UNIVERSITÀ DELLA VALLE D'AOSTA
UNIVERSITÉ DE LA VALLÉE D'AOSTE
Dipartimento di Scienze Umane e Sociali
Département des Sciences Humaines et Sociales

Università di Modena
e Reggio Emilia

Didattica della matematica e disturbi specifici dell'apprendimento:

da quadri teorici di riferimento a pratiche efficaci per fare matematica nella scuola di tutti

Anna Baccaglini-Frank* & Elisabetta Robotti**
*Università di Modena e Reggio Emilia
**Università della Valle d'Aosta

- Uno stereotipo da superare e La Neuro-plasticità
- Alcuni modelli per spiegare difficoltà con i numeri
  - McCloskey, Triplo codice, e nuova ricerca
- L'importanza delle immagini mentali
- Alcune buone pratiche per il calcolo – esempi
  - Possibile avvio alle moltiplicazioni
- Altri risultati su cui fondare buone pratiche didattiche
  - Le mani (intervento con iPad a scuola infanzia)
  - Int. Numerica e linea dei numeri mentale
- La didattica con artefatti (-> strumenti)
  - Mediare la notazione posizionale decimale con le cannucce, calcolo e mediazione semiotica
  - Aritmetica e Algebra (cognizione e Alnuset)
  - Cogliere proprietà di figure con la geometria dinamica
  - fine

Io e la matematica…

Secondo quanti di voi la matematica è una cosa in cui “sei bravo” o “fai schifo” e non ci si può fare più di tanto?

Michelle Obama dice:

Le neuroscienze ci dicono che

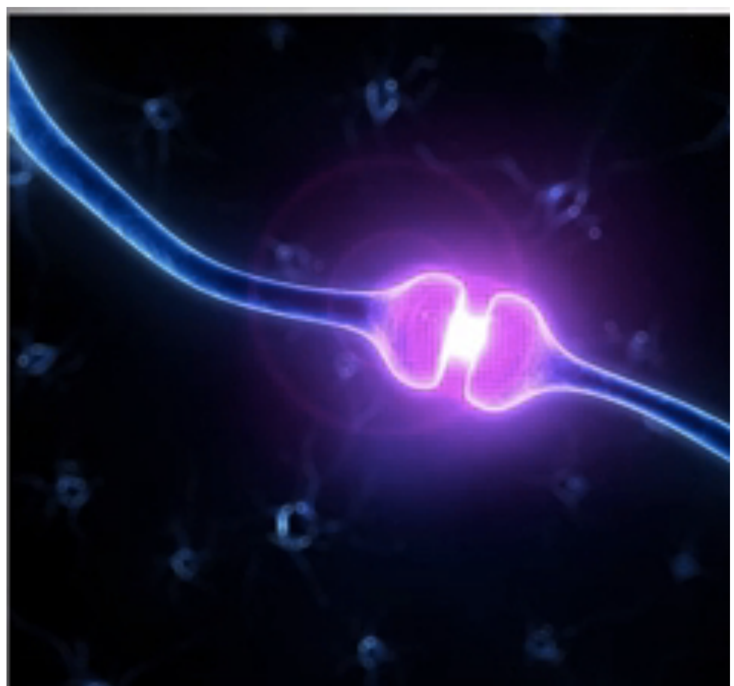
il cervello è plastico

La neuroplasticità si riferisce alla capacità del cervello di cambiare e di creare nuove connessioni.

Le neuroscienze ci dicono che

il cervello è plastico

Quando si impara, una sinapsi "si accende", cioè passa corrente elettrica e una nuova connessione si forma tra cellule nervose.

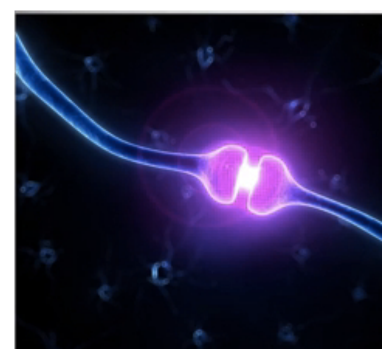


Le neuroscienze ci dicono che

il cervello è plastico

I percorsi sinaptici sono come orme nella sabbia: possono diventare percorsi stabili se sono usati di frequente, oppure possono sbiadire ed essere spazzati via se usati poco.

Nuove connessioni si creano ed altre spariscono ogni secondo.

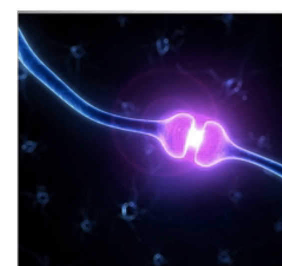


Le neuroscienze ci dicono che

il cervello è plastico

Ogni esperienza d'apprendimento modifica la struttura del cervello.
Il potenziale di ogni bambino è ENORME.

Ma allora perché continuiamo a pensare che si "nasca" con determinate abilità anziché credere che chiunque abbia un enorme potenziale di imparare se stimolato adeguatamente?



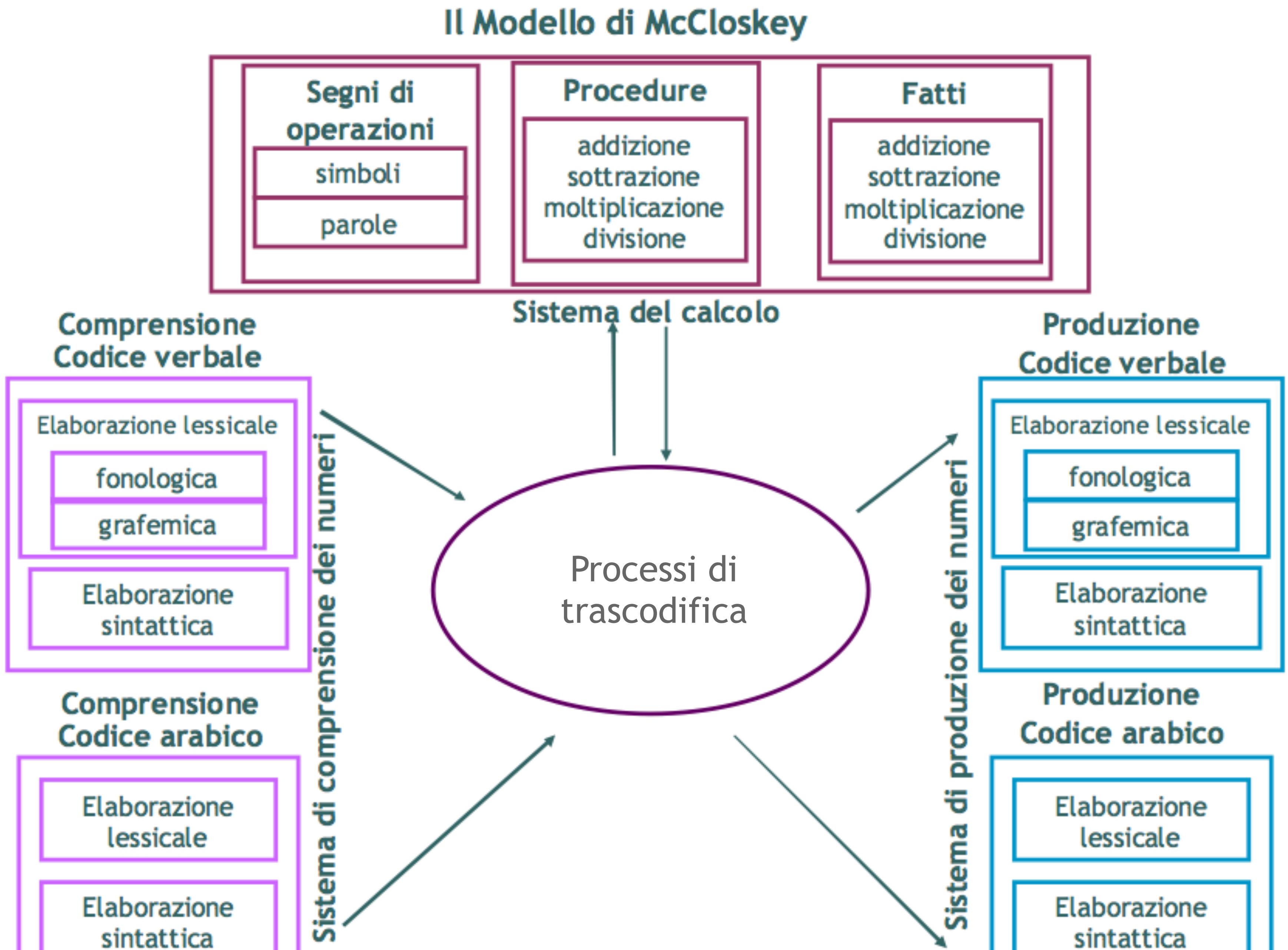
MODELLI COGNITIVI: funzionamento della rappresentazione dei numeri e dei processi di calcolo

il *modello del triplice codice* di Dehaene (1992; Dehaene & Cohen, 1995)

assume che ci siano essenzialmente tre categorie di rappresentazioni mentali nelle quali i numeri possano essere manipolati nel cervello umano

modello di McCloskey (McCloskey, Caramazza e Basili, 1985).

considera a un livello generale i meccanismi cognitivi che mediano la comprensione e la produzione di numeri arabi e verbali, e l'esecuzione di semplici calcoli



Baccaglini-Frank & Robotti Salerno 2013

Meccanismi dominio-specifici

Meccanismi Semantici

(regolano la comprensione della quantità)

(3 = )

Meccanismi Lessicali

(regolano il nome del numero)

(1 – 11)

Meccanismi Sintattici

(Grammatica Interna = Valore Posizionale delle Cifre)

Esempio

da	u	la posizione
1	3	cambia nome
3	1	e semante

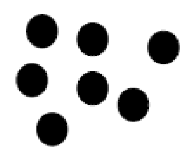
I tre sistemi funzionano in base a:

- ***Meccanismi Semantici*** → regolano la comprensione della quantità. Significato di un numero, secondo un codice astratto, amodale
- ***Meccanismi Lessicali*** → regolano il nome del numero.
- ***Meccanismi Sintattici*** → Grammatica Interna = Valore Posizionale delle Cifre. Rapporto tra i singoli elementi in termini di posizione spaziale all'interno della struttura del numero

In base a questi meccanismi possiamo classificare gli errori:

- ✓ Errori *lessicali*: il bambino sbaglia a pronunciare il nome del numero (es: scrive o legge 6 al posto di 8)

- ✓ Errori *sintattici*: il bambino non riconosce il valore di una cifra in base alla sua collocazione nel numero. Coinvolge anche gli aspetti lessicali (2 e 5 nel 25 hanno un valore diverso e rappresentano una quantità diversa che presi singolarmente; e si leggono in modo diverso). Es. ottocentoventicinque → 80025

- ✓ Errori *semantici*: il bambino non riconosce il significato del numero, ovvero la sua grandezza. Es  =4

- Errore elaborazione segni operazioni

2x5=7 2+5=10

...o possibile errore visuo-spaziale

- Errore procedure di calcolo negli algoritmi

23x
12=
26

Applicazione errata della regola

75 -
58 =
27

Applicazione errata prestito e riporto

75-6=71 non applica regola della direzione

- Errori di confusione tra regole di accesso rapido

3*0=3   3*1=1   3+0=0

- Incapacità di tenere a mente risultati parziali

37+12

7+2=9
30+10=40
40+....

- Errore fatti aritmetici

2*5=15

4+2=8

3+3=9 (confusione tra operazioni)

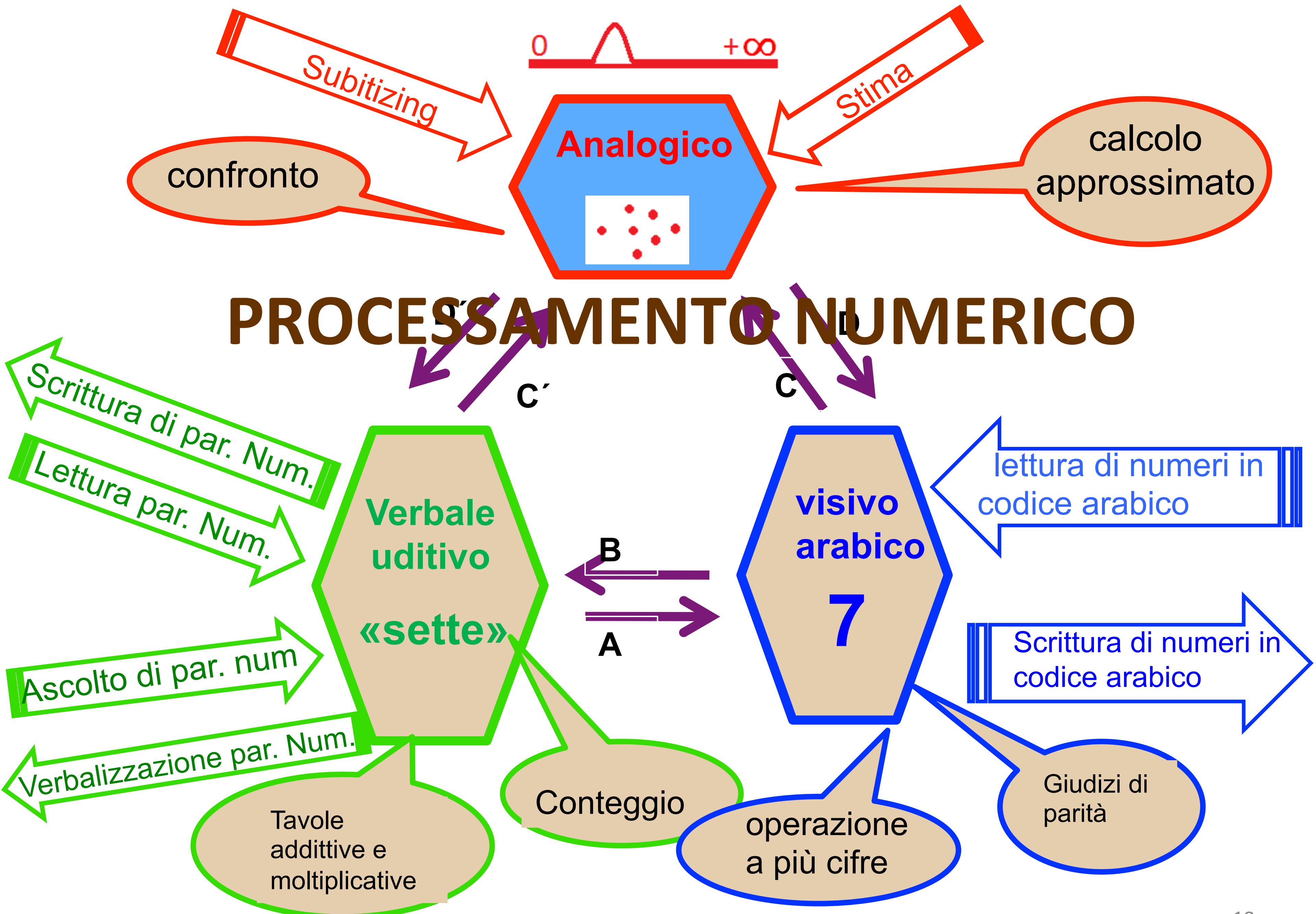
- Incapacità di tenere a mente fatti aritmetici

2+2=4

2*2=4

MODELLO DEL TRIPLO CODICE: PROCESSAMENTO NUMERICO
DEHAENE, 1992

PROCESSAMENTO NUMERICO



Mapping brain dysfunction in Dyscalculia

Hypothesis

«Access» :

Deficit Exact Number Representation and the link between Arabic – Magnitude Representation

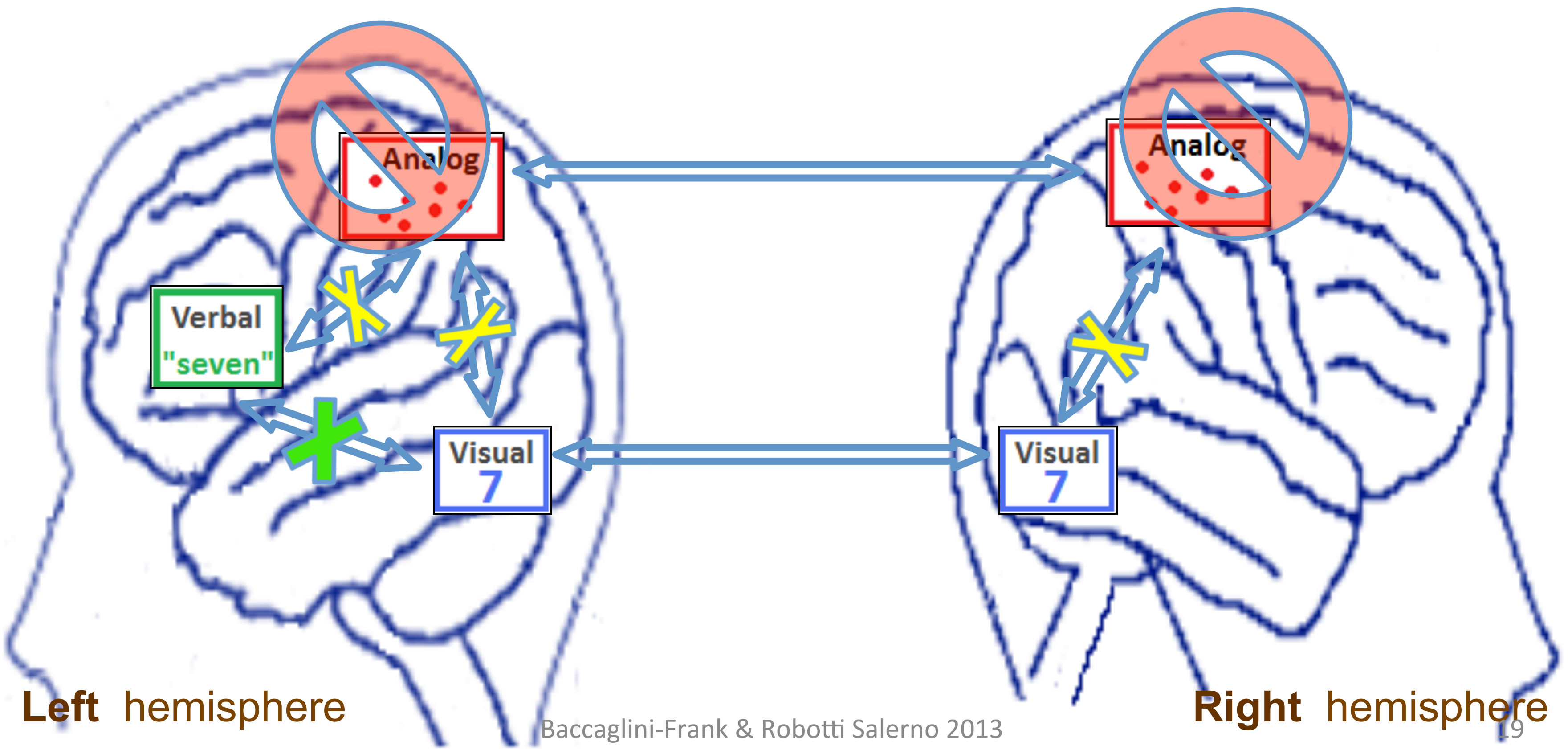
(Rouselle & Noël, 2007, 2011)

Hypothesis

«Core Deficit» :

Deficit in the Approximate Magnitude system

(Butterworth, 1999; Gersten & Chard, 1999; Wilson & Dehaene, 2007)



Left hemisphere

Right hemisphere

La Discalculia Evolutiva (DE)

A seconda del criterio usato per la diagnosi nei diversi paesi, l'occorrenza di DE è stimata fino al 6.5% della popolazione.

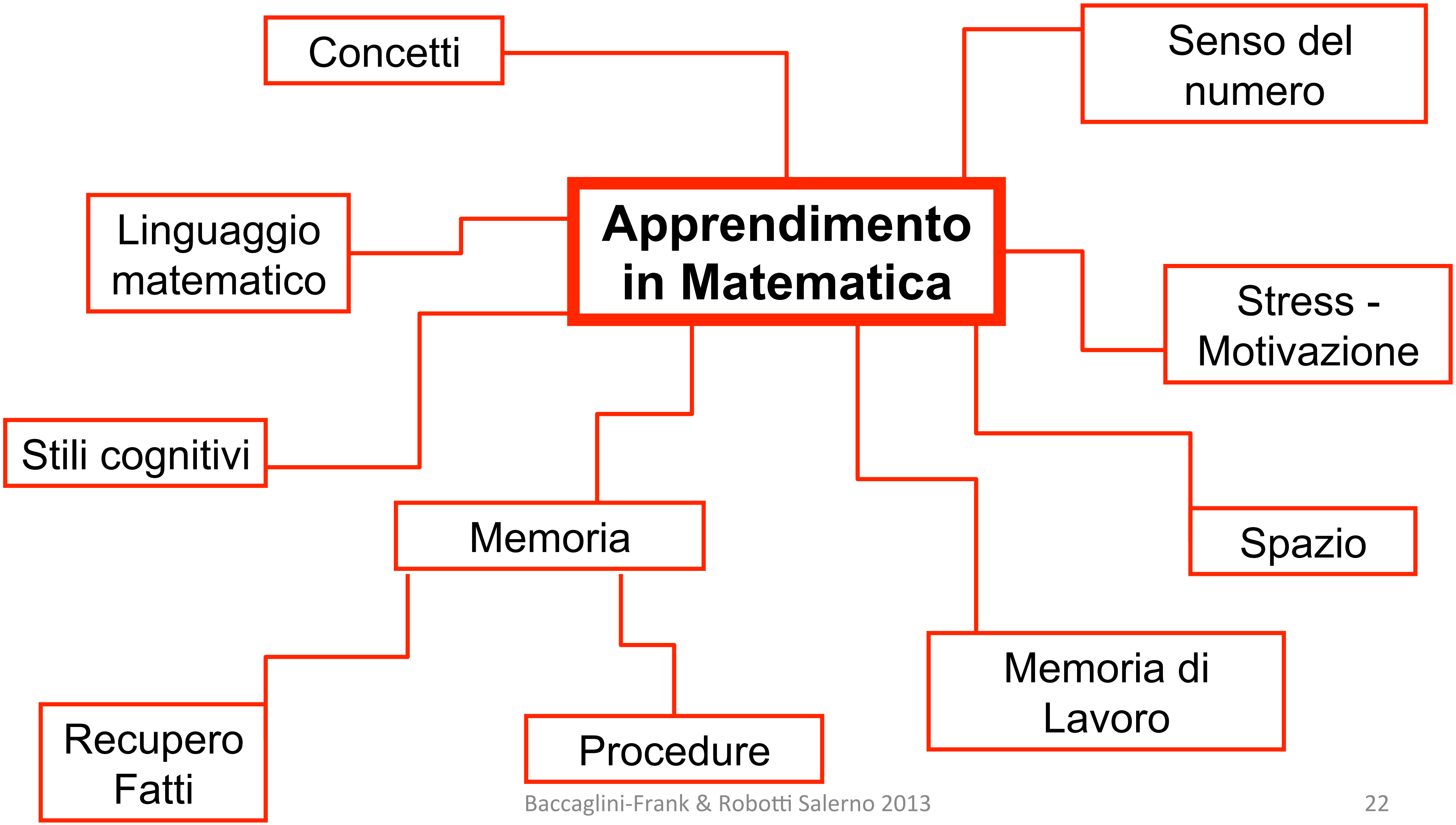
Tuttavia è importante ricordare che la diagnosi dipende dai test usati e dalla norma definita!!

DSA...e difficoltà di apprendimento

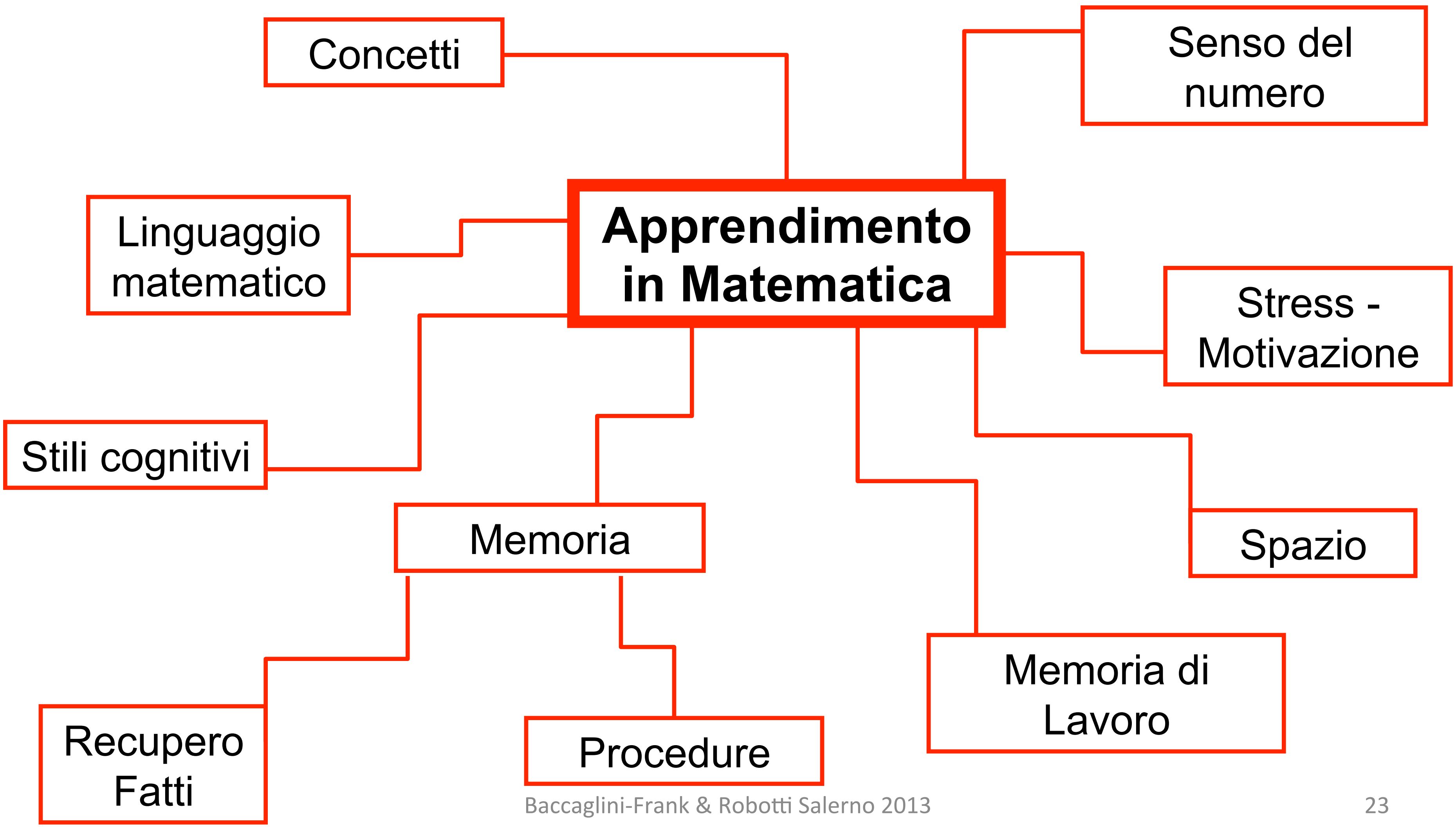
Un criterio per riconoscere un soggetto con un vero DSA consiste nel valutare come risponde all'intervento (Response to Intervention, RTI) e diagnosticarlo con DSA soltanto se è resistente al potenziamento.

Secondo tale criterio risultano essere falsi positivi tutti i soggetti che dai test diagnostici iniziali risulterebbero positivi, ma che dopo un periodo di potenziamento dei processi più deboli recuperano almeno di due deviazioni standard quando sottoposti agli stessi test.

…non solo calcolo!



…non solo calcolo!



Canali di accesso alle informazioni e stili d'apprendimento

Visivo non verbale

Si impara sulla base di una memoria visiva.

uditivo

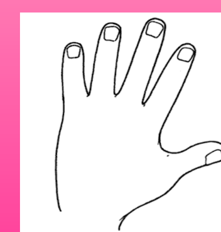
Si impara ascoltando

Visivo-verbale

A-B-C

Si impara leggendo

cinestetico

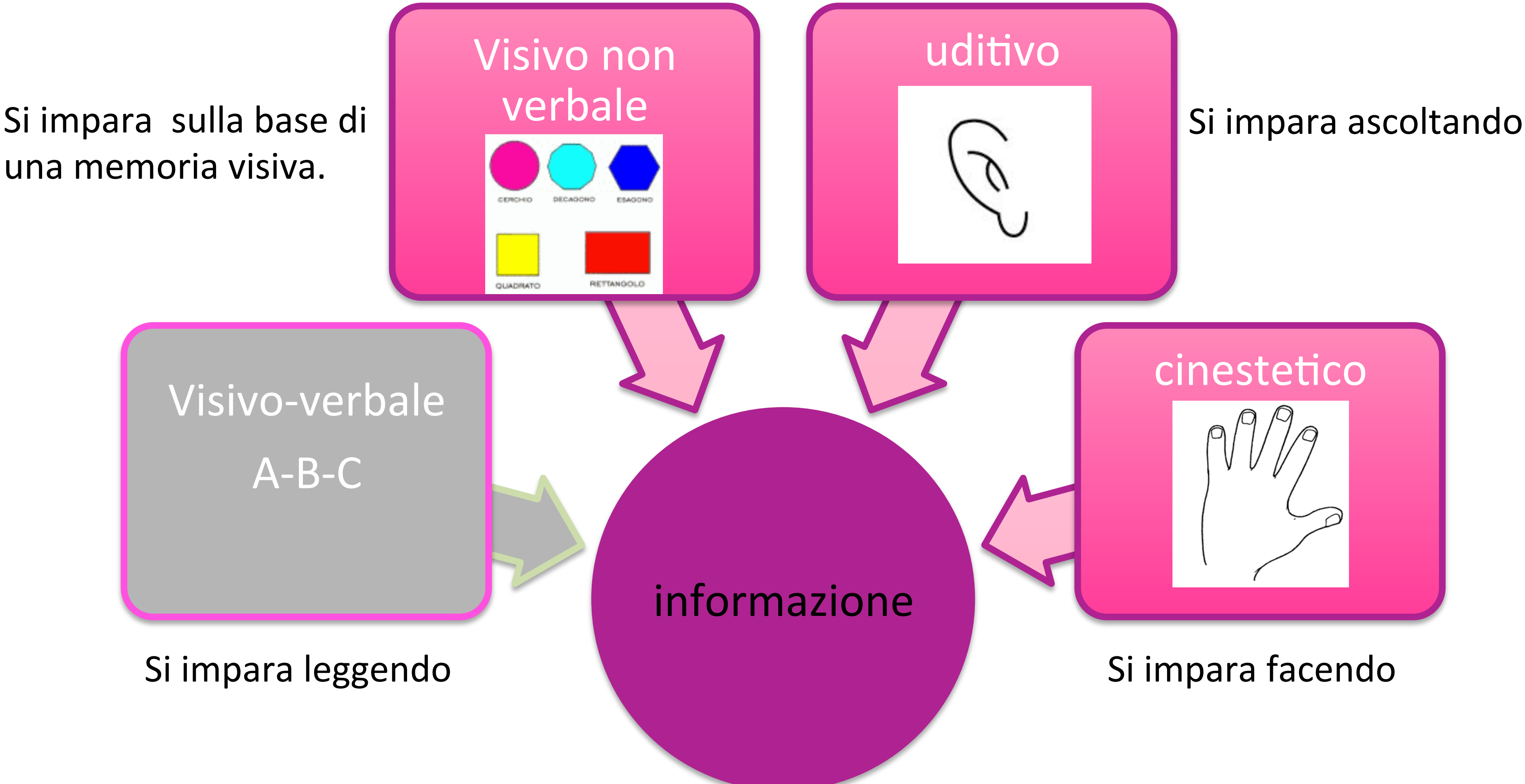


Si impara facendo

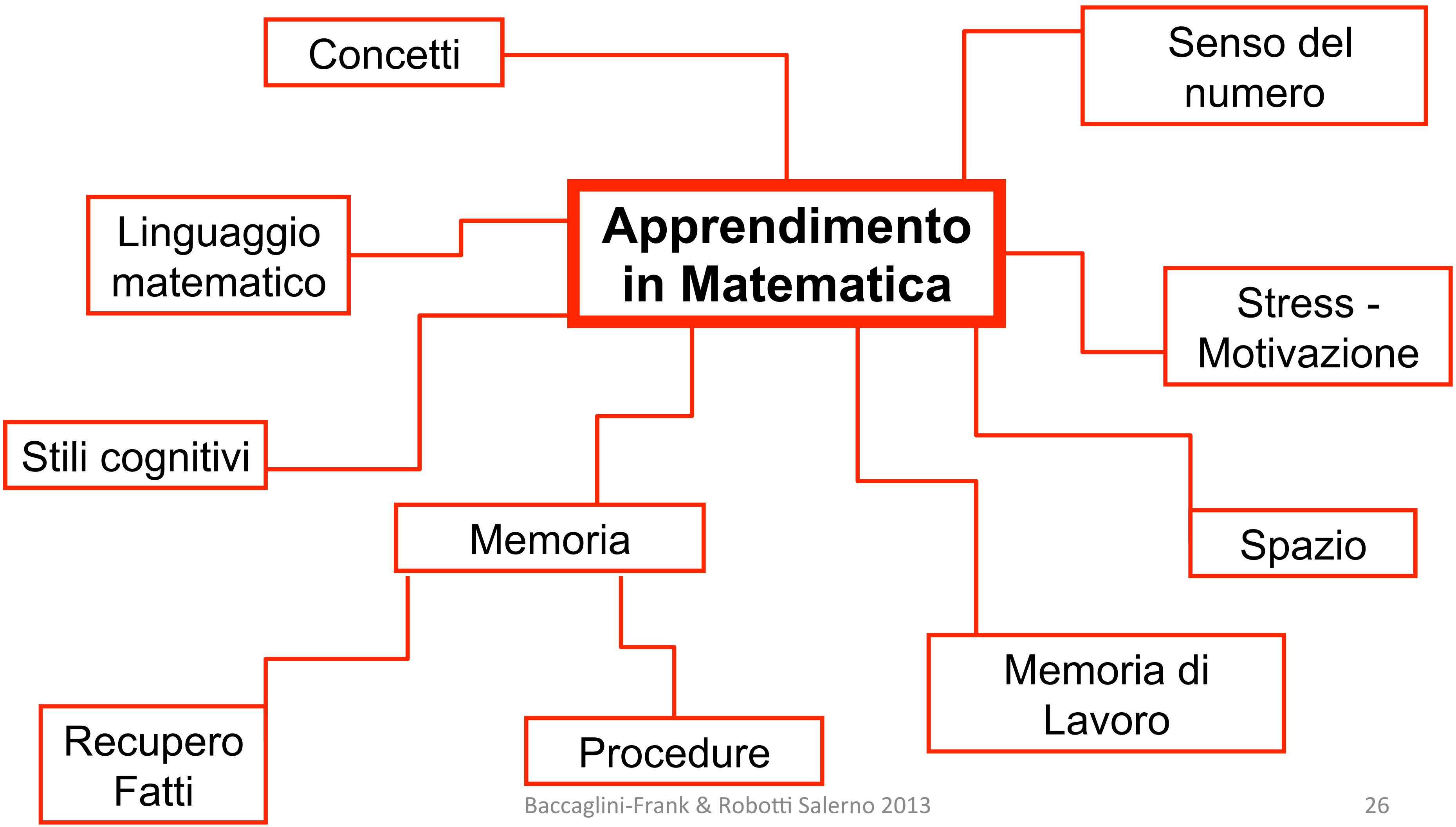
informazione

Stella, 2012 "Come leggere la dislessia"

Canali di accesso alle informazioni e stili d'apprendimento



…non solo calcolo!



Il Modello d… di Lavoro

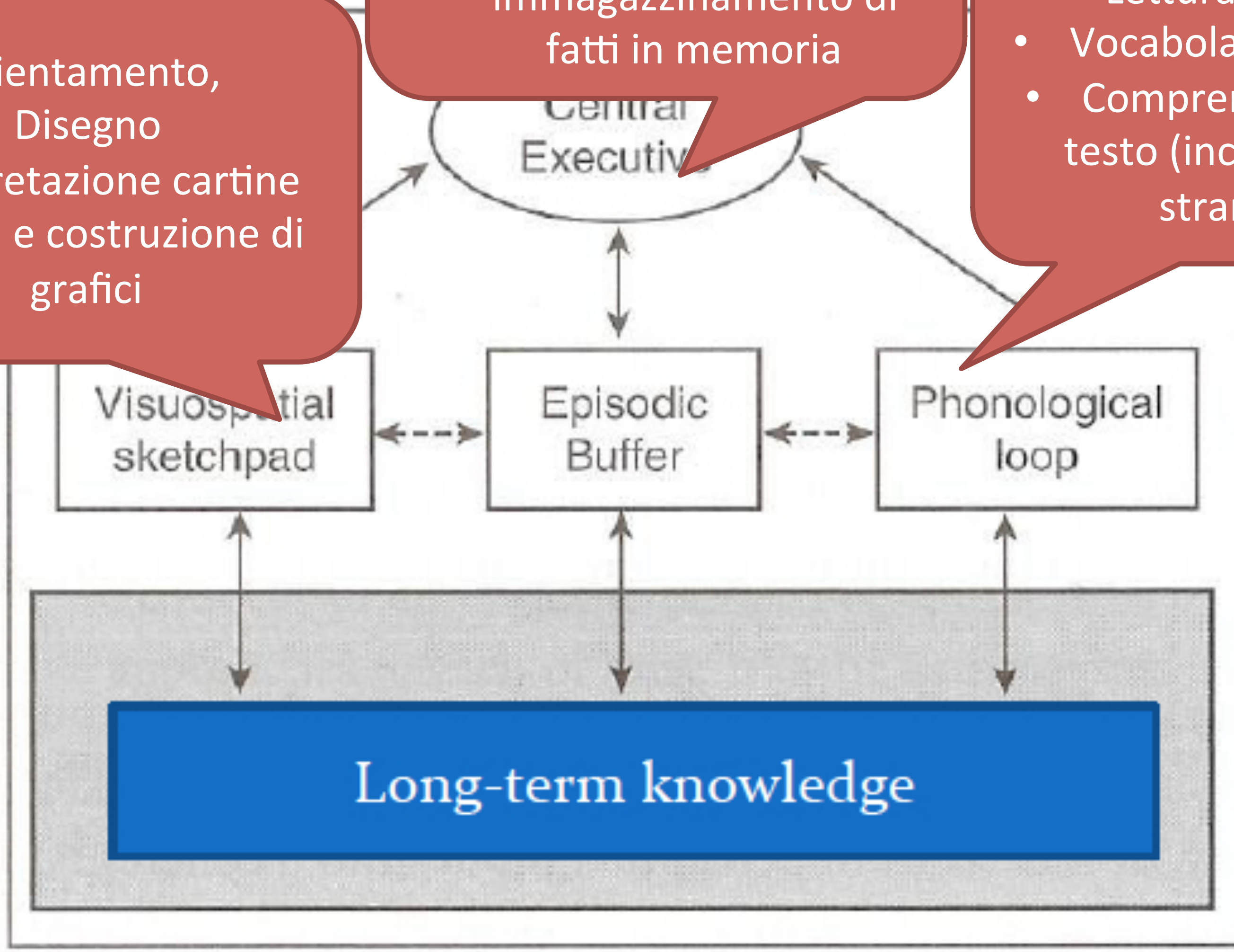
(Baddeley & … ey, 2000)

Qualunque consegna nuova o complessa che richieda

- processamento simultaneo
- immagazzinamento di fatti in memoria

- orientamento,
- Disegno
- Interpretazione cartine
- Lettura e costruzione di grafici

- Lettura/spelling
- Vocabolario/lessico
- Comprensione del testo (incluse lingue straniere)



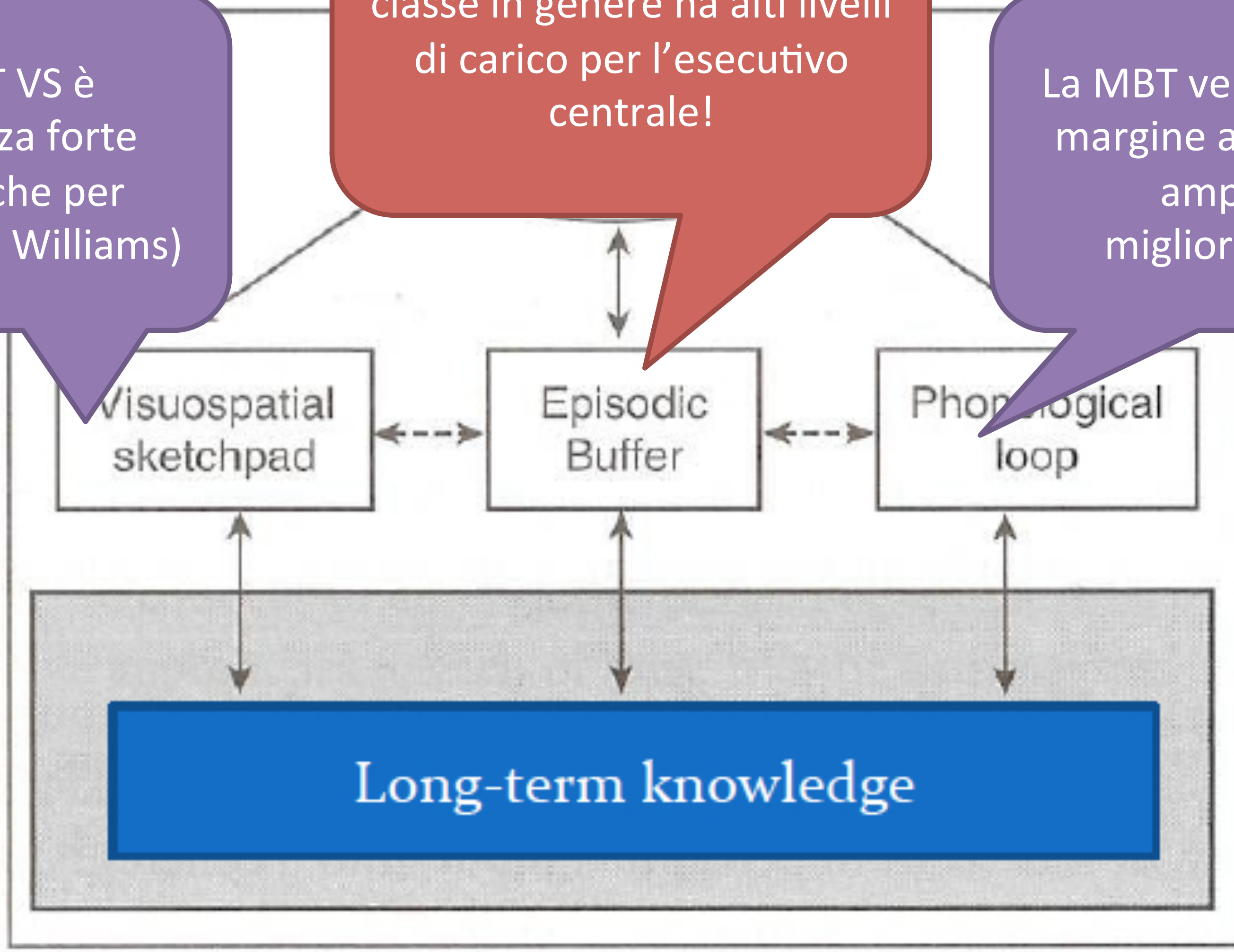
Implicazioni da Studi Recenti

(Henry, Messer, N ... rney, Brown, van der M ... Luit)

La MBT VS è abbastanza forte (tranne che per sindrome di Williams)

Attenzione: tutto il lavoro in classe in genere ha alti livelli di carico per l'esecutivo centrale!

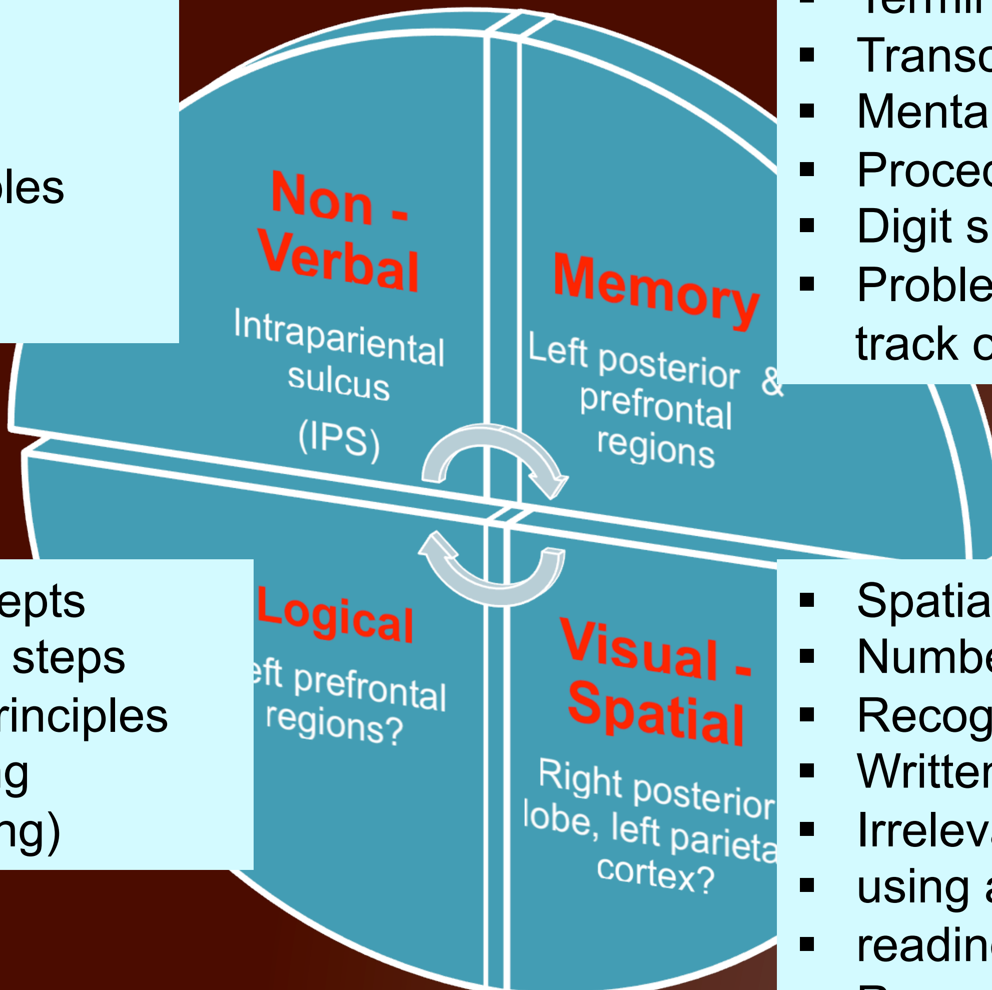
La MBT verbale ha un margine abbastanza ampio di miglioramento



MLD subtypes

- Sense of numerosity
- estimating
- Number line
- Transcoding
- Counting principles
- Place value
- Symbols

- Number facts
- Terminology
- Transcoding written rules
- Mental calculation
- Procedures
- Digit span performance
- Problem solving (keeping track of steps)



- Grasping concepts
- Understanding steps
- Basic logical principles
- Problem-solving (decision making)

- Spatial representations
- Numbers on number lines
- Recognize symbols
- Written calculation
- Irrelevant VS information
- using and drawing figures
- reading graphs
- Remembering formulas

(Καραγιαννάκης & Baccagliini-Frank, 2013)

…non solo calcolo!

Senso del

Li
ma

-
one

Stili co

o

E' strettamente necessaria una "buona didattica"

Recupero
Fatti

Procedure

A che cosa può servire una “Buona Didattica”?

Un’adeguata stimolazione attraverso una buona didattica può
- favorire i processi della plasticità cerebrale;
- alleviare alcune difficoltà causate dai DSA;
- prevenire il fenomeno degli studenti “falsi positivi” alle prove per la diagnosi di DE aiutando più del 20% della popolazione scolastica (percentuale di studenti che manifestano difficoltà in matematica entro la fine della scuola elementare).

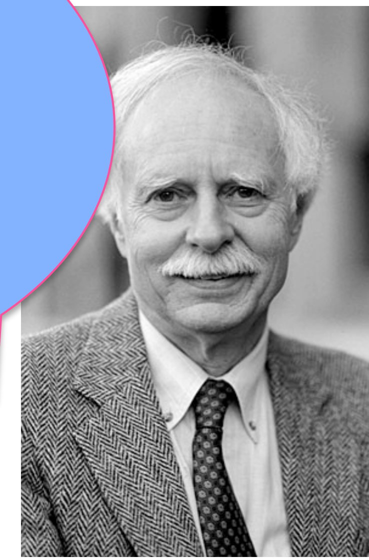
Su quali basi teoriche fondare una "buona didattica" della matematica?

- Su scoperte e modelli neuroscientifici rilevanti;
- su buone pratiche individuate per potenziamenti individuali;
- su appropriate teorie dal campo della didattica della matematica che consentano di adattare il lavoro uno-a-uno ad una *situazione di classe*, con un'attenzione verso le caratteristiche cognitive di *tutti* gli studenti.

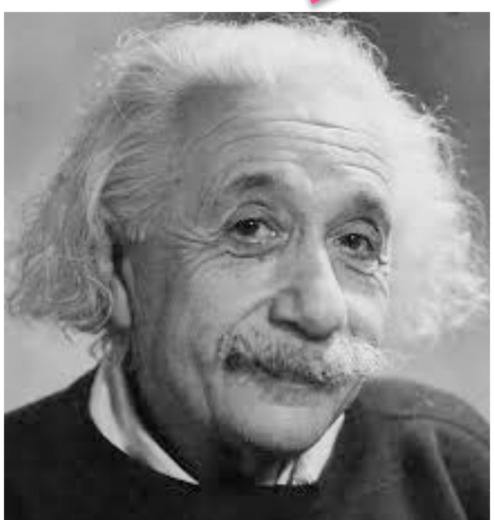
L’importanza delle Immagini Mentali

“Words and language, whether written or spoken, do not seem to play any part in my thought processes. The psychological entities that serve as building blocks for my thought are certain signs or images, more or less clear, that I can reproduce and recombine at will.”

Shepard (1970): Gli esseri umani sono capaci di creare e operare con immagini Mentali



A. Paivio (1978): Le immagini Mentali migliorano le prestazioni di memoria rispetto ad una rappresentazione proposizionale dei ricordi



L’importanza delle Immagini Mentali in Matematica

I problemi matematici richiedono non solo l'intervento indispensabile delle risorse logico-simboliche (aspetti sintattici), ma anche un forte impegno del *pensiero immaginativo*.

Rappresentazioni mentali produttive

S. Kosslyn (1999), ha dimostrato come le immagini mentali non sono passive "figure" dentro la testa, ma **rappresentazioni mentali produttive** **che permettono di immaginare dinamicamente qualcosa** anche in assenza di stimoli percettivi e che consentono di costruire forme di pensiero "**creativo**" al fine di realizzare nuove forme di conoscenza.

Nella soluzione di problemi

S.M. Kosslyn (*Le immagini nella mente*, Giunti, Firenze, 1999)

Nella soluzione di problemi

Il pensiero visivo può anche diventare tecnica di soluzione di problemi.

"un mattone pesa un chilo più il peso di mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?”

Un mattone pesa un chilo più il

Quanto pesa un mattone?

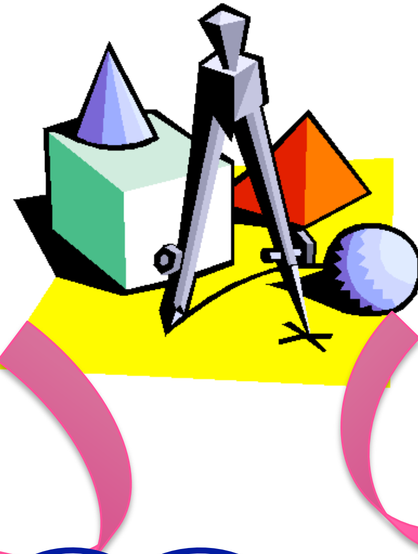
SOLUZIONE ALGEBRICA
X= peso del mattone

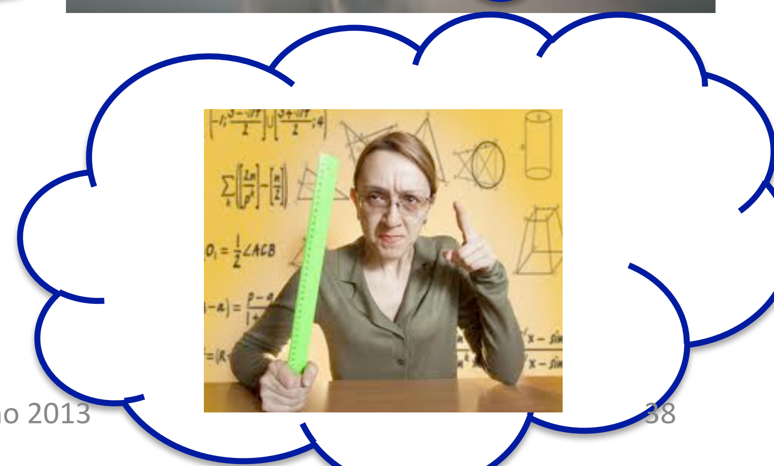
X=1Kg+1/2X il peso del mattone è 1 Kg più il peso di mezzo mattone
X-1/2X=1Kg il peso di un mattone meno mezzo mattone è 1Kg
1/2X=1 Kg il peso di mezzo mattone è 1kg

In media, va meglio a chi si rappresenta la situazione visivamente rispetto a chi si concentra solo sui calcoli!
Risposta errata: "un chilo e mezzo"
Risposta corretta : "due chili”

Le neuroscienze sul Mental Imagery

All'immagine è spesso associata **un'emozione**, per cui ricostruzioni o anticipazioni in immagine di particolari sensazioni in atto non presenti, possono generare situazioni di piacere ma anche di disagio (in casi di patologia).





PERCHE'?

AMIGDALA → REAZIONE DI DIFESA

↓

ATTACCO

QUANTO PIU' PROFONDO > E' IL BLOCCO

MA

- ATTACCO ALLA PRESTAZIONE?
- ATTACCO ALL'IO?

Moè & Lucangeli, 2010

MA SOLO IN MATEMATICA?

↓

NO

MA IN MATEMATICA E' MOLTO PIU' FREQUENTE, PERCHE' PIU' FREQUENTI LE ESPERIENZE DI INSUCCESSO

Lau & Nie, 2008; Murayama & Elliot, 2009

La ricerca neuropsicologica sulla Mental Imagery

Mental Imagery comporta **un'associazione di linguaggio verbale e figurativo**.

Il dibattito sulle "immagini nella mente", che mette in contrasto la teoria proposizionale (basata su concetti e verbalizzazioni) e la teoria analogica (pittorica, analoga alla elaborazione percettiva), è stato superato dalla constatazione (confermata dalla ricerca neuropsicologica) **che entrambe le teorie sono valide in differenti condizioni** (Pylyshyn, 1973; Finke, 1980; Ahsen, 1985; Kosslyn, 1994).

L’Ipotesi

Vedere meglio -> immaginare meglio

(S. Kosslyn, 1999)

l'addestramento visivo può migliorare quello immaginativo.

L’immaginazione può essere *educata* ed *orientata*

(Benedan e Antonietti, 1997; Di Nuovo, 1999)

mediante interventi mirati che mostrano soluzioni “visive”

(vedremo alcuni esempi in seguito: tabelline, significato dell’operazione x, costruzione di fatti aritmetici, proprietà di figure attraverso la geometria dinamica…)

Qualche riflessione sul calcolo

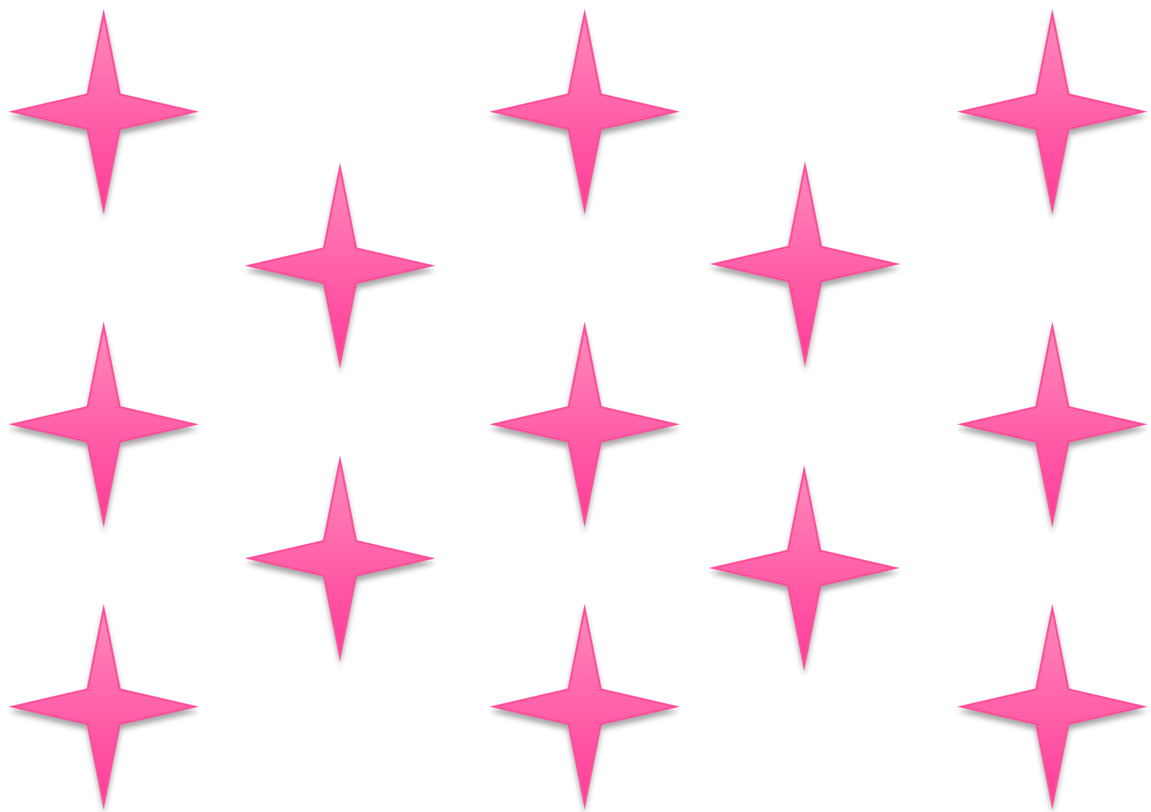
Un problema grosso è come viene insegnata l'aritmetica e la matematica più in generale ☹

"The depressing thing about arithmetic badly taught is that it destroys a child's intellect, and so to some extent, his integrity. Before they are taught arithmetic, children will not give their assent to utter nonsense; afterwards, they will."
-Walter W. Sawyer

Ma si può rimediare! Come?
Per esempio, imparando a "manipolare" i numeri!
E diventando consapevoli.

Proviamo a “manipolare” i numeri

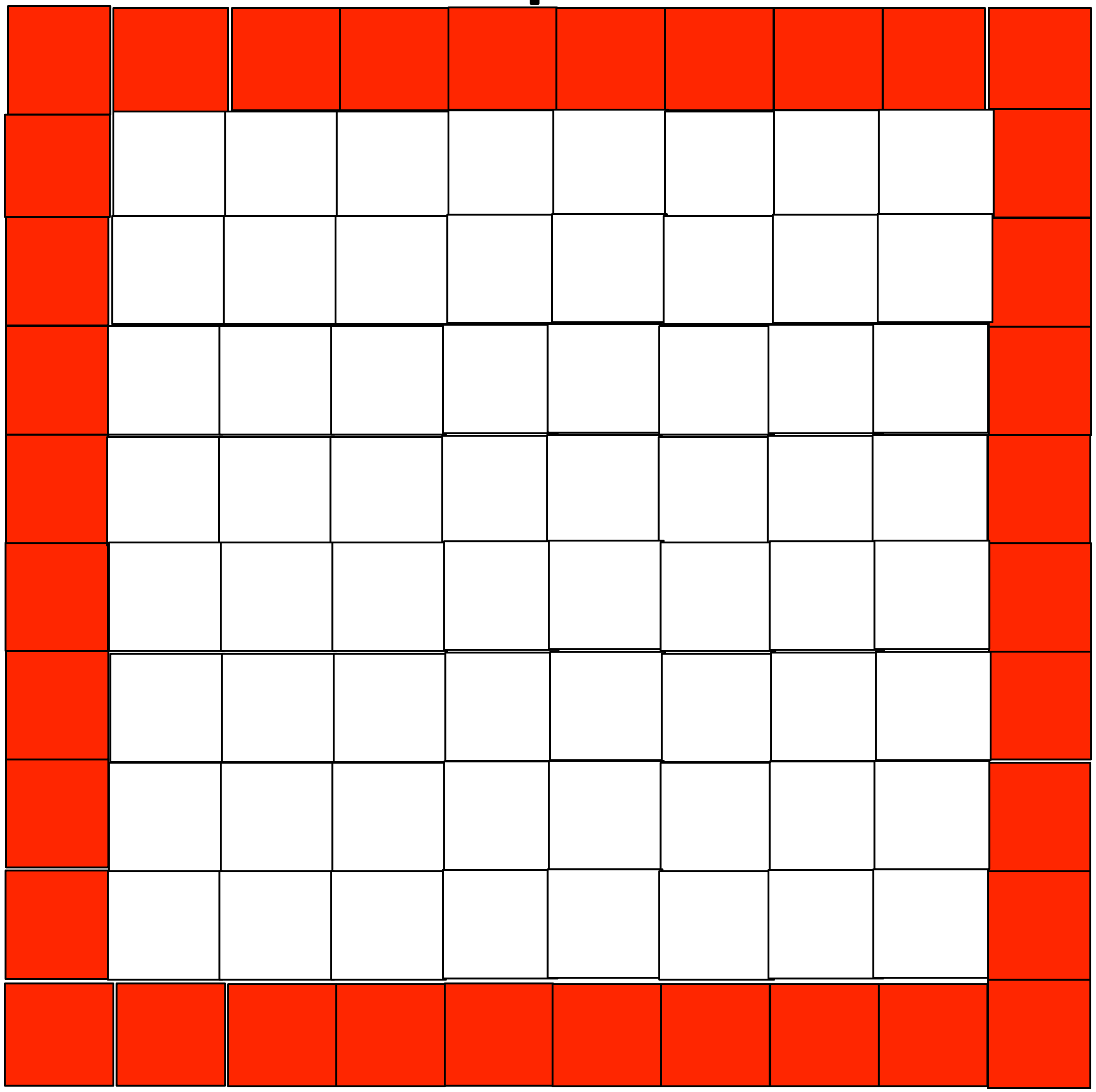
Come descrivereste questa disposizione di stelline?



Proviamo a “manipolare” i numeri

esempi

Quanti sono i quadrati rossi?



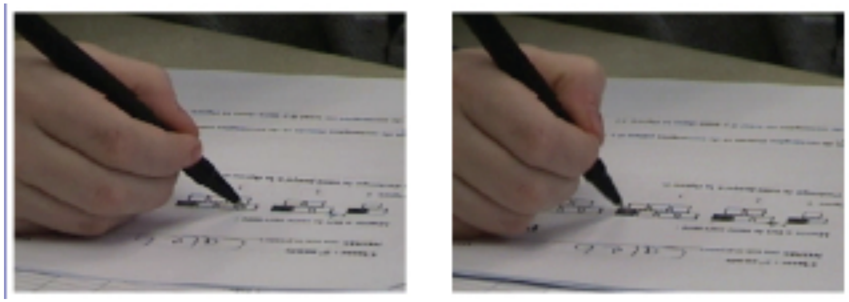
Componente visuo-spaziale del pensiero algebrico

In alcuni recenti lavori di Radford (2011) e di Rivera (2010) viene sottolineato come per estendere una sequenza di figure gli studenti hanno bisogno di riconoscere una regolarità e questo, da un punto di vista cognitivo, richiede la capacità di coordinare le strutture numeriche a quelle spaziali.

"The awareness of these structures and their coordination entail a complex relationship between (inner or outer) speech, forms of visualization and imagination, gesture, and activity on signs (e.g., numbers and proto-algebraic notations)" (Radford, 2011, p. 23).

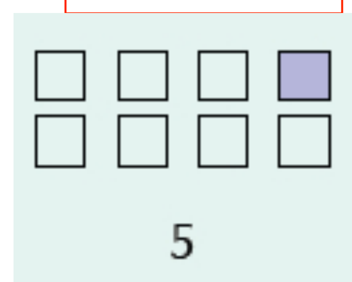
Componente visuo-spaziale del pensiero algebrico

Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4



Carlos

Kyle



Proviamo a "manipolare" i numeri

Quanti mattoncini nel caso 4?

caso 1   caso 2   caso 3   caso 4

Proviamo a "manipolare" i numeri

E nel caso 100?

caso 1 caso 2 caso 3 caso 4

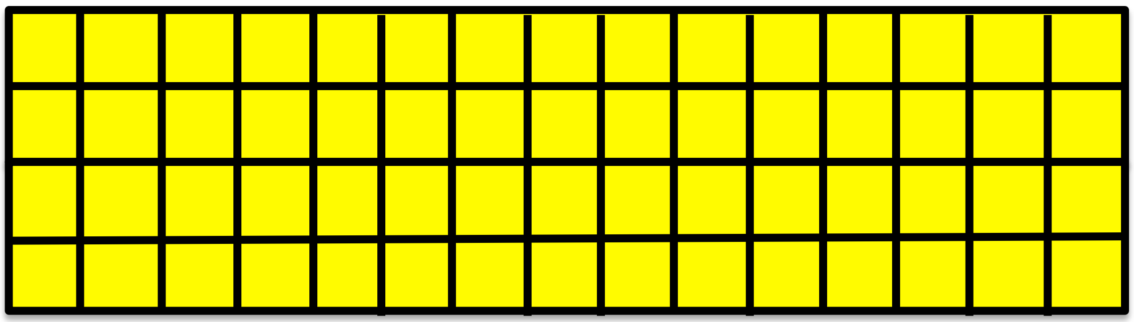
Proviamo a “manipolare” i numeri

Ora proviamo a pensare a

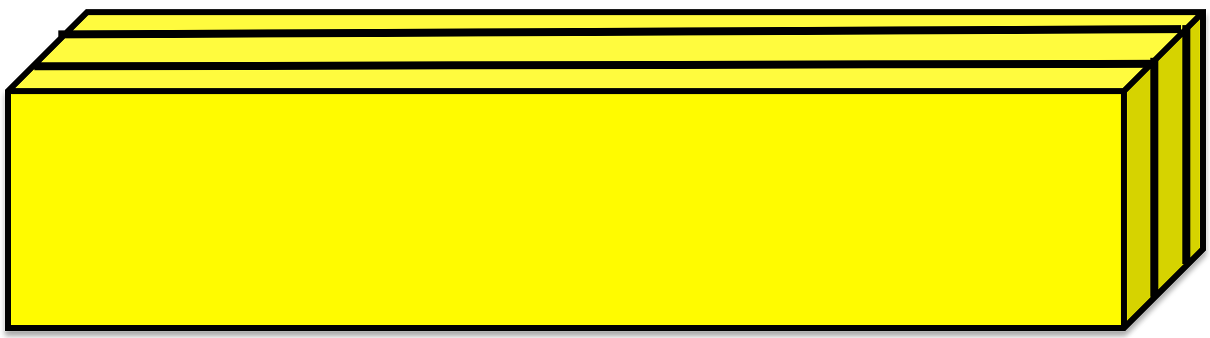
$$12 \times 15$$

[senza scrivere e senza usare algoritmo moltiplicazione in colonna]

Proviamo a "manipolare" i numeri

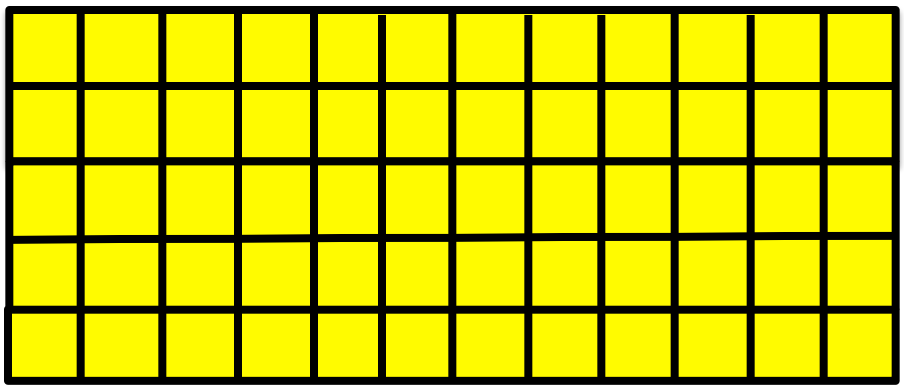


4 x 15

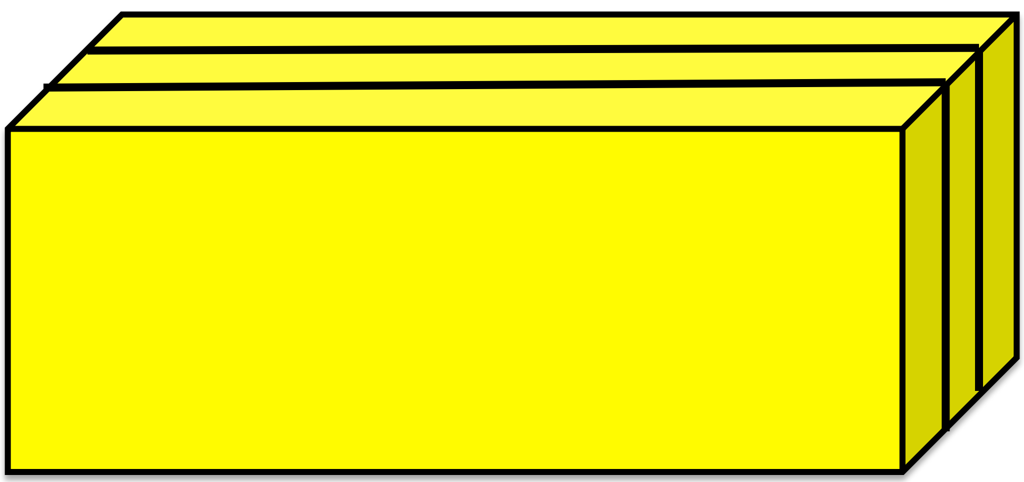


3 x (4 x 15)

Proviamo a “manipolare” i numeri

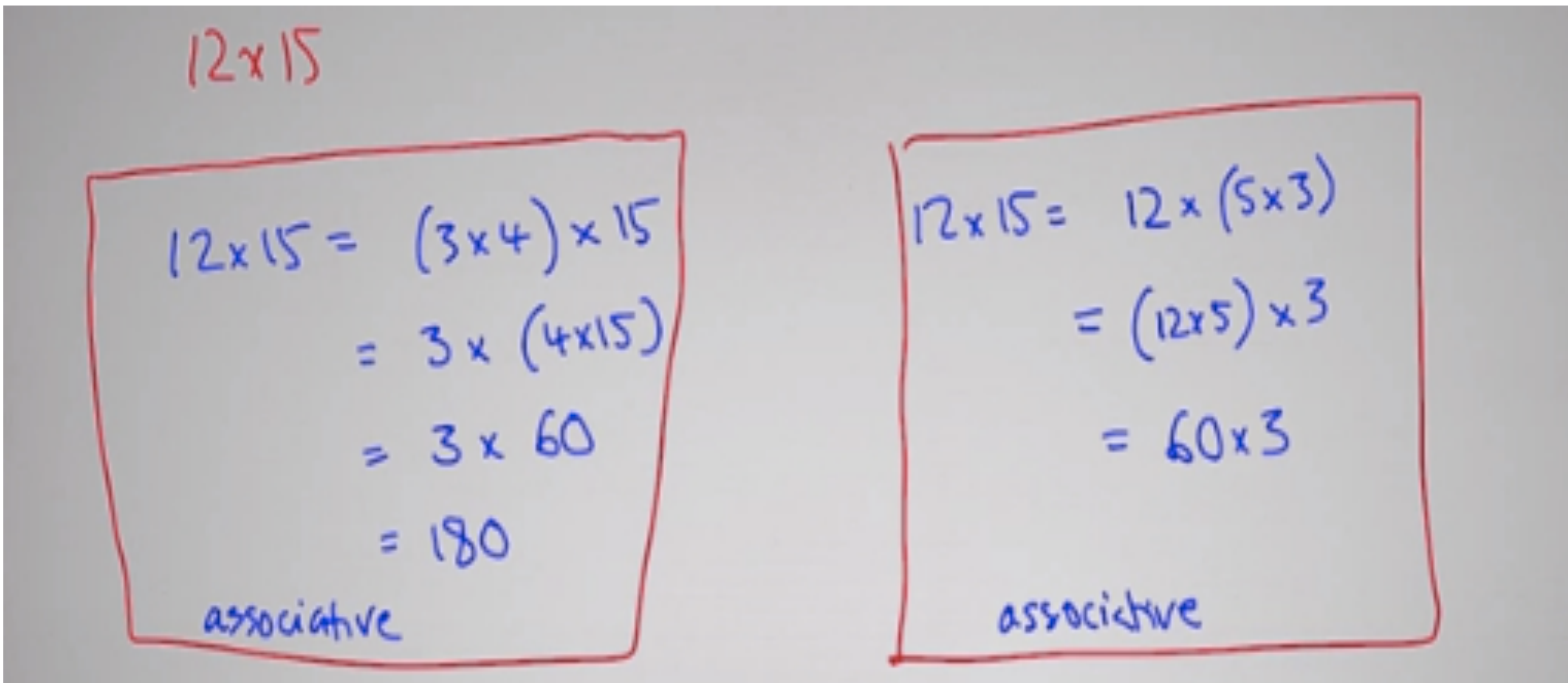


12 x 5

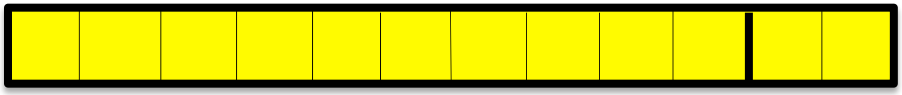


(12 x 5) x 3

Proviamo a "manipolare" i numeri



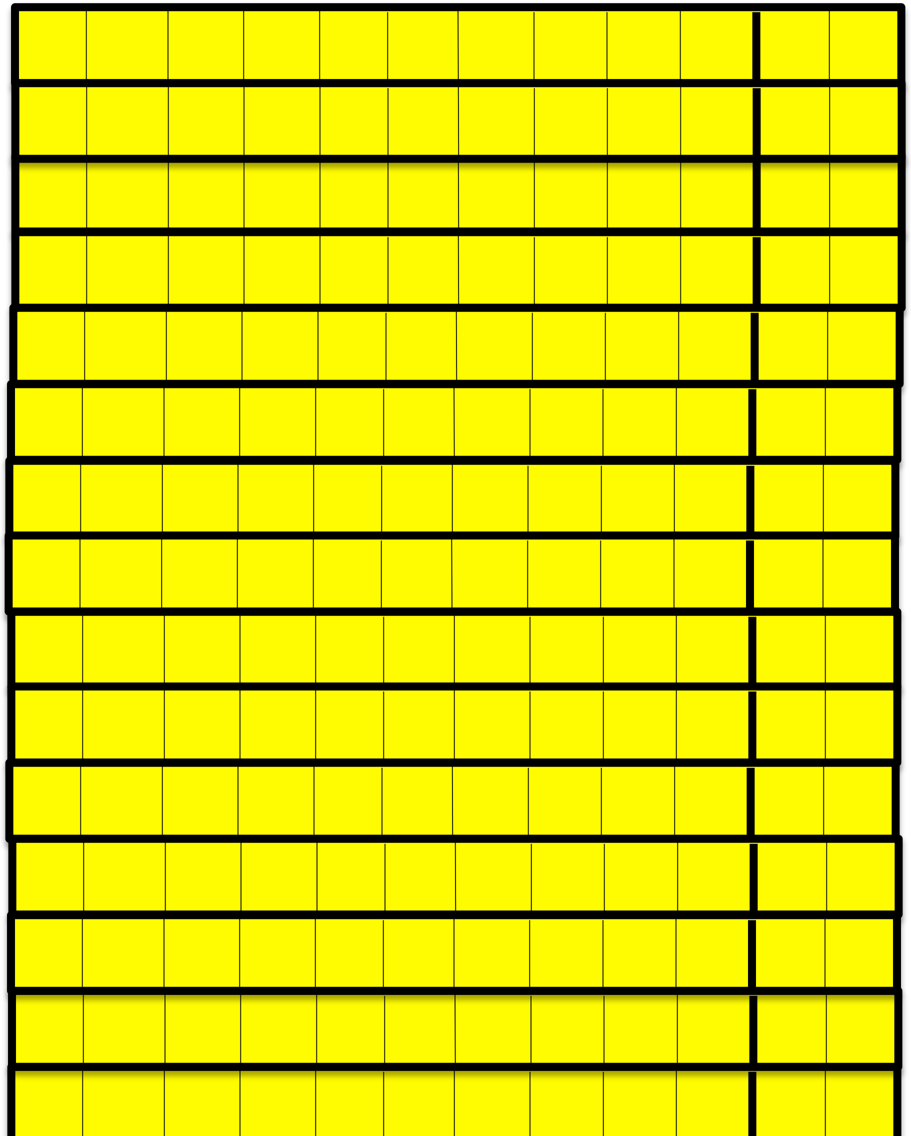
Proviamo a “manipolare” i numeri



10 +2

(10 + 2) x 15

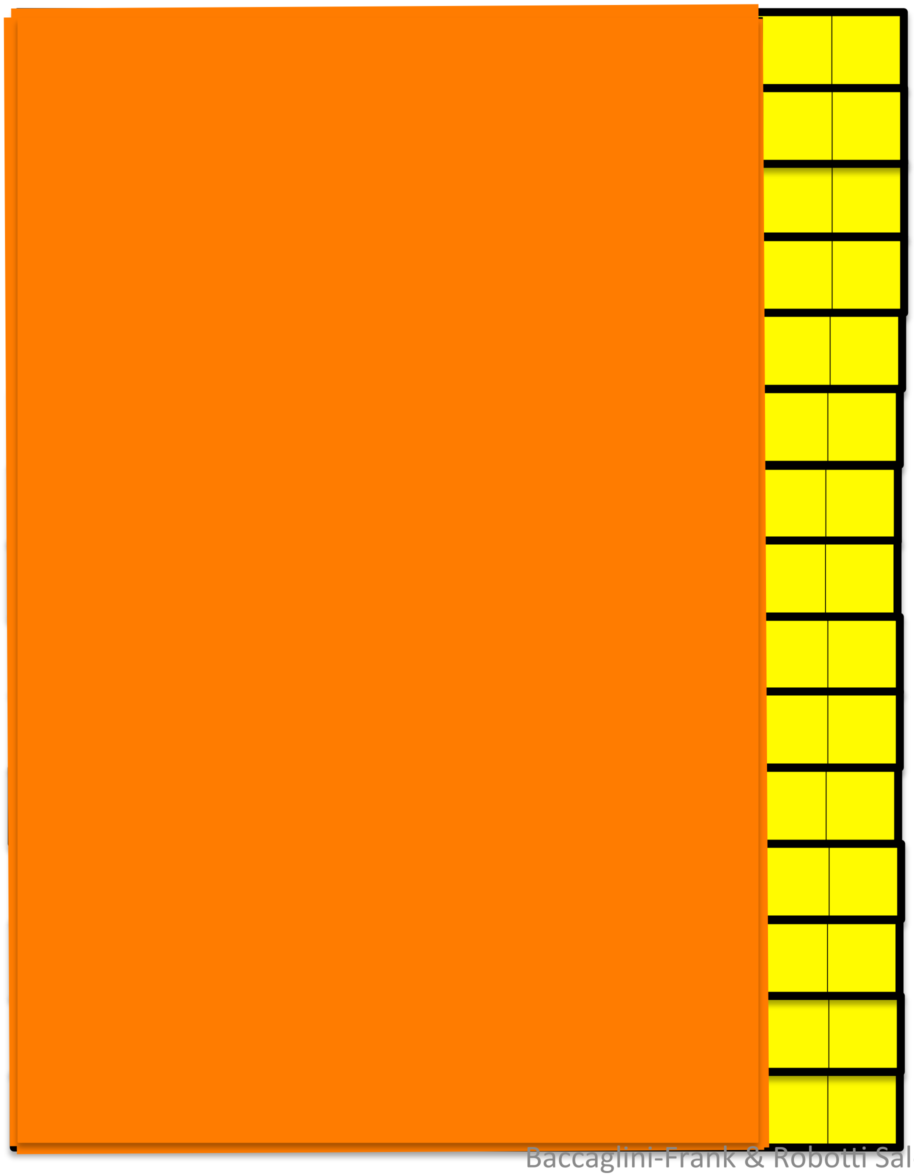
Proviamo a "manipolare" i numeri



10 +2

(10 + 2) x 15

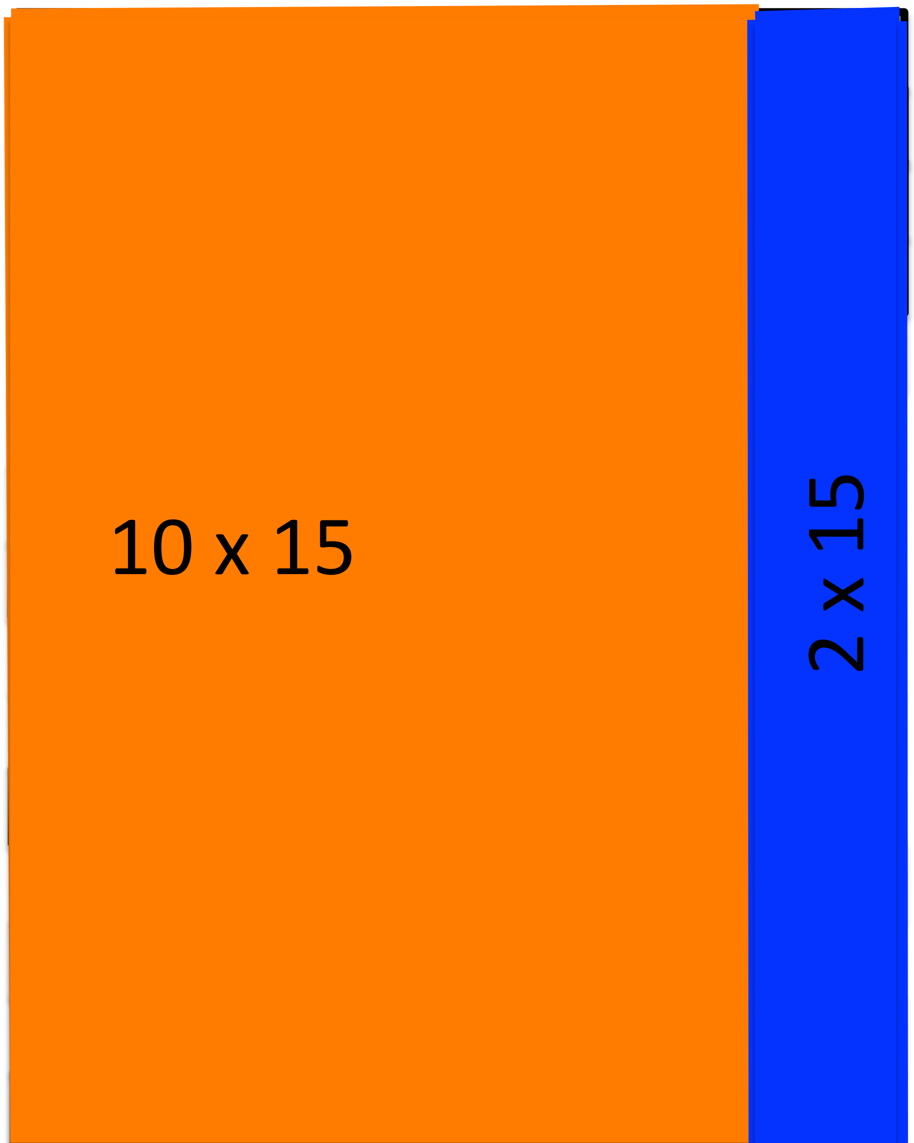
Proviamo a "manipolare" i numeri



10 +2

(10 + 2) x 15

Proviamo a "manipolare" i numeri



10 +2

(10 + 2) x 15

Proviamo a “manipolare” i numeri

Ora proviamo a pensare a

$$12 \times 15$$

(da proposta studenti)

(15x10)x2=300

15x10=150

15x2=30

(10+2)x15=10x15+2x15=150+30=180

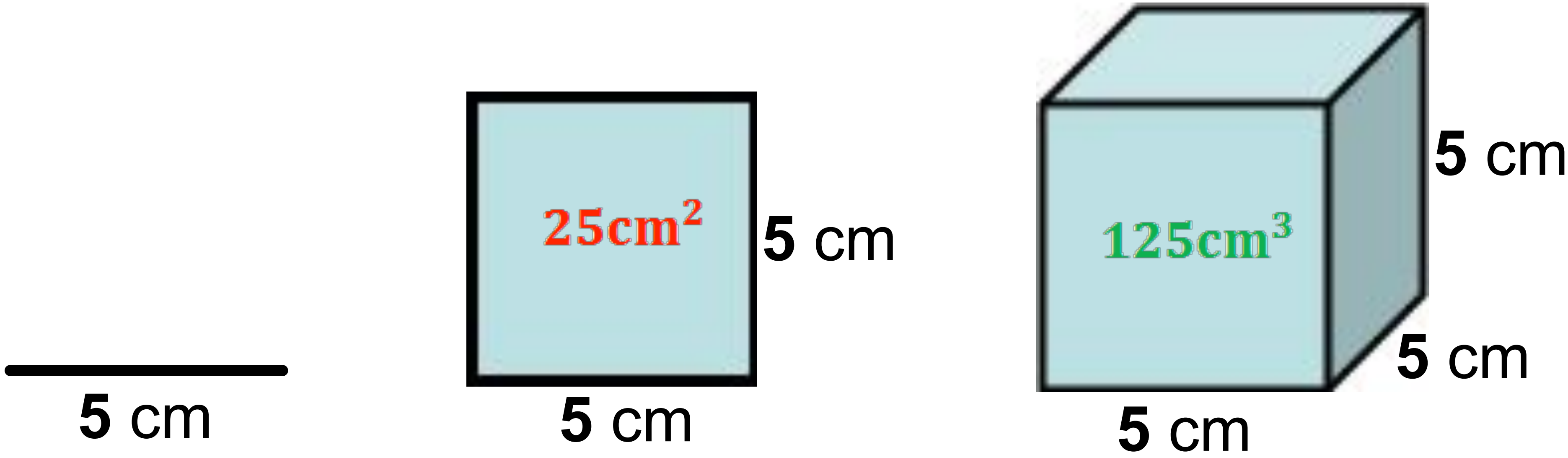
Proviamo a “manipolare” i numeri

Pensiamo adesso a

$$25 \times 29$$

in tanti modi diversi.

Potenze

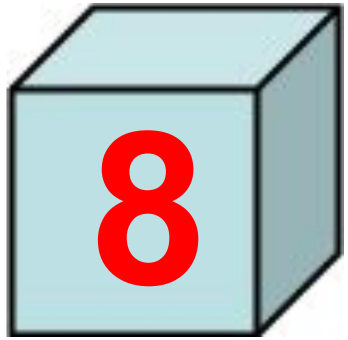


5 $\quad$ 5^2 $\quad$ 5^3

Karagiannakis, 2013

Potenze

2^3 =



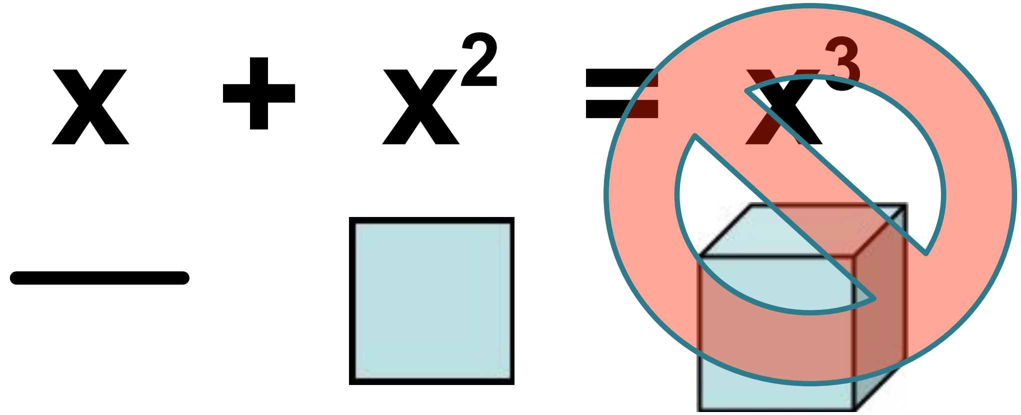
$2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$

$2^2 = 4 = 2 \cdot 2$

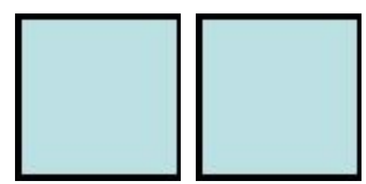
Karagiannakis, 2013

Powers

$$x + x^2 = \cancel{x^3}$$

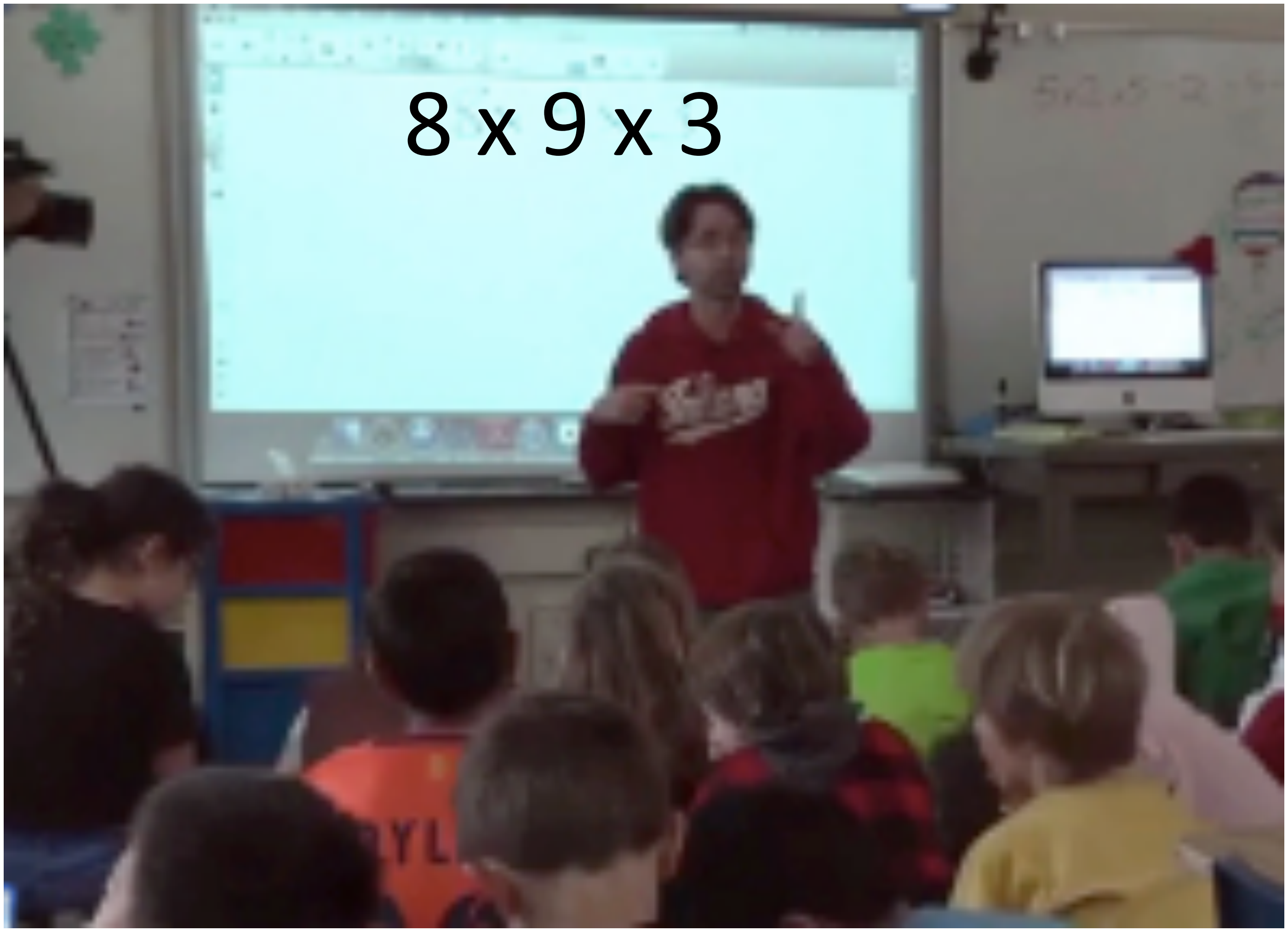


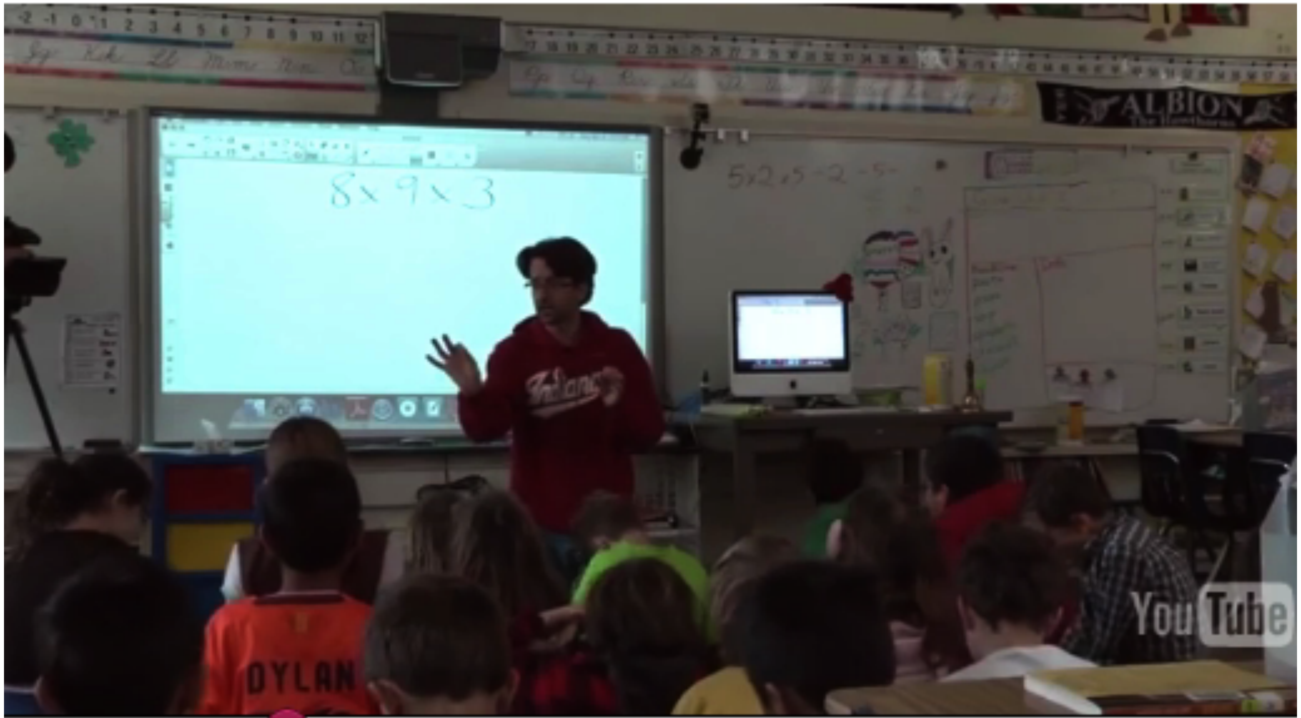
$$x^2 + x^2 = 2x^2$$



Karagiannakis, 2013

Consapevolezza dei processi





Bene, lavoro di squadra, lavorate insieme, fate a turno, condividete, cercate di risolvere il problema.

Calcolo a Mente – "Tabelline"

Le moltiplicazioni vengono introdotte come

- rappresentazioni/disposizioni di oggetti ripetuti con regolarità → addizioni ripetute
- ma anche come modo di contare disposti in modo ordinato con attenzione al lessico (es. "due per tre volte").

Si favorisce un uso appropriato di "doppio", "triplo", "metà"…

E si lavora in contemporanea con l'idea di divisione come descrizione di righe o colonne in schieramenti.

Calcolo a Mente – "Tabelline"

In particolare lavoreremo sulla rappresentazione di prodotti come "rettangoli" che possiamo comporre e scomporre, considerandone diverse parti e/o l'intero a seconda della manipolazione mentale che stiamo facendo.

Nota storica: l'idea di numero "rettangolare" viene dalla scuola pitagorica e fu ripresa nel II Libro degli Elementi di Euclide

Calcolo a Mente – “Tabelline”

In particolare lavoreremo sulla rappresentazione di prodotti come “rettangoli” che possiamo comporre e scomporre, considerandone diverse parti e/o l’intero a seconda della manipolazione mentale che stiamo facendo.

Come introdurremo tali rappresentazioni?

Diagramma-rettangolo

Attività 1

L'insegnante disegna alla lavagna la rappresentazione seguente, oppure consegna a tutti i bambini una fotocopia che la contiene.

3 per 2 volte

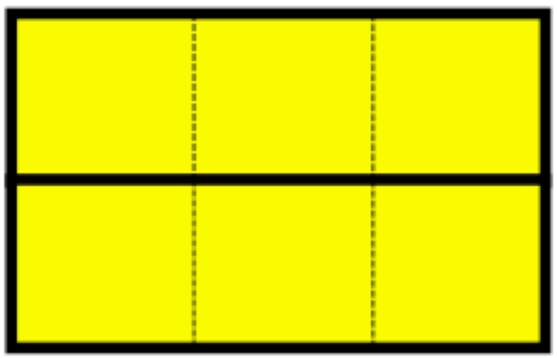


Diagramma-rettangolo

Attività 1

- *Osserva la rappresentazione di "3 per 2 volte".*
- *Descrivi la rappresentazione con parole tue.*
- *Rappresenta di fianco "2 per 3 volte".*
- *Confronta le rappresentazioni. Di quanti quadratini sono composti in tutto? Quali differenze noti tra le due rappresentazioni?*
- *Senza rifare il disegno, come potresti guardare la rappresentazione di "3 per 2 volte" per vederla come quella di "2 per 3 volte"?*

Diagramma-rettangolo

Attività 1

Senza rifare il disegno, come potresti guardare la rappresentazione di "3 per 2 volte" per vederla come quella di "2 per 3 volte"?

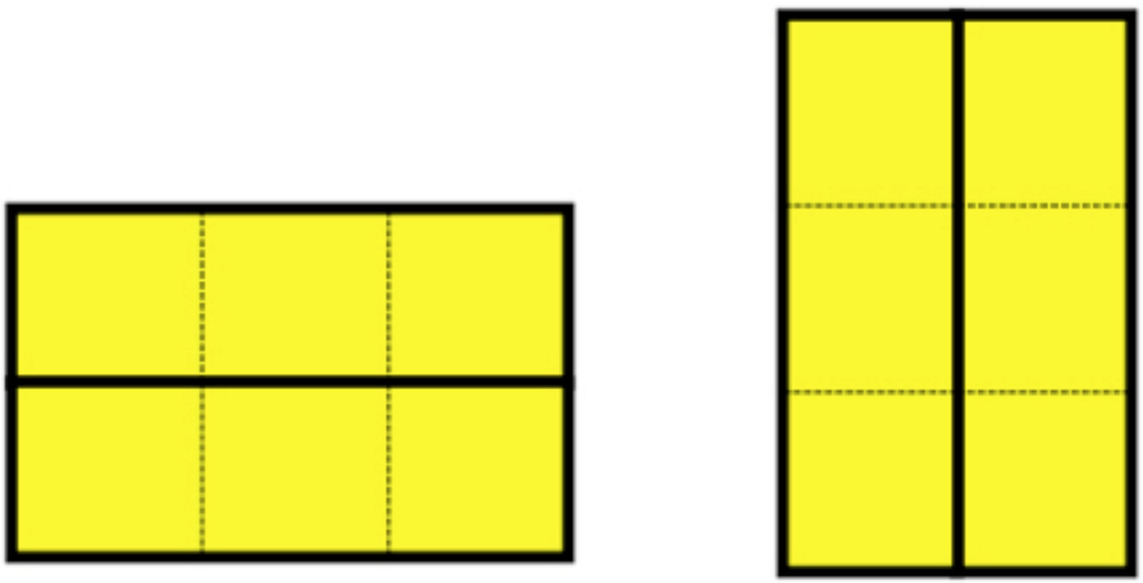


Diagramma-rettangolo

Attività 2

L’insegnante da’ le seguenti consegne:

1. Prova a rappresentare “6 per 3 volte” e “3 per 6 volte”.

2. Come potresti descrivere queste rappresentazioni con operazioni?

3. Dati questi diagrammi-rettangolo, esprimi, a voce, che cosa rappresentano, e rappresentali anche con operazioni aritmetiche.

L'insegnante disegna alla lavagna le rappresentazioni seguenti, oppure consegna a tutti i bambini una fotocopia che le contiene.

Diagramma-rettangolo

Attività 2

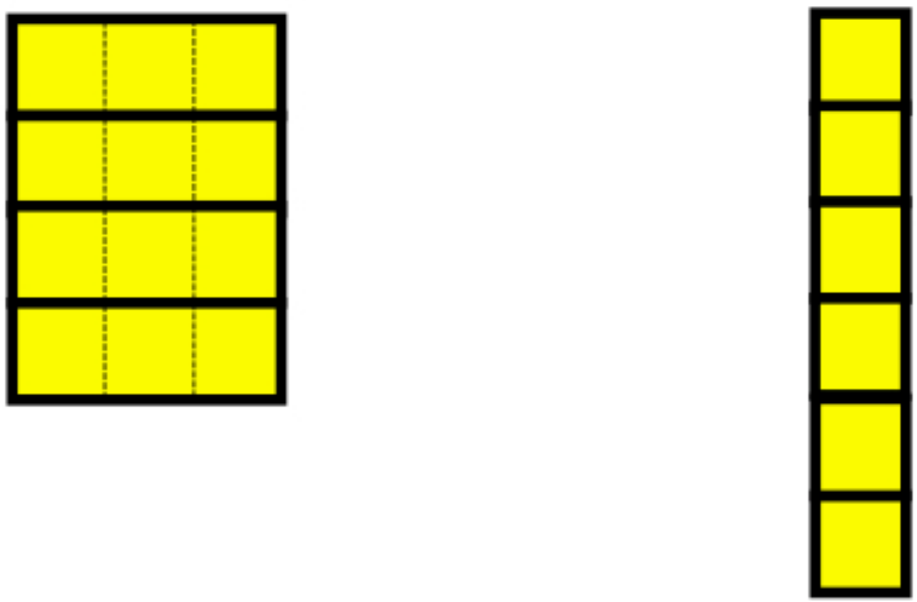


Diagramma-rettangolo

Attività 2

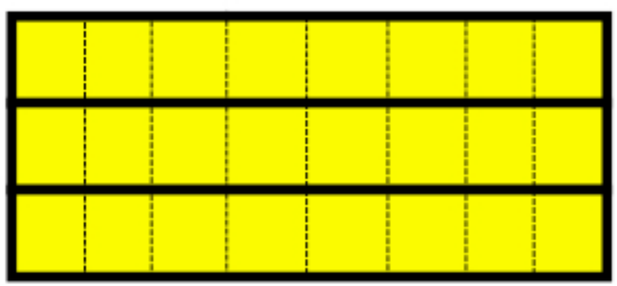


Diagramma-rettangolo

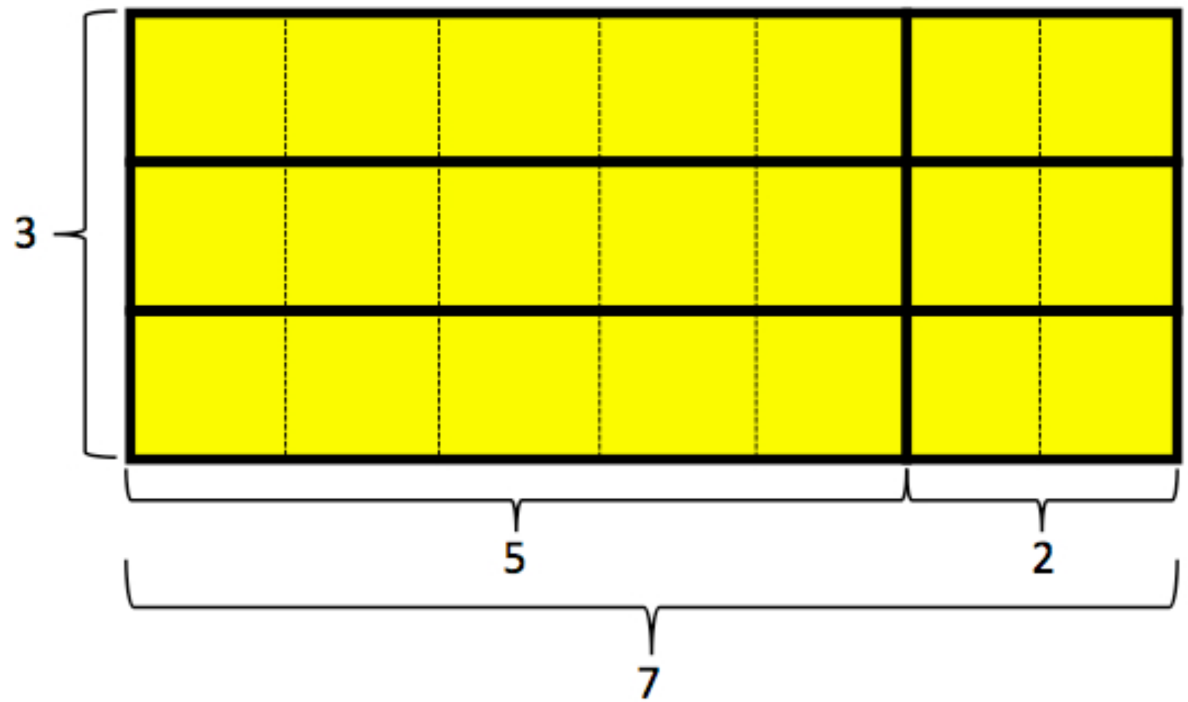
Attività 3

Guardiamo questo diagramma-rettangolo.

L'insegnante disegna alla lavagna la rappresentazione seguente, oppure consegna a tutti i bambini una fotocopia che la contiene.

Diagramma-rettangolo

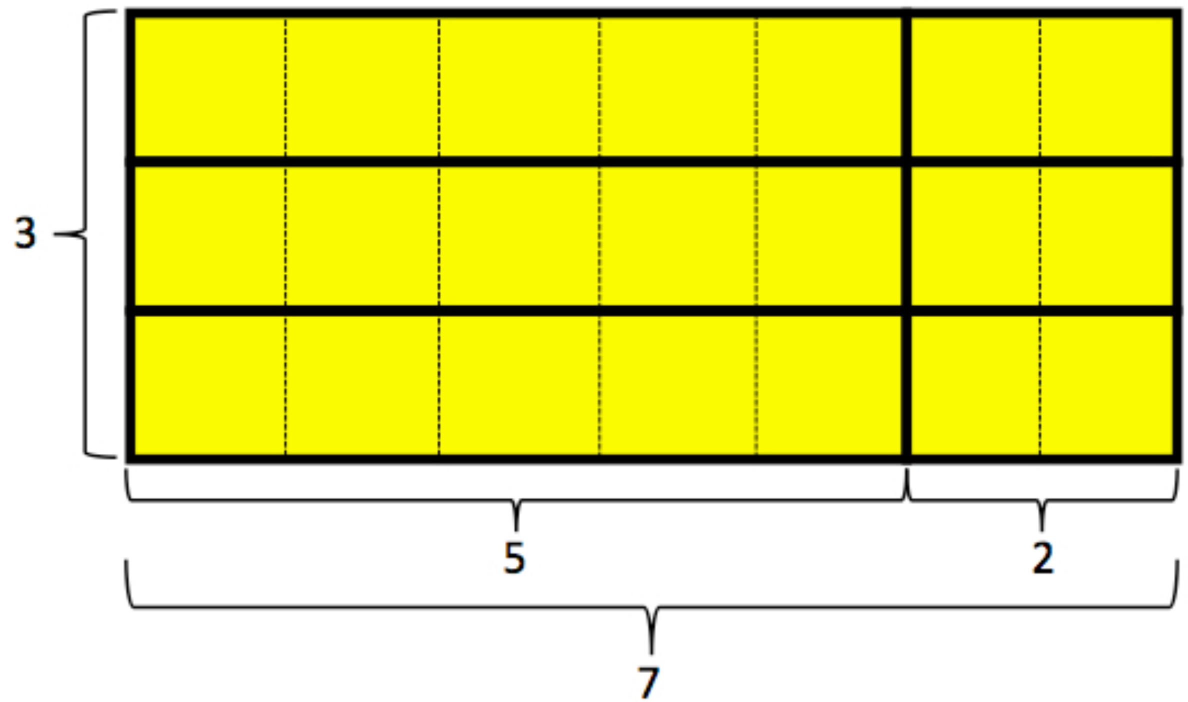
Attività 3



Che cosa può rappresentare questo diagramma? Descrivi con parole tue.

Diagramma-rettangolo

Attività 3



E se dovessi descriverlo con operazioni, quali useresti? Perché?

Diagramma-rettangolo

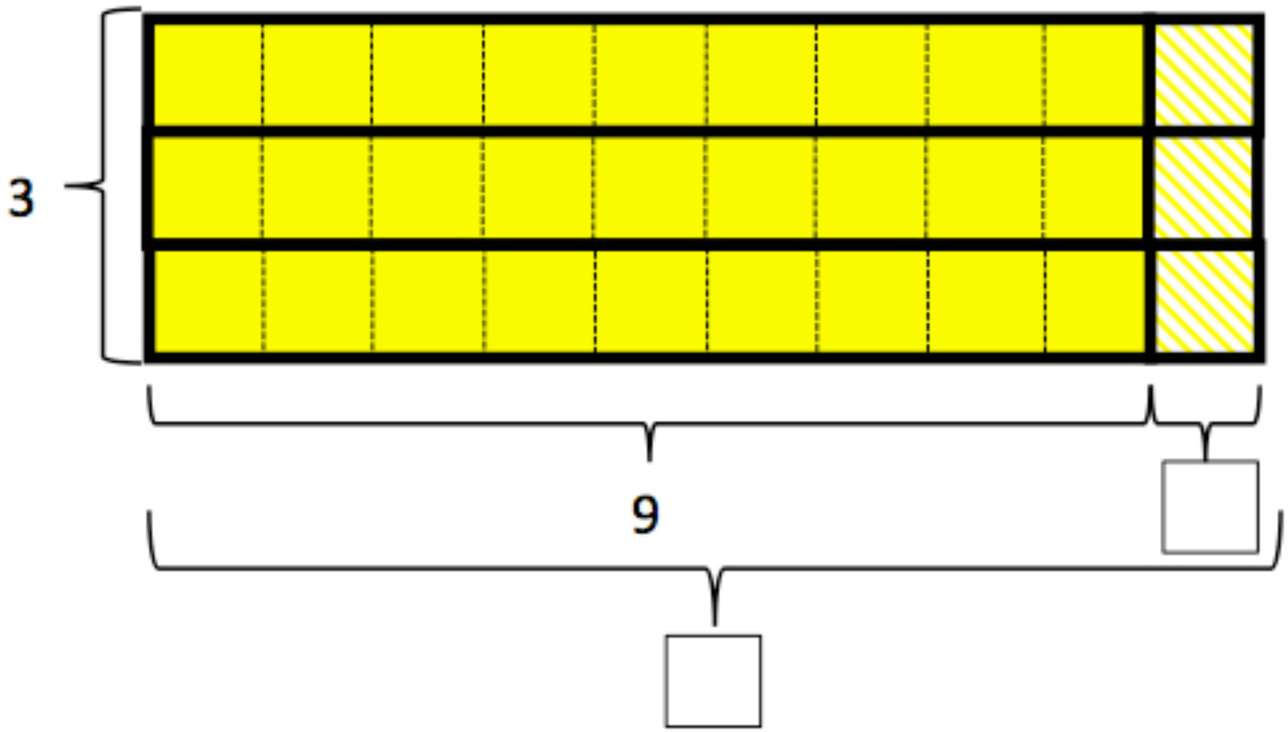
Attività 3

Guardiamo questo diagramma-rettangolo.

L'insegnante disegna alla lavagna la rappresentazione seguente, oppure consegna a tutti i bambini una fotocopia che la contiene.

Diagramma-rettangolo

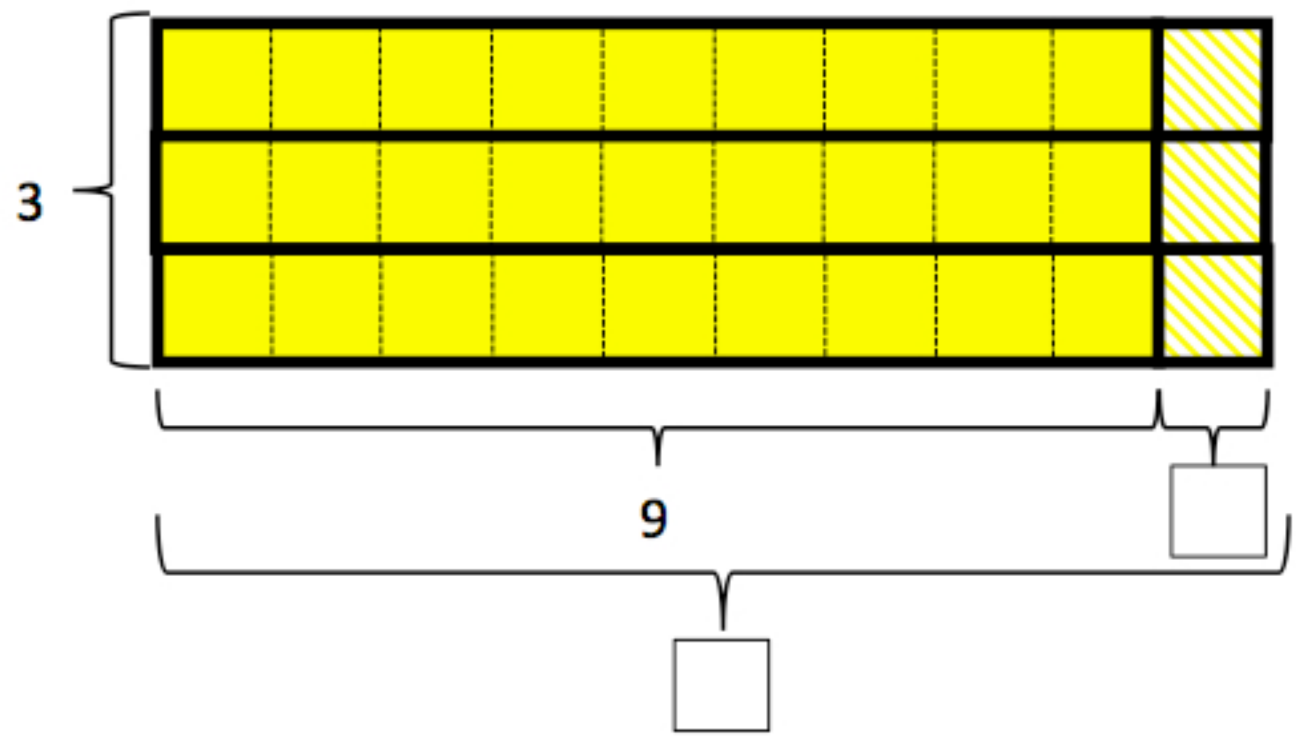
Attività 3



Che cosa può rappresentare questo diagramma?
Descrivi con parole tue.

Diagramma-rettangolo

Attività 3

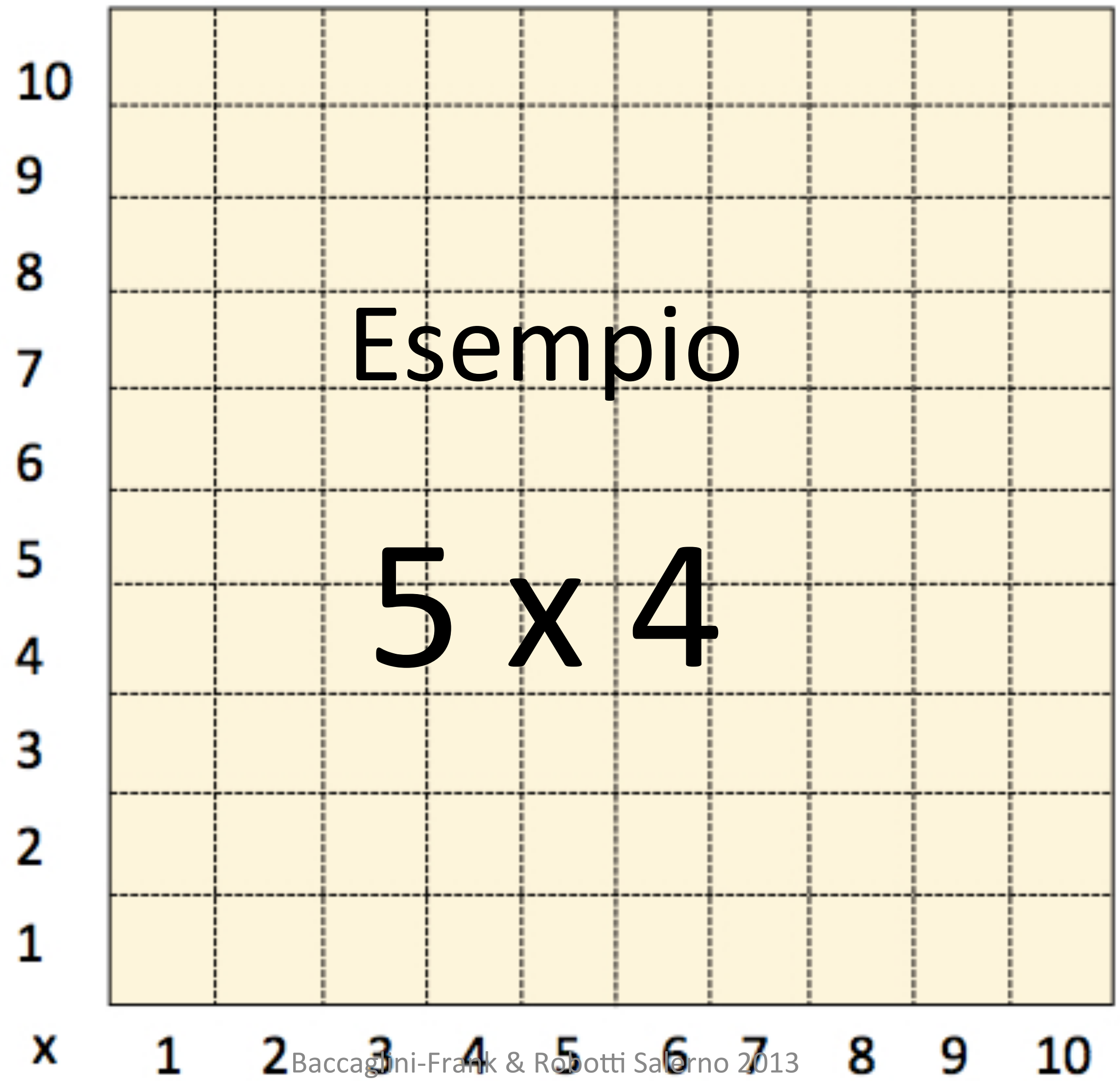


E se dovessi descriverlo con operazioni, quali useresti? Perché?

Lavoriamo con i diagrammi-rettangolo su questa tabella

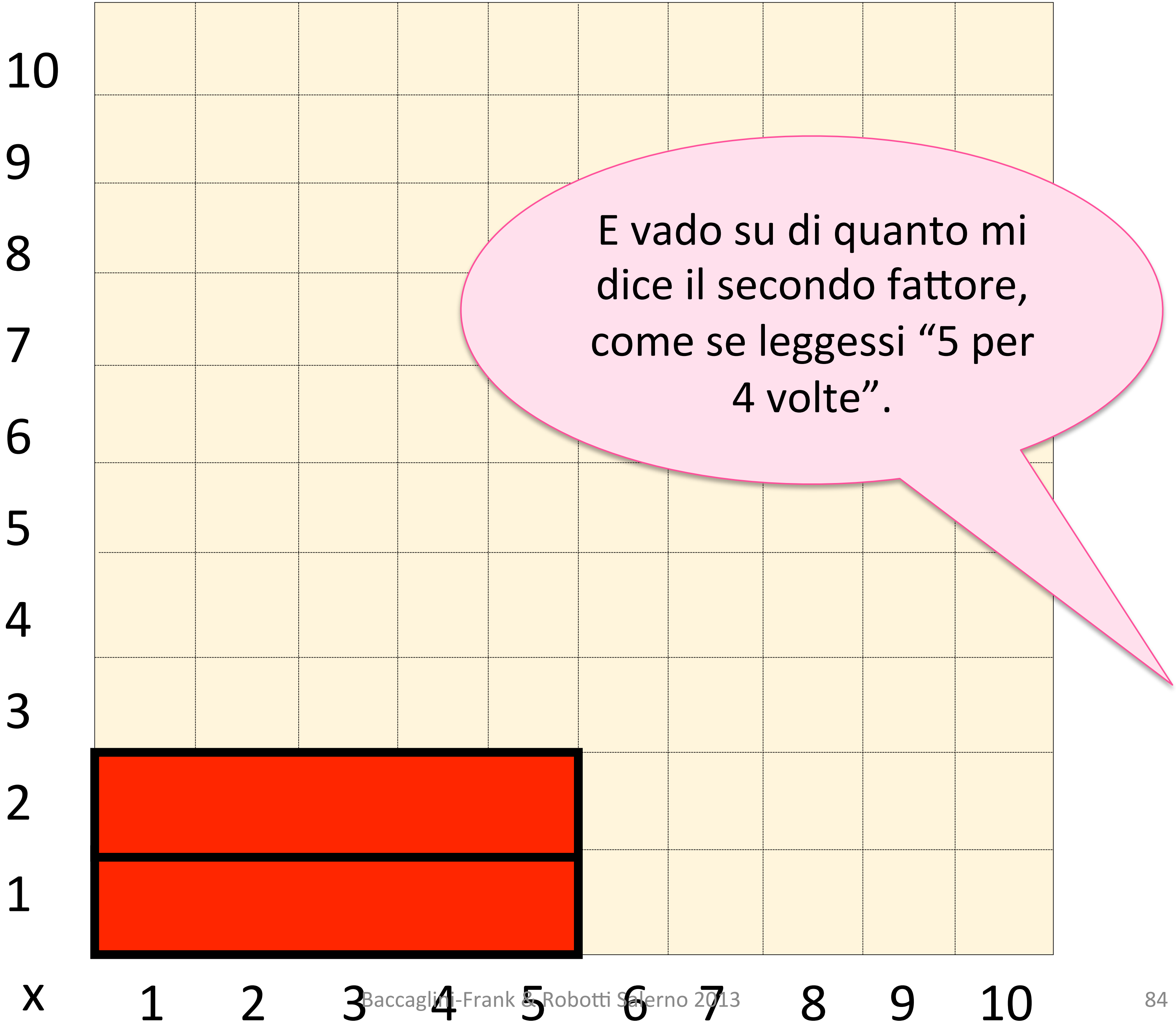
10										
9										
8										
7										
6										
5										
4										
3										
2										
1										
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

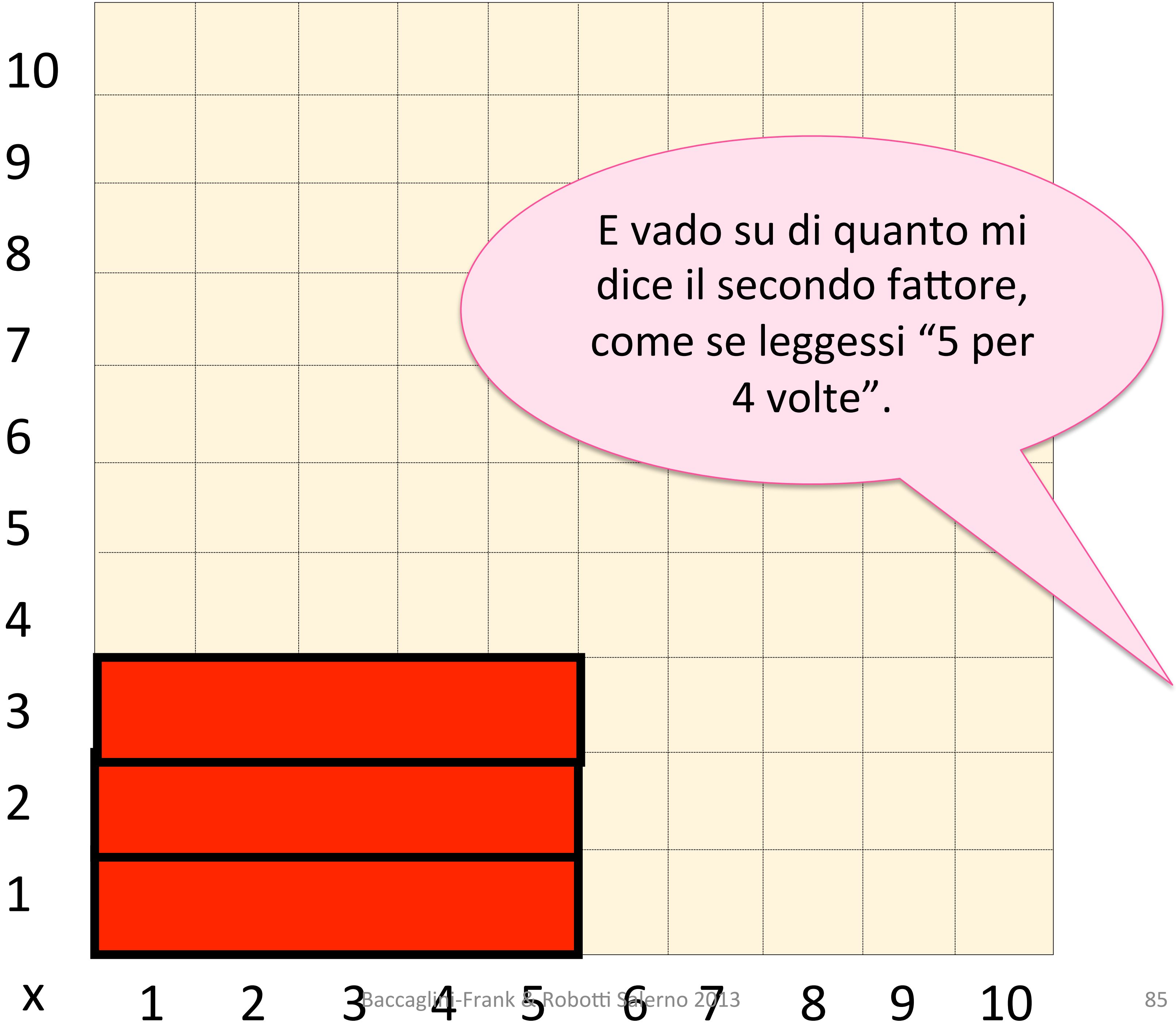
Lavoriamo con i diagrammi-rettangolo su questa tabella

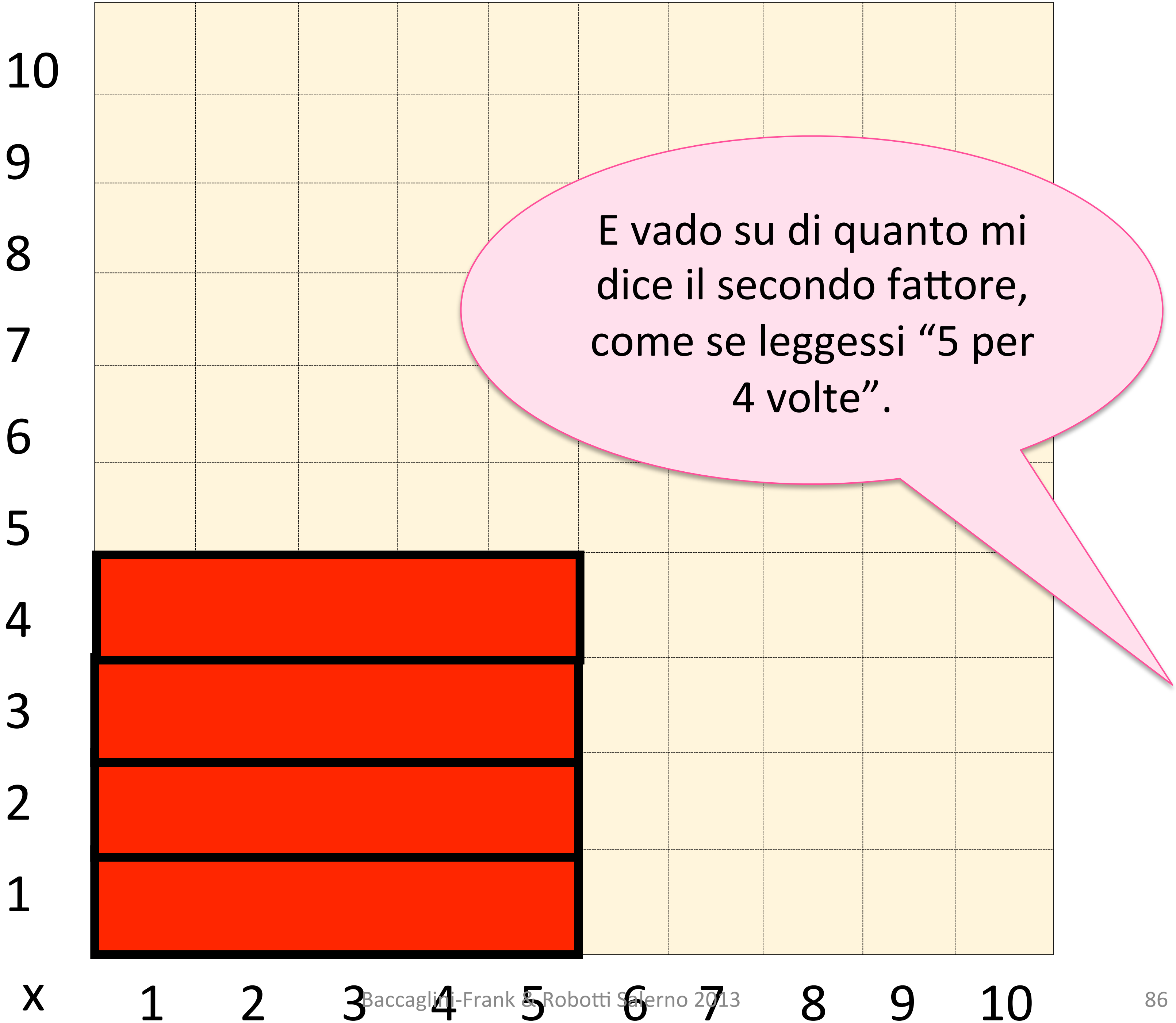


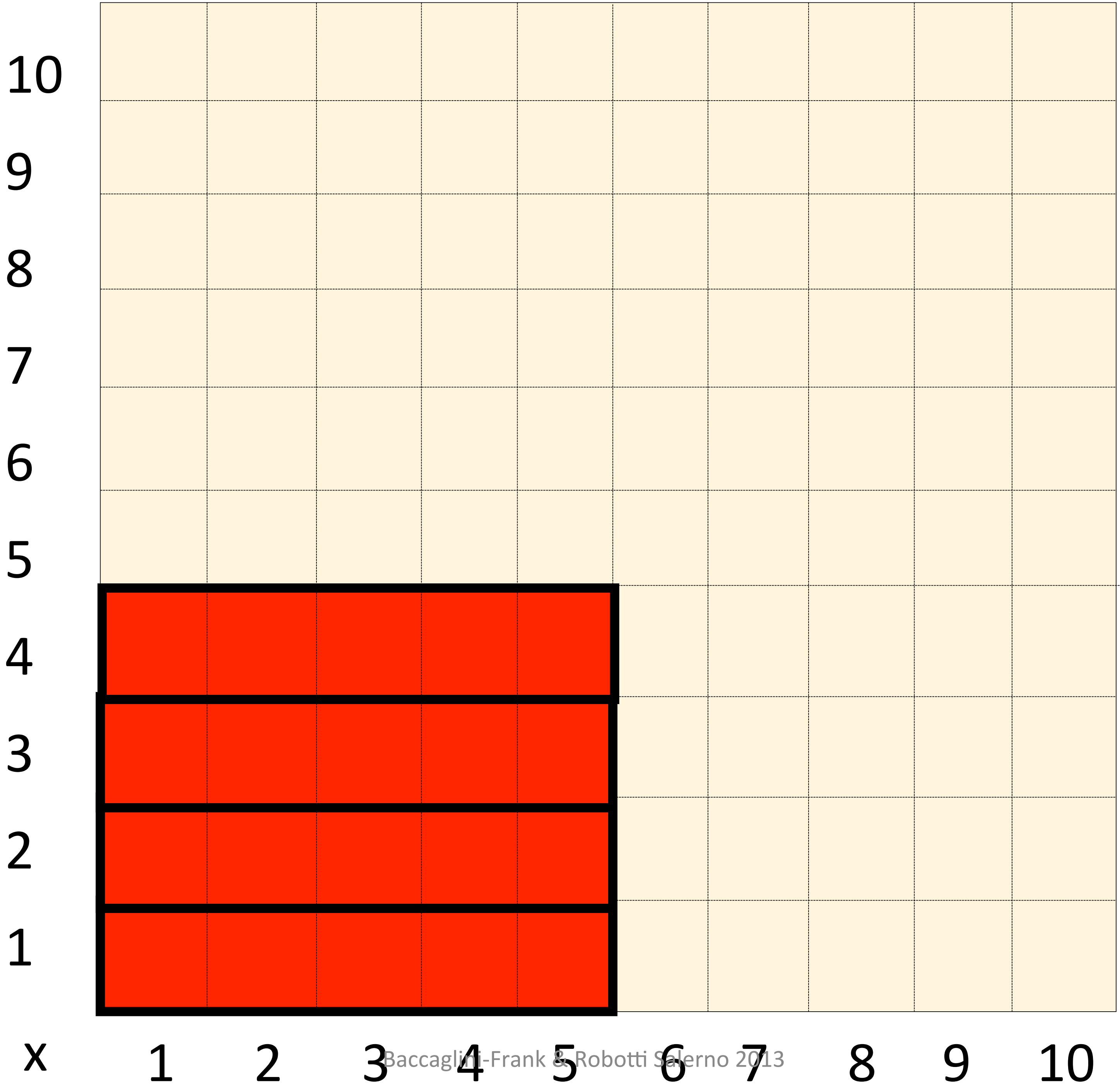

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
Parto dalla riga in basso
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E vado su di quanto mi dice il secondo fattore, come se leggessi “5 per 4 volte”.

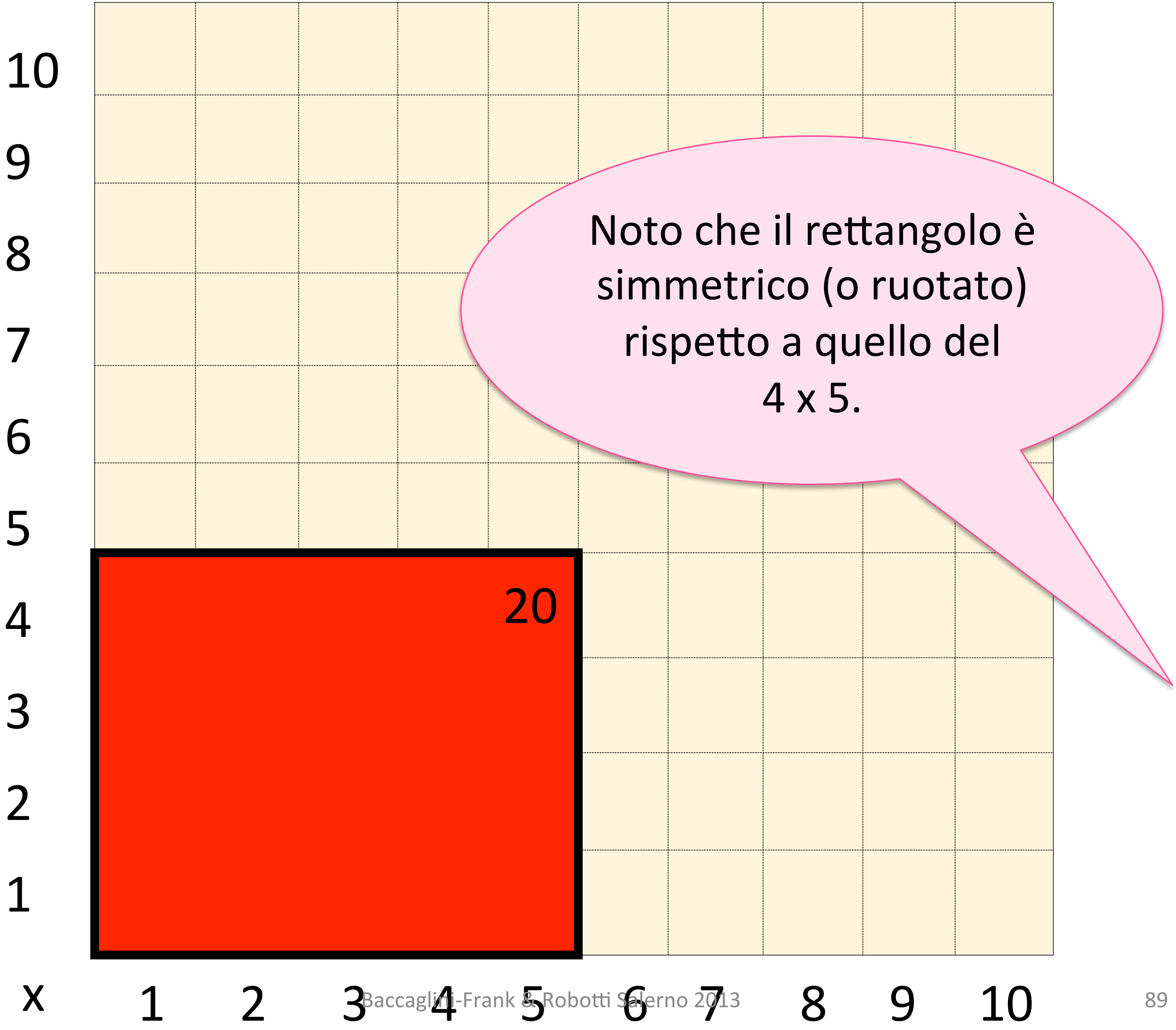

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
E vado su di quanto mi dice il secondo fattore, come se leggessi “5 per 4 volte”.

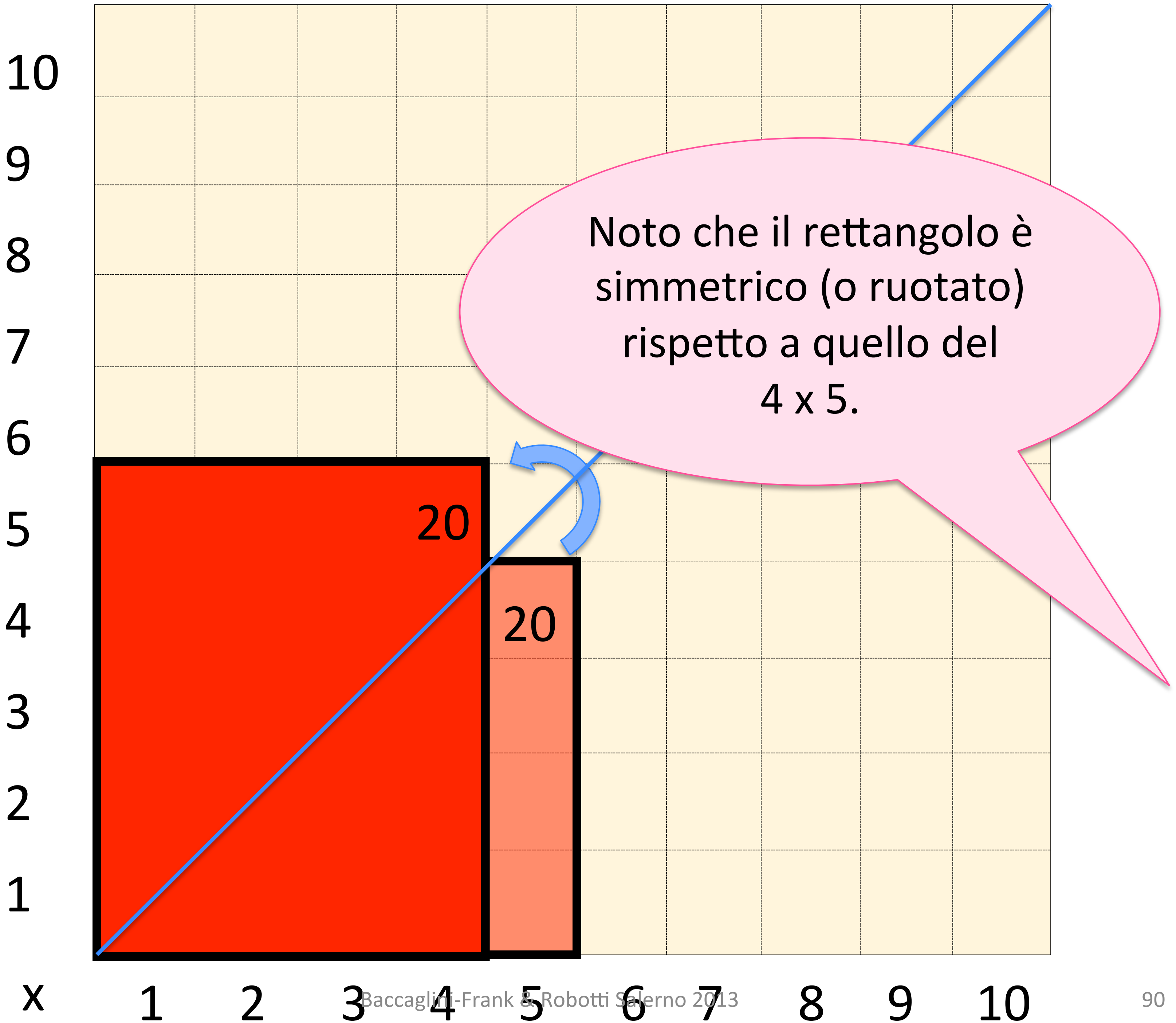

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
E vado su di quanto mi dice il secondo fattore, come se leggessi “5 per 4 volte”.

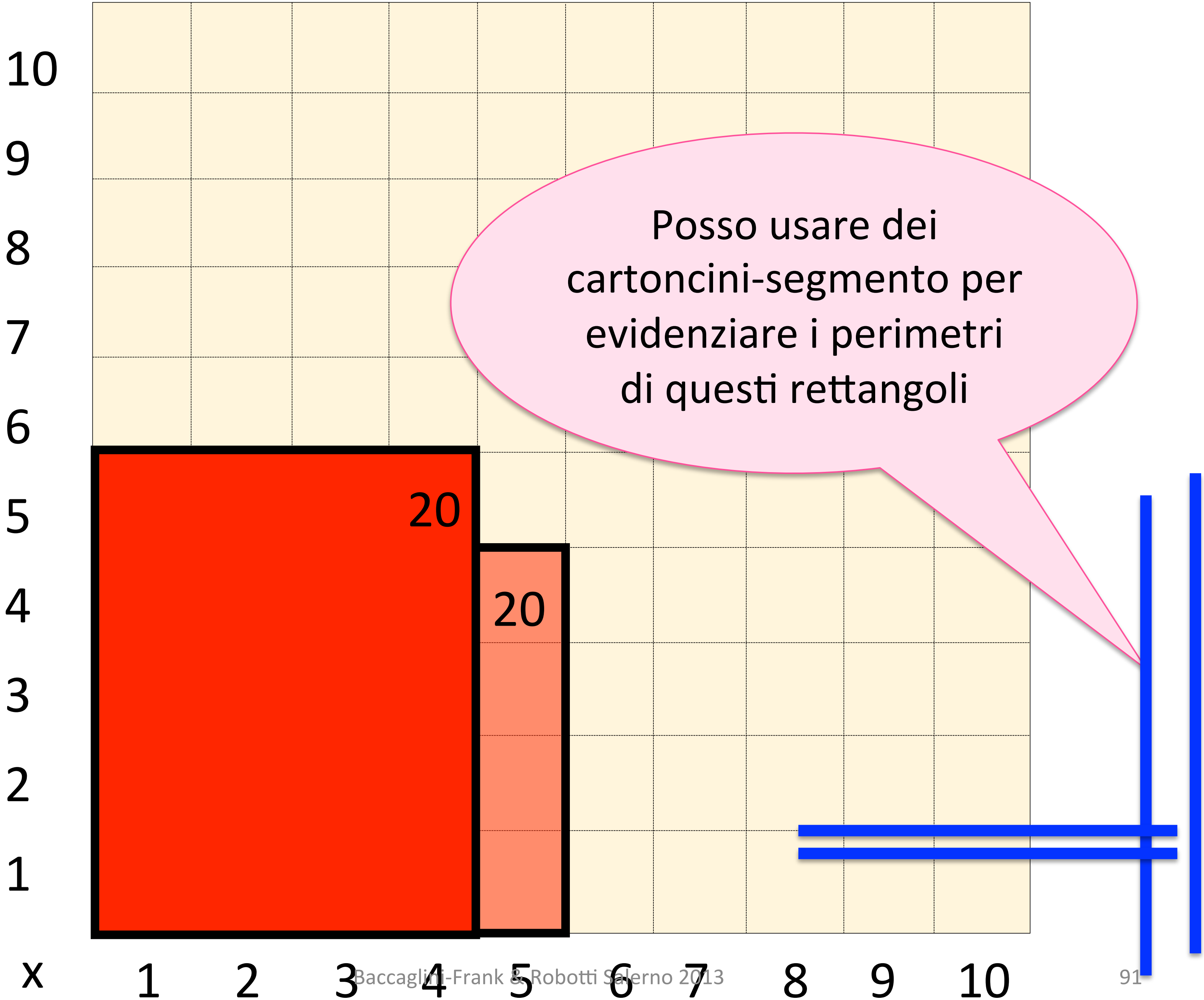

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E vado su di quanto mi dice il secondo fattore, come se leggessi “5 per 4 volte”.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
Scrivo il prodotto nel quadretto in alto a destra del diagramma-rettangolo.

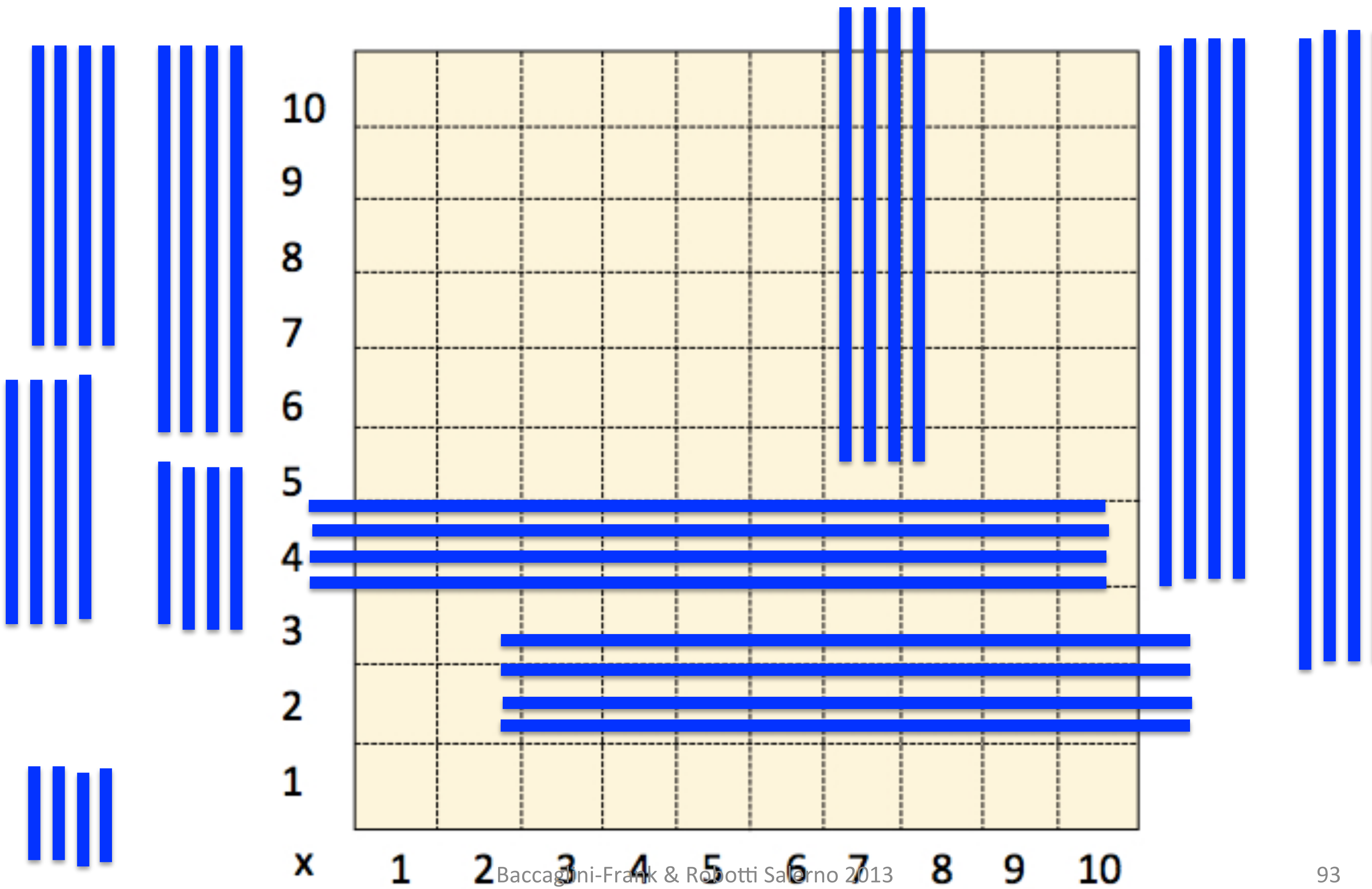

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
20
Noto che il rettangolo è simmetrico (o ruotato) rispetto a quello del 4 x 5.


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
20
Noto che il rettangolo è simmetrico (o ruotato) rispetto a quello del 4 x 5.


Posso usare dei cartoncini-segmento per evidenziare i perimetri di questi rettangoli
20
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
20
Posso usare dei cartoncini-segmento per evidenziare i perimetri di questi rettangoli

Un Nuovo Artefatto



Un Nuovo Artefatto…
Che diventerà uno strumento per imparare e ricostruire le "tabelline"

Vediamo come…

Come arrivare alle “tabelline”?

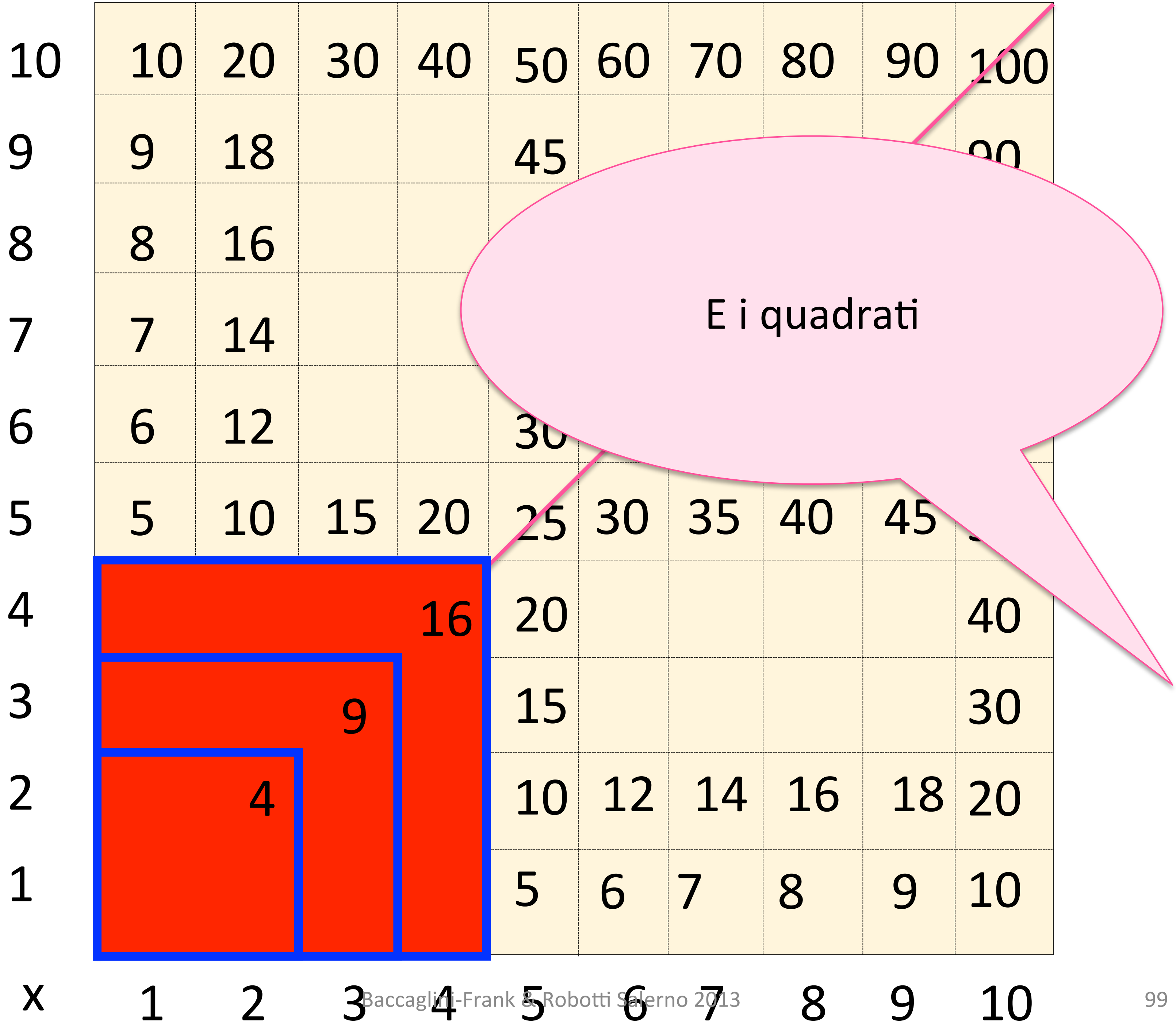
- Comincio riempiendo la tabella con i prodotti che conosco (se ne conosco, altrimenti li costruisco)
  - in genere i multipli di 1, 2, 5, 10, ottenuti come addizioni ripetute
  - e i quadrati;
- Costruisco gli altri prodotti da quelli conosciuti con composizione e scomposizione vista con i diagrammi-rettangoli.

10	10	20			50					100
9	9	18			45					90
8	8	16			40					80
7	7	14			35					70
6	6	12			30					60
5	5	10			25					50
4	4	8			20					40
3	3	6			15					30
2	2	4			10					20
1	1	2			5					10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

10	10	20			50					100
9	9	18			45					90
8	8	16								
7	7	14								
6	6	12			30					
5	5	10			25					
4	4	8			20					40
3	3	6			15					30
2	2	4			10					20
1	1	2			5					10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

E grazie ai rettangoli simmetrici…

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18			45					90
8	8	16			40					80
7	7	14			35					70
6	6	12			30					60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8			20					40
3	3	6			15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10


E i quadrati

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18			45				81	90
8	8	16			40			64		80
7	7	14			35		49			70
6	6	12			30	36				60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8		16	20					40
3	3	6	9		15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18			45				81	90
8	8	16								
7	7	14								
6	6	12			30					
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	[illegible]
4	4	8		16	20					40
3	3	6	9		15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Quindi manca
abbastanza poco…!

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18			45				81	90
8	8	16								
7	7	14								
6	6	12			30					
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
4	4	8		16	20					40
3	3	6	9		15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Cerchiamo, per esempio
4 x 3.

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18			45				81	90
8	8	16								
7	7	14								
6	6	12			30					
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
4	4	8		16	20					40
3	3	6	9		15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Conosco 2 x 3

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18			45					
8	8	16								
7	7	14								
6	6	12			30					
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
4	4	8		16	20					40
3	3	6	9	12	15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

E lo penso raddoppiato.

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18			45					90
8	8	16								
7	7	14								
6	6	12			30					
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
4	4	8		16	20					40
3	3	6	9	12	15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Posso usare i multipli
del 2 che conosco,
“doppi” rispetto ai
multipli di 1.

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18			45					90
8	8	16								
7	7	14								
6	6	12			30					
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
4	4	8		16	20					40
3	3	6	9	12	15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Quindi, so...

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18		36	45				81	90
8	8	16		32	40			64		80
7	7	14		28	35		49			70
6	6	12		24	30	36				60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	3	6	9	12	15					30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Cerchiamo i quattro multipli del 3 che mancano:

3 x 6

3 x 7

3 x 8

3 x 9

Cerchiamo i quattro multipli del 3 che mancano:

$$3 \times 6 = 3 \times (3 + 3) = 9 + 9 = 18$$

$$3 \times 7 = 21$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$3 \times 9 = 3 \times (10-1) = 30 - 3 = 27$$

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18	27	36	45				81	90
8	8	16	24	32	40			64		80
7	7	14	21	28	35		49			70
6	6	12	18	24	30	36				60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Cerchiamo i tre multipli di 8 che mancano (possiamo ragionare con i "doppi" come per il 4):

8 x 6

8 x 7

8 x 9

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18	27	36	45				81	90
8	8	16	24	32	40	48		64		80
7	7	14	21	28	35		49			70
6	6	12	18	24	30	36		48		60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Cerchiamo i tre multipli di 8 che mancano
(possiamo ragionare con i "doppi" come per il 4):

$8 \times 6 = 48$

8×7

8×9

Cerchiamo i tre multipli di 8 che mancano (possiamo ragionare con i “doppi” come per il 4):

$$8 \times 6 = 48$$

$$8 \times 7 = 56$$

$$8 \times 9 = 72$$

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18	27	36	45			72	81	90
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
7	7	14	21	28	35		49	56		70
6	6	12	18	24	30	36		48		60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Cerchiamo i due multipli di 6 che mancano:

- possiamo pensare ai “doppi” dei multipli di 3
- oppure usare “conoscenze” come
  - il quadrato 6 x 6
  - La scomposizione di 9 in 10-1

6 x 7

6 x 9

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18	27	36	45	54		72	81	90
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
7	7	14	21	28	35	42	49	56		70
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Quindi manca solo:

$$7 \times 9$$

che posso ricavare in tantissimi modi!

10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Quali lenti abbiamo a disposizione per mettere a punto una “buona didattica”?

- Teorie dalla psicologia e pedagogia;
- Scoperte e modelli neuro-scientifici rilevanti;
- Teorie in didattica della matematica (per es. la mediazione semiotica);

E si devono usare per costruire buone pratiche.

(per esempio ne abbiamo sviluppate e sperimentate alcune nel Progetto PerContare - percontare.asphi.it)

Le mani – perché usarle?

Senza la capacità di associare la rappresentazione dei numeri alla rappresentazione neurale delle dita e delle mani nelle loro posizioni normali, gli stessi numeri non possono avere una rappresentazione normale nel cervello.

(Butterworth, 1999)

Dalle neuroscienze
Uso delle Mani

Ipotesi: Tre abilità di base su cui poggiano le più complesse abilità numeriche sono

- Saper riconoscere piccole numerosità senza contare (subitizing)
- Le abilità motorie fini (finger tapping)
- La rappresentazione che il soggetto ha delle proprie dita (gnosia digitale)

(Butterworth, 2000, 2005)

Risultati sperimentali sulla "gnosia digitale"

- "La consapevolezza delle dita" è un buon predittore delle abilità numeriche del bambino. (Noël, 2005)
  - Il potenziamento della gnosia digitale ha portato un gruppo sperimentale di bambini con scarsa abilità a superare un gruppo "forte" non sottoposto a potenziamento. (Bafalluy & Noël, 2008)

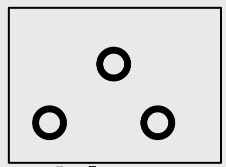
BUTTERWORTH (1999)

" LA NATURA FORNISCE UN NUCLEO DI CAPACITA' PER CLASSIFICARE PICCOLI INSIEMI DI OGGETTI NEI TERMINI DELLA LORO NUMEROSITA' ….PER CAPACITA' PIU' AVANZATE ABBIAMO BISOGNO DELL'ISTRUZIONE, OSSIA DI ACQUISIRE STRUMENTI CONCETTUALI FORNITI DALLA CULTURA IN CUI VIVIAMO".

Tre

Parola numero, canale visivo-uditivo

Rappresentazione mentale della numerosità



Capacità numeriche innate

3

Simbolo arabico, canale visivo

Capacità numeriche apprese

PRE- VERBALI
PRE-SIMBOLICHE
INNATI

SIMBOLICO
VERBALI
ACQUISITI

Conoscenza numerica preverbale

Wynn (1992)- Bambini di 4/5 mesi

I bambini guardano più a lungo gli eventi che violano le loro aspettative: ciò dimostra che i bambini sviluppano aspettative numeriche analoghe alle operazioni aritmetiche 1+1=2 e 2-1=1

Koechlin, Dahaene & Mehler (1997) mostrano che questo è indipendente dalla posizione degli oggetti

Simon, Hespos, Rochat (1995) mostrano che ciò è indipendente dall'identità degli oggetti

I bambini reagiscono agli eventi che sono numericamente impossibili 1+1=1 e 2-1=2 anche quando sono introdotti cambi di posizione o identità degli oggetti.

Fenomeno del subitizing

La memorizzazione per gli insiemi di pochi elementi è automatica, in quanto impressa nel ricordo visivo.

"subitizing":

la nostra abilità a riconoscere rapidamente la numerosità di un insieme di oggetti che vengono presentati simultaneamente quando sono 2/3 elementi per bambini, 4/6 elementi per soggetti adulti

Distinguere i mutamenti di numerosità:

A colpo d'occhio senza l'uso del calcolo

Indipendente dall'identità

(Dehaene &Cohen, 1994)

Dalle Neuroscienze
I Numeri e lo Spazio

Nel 1880 studi di Galton hanno indicato che molte persone occidentali si rappresentano i numeri in un modo stabile su uno spazio interno bidimensionale, organizzati lungo linee dei numeri idiosincratiche.

Alcuni individui vi associano anche una serie di caratteristiche visuo-spaziali associate alle informazioni numeriche, come il colore o la brillantezza che variano a seconda delle configurazioni della sequenza di numeri.

I numeri e lo Spazio

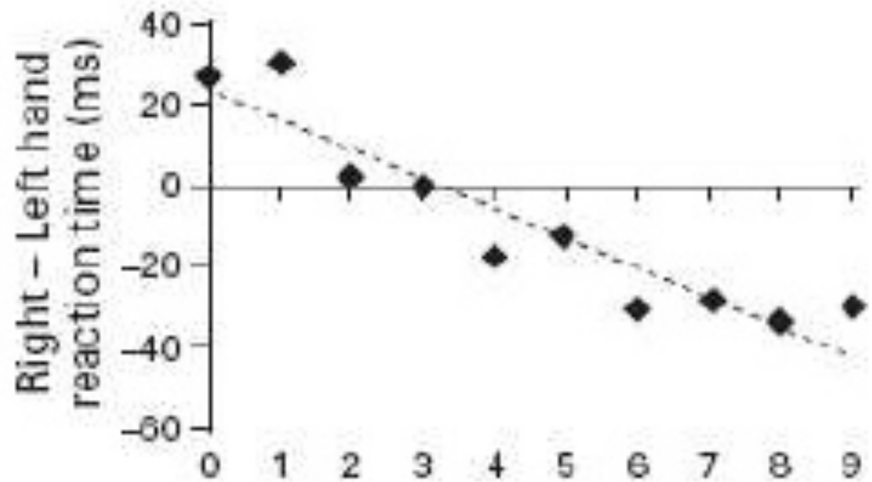
L'idea di Galton ha trovato conferma in studi successivi in cui venivano messi in relazione il processamento di numeri e quello dello spazio (per esempio, Piazza, Pinel, & Dehaene, 2006; Seron, Pesenti, Noël, Deloche, & Cornet, 1992).

Effetto SNARC
(Spatial Numerical Association of Response Codes): un effetto del comportamento in esperimenti classici per documentare "l'effetto dello spazio" nella rappresentazione dei numeri (Dehaene, Bossini, & Giraux, 1993).

I numeri e lo Spazio

Effetto SNARC

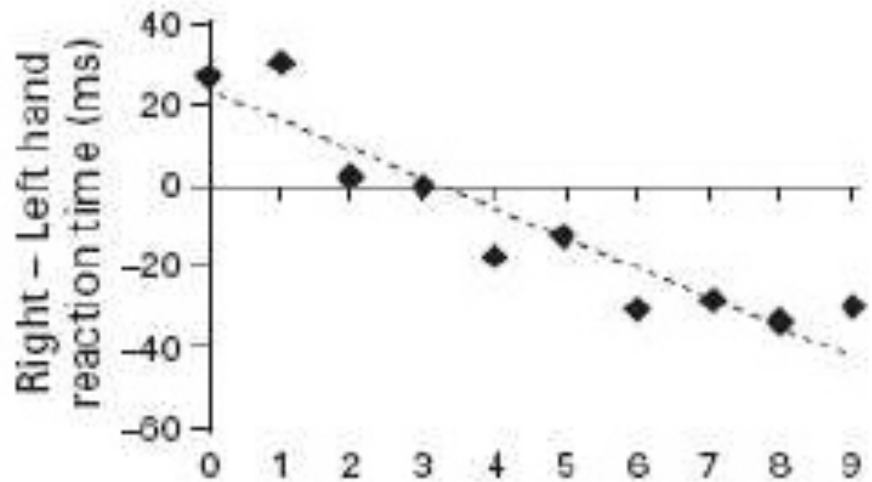
Il soggetto deve decidere se il numero è pari o dispari usando la mano destra in un caso e sinistra nell'altro. Nel diagramma sono riportate le differenze dei tempi di risposta tra la mano destra e sinistra (i valori maggiori di 0 indicano un vantaggio della mano sinistra).



I numeri e lo Spazio

Effetto SNARC

In generale si ha un vantaggio nel tempo di risposta della mano destra per numeri grandi e nella sinistra per numeri piccoli. L'effetto si ha in compiti di confronto di numeri, giudizio di parità/disparità, e ordinamento (de Hevia, et al., 2008; Dehaene, et al., 1993; Hubbard, et al., 2005).



I numeri e lo Spazio

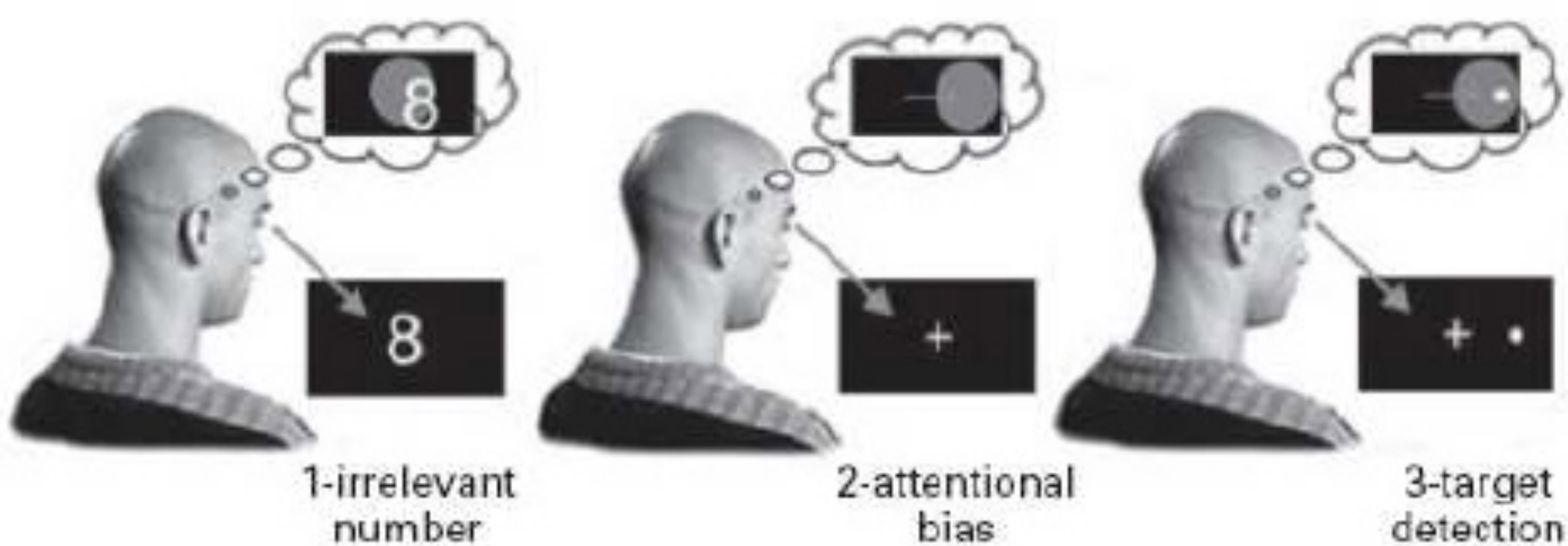
Compiti di Bisezione

Quando si chiede al soggetto di indicare il punto medio si un segmento costituito di numeri piccoli, il soggetto sceglie un punto a sinistra del vero punto medio se i numeri sono piccoli e a destra del reale punto medio se i numeri sono grandi (Calabria & Rossetti, 2005; Fischer, 2001).

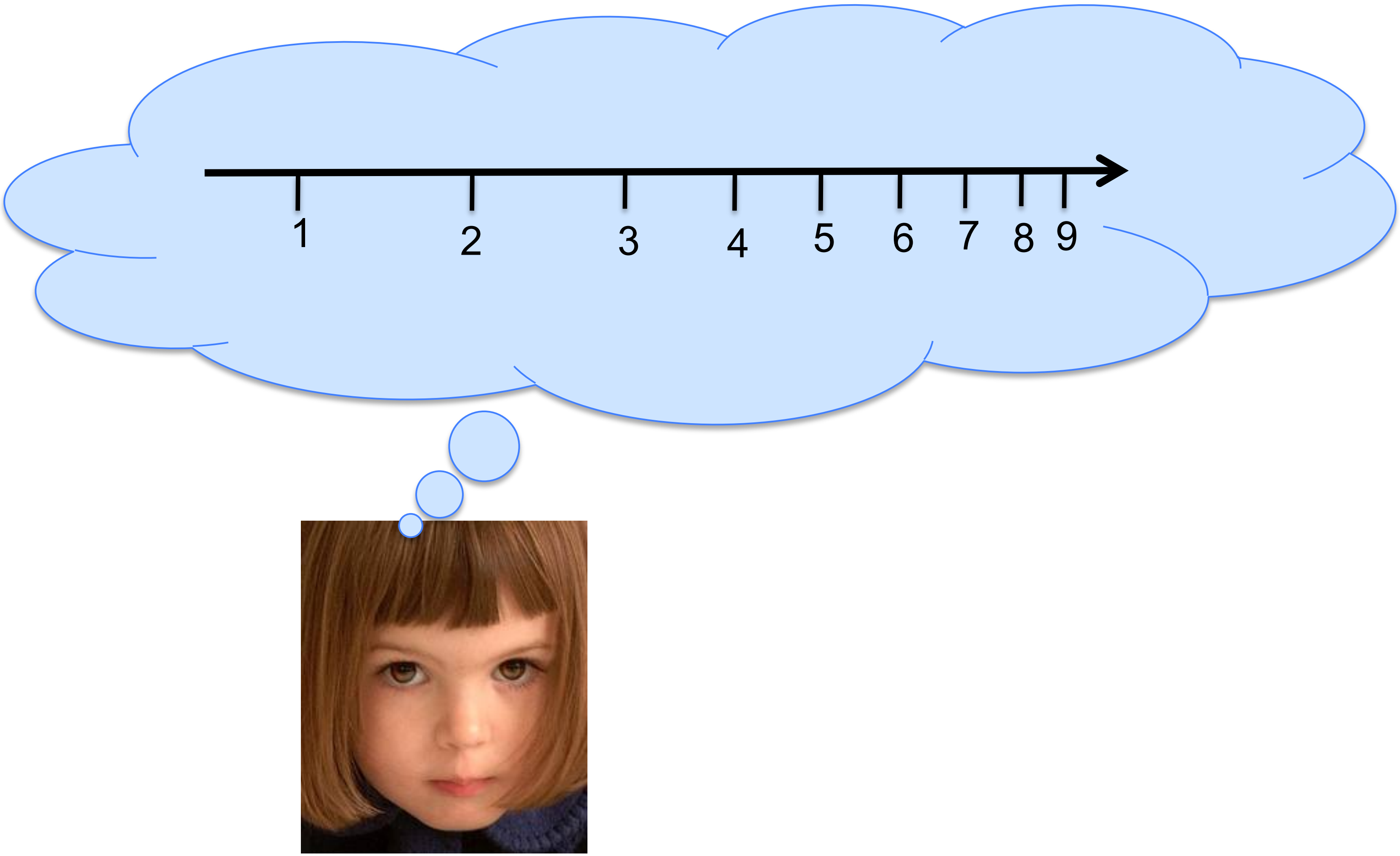
I numeri e lo Spazio

Bias attentivo

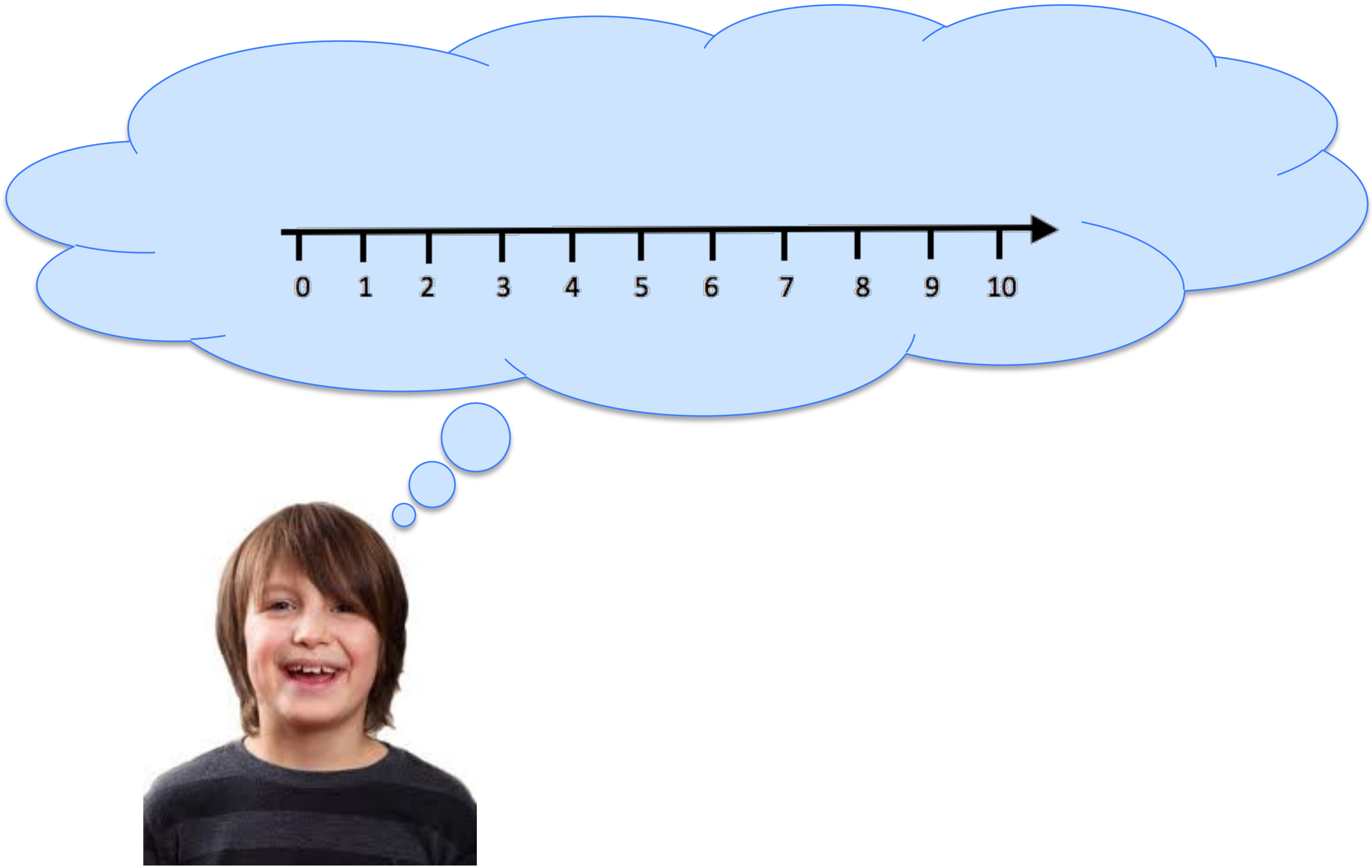
Quando si presenta al soggetto un numero mentre fissa uno schermo, automaticamente avviene uno shift di attenzione verso la destra o la sinistra del numero (sullo schermo) che porta a risposte più rapide a stimoli presentati in queste zone.



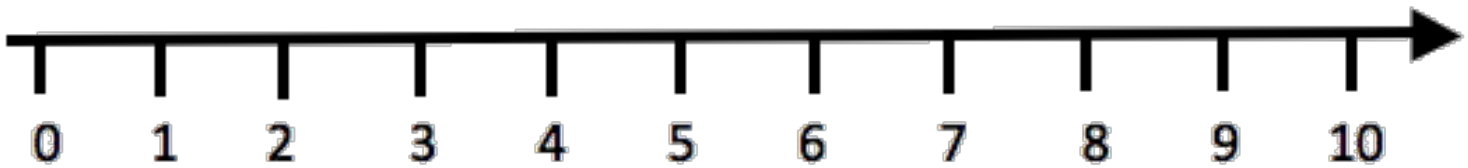
I numeri e lo Spazio



I numeri e lo Spazio

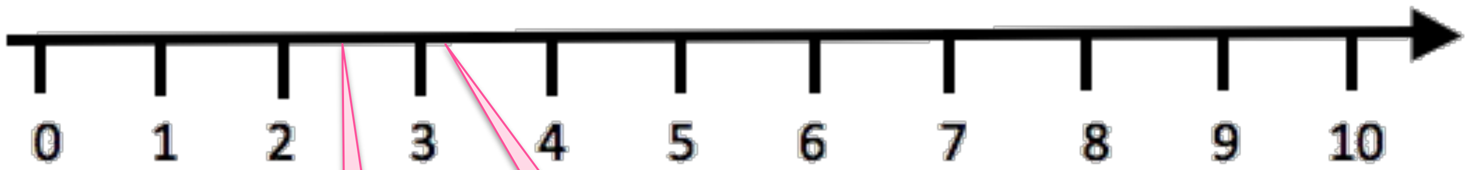


I numeri e lo Spazio



Questa è la forma a cui miriamo culturalmente (e matematico), con la possibilità di estenderla ai numeri negativi, ai razionali e agli irrazionali...

I numeri e lo Spazio



Qu sta è la form a cui mi iamo culturalmente (e mat matico), co la possibi à di estenderla ai numeri n ai razio ali e agli irra ionali...

Dunque, in didattica della matematica…

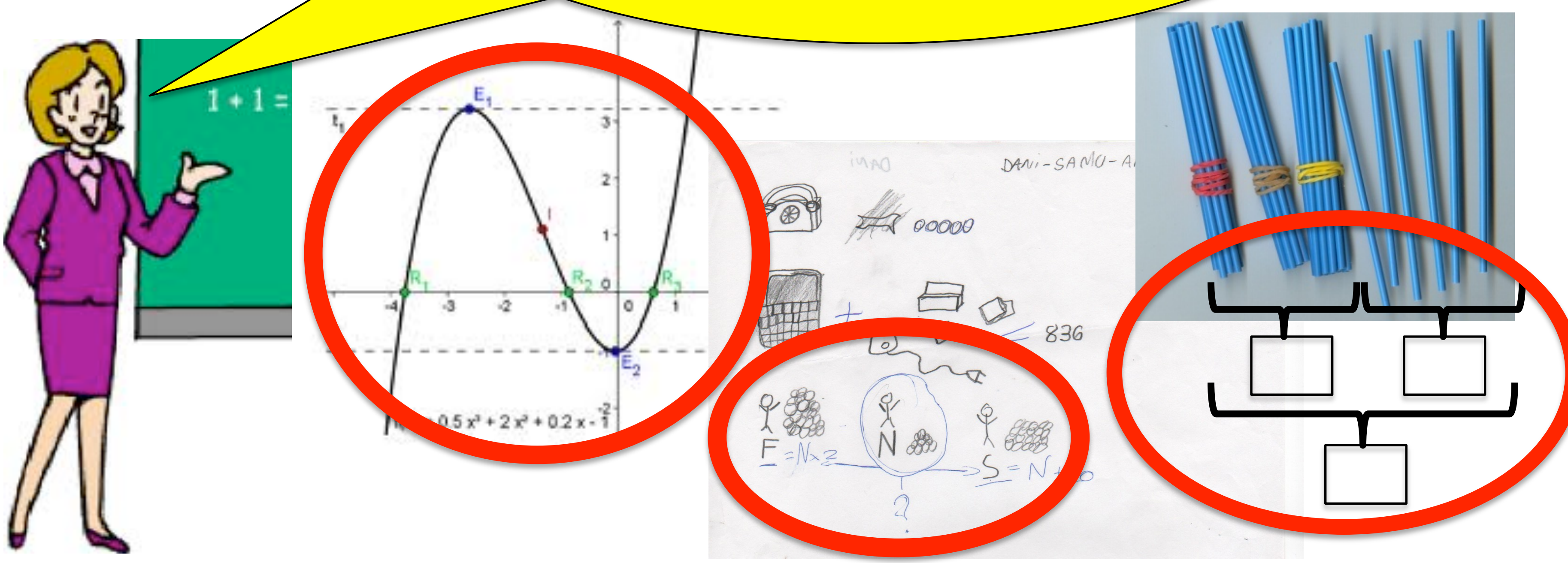
Possiamo sviluppare delle buone pratiche per sviluppare consapevolezza delle dita, mentre sviluppiamo le abilità numeriche.

Dunque, in didattica della matematica…

E “leggere” dai modi in cui
gli studenti usano le mani
gli schemi che hanno
appropriato (oppure no).

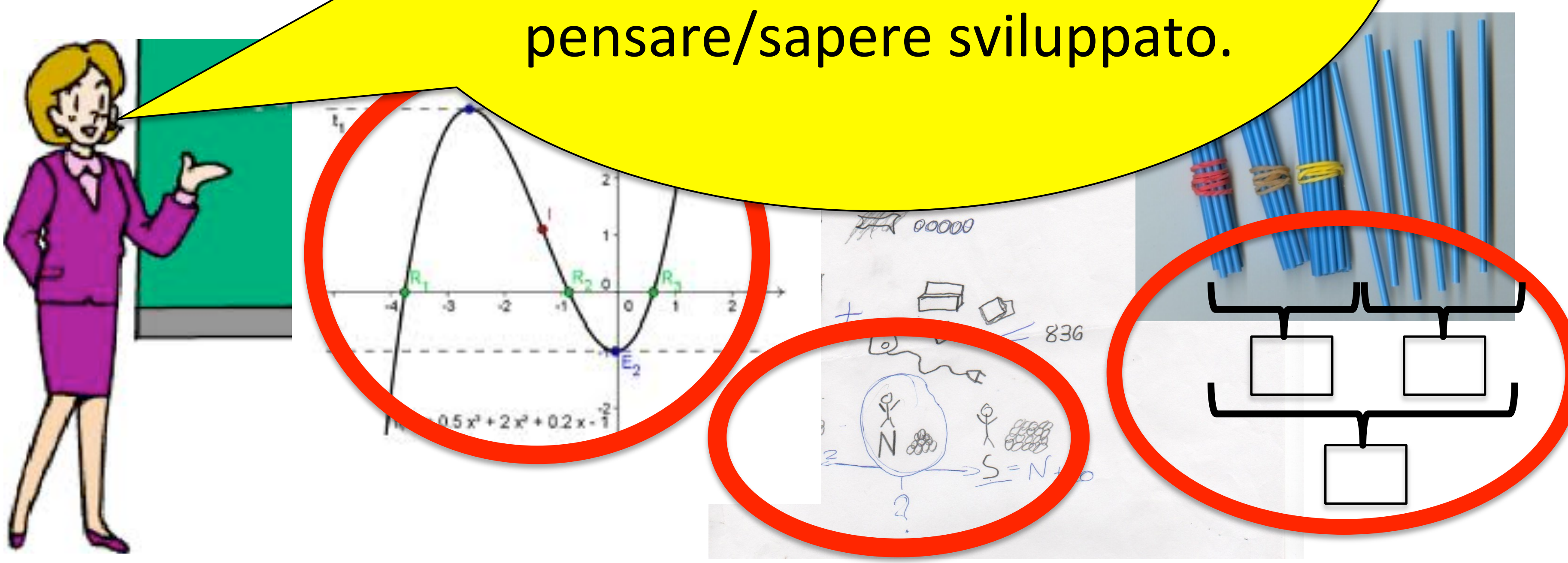
Dunque, in didattica della matematica…

Possiamo proporre rappresentazioni particolarmente efficaci



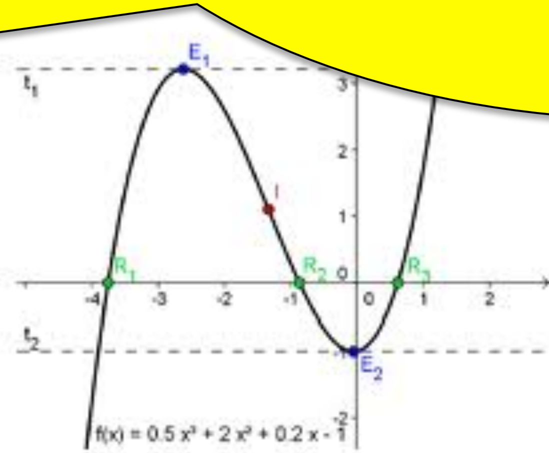
Dunque, in didattica della matematica…

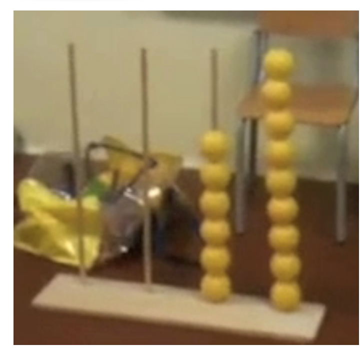
E “leggere” da come gli studenti usano un artefatto (schemi d’uso) i loro schemi cognitivi/modi di pensare/sapere sviluppato.

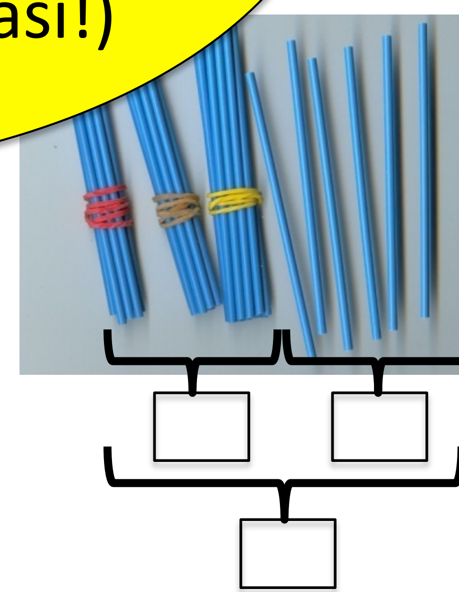


Dunque, in didattica della matematica…

Scegliere quale rappresentazione introdurre e quando. (L’ordine può essere importante in alcuni casi!)







Strumenti per enumerare e per contare

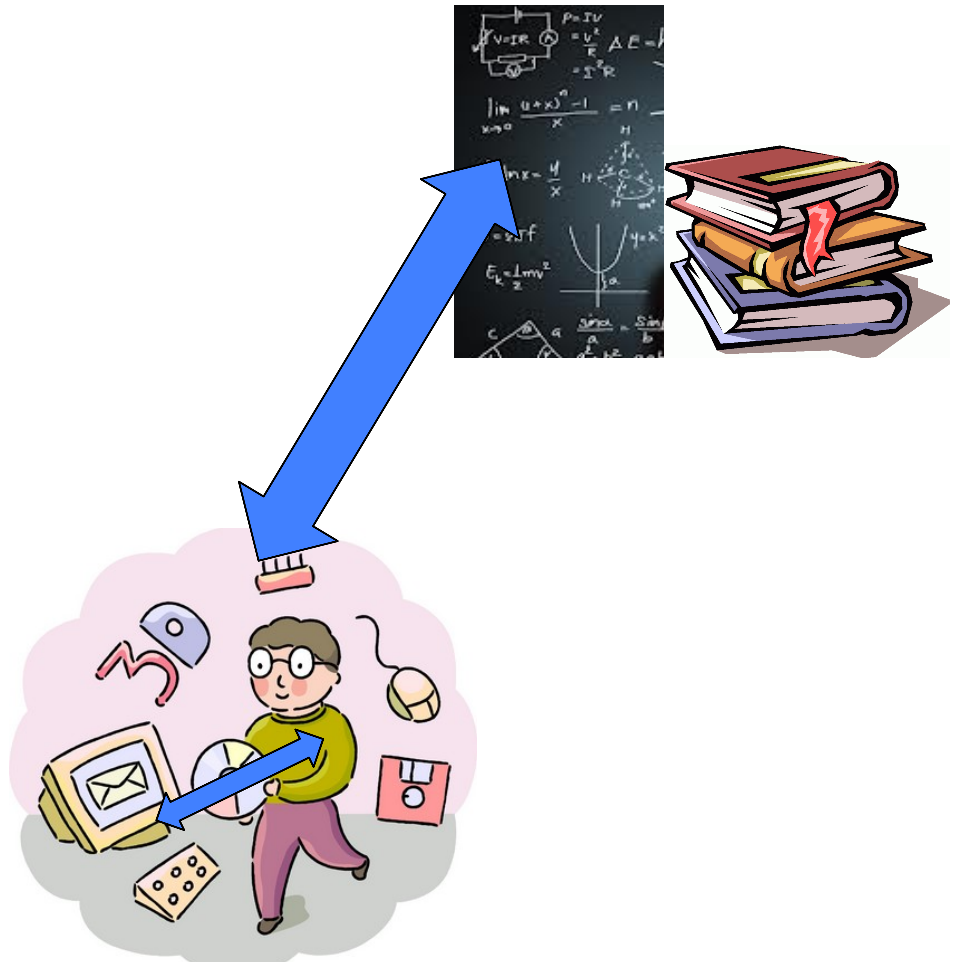
- Le mani
- Le bacchette-fascette
- Il pallottoliere
- L'abaco
- Il righello
- ….

la ricerca suggerisce di sfruttare rappresentazioni di tipo analogico del numero che puntano sul canale visivo e cinestetico, non prevalentemente su quello verbale.

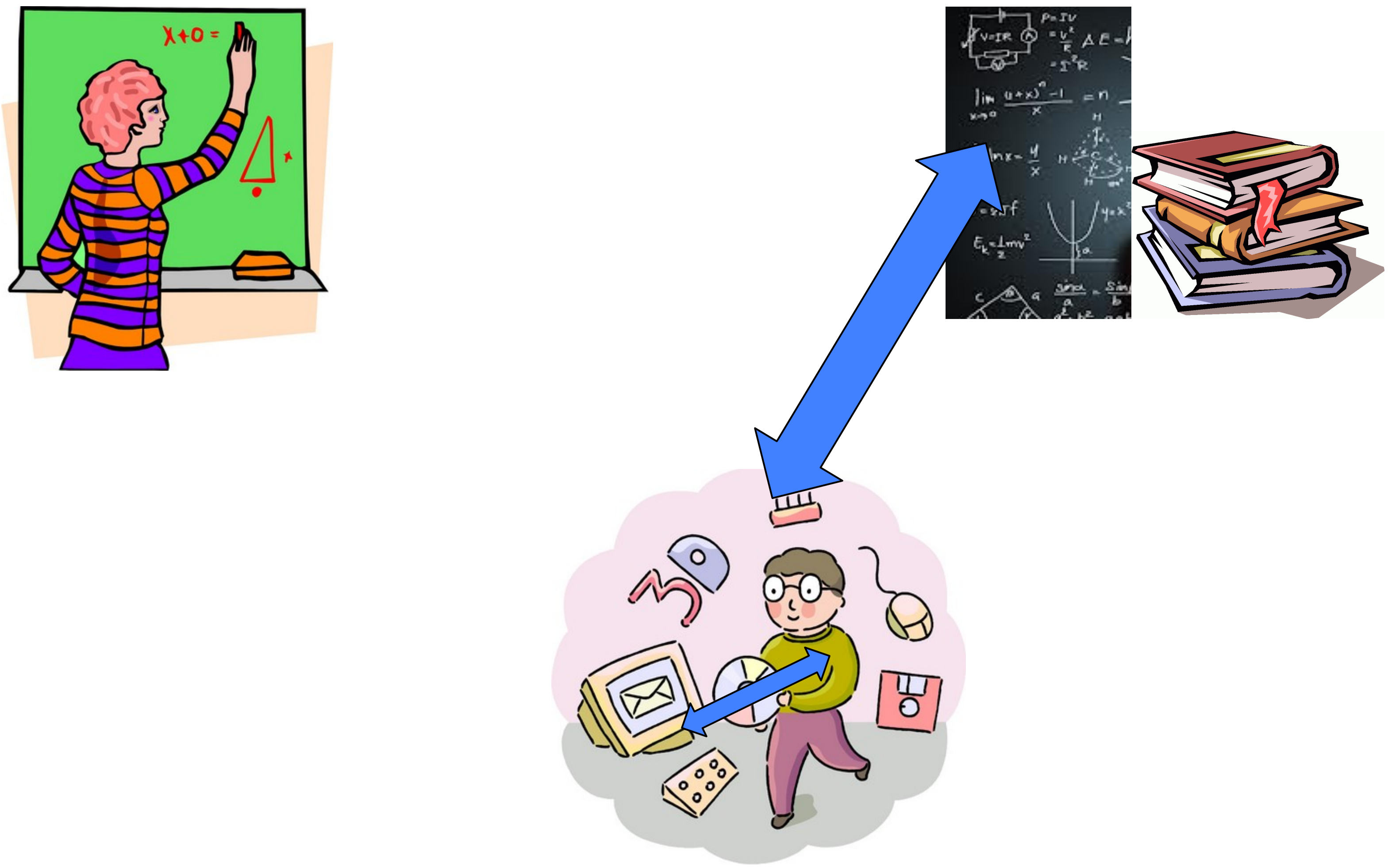
Il "collage" teorico

Il "collage" teorico

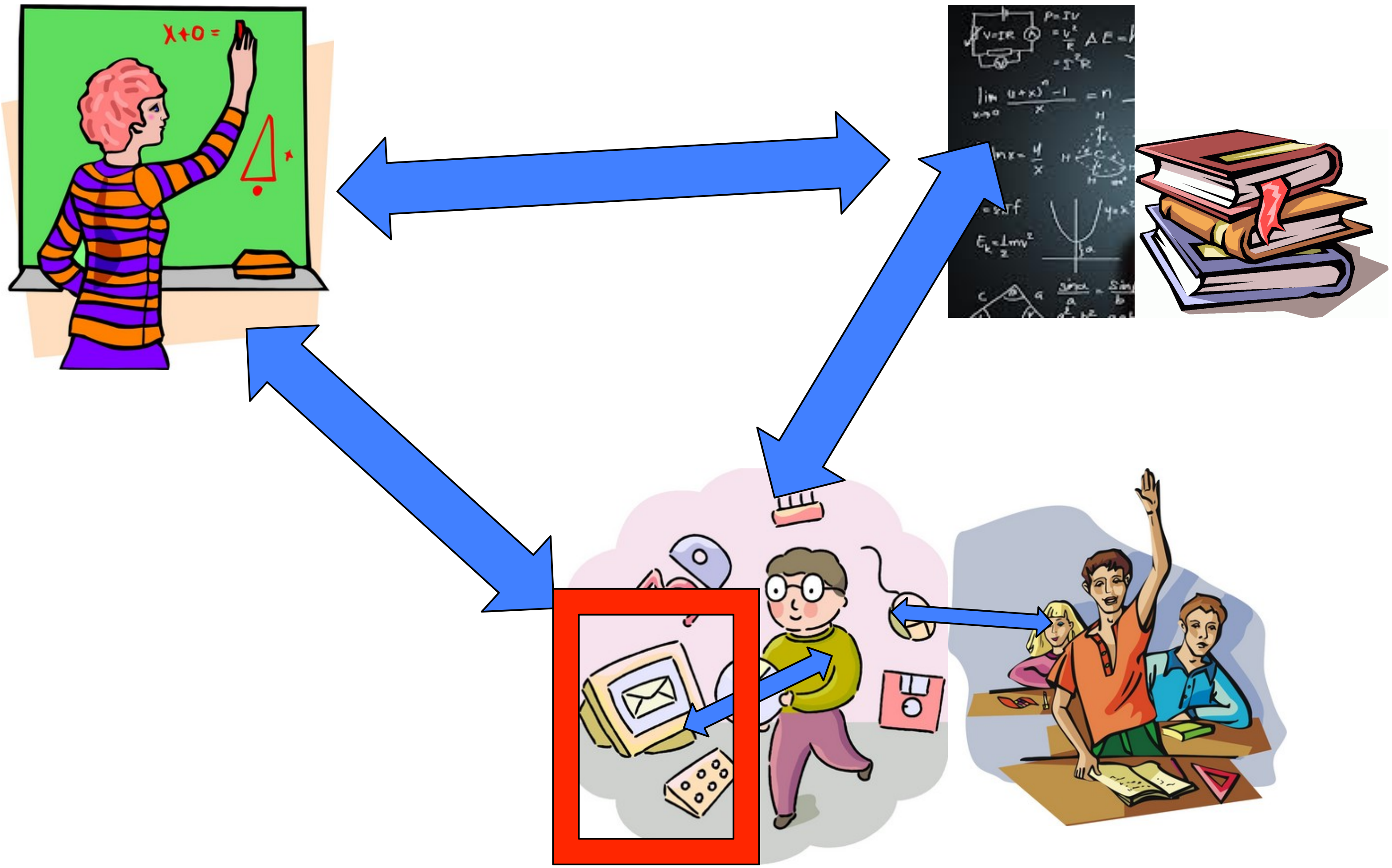
Il "collage" teorico



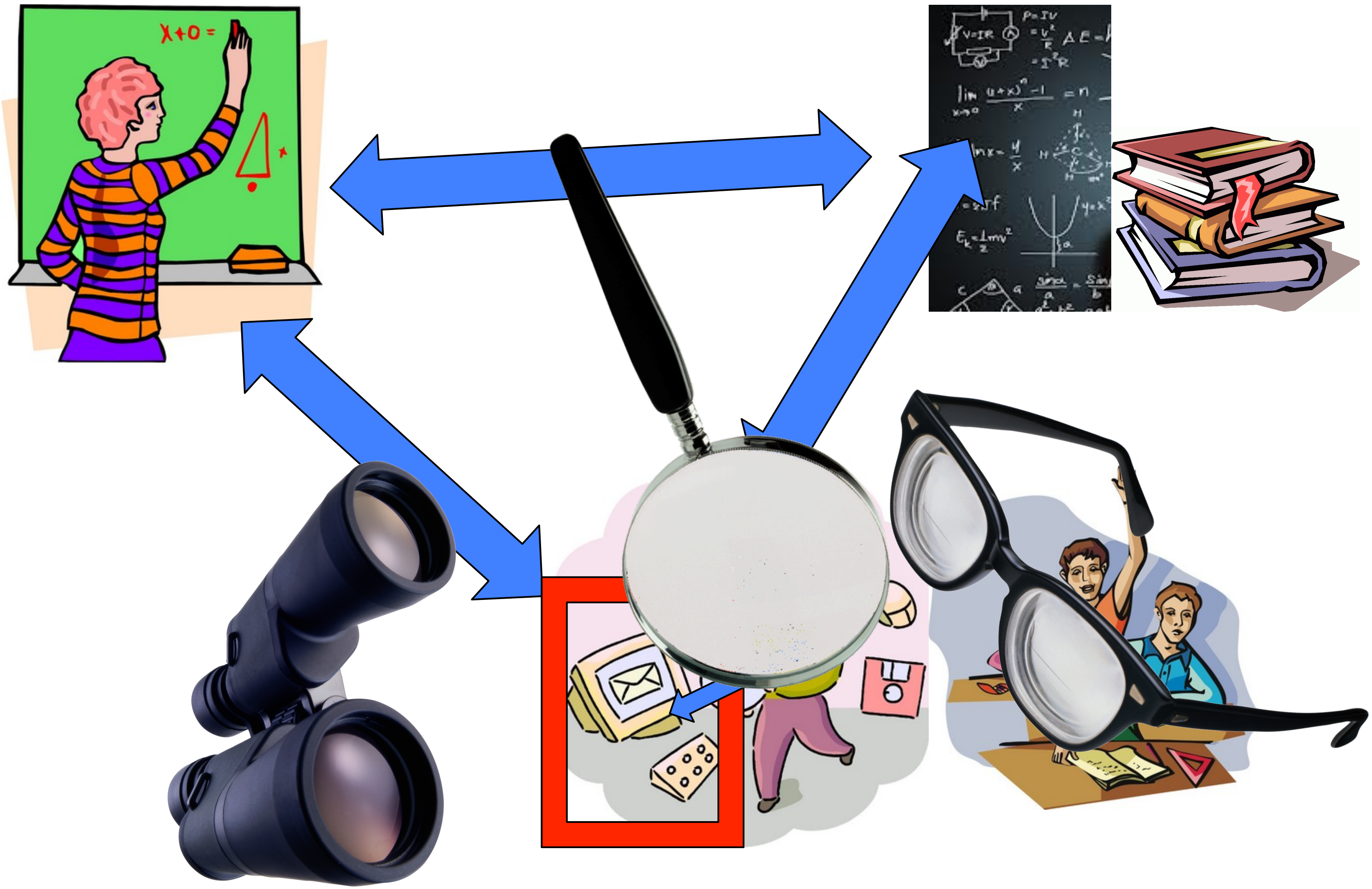
Il "collage" teorico



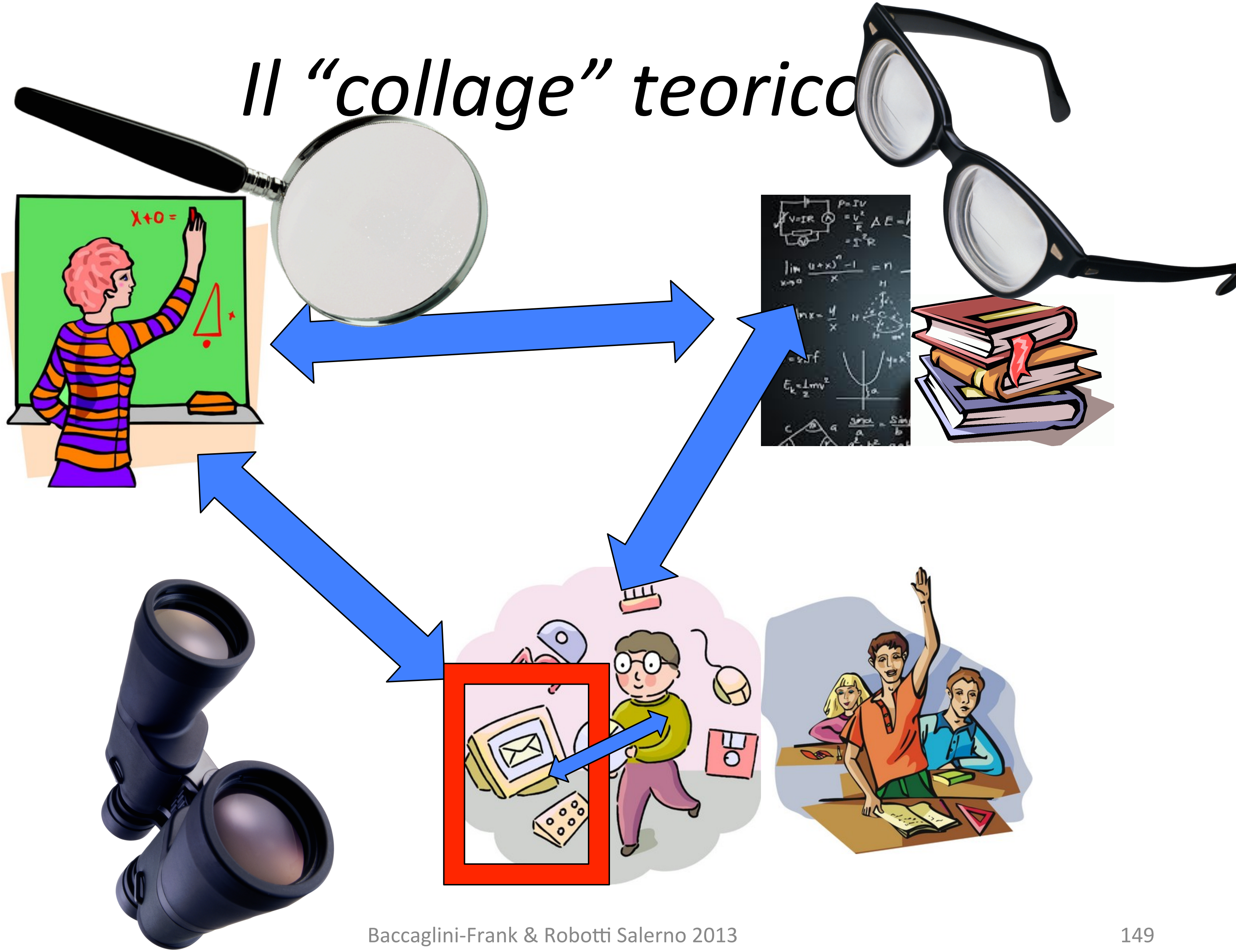
Il "collage" teorico

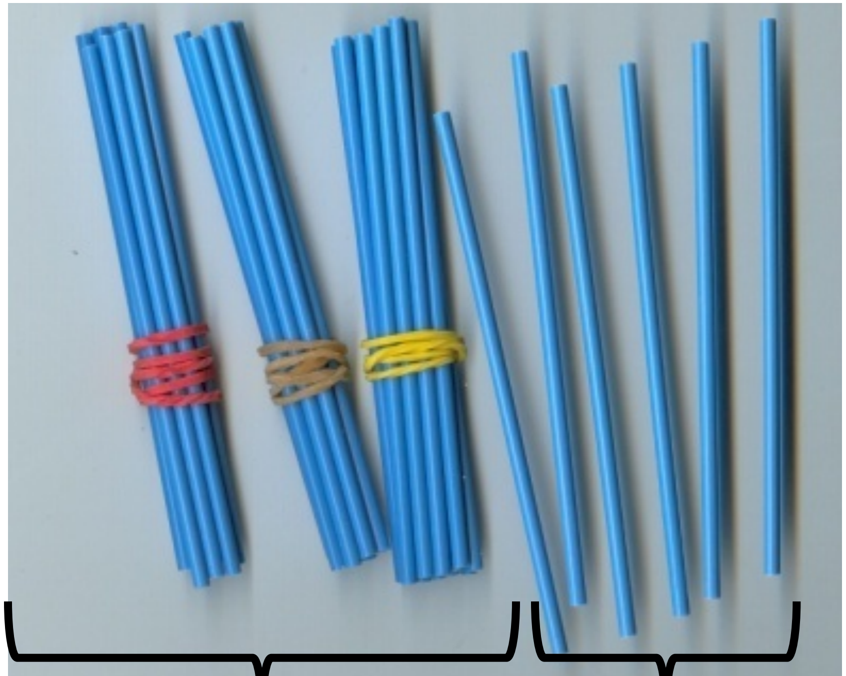


Il “collage” teorico



Il "collage" teorico





3 dieci 6 (sparse)

30 6

3 dieci 6 - trentasei

36

Perché i fascetti di cannucce sono un buono strumento?

- permettono all'insegnante di mettersi in relazione con importanti significati matematici, per es.:
  - la decina
  - notazione decimale
  - comporre/scomporre
- consentono di mantenere una relazione concreta con l'aspetto semantico del numero senza passare per il codice verbale o quello visivo-arabo
- l'attività con le cannucce attiva il canale cinestetico

Problemi semplicissimi calcoli con le cannucce

Problemi semplicissimi calcoli con le cannucce

Problemi semplicissimi calcoli con le cannucce

Problemi semplicissimi calcoli con le cannucce

È già una forma di algebra

"Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting."

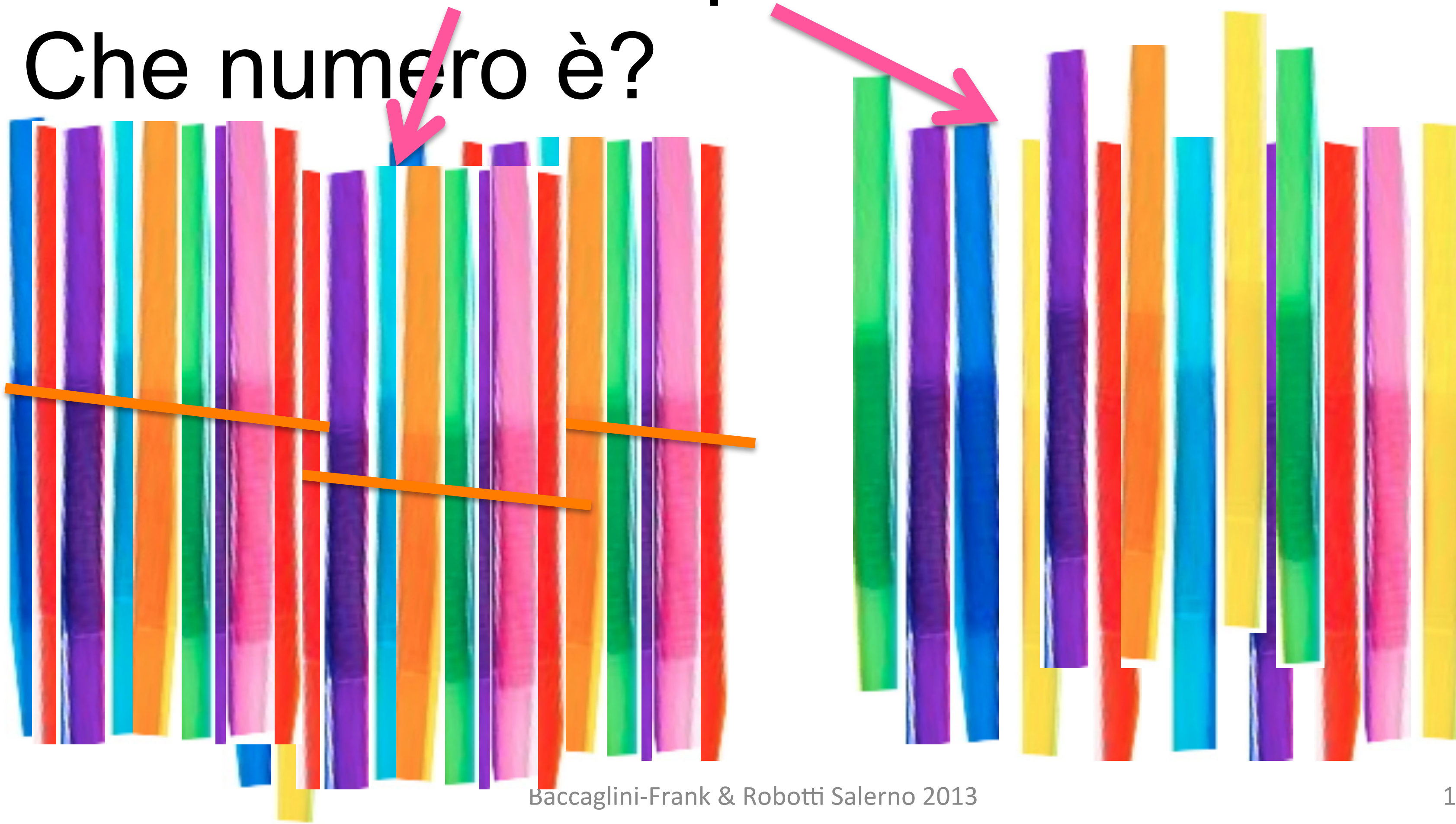
(Kieran, 2004)

Modello delle scatole trasparenti

Ho tre decine e quattordici unità.
Che numero è?

Modello delle scatole trasparenti

Ho tre decine e quattordici unità.
Che numero è?



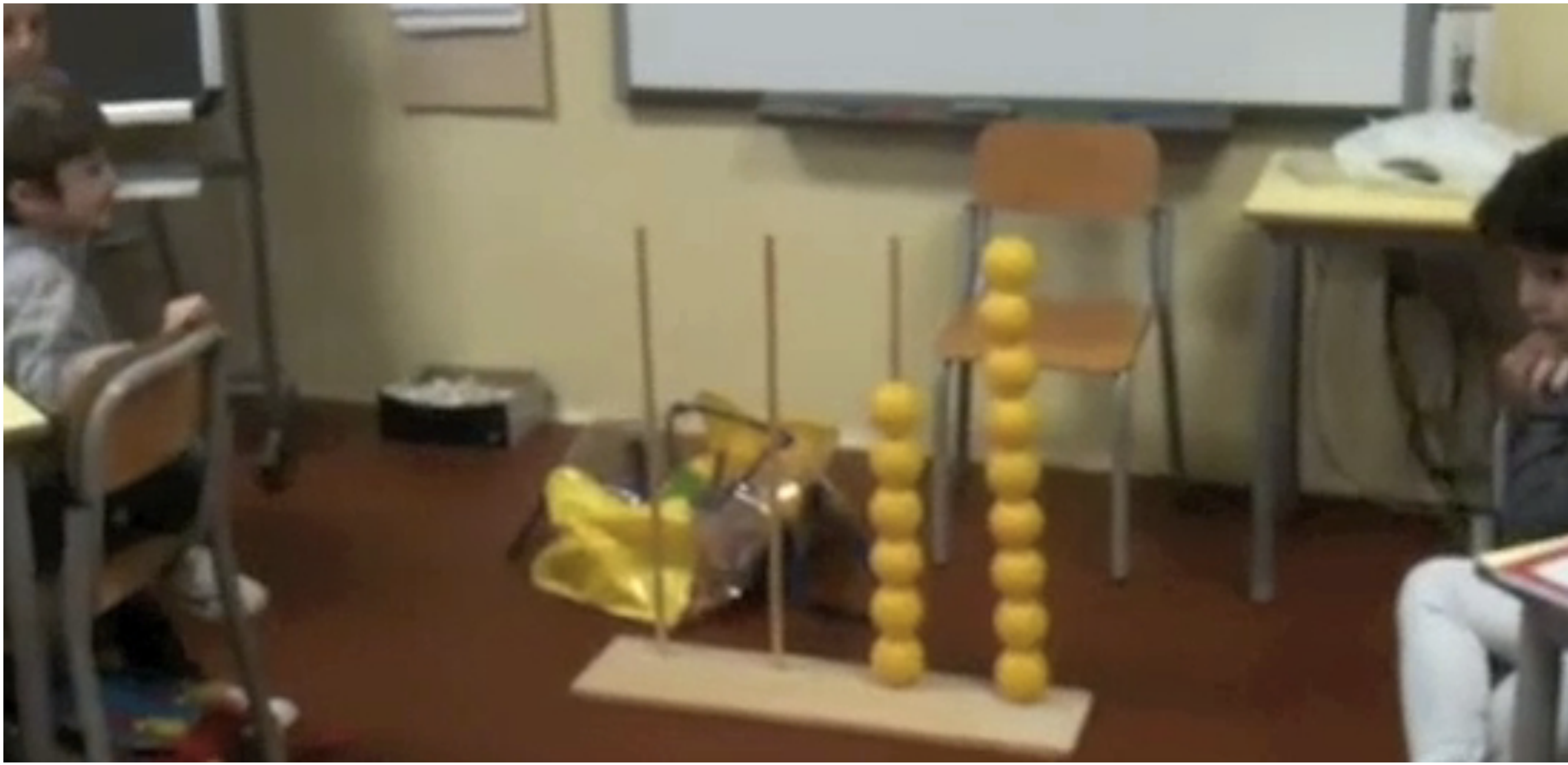
Modello delle scatole trasparenti

Modello delle scatole trasparenti

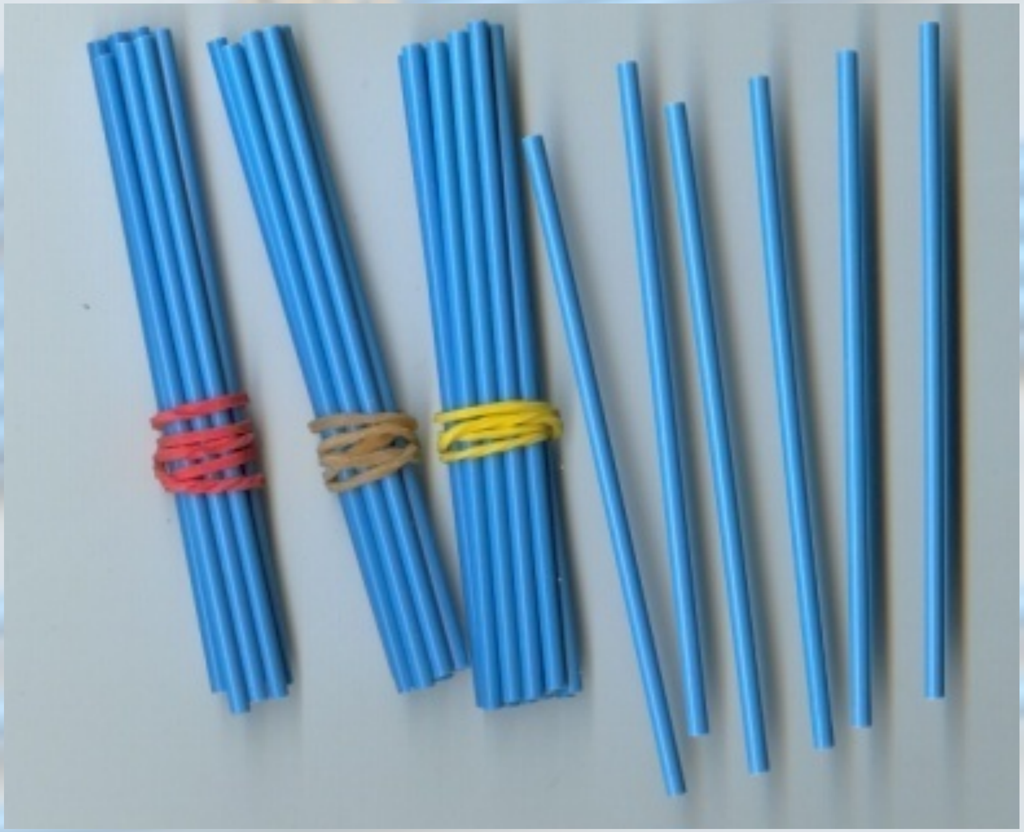
Modello delle scatole trasparenti

Modello delle scatole trasparenti

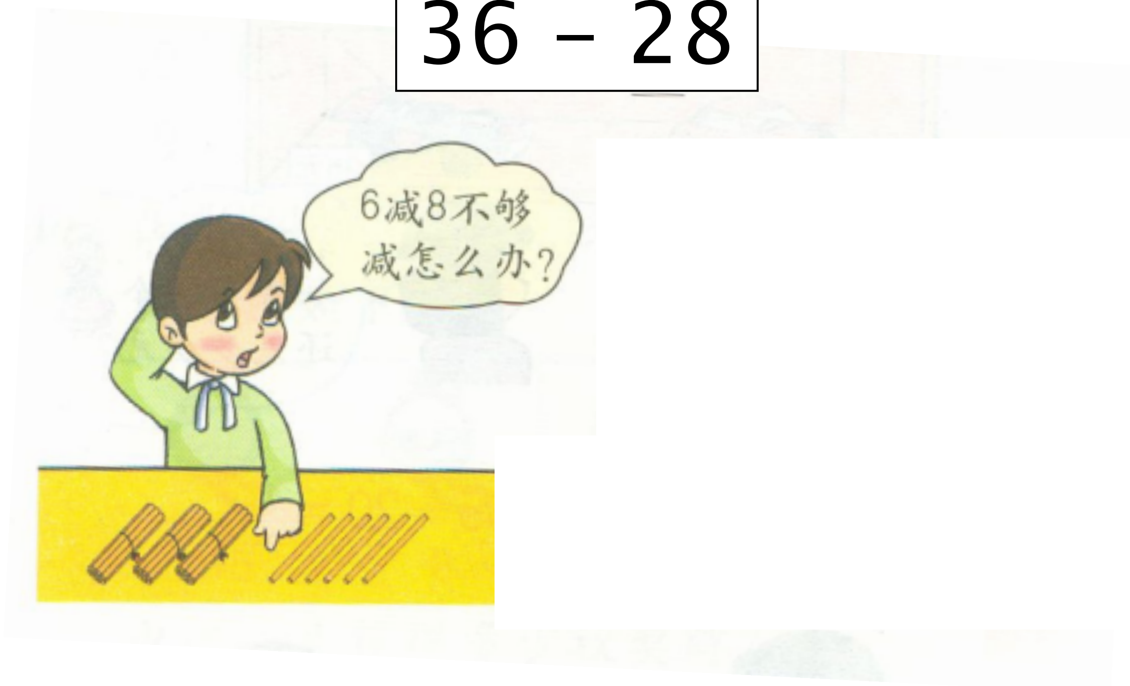
E finalmente l'abaco…



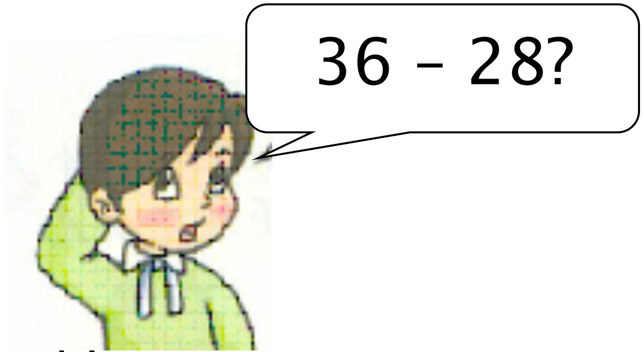
La mediazione semiotica: uso dell'artefatto "bacchette" per il valore posizionale nella sottrazione



$36 - 28$



36 – 28



problema

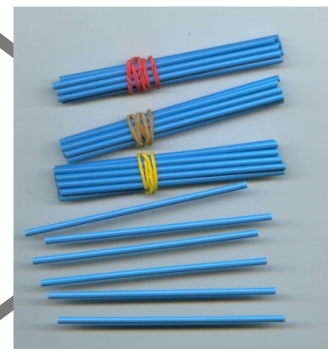
?

Valore
Posizionale
nel Calcolo

36 – 28?

problema

?



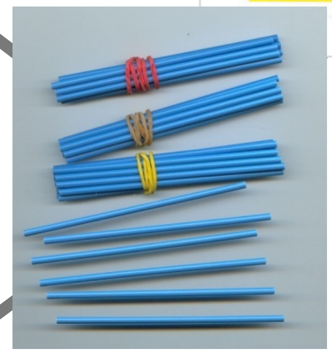
Valore
Posizionale
nel Calcolo

36 – 28?

problema

?

Valore
Posizionale
nel Calcolo

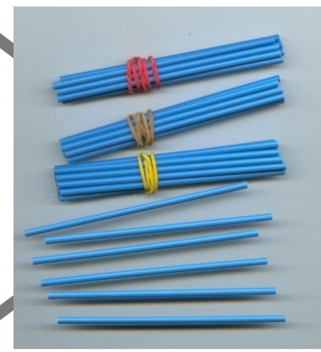


Slego un fascetto e prendo i bastoncini che mi servono

36 – 28?

problema

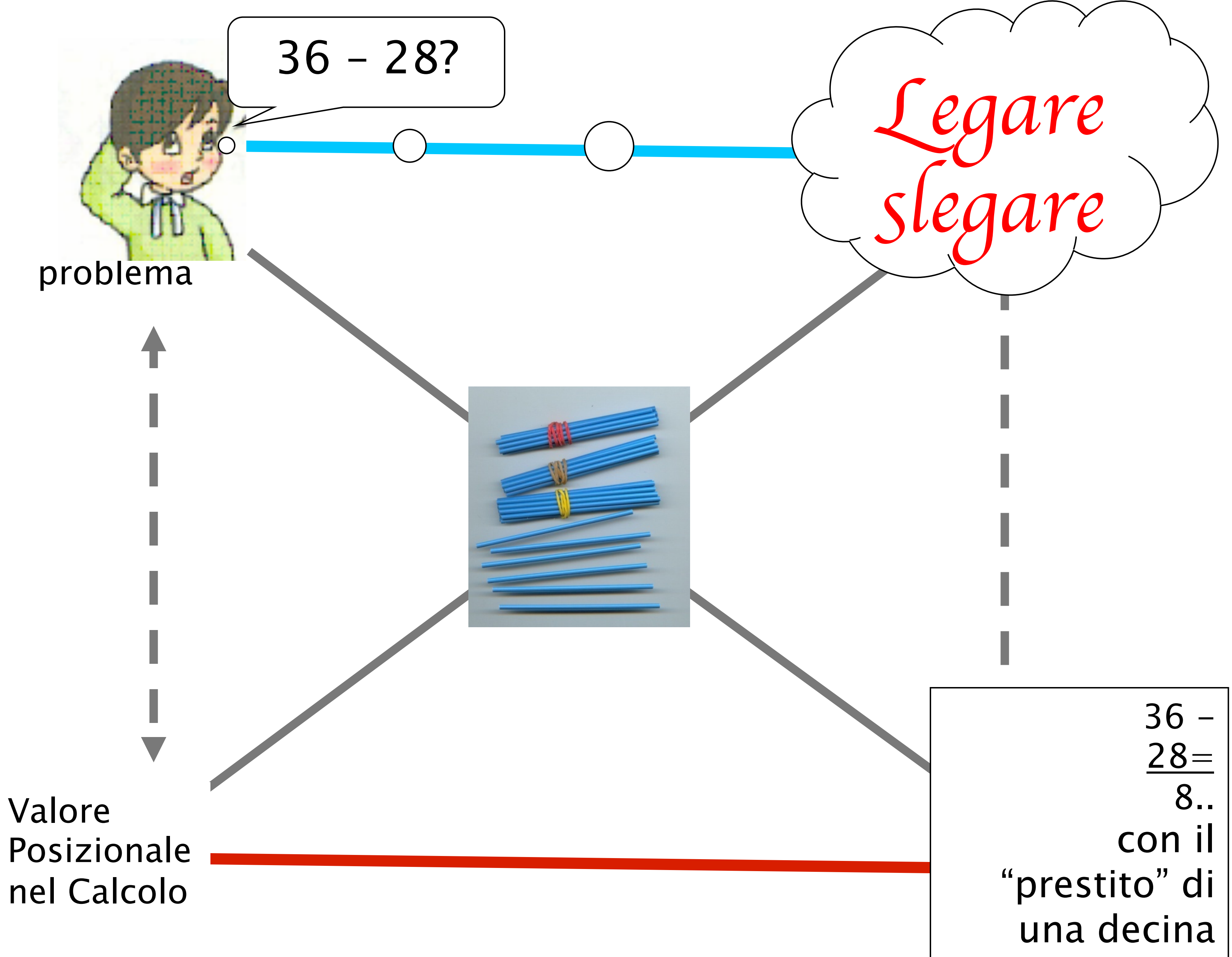
Slego un fascetto e prendo i bastoncini che mi servono

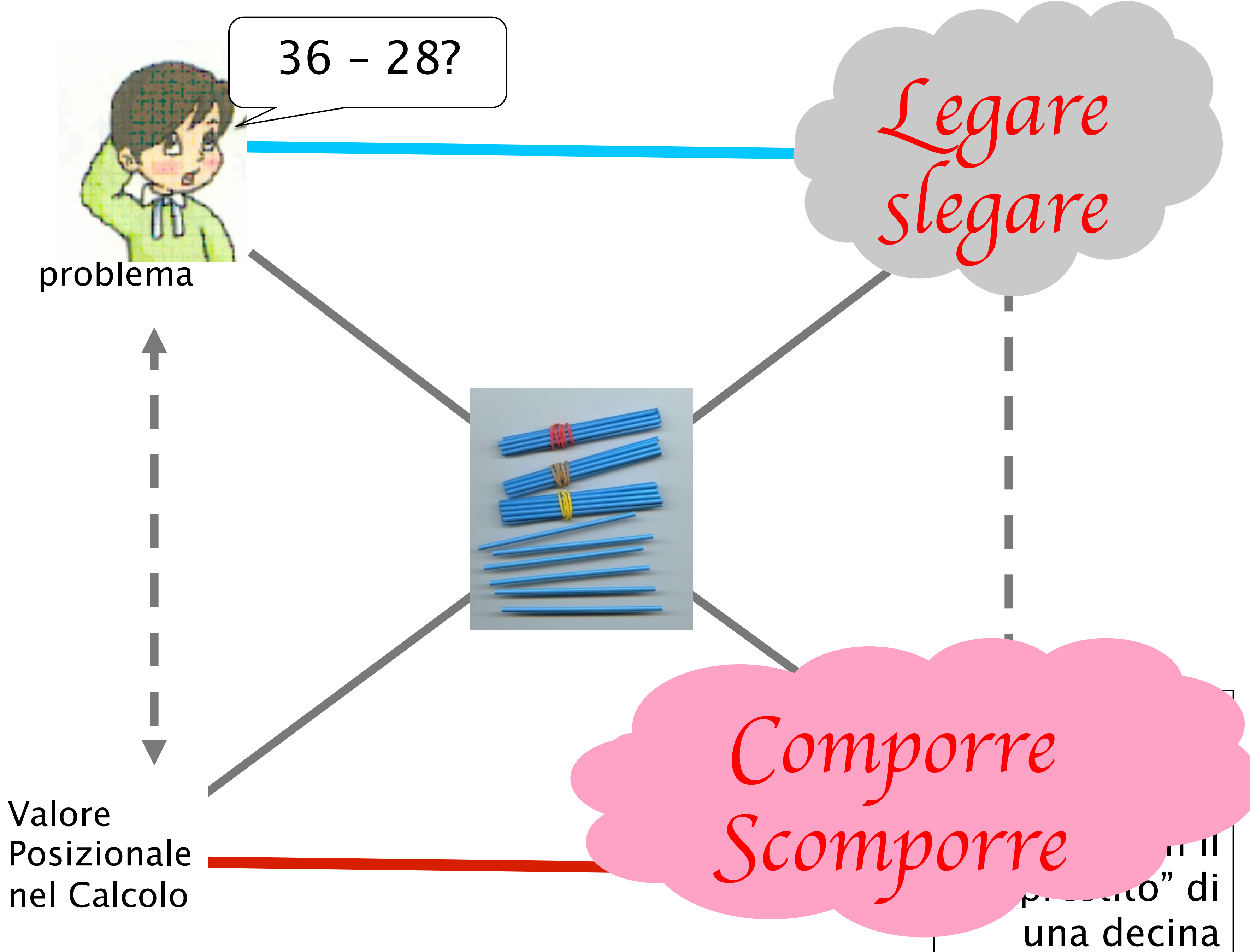


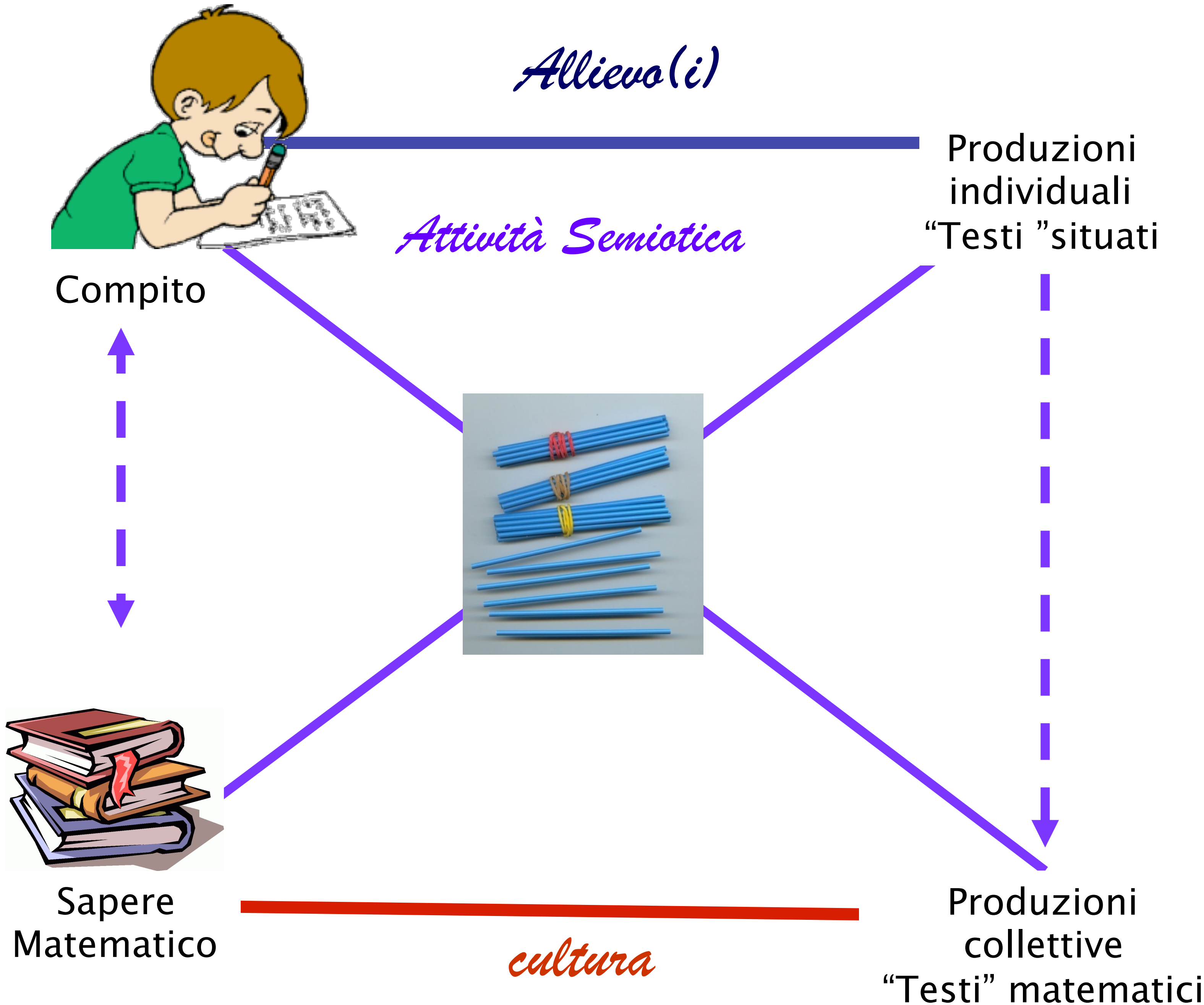
?

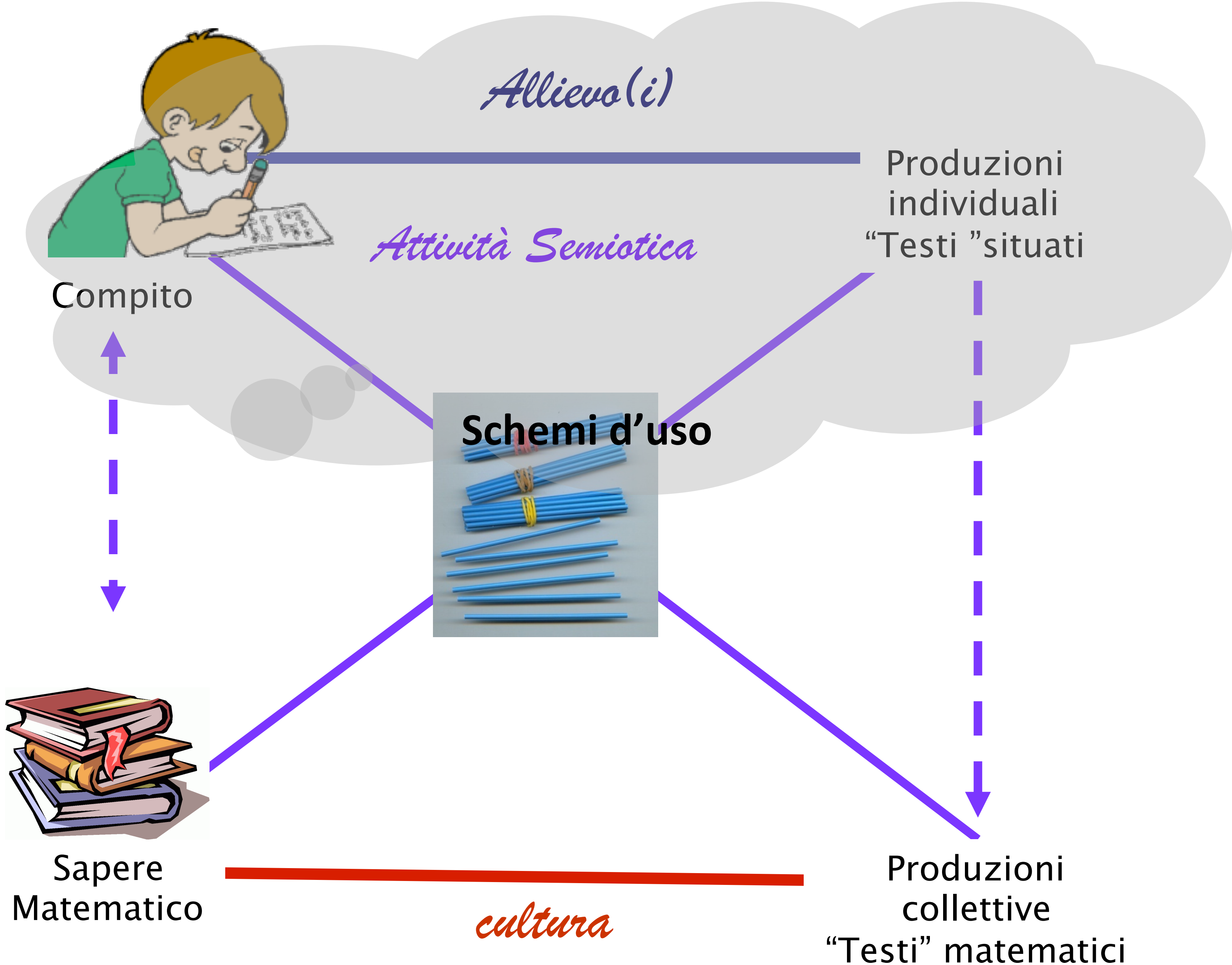
Valore Posizionale nel Calcolo

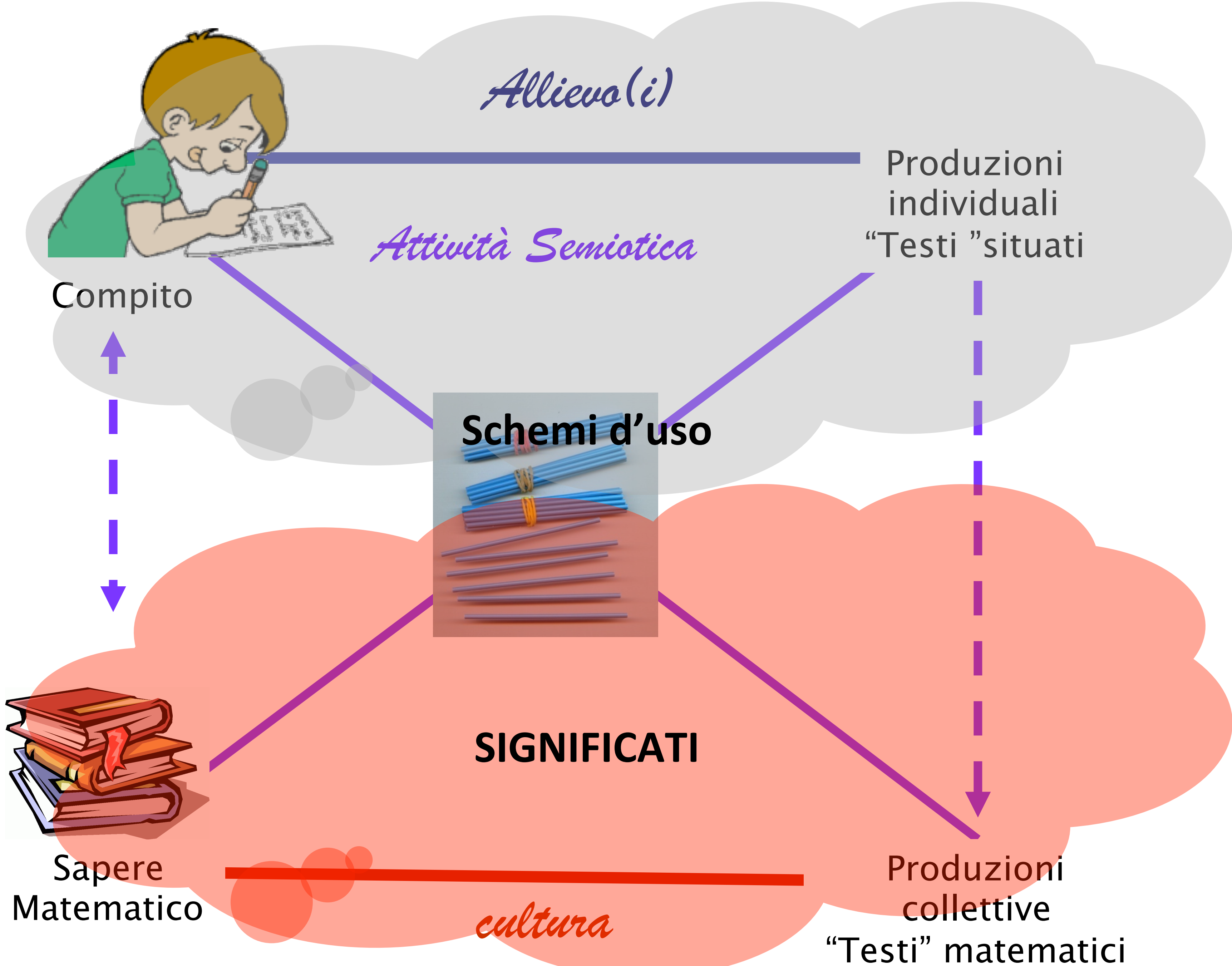
36 –
28=
8..
con il "prestito" di una decina

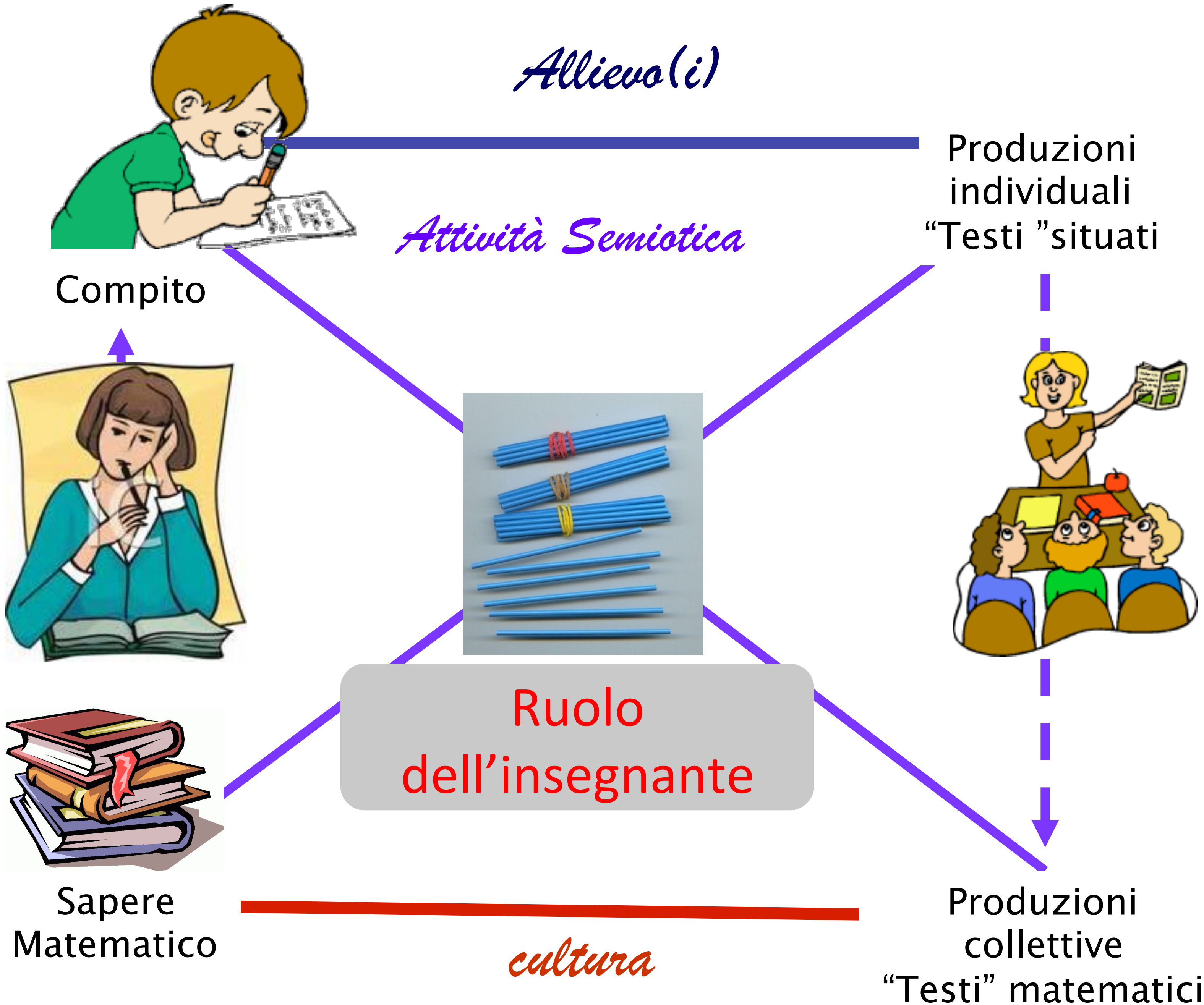

36 – 28?
Legare
slegare
problema
Valore
Posizionale
nel Calcolo
36 –
28=
8..
con il
“prestito” di
una decina


36 – 28?
Legare
slegare
problema
Valore
Posizionale
nel Calcolo
Comporre
Scomporre
una decina


Allievo(i)
Produzioni
individuali
“Testi ”situati
Attività Semiotica
Compito
Sapere
Matematico
Produzioni
collettive
“Testi” matematici
cultura


Allievo(i)
Produzioni
individuali
“Testi ”situati
Attività Semiotica
Compito
Schemi d’uso
Sapere
Matematico
cultura
Produzioni
collettive
“Testi” matematici


Allievo(i)
Produzioni individuali
“Testi ”situati
Attività Semiotica
Compito
Schemi d’uso
SIGNIFICATI
Sapere Matematico
cultura
Produzioni collettive
“Testi” matematici


Allievo(i)
Produzioni
individuali
“Testi ”situati
Attività Semiotica
Compito
Ruolo
dell’insegnante
Sapere
Matematico
cultura
Produzioni
collettive
“Testi” matematici

Processi di lungo termine

Mediazione Semiotica

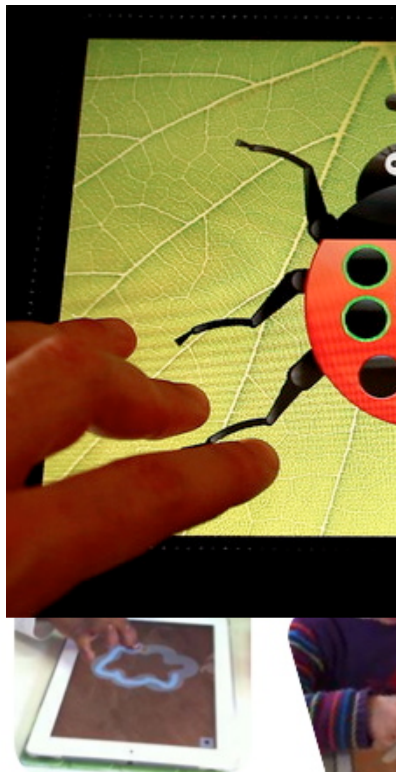
Guardare video:
http://vimeo.com/41010262
Password: BartoliniBussi2

La Tecnologia Multi-Touch per sviluppare la nozione di Numero Naturale

Obiettivi del percorso:

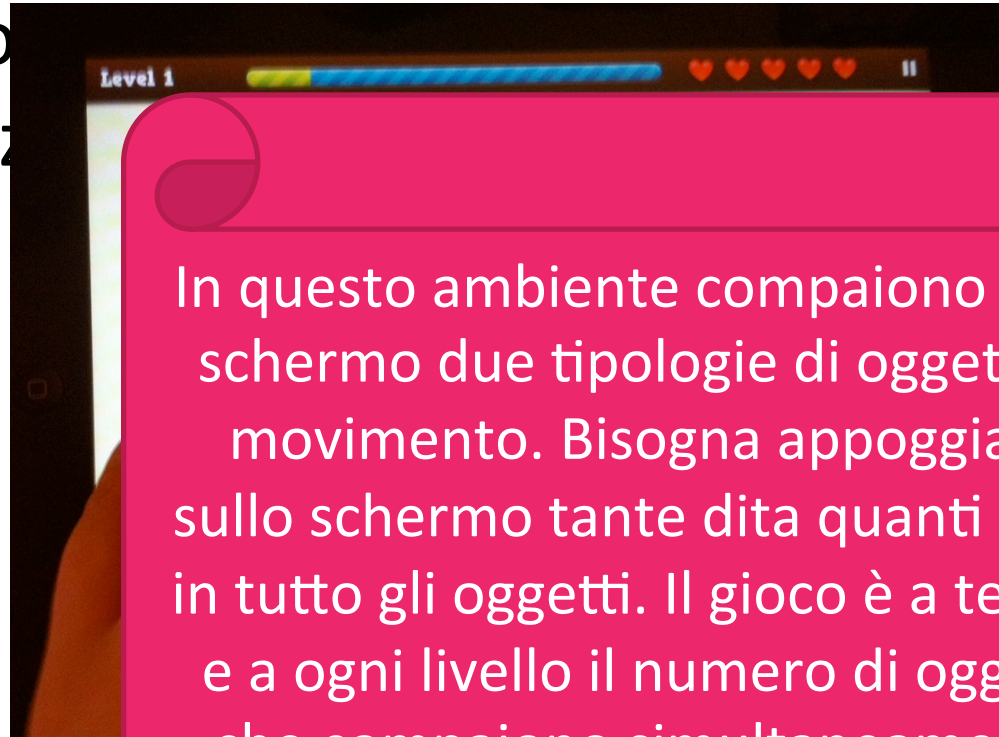
1. Favorire lo sviluppo di abilità componenti rispetto al “senso del numero”
   a. Subitizing
   b. Abilità motorie fini (tapping & tracing)
   c. Gnosia digitale
2. Migliorare la capacità di rappresentare una numerosità con le dita
3. Promuovere l’evoluzione di strategie di conteggio

La Tecnologia Multi-Touch per sviluppare la nozione di Numero Naturale



Lo scopo del gioco è far andare via la coccinella dalla foglia:
Questo succede quando vengono appoggiate sullo schermo, in una posizione qualsiasi, il numero di dita corrispondenti ai punti sulla schiena della coccinella.

La Tecnolo re la noz



In questo ambiente compaiono sullo schermo due tipologie di oggetti in movimento. Bisogna appoggiare sullo schermo tante dita quanti sono in tutto gli oggetti. Il gioco è a tempo e a ogni livello il numero di oggetti che compaiono simultaneamente aumenta mentre il tempo a disposizione per riconoscere la numerosità e appoggiare le dita corrispondenti diminuisce.

La Tecnologia Multi-Touch per sviluppare la ero Naturale

Questo applicativo propone diverse figure e percorsi da tracciare con le dita. Viene chiesto al bambino di tracciarne tre con tre dita (indice, medio, anulare della mano dominante)

Il Protocollo

- I bambini sono stati suddivisi inizialmente in gruppi di cinque ciascuno. Durante il potenziamento alcuni gruppi sono stati divisi ulteriormente ed abbiamo lavorato così con due/tre bambini alla volta.
- I gruppi lavorano per circa 15 minuti e durante la sessione si lavora con due applicazioni: LBC+LW o LBC+F. Ogni giorno di potenziamento si lavora con tutti i bambini.
- La successione delle attività è stata:

DISEGNO DELLA MANO

INTERVISTE INIZIALI

LBC-LW-LBC-F

LBC-LW-LBC-F

LBC-F

DISEGNO DELLA MANO

INTERVISTE FINALI

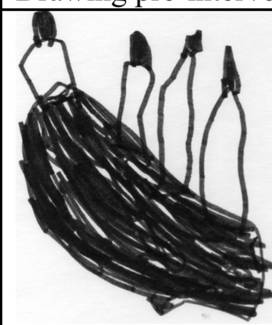
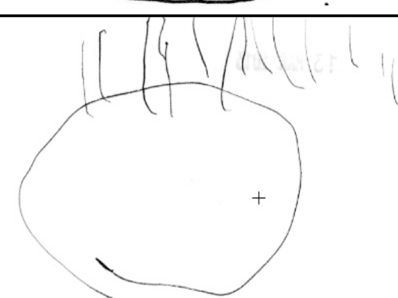
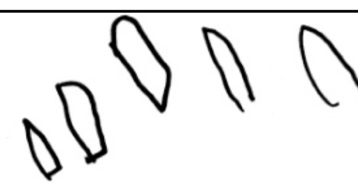
«DEVI USARE DUE MANI!»
«TI SPIEGO COME SI FA:VEDI LA FRUTTA E DEVI METTERE LE DITA DI QUANT'è. HAI CAPITO?»

«PROVIAMO A CONTARE PRIMA QUESTE PALLINE E POI CONTI LE TUE DITA. VEDIAMO QUANTE SONO?»

Veniva promossa la collaborazione mediata dall'insegnante

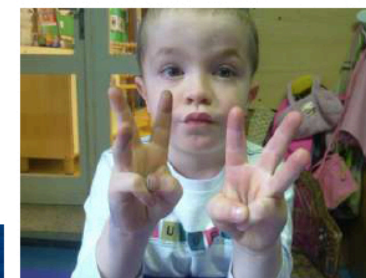
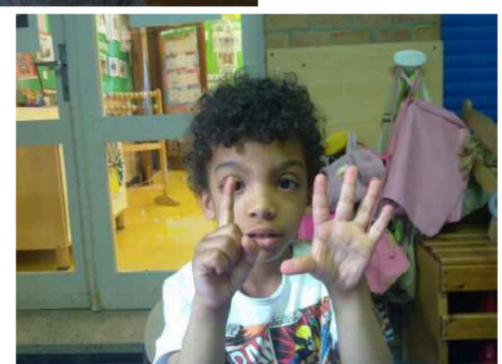
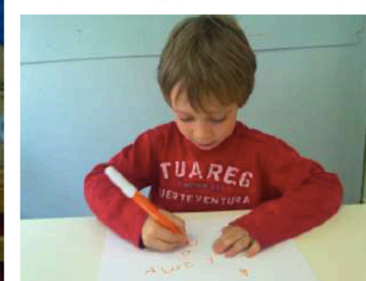
Risultati

- Miglioramenti nelle rappresentazioni delle mani (disegni)

	Drawing pre-intervention	Drawing post-intervention
Child 1		
Child 2		
Child 3		

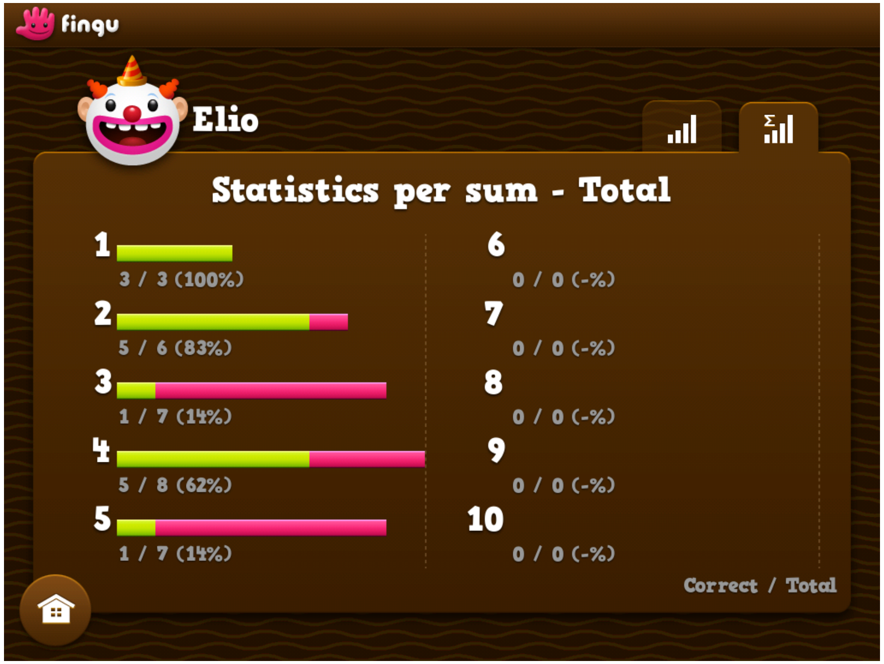
Risultati

- Miglioramenti nelle rappresentazioni delle mani (disegni)
- Miglioramenti nelle rappresentazioni dei numeri con le dita

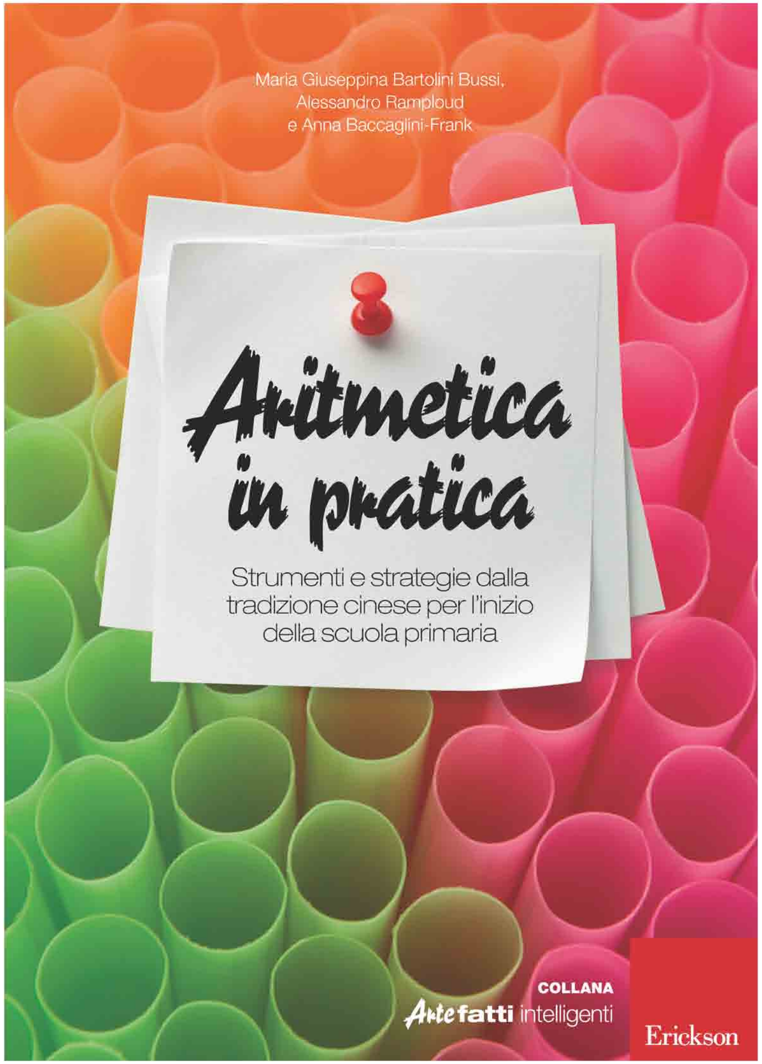
Risultati

- Miglioramenti nelle rappresentazioni delle mani (disegni)
- Miglioramenti nelle rappresentazioni dei numeri con le dita
- Miglioramenti nelle prestazioni in Fingu



Grazie
e
Buon Lavoro

Bibliografia



Bibliografia

Noël, MP. (2005). Finger gnosia: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, 11: 1–18.
Parrish, S. (2010). *Number talks: Helping children build mental math and computation strategies, grades K-5*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.
Simon, J.T. Hespos, S.J. & Rochat, P. (1995). Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992). Cognitive Development, 10, 253-269.
Steffe, L., Cobb, P., & Von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.
Wynn, K. (1992). Addition and subtraction in human infants. Nature, 358, 749-759.

Plasticità Cerebrale
Abiola, O. O., & Dhindsa, H. S. (2011). Improving classroom practices using our knowledge of how the brain works. *International Journal of Environmental & Science Education*, 7(1), 71–81.
Woollett, K., & Maguire, E. A. (2011). Acquiring "the Knowledge" of London's Layout Drives Structural Brain Changes. *Current Biology*, 21(24), 2109–2114. doi:10.1016/j.cub.2011.11.018
Maguire EA, Woollett K, Spiers HJ. (2006) London taxi drivers and bus drivers: a structural MRI and neuropsychological analysis. *Hippocampus*. 16(12):1091-101.
http://www.today.com/id/36032653/ns/today-today_health/t/meet-girl-half-brain/#.UeGbixbfvCE
Karni, A., Meyer, G., Rey-Hipolito, P., Adams, M., Turner, R., Ungerleider, L. (1998). The acquisition of skilled motor performance: Fast and slow experience-driven changes in primary motor cortex. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* Vol. 95, pp. 861–868, February 1998. Colloquium Paper

Bibliografia

Dehaene, S. (2010). *The number sense: How the mind creates mathematics.* Oxford: Oxford Press.

Donaldson, M. (2009). Come ragionano i bambini, Milano ed. Springer.

Canalini Corpacci, R. & Maschietto. M. (2011), Gli artefatti-strumenti e a comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 nella classe: genesi strumentale. *Insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol. 34 A N.2, 161-188.

Dehaene S. (2010), *Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi.* Raffaello Cortina Editore, Milano.

Ferri F., Mariotti M. A., Bartolini Bussi M. G. (2005) L'educazione geometrica attraverso l'uso di strumenti: un esperimento didattico, in L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,Vol. 28 (2), pp 161-189.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University press.

Ianniti, A. & Lucangeli, D (2005). Perché i calcoli sono difficili? Ipotesi e modelli psicologici dell'abilità di calcolo. *Difficoltà in Matematica, 1*(2), 153-170.

Karmiloff-Smith A. (1992) *Beyond Modularity. A Developmental Perspective on Cognitive Science*, Cambridge, Mass., The MIT Press.

Lucangeli, D. (2005). *National survey on learning disabilities*. Rome: Italian Institute of Research on Infancy.

Noël, MP. (2005). Finger gnosia: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, 11: 1–18.

Parrish, S. (2010). *Number talks: Helping children build mental math and computation strategies, grades K-5*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica – Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Bibliografia

Plasticità Cerebrale

Abiola, O. O., & Dhindsa, H. S. (2011). Improving classroom practices using our knowledge of how the brain works. *International Journal of Environmental & Science Education*, 7(1), 71–81.

Woollett, K., & Maguire, E. A. (2011). Acquiring "the Knowledge" of London's Layout Drives Structural Brain Changes. *Current Biology*, 21(24), 2109–2114. doi:10.1016/j.cub.2011.11.018

Maguire EA, Woollett K, Spiers HJ. (2006) London taxi drivers and bus drivers: a structural MRI and neuropsychological analysis. *Hippocampus*. 16(12):1091-101.

http://www.today.com/id/36032653/ns/today-today_health/t/meet-girl-half-brain/#.UeGbixbfvCE

Karni, A., Meyer, G., Rey-Hipolito, P., Adams, M., Turner, R., Ungerleider, L. (1998). The acquisition of skilled motor performance: Fast and slow experience-driven changes in primary motor cortex. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* Vol. 95, pp. 861–868, February 1998. Colloquium Paper