

Il gioco del MU

(proposto da Hofstadter in “Godel, Escher e Bach ...”)

Livello scolastico: V anno

Contesto: sistemi formalizzati

Descrizione dell’attività: si tratta di un sistema formalizzato per la produzione di stringhe in cui le uniche lettere consentite sono M, I, U. Viene presentato un gioco con uno scopo.

Fase 1

Si esplicita il funzionamento del gioco.

L’unica stringa di cui si è in possesso all’inizio del gioco è MI

Si possono ottenere altre stringhe solo tramite le regole :

1. se si possiede una stringa che termina con una I, si può aggiungere una U alla fine
2. si abbia Mx. Allora si può includere nella collezione Mxx (x indica una stringa)
3. se in una stringa c’è III si può costruire una nuova stringa mettendo U al posto di III
4. se all’interno di una stringa c’è UU si può eliminarlo

per prendere confidenza produciamo un po’ di stringhe
(è preferibile il lavoro di gruppo)

alcuni esempi:

MIU si ottiene da MI applicando la regola 1

MIUIU si ottiene da MIU applicando la 2

MIIII si ottiene applicando prima la 2 a MI (e si ha MII) e poi di nuovo la 2 a MII e si MIIII

MIIIIIII dalla precedente applicando la 2

MUIIIIII dalla precedente per la 3

MUUIIIIII dalla precedente per la 3

MIIII dalla precedente per la 4

Domande per gli studenti:

Avete notato l’analogia con il metodo con cui abbiamo realizzato le costruzioni elementari con riga e compasso?

A che cosa corrispondono, nel sistema assiomatico di Euclide, le regole? E la stringa iniziale?

Qual è la differenza sostanziale tra le proposizioni di Euclide e le stringhe del MU?

Il fatto che “non ci sono significati” è un ostacolo nel momento della derivazione delle stringhe?

Fase 2

si esplicita la scopo del gioco:

ottenere la stringa MU

Si propone di analizzare le stringhe ottenute e fare delle osservazioni cercando di capire quali stringhe non si potranno ottenere; saranno utili anche delle osservazioni per vedere cosa si può fare e cosa non si può fare.

Domanda:

per sapere se x è una stringa ottenibile nel sistema si deve procedere una stringa dopo l'altra o è più utile cercare un possibile criterio per decidere?

Fase 3

Si ascoltano le soluzioni proposte dai gruppi ed eventualmente l'insegnante integrando le proposte avvierà i ragazzi alla soluzione corretta.

Soluzione :

Tutte le stringhe come si è osservato iniziano per M,

Congettura: C'è sempre una I nella stringa

Devo dimostrare che MU non si può ottenere, quindi basta dimostrare che la I ci sarà sempre.

Il numero delle I contenute nelle stringhe non è mai 0,

lo dimostriamo così:

chiamiamo I-somma il numero delle I di una stringa;

la I-somma della stringa iniziale è 1;

le regole I e IV lasciano intatta la I-somma;

le altre regole incidono sulla I-somma, ma in modo tale da creare un multiplo di 3 solo se ce n'era già una presente prima di applicare la regola, quindi

la I-somma in una stringa non può essere un multiplo di 3;

in particolare 0 è un valore impossibile per la I-somma,

la stringa MU non si può ottenere!

Domande:

Quali regole intervengono nella dimostrazione precedente? Sono esterne al gioco, che ruolo hanno?

In quale contesto ci stiamo muovendo?