UMI-CIIM

Salerno, 17-19 ottobre 2013

Costruire Esempi e Controesempi

Samuele Antonini

Dipartimento di Matematica

Università di Pavia

TEOREMI **DEFINIZIONI**

ESEMPI

TEOREMI

DEFINIZIONI

ESEMPI

Validazione dei teoremi: dimostrazioni matematiche

Quanto sono consapevoli gli studenti della generalità garantita dalla dimostrazione di un teorema?

Fino a che punto è “accettata” ?

Un test: alcune risposte significative

Studenti che considerano corretta la dimostrazione e che ritengono di averla compresa

L'enunciato è generale?

“No, perché ho fatto una dimostrazione teorica e non pratica”

“No perché bisogna essere certi che valga positivamente per tutti i triangoli.”

“Visto che i numeri sono infiniti, qualche eccezione ci deve essere per forza.”

“ Se una dimostrazione è vera non vuol dire che sia sempre vera perché bisogna considerare casi particolari.”

“Forse questa teoria presenta delle eccezioni.”

“Ogni caso ha la sua eccezione.”

“La dimostrazione […] è corretta, anche se da sola secondo me, non basta ad affermare che ciò è sempre vero” (INSEGNANTE)

Studenti che hanno compreso la dimostrazione e la considerano corretta e generale

Sono necessari ulteriori esempi?

- “Può essere, ma facendo già abbastanza verifiche [nel foglio consegnato ve ne sono 20] è molto probabile che il teorema sia vero”
- “SI, più sono i [risultati positivi] più aumenta la validità del teorema.”
- “SI, più sono veri i risultati degli esempi, più la dimostrazione si rivela vera.”

Alcune risposte di studenti che hanno compreso la dimostrazione e la considerano corretta e generale

Viene mostrato un controesempio (falso): cosa ne pensi?

- “Può essere che per numeri estremamente grandi non valga la stessa cosa.”
- “Che il teorema, a questo punto, non vale per i triangoli che hanno un angolo interno ottuso, come in questo caso l’angolo A.”
- “Mi sono sbagliata perché ero convinta che fosse vero avendo provato altre prove con numeri bassi”
- “Non lo so, non riesco, sono numeri troppo elevati”

STUDENTI INCOERENTI ??

Punto di vista logico: accettare la correttezza di una dimostrazione e accettare l’universalità dell’enunciato sono la stessa cosa

Per gli studenti la differenza C’E’

La logica non è sufficiente per spiegare questi comportamenti

Due tipi di argomentazione (Fischbein, 1982):

Empirica (vita di tutti i giorni): produzione e osservazione di fatti che confermano l’affermazione

Fin da bambini impariamo che talvolta una predizione si rivela errata.

Progressivamente mettiamo in relazione le nostre convinzioni con le conferme pratiche osservate. Il grado di certezza dipende dalla quantità e dalla varietà dei dati raccolti

Due tipi di argomentazione (Fischbein, 1982):

Empirica (vita di tutti i giorni): produzione e osservazione di fatti che confermano l'affermazione

Maggiore è il numero di fatti a conferma – Maggiore è il grado di certezza

Capire cosa significa una dimostrazione comporta un modo nuovo di pensare

Formale (matematica): inferenze logiche a partire da affermazioni precedentemente accettate (assiomi, teoremi)

Validità delle inferenze logiche $\longrightarrow$ Validità e universalità del teorema

L’allievo non è un passivo ricettore di informazioni e di procedure risolutive.

Le informazioni vengono trattate secondo gli schemi mentali dello studente (Piaget: assimilazione)

Capire cosa significa una dimostrazione comporta un modo nuovo di pensare

Empirica (vita di tutti i giorni): produzione e osservazione di fatti che confermano l’affermazione

Maggiore è il numero di fatti a conferma – Maggiore è il grado di certezza

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Formale (matematica): inferenze logiche a partire da affermazioni precedentemente accettate (assiomi, teoremi)

Validità delle inferenze logiche → Validità e universalità del teorema

Alcune caratteristiche delle argomentazioni empiriche vengono attribuite all’argomentazione formale

La somma di due numeri naturali dispari consecutivi è un multiplo di 4

$3+5=8$

$5+7=12$

$7+9=16$

$9+11=20$

……….

……….

$$37+39=(38-1)+(38+1)=38*2=19*2*2=19*4$$

Differenze

Accettabile come dimostrazione? Cosa ne pensate?

La ripetizione del processo da parte degli studenti su esempi particolari può soddisfare il bisogno di ulteriori verifiche e al contempo spostare l'attenzione sulla generalità dei passaggi della dimostrazione.

ESITO

PROCESSO

$(2n-1)+(2n+1)=2n+2n=4n$

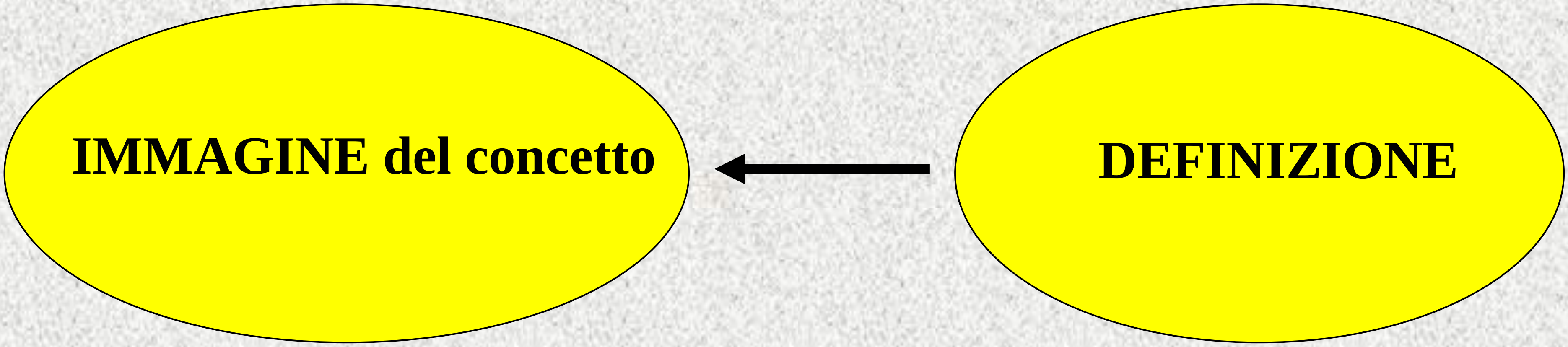
infiniti esempi **un procedimento**

TEOREMI **DEFINIZIONI**

ESEMPI

IMMAGINE del concetto $\leftarrow$ **DEFINIZIONE**

Concept image **Concept definition**



Gli studenti hanno delle aspettative sugli oggetti matematici che non trovano necessariamente un riscontro teorico (Tall & Vinner, 1981)

IMMAGINE del concetto

DEFINIZIONE

Nuova “definizione”

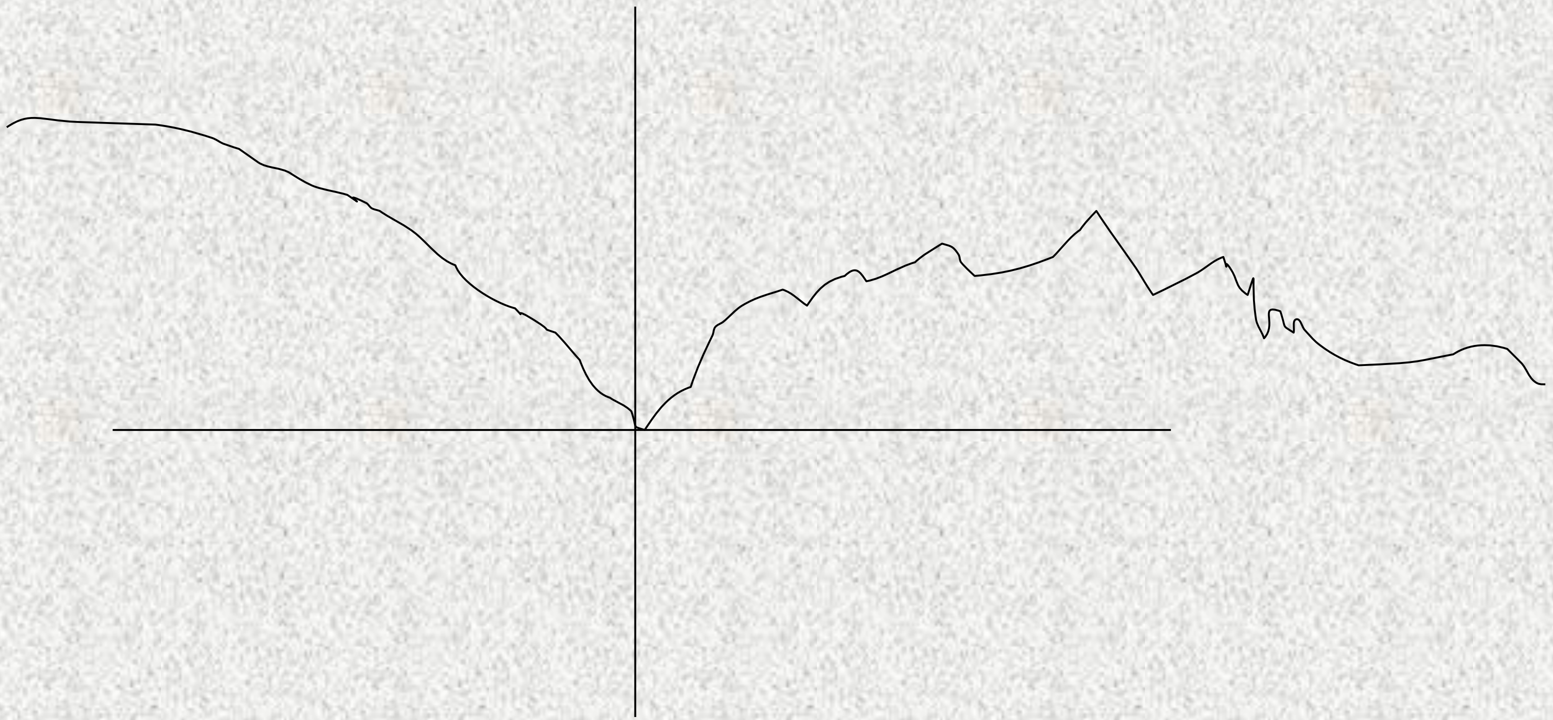
Gli studenti hanno delle aspettative sugli oggetti matematici che non trovano necessariamente un riscontro teorico (Tall & Vinner, 1981)

Esempio:

La funzione è un grafico, una regola di corrispondenza (unica e non arbitraria), una manipolazione algebrica, ecc.

Le funzioni sono tutte continue, tranne quelle definite a tratti, ecc.

Tall & Vinner



Studente: non so se è una funzione perché non so se questo grafico ha una formula, se non ce l'ha, non è una funzione

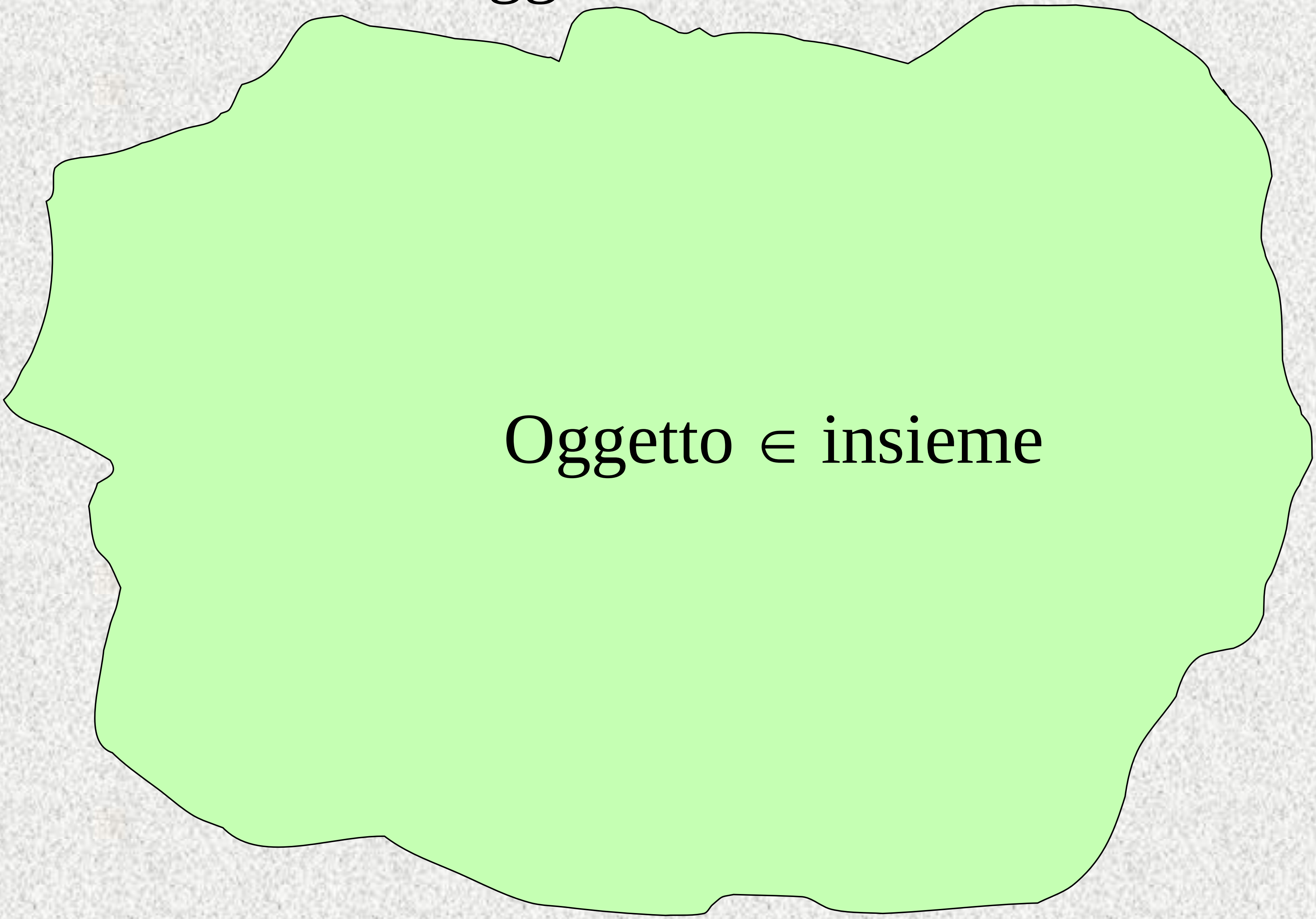
Tall & Vinner

Esiste una funzione che a 0 fa corrispondere -1 e ad ogni valore diverso da 0 fa corrispondere il proprio quadrato?

Studente: No, perché i quadrati sono sempre positivi

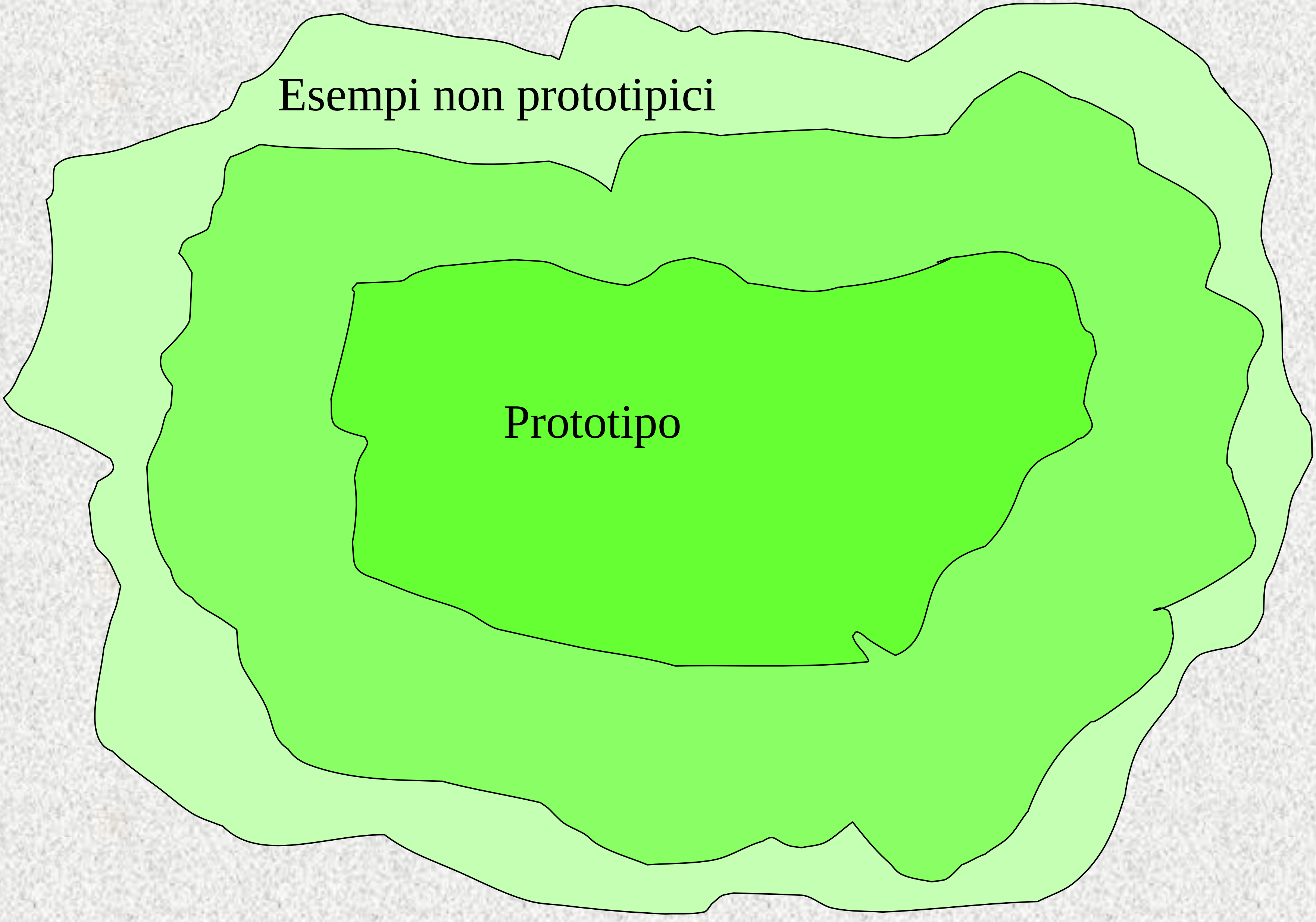
Mathematica

Oggetto $\notin$ insieme



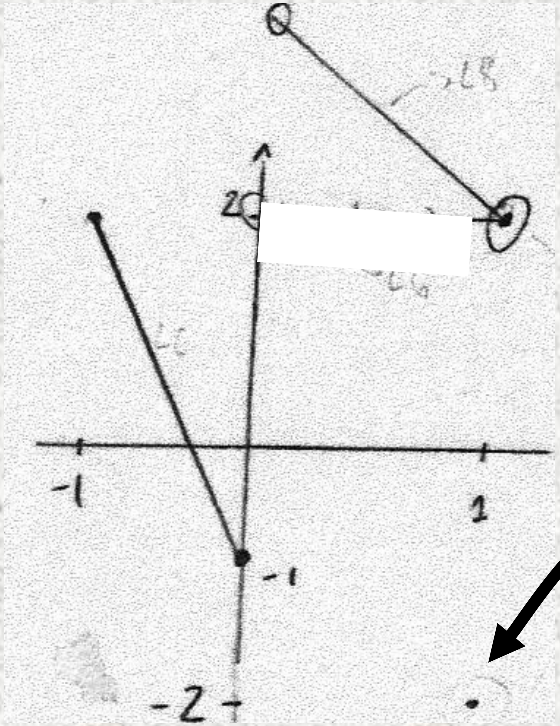
Punto di vista cognitivo

Categorie cognitive (Lakoff, 1987, Rosch, 1977)



Dare un esempio, se possibile, di una funzione iniettiva f:[-1,1]$\rightarrow$ R, tale che f(0)= -1 e $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = 2$

Processo di costruzione di un controesempio a una potenziale **“proposizione”** di una “teoria” implicita



Letizia: *stavo pensando, mi posso definire la mia funzione in x = 1 dandole un valore qualsiasi? No, perché se definisco f(1) = 3 allora il limite per x che tende a 1 della mia funzione è uguale a 3. […]*

Se io la definisco come f(1)= -2, in modo che sia iniettiva, allora il mio problema adesso è vedere quanto vale il limite per x che tende a 1 di questa funzione. Non lo so quanto vale, voglio dire guardando il grafico direi che il limite vale –2 e non 2.

Intervistatore: *prova a pensare alla definizione di limite.*

Letizia: *ah ma c'è l'intorno bucato! Voglio dire, ti scrivo la definizione di limite.*

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad$ t.c. $\quad |f(x) - \overset{l}{\cancel{f(x_0)}}| < \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$

Intervistatore: *prova a pensare alla definizione di limite.*

Letizia: *ah ma c'è l'intorno bucato! Voglio dire, ti scrivo la definizione di limite.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - \cancel{f(x_0)}^{\,\ell}| < \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$$

devo escludere il punto verso cui tende la x, quindi va bene, la funzione che ho disegnato va bene, tende a 2 per x che tende a 1.

che bello questo esercizio! Finalmente ho capito perché nella definizione di limite bisogna escludere il valore del punto, ho capito il significato di intorno bucato del punto!

Un’occhiata agli esperti

Libri per matematici…

Gelbaum, B.R. & Olmsted, J.M.H., *Counterexamples in analysis*, 1964

Capobianco, M. & Molluzzo, J.C., *Examples and Counterexamples in Graph Theory*, 1978

Khaleelulla, S.M., *Counterexamples in topological vector spaces*, 1982

Romano, J.P. & Siegel, A.F., *Counterexamples in probability and statistics*, 1986

Fornaess, J.E. & Stensones, B., *Lectures on counterexamples in several complex variables*, 1987

Stoyanov, J.M., *Counterexamples in probability*, 1987

Gelbaum, B.R. & Olmsted, J.M.H., *Theorems and counterexamples in Mathematics*, 1990

Wise, G.L. & Hall, E.B., *Counterexamples in probability and real analysis*, 1993

Steen, L.A. & Seebach, J.A.Jr, *Counterexamples in topology*, 1995

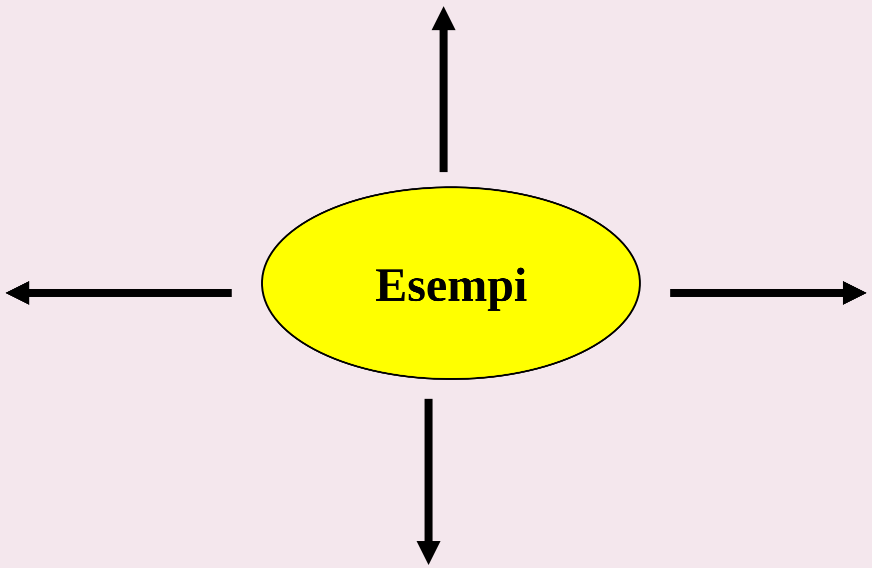
Strategie degli esperti

Trasformazioni a partire da oggetti noti
Analisi delle proprietà

Estensione dello spazio di esempi:

-Dalla galleria allo spazio di esempi (familiarità)

-metodi di costruzione e trattamento (consapevolezza)



Un approccio

oggetti matematici | **enunciati matematici**

ESEMPI ⟷ **CONGETTURE ARGOMENTAZIONI**

Familiarità con gli oggetti matematici:

-Estensione dello spazio di esempi (con rappresentazioni)

-Metodi di costruzione e trattamento (consapevolezza)

-Inferenze su proprietà degli oggetti e sulle relazioni tra oggetti

Attività sul “teorema di Rolle”

Obiettivi:

Costruzione del significato del teorema

Necessità della tesi, delle ipotesi

Validità generale (assenza di eccezioni)

Attività sul “teorema di Rolle”

Estensione dello spazio degli esempi

in modo che gli studenti abbiano familiarità con gli oggetti matematici (al di là dei prototipi)

- Costruzione e trattamento (rappresentazioni semiotiche, trasformazioni)

- Controesempi all’enunciato con ipotesi indebolite

Produzione del teorema “dal basso”

Processi guidati di produzione e di trattamento di oggetti matematici, osservazione di proprietà.

Produzione di congetture, argomentazioni e dimostrazioni

DESCRIZIONE DELL’ATTIVITA’ IN CLASSE

Due classi quinte (22 e 17 studenti) di un Liceo Scientifico tradizionale

Totale 6 ore (all’interno di una normale programmazione didattica) + verifica

Insegnante: Marina Ascari

Prerequisiti: Concetto di funzione, dominio, limiti e derivabilità

PRIMO PASSO

Problemi posti per iscritto:

Classe VA

- Fai un esempio di una funzione con dominio R e con 2 punti di discontinuità.
- Fai un esempio di una funzione con dominio R e con 2 punti di non derivabilità.

Classe VC

Fai un esempio di funzione definita su R non continua nel punto $x=5$, tale che $f(5)=2$ e i limiti destro e sinistro per x che tende a 5 siano uguali.

Progettazione attività 2008/2009

- Produzione di esempi con diverse rappresentazioni

SCHEDA: Inventa 2 grafici di funzione e 2 funzioni in forma algebrica per ognuno dei campi di esistenza proposti:

[-1,5]; (-1,5); [-1,5); (-1,5]; $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$

Progettazione attività 2008/2009

- Produzione di esempi con diverse rappresentazioni
- Produzione di esempi “strani”

SCHEDA: Inventa 2 grafici di funzione e 2 funzioni in forma algebrica **ma i più strani possibile** per ognuno dei campi di esistenza proposti:

[-1,5]; (-1,5); [-1,5); (-1,5]; $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(5;+\infty\right)$

Progettazione attività 2008/2009

- Produzione di esempi con diverse rappresentazioni
- Produzione di esempi “strani”
- Produzione di “controesempi” a potenziali “enunciati impliciti”

SCHEDA: Se possibile dai due esempi di funzione **continua** su
[-3,4) senza massimo, almeno una anche limitata

SCHEDA: Se possibile disegna 2 grafici di una funzione limitata inferiormente ma non superiormente, con dominio $[0, +\infty)$, senza asintoti verticali e per la quale non esiste il limite per x che tende a $+\infty$.

Progettazione attività 2008/2009

- Produzione di esempi con diverse rappresentazioni
- Produzione di esempi “strani”
- Produzione di “controesempi” a potenziali “enunciati impliciti”
- Produzione di esempi impossibili

SCHEDA: Se possibile dai due esempi di funzione **continua** in [4,6] senza minimo.

SCHEDA

- Fai 2 esempi (in forma grafica e algebrica) di funzioni periodiche per ognuna delle seguenti proprietà:
- Non limitata;
- Limitata;
- Con periodo 5π.

2. Modifica le funzioni precedenti affinché diventino:

- Periodica di periodo 8π;
- Non periodica.

•Produzione di esempi a partire da altri

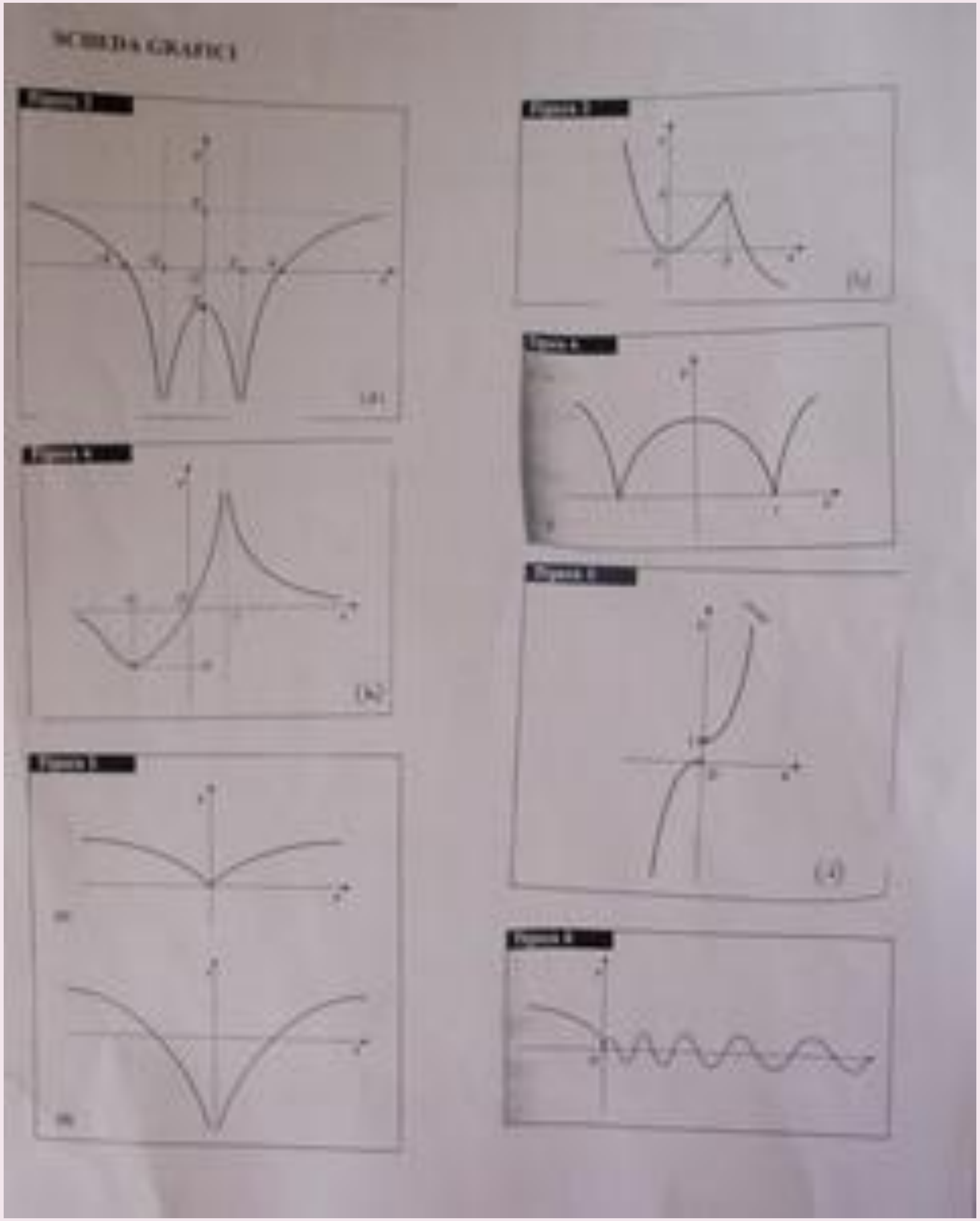
Consegna aggiuntiva (dopo alcuni problemi)

Spiega ad uno studente di un’altra quinta liceo scientifico come hai fatto a trovare gli esempi richiesti…..

- Riflessione sui processi

SECONDO PASSO

Relazione tra funzione e derivata



SCHEDA

Descrivi a parole l’andamento della derivata delle funzioni che hanno come grafico quelli della scheda e determina il campo di esistenza (max 8 righe).

SCHEDA

1. Cerca di tracciare un grafico qualitativo della derivata delle funzioni che hanno come grafico quelli della scheda grafici.
2. Traccia un grafico di funzione (il più strano possibile) e poi cerca di ricavare il grafico della derivata.

- Conversioni tra il registro grafico e quello verbale
- Relazioni tra il grafico della f(x) e della f ’(x)
- Estensione del repertorio di esempi

TERZO PASSO

SCHEDA 3 :Costruire 15 esempi di funzioni (5 continue, 5 non continue, 5 non derivabili) definite su un intervallo [a,b] tali che f(a)=f(b).

SCHEDA 4 : Fai un esempio di f(x) definita su [a,b] con f(a)=f(b) e tale che:

a) f’(x)>0 su (a,b);
b) f’(x)=0 su (a,b);
c) f’(x)<0 su (a,b);
d) f’(x)>0 su (a, (b+a)/2).

2. Costruisci, se possibile, un esempio di f(x) continua su [a,b] e derivabile sull’aperto con f(a)=f(b) e che la f’(x) sia diversa da zero per ogni x.

- Promozione di processi di produzione di esempi
- Produzione di una congettura sulla base delle potenziali modalità di costruzione degli esempi
- Argomentazione del “non si può”

SCHEDA 4: dai processi alla congettura (teorema di Rolle) e alla sua argomentazione

2. Costruisci, se possibile, una funzione f continua su [a,b] e derivabile sull’aperto con f(a)=f(b) e che la f’(x) sia diversa da zero per ogni x.

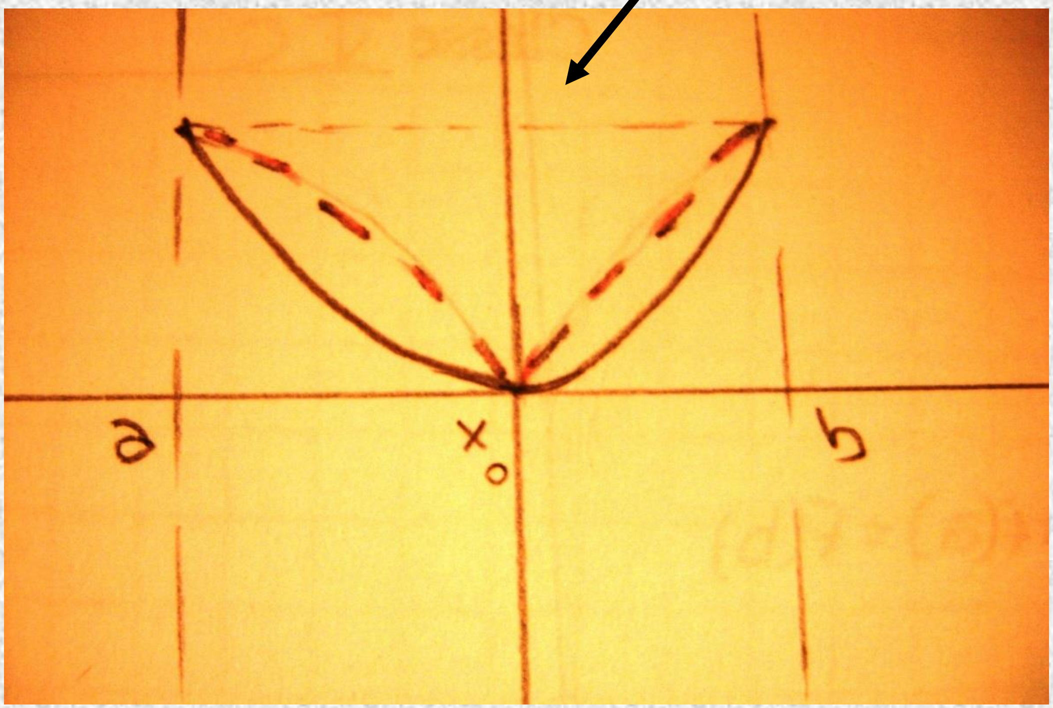
“*La funzione deve fare la curva e tornare indietro*”

“*Non può fare la curva se non ha un punto stazionario quindi ha tangente orizzontale*”

Non ci sono modi per produrre (tracciare) l’esempio

potenziali esempi

Condensate tutte le possibilità espresse a parole

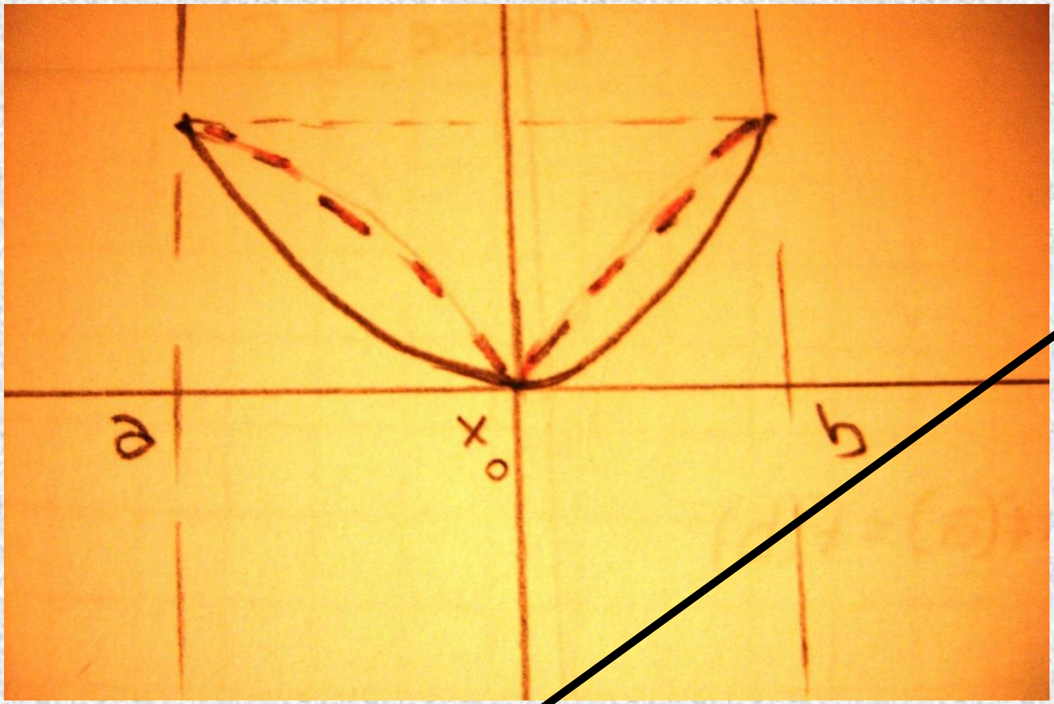


Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere f(a)=f(b). Non può essere un segmento parallelo all'asse x perché la derivata sarebbe 0.*

Dimostrazione classica:

f costante

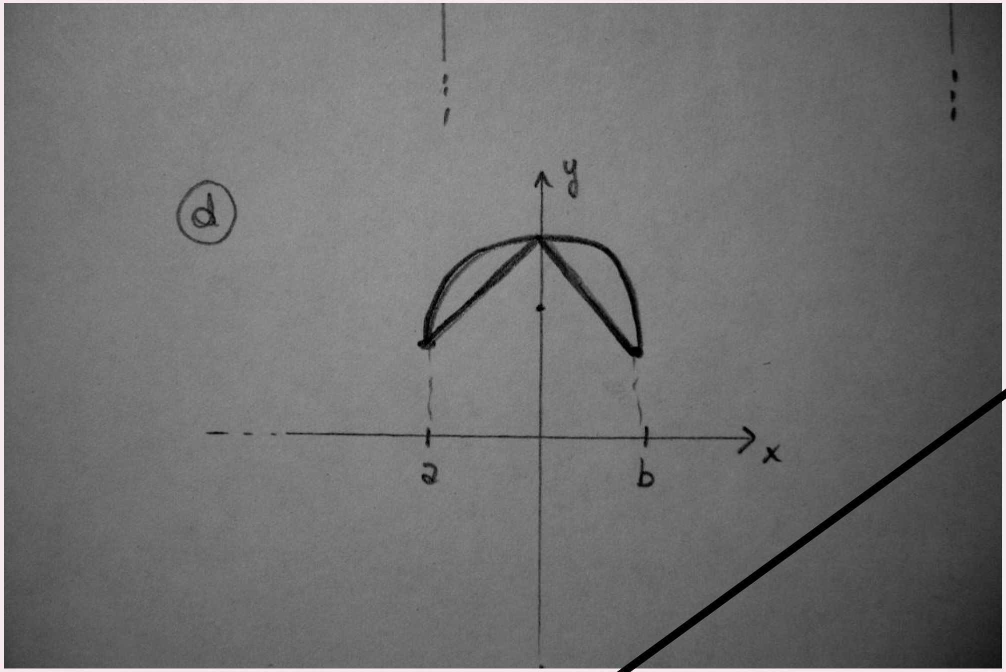
f non costante quindi max o min relativo interno ad [a,b]



Non è possibile costruire un controesempio

Ha familiarità con gli esempi che hanno qualche proprietà dei potenziali controesempi

Giulia: *Non si può, perché non può avere massimi nè minimi relativi ma deve avere f(a)=f(b). Non può essere un segmento parallelo all'asse x perché la derivata sarebbe 0.*



Procedure per costruire gli esempi

Anna: *O cade la derivabilità o cade la II condizione (f ' (x) sia diversa da 0 per ogni x)* ⇒ *teorema di Weierstrass + condizione di derivabilità*

- Conversioni tra il registro grafico e quello verbale
- Relazioni tra il grafico della f(x) e della f ’(x)
- Estensione dello spazio di esempi

- Promozione di processi di produzione di esempi
- Produzione di una congettura sulla base delle potenziali modalità di costruzione degli esempi
- Argomentazione del “non si può”

↓

Accettazione dell’enunciato e della sua generalità,

della necessità delle ipotesi

“Prof, lei è proprio brava!

ci ha fatto un teorema e non ce ne siamo neanche accorti”

Piaget (1964): *To know an object is to act on it. To know it is to modify, to transform the object and to understand the process of this transformation and, as a consequence, to understand the way the object is constructed*

Resnick and Greeno (Resnick & Greeno 1990; Resnick, 1992; Greeno, 1991): l'acquisizione dei concetti è fortemente legata alle azioni sugli oggetti

UMI-CIIM
Salerno, 17-19 ottobre 2013

Costruire Esempi e Controesempi

Samuele Antonini

Dipartimento di Matematica

Università di Pavia