eſſe ſarà maggiore. ſia maggiore B E, & prolunghiſi in F, & pongaſi E F vguale ad E D. poi diuiſa F B per mezo nel punto G, dal centro G con l'interuallo di vna di eſſe G B G F deſcriuaſi il mezo cerchio B H F. & prolunghiſi D E in H, & giungaſi G H. perche dunque la linea retta B F è diuiſa in parti vguali nel punto G, & in parti diſuguali nel E, ſarà il rettangolo B E F inſieme col quadrato di E G vguale al quadrato di G F: & G F è vguale à G H. onde il rettangolo B E F inſieme col quadrato di G E è vguale al quadrato di G H. ma al quadrato di G H ſono vguali i quadrati di H E E G. il rettangolo dunque B E F inſieme col quadrato di E G è vguale alli quadrati di H E E G. traggaſi il quadrato di E G commune. adunque il rettangolo rimanente B E F è vguale al quadrato di E H. ma il rettangolo B E F è eſſo parallelogrammo B D, percioche E F è vguale ad E D. il parallelogrammo dunque B D è vguale al quadrato di E H. ma è vguale etiandio al rettilineo A. & però il rettilineo A ſarà vguale al quadrato di E H. la onde al rettilineo A ſi è conſtituito vn quadrato vguale, cioè quello che ſi deſcriue da E H. il che biſognaua fare.

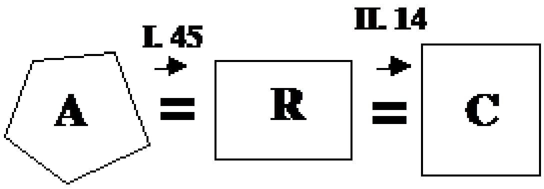
45 del primo.

5. di 2°.



L'idea di Euclide è quella di trasformare il poligono *A* di partenza in un rettangolo *R* (applicando la I.45). Non è troppo difficile trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente. Basta giustappore i due lati *BE* e *ED=EF* del rettangolo, centrare il compasso nel punto medio *G* di *BF*, tracciare una semicirconferenza di raggio *BG=GF* e condurre la perpendicolare da E al punto H della semicirconferenza: il segmento *HE* così trovato sarà il lato del quadrato richiesto, come poi dimostra Euclide nella II.14.

Il procedimento seguito da Euclide è sintetizzato dal seguente diagramma



Grazie alla proposizione I.45, dunque, la quadratura di una figura rettilinea qualsiasi si riconduce a quella di un rettangolo.

Ma cosa succederebbe se non ci fosse la proposizione I.45? Si potrebbe costruire un percorso alternativo per quadrare le figure rettilinee?

In effetti non solo è possibile, ma esistono versioni degli *Elementi* che propongono questo percorso. Nella tradizione arabo-latina del testo euclideo, infatti, manca la proposizione I.45.

Poiché la proposizione I.42 è presente, siamo sempre in grado di trasformare un triangolo in un rettangolo equivalente. Se consideriamo un poligono qualsiasi e lo scomponiamo in triangoli, potremo trasformare dunque ogni triangolo in un rettangolo e la proposizione II.14 ci consente di trasformare ogni rettangolo in quadrato equivalente. A questo punto siamo riusciti a trasformare un poligono in tanti quadrati, la cui unione forma una figura equiestesa al poligono di partenza. Non era certo questo il risultato sperato…

DOMANDA 1. Abbiamo un nuovo problema: dati *n* quadrati è possibile costruire un unico quadrato equivalente alla loro unione?

La quadratura delle figure curvilinee: il caso delle lunule

Il procedimento di triangolazione che abbiamo visto finora non funziona molto bene con le figure curvilinee: per quanto si cerchi di scomporre una figura curvilinea in regioni rettilinee, rimane sempre fuori qualcosa!

Ci sono però alcune figure curvilinee che si possono quadrare con riga e compasso, come ad esempio le *lunule*[5] o il segmento parabolico. La quadratura di alcune lunule si deve a Ippocrate di Chio (c.ca 470-410 a.C.), mentre quella della parabola si deve ad Archimede di Siracusa (287?-212 a. C.), che ne propose diverse versioni. In questo contesto ci occuperemo solo delle lunule.

Nella sua *Storia della geometria*, (c.ca 350 a.C-290 a.C.) Eudemo di Rodi descrisse i contributi di Ippocrate alla geometria delle lunule. Non ci sono stati tramandati testimoni diretti di questo lavoro, ma Simplicio (c.ca 490-560) ebbe accesso all'opera di Eudemo e riportò (a suo dire) pressoché letteralmente il passo relativo alle lunule aggiungendo qualche chiarimento basato sugli *Elementi* di Euclide.[6]

Ippocrate riuscì a conseguire dei risultati molto importanti

1. Realizzò la quadratura di tre tipi di lunule[7]
2. Riuscì a quadrare la figura formata da una certa lunula e da un cerchio.

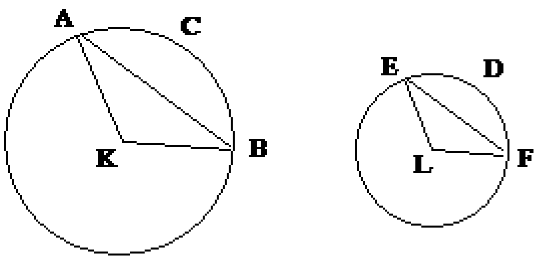
Questo secondo punto riscosse in particolare un notevole interesse, perché se la lunula fosse rientrata nel novero delle lunule quadrabili, allora si poteva dire risolto il problema della quadratura del cerchio.

La quadratura delle lunule di Ippocrate si fonda principalmente sul concetto di *segmenti circolari simili*. In figura sono rappresentati i due segmenti circolari simili ACB ed EDF, le cui basi insistono su angoli al centro AKB e ELF uguali.

[5] La lunula è una regione di piano delimitata da due archi di circonferenza che hanno gli stessi estremi e giacenti da una stessa parte rispetto alla corda che li sottende.

[6] Su Ippocrate e le lunule si può consultare la pagina http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/htm/Vitrac/grecs-2.htm che presenta un capitolo del dossier di Bernard Vitrac sulla geometria greca antica. Su questo tema, si può anche vedere P.Odifreddi, *Divertimento geometrico. Le origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert*, Torino, Bollati Boringhieri 2003, pp.54-62, oppure per una ricostruzione delle dimostrazioni più aderente ai frammenti storici, si veda T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Dover 1981, vol. 1, pp.183-200. Il testo è disponibile nel sito http://www.wilbourhall.org/

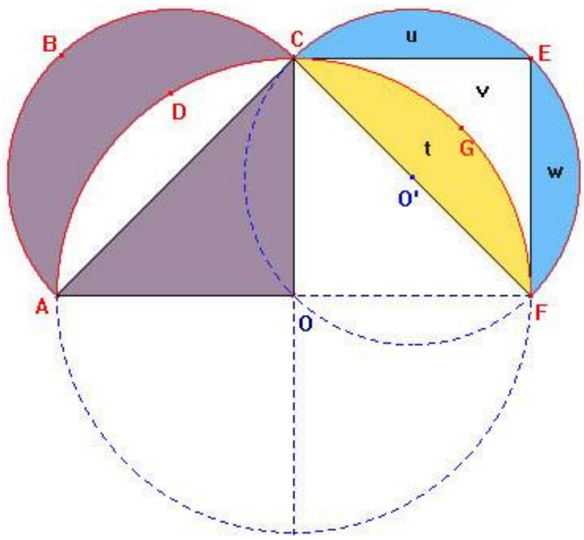
[7] Secondo T.Heath, Martin Johan Wallenius scrisse nel 1766 una dissertazione che presentava le cinque lunule quadrabili. Ma il fatto che queste siano le uniche lunule quadrabile venne dimostrato successivamente da Tchebatorew e Dorodnow nel 1934 e nel 1947.



Ippocrate mostra che *due segmenti circolari simili stanno tra loro come i quadrati costruiti sulle loro basi*. Nel nostro caso

$$\mathrm{Segm}(ACB) : \mathrm{Segm}(EDF) = AB^2 : EF^2$$

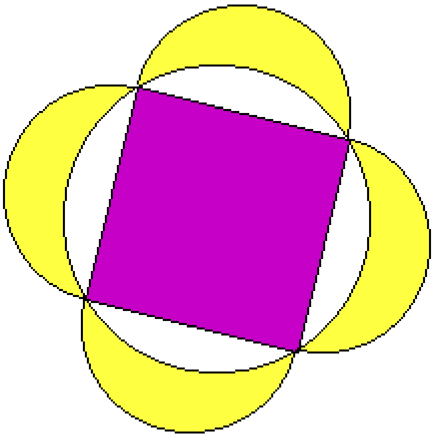
Su questo risultato si basano le successive quadrature. Cominciamo a quadrare la *lunula del triangolo rettangolo isoscele*:[8]



DOMANDA 2. Come si può provare che la lunula è quadrabile? E a quale figura rettilinea risulta equiestesa?

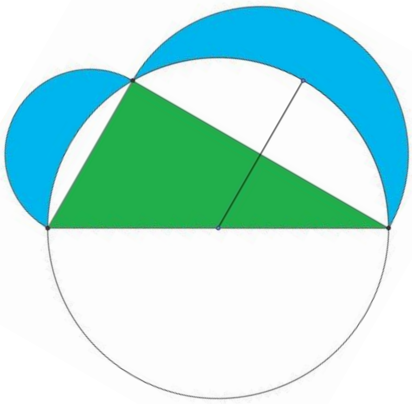
A questo punto è facile intuire quanto misurano le quattro lunule della figura successiva …

[8] Figura tratta da http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Apr_03/Cap5.html

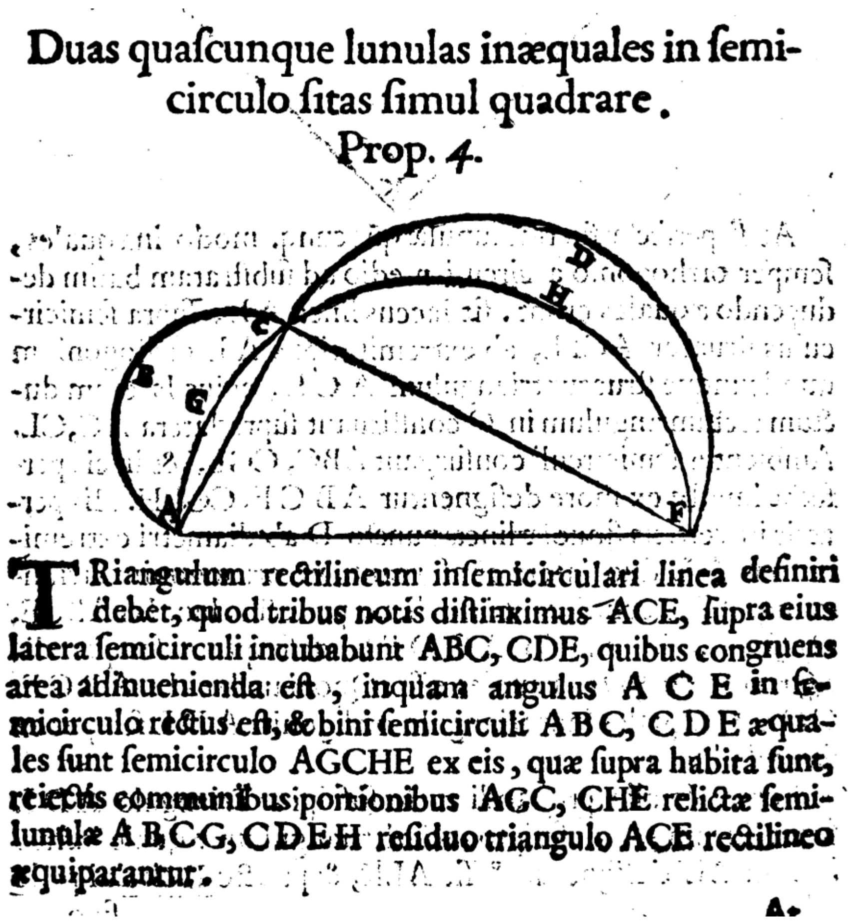


Rosone della cattedrale di Losanna

DOMANDA 3. Le lunule e il triangolo sono equiestesi?



Una possibile risposta è in questo testo di Giovan Battista della Porta … o in Appendice.



Duas quascunque lunulas inæquales in semicirculo sitas simul quadrare.

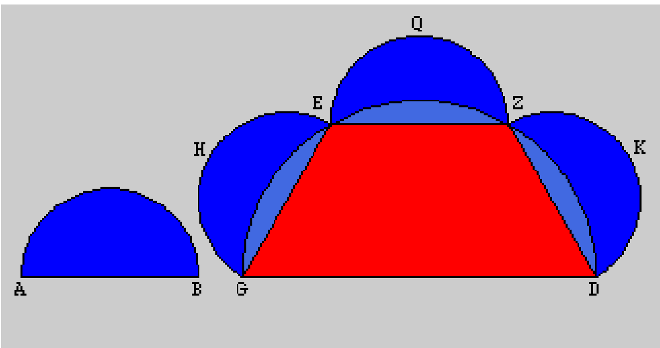
Prop. 4.

Triangulum rectilineum in semicirculari linea definiri debet, quod tribus notis distinximus ACE, supra eius latera semicirculi incubabunt ABC, CDE, quibus congruens area adinuenienda est, inquam angulus ACE in semicirculo rectus est, & bini semicirculi ABC, CDE æquales sunt semicirculo AGCHE ex eis, quæ supra habita sunt, reiectis communibus portionibus AGC, CHE relictæ semilunulæ ABCG, CDEH residuo triangulo ACE rectilineo æquiparantur.

A.

Giovan Battista della Porta, *Elementorum curvilineorum libri tres*, 1610

Immaginiamo ora di considerare un semiesagono regolare GEZD inscritto in una semicirconferenza[9]. Supponiamo di costruire anche un semicerchio di diametro AB, tale che AB=GE=EZ=ZD.



[9] Figura tratta da http://www.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/HippocratesOfChios/AlexandEudem/AlexanderEudemusCompared.htm.

DOMANDA 4. Si può provare che

Trapezio GDZE = 3 lunule + semicerchio

e quindi che

Esagono = 6 lunule + cerchio ?

Ma allora, poiché la differenza di figure quadrabili è ancora quadrabile, non potremmo concludere di aver trovato la quadratura del cerchio?

Al di là di pochi casi fortunati, tuttavia, la quadrabilità di figure curvilinee porta a problemi relativamente complessi. Per di più, nella geometria classica mancavano gli strumenti matematici idonei e si doveva spesso ricorrere a tecniche euristiche quanto meno per "indovinare" il risultato, che poi doveva essere dimostrato in maniera rigorosa.

Così, per provare che due figure *qualsiasi* A e B sono equivalenti si può dimostrare che non può essere A maggiore di B (indichiamo $A<B$) né B maggiore di A ($A>B$). Per esclusione non rimarrà che la possibilità $A=B$.

La relazione $A \nless B$ in genere si dimostra per assurdo, provando che nell'ipotesi $A<B$ si può costruire una figura che risulta contemporaneamente maggiore e minore di A. Anche la relazione $A \ngtr B$ si prova per assurdo. E' questa tecnica di doppia riduzione all'assurdo che Archimede segue per dimostrare in maniera canonica molti dei suoi risultati di geometria di misura, tra cui quello notissimo "un cerchio è equivalente a un triangolo che ha per base la circonferenza e per altezza il raggio" [10].

Nella prima proposizione della *Misura del cerchio*, Archimede prova dunque che un cerchio equivale a un triangolo che ha per base la circonferenza e per altezza il raggio, ma noi sappiamo che un triangolo può sempre essere trasformato in un quadrato, dunque per la transitività della relazione di equiestensione, anche il cerchio può essere trasformato in un quadrato.

Ma allora Archimede ha quadrato il cerchio???

Se ci poniamo nell'ambito della geometria euclidea, in cui gli strumenti ammessi sono solo la riga e il compasso, la risposta è negativa: Archimede ha solo ricondotto il problema della quadratura del cerchio a quello della rettificazione della circonferenza. In altre parole, un cerchio è quadrabile se è possibile costruire con riga e compasso la

[10] La dimostrazione dettagliata si può trovare, in rete, nell'edizione critica greco-latina curata dal filologo danese L.Heiberg *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii,* Teubner, Lipsia 1910-15. I tre volumi sono scaricabili dalla pagina http://www.wilbourhall.org/index.html#archimedes. Nello stesso sito è anche disponibile la parafrasi curata da T.Heath *The Works of Archimedes*.

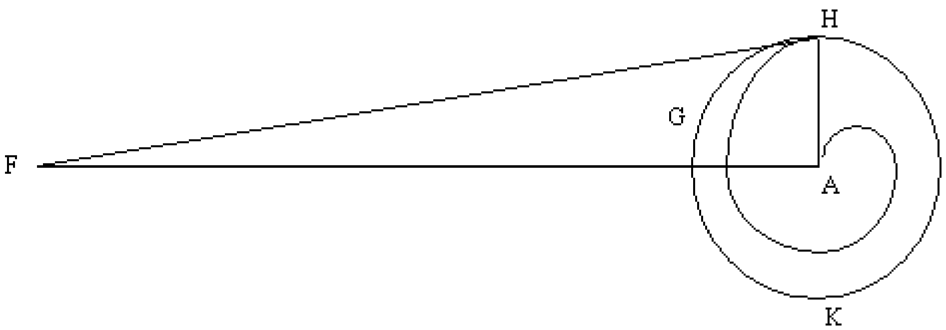
base del triangolo T pari alla lunghezza della circonferenza: solo nel 1882 è stato completamente dimostrato da Ferdinand von Lindemann (1852-1936) che questo non è possibile. Oggi diciamo che la lunghezza di una circonferenza di raggio r è pari a $2\pi r$ e il problema sta proprio nella natura del numero π; in termini matematici, von Lindemann ha dimostrato che non solo π è un numero irrazionale, ma è anche *trascendente* e questo, semplificando un po', porta proprio a concludere che non è possibile rettificare la circonferenza e quindi nemmeno quadrare il cerchio con riga e compasso.

Archimede non si è limitato a trasformare il problema della quadratura del cerchio in quello della rettificazione della circonferenza, ma è andato oltre. A titolo di curiosità vediamo rapidamente l'ultima versione di questo problema.

Nella sua opere *Sulle spirali,* Archimede discute le proprietà di una curva che poi prenderà il nome di *spirale di Archimede* e che è definita, in modo cinematico, come segue

Se si traccia nel piano una linea retta [un segmento NdR] *ed essa, fermo restando uno dei suoi estremi, vien fatta ruotare con velocità costante quante volte si vuole fino a tornare nella posizione dalla quale è partita e se al tempo stesso sulla linea si muove un punto di moto uniforme cominciando dall'estremo che resta fermo, il punto descriverà una spirale.*[11]

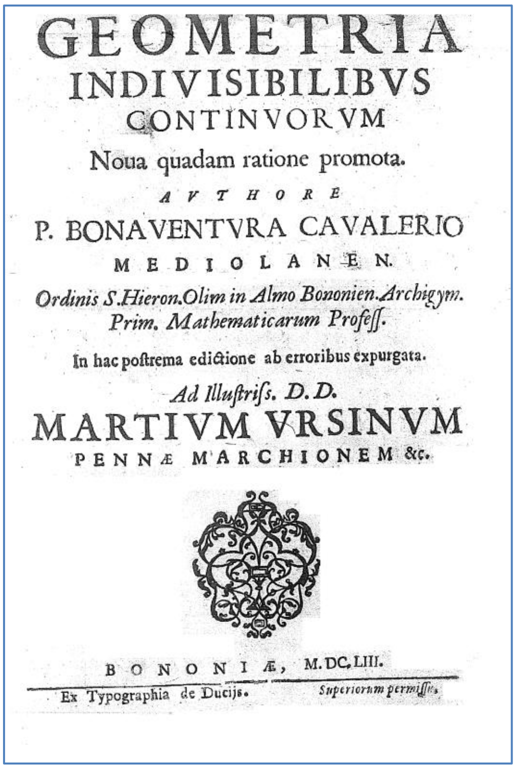
Immaginiamo che il segmento rotante AH abbia percorso una rivoluzione completa e supponiamo di tracciare la tangente HF alla spirale nel punto H. Il segmento AF, perpendicolare ad AH e che interseca la tangente nel punto F ha lunghezza pari a quella della circonferenza che ha centro in A, centro di rotazione e raggio AH.



In altre parole, se si potesse tracciare la tangente alla spirale con riga e compasso, si potrebbe rettificare la circonferenza e dunque quadrare il cerchio!

[11] Archimede, *Opere*, a cura di A. Frajese, UTET, p.345.

Le nuove idee di Cavalieri e Torricelli


GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
P. BONAVENTVRA CAVALERIO
MEDIOLANEN.
Ordinis S.Hieron.Olim in Almo Bononien.Archigym.
Prim. Mathematicarum Profess.
In hac postrema editione ab erroribus expurgata.
Ad Illustriss. D.D.
MARTIVM VRSINVM
PENNÆ MARCHIONEM &c.
BONONIÆ, M.DC.LIII.
Ex Typographia de Ducijs. Superiorum permissu.

Una notevole svolta alle tecniche di quadratura viene data nel Seicento dal gesuato **Bonaventura Cavalieri (1598-1647)**, che formulò la teoria degli indivisibili nel suo *Geometria invisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Geometria ampliata con un nuovo metodo mediante gli indivisibili dei continui) pubblicato nel 1635.

Nell'Introduzione, Cavalieri narra l'origine dell'intuizione che sta alla base del suo metodo:

Meditando dunque un giorno sulla generazione dei solidi che sono originati da una rivoluzione intorno a un asse e confrontando il rapporto delle figure piane generatrici con quello dei solidi generati, mi meravigliavo moltissimo del fatto che le figure generate si discostassero a tal punto dalla condizione di quelle che le generano, da mostrare di seguire un rapporto completamente diverso dal loro. Per esempio, un cilindro che è ottenuto insieme a un cono dalla stessa base per rotazione attorno a un medesimo asse, è il triplo di questo, anche se nasce per rivoluzione da un parallelogramma doppio del triangolo che genera il cono.

Avendo dunque più e più volte fermato l'attenzione su tale diversità in moltissime altre figure, mentre prima, raffigurandomi ad esempio un cilindro come l'unione di parallelogrammi indefiniti per numero passanti tutti per l'asse, ritenevo che ottenuto il mutuo rapporto di dette figure piane dovesse subito venirne fuori anche il rapporto dei solidi da esse generate risultando invece già chiaramente che il rapporto delle figure piane generatrici non concordava affatto con quello dei solidi generati, mi sembrava che si dovesse a buon diritto concludere che avrebbe perduto il tempo e la fatica e che avrebbe trebbiato inutile paglia chi si fosse messo a cercare la misura delle figure con tale metodo.

Ma dopo aver considerato la cosa un po' più profondamente pervenni finalmente a questa opinione e precisamente che per la nostra faccenda dovessero prendersi piani non intersecantisi tra di loro ma paralleli. In questo infatti, investigati moltissimi casi, in tutti trovai perfetta corrispondenza tanto tra il rapporto dei corpi e quello delle loro sezioni piane quanto tra il rapporto dei piani e quello delle loro linee […]

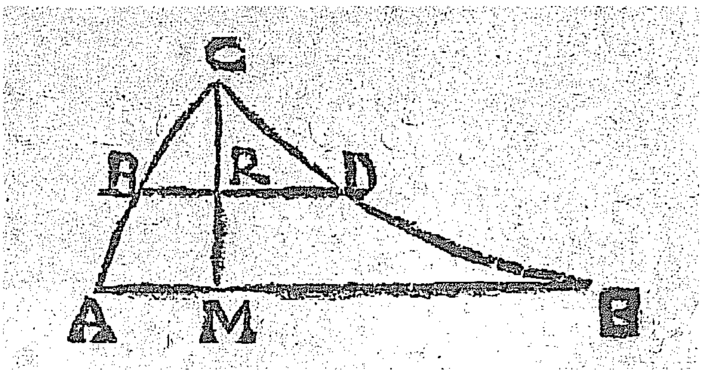
Avendo dunque considerato il cilindro e il cono suddetti secati non più per l'asse ma parallelamente alla base, trovai che il rapporto del cilindro al cono è uguale a quello di quei piani che chiamo nel libro II «tutti i piani» del cilindro a «tutti i piani» del cono, con riferimento alla base comune […] Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle *figure quello di indagare i rapporti delle linee al posto di quello dei piani e i rapporti dei piani al posto di quello dei solidi per procurarmi subito la misura delle figure stesse. La cosa, ritengo, andrà come era nei miei voti, come risulterà chiaro a chi leggerà tutto.*[12]

Il "Principio di Cavalieri"

Uno dei pilastri del metodo è il cosiddetto *Principio di Cavalieri*, corrispondente alla proposizione 4 del libro II, che qui vediamo nella sua formulazione originale

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI duæ figuræ planæ, vel ſolidæ, in eadem altitudine fuerint conſtitutæ, ductis autem in planis rectis lineis, & in figuris ſolidis ductis planis vtcumque inter ſe parallelis, quorum reſpectu prædicta ſumpta ſit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, ſeu ductorum planorum portiones figuris ſolidis interceptas, eſſe magnitudines proportionales, homologis in eadem figura ſemper exiſtentibus, dictæ figuræ erunt inter ſe, vt vnum quodlibet eorum antecedentium, ad ſuum conſequens in alia figura eidem correſpondens.



Se due figure, piane o solide, hanno la stessa altezza; se poi condotte nelle figure piane delle rette parallele o condotte nelle solide dei piani paralleli, si troverà che i segmenti di retta tagliati dalle figure piane (o le superfici tagliate dalle solide) sono grandezze proporzionali, le due figure staranno tra loro come uno qualsiasi dei segmenti (o nei

[12] Traduzione tratta da E. Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'Antichità al Novecento, Pisa, Istituti editoriali e poligrafici internazionali*, 2007

solidi una delle superfici) tagliati nella prima al corrispondente segmento tagliato nell'altra.[13]

Considerando le figure CAM e CME che hanno la stessa altezza, per ipotesi si ha che, data una retta generica BRD è verificata la proporzione

$$\frac{AM}{ME} = \frac{BR}{RD}$$

e si vuole dimostrare che

$$\frac{CAM}{CME} = \frac{AM}{ME}$$

Data l'arbitrarietà della retta BRD, possiamo considerare rette parallele $B_1R_1D_1$, $B_2R_2D_2$, …, $B_nR_nD_n$ tali che

$$\frac{BR}{RD} = \frac{B_1R_1}{R_1D_1} = \frac{B_2R_2}{R_2D_2} = \cdots = \frac{B_nR_n}{R_nD_n} = \cdots = \frac{AM}{ME}$$

A questo punto Cavalieri "ricorre" a un teorema della teoria delle proporzioni tra grandezze[14] che possiamo formulare in questi termini: " Date n grandezze $a_1, a_2, \dots, a_n$ e altre n grandezze $b_1, b_2, \dots, b_n$ tali che

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Allora si ha che un antecedente sta a un conseguente, così come tutti gli antecedenti stanno a tutti i conseguenti, cioè

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

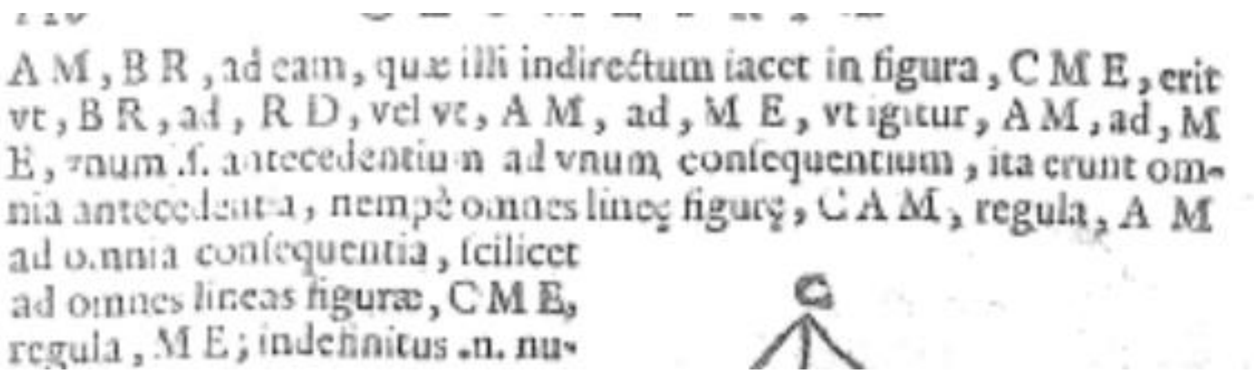
Ovvero, per dirla con la celebre locuzione di Cavalieri **ut unum ad unum sic omnia ad omnia**. Questo il passo originale

ram, C M E, esse vt, A M, ad,
M E, vel, B R, ad, R D, quoniam enim, B D, A E, vtcumq; du-
ctæ sunt inter se æquidistantes, patet, quod quęlibet earum, quę di-
cuntur omnes lineæ figuræ, C A M, sumptæ regula altera ipsarum,
P 2 A M,

---

[13] Traduzione tratta da E. Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale*, Pisa, Istituti editoriali e poligrafici, 2007.

[14] *Elementi*, V.12: *Se quante si voglia grandezze sono in proporzione, una delle antecedenti sta alla sua conseguente come la somma delle antecedenti sta alla somma delle conseguenti.*

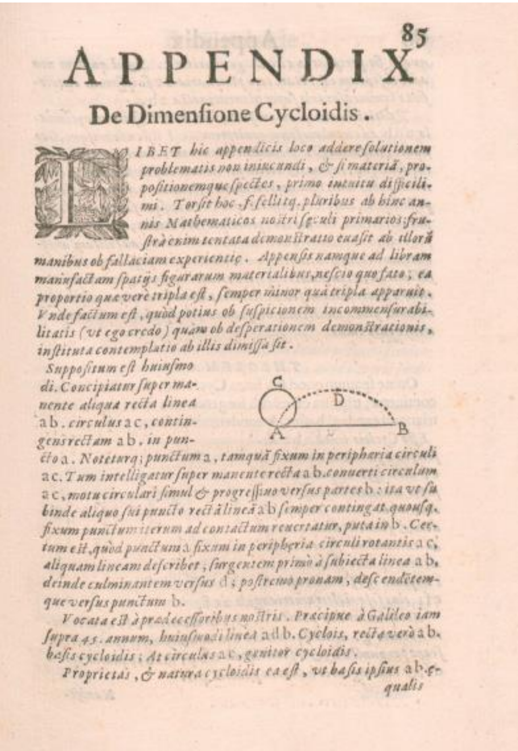


A M, B R, ad eam, quæ illi indirectum iacet in figura, C M E, erit vt, B R, ad, R D, vel vt, A M, ad, M E, vt igitur, A M, ad, M E, vnum .f. antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnia antecedentia, nempè omnes lineæ figuræ, C A M, regula, A M ad omnia consequentia, scilicet ad omnes lineas figuræ, C M E, regula, M E; indefinitus .n. nu-

… *poiché infatti BD, AE comunque condotte sono tra di loro parallele, è evidente che una qualsivoglia di quelle linee, che si dicono* ***tutte le linee*** *della figura CAM, prese con riferimento una delle due linee AM AM, BR starà a quella che giace sul suo prolungamento diretto nella figura CME, come BR sta a RD, oppure come AM sta ME, cioè* ***come uno degli antecedenti sta a uno dei conseguenti, così staranno tutti gli antecedenti, e*** *precisamente tutte le linee della figura CAM, riferimento AM,* ***a tutti i conseguenti****, ossia a tutte le linee della figura CME, riferimento ME…*

A questo punto la conclusione è "ovvia": il rapporto costante tra due sezioni qualsiasi è lo stesso che sussiste tra le due figure. Ma è proprio così ovvia?

DOMANDA 5. Qual è o quali sono i punti deboli di questa dimostrazione?



85

APPENDIX

De Dimensione Cycloidis.

LIBET hic appendicis loco addere solutionem problematis non iniucundi, & si materiã, propositionemque spectes, primo intuitu difficilimi. Torsit hoc .f. fefellitq. pluribus ab hinc annis Mathematicos nostri sæculi primarios; frustrà enim tentata demonstratio euasit ab illorũ manibus ob fallaciam experientiæ. Appensis namque ad libram manufactam spatijs figurarum materialibus, nescio quo fato; ea proportio quæ verè tripla est, semper minor quã tripla apparuit. Vnde factum est, quòd potius ob suspicionem incommensurabilitatis (vt ego credo) quàm ob desperationem demonstrationis, instituta contemplatio ab illis dimissa sit.

Suppositum est huiusmodi. Concipiatur super manente aliqua recta linea ab. circulus ac, contingens rectam ab. in puncto a. Noteturq; punctum a, tamquã fixum in peripheria circuli ac. Tum intelligatur super manente rectã ab. conuerti circulum ac, motu circulari simul & progressiuo versus partes b: ita vt subinde aliquo sui puncto rectã lineã ab semper contingat, quousq. fixum punctum iterum ad contactum reuertatur, puta in b. Certum est, quòd punctum a fixum in peripheria circuli rotantis ac, aliquam lineam describet; surgentem primò à subiecta linea ab, deinde culminantem versus d; postremo pronam, descendentemque versus punctum b.

Vocata est à prædecessoribus nostris. Præcipue à Galileo iam supra 45. annum, huiusmodi linea adb. Cyclois, recta verò ab. basis cycloidis; At circulus ac, genitor cycloidis.

Proprietas, & natura cycloidis ea est, vt basis ipsius ab. æqualis

Torricelli e la quadratura della cicloide

Evangelista Torricelli (1608-1647) si può certamente annoverare tra i più brillanti interpreti del metodo degli indivisibili. Non solo sposa in pieno le tecniche di Cavalieri (aspramente criticate da una parte non irrilevante della comunità scientifica) ma introduce anche alcune novità, tra cui l'uso della simmetria e gli indivisibili curvi.

Torricelli ottenne due risultati assolutamente eclatanti per l'epoca: provò che la regione compresa da un arco di cicloide e dalla sua base è pari a tre volte il cerchio generatore e dimostrò che il volume di un solido illimitato come il cosiddetto *solido acuto iperbolico* può essere finito.

Lo stesso Galileo si era cimentato con la determinazione dell'area della cicloide, arrivando quasi ad intuire il risultato ma senza riuscire a dimostrarlo:

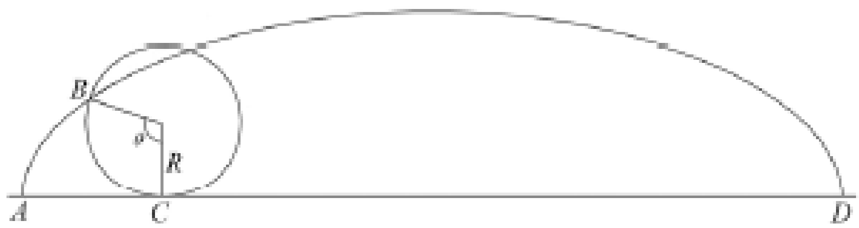
Quella linea arcuata sono più di cinquant'anni che mi venne in mente di descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi d'un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio di lei, e della sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio che tale spazio potesse esser triplo del cerchio che lo descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta (Galileo a Cavalieri, 24 febbraio 1640)

Torricelli può annunciare il risultato a Cavalieri, che così commenta:

Finalmente ho sentito nell'ultima sua la misura dello spazio cicloidale con molta mia maraviglia, essendo stato sempre stimato problema di molta difficoltà, che straccò già il Galileo, siccome io pure, parendomi assai difficile, lo lasciai andare; onde ella ne avrà non poca lode di questo oltre le tante sue meravigliose invenzioni, che gli saranno eterna fama. Non resterò poi di dirle intorno a questo, che il Galileo mi scrisse una volta d'averci applicato 40 anni fa, e che non aveva potuto trovar niente; e che s'era persuaso che il detto spazio fosse triplo del suo circolo genitore, ma che poi li pareva che non fosse precisamente, se mal ricordo, poiché per quanto abbi cercato nelle mie scritture, non ho mai potuto tal lettera ritrovare (Cavalieri a Torricelli, 23 aprile 1643)

Ricordiamo prima di tutto come si costruisce una cicloide[15]. Consideriamo un cerchio di raggio R che partendo dal punto A rotoli senza strisciare sulla retta AD.

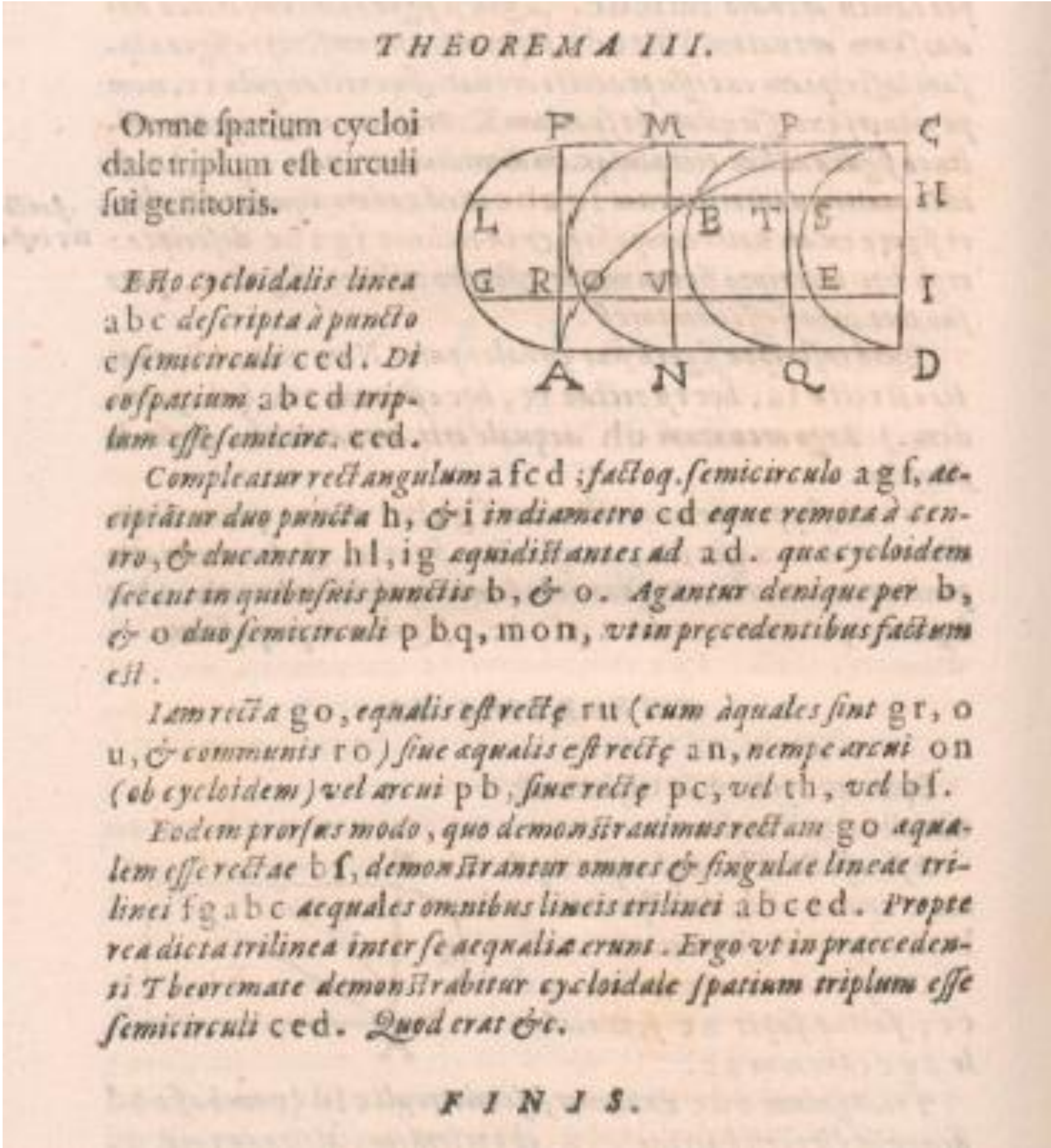
Il punto B, che all'inizio del moto coincide con A, descrive una curva ABD detta cicloide. In un giro, la ruota avrà percorso un cammino pari alla sua circonferenza, e quindi la base AD della cicloide misura $2\pi R$.



l'arco BC ha lunghezza $R\theta$ e il segmento AC, che per la definizione della cicloide è uguale all'arco BC, ha anch'esso lunghezza $R\theta$ (questa è la caratteristica geometrica che definisce la cicloide).

[15] Sulla cicloide si può vedere anche http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/mini_calcolo/schede/08.pdf

Di seguito troviamo l'immagine della dimostrazione di Torricelli, a cui seguirà una spiegazione e non una traduzione letterale.


THEOREMA III.

Omne spatium cycloidale triplum est circuli sui genitoris.

Esto cycloidalis linea abc *descripta à puncto* c *semicirculi* ced. *Dico spatium* abcd *triplum esse semicirc.* ced.

Compleatur rectangulum afcd; *factoq. semicirculo* agf, *accipiãtur duo puncta* h, *&* i *in diametro* cd *eque remota à centro, & ducantur* hl, ig *equidistantes ad* ad. *quae cycloidem secent in quibuslibet punctis* b, *&* o. *Agantur denique per* b, *&* o *duo semicirculi* pbq, mon, *vt in precedentibus factum est.*

Iam recta go, *equalis est recte* ru (*cum àquales sint* gr, ou, *& communis* ro) *siue aqualis est recte* an, *nempe arcui* on (*ob cycloidem*) *vel arcui* pb, *siue recte* pc, *vel* th, *vel* bf.

Eodem prorsus modo, quo demonstrauimus rectam go *aequalem esse rectae* bf, *demonstrantur omnes & singulae lineae trilinei* fgabc *aequales omnibus lineis trilinei* abced. *Proptere a dicta trilinea inter se aequalia erunt. Ergo vt in praecedenti Theoremate demonstrabitur cycloidale spatium triplum esse semicirculi* ced. *Quod erat &c.*

FINIS.

IN SINTESI:

Siano H e I due punti arbitrari, ma simmetrici rispetto al centro del semicerchio: si traccino poi le rette *r*, *s* passanti per questi punti e perpendicolari al diametro CD.. Trasliamo il semicerchio in modo che S venga a coincidere con B (sulla cicloide);

trasliamo ancora il semicerchio in modo che E venga a coincidere con O (sulla cicloide); tracciamo infine il semicerchio FLGA, tale che il suo diametro FA sia perpendicolare alla base AD della cicloide.

Una volta costruita la figura, il più è fatto. Si tratta ora di applicare proprietà elementari. Lo scopo è quello di provare che, per ogni scelta delle rette simmetriche *r* e s i segmenti GO e BS sono uguali. In questo modo, si può ricorrere a una sorta di Principio di Cavalieri in cui non si pongono a confronto sezioni staccate dalla stessa retta, ma staccate da due rette parallele e simmetriche. Sulla base di questo "Principio di Cavalieri con simmetria", dall'uguaglianza di due generiche sezioni GO e BS si può dedurre l'uguaglianza delle figure trilinee alle quali appartengono.

Vediamo intanto come dimostrare che GO=BS. Costruiamo una catena di uguaglianze:

GO = RV in quanto GO=OV per costruzione e RO in comune

RV = AN per parallelismo

AN= arco(ON) per definizione di cicloide

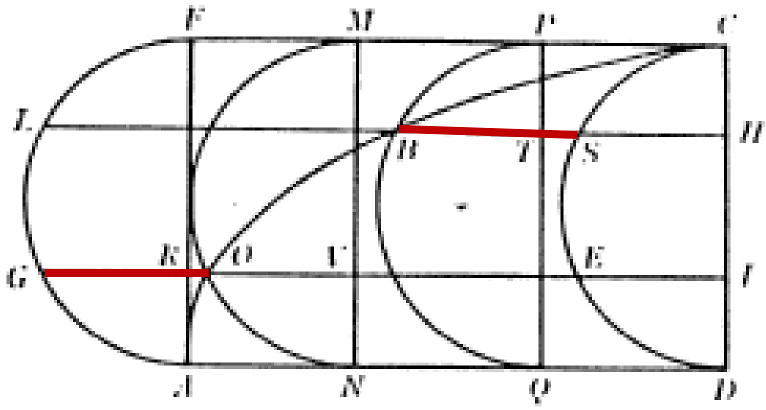
ON = PB per simmetria

PB = CS per simmetria

CS = PC per definizione di cicloide

PC=TH per parallelismo

TH= BS essendo BT=SH per costruzione e TS in comune



Dunque GO=BS per ogni scelta di H e I. Per il "Principio di Cavalieri con simmetria" allora il trilineo CFA è uguale al trilineo CAD.

A questo punto, si tratta solamente di comporre e decomporre opportune figure. Osserviamo che

Semicicloide CDA = trilineo CAD + semicerchio CD

Trilineo CFA = rett. CFAD – semicicloide CDA + semic FA

Sommiamo membro a membro

Semicicloide CDA+ Trilineo CFA = trilineo CAD + semicerchio CD + rett. CFAD – semicicloide CDA + semic FA

Essendo Trilineo CFA = Trilineo CAD e facendo qualche semplicissimo calcolo si arriva all’uguaglianza

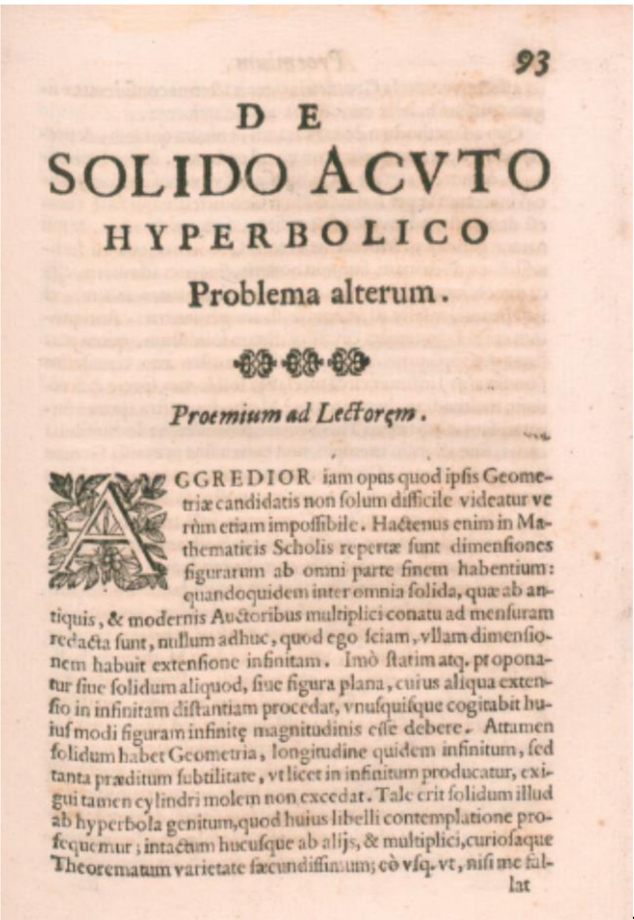
Cicloide CDA = rett. CFAD + cerchio generatore

Ma il rettangolo CFAD ha come base metà circonferenza (per la definizione di cicloide) e come altezza il diametro CD

$$\text{Rettangolo CFAD} = \frac{\pi}{2}\,CD \cdot CD = 2\,\frac{CD^2}{4}\,\pi = 2 \text{ cerchio generatore}$$

Cicloide CDA = 3 cerchio generatore

Torricelli e il solido acuto iperbolico


93

DE

SOLIDO ACVTO

HYPERBOLICO

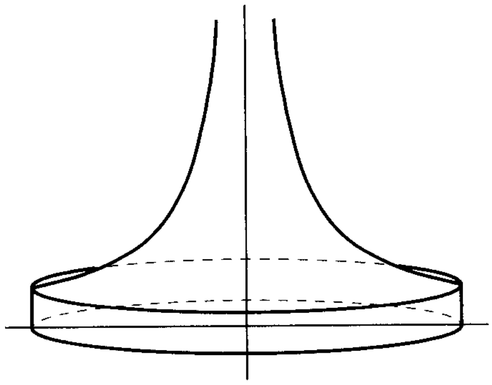
Problema alterum.

Proemium ad Lectorem.

AGGREDIOR iam opus quod ipsis Geometriæ candidatis non solum difficile videatur verùm etiam impossibile. Hactenus enim in Mathematicis Scholis repertæ sunt dimensiones figurarum ab omni parte finem habentium: quandoquidem inter omnia solida, quæ ab antiquis, & modernis Auctoribus multiplici conatu ad mensuram redacta sunt, nullum adhuc, quod ego sciam, vllam dimensionem habuit extensione infinitam. Imò statim atq. proponatur siue solidum aliquod, siue figura plana, cuius aliqua extensio in infinitam distantiam procedat, vnusquisque cogitabit huiusmodi figuram infinitę magnitudinis esse debere. Attamen solidum habet Geometria, longitudine quidem infinitum, sed tanta præditum subtilitate, vt licet in infinitum producatur, exigui tamen cylindri molem non excedat. Tale erit solidum illud ab hyperbola genitum, quod huius libelli contemplatione prosequemur; intactum hucusque ab alijs, & multiplici, curiosaque Theorematum varietate fæcundissimum; eò vsq. vt, nisi me fallat

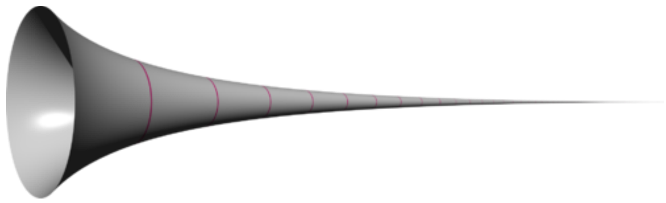
Come abbiamo detto, oltre alla quadratura della cicloide, Torricelli ottiene un secondo risultato di rilievo: la cubatura del solido acuto iperbolico.

Mi giunse la lettera di V.S. M. Rev.da in tempo che io stavo nel letto con la febbre e la gotta, che mi levorno il poter godere allora le sue bellissime specolazioni, e sebbene non sono anco ben riavuto, ho però goduto al dispetto del male de’ saporitissimi frutti del suo ingegno, essendomi riuscito infinitamente ammirabile quel solido iperbolico infinitamente lungo, ed uguale ad un corpo quanto a tutte e tre le dimensioni finito, ed avendolo io comunicato ad alcuni miei scolari filosofi, hanno confessato parergli veramente meraviglioso e *stravagante che ciò possa essere* (Cavalieri a Torricelli, 17 dicembre 1641)



Ma che cos'è il *solido acuto iperbolico*?

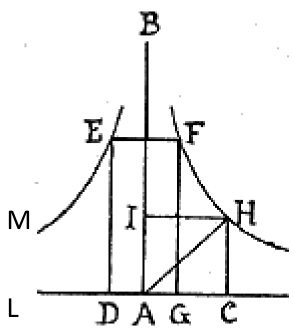
E' il solido che si ottiene facendo ruotare attorno a un asintoto una porzione di iperbole; è detta anche *tromba di Torricelli* (*o tromba di Gabriele*).[16]



Con il calcolo integrale, non è molto difficile vedere che si tratta di un solido di rotazione che ha volume finito, pur trattandosi di un solido non limitato. Nel corso del Seicento verranno presentati diversi esempi analogo a questo, ma il caso studiato da Torricelli ci può annoverare tra i primi e riscosse quindi un notevole successo.

Come si può affrontare il problema senza l'ausilio del calcolo integrale, ma solo con strumenti elementari e il metodo degli indivisibili? La strategia di Torricelli, come vedremo, ricorda da vicino il cosiddetto "metodo dei gusci cilindrici" che si usa per calcolare il volume di un solido ottenuto dalla rotazione di una regione attorno all'asse delle ordinate.

Vediamo i lemmi che conducono al risultato finale: li presenteremo in linguaggio moderno e non con quello torricelliano, cercando comunque di non tradirne lo spirito.[17]



LEMMA I

Per ipotesi EM, FH sono rami d'iperbole, mentre AB e AC sono asintoti. Sia AH la bisettrice del primo quadrante (nonché

[16] Questa la definizione di Torricelli: *Si hyperbola circa asymptoton, tamquam circa axem, convertatur solidum fiet (si secundum axem consideretur) longitudine infinitum, quod quidem Acutum solidum hyperbolicum nominabimus* (Se si ruota un'iperbole attorno a un asintoto, oppure attorno a un asse, si genera un solido che avrà lunghezza infinita nella direzione dell'asse e che chiameremo solido acuto iperbolico).

[17] Le immagini seguenti sono tratte da http://www.imss.fi.it/multi/torricel/itorat31.html

semiasse dell'iperbole). ***Si vuole provare che il rettangolo DEFG è equiesteso al quadrato di lato AH.***

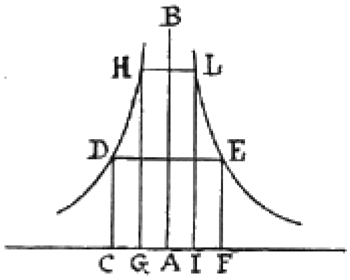
Il quadrato IHCA ha come diagonale AH, per cui

$AH^2 = 2\ AC^2 = 2$ Area(IHCA) = Area(MHCL)

Poiché, in termini moderni, l'iperbole equilatera riferita gli asintoti si esprime come $xy = k$, significa che tutti i rettangoli che hanno per base ed altezza rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di uno stesso punto della curva, hanno area costante; dunque

Area (EFGD) = Area (MHCL)

E quindi Area (EFGD) = $AH^2 = 2k$



LEMMA II

Le superfici laterali dei cilindri inscritti nel solido iperbolico sono uguali.

Basta osservare che

Superficie laterale cilindro = h · circonferenza di base = h · diametro · π

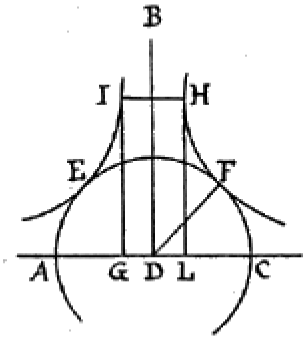
Ma h · diametro = area del rettangolo inscritto = 2k

Per il lemma I, le aree di tutti i rettangoli inscritti sono uguali, quindi saranno uguali le superfici laterali di ogni cilindro inscritto nel solido iperbolico, e inoltre vale

Superficie laterale del cilindro = 2k π

per ogni cilindro inscritto.

Presentiamo i due lemmi successivi senza dimostrazione.



LEMMA III

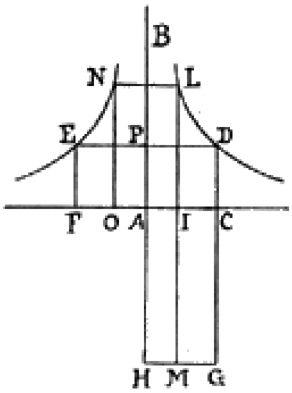
I volumi dei cilindri che hanno la stessa superficie laterale stanno tra loro come i diametri delle basi.

A questo punto, Torricelli è in grado di sviluppare la sua idea, che è quella di considerare il solido acuto iperbolico come un insieme di anelli cilindrici concentrici, ma prima prova anche che (LEMMA V)

che la superficie laterale di ogni cilindro GHIL inscritto nel solido acuto, è equivalente al cerchio di raggio DF.

Se l'equazione dell'iperbole è $xy = k$ e il punto F appartiene alla bisettrice si ha che $DF^2 = 2k$, quindi il cerchio di raggio DF ha area $2k\pi$, esattamente come le superfici laterali dei cilindri inscritti (lemma III).

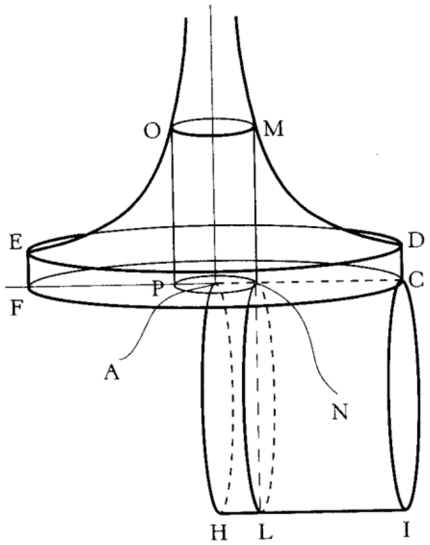
Ecco il teorema fondamentale:



Il solido infinitamente lungo FEBDC costituito dal solido acuto iperbolico EBD e dal suo cilindro di base FEDC, è equivalente al cilindro retto ACGH di altezza AC uguale al raggio della base del solido acuto e di base circolare con diametro AH uguale al lato verso, ovvero all'asse dell'iperbole.

DOMANDA 6. Come si può dimostrare sulla base dei lemmi precedenti?

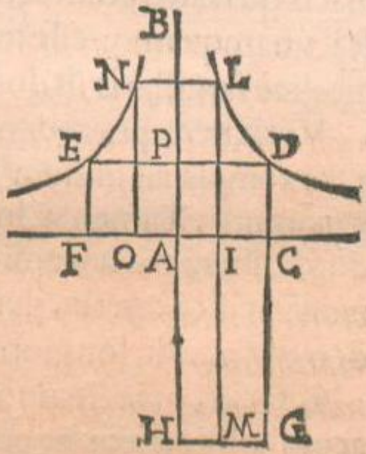
Come aiuto, una figura molto significativa[18] e la dimostrazione latina, di cui si trova traduzione in appendice.



[18] Tratta da F. Toscano, *L'erede di Galileo. Vita breve e mirabile di Evangelista Torricelli*, Milano, Sironi 2008

Solidum acutum hyperbolicum infinitè longum, ſectum plano ad axem erecto, vnà cum cylindro ſuæ baſis, æquale eſt cylindro cuidam recto, cuius baſis diameter ſit latus verſum, ſiue axis hyperbolæ, altitudo verò ſit æqualis ſemidiametro baſis ipſius acuti ſolidi.

Eſto hyperbola cuius aſymptoti *ab*, *ac* angulum rectum contineant; ſumptoq; in hyperbola quolibet puncto *d*, ducatur *dc* æquidiſtans ipſi *ab*, & *dp* æquidiſtans *ac*. Tũ conuertatur vniuerſa figura circa axẽ *ab*. ità vt fiat ſolidum acutum hyperbolicum *ebd*, vna cum cylindro ſuæ baſis *fedc*. Poducatur *ba* in *h*. ita vt *ah*. æqualis ſit integro axi, ſiue lateri verſo hyperbolæ. Et circa diametrum



ah intelligatur circulus erectus ad aſymptoton *ac*: & ſuper baſi *ah* concipiatur cylindrus rectus *acgh*, cuius altitudo ſit *ac*, nempe ſemidiameter baſis acuti ſolidi. Dico ſolidum vniuerſum *febdc*, quanquam ſine fine longum, æquale tamen eſſe cylindro *acgh*.

Accipiatur in recta *ac* quodlibet punctum *i*, & per *i* intelligatur ducta ſuperficies cylindrica *onli* in ſolido acuto

P 2 com-

compræhenſa circa axem *ab*: item circulus *im* in cylindro *acgh* æquidiſtans baſi *ah*.

Erit ergo prædicta ſuperficies cylindrica *onli* ad circulum *im*, vt rectangulum per axem *ol*, ad quadratum radij circuli *im*; nempe vt rectangulum *ol*, ad quadratum ſemiaxis hyperbolæ; & ideo æqualis ex lemmate. Et hoc ſemper verum erit, vbicunq; ſumatur punctum *i*. Propterea omnes ſimul ſuperficies cylindricæ, hoc eſt ipſum ſolidum acutum *ebd*, vna cum cylindro baſis *fedc*, æquale erit omnibus circulis ſimul, hoc eſt cylindro *acgh*. Quod erat &c.

Con queste parole Torricelli commenta lo straordinario risultato

Può sembrare incredibile che, pur avendo questo solido una lunghezza infinita, nessuna delle superfici cilindriche considerate abbia lunghezza infinita, ma tutte siano finite, come risulterà chiaro a chiunque abbia una pur modesta familiarità con la teoria delle coniche

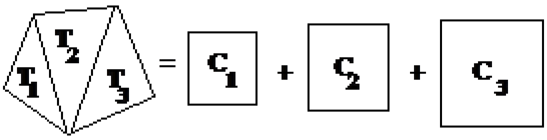
Da notare che il metodo degli indivisibili viene soppiantato dal calcolo integrale per la quadratura delle figure piane, ma continuerà a sopravvivere fino alla scoperta degli integrali doppi nell'ambito della determinazione del volume dei solidi.

APPENDICE. Le risposte

DOMANDA 1. Abbiamo un nuovo problema: dati *n* quadrati è possibile costruire un unico quadrato equivalente alla loro unione?

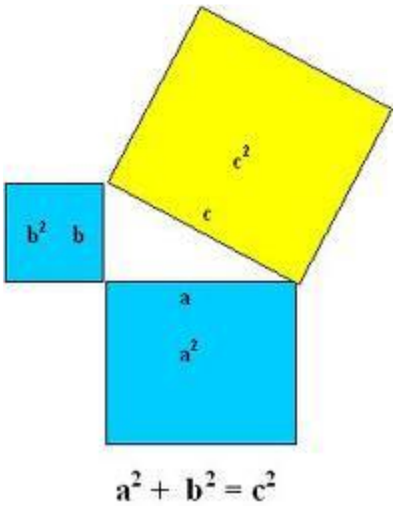
Se troviamo il modo di risolvere il problema per $n = 2$, allora iterando il procedimento, possiamo dire di aver risolto il problema e, in conclusione, di saper quadrare una figura rettilinea anche senza la proposizione I.45.

Per esempio, se dividiamo il pentagono P nei tre triangoli T_1, T_2 e T_3 e supponiamo di poter costruire dei quadrati rispettivamente equiestesi C_1, C_2 e C_3, basterà considerare il quadrato C_{12} equivalente alla somma dei due quadrati C_1 e C_2 e poi di nuovo costruire il quadrato equiesteso a C_{12} e C_3.



Bisogna dunque risolvere il seguente sotto-problema: come costruire un quadrato equivalente all'unione di due quadrati dati?

La risposta si trova in una delle più famose proposizioni degli *Elementi* di Euclide, la penultima del primo libro (I.47) nota come *Teorema di Pitagora* o *Teorema dell'ipotenusa*



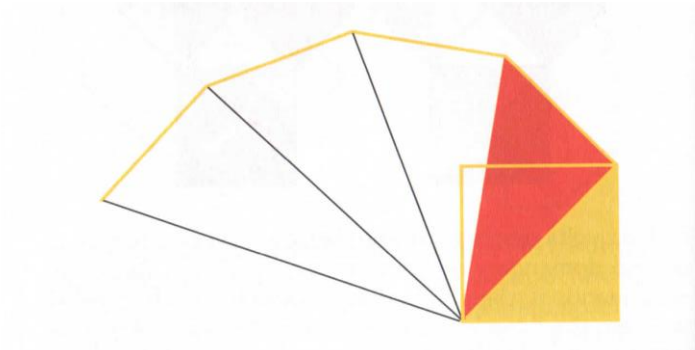
In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo retto è uguale ai quadrati costruiti sui lati che contengono l'angolo retto

Euclide dimostra anche l'inverso di questo teorema e quindi la proprietà enunciata dei quadrati costruiti sui lati del triangolo caratterizza univocamente i triangoli rettangoli.

Se vogliamo dunque "sommare" i due quadrati azzurri (diciamo C_1 e C_2 dell'esempio precedente), basta disporre i lati in modo che risultino cateti di un triangolo rettangolo: il quadrato giallo costruito sull'ipotenusa sarà equivalente ai due quadrati azzurri.

Ora, se volessimo sommare un altro quadrato C_3 (rosso, anche se non c'è in figura), basterebbe considerare un nuovo triangolo rettangolo i cui cateti siano il lato del quadrato giallo e il lato del nuovo quadrato: il quadrato costruito sulla nuova ipotenusa sarebbe dunque equivalente ai due quadrati azzurri C_1 e C_2 più il terzo C_3 rosso.

Iterando il procedimento costruiamo una successione di triangoli rettangoli che si chiama *spirale della radice quadrata.*[19]



Il teorema di Pitagora, soprattutto nella tradizione arabo-latina priva della proposizione I.45, diventa quindi un tassello fondamentale per risolvere il problema della quadratura delle figure rettilinee e la sua collocazione alla fine del primo libro degli *Elementi* diventa dunque perfettamente comprensibile.

Forzando un po' potremmo considerare il teorema di Pitagora come una macchina virtuale in grado di costruire quadrati equiestesi a n quadrati dati.

DOMANDA 2. Come si può provare che la lunula è quadrabile?

I due segmenti circolari uguali u e w sono simili al segmento t. e quindi

$$u : t = CE^2 : CF^2$$

Per il teorema di Pitagora

$$CE^2 + EF^2 = CF^2$$

Quindi si avrà: $u + w = t$ (*)

Osserviamo che

$$\text{Lunula CEFG} = \text{triangolo CEF} - t + u + w$$

Per la (*)

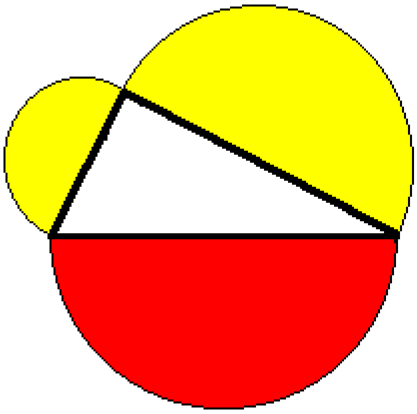
$$\text{Lunula CEFG} = \text{triangolo CEF}$$

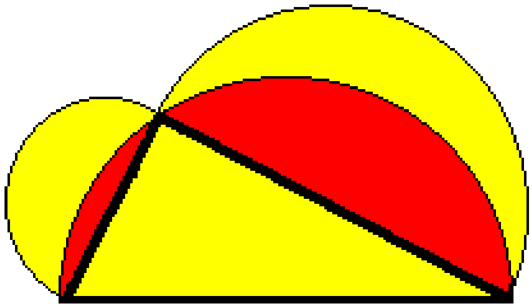
Ovvero, a sinistra, la lunula ABCD è equiestesa al triangolo rettangolo isoscele AOC.

[19] La figura è tratta da P. Odifreddi, *C'è spazio per tutti*, Mondadori, 2010, p.52.

DOMANDA 3. Le lunule e il triangolo sono equiestesi?

Per il teorema di Pitagora, i semicerchi costruiti sui cateti sono equiestesi al semicerchio costruito sull'ipotenusa[20]





Se ora ribaltiamo quest'ultimo, e togliamo sia al semicerchio grande che ai due piccoli le parti rosse in comune, le figure che restano, cioè il triangolo e le due lunule avranno area uguale.

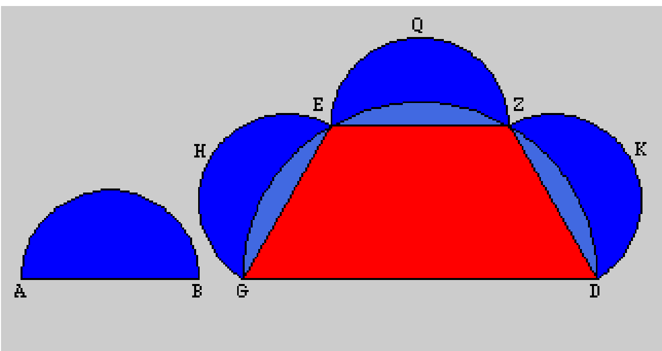
DOMANDA 4. Si può provare che

Trapezio GDZE = 3 lunule + semicerchio

e quindi che

Esagono = 6 lunule + cerchio ?

Ma allora, poiché la differenza di figure quadrabili è ancora quadrabile, non potremmo concludere di aver trovato la quadratura del cerchio?



Si ha

$GD^2 = 4\ AB^2 = AB^2 + GE^2 + EZ^2 + ZD^2$

Dato che i cerchi (e i semicerchi) stanno tra loro come i quadrati dei

[20] Le figure seguenti sono tratte da http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/exh_pitagora/schede.php?id=6

diametri, si ha

Semicerchio GEZD = 4 semicerchi di diametro AB, GE, EZ e ZD (**)

Allora

Trapezio GDZE = semicerchio GEZD – 3 segmenti circolari GE, EZ, ZD

Per (**)

Trapezio GDZE = 4 semicerchi di diametro AB, GE, EZ e ZD– 3 segmenti circolari GE, EZ, ZD = 3 lunule + semicerchio

Ma

Trapezio GDZE = 3 lunule + semicerchio

significa

Esagono = 6 lunule + cerchio

E dunque se si potesse quadrare la lunula dell'esagono si potrebbe quadrare il cerchio…. peccato che questo però non sia possibile!

DOMANDA 5. Qual è o quali sono i punti deboli della dimostrazione della proposizione II.4 della *Geometria Indivisibilium* (Principio di Cavalieri) ?

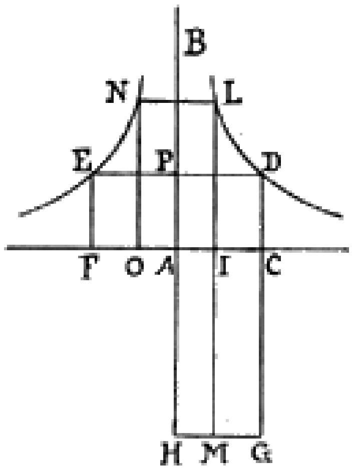
I punti problematici si possono individuare essenzialmente nel fatto che

1. Cavalieri applica a un insieme infinito di elementi un risultato della teoria delle proporzioni valido solo per un insieme finito di elementi
2. Rimangono inevase domande del tipo: cosa significa esattamente sommare gli indivisibili di una figura, ovvero infiniti segmenti? E come è possibile che la "somma" di indivisibili unidimensionali (risp. Bidimensionali) corrisponda a una figura bidimensionale (risp. tridimensionale)?

DOMANDA 6. Come si può dimostrare il teorema sul solido acuto iperbolico?

Questa la traduzione della proposizione torricelliana[21]:

[21] Si veda anche http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/mini_calcolo/schede/04.pdf.



“Sia data l’iperbole, i cui asintoti AB e AC siano perpendicolari. Considerato un punto qualunque D dell’iperbole, si tracci DC parallela ad AB e DP parallela ad AC. Si ruoti quindi l’intera figura attorno all’asse AB, in modo che si generino il solido acuto iperbolico EBD, e anche il cilindro della sua base FEDC. Si prolunghi BA fino a H, in modo che AH sia uguale all’intero asse, ovvero al lato verso dell’iperbole. E attorno al diametro AH, si intenda tracciato un cerchio perpendicolare all’asintoto AC. Sulla base circolare di diametro AH si costruisca il cilindro retto ACGH, avente per altezza AC, cioè il semidiametro della base del solido acuto. Dico che l’intero solido FEBDC, benché indefinitamente lungo, è uguale al cilindro ACGH.

Si prenda sulla retta AC un punto qualunque I e per I passi la superficie cilindrica ONLI, di asse AB, inscritta nel solido acuto. Si consideri anche il cerchio di diametro IM, appartenente al cilindro ACGH, parallelo alla base circolare di diametro AH.

La superficie cilindrica ONLI sta al cerchio di diametro IM, come il rettangolo per l’asse OL sta al quadrato del raggio del cerchio IM; ovvero come il rettangolo OL sta al quadrato del semiasse dell’iperbole. Per un lemma precedente saranno dunque uguali. E questo sarà sempre vero, ovunque si prenda il punto I.

Dunque tutte le superfici cilindriche prese insieme, cioè il solido acuto EBD, insieme col cilindro della base FEDC, saranno uguali a tutti i cerchi presi insieme, cioè al cilindro ACGH. E questo era da dimostrare.”

Come si vede, in questa dimostrazione Torricelli usa le proprietà geometriche caratteristiche dell’iperbole per stabilire che i rettangoli inscritti sono tutti equiestesi e quindi che tutti i cilindri inscritti hanno la stessa superficie laterale. Dopo aver provato che tale superficie laterale è pari a un cerchio di diametro uguale all’asse della parabola (lato verso), basta associare a ogni “guscio cilindrico” il relativo cerchio equiesteso. Se si considerano questi “gusci” come gli indivisibili cilindrici del solido acuto iperbolico e si applica, di fatto, il principio cavalieriano dell’ “ut unum ad unum, sic omnia ad omnia”, si arriva a concludere che il solido acuto iperbolico è uguale al cilindro.

Bibliografia essenziale

Fonti

F. Commandino, *De gli Elementi di Euclide*, Urbino 1575, scaricabile dal sito http://www.wilbourhall.org/ (si veda alla voce *Sitografia*)

G. della Porta, *Elementorum curvilineorum libri tres*, Napoli 1610, scaricabile da http://mathematica.sns.it/opere/52/

B. Cavalieri, *Geometria indivisibilis contonuorum nova quadam ratione promota*, 1635, scaricabile da http://mathematica.sns.it/opere/35/

E. Torricelli, *Opera geometrica*, 1644,

http://bibdig.museogalileo.it/Teca/Viewer?an=000000301015

Letteratura secondaria

Aux origines du calcul infinitésimal, Collana *Comprendre les mathématiques par les textes historiques*, Cercle d'histoire des sciences, IREM de Basse-Normandie, Ellipses 1999.

E. Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'Antichità al Novecento, Pisa, Istituti editoriali e poligrafici internazionali*, 2007.

P. Odifreddi, *Divertimento geometrico. Le origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert*, Torino, Bollati Boringhieri, 2003.

F. Toscano, *L'erede di Galileo. Vita breve e mirabile di Evangelista Torricelli*, Milano, Sironi 2008

Sitografia

V.Gavagna, Presentazione *Testi classici: Euclide, "Gli Elementi"*, Secondo Convegno Nazionale *La storia della matematica in classe*, Ivrea 14-16 marzo 2013, http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegnostoria2/materiali/gavagna.pdf

L'edizione moderna degli *Elementi* (in lingua inglese) curata da D.E.Joyce e basata sulla traduzione di T.Heath si può trovare alla seguente pagina

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Una interessante edizione ottocentesca dei primi sei libri, curata da O.Byrne e impostata su un approccio visuale si può trovare

http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html

Nel sito http://www.wilbourhall.org/ sono disponibili e scaricabili molte edizioni degli *Elementi*, tra cui l'edizione di Heiberg, di Federico Commandino (1572), Nasir ad Din at Tusi (1594). E' disponibile anche la traduzione inglese novecentesca di T.Heath. Inoltre, alla voce *Early Printed Texts on the Web. Euclid* sono elencati alcuni *link* a edizioni antiche, tra cui l'*editio princeps* del testo latino pubblicata da Ratdolt (1482), l'edizione di Luca Pacioli (1509), l'*editio princeps* del testo greco curata da S.Grynaeus (1533).

Nel sito *Mathematica Italiana* della Scuola Superiore Normale di Pisa (http://mathematica.sns.it/) è possibile scaricare molte altre edizioni (Tartaglia, Clavio, Viviani, Betti e Brioschi).

Sul teorema di Pitagora e le sue generalizzazioni, si può consultare il sito della mostra *Pitagora e il suo teorema*:

http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/primapagina.php

e per utili approfondimenti sul problema delle quadrature, si veda il sito della mostra *Piccola storia del calcolo infinitesimale*

http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/mini_calcolo/primapagina.php

Per una panoramica della matematica greca, che tratta anche di Ippocrate, si rimanda al dossier di Bernard Vitrac *Les géomètres de la Grèce antique*

http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/htm/Vitrac/grecs-index.htm