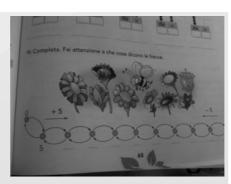


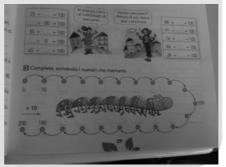
# Tra regolarità e variabili nella scuola primaria

Francesca Ferrara, Ketty Savioli Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano", Università di Torino

#### Il punto di partenza







#### Un percorso (possibile)

- Le attività sono state svolte presso il III Circolo Didattico di Chieri dal 2010 a oggi (4 anni).
- La classe coinvolta è la classe della sezione F, costituita da 21 bambini.

## Un percorso (possibile)

- Creare un percorso didattico che, nel lungo termine, miri a costruire competenze relative alla ricerca e scoperta di regolarità e alla loro traduzione in linguaggio algebrico (come approccio al pensiero relazionale e funzionale)
  - variabile, funzione

#### 'Patterns'

# Perché?

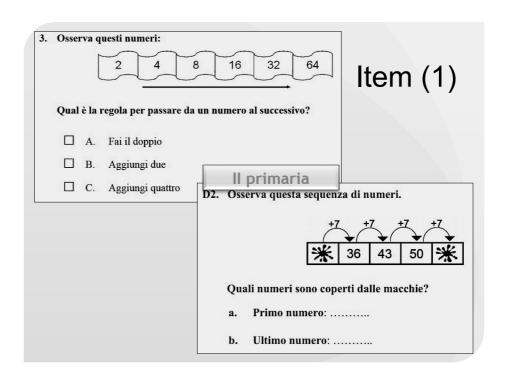
#### Indicazioni Nazionali

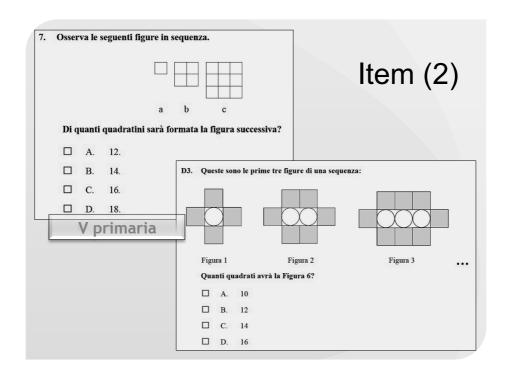
- Relazioni, dati e previsioni
- "Riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure" (obiettivo di apprendimento al termine della classe quinta)

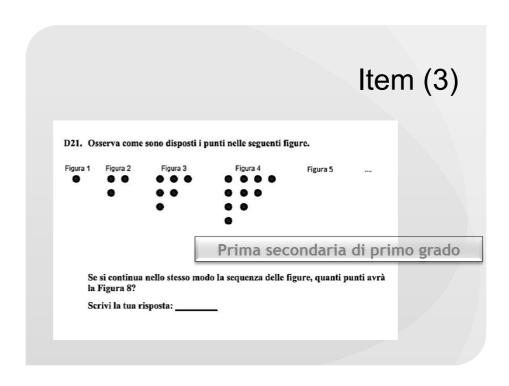


#### **INVALSI**

- QDR Matematica I ciclo 2012
- Ambito di contenuto: Relazioni e funzioni
- "Successioni di numeri, figure, dati: ricerca di regolarità, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche"
  - Tra i processi: "acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (songetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...)"





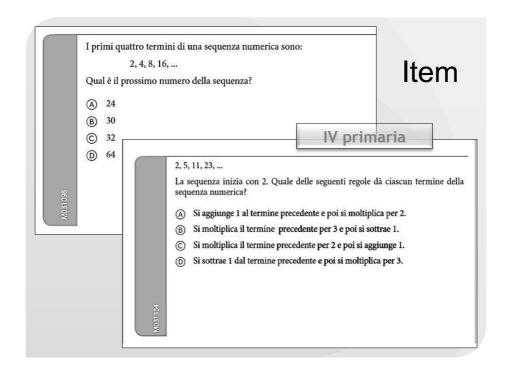


#### **TIMSS**

- QDR 2011 (anno di scolarità 4)
- Dominio di contenuto: Numero
- Area tematica: Sequenze e relazioni
- Conoscenza e abilità correlate

#### **TIMSS**

- "Estendere o trovare i termini mancanti all'interne di sequenze ben definite, descrivere le relazioni fra termini adiacenti in una sequenza e fra il numero indicante il termine nella sequenza ed il termine stesso"
- "Scrivere o scegliere la regola di una relazione, deducendola da alcune coppie di numeri naturali che soddisfano la relazione..."



#### Inoltre

- presenti nei test PISA
- presenti come argomento nodale dei primi anni negli Standards americani (Algebra Standards)

#### Ricerca in didattica

- Studia sia la valenza didattica della ricerca di regolarità per l'avvio al pensiero algebrico
- Sia le tipologie di processi di generalizzazione di studenti in giovane età
  - Carraher, Ferrara & Savioli, Ferrara & Sinclair, Moss & Beatty, Radford, Rivera

#### Laboratorio di matematica

- Matematica 2003 (Arzarello et al., 2004)
  - L'ambiente del laboratorio è in qualche modo assimilabile a quello della **bottega rinascimentale**, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti
- Scuola come laboratorio (Vailati, 1907)
  - come luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a ... mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa

# Lavoro

- individuale
- a piccoli gruppi (2/3 bambini)
- in discussione collettiva

Prima classe

#### Sequenze di numeri

- Semplici sequenze con passo costante (come: 3 5 7 9 11 ...)
- Sequenze di numeri con una regola 'strana' e più 'buchi':
  - 4 10 17 ... 34 ...
  - 4 9 15 ... 30 ...
  - 1 8 5 12 ... 16
  - 7 9 13 19 ... 37

```
4 Maggio 2010

1E SUCCESSIONI DI NUMERI

8 = 310 = 22 = 11 = 16 = 18 = 20 = 22 = 24

La freccia - vuol dire + 2

5 = 3 = 17 = 17 = 522

La freccia - vuol dire + 5

17 = 13 = 9 = 5 = 1

La freccia - vuol dire - 4

15 = 13 = 311 = 9 = 7

La freccia - vuol dire - 4

15 = 13 = 311 = 9 = 7

La freccia - vuol dire - 2
```

```
LE SUCCESSION!

Una successione & una fila di numeri con una regola.

7-14-> 21-> 28-> 35-> 42-> 49

La freccia vuol dire+7

B 5 7 9 11 13 15 17 19 21 28

La regola é +2

15 12 9 6 3 0 -3 -6 -9 -12-15

La regola é -3

20 17 14 11 8 5 2 -1 -4 -7-0

La regola é -3
```



Una successione speciale...

4 10 1725 3444.

Questa successione e molto

specale! Non agiungo sempre

lo steso numero ma parto

da A, aggiungo + 6 e arrivo a

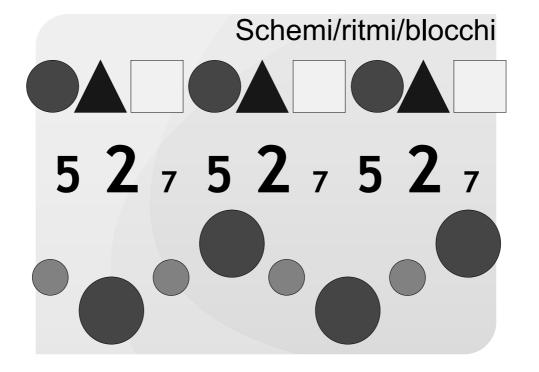
10. Poi aggiungo + 7 e arrivo a

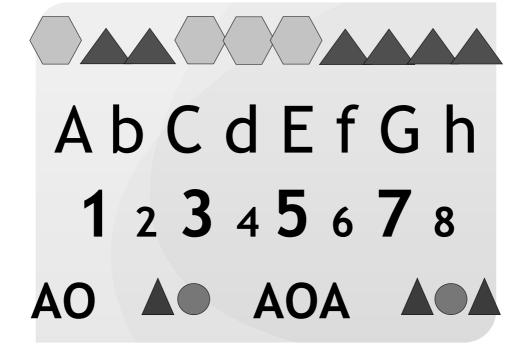
17. Ne aggiungo sempre uno

più di prima Posso andare

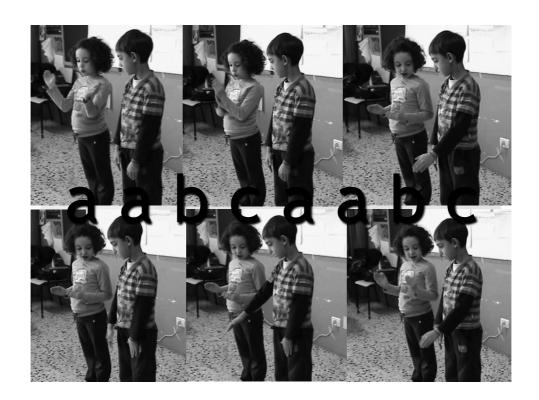
avanti all'infinito.











# Sequenze di figure

- La figura mancante (1 8 5 12 9; "+7 -3")
- Edifici di cubetti: 2n+1
- La scatola di fiammiferi: 3n+3
- I tappi sulla scacchiera: 2<sup>n</sup>
- Che strana combinazione: 6n-2
- Numeri triangolari e multipli di 3
- Geronimo e i triangoli: 2n+1
- Pietro e Paolo: 2n+3
- Il pittore tutto matto... : 4n+(n+1)(n+2)/2

# Edifici di cubetti (2n+1)





# Edifici di cubetti (2n+1)



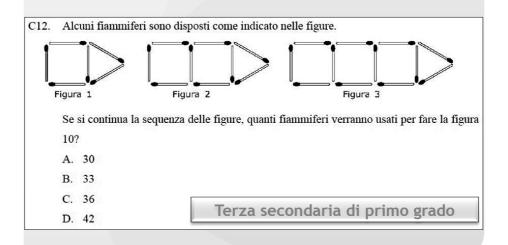
Lara

"Il numero di cubetti che sta sopra è sempre uguale al numero di cubetti che sta sotto meno uno"

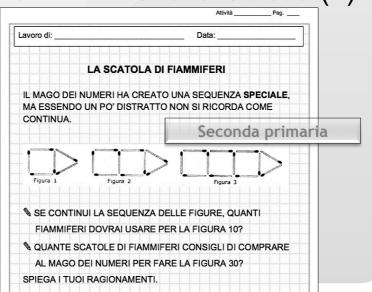




# Dall'INVALSI alla Classe (1)



# Dall'INVALSI alla Classe (2)



# Dall'INVALSI alla Classe (3)



# Diversi quesiti

- Trovare una Figura più lontana da quelle date (ma specifica)
- Risolvere problemi, mettendo in gioco la competenza acquisita

#### Formulazione dei quesiti

- "Se continui"
- "Quante scatole di fiammiferi consigli"

(devoluzione - coinvolgimento)

#### Diverse richieste

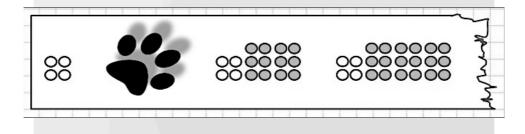
GERONIMO VUOLE COSTRUIRE UNA FIGURA GRANDE DELLA SEQUENZA. SPIEGAGLI COSA DEVE FARE. FIGURA GRANDE

PIETRO HA UN AMICO CHE VIENE DA UN'ALTRA SCUOLA. SPIEGA AL SUO AMICO COME PUÒ TROVARE VELOCEMENTE IL NUME DE LA GENTA DE LA SEQUENZA

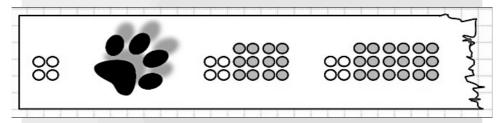
SPIEGATE A UN VOSTRO AMICO IL METODO CHE DEVE SEGUIRE PER TROVARE UNA FIGURA DELLA SEQUENZA.

UNA FIGURA

## Che strana combinazione



#### Che strana combinazione



- 6(n-1)+4
- 6n-2 ("i due immaginari")

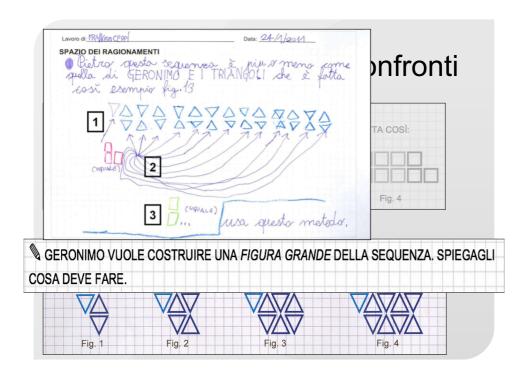
# "velocemente... una figura"

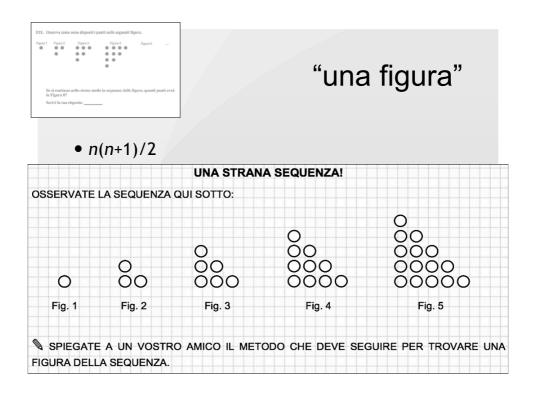
• 2n+3

	PI	ETRO E PAOLO	
PIETRO HA VIST	TO SUO FRATELLO PAO	LO DISEGNARE UNA SEQU	JENZA FATTA COSÌ:
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4

PIETRO HA UN AMICO CHE VIENE DA UN'ALTRA SCUOLA. SPIEGA AL SUO AMICO COME PUÒ TROVARE *VELOCEMENTE* IL NUMERO DI QUADRATI DI UNA FIGURA DELLA SEQUENZA.

• 2n+3			Confronti
	PIE	TRO E PAOLO	
PIETRO HA VISTO S	SUO FRATELLO PAOL	O DISEGNARE UNA SEQ	UENZA FATTA COSÌ:
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4
a 2m. 1			
• 2n+1	GERON	IMO E I TRIANGOLI	
GERONIMO VUOLE	STUDIARE LA SEQU		
V			
Fig. 1	Fig.2	Fig. 3	Fig. 4





# Verso la generalizzazione

• "Una" diventa Calimero, Fantasma, Pippo...

Terza classe

#### In nuove attività

- Nuovi quesiti, ad esempio: Risolvere il problema inverso
  - Carolina e le caramelle
  - Ti ricordi di Tobia?

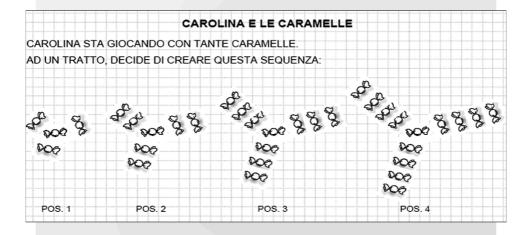
#### Nuove richieste

• "in modo diretto"

CAROLINA VUOLE SPIEGARE A PAOLO COME PUÒ TROVARE IN MODO DIRETTO UNA FIGURA IN UNA POSIZIONE QUALUNQUE E QUANTE CARAMELLE GLI SERVONO, MA NON SA COME FARE. AIUTALLO URA

POSIZIONE QUALUNQUE

#### Carolina e le caramelle



#### Carolina e le caramelle

#### • 3n+1

- QUANTE CARAMELLE SERVONO IN TUTTO PER LA POSIZIONE 10 ?
- CAROLINA VUOLE SPIEGARE A PAOLO COME PUÒ TROVARE IN MODO DIRETTO UNA FIGURA IN UNA POSIZIONE QUALUNQUE E QUANTE CARAMELLE GLI SERVONO, MA NON SA COME FARE. AIUTALA TUI

	Attivité Pag. 4
Lavoro di: Lara e Francesco	Data: 23/1/2012
SPAZIO DEI RAGIONAMENTI	> - 01
Mella posizione Dei	Bustannes DA
Ravamelle. Albiamo otter	ruto 31 perche
ci sono 10 earamelle i	
+	3
ema un centre.	
Moi albiamo scelto le	
3:019 956 819 ei sarann	
numero più uno. Perch	
aggiungeis sempose il,	
della posizione più centrale. Penche soni sigura ei	
centrale. Perche soni Sissura ci	sono il numoro di conomelle

"Nella posizione 10 ci saranno 31 caramelle. Abbiamo ottenuto 31 perché ci sono 10 caramelle in ogni fila e una in centro."

	AllivitàPa	
Lavoro di Lara e Francesco	Data: 23/1/2012	
SPAZIO DEI RAGIONAMENTI		
Mella posizione 10 ei s	saranno 31	
Raramelle. Alliamo atteniu		
		1
ci sono 10 earamelle un	vigni sua e	1
ma in centre.		
Noi albiamo scelto la	marizione	
3:019 956 819 ei saranno		2
numero più uno. Buche		
aggiungere sempore il tri		
della posizione più un centrale Renebe sogni Sigura ei se	ma il mumora di corron	nel
SOV VOLAXE JUETENE DOME SUXUES ME SE	776 10 170671616	

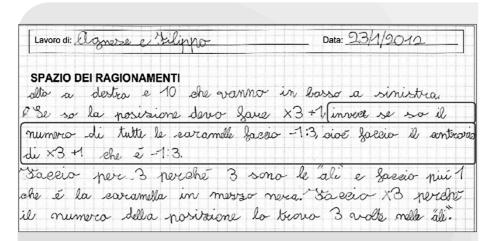
"Perché la regola è aggiungere sempre il triplo del numero della posizione più uno, la caramella centrale."

Lavoro di Rinky e Simone	Alliviti Pag -
SPAZIO DEI RAGIONAMENTI	
centro. D La fie	zura nella posizion
10 hain tutto 31 ca	ramelle, perche deri
moltiplicare la pos	
righe che contengone	o il numero della
posizione di car am	elle joir una car.
speciale. F. Per tron	rare una Jig. qual
que della requenza devi sare: la posizio	se lai la posizione
devi Jare: la posisio	one × 3 + 1 perche

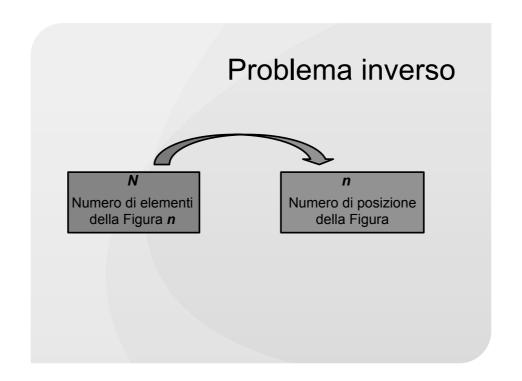
"Per trovare una figura qualunque della sequenza se hai la posizione devi fare: la posizione x 3 + 1"

Lavoro di:		Data		
SPAZIO DEI F	RAGIONAMENTI			
molty	lichi ogni	riga che	sono 3+1,	.che
	caramella			
	riga di so comelle ug			rco P
invece	hai il nur	mero totale.	di caran	nell
dehri 1	vina togl	LETE la X OT	In most	10
. 1	i Sai - 1 poi	1 . 1	00 010	.0

"perché moltiplichi ogni riga che sono 3 + 1 che è la caramella in mezzo."



"invece se so il numero di tutte le caramelle faccio -1 : 3, cioè faccio il contrario di x 3 + 1 che è -1 : 3."

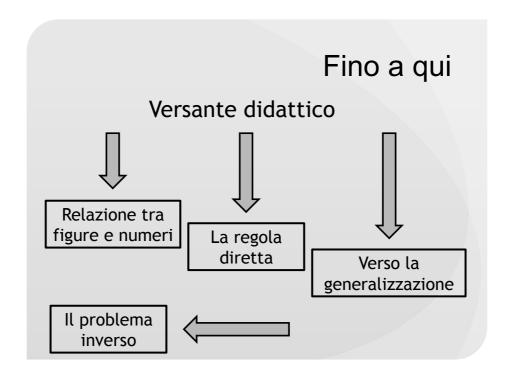


# Filippo



# Filippo

da 22 ne togli 4 e ti viene 18 e è il primo gruppo... poi da 18 ne togli 6 e ti viene 12 che quindi sono 4 e una riga da 6 poi... a 12 ne togli 6 e fa 6 quindi sono 4 e 2 righe da 6 e... poi fai 6 meno 6 che fa 3 righe da 6 più 4



# Quarta classe

## Nuovi compiti

- In essi la variabile *n* cambia di 'status'
  - Una nuova piastrella
  - La grande festa
  - Triangoli
  - Cubi

# UNA NUOVA PIASTRELLA LA DITTA "RAVVIVA" DECIDE DI CREARE UNA NUOVA LINEA DI PIASTRELLE SU MISURA. LE PIASTRELLE POSSONO QUINDI AVERE UNA GRANDEZZA DIVERSA. AD ESEMPIO, LA PIASTRELLA PIÙ PICCOLA È FATTA COSÌ: SI TRATTA DI UNA PIASTRELLA CHE LA DITTA IDENTIFICA COME PIASTRELLA 3×3.

#### Come cambia il compito?

- È fornito un solo esempio (tranne in un caso)
- L'informazione sulle variabili è espressa nel testo
- Il legame tra le variabili è espresso nel testo
- Il compito richiede di lavorare in modo diretto su tale legame

#### Come cambia *n*?

- n non indica più il numero della Figura (o la sua posizione)
- Sia *n* sia *N* sono espresse nel testo
- N non è più il numero di pallini/quadratini che compongono una figura
- N dipende da n
  - N = f(n)

# $n \times n$ , $n \in N$

n×n	n	N
3×3		
?		
5×5		
?		
50×50		
Qualunque ?!?		

# N = 4n - 4

n×n	n	N
3×3	3	8
5×5	5	16
•••		
50×50	50	196
PIPPO×PIPPO	PIPPO	PIPPO×4-4

#### N = 4n - 4

n×n	n	N
3×3	3	8=3×4-4
4×4	4	12=4×4-4
5×5	5	16=5×4-4
6×6	6	20=6×4-4
	•••	•••
50×50	50	196=50×4-4
PIPPO×PIPPO	PIPPO	PIPPO×4-4

colorati perche, se moi rogliamo sapere im modo diretto la cornice di qualsiasi piastrella : (da moi rappresentata con un quadratimo) dobbiamo cercare immanzi tutto di scoprire il numero totale della limea ampleta. Sapendo che la sigura e um 5×5 sappiamo che la limea completa e di 5 perché si dice 5×5 quando ci sono (in questo caso) 5

productioni sia im orizzontale eV in verticale, Quindi noi abbianno calcolato 5×4 (4 sono i lati della figura 5×5) = 20. Poi per fare im modo che il risultato fesse giusto dobbiano sottrarue (a 20) 4 perche sono i 4 angoli della comice che ci se rivono per formare 5. 20-4 infine fa 16, quindi adesso noi sappianno che la cornice della sigura 5×5 e costituita da 16 quadratini colorati.

Caso 5 × 5

La regola sarebbe quella di scoprire quanto sia agni lato della sigura (um mumero che mon sappiamo la rappresentiamo con un punto interna gativo). Quindi ? dobbiamo moltiplicardo per i lati della sigura. (? x 4) (lati della sigura. 4) - i 4 quadratimi che ci serromo per completare ? = ?. In questo modo siamo im grado di capire con tutti i numeri quant'e il risutato totale. Quindi per esempio in questo casa

#### La regola

DELLA	NUMERO QUADRATINI LATO PIASTRELLA	NUMERO BUADRATINI CORNICE	CORNICE 10	RUADRATIN TOTALI DELLA PICURA	CORNICE 20	MITARDAUD [HONAIB	HETA PERIMETRA FIGURA
3×3	3	8	(3×4) -4=8	9	[(3×2)+(3×2]-4:9	1	4
4×4	4	12	(4×4)-4=12	Nθ	[(4×2)+(4×2)]-4=8	4	6
81×81	81	320	(81×4) - 9=320	6561	[(81×2)+(81×2)]4=		160
1251 ×1251	1251	5004	(1251×4)-+=50	1565001	[(1251x2)+(1251x2)]-4=	1559997	2 502
4807 ×4807	4807	19224	(4807×9)-4=1922	4 2310F24	(4807×2)+(4807~)	23088025	96-12
56879x56879		2279 16	(5687941)422	1	[58892]+(5899)]		113958
AIN/STAIN/ AIN/STAIN	AINSTAIN	AINSTAIN	1	4F AINSTAIN	7 3/4		
FRAGOLEX FRAGOLE	FRAGOLE	FRAGOZE	(ARKOLEXY)-1	FRAGOS	-	LESTA FRACIO	
POGRAXPOGRA	POGBA	POGBA	(Pageag)-4=	POGBA	[(BGBA x2)+(ROGBA	-	POGBA
CUCREXCUERE.	CUCRE	CUORE	(workery) 4	= COOPE	[custo2] (cus		CURRE
MESSIX MESSI	ME551	MESSI	(MESS/44)-4:	= MESSI	(nessixa)+(nessix		HESS 1
le .	- FIORELLAND	FIORE	(FIOPERY)-4	FIORE	(FLORES)+(FLORES)	4 FIORE	FIORE
PIRLOXPIRLO	The second secon	PIRLO	(RRIOXL)-4	PIRE	[PIRLOX2]+(PIRLOS)	4 PIRLO	PIRLO

dimensione della pia stella	HUNGRO QUALRET TI DELLA FIGUE RA	NUTERO QUADRATINI	NUMERO QUADRET TI CORHICE	CALCONO PER ARRIVAREALLA CORNICE		CALCOLO
343	9	3	8	(3×4)-4	1	(8+4):4
4×4	16	4-	12	(4x4)-4	4	(12+4):4
5*5	25	5	16	(5A)-4	9	(1644):4
6 ×6	36	8	20	(6x4)-4	16	(2044):
7×7	49	7	24	(2x4)-4		( )
8x8 .	64	8	2.8	10 3	26	24+4)
9×9	81	9	32	-	36	28+92
ΔΟΧΔΟ	100	10	363	1/1 3 1	34	(32+4)
16×16	256	16	60	2. 1.	196	(9644):4 (6044):4
50×50	2500	50	196	(50x4)-4		(196+4):
16596×100	276323246		66280	(16696x4)-4		
AXA	AXA			(AX4)-4 (A		
KETTINKETT	KETTYXKETTY	KETTY	(KETTY×+)-4	(KETTTSA) -4 (KE	לינבא× אדר	677×4)
nella	eolonna	del "norero	QUASRETTI D			(KETT) ++)

L'arte del fare matematica consiste nel trovare il caso speciale che contiene tutti i germi di regolarità

(David Hilbert)

## **GRAZIE**

francesca.ferrara@unito.it ketty.savioli@istruzione.it