

Un semplice esempio di sistema assiomatico formale: “le flogge che scorpano” (proposto da Trudeau in “La rivoluzione non euclidea”)

Livello scolastico: V anno

Contesto: sistemi formalizzati

Termini primitivi: *flogga, scorpere*

Assiomi:

1. *Se A e B sono due flogge distinte, allora A scorpa B oppure B scorpa A (non è esclusa la possibilità che si verifichino entrambi i casi).*
2. *nessuna flogga scorpa se stessa.*
3. *Se A, B e C sono flogge tali che A scorpa B e B scorpa C, allora A scorpa C.*
4. *Vi sono esattamente quattro flogge.*

Seguono alcuni teoremi, dimostrati o lasciati da dimostrare

Teorema 1. *Se una flogga ne scorpa un'altra non è scorpa da essa.*

Dimostrazione

1. Sia A una flogga che scorpa la flogga B, per ipotesi.
2. Supponiamo per assurdo che anche B scorpori A.
3. Per l'assioma 3 allora A scorpa A.
4. Ma l'assioma 2 afferma che nessuna flogga scorpa se stessa.
5. Quindi B non scorpa A c.v.d.

Corollario. *Date due flogge distinte, o la prima scorpa la seconda o la seconda scorpa la prima, ma non entrambi i casi.*

Dimostrazione

È conseguenza dell'assioma 1 e del teorema 1.

Teorema 2. *Date tre flogge A, B e C con C distinta da A.. Se A scorpa B e A non scorpa C, allora C scorpa B*

Dimostrazione

1. A è distinta da C, per ipotesi
2. A non scorpa C per ipotesi
3. Allora C scorpa A, per l'assioma 1
4. A scorpa B, per ipotesi
5. Quindi C scorpa B per l'assioma 3, il passo 3 e il 4.

Osservazioni. (si possono fare delle domande agli alunni perché arrivino a mettere insieme osservazioni di questo tipo!)

Non è necessario sapere che cosa sono le flogghe e che cosa vuol dire scorpere per dimostrare i teoremi. La validità delle deduzioni non dipende in alcuna maniera dal particolare significato che può essere associato ai termini o alle espressioni contenute negli assiomi. I termini primitivi sono solo simboli e il linguaggio è simbolico. Un vantaggio della mancanza di significati consiste nella possibilità di evitare i tranelli del linguaggio comune e nel garantire il massimo rigore nelle dimostrazioni. D'altra parte la mancanza di una realtà oggettiva non permette di verificare la coerenza interna delle proposizioni del sistema.

Una interpretazione dei termini primitivi che rende enunciati veri gli assiomi (un modello!):

le flogghe = i quattro libri di una pila

scorpere = essere più in alto di

Gli assiomi diventano

1. se A e B sono due libri distinti di una pila, allora A è più in alto di B oppure B è più in alto di A.
2. nessun libro della pila è più in alto di se stesso.
3. se A, B e C sono tre libri della pila tali che A è più in alto di B e B è più in alto di C, allora A è più in alto di C.
4. nella pila vi sono esattamente quattro libri.

Dal momento che i libri della pila, il loro numero e le loro reciproche posizioni, possono essere sottoposte ad osservazioni dirette e la possibilità di commettere errori è praticamente nulla, la coerenza del sistema non è messa in discussione!

Si può lasciare agli alunni il compito di trovare altre possibili interpretazioni.