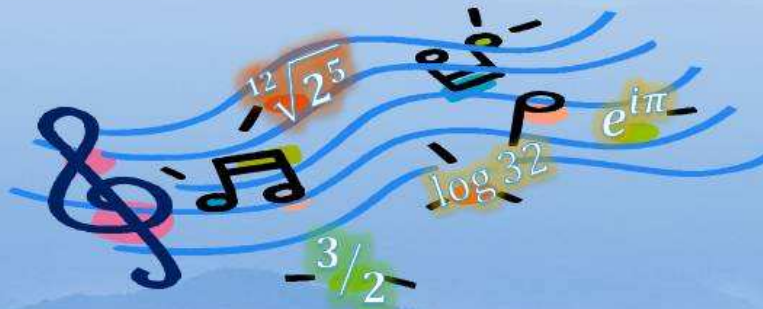


# Facciamo suonare i numeri

Esempi di didattica laboratoriale tra Musica e Matematica



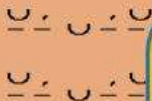
1

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010

## Musica & Matematica

*ritmo*

(suddivisione del tempo)



*pentagramma*

(semiografia, rappres. nel piano)



*scala*

(insiemi numerici)



*durata*

(di note e pause)



*metro*

(durata delle battute)



2

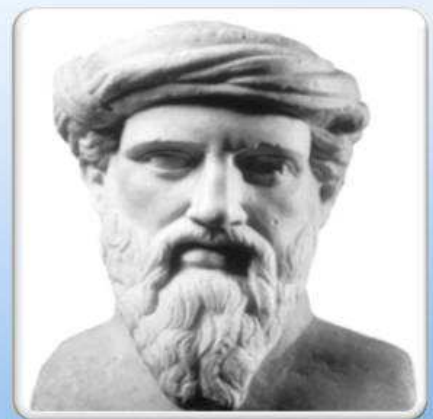
Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010

# Partitura

1	2	3	4	5
$N \hookrightarrow Q$	$\mathbb{R}$ (irrazionali)	$\mathbb{R}$ (logaritmi)	$\mathbb{R}$ (sinusoidi)	$\mathbb{C}$
<b>Quando suona l'intervallo</b>	<b>Il restauro della Scala</b>	<b>Sulla scala a ritmo di Log</b>	<b>Onda su onda su onda...</b>	<b>Suoni prodotti in serie</b>
<i>Pitagora e la musica metallica</i>	<i>Il "temperino" di J.S. Bach</i>	<i>G.W. Leibniz e i "numeri dei rapporti"</i>	<i>J.B. d'Alembert fa luce sul suono</i>	<i>La sintesi di J.B. "Fab" Fourier</i>
				

3

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010



## 1. Quando suona l'intervallo

# PITAGORA E LA MUSICA METALLICA

4

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010



## Paperino e la Matemusica

<http://vimeo.com/13768809>

5

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010

## Piacevoli intervalli



Nota	Lunghezza	Peso	Frequenza	Intervallo
Do	1	1/1	1	Unisono
Fa	3/4	16/9	4/3	Quarta
Sol	2/3	9/4	3/2	Quinta
Do <sub>2</sub>	1/2	4/1	2	Ottava

### intervallo



*distanza* tra note

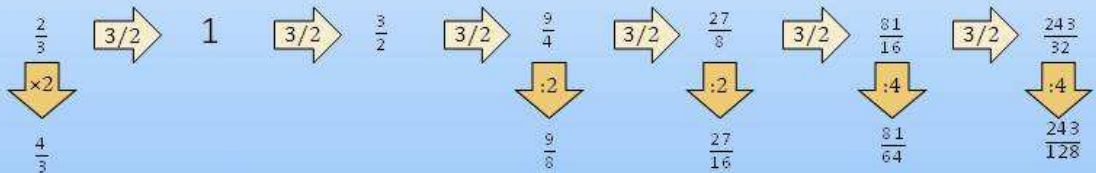
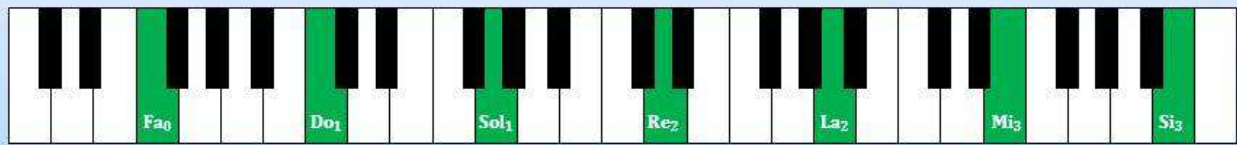


*rapporto* tra le loro frequenze

6

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010

# Note con obbligo di frequenza



scala  
pitagorica



Intervalli tra note consecutive:

- tono (9/8)
- semitono (256/243)

# Teorema fondam. dell'armonia

## Metodo delle terne

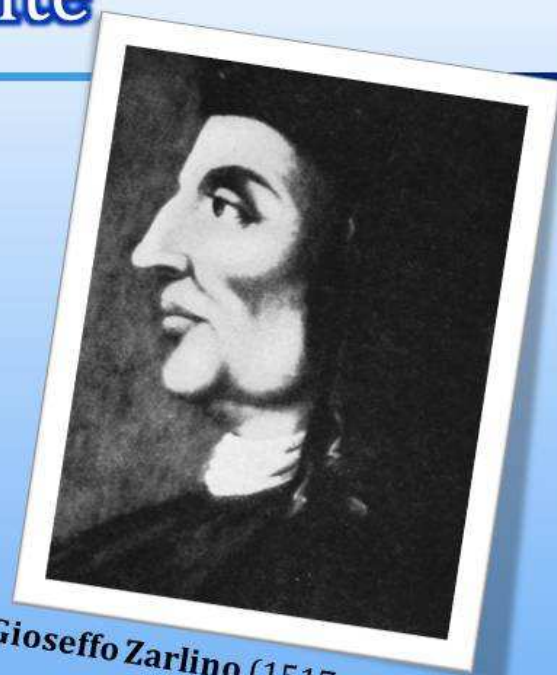
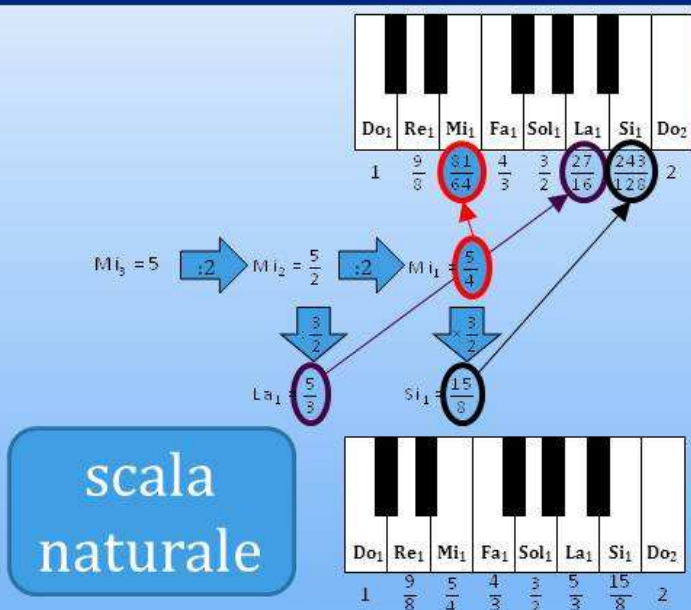
ogni intervallo della  
musica tonale può essere  
espresso nella forma  
 $2^x 3^y 5^z, x, y, z \in \mathbb{Z}$

## Teorema fond. dell'aritmetica

un numero intero può  
essere espresso  
univocamente come  
prodotto di fattori primi

Ogni intervallo della musica tonale può essere  
espresso univocamente come combinazione di  
ottave, quinte e terze maggiori

# Zarlino, naturalmente



Gioseffo Zarlino (1517 - 1590)

# Test 1 - scala pitagorica

1. Esprimi in frazione la frequenza del  $Sol_2$

- ①  $3/2$ 
 ②  $3$ 
 ③  $3/4$ 
 ④  $2/3$

2. Calcola l'intervallo di nona tra il  $Do_2$  e il  $Re_3$

- ①  $9/2$ 
 ②  $9$ 
 ③  $9/8$ 
 ④  $9/4$

3. Verifica se componendo due semitoni si ottenga un tono

- ①  $2^{16}/3^{10}$ , no
  ②  $9/8$ , sì
  ③  $2^8/3^5$ , no
  ④  $3^{10}/2^{16}$ , no

4. Confronta le due note ottenute dal  $Do$  rispettivamente salendo di 7 quinte e scendendo di 5, dopo averle riportate entro l'ottava principale

- ①  $3^7/2^4$ 
 ②  $3^7/2^{-4}$ 
 ③  $3^{12}/2^{19}$ 
 ④  $1$

# Barriere architettoniche (1)

## 1. 2 semitoni $\neq$ 1 tono

Scala pitagorica:

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} < \frac{9}{8}$$

distanza un comma pitagorico:

$$\frac{9}{8} \cdot \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.0136 > 1$$

Scala naturale

$$\frac{15}{16} \cdot \frac{15}{16} < \frac{9}{10} < \frac{9}{8}$$

*t. m.*    *t. M.*

## 2. note alterate **diverse**

Note enarmoniche

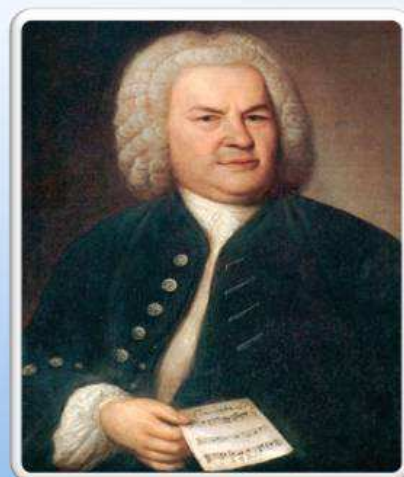
$$Do_1 \xrightarrow{+7 \text{ quinte}} Do\sharp_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^7 \xrightarrow{-4 \text{ ottave}} Do\sharp_1 = \frac{3^7}{2^{11}}$$

$$Do_1 \xrightarrow{-5 \text{ quinte}} Re\flat_{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \xrightarrow{+3 \text{ ottave}} Re\flat_1 = \frac{2^8}{3^5}$$

$$\frac{Do\sharp_1}{Re\flat_1} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$



## 2. Il restauro della Scala



# IL "TEMPERINO" DI J.S. BACH

# Ubi deficit ratio

- Richiedere il semitono costante

$$\frac{Do\sharp_1}{Do_1} = \frac{Re_1}{Do\sharp_1} = \dots = \frac{Do_2}{Si_1} = k$$

equivale a dire che per l'ottava

$$\frac{Do_2}{Do_1} = k^{12} = 2$$

ovvero che

$$k = \sqrt[12]{2} \notin \mathbb{Q}$$

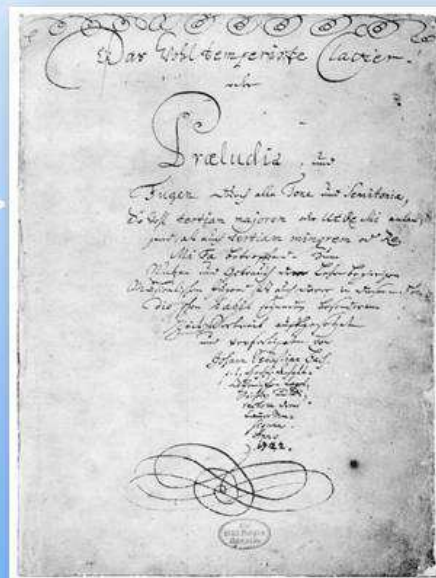


# Il temperino di Bach

- temperamento "buono"

**Clavicembalo  
ben temperato**

- due libri (1722 e 1744)
- coppie preludio + fuga nelle 24 tonalità





## La scala della Scala di Milano

<http://www.youtube.com/watch?v=Riwx-OYkBVg>

## Non è sempre la solita solfa

Sist. equabile	vs.	Sist. naturale
Semitono $^{12}\sqrt{2} \approx 1.059$	<i>poco più grande del</i>	Semitono pitagorico $\frac{256}{243} \approx 1.053$
Tono $^6\sqrt{2} \approx 1.122$	<i>poco più piccolo del</i>	Tono maggiore $\frac{9}{8} \approx 1.125$
Quinta $^{12}\sqrt{27} \approx 1.498$	<i>poco più piccola della</i>	Quinta $\frac{3}{2} \approx 1.500$

Nota	Naturale				Equabile				Equ vs Nat	
	Freq (Hz)	Nota Do	$\Delta$ (Hz)	Nota prec	Freq (Hz)	Nota Do	$\Delta$ (Hz)	Nota prec	$\Delta$ (Hz)	$\Delta$ (%)
Do <sub>1</sub>	264,0	1,00	-	-	261,6	1,00	-	-	-2,4	0,9
Do <sub>2</sub>	275,0	1,04	11,0	1,04	277,2	1,06	15,6	1,06	2,2	-0,8
Re <sub>1</sub>	285,1	1,08	10,1	1,04					-7,9	2,8
Re <sub>2</sub>	297,0	1,13	11,9	1,04	293,7	1,12	16,5	1,06	-3,3	1,1
Re <sub>3</sub>	309,4	1,17	12,4	1,04					1,8	-0,6
Mi <sub>1</sub>	316,8	1,20	7,4	1,02	311,1	1,19	17,5	1,06	-5,7	1,8
Mi <sub>2</sub>	330,0	1,25	13,2	1,04	329,6	1,26	18,5	1,06	-0,4	0,1
Fa <sub>1</sub>	352,0	1,33	22,0	1,07	349,2	1,33	19,6	1,06	-2,8	0,8
Fa <sub>2</sub>	366,7	1,39	14,7	1,04					3,3	-0,9
Sol <sub>1</sub>	380,2	1,44	13,5	1,04	370,0	1,41	20,8	1,06	-10,2	2,7
Sol <sub>2</sub>	396,0	1,50	15,8	1,04	392,0	1,50	22,0	1,06	-4,0	1,0
Sol <sub>3</sub>	412,5	1,56	16,5	1,04					2,8	-0,7
La <sub>1</sub>	422,4	1,60	9,9	1,02	415,3	1,59	23,3	1,06	-7,1	1,7
La <sub>2</sub>	440,0	1,67	17,6	1,04	440,0	1,68	24,7	1,06	-	-
La <sub>3</sub>	458,3	1,74	18,3	1,04					7,8	-1,7
Si <sub>1</sub>	475,2	1,80	16,9	1,04	466,2	1,78	26,2	1,06	-9,0	1,9
Si <sub>2</sub>	495,0	1,88	19,8	1,04	493,9	1,89	27,7	1,06	-1,1	0,2
Do <sub>3</sub>	528,0	2,00	33,0	1,07	523,3	2,00	29,4	1,06	-4,7	0,9



# Test 2 - scala equabile

1. Esprimi con un radicale la frequenza del  $Sol_2$

①  $^{12}\sqrt{2^7}$

✓ ②  $2^{12}\sqrt{2^7}$

③  $^{12}\sqrt{2^5}$

④  $^{12}\sqrt{2}$

2. Calcola l'intervallo di nona tra il  $Do_2$  e il  $Re_3$

①  $^{12}\sqrt{2^9}$

②  $\sqrt[6]{2}$

③  $^{12}\sqrt{2}$

✓ ④  $2\sqrt[6]{2}$

3. Verifica se componendo due semitoni si ottenga un tono

①  $\sqrt[6]{2^7}$ , no

✓ ②  $\sqrt[6]{2}$ , sì

③  $^{12}\sqrt{2^7}$ , no

④  $^{12}\sqrt{2}$ , no

4. Confronta le due note ottenute dal  $Do$  rispettivamente salendo di 7 quinte e scendendo di 5, dopo averle riportate entro l'ottava principale

①  $^{12}\sqrt{2^7}$

②  $^{12}\sqrt{2}$

✓ ③ 1

④  $\sqrt[6]{2}$

# Rappresentazione del modello



# R



## 3. Sulla scala a ritmo di Log

# G.W. LEIBNIZ E I "NUMERI DEI RAPPORTI"

19

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010

## Le relazioni rivelano il temperamento

- Ottava

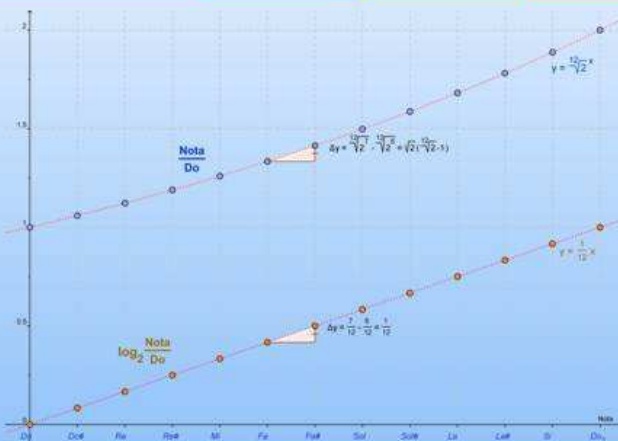
$$\log_2 \frac{D_{O2}}{D_{O1}} = 1$$

- Semitono

$$\log_2 \sqrt[12]{2} = \frac{1}{12}$$

- Intervallo generico  $R$

$$R = (\sqrt[12]{2})^n \Rightarrow n = 12 \log_2 R$$



Logaritmo = "numero dei rapporti"

20

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010



# Test 3 - scala logaritmica

1. Esprimi con una potenza la frequenza del  $Do_4$

①  $2^4$

$2^3$

③  $2^{3/2}$

④  $2^2$

2. Calcola il numero di semitoni tra il  $Do_2$  e il  $Re_3$

① 2

② 9

③ 13

14

3. Esprimi in scala logaritmica l'intervallo di nona tra il  $Do_2$  e il  $Re_3$

$7/6$

②  $6/7$

③  $13/12$

④  $12/13$

4. Determina l'inclinazione della retta che interseca la spirale logaritmica in  $Re_1$  e  $Re_2$

①  $30^\circ$

②  $45^\circ$

$60^\circ$

④  $\arctg 2$

23

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010

# R



4. Onda su onda su onda...

## J.B. D'ALEMBERT FA LUCE SUL SUONO

24

Nicola Chiriano - Cetraro, 21-22 ott 2010

# Va in onda d'Alembert

Estratto dalla *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (1765)

**S**ON, f. m. (*Phys.*) est une perception de l'ame qui lui est communiquée par le secours de l'oreille : ou bien c'est un mouvement de vibration dans l'air, qui est porté jusqu'à l'organe de l'ouïe. Voyez OUIE. Pour éclaircir la cause du son, nous observerons, 1°. que pour produire le son, il faut nécessairement du mouvement dans le corps sonore.

Estratto da *Wikipedia* vers. italiana (2010)

## Suono

Da *Wikipedia*, l'enciclopedia libera.

Il suono (dal latino *sonus*) è la sensazione data dalla vibrazione di un corpo in oscillazione. Tale vibrazione, che si propaga nell'aria o in un altro mezzo elastico, raggiunge l'orecchio che, tramite un complesso meccanismo interno, è responsabile della creazione di una sensazione "uditiva" direttamente correlata alla natura della vibrazione.

Equazione:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Soluzione:

$$f(x, t) = f_-(x - t) + f_+(x + t)$$

# Si sovrappone Eulero

Equazione:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Soluzione:

$$f(x, t) = f_-(x - vt) + f_+(x + vt)$$

$$f(x, t) = A_1 f_1(x, t) + A_2 f_2(x, t) + \dots + A_n f_n(x, t)$$

**Principio di sovrapposizione**

ogni perturbazione = c.l. di onde piane

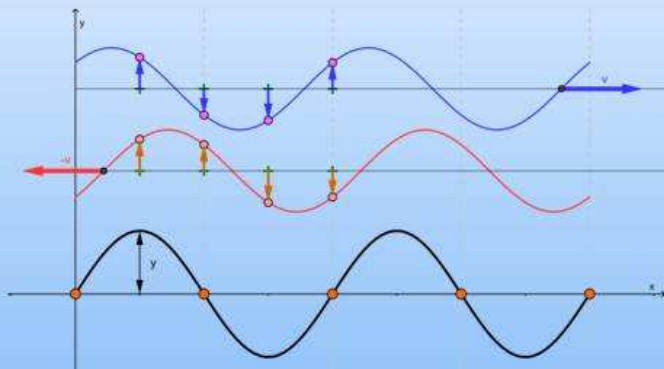


più perturbazioni = onda loro somma

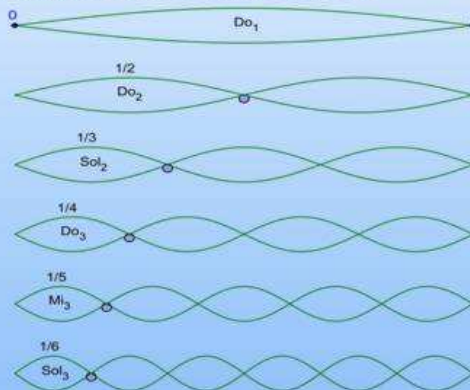


# Eppur non si muove

## Onda stazionaria



## Armonici naturali



Le due onde "opposte" hanno entrambe lunghezza  $L/n$

⇒ la risultante è un'onda stazionaria: non si propaga e possiede nodi e ventri



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$



## 5. Suoni prodotti in serie

# LA SINTESI DI J.B. "FAB" FOURIER

# L'orbo che vedeva (molto) lontano

Oscillatore armonico

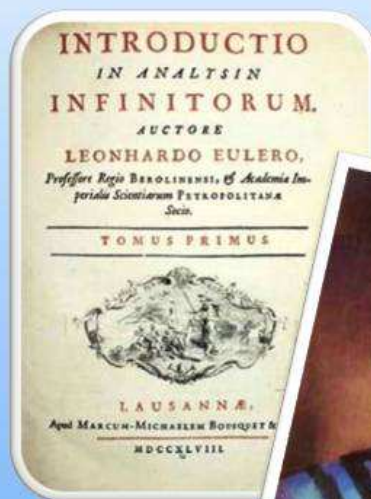
$$y'' + y = 0$$

Soluzioni:

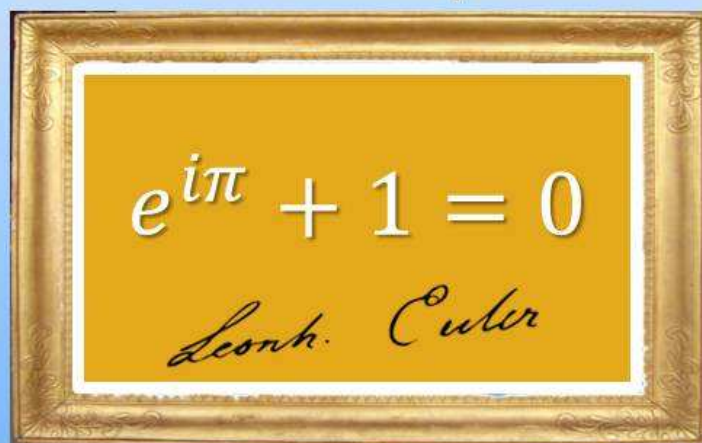
▣  $y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}$

▣  $y(x) = \alpha \sin(x + \beta)$

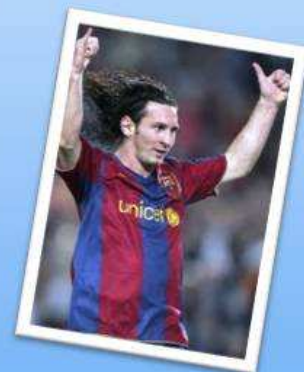
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$



# Quel capolavoro di Leonardo

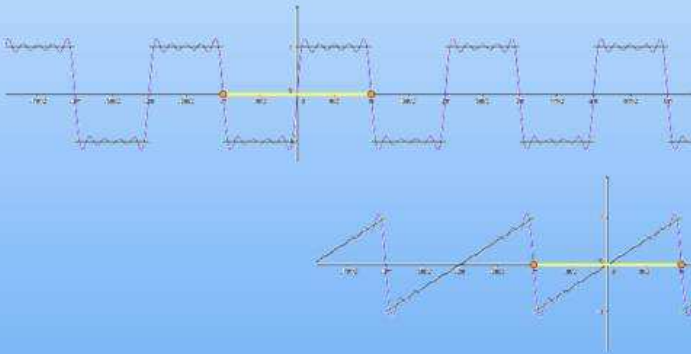


*per il pi*



# Analisi e Sintesi armonica

- Ciascun suono può essere
  - scomposto nelle proprie componenti fondamentali (*analisi armonica*)
  - riprodotto fedelmente sommando opportune onde sonore semplici (*sintesi armonica*)



# Complessi & Compresi

- CD audio (codifica **PCM**) dati non compresi
- **MP3**: si “tagliano” frequenze non udibili e armoniche secondarie
- DVD (**MPEG**)
- Foto e Immagini (**JPEG**)

