Percorsi di dottorato di ricerca in Didattica della Matematica nella Scuola Internazionale di Dottorato in Formazione della Persona[1]

Ruggero Ferro, Università di Verona
Mario Marchi, Università Cattolica del Sacro Cuore Brescia

0) Introduzione

Perché un dottorato di ricerca in didattica della matematica in una scuola di dottorato in formazione della persona?

Perché non all'interno di un dottorato di ricerca in matematica?

O semplicemente un dottorato di ricerca in matematica senza menzionare esplicitamente la didattica?

Perché non una scuola di perfezionamento per la formazione dei docenti di matematica?

O per la formazione di formatori di docenti di matematica?

Se deve essere un dottorato di ricerca, di che tipo è?

Questo sono le domande che ci si può chiedere venendo a sapere che presso l'Università di Bergamo nella Scuola internazionale di Dottorato in Formazione della Persona si sono sviluppati quattro percorsi di dottorato di ricerca in didattica della matematica, uno già concluso, gli altri tre che stanno per terminare.

Non intendo rispondere subito a queste domande, ma attraverso una serie di considerazioni che partono da un veloce panorama della situazione in cui ci muoviamo, per poi notare alcune caratteristiche dei dottorati di ricerca e della didattica della matematica, per concentrarsi infine sulla ricerca che coinvolge i fondamenti della matematica. Invece affronterò subito un'ulteriore domanda.

Perché proprio a Bergamo?

Presso l'Università di Bergamo c'era già un dottorato di ricerca che intendeva unificare le problematiche riguardanti le scienze della persona, naturalmente inclusa la formazione, adottando una prospettiva multidisciplinare. Così questa scuola di dottorato di ricerca considerava e considera questioni che riguardano il lavoro (inteso come impegno di crescita della persona e non solamente nei suoi risvolti giuridici), problemi di formazione (anche da un punto di vista pedagogico), di comunicazione e integrazione in una società multietnica, questioni legate ai problemi della conoscenza, in particolare matematica, intesa anche come linguaggio della scienza, chiave di comprensione di procedure conoscitive e fulcro di problemi educativi, intellettuali e culturali. Poiché questa scuola di dottorato di ricerca metteva a disposizione un paio di borse di dottorato per approfondire anche l'apporto matematico al progetto generale del dottorato stesso, gli autori della presente relazione

---

[1] Questo lavoro è una messa a punto della relazione tenuta durante il XXX Convegno Nazionale dell'UMI-CIIM. Nel corpo più piccolo sono i commenti alle immagini proiettate che sono qui riportate in corpi più grandi.

hanno deciso di accettare la sfida che veniva lanciata.

1. Situazione al contorno

- Crisi dei sistemi scolastici.

Che i sistemi scolastici siano in crisi, in particolare d'identità, è un fatto riconosciuto da quasi tutti, anche se le analisi e i rimedi proposti possono essere i più diversi.

La scuola è a volte ritenuta un parcheggio di giovani che sgravi le famiglie dal dover pensare a loro, fintantoché non entreranno nel mondo del lavoro (con un'idea di lavoro come fardello pesante e sgradevole piuttosto che come modo di realizzarsi e di esprimersi), parcheggio di giovani fino a età sempre più avanzate perché devono vivere accuditi più dei loro genitori. Così la scuola diventa un peso non produttivo, da sopportare per il quieto vivere, e deve avere il minimo costo compatibile con questo scopo.

La scuola può essere considerata come luogo di socializzazione, dimenticando che ogni esperienza vitale in una società comporta una socializzazione. Se si vuole riservare tale compito alla scuola vuol dire che si mira a un particolare tipo di socializzazione, che non è individuato, né individuabile, poiché cambia da istituto a istituto, a meno che non nasconda un indottrinamento di stato.

La scuola può essere vista come preparazione del cittadino, nel senso di suddito diligente che s'inserisce funzionalmente in un sistema organizzato.

La scuola può essere considerata un mezzo per mettere a disposizione dei giovani tutto il patrimonio di esperienze, di considerazioni, organizzazione e realizzazioni elaborate e vagliate dal divenire storico dell'umanità, in modo che il giovane non debba ripartire ogni volta dall'età della pietra, ma possa comprendere e inserirsi nella realtà attuale. In quest'ottica sono fondamentali docenti competenti e aggiornati nelle singole discipline.

- Confusione normativa.

Recentemente si è avuto un susseguirsi di modifiche normative e indicazioni per il sistema scolastico e universitario italiano. Se è auspicabile che il sistema si aggiorni e si adegui al progredire dei tempi, altrettanto non si può dire di modifiche dovute a divergenze, anche ideologiche, o a una limitata comprensione dei problemi. Queste modifiche a raffica confondono chi deve operare all'interno del sistema, lasciando disorientamento e difficoltà nell'adeguarsi a novità che non colgono pienamente le esigenze.

Le normative, che pure possono essere buone, non saranno incisive senza una partecipazione fattiva di coloro che devono realizzarle nel quotidiano: indicazioni eccellenti date in mano a personale docente che neppure le capisce non possono avere alcuna ricaduta positiva, mentre docenti preparati e competenti nelle singole discipline possono motivare e far comprendere bene gli argomenti centrali cogliendo quello che è rilevante anche al di là di un misero programma. La determinazione della centralità di un argomento dovrebbe non essere strettamente vincolata dalla tradizione, ma seguire piuttosto dalla competenza nella propria disciplina.

- Formazione della persona.

Aderendo a una visione che vede il sistema scolastico dedito al massimo arricchimento delle persone rendendo loro disponibile quanto l'umanità ha elaborato finora, si pone il problema di come realizzare un tale obiettivo.

- Formazione iniziale e in itinere dei docenti.

Le considerazioni precedenti mettono in luce quanto sia importante e determinante il ruolo di docenti ben preparati disciplinarmente, sicché assume grande rilevanza la loro formazione sia iniziale che in itinere.

2. Tipologie dei dottorati di ricerca

- Borse di studio

Quando furono introdotti in Italia i Dottorati di Ricerca, venivano a sostituire il sistema delle borse di studio, e, in molti casi, non furono che un nuovo nome per una figura che aveva i suoi aspetti positivi. Tra questi aspetti, che si ritrovano in vari tipi odierni di dottorato di ricerca, ne colgo alcuni.

- Continuare all'università in attesa di aperture accademiche, preparandosi per queste studiando.

- Collaborare con il docente/gruppo conferente la borsa per le sue finalità di studio/ricerca, secondo diverse modalità che possono dipendere dagli ambiti.

Ad esempio

  - Collaborare alla raccolta e analisi di dati per indagini.
  - Ordinare e sistemare materiale disponibile.
  - Ricerca bibliografica (ragionata).
  - Sistemazione redazionale di pubblicazioni.
  - Partecipazione a gruppo operativo di un progetto.

Viste queste tipologie, e l'affacciarsi dell'idea che la carriera accademica non sia l'unica perseguibile dopo un dottorato di ricerca, non risulta così peregrino proporne una ulteriore che per vari versi le ingloba, tanto più che, a volte, non si capisce dove sia finita la ricerca.

  - Apprendistato.

- Studio e risoluzione di un problema aperto con la guida di un tutor che ha indicato il problema.

Questa è una tipologia piuttosto diversa dalle precedenti, ben conosciuta nell'ambiente matematico, e a livello internazionale, e che avrebbe dovuto segnare il passaggio dalle borse di studio ai percorsi di dottorato di ricerca, differenziando i relativi concetti. Questi avrebbero dovuto prevedere specifiche lezioni di avvio al tema di ricerca e al problema aperto da affrontare e tempi adeguati per individuare una soluzione, o almeno avvicinarla indicandone difficoltà e strade d'attacco.
Nota amara. Molte tipologie, che poco hanno a che vedere con un vero dottorato di ricerca mancando di affrontare problemi aperti, drenano importanti risorse dal traguardo inteso a cui queste dovrebbero essere destinate. Ricerca e sviluppo non sono la stessa cosa, e pochi sanno cosa sia realmente la ricerca i cui esiti in genere non sono né prevedibili né programmabili.

3. Approcci alla didattica della matematica

- Inquadramento in una teoria di pedagogia generale.

Modalità frequentemente sostenuta come approccio alla didattica. Studiare le modalità di insegnamento potrà avere un interesse accademico, ma è di scarso aiuto al docente se si mantiene nel generale: tutti sappiamo che nei rapporti docente discente il primo deve saper comprendere e ascoltare il secondo, ma per fare ciò bisogna sapere di cosa si sta parlando e perché se ne sta parlando, e la tuttologia non è di alcun aiuto.

- Indagini su insegnamento - apprendimento - valutazione.

Questo è un altro approccio accademico al problema didattico. Certamente tali indagini forniscono informazioni interessanti, e acquistano significato nella misura in cui sono legate agli obiettivi dell'insegnamento - apprendimento - valutazione, differenziati da materia a materia e determinabili solo conoscendo a fondo le discipline a cui vengono applicati.

- Proposta e studio di percorsi didattici.

Altro tipo di attività moto interessante per la pratica didattica. Per poterli valutare richiedono la piena conoscenza degli obiettivi didattici, conoscenza acquisibile sono attraverso una ampia comprensione delle singole discipline, in particolare della matematica.

- Analisi delle motivazioni e difficoltà esterne ai concetti matematici.

A volte si crede di cogliere il motivo principale degli insuccessi in matematica in difficoltà esterne ai concetti matematici (l'ambiente, le emozioni, la stanchezza, il disinteresse, la noia), e si cerca di migliorare i risultati promuovendo l'interesse con motivazioni esterne alla matematica (premi, voti, esenzioni da compiti, e quant'altro). Gli aspetti, citati ad esempio, sono ben reali, hanno una loro influenza sulle carriere scolastiche, e sono adottati nella pratica scolastica, ma non giustificano perché si debba studiare la matematica: funzionerebbero anche abolendo la matematica dalle discipline scolastiche.

- Analisi delle motivazioni e difficoltà matematiche dei concetti matematici.

La matematica non si è certo sviluppata per fare prendere voti buoni o cattivi agli studenti! L'umanità ha elaborato i concetti matematici per affrontare problemi concreti e i problemi a loro volta posti dalle soluzioni individuate. Inoltre a volte le idee elaborate dalla matematica sono abbastanza complesse, per cogliere al meglio le problematiche affrontate, e si articolano in vari aspetti e sfaccettature. Così la comprensione di una certa idea non presenta due soli stati, acquisita o meno, ma si compone di vari livelli, estensioni e comprensioni parziali. La soddisfazione di aver compreso qualcosa di rilevante, che è poi la molla più forte che spinge all'impegno, può essere attivata aiutando il discente a navigare nella complessità dei singoli concetti vedendone le motivazioni, l'articolazione complessiva e le conseguenze che rispondono a rilevanti domande vitali. Per offrire un tale aiuto bisogna conoscere i perché, i come e gli scopi matematici dei vari sviluppi della matematica. Una profonda cultura matematica in questa direzione è indispensabile per un insegnante, ben oltre la mera esposizione dei temi in programma. Ma la matematica stessa ha già elaborato completamente questa direzione o vi sono ancora interessanti problemi aperti?

4. Ricerche originali di matematica per la didattica.

- Esempi di analisi delle motivazioni, difficoltà e finalità matematiche dei concetti matematici.

Perché si studiano i numeri naturali? Cosa sono? A che servono? Kronecker disse che i numeri naturali ce li ha dati Dio, mentre il resto è costruzione dell'uomo. Questa affermazione indica che non era ben chiaro cosa fossero i numeri naturali, come sono stati costruiti e sviluppati, e certamente non permette di giustificarli nei loro dettagli e aspetti, creando un serio problema didattico: se un ragazzo è disorientato di fronte a questo argomento (il che accade abbastanza spesso) dobbiamo abbandonarlo perché è nato male senza i numeri, o c'è un modo di aiutarlo? Oggi tuttavia, grazie agli sviluppi delle ricerche sui fondamenti della matematica, si possono affrontare gli interrogativi proposti. E' certamente un interesse vitale per gli umani poter apprezzare le quantità di elementi di una collezione, anche quando la loro quantità non può essere colta a colpo d'occhio (con il colpo d'occhio molti animali sanno fare meglio degli umani). Ma per confrontare e così apprezzare quantità di elementi bastano confronti mediante corrispondenze biiettive (eventualmente in un sottoinsieme di uno dei termini del confronto). A volte è impossibile individuare concretamente tali corrispondenze, e si ricorre a corrispondenze con quantità prefissate, eventualmente ottenute mediante elaborazioni mentali. Per ottenere queste quantità campione può essere utile adottare il sistema molto controllabile di considerare un elemento alla volta, e continuare passando a un ulteriore elemento (Peano). Si può rendere più efficiente il ripetuto passaggio a ulteriori elementi aggiungendone molti assieme in modo prefissato per non perdere i controllo di quello che si sta facendo. Lo strumento di cui l'umanità si è dotata per realizzare queste utili operazioni è costituito da ciò che chiamiamo numeri naturali, che permettono abbastanza agevolmente di gestire le varie operazioni di aggiungere o togliere (eventualmente ripetutamente), fintantoché si vogliono apprezzare quantità finite (in senso ingenuo) di elementi. L'addizione e la moltiplicazione diventano operazioni fondamentali. Il prodotto di due fattori maggiori di uno è maggiore di ciascuno dei fattori, come c'era da attendersi. Inoltre, non tutti i numeri sono prodotto di due numeri strettamente minori, giustamente, se si vogliono considerare collezioni di elementi indivisibili, con le conseguenti problematiche relative ai numeri primi e alla divisibilità. Opportunamente la divisione non è sempre possibile, come deve essere considerando elementi. Ogni numero naturale è finito, in senso ingenuo, e dunque siamo convinti di poterlo dominare bene e controllare, almeno in teoria, anche se questo è maggiore del numero di tutte le possibili combinazioni di particelle elementari dell'universo. Non solo, ma la quantità dei numeri naturali è illimitata: quanto si deve procedere per trovarli tutti? Qui sorgono la nozione matematica d'infinito e la gerarchia degli infiniti (Cantor), e anche gli iperfiniti (Robinson), ma Peano, con il suo assioma d'induzione, ci suggerisce di considerare i naturali come il più piccolo insieme che permetta di gestire l'esperienza del contare.

Se poi non si vogliono apprezzare solo quantità di elementi indivisibili, ma quantità di oggetti indefinitamente divisibili, i numeri naturali non bastano, ma si potrà ricorrere a coppie ordinate di numeri naturali, uno che indichi in quante parti uguali va divisa l'unità e l'altro che ci informi di quante di queste parti vanno considerate, e questa sarà la base su cui poi edificare l'edificio dei razionali assoluti con le loro operazioni che sono ben altro delle operazioni con lo stesso nome tra numeri naturali.

Questo non è l'unico esempio che si può presentare: molto più brevemente accennerò al problema della continuità. Che legame c'è tra la nozione di continuità del vivere quotidiano (mancanza di interruzioni) e la nozione matematica di continuità? Come precisare la nozione di vicino? E' relativa (più vicino di) o assoluta (definitivamente vicino, vicinissimo), se ha senso? Quali dei seguenti slogan coglie la nozione matematica di limite, e in che senso: a) più m'impegno meglio faccio, b) se mi impegno moltissimo faccio benissimo, c) so impegnarmi abbastanza da riuscire a fare meglio di quanto richiesto.

Altri esempi possono riguardare il ruolo delle funzioni polinomiali e la loro fattorizzazione, o le nozioni di verità ed efficienza, o il concetto di geometria che emerge da domande e risposte a questionari. Questi ultimi esempi saranno alla base delle presentazioni in un laboratorio di questo stesso incontro.

Avrete notato come nel tracciare lo sviluppo del primo esempio, siano emerse implicitamente le motivazioni, le modalità di realizzazione e le finalità dell'itinerario, utilizzando osservazioni note all'interno della matematica anche se, a volte, di acquisizione relativamente recente. Anche gli altri esempi, appena accennati per restare nei limiti previsti per questa presentazione, se adeguatamente sviluppati consentono di indicare motivazioni, modalità e finalità di carattere squisitamente matematico. A volte però, queste esigenze non ricevono una risposta completa dalla matematica conosciuta, e allora si apre il campo di ulteriori ricerche matematiche originali per poter rispondere.

- Legami con la filosofia della matematica (cos'è la matematica?) e con i fondamenti della matematica (su cosa si basa e come si giustifica la matematica?).

Se uno si sofferma a meditare sugli esempi appena presentati, si accorge che continuando a scavare portano a domandarsi cos'è la matematica, su cosa si basa e come la si giustifica. Queste domande chiamano chiaramente in campo la filosofia della matematica, lo studio sui fondamenti e l'epistemologia della matematica. Ma queste discipline, che non propongono una risposta univoca, ma si articolano considerando anche le esigenze cui devono rispondere le varie teorie e lo sviluppo storico, non rappresentano un distacco dal problema didattico, ma un complemento imprescindibile dello stesso: infatti, se un docente spiega consapevolmente la matematica è costretto a domandarsi perché sviluppa un certo argomento e perché in questo modo, e per rispondersi fa proprio filosofia della matematica.

- Problemi matematici aperti nell'itinerario abbozzato che giustificano un percorso di dottorato di ricerca.

Ho già ricordato come certe domande sulle motivazioni, modalità e finalità di molti percorsi matematici si possano ritrovare in studi matematici anche relativamente recenti, e ho detto anche che, a volte, ci si scontra con problemi matematici ancora aperti e, pertanto, adatti a giustificare un autentico percorso di dottorato di ricerca. Come mai, se ci sono problemi matematici aperti, questi non sono affrontati dall'usuale ricerca matematica che si svolge nei dipartimenti e nei dottorati matematici? Forse vale la pena osservare che la matematica che un insegnante deve conoscere è diversa da quella richiesta a un ricercatore: per certi aspetti è di meno, ma per altri è di più. E' di meno perché l'estensione degli argomenti matematici che si possono toccare a scuola non arriva certo a coprire tutto quello che la matematica ha già conquistato, e tanto meno i suoi più avanzati problemi aperti. Ma è anche di più proprio perché bisogna possedere e approfondire le basi della disciplina che permettano di motivarla, giustificarla e rispondere al meglio alle più imprevedibili domande degli studenti. Il ricercatore che affronta problemi matematici aperti molto avanzati deve velocemente portarsi ai limiti delle conoscenza matematiche nel campo che vuole studiare, e, opportunamente, non perdersi a dedicare troppe energie per scoprire le basi di certi concetti che accetta come acquisiti, e di cui ha una chiara visione intuitiva e operativa. Al contrario chi s'interessa di didattica della matematica ha proprio il compito e la necessità di chiarire i concetti basilari della disciplina (quei concetti che ogni persona del nostro tempo dovrebbe saper dominare) con la necessità di motivarli e giustificarli nel modo migliore possibile relativamente alle conoscenze del tempo. E queste conoscenze, come negli altri capitoli della matematica, non sono complete e si basano su ipotesi non definitive, sicché si apre un campo di ricerca in una diversa direzione che è quella (purtroppo poco coltivata) dei fondamenti della matematica.

- Carattere prototipale dei percorsi realizzati.

A parte la convinzione che un'esperienza di ricerca è indispensabile per comprendere l'essenza della matematica (anche se per questo scopo non è necessario che sia completamente originale), per rispondere alle domande tuttora senza risposta nel campo dei fondamenti della matematica, nel senso più ampio possibile, gli autori di questa comunicazione, trovando accoglienza nel dottorato diretto dal Prof. Giuseppe Bertagna, si sono spesi per seguire dottorandi che desideravano affrontare i problemi aperti nell'ottica che ho cercato di illustrare. La dottoressa di ricerca Francesca Baresi lo scorso anno accademico ha completato il suo percorso studiando appunto i temi del rapporto tra intuizione e rigore in geometria. Attualmente, altri tre dottorandi stanno seguendo questo itinerario: la dott. Francesca Bonenti sta cercando di analizzare i concetti di verità ed effettività come si presentano in matematica, la dott. Laura Montagnoli sta studiando la visione di geometria che emerge dall'analisi di risposte e quesiti proposti da vari sistemi d'indagine, infine il dott. Alejandro Cuneo ha ottenuto una dimostrazione originale del teorema fondamentale dell'algebra nel campo dei numeri reali senza far alcun ricorso ai numeri complessi, aprendo così un nuovo percorso didattico per affrontare l'intero argomento della fattorizzazione di polinomi. Naturalmente ciascuno di questi dottorati o dottorandi è stato seguito da un relatore; in particolare la dottoressa Laura Montagnoli è stata seguita dalla prof. Silvia Pianta (che si ringrazia vivamente), mentre gli scriventi hanno seguito rispettivamente Francesca Baresi e Francesca Bonenti (Marchi) e Alejandro Cuneo (Ferro). Questi dottorandi presenteranno i loro risultati durante questo stesso convegno, sicché potrete valutare direttamente voi quanto si è riusciti a ottenere con questi percorsi di dottorato di ricerca. Noi docenti che abbiamo proposto questa iniziativa riteniamo di aver esplorato una via per conseguire conoscenze matematiche critiche per la didattica della matematica, fornendo un prototipo di cosa si può fare in questa direzione.

- Valutazione dei prototipi.

Voi stessi valuterete i percorsi di dottorato di ricerca proposti assistendo alle presentazioni di quanto fatto dai dottorandi nel laboratorio a ciò dedicato. Così potrete cogliere quanto c'è di buono in questo prototipo, ed eventualmente riproporlo e svilupparlo mediante altre iniziative.

5. Conclusioni

Tornando alle domande iniziali, dopo le osservazioni proposte, speriamo di essere riusciti a mostrare come, nel quadro di molte altre iniziative che cercano di rispondere a concrete esigenze della didattica della matematica, nell'attuale situazione ci sia spazio per un dottorato di ricerca in didattica della matematica orientato ad affrontare i temi aperti dei fondamenti della disciplina. Anzi sosteniamo che tale percorso sia necessario per fornire ai docenti conoscenze sempre più approfondite su cui basare le motivazioni, lo sviluppo, e l'accompagnamento degli studenti nel conseguire la preparazione matematica richiesta oggigiorno.