

XXXI Convegno UMI–CIIM
FARE MATEMATICA NELLA SCUOLA DI TUTTI

Rimettiamoci alla prova! Le dimostrazioni per conoscere e capire la matematica.



“Non si aspetti il collega (*il lettore*) che si apra davanti a lui la cassetta delle meraviglie! Ci auguriamo soltanto che qualche idea che ci è venuta al contatto degli allievi possa maturarsi al contatto di altri allievi; possa quindi estendersi e dare adito ad altre esperienze, ad altre idee.”

Emma Castelnuovo “Il materiale per l’insegnamento della matematica”
– La Nuova Italia – Firenze 1965

Salerno 17 ottobre 2013

Marilina Ajello

Un possibile percorso sulle dimostrazioni, trasversale ai nuclei tematici

(per gli istituti tecnici, professionali e i licei)

- scuole diverse
- alunni diversi
- insegnanti con formazione diversa
- un numero diverso di ore settimanali per la matematica
- un ruolo diverso per la matematica all'interno dei curricoli
- altre variabili

È comunque possibile trovare un denominatore comune quando
parliamo delle dimostrazioni?

Forse!

Schema comune.

(Tempi e opportunità : variabili didattiche)



I tappa

- **“Piego e spiego”**: piegando un foglio di carta (A4 è quasi sempre comodo) si ottengono quadrato, triangolo equilatero, esagono regolare, ottagono regolare, parallelogramma (meglio con un quadrilatero irregolare), ellisse (con un cerchio), parabola, ecc...e si chiede di spiegare perché la tale figura è...



http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argomento/Matematicae/Giugno_06/origami.htm; http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf

I tappa



- **“Algoritmi: perché funzionano?” :**

“giustificiamo” il criterio di divisibilità per 3... (o per 2 o per 5...)

Sia $abcd$ un numero naturale:

$$\begin{aligned}abcd &= a(999+1) + b(99+1) + c(9+1) + d = \\&= a \cdot 999 + a + b \cdot 99 + b + c \cdot 9 + c + d = \\&= a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9 + (a + b + c + d)\end{aligned}$$

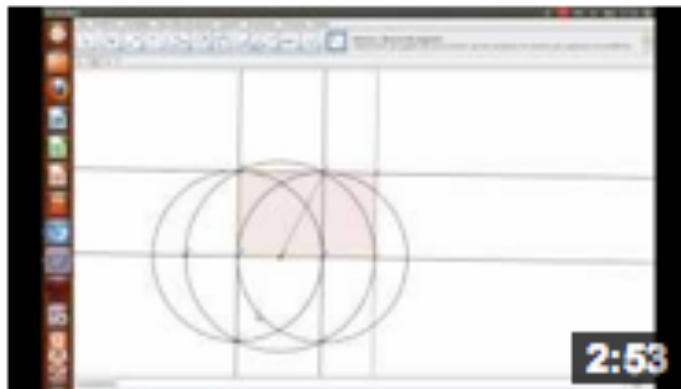
Tanti esempi si trovano tra le attività [M@t.abel](http://M@t.abel.it) (numeri)

“L’aritmetica aiuta l’algebra e l’algebra aiuta l’aritmetica”

“Per evitare che gli allievi interpretino le formule algebriche come pure sequenze di segni, bisogna proporre situazioni problematiche in cui il linguaggio dell'algebra superi quello dell'aritmetica e diventi strumento per esprimere relazioni e generalizzare: un linguaggio utile sia per comprendere sia per dimostrare.”

I tappa

- **“Costruisco e giustifico”** : costruzioni con riga e compasso con la giustificazione della costruzione (può essere proposta prima con gli strumenti riga e compasso e dopo con un software) con diverso grado di **“rigore”** della **giustificazione/dimostrazione**.



Costruzione di un rettangolo aureo

di Davide P • 10 mesi fa • 418 visualizzazioni

Ecco la **costruzione** di un rettangolo aureo tra video commentate e mettete mi piace =) per alt

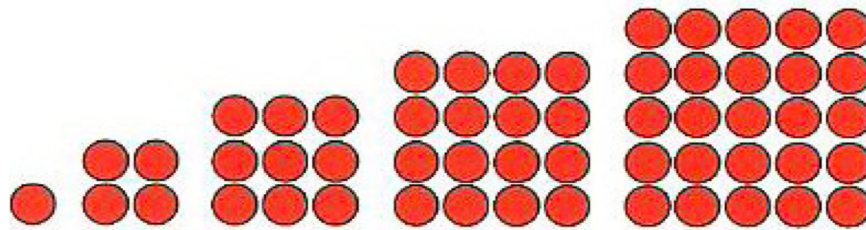
HD

Cosa accomuna le attività
della I tappa?

Il tappa

- “Spazio alle congetture!”:

si possono scegliere esempi in cui gli studenti, utilizzando *ragionamenti induttivi*, elaborano congetture, come in questo esempio:



“trova quante palline avrà la sequenza successiva e poi cerca di scrivere l’espressione che permette di trovare il numero delle palline della figura di posto n , per qualsiasi n .”

Si possono utilizzare le *esplorazioni di configurazioni geometriche* dando indicazioni sul tipo di regolarità che si potrebbe scoprire (prevede l’uso di un software come Geogebra)

Il tappa

- **“Falsifichiamo una congettura”**: si possono utilizzare tutte le situazioni in cui le congetture formulate dagli studenti palesemente “non funzionano” ma anche casi notissimi come questo:

il polinomio $n^2 + n + 41$ per $n=1$,
 $n=2$, $n=3$,... $n=39$ produce numeri primi ma
per $n=40$... **NO!**

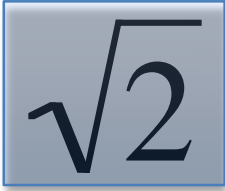
Il tappa

- **“Validiamo una congettura” :**

possono andar bene anche casi semplicissimi:

La somma di due numeri pari è pari? (in casi come questo diventa evidente come il linguaggio algebrico serve per capire e per dimostrare)

vale la pena dedicare un po' di tempo alla storia della matematica!

Si può scrivere  sotto forma di frazione?

Quanti sono i numeri primi?

Si può cominciare a proporre delle dimostrazioni, in particolare le due precedenti, senza aver dato agli studenti gli strumenti di logica ?

III tappa

- **“Dimostriamo i teoremi”**: (secondo il tipo di scuola superiore, in realtà sarebbe meglio dire “secondo il tempo a disposizione”)

quali dimostrazioni scegliere?

le più significative del percorso di algebra, di geometria, di statistica, del calcolo delle probabilità, di geometria analitica, dell'analisi, ...

III tappa

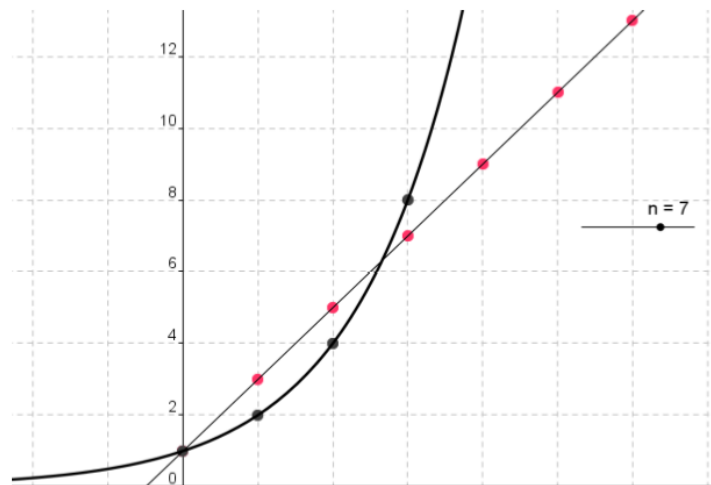
- Nelle indicazioni per i Licei Scientifici si parla anche del “***principio di induzione matematica***”:

Per un approfondimento e qualche consiglio:

[http://www.centromorin.it/attivita/materiali2012/tomas
i.pdf](http://www.centromorin.it/attivita/materiali2012/tomas
i.pdf)

**Qualche esempio per la scuola secondaria di
Il grado (qui c'è bisogno della congettura?):**

$$2^n > 2n+1 \text{ (per quali naturali } n \text{ ?)}$$



Quali sono le dimostrazioni
“più significative”?

IV tappa

- “Lasciamo da parte i significati e vediamo meglio gli aspetti sintattici!” : (secondo il tipo di scuola superiore, in realtà sarebbe meglio dire “secondo il tempo a disposizione”)

La dimostrazione dell'equivalenza logica fra due proposizioni

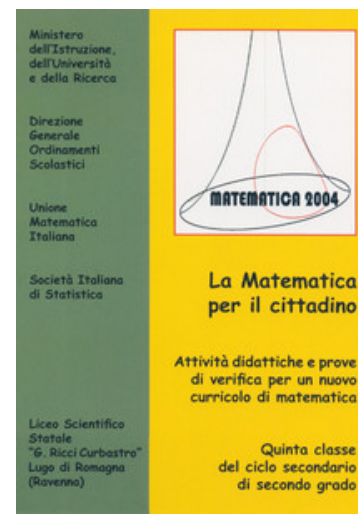
(anche banalmente $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$ ma poi non tanto...)

All'indirizzo <http://www.umi-ciim.it>

il volume

Matematica 2004 e l'attività dal titolo

“Maiuscole e minuscole”



IV tappa

- Dal testo “La rivoluzione non euclidea” di R. Trudeau, Bollati Boringheri, Torino 1991 al capitolo quinto: “Un semplice esempio di sistema assiomatico formale” noto come “*Le flogghe che scorpano*”.
- Dal testo “Gödel, Escher, Bach: un’Eterna Ghirlanda Brillante” di Douglas R. Hofstadter, Adelphi editori 1984 Milano al capitolo I: “Il gioco MU” un altro semplice sistema formale dove vengono introdotti alcuni concetti fondamentali di un sistema formale e viene proposto un gioco.

Quali vantaggi si hanno nel
“lasciare da parte i significati”?

Verifiche e valutazione

Non aspettiamoci cambiamenti immediati negli atteggiamenti degli studenti nei confronti del dimostrare!

Tutto un quinquennio, a volte, non basta per ottenere i risultati che avremmo sperato.

Ogni prova di verifica, però, può (*dovrebbe*) contenere almeno un quesito in cui si richiede una giustificazione o una semplice dimostrazione.

Per concludere

- La sequenza in tappe potrà dare al docente un filo conduttore che nei libri di testo spesso non è esplicito ma che potrebbe essere esplicitato nella programmazione.
- Le attività esposte come esempi nelle diverse tappe si possono distribuire nel percorso didattico nel modo più opportuno.
- Si può utilizzare in qualunque anno una costruzione con riga e compasso, la piegatura della carta, la formulazione di una congettura, con problemi di diversa complessità.

Riferimenti bibliografici

- V. Villani- C. Bernardi - S. Zoccante-R. Porcaro “Non solo calcoli”-Collana Convergenze, Springer 2012
- G. Lolli “QED fenomenologia della dimostrazione” Bollati Boringheri 2005
- P. Francini “Cercare,mostrare, dimostrare”-Archimede 2/2010, rivista trimestrale Le Monnier
- P. Francini “Alcune virtù della dimostrazione, oggi”-Archimede 3/2010 Le Monnier
- A. Beutelspacher-M. Wagner “Piega e spiega la matematica, laboratorio di giochi matematici”. Ponte delle Grazie (Salani) 2001
- Matematica 2003 e Matematica 2004 (MIUR, UMI, SIS)