Maiuscole e minuscole

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico. Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazione o di dimostrazione.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi. I predicati. Schemi di ragionamento. Sistemi assiomatici in vari contesti.	<u>Argomentare, congetturare, dimostrare.</u> Laboratorio di matematica.	

Contesto

Sistemi assiomatici.
Un sistema assiomatico è formale in quanto è formulato in un linguaggio rigorosamente definito dal punto di vista sintattico (le formule ammesse, le regole formali di derivazione). Il senso del sistema formale sta anche nelle possibili interpretazioni (semantica). È opportuno distinguere i due aspetti, anche se è solo dal loro intreccio che si può generare una sua completa comprensione. Da un lato il versante sintattico evita di utilizzare ipotesi implicite date per scontate, tuttavia mai dimostrate, ed evita anche le ambiguità del linguaggio naturale. Ciò comporta una maggiore attenzione alle procedure di deduzione. Dall'altro lato, gli aspetti semantici offrono i contesti da cui tali procedure estraggono il loro significato. Si tratta di un rapporto dialettico tra i due poli, che complessivamente deve essere colto dagli allievi con le opportune gradualità.

Descrizione dell'attività

<u>Prima fase</u>
Si tratta di lavorare con un sistema formalizzato per la produzione di parole (stringa di simboli dell'alfabeto). Dato un elenco di parole scritte con lettere minuscole e maiuscole

es: *GatTo* *eleNCo* *Se* *sE* *aLLa*

È consentito modificare l'insieme iniziale di parole date solamente applicando le seguenti regole:
REGOLA 1 Si cancellano occorrenze multiple della stessa lettera in una stessa parola.

Es: da eleNCo si ottiene *elNCo* per cancellazione della seconda "e";
da *GatTo* non si può ottenere nulla, perché "*t*" e " *T* "sono considerate diverse;
da *aLLa* si ottiene *aLL* *aLa* *aL.*

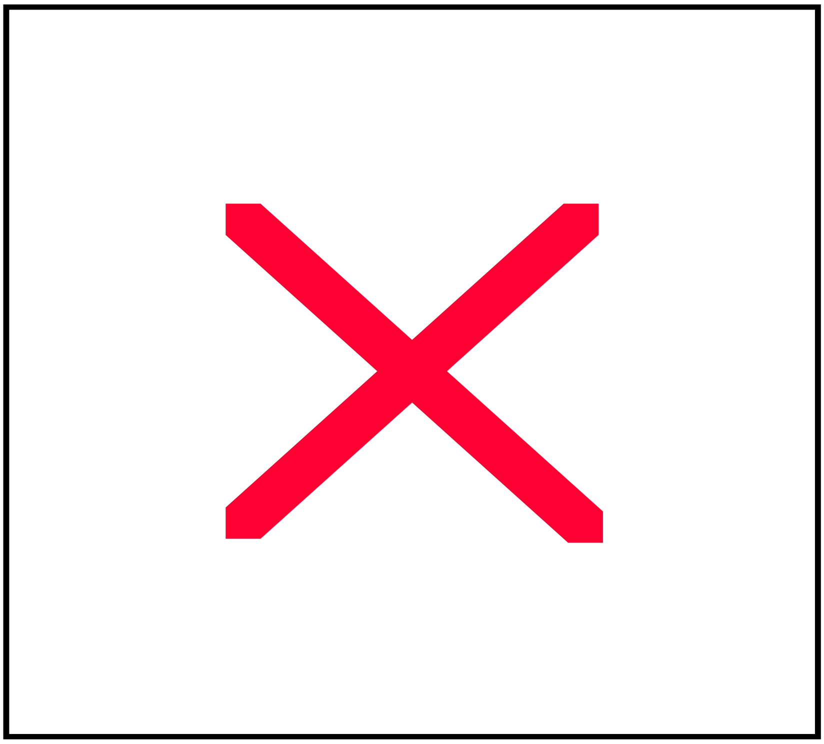
REGOLA 2 Prese due parole una con la maiuscola e una con la minuscola della stessa lettera, si eliminano queste due lettere e si uniscono i restanti spezzoni.

Es: *eleNCo, aL* danno *eeNCoa* da cui ancora *eNCoa* per la regola1
Se , sE danno *eE*
Q , q danno la "parola vuota"

Che ruolo ha la parola vuota? Sarà più facile attribuirle un significato alla luce della interpretazione del sistema data in seguito.
Si pone il seguente problema fondamentale : *dato l'elenco di parole è ottenibile la parola vuota*?

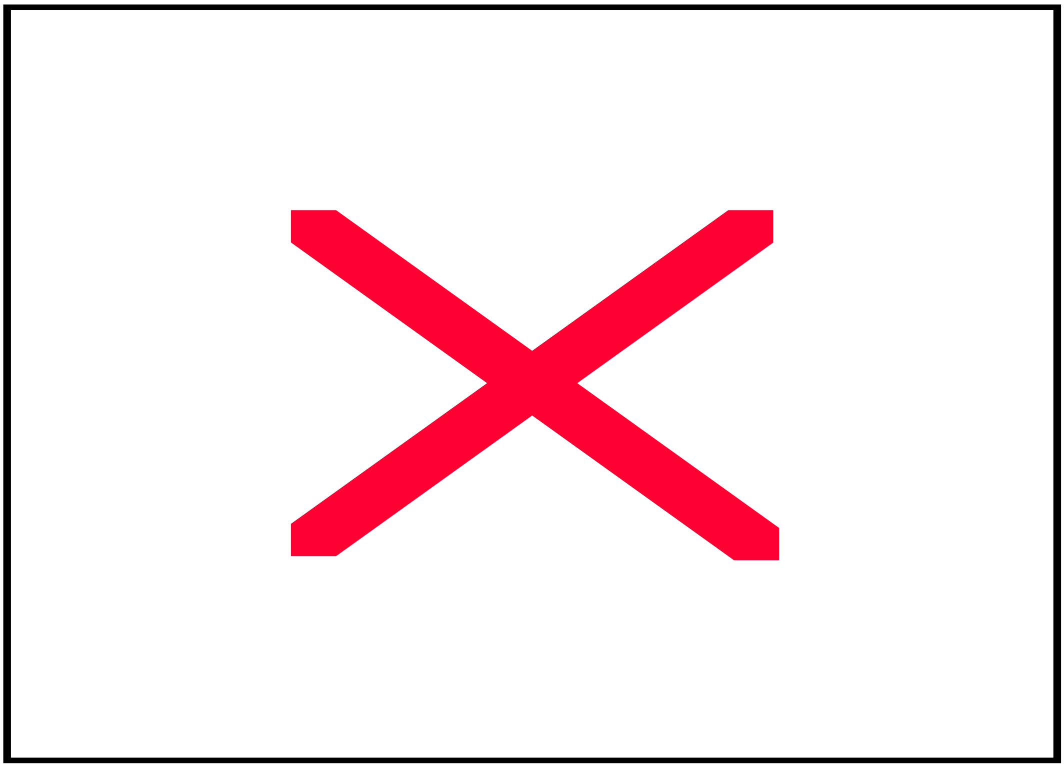
Esempio 1

Figura 1



Esempio 2

Figura 2



Esempio 3

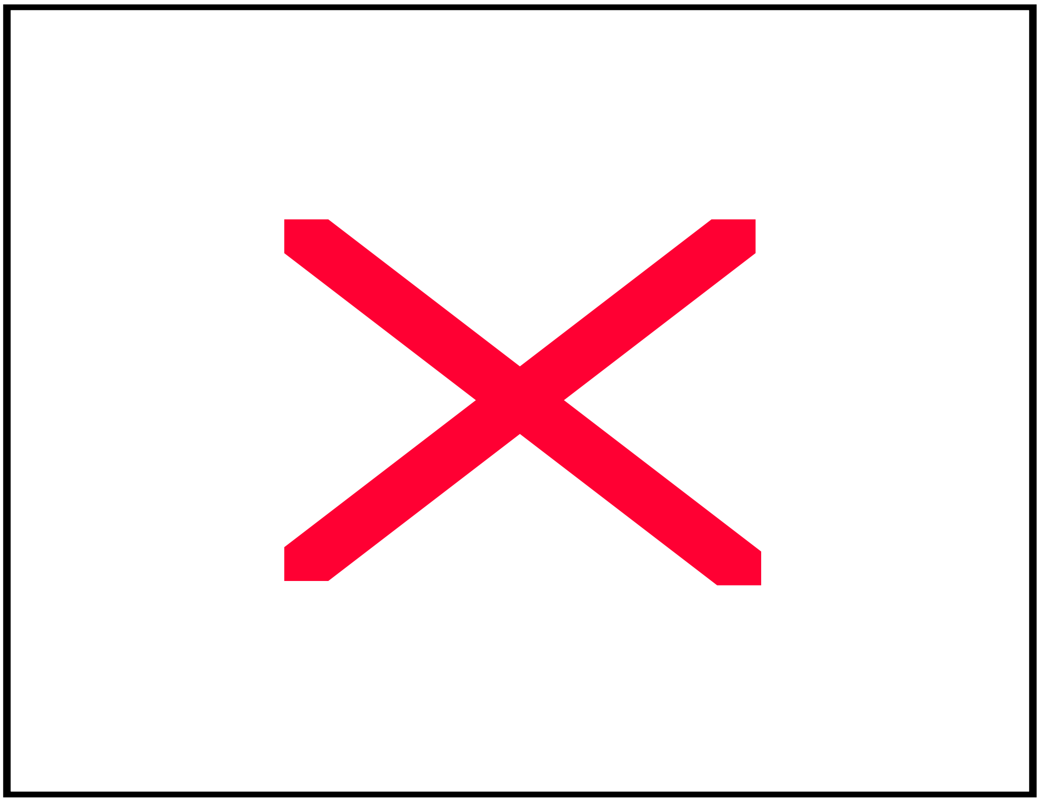


Figura 3

Si propone agli alunni, dopo aver presentato le regole del gioco, di esercitarsi nella produzione di insiemi di parole che producono la parola vuota. Nei primi esempi sono stati utilizzati insiemi di parole con meno di tre lettere perché con questi insiemi è più facile decidere se la parola vuota è ottenibile o no. Risulta banale il problema nel caso in cui l'insieme è formato da parole ciascuna di una sola lettera.

Es: { A, C, b,e } non dà parola vuota
mentre {A, C, b, c } dà la parola vuota.

<u>Seconda fase</u>

L'insegnante propone la seguente interpretazione del sistema formale in questione:
A = proposizione A
a = proposizione $\neg$ A (non A)
XY = $X \vee Y$
X,Y = $X \wedge Y$
La clausola dell'esempio 1

AB, Ab, aB, ab

equivale, nella interpretazione data all'espressione seguente

$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

È facile verificare con le tavole di verità che questa proposizione è sempre falsa, cioè è una contraddizione. A questo punto possiamo ripensare alla produzione della parola vuota come alla presenza di una contraddizione nel sistema delle proposizioni prese in considerazione. Infatti la clausola dell'esempio 1 *AB, Ab, aB, ab* produce la parola vuota e il suo equivalente è una contraddizione.

Si può proporre di provare che la nota proposizione $A \vee \neg A$ è una tautologia provando che la sua negazione è una contraddizione in quanto applicando le regole del gioco produce la parola vuota.
Infatti la negazione di $A \vee \neg A$ è $\neg(A \vee \neg A) = \neg A \wedge \neg \neg A = \neg A \wedge A$;
$\neg A \wedge A$ equivale ad *a,A* che dà per la regola 2 la parola vuota.

Facendo qualche richiamo sulla logica degli enunciati si ricorda agli alunni che la proposizione $H \rightarrow T$ è logicamente equivalente alla proposizione $\neg H \vee T$.
Il metodo di refutazione consiste nel porsi come obiettivo la dimostrazione di un enunciato del tipo $H \rightarrow T$, cioè se H allora T. Per fare questo si segue la seguente strategia :

a) Si cerca di refutare l'enunciato $H \rightarrow T$, cioè di trovare una interpretazione che lo falsifichi (cioè in cui tale enunciato risulti falso).
b) Ciò equivale a trovare una interpretazione che soddisfi $H \wedge \neg T$ (equivale a dire che l'implicazione $H \rightarrow T$ risulta falsa).
c) Per falsificare $H \wedge \neg T$ si segue il metodo della ricerca della parola vuota nel gioco delle maiuscole e minuscole, cioè si prova se le regole applicate alla clausola { H, t } producono la parola vuota. In tal caso diciamo che la clausola risulta insoddisfacibile. Cioè non si può refutare $H \rightarrow T$ e quindi $H \rightarrow T$ essendo vera in qualunque interpretazione è un teorema. Nel caso invece in cui non si produca la parola vuota la clausola non è refutabile quindi $H \rightarrow T$ non è un teorema.

E' necessario fare due osservazioni: 1- si definisce soddisfacibile una clausola quando esiste una interpretazione (nel caso del calcolo preposizionale una assegnazione di valori di verità) tale che la clausola stessa risulta vera in base a quella interpretazione; e quindi risulta insoddisfacibile se nessuna interpretazione la rende vera. 2- nella situazione precedente spesso H non è una sola parola ma un insieme di parole (cioè ci sono più ipotesi), ad esempio $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. In tal caso H diventa $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots \wedge H_n$.

Segue un esempio sul metodo di refutazione:

$$\begin{array}{ccc}
[A \rightarrow (B \rightarrow C)] & \rightarrow & [A \wedge B \rightarrow C] \\
[\neg A \vee (B \rightarrow C)] & \wedge & \neg [A \wedge B \rightarrow C] \\
[\neg A \vee \neg B \vee C] & \wedge & A \wedge B \wedge \neg C
\end{array}$$

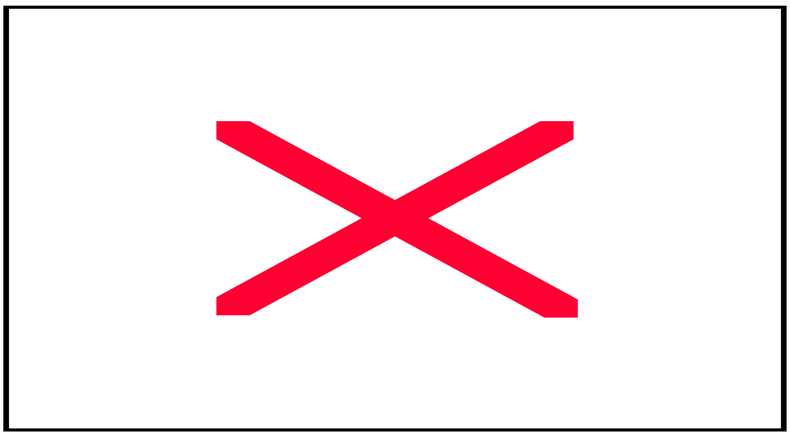


Figura 4

Il metodo di refutazione proposto è alla base dell'algoritmo usato nel Prolog per la dimostrazione automatica. In particolare tali linguaggi sono usati per fare diagnosi mediche a partire dai data base relativi ai sintomi e ai risultati degli esami dei pazienti.
Può essere interessante per gli studenti una ricerca su Internet sulle dimostrazioni automatiche.

<u>Terza fase</u>
Si ha l'opportunità adesso di fare una riflessione su alcuni termini "noti" alla luce dell'attività fin qui svolta : per esempio

- stringa
- teorema
- assioma
- regola di inferenza
- derivazione

Elementi di prove di verifica

1. Dato l'insieme { se, Sul, il, I,uu, EE } completa il seguente schema per ottenere la parola vuota

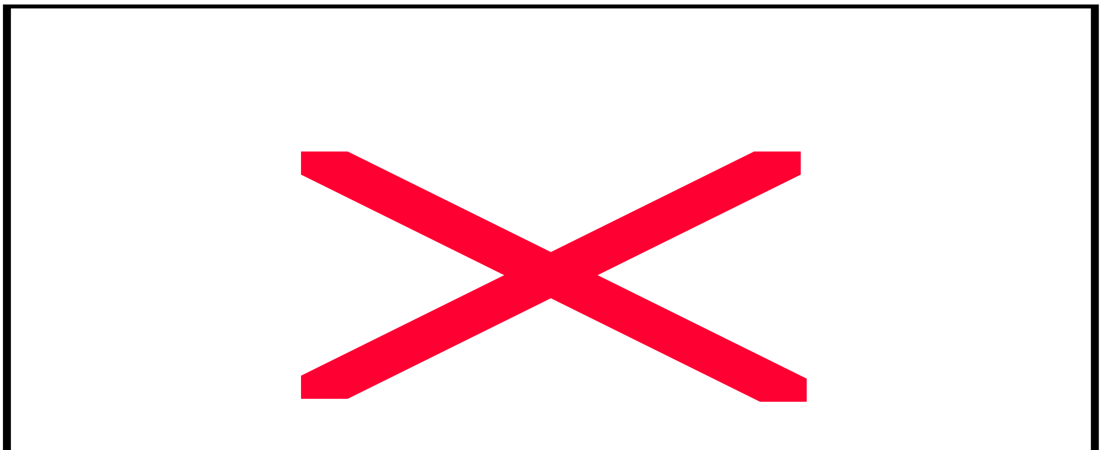


Figura 5