L'EMERGERE DELL'IDEA DI LABORATORIO DI MATEMATICA AGLI INIZI DEL NOVECENTO

Livia Giacardi
Dipartimento di Matematica – Università di Torino

Premessa

L'idea di offrire agli allievi spazi dove poter esplicare un'attività spontanea e costruttiva, coltivare la propria individualità e socializzare appare di frequente negli studi di pedagogisti, psicologi ed educatori di fine Ottocento, inizi Novecento. Basti citare l'americano John Dewey (1859-1952), il cui sistema educativo si ricollega al pragmatismo di Charles S. Peirce e William James, il tedesco Georg Kerschensteiner (1854-1932), il belga Ovide Decroly (1871-1932), gli svizzeri Edouard Claparède (1873-1940) e Adolphe Ferrière (1879-1960) e l'italiana Maria Montessori (1870–1952), medico e pedagogista.

Tutti questi studiosi erano interessati soprattutto alla formazione del fanciullo nei suoi primi anni di vita e nelle loro riflessioni il riferimento alla matematica non è sempre presente, ma l'idea di una scuola laboratorio si diffuse anche fra i matematici che la estesero alla scuola secondaria.

Dopo aver accennato brevemente al punto di vista di alcuni pedagogisti che si interessarono anche di matematica o interagirono con gli ambienti scientifici (Dewey, Kerschensteiner, Wells), mi soffermerò sul contributo dei matematici, John Perry (1850-1920), Eliakim Hastings Moore (1862-1932), Emile Borel (1871-1956), Felix Klein (1849-1925), per concentrarmi poi sulla "scuola laboratorio" di Giovanni Vailati (1863-1909). Dal confronto dei diversi modelli di laboratorio di matematica proposti, cercherò di far emergere le differenze più significative e gli aspetti innovativi.

La scuola laboratorio secondo alcuni pedagogisti

John Dewey, ispiratore di gran parte degli educatori e pedagogisti della prima metà del Novecento, può a buon diritto essere considerato il padre della scuola attiva. Ritenendo che la scuola del suo tempo fosse anacronistica, passiva, antipsicologica e antisociale, era fautore di una scuola attiva che ponesse al centro non più maestri o libri, ma l'attività del fanciullo organizzata in una forma di lavoro di tipo sociale: il sapere non deve dunque essere fornito bell'e pronto, ma deve essere presentato sotto forma di problemi e deve scaturire dalla ricerca personale dell'allievo. Essendo l'aula tradizionale inadeguata per un tale tipo di insegnamento, egli riteneva che occorresse trasferire il processo educativo nei laboratori, nelle biblioteche, nei campi da gioco, nelle officine e nelle cucine, dove il lavoro trasforma la scuola in una comunità in embrione.[1] Nel 1896 Dewey fondò a Chicago una *scuola sperimentale* basata su questi ideali educativi e cercò di interagire anche con i matematici, in particolare con Moore e con George B. Halsted. In un articolo del 1903 sull'insegnamento della geometria [Dewey 1903], reagendo a uno scritto di Halsted, fermo sostenitore del rigore, egli affermava che nella pratica dell'insegnamento si deve tener conto anche dell'aspetto psicologico e che dunque occorre partire dalla realtà concreta, dall'esperienza ordinaria, e presentare le applicazioni pratiche della matematica in modo da arrivare gradualmente al rigore logico.

[1] Si veda per esempio Chiosso 1997, pp. 63-67.

Fra i pedagogisti europei influenzati da Dewey ricordiamo Kerschensteiner, pedagogista sociale, direttore dell'insegnamento primario e professionale di Monaco e promotore della scuola del lavoro, l'*Arbeitsschule*. Egli riteneva che per riformare la scuola non occorresse tanto accrescere i programmi o aumentare gli orari, ma fosse necessario trasformare la scuola in un laboratorio di esercitazioni, dove l'allievo potesse imparare a usare il sapere e acquisire il senso del dovere sociale. L'importanza da lui attribuita al lavoro manuale e all'attività pratica va aldilà dell'acquisizione di abilità e competenze, è collegata piuttosto alla capacità di effettuare un'attività responsabile e autonoma. Avendo compiuto studi di matematica all'università, fu particolarmente sensibile alle problematiche connesse con l'insegnamento scientifico, cui dedicò nel 1914 un libretto dal titolo *Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts*.[2]

Dewey era sicuramente noto a Vailati, che lo menziona nei suoi scritti [S I, pp. 202, 210] e che comunque conosceva bene l'opera dei pragmatisti Peirce e James cui Dewey si ispira, ma fu probabilmente la lettura di Herbert George Wells (1866-1946) a stimolare in lui la riflessione sulla scuola laboratorio.[3]

Scrittore di fantascienza con formazione scientifica, Wells si interessò anche di problemi educativi e nel libro *Mankind in the making* (London, Chapman, 1903), esaminato da Vailati, critica la scuola inglese ed espone il suo punto di vista sui metodi di insegnamento. In particolare egli riteneva che i programmi fossero ridondanti, ma privi di tutto ciò che permette all'allievo di comprendere la società in cui vive (p. 205) e i manuali scolastici inadeguati a un insegnamento attivo (p. 226). Secondo Wells era auspicabile che le scuole fossero collegate alle biblioteche pubbliche (p. 213) e le lezioni vere e proprie fossero alternate a sedute dedicate ad attività individuali quali la lettura, la pittura e anche il gioco, apprezzato in quanto "attività spontanea che incentiva l'immaginazione" (p. 235). Wells cita anche l'insegnamento laboratoriale della matematica, evidenziando però le difficoltà che si incontrano a metterlo in pratica, perché un insegnamento di questo tipo richiede da parte del docente preparazione, pianificazione, grande applicazione e impegno, cosa impossibile senza manuali scolastici adeguati (p. 225).

Il laboratorio di matematica nel panorama internazionale

L'idea di laboratorio di matematica nasce con Perry, professore di Meccanica e Matematica del Royal College of Science di Londra. Egli riteneva infatti che la matematica dovesse essere insegnata "as any other physical science is taught, … with experiment and common-sense reasoning"[4] ed elaborò un metodo didattico che chiamò il metodo *Practical Mathematics*.

> *"The most essential idea* – egli scrive – *in the method of study called Practical Mathematics is that the student should become familiar with things before he is asked to reason about them"* [Perry 1913, p. 21].

Prima di affrontare teoremi e dimostrazioni l'allievo dovrebbe pertanto acquisire familiarità con i concetti attraverso esperimenti e misure con l'uso della carta quadrettata, la raccolta di dati, il disegno, i metodi grafici e i collegamenti con la fisica e le altre scienze.

Nell'elaborazione del suo metodo Perry si ispirò ai metodi usati nei giardini d'infanzia, dove sotto l'influenza di Pestalozzi e Froebel si adottava un approccio educativo basato sull'attività degli

---

[2] Cfr. anche Wolff 1937, p. 97.

[3] Vailati, G. 1906, *Idee pedagogiche di H.G. Wells*, in S III, pp. 291-295.

[4] Cfr. The correlation of the teaching of mathematics and science. Report of a conference held by the Mathematical Association in conjunction with the federated Associations of London non-primary-teachers. *The Mathematical Gazette*, 5.77, 1909, p. 5. La relazione di Perry occupa le pagine 4-15.

allievi e sull'esercizio dell' "occhio e della mano" [Price 1986, pp. 109-114] e fu stimolato dalla constatazione del fallimento dell'insegnamento tradizionale nei confronti dello studente medio:

> *Academic methods of teaching Mathematics succeed with about five per cent of all students, the small minority who are fond of abstract reasoning: they fail altogether with the average student* [Perry 1913, p. VII].
>
> *So we now teach all boys what is called mathematical philosophy, that we may catch in our net the one demigod, the one pure mathematician, and we do our best to ruin all the others* [Perry 1902, p. 6].

Causa di questo fallimento è secondo Perry il sistema inglese degli esami separati che induce i docenti a insegnare le varie materie per compartimenti stagni e a dare troppa importanza agli aspetti astratti della matematica e alle "regole evita-fatica", trascurando i principi fondamentali.

Scopo dell'insegnamento secondo Perry è quello di formare persone in grado di imparare, obiettivo che si può raggiungere con un insegnamento di tipo pratico e laboratoriale. Egli stesso adottò questo approccio nelle scuole tecniche inglesi e indusse il *Board of Education* a sperimentarlo. Comunicò i suoi risultati in convegni della *British Association for the Advancement of Science*, suscitando vivaci dibattiti, e li raccolse poi nel volumetto del 1902, *Discussion on the teaching of Mathematics* [Perry 1902]. Qui, partendo da quelli che considera gli scopi e l'utilità della matematica, Perry ribadisce le critiche ai metodi inglesi di insegnamento e illustra il programma del suo corso di matematica elementare e di quello avanzato (pp. 25-32). Il metodo della *Practical Mathematics* infatti, a suo avviso, poteva essere utilizzato a tutti i livelli di insegnamento, a patto che la trattazione rimanesse legata a fenomeni reali e a problemi concreti.

Nel 1913 Perry pubblicò il suo libro più noto *Elementary Practical Mathematics* che si presenta come una guida per gli insegnanti con molti esercizi accuratamente scelti da proporre agli studenti. Perry parte da argomenti di aritmetica per affrontare poi temi e problemi di algebra, di geometria, di analisi infinitesimale e di fisica. La presentazione rispecchia un approccio laboratoriale: generalmente si parte da un problema pratico, si raccolgono dati numerici e si interpretano, si usa la carta quadrettata per tabulare osservazioni, risolvere graficamente equazioni, per rappresentare funzioni, trovare la pendenza della tangente a una curva, si insegna a costruire un regolo calcolatore, e se ne mostra l'uso, ecc. Soprattutto si cerca di dare una visione unitaria della matematica, collegando algebra, geometria, trigonometria e si fa vedere come gli strumenti matematici siano utili per affrontare problemi della fisica e dell'ingegneria.

Per quanto riguarda la geometria in particolare, Perry critica l'impostazione euclidea e suggerisce che sperimentazioni e misurazioni pratiche con l'uso della carta quadrettata vengano anteposte alla geometria dimostrativa; qualche ragionamento deduttivo affianchi la geometria sperimentale; si dia più importanza alla geometria solida; si utilizzino le funzioni trigonometriche nello studio della geometria, e si presti più attenzione alle applicazioni.

Di tanto in tanto Perry fornisce anche indicazioni metodologiche o consigli agli insegnanti [Perry 1913, pp. 21, 25, 32, 51-52], segnala le difficoltà, gli errori più frequenti degli allievi e le cause che li producono.

Molti dei problemi affrontati da Perry sono simili a quelli proposti oggi nelle sperimentazioni didattiche con la calcolatrice scientifica, con un forte uso di dati numerici, ma è diverso l'obiettivo finale. Il metodo che egli propone è basato sul *problem solving*, e su un approccio trasversale alla matematica molto concentrato sulle procedure. Il suo manuale presenta però una matematica da "praticare" e non da sistematizzare in una teoria: è questa la sua originalità, e nello stesso tempo il suo limite.

Indipendentemente dalla sua influenza sull'educazione tecnica in Inghilterra, il movimento di Perry favorì la diffusione dell'idea di un insegnamento laboratoriale della matematica per tutti i tipi di studenti e più in generale l'affermazione di alcuni principi fondamentali: maggiore democrazia dell'educazione, maggiore considerazione di ciò che serve nella vita reale, maggiore attenzione agli aspetti pedagogici. L'influenza delle sue idee si percepì soprattutto nell'insegnamento della geometria**:** fu dato più spazio al lavoro sperimentale, furono attivati laboratori in molte scuole e apparvero molti libri di testo in questo indirizzo [Price 1986, pp. 124-130].

Il movimento di Perry ebbe risonanza non solo in Europa, ma anche in America. Nel 1902 Moore, presidente della American Mathematical Society, pronunciava il celebre discorso *On the foundations of mathematics* [Moore 1903] in cui invitava le associazioni di insegnanti di matematica a occuparsi dell'istruzione secondaria, sottolineando i difetti di un insegnamento per compartimenti stagni e troppo incentrato sugli aspetti teorici e astratti, e auspicava un insegnamento integrato di matematica pura e applicata, citando come esempio il metodo sperimentale di Perry. Questo è il solo metodo, secondo Moore, che offra il modo di far comprendere ai giovani che "mathematics is indeed itself a fundamental reality of the domain of thought, and not merely a matter of symbols and arbitrary rules and conventions" (pp. 528-529). Un'intera sezione del suo discorso era dedicata al *laboratory method* in matematica (pp. 533-535) che egli accosta al laboratorio di fisica. L'insegnamento laboratoriale, che deve essere caratterizzato da un approccio pratico, cioè "computational, or graphical or experimental", presenta secondo Moore i seguenti vantaggi: permette all'allievo di rendersi conto dell'importanza di un teorema e di far nascere in lui il desiderio di una dimostrazione formale (p. 534); risveglia lo spirito della ricerca personale; inoltre, consente sia il lavoro individuale, sia quello di gruppo, dove l'insegnante è nello stesso tempo uno del gruppo e il leader.

Fra i consigli che Moore fornisce perché il metodo possa funzionare vi è quello di presentare solo esperimenti interessanti: per esempio nel laboratorio di fisica non è interessante insegnare l'uso degli strumenti, è meglio proporre problemi da risolvere che coinvolgano l'uso di quegli strumenti, in modo che l'allievo impari "the use of the instruments as a matter of course, and not as a matter of difficulty" (p. 533).

A conclusione egli afferma che il metodo laboratoriale per l'insegnamento secondario della matematica e della fisica è il migliore non solo per coloro che intendono specializzarsi in matematica o fisica pura, oppure in ingegneria, ma per tutti gli studenti in generale. Il programma di Moore fu ripreso da alcuni pedagogisti fra cui Jacob William Albert Young, professore di pedagogia matematica presso l'Università di Chicago, senza però ottenere risultati apprezzabili.[5]

Nel 1902 in Francia la riforma dell'insegnamento secondario (*lycées*), detta delle *humanités scientifiques,* introduceva l'analisi infinitesimale nelle scuole secondarie e sottolineava anche l'importanza di un metodo di insegnamento concreto che tenesse conto dei collegamenti con la realtà [Gispert 2010]. A presiedere la commissione preposta alla revisione dei programmi era il matematico Gaston Darboux, ma molti altri illustri studiosi diedero il loro contributo. In particolare Borel invitava gli insegnanti a "introduire plus de vie et de sens du réel dans notre enseignement mathématique" e auspicava la realizzazione di *atelier mathématique*, dove gli allievi potessero costruire con le loro mani modelli, effettuare misurazioni, ecc. allo scopo di "amener,

[5] Young dedicò un intero capitolo della sua opera *The teaching of mathematics in the elementary and the secondary school* (1906) al movimento di Perry riservando ampio spazio al laboratorio di matematica. Il testo fu tradotto in italiano da D. Gambioli nel 1924. Cfr. Roberts 2001, pp. 692-694,

non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne" [Borel 1904, p. 14].

Che cosa Borel intendesse si può capire per esempio dal suo manuale *Géométrie. Premier et second cycles* (Paris, Colin, 1905) dove gli aspetti pratici e intuitivi sono ampiamente evidenziati. Egli si propone infatti di "écrire une Géométrie plus concrète, où les considérations de symétrie, de déplacements, sont invoquées le plus souvent possible […] Substituer de plus en plus l'étude dynamique des phénomènes à leur étude statique" (pp. V e VII). Il volume si apre con un'introduzione all'uso della riga e del compasso, le applicazioni sono abilmente coordinate alla teoria e fra gli esercizi proposti ve ne sono a carattere pratico che coinvolgono simmetrie, uso di strumenti, ecc. Non c'è una rigida divisione fra geometria piana e solida, vengono introdotti argomenti quali la tassellazione del piano (pp. 111-113), le approssimazioni (p. 280-281) e, nei complementi (pp. 353-375), anche nozioni sulle coniche e altre curve, sul calcolo approssimato di aree e sull'agrimensura.

L'idea che egli aveva di laboratorio di matematica era però piuttosto ristretta:

> *On a déjà deviné quel pourrait être, à mon sens, l'idéal du laboratoire de Mathématiques: ce serait, par exemple, un atelier de menuiserie; le préparateur serait un ouvrier menuisier qui, dans les petits établissements, viendrait seulement quelques heures par semaine, tandis que, dans les grands lycées, il serait présent presque constamment. Sous la haute direction du professeur de Mathématiques, et suivant ses instructions, les élèves, aidés et conseillés par l'ouvrier préparateur, travailleraient par petits groupes à la confection de modèles et d'appareils simples* [Borel 1904, pp. 15-16].

Di questo tipo è il *Laboratoire d'enseignement mathématique* creato insieme a Jules Tannery presso l'Ecole Normale Supérieure e mirato alla formazione degli insegnanti. Qui venivano ideati e realizzati modelli per lo studio della geometria e della meccanica sia in legno che in cartone o in fil di ferro e sughero e si apprendeva l'uso didattico di altri strumenti quali meccanismi articolati, pantografi, inversori, macchine per calcolare e strumenti di geodesia e di agrimensura. Il laboratorio, inoltre, doveva essere dotato di una biblioteca dove i futuri insegnanti potessero trovare le principali pubblicazioni francesi sull'insegnamento della matematica, le riviste pedagogiche più importanti e i manuali scolastici delle varie nazioni [Châtelet 1909].

In Germania, a partire dagli anni novanta, Klein aveva cominciato a elaborare il celebre programma di riforma dell'insegnamento della matematica che ridefiniva i rapporti fra insegnamento secondario e superiore e che trovò la sua prima espressione pubblica in un congresso tenutosi a Merano nel 1905.[6] Il cosiddetto *Meraner Lehrplan* non riguardava solo l'insegnamento della matematica, ma anche quello della fisica e delle altre scienze naturali. L'innovazione principale proposta da Klein era l'introduzione del "pensiero funzionale" nell'insegnamento secondario, ma si sottolineavano anche altri aspetti quali l'importanza delle applicazioni, l'uso dei modelli geometrici per l'insegnamento della geometria, il collegamento con problemi reali, le connessioni con l'insegnamento della fisica, il valore degli esperimenti (pp. 550-553). Per l'insegnamento della fisica si evidenziava inoltre la necessità di attrezzare opportuni spazi di lavoro (*Arbeitsräume*) dove gli insegnanti adeguatamente preparati e con l'aiuto di un assistente potessero lavorare e sperimentare con gli allievi (p. 563). Per quanto riguarda

[6] Cfr. Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 36, 1905, pp. 543-553. Anche in Klein 1907, pp. 208-219.

l'insegnamento della geometria in particolare, si insisteva sui punti seguenti: potenziare l'intuizione spaziale (p. 543); usare la riga e il compasso, disegnare, misurare (p. 547); considerare le configurazioni geometriche come oggetti dinamici (p. 548); potenziare l'uso delle rappresentazioni grafiche; dare spazio alle applicazioni (p. 549); fare uso di modelli; coordinare planimetria e stereometria; accennare al punto di vista storico e filosofico (p. 550).

L'importanza di utilizzare strumenti e modelli nell'insegnamento della matematica emerge anche dai volumi sulle matematiche elementari da un punto di vista superiore che Klein dedicò espressamente alla formazione degli insegnanti di matematica. Nel volume sulla geometria Klein introduce vari strumenti, quali l'inversore di Peaucellier, e invita gli insegnanti a non trascurare una effettiva dimostrazione pratica quando si considerino tali strumenti per illustrare una teoria: il farlo è altrettanto criticabile che trascurare la teoria per perdersi nei dettagli del funzionamento dello strumento e della costruzione.[7] Klein si impegnò anche a riorganizzare e modernizzare la *Modellkammer* in Göttingen a scopi educativi, per favorire, in particolare, la *Raumanschauung* (intuizione spaziale) [Schubring 2010] e, insieme a P. Treutlein, nel convegno della Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico tenutosi a Bruxelles nel 1910 presentò l'uso dei modelli nell'insegnamento secondario e superiore come "mezzo per sviluppare l'intuizione geometrica" [Giacardi 2008-2011].

Un'importante occasione di confronto internazionale delle esperienze educative dei vari paesi nel campo della matematica fu il IV Congresso Internazionale dei Matematici che si tenne a Roma nel 1908 e che portò alla creazione della Commissione Internazionale per l'Insegnamento Matematico (poi ICMI) sotto la presidenza di Klein. La sessione dedicata alla didattica[8] fu molto ricca e fu organizzata da Vailati. Il termine "laboratory work in mathematics" compare nella relazione di C. Godfrey sulle scuole inglesi (pp. 453, 454); l'importanza delle misurazioni, delle rappresentazioni grafiche, dell'uso degli strumenti emerge dalla relazione di D. E. Smith (pp. 472-473).

Una sintesi del punto di vista internazionale sul tema dell'insegnamento sperimentale della matematica è il rapporto preparato da Smith relativo all'inchiesta promossa nel 1911 dall'ICMI su *Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools* concernente i ragazzi dai 10 ai 19 anni. Qui egli fornisce un quadro generale della situazione nei vari paesi, da cui emerge che, nell'insegnamento della matematica, il ricorso all'intuizione e agli esperimenti pratici nella scuola secondaria era più frequente in Austria, Germania e Svizzera, piuttosto che in Inghilterra, Francia e Stati Uniti e che i temi più dibattuti erano soprattutto l'insegnamento della geometria e l'introduzione o meno del concetto di funzione. Successivamente Smith illustra aspetti particolari di un insegnamento attivo della matematica e precisamente: "Misurazioni e stime" (misure geodetiche, astronomiche, triangolazioni, …), "Disegno geometrico e rappresentazioni grafiche" (insegnamento della geometria descrittiva), "Metodi grafici" (rappresentazione di funzioni su carta millimetrata, statica grafica, valutazione di superfici con l'aiuto della carta millimetrata, …), "Calcoli numerici" (uso di tavole, di regolo calcolatore, metodi di calcolo approssimato, …) [Smith 1912, Giacardi 2008-2011].

Il laboratorio di matematica secondo Vailati

[7] Klein 1925-1933, II, p. 16. Cfr. in merito Bartolini Bussi, Taimina, Isoda 2010 e Schubring 2010.

[8] Cfr. *Questioni filosofiche, storiche e didattiche*, vol. III degli *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici - Roma, 6-11 aprile 1908*, a cura di G. Castelnuovo, Accademia R. dei Lincei, 3 voll. Roma 1909, pp. 373-579.

In Italia è Giovanni Vailati a proporre l'idea di laboratorio. Matematico, filosofo, educatore e membro autorevole della Scuola di Giuseppe Peano, Vailati, dopo aver insegnato per qualche anno all'Università di Torino come assistente e come docente di corsi liberi, nel 1899 lasciò quella città e cominciò l'insegnamento nelle scuole secondarie (Pinerolo, Siracusa, Bari, Como e Firenze). Il suo impegno nel campo educativo si esplicò in varie direzioni, ma il contributo più importante fu sicuramente l'elaborazione dei programmi di matematica nell'ambito dei lavori della Commissione Reale per la riforma delle scuole secondarie che lo impegnò dal 1905 fino alla morte nel 1909.

L'idea della scuola-laboratorio proposta da Vailati compare esplicitamente nella recensione dello scritto della pedagogista Maria Begey *Del lavoro manuale educativo* [S III, pp. 264-266] del 1901 e nella breve nota *Idee pedagogiche di H.G. Wells* [S III, pp. 291-295] del 1906 e si manifesta poi nei programmi di matematica da lui elaborati per la Commissione Reale e nelle relative indicazioni metodologiche.

Per comprendere l'originalità delle riflessioni di Vailati in merito, è importante inquadrarle nella sua particolare visione della funzione della matematica e del suo insegnamento, visione in cui confluiscono motivi e istanze diverse. Dalla frequentazione di Peano e della sua scuola gli derivava la salda padronanza della logica matematica, il bisogno del rigore, la riflessione sul linguaggio, oltre che l'interesse per la didattica e per la storia delle matematiche e l'esigenza di democratizzare il sapere. Del pragmatismo egli fece propria la lotta contro i problemi privi di senso, contro la metafisica e accolse il criterio operativo e funzionale per attribuire significato agli enunciati. A questi motivi si intrecciano armonicamente il principio Herbartiano, secondo il quale scopo dell'insegnamento è la formazione del carattere, e assunti positivistici: l'importanza di una *humanitas* scientifica, una didattica fondata su una conoscenza positiva dell'uomo (biologia, psicologia), un insegnamento che proceda dai fatti alle astrazioni e il valore applicativo del sapere [Giacardi 2010]. Le sue riflessioni si fondavano anche sulla conoscenza dei programmi e dell'organizzazione scolastica degli altri paesi europei,[9] come pure dei movimenti di riforma di Klein in Germania, di Perry in Inghilterra, di Darboux e di Borel in Francia [Vailati 1910].

La scuola-laboratorio secondo Vailati non deve intendersi nel senso riduttivo di laboratorio per esperienze scientifiche, ma "come luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere questioni, a [...] mettersi alla prova di fronte a ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa" [Vailati 1906, p. 292]. La lezione maieutica, il ricorso al disegno, al lavoro manuale, al gioco e l'introduzione di opportuni sussidi didattici, il metodo sperimentale operativo, l'approccio unitario alle matematiche, l'uso della storia della scienza, un giusto equilibrio fra rigore e intuizione sono gli aspetti più significativi della visione vailatiana dell'insegnamento e si traducono nella scuola-laboratorio che egli auspicava e che a suo parere poteva essere attuata ad ogni livello scolare.

Metodo socratico, lavoro manuale e giochi

Fra la cause principali del cattivo funzionamento delle scuole secondarie dell'epoca vi era, secondo Vailati, l'abitudine deplorevole di concepire l'insegnamento come una conferenza dove l'allievo non deve far altro che ascoltare, per essere poi interrogato allo scopo di verificare se ha inteso e memorizzato ciò che ha udito, mentre egli riteneva che il tipo di lezione più appropriato per ottenere lo scopo educativo fosse la lezione maieutica. Attraverso il metodo socratico basato

[9] Cfr. Cartella 41, fasc. 346, Cartella 31, fasc. 272, in *Fondo Vailati*, Biblioteca di Filosofia dell'Università di Milano,

sul dialogo, una lezione così strutturata permette, infatti, all'insegnante di guidare gli allievi alla scoperta delle verità matematiche, incoraggiare la riflessione e la ricerca personale.

Per stimolare l'attenzione della scolaresca può inoltre essere utile introdurre nel processo di apprendimento momenti di gioco che non diminuiscono affatto "la dignità della scienza matematica", anzi ne accrescono l'attrazione [Vailati 1899, p. 261]. Il lavoro manuale non finalizzato all'apprendimento di un mestiere può servire a "esercitare, con tutti i mezzi a ciò più adatti, le varie facoltà di osservazione, di discriminazione, di attenzione, di giudizio" [Vailati 1901, p. 265] e costituisce un ottimo antidoto contro l'illusione diffusa di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso certe parole. In quest'ottica occorre valorizzare maggiormente il disegno, il più naturale anello di congiunzione tra la teoria e la pratica.

Il metodo sperimentale operativo

Uno dei cardini su cui si basano le proposte di Vailati è la convinzione che un metodo di insegnamento dovrebbe sempre tenere conto del fatto che il processo dell'apprendimento va dal concreto all'astratto. Gli allievi dunque non dovrebbero essere costretti a "*imparare* delle teorie prima di *conoscere* i fatti a cui esse si riferiscono" [Vailati 1899, p. 261], al contrario dovrebbero dimostrare di *saper fare*, non solo di *saper dire.*

Un insegnamento della matematica che tenga conto di queste premesse dovrebbe, secondo Vailati, avere un'impostazione sperimentale e operativa i cui vantaggi si vedono soprattutto nell'insegnamento della geometria, dove il disegno, la costruzione delle figure, il ricorso alla carta millimetrata, alla bilancia, possono guidare l'allievo nell'apprendimento:

> *"Guidare* – scrive Vailati – *e spingere l'alunno a procurarsi, per via di esperimento e, in particolare, col ricorso agli istrumenti di disegno, il più gran numero possibile di cognizioni di fatto sul modo di costruire le figure e sulle loro proprietà, soprattutto non 'intuitive', è d'altra parte il miglior mezzo di far nascere in lui il desiderio e il bisogno di rendersi ragione del 'come' e del 'perché' tali proprietà sussistano, e di predisporlo a riguardare come interessante l'apprendimento, o la ricerca, di connessioni deduttive tra esse, e di ragionamenti che conducano a riconoscerle come conseguenze le une delle altre"* [Vailati 1907, p. 305].

Dunque la caratteristica principale del laboratorio di matematica come lo intendeva Vailati è quella di una matematica da "praticare", ma anche e soprattutto una matematica da sistematizzare in una teoria.

Vailati invita poi gli insegnanti a coltivare negli studenti la fiducia nel metodo deduttivo, non limitandosi a dare una sola dimostrazione delle proposizioni più significative, ma facendo vedere loro come si possa pervenire a una stessa conclusione per vie diverse o anche con strumenti matematici differenti. Nel quadernetto di appunti relativi alle lezioni tenute nel 1901-1904 presso l'Istituto Tecnico di Como, per esempio, egli affronta il problema di trovare la somma dei primi *n* numeri naturali dispari, dei quadrati dei primi *n* numeri naturali e poi dei cubi presentando dimostrazioni di vario tipo, dirette, con l'aiuto di visualizzazioni grafiche e per induzione.[10]

Un altro aspetto sottolineato da Vailati è l'utilità di presentare, per quanto possibile, gli enunciati dei teoremi come problemi:

> *Per esempio, il teorema di Pitagora* – egli scrive – *potrebbe vantaggiosamente esser presentato come una risposta al problema di trovare un quadrato la cui area equivalga*

[10] Vailati, G. *Appunti per Lezioni, Istituto Tecnico*, Como 1901-1904, *Fondo Vailati,* cit., Cartella 38, fasc. 340.

> *alla somma delle aree di due quadrati dati, o come una risposta alla domanda di costruire, sul terreno, un angolo retto avendo a disposizione soltanto una corda che si possa dividere per esempio in dodici tratti uguali.* [Vailati 1910, p. 38].

L'unità delle matematiche e del sapere

L'unità delle matematiche, secondo Vailati, non solo non deve essere mai trascurata, ma va fatta percepire subito dagli allievi stabilendo, fin dalla scuola secondaria, una stretta connessione fra aritmetica, algebra e geometria, in modo da abituarli ad affrontare uno stesso problema con metodi diversi e a scegliere ogni volta il più appropriato. Un insegnamento siffatto sarebbe più stimolante e costituirebbe anche un avviamento alla ricerca creativa.

Nella conferenza tenuta nel 1908 a Roma durante il Congresso Internazionale dei Matematici Vailati, fornisce il seguente esempio di collegamento fra aritmetica e geometria:

> *Si pensi per esempio quanto più facilmente l'alunno riconoscerebbe il senso e la portata di una proposizione come questa: che 'la media geometrica di due numeri non può mai superare la loro media aritmetica', quando gli si facesse osservare che, in un circolo avente per diametro la somma di due segmenti, la seconda è rappresentata dal raggio, e l'altra invece dalla metà di una corda* [Vailati 1909, p. 487].

Così pure abituare fin dal principio gli alunni "a riconoscere le condizioni necessarie e sufficienti perché una data espressione algebrica, una data equazione, una data identità, possano interpretarsi come esprimenti, rispettivamente, una costruzione, un problema, un teorema di geometria" è, secondo Vailati, uno dei mezzi più efficaci per prepararli a comprendere il significato e l'utilità delle formule" [Vailati 1910, p. 57].

Vailati non solo riteneva che si dovesse offrire agli allievi una visione unitaria della matematica, ma considerava fondamentale trasmettere una visione unitaria del sapere stabilendo un dialogo fra cultura umanistica e cultura scientifica. Questo obiettivo poteva essere raggiunto, a suo parere, attraverso il metodo storico. Applicato tanto alle scienze quanto allo studio del latino e del greco tale metodo può assumere sia una funzione didattica per "spedantizzare l'esposizione",[11] e "rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente" [Vailati 1897, p. 10], sia un valore educativo e formativo come antidoto contro ogni forma di dogmatismo. In una scuola laboratorio l'insegnante può avvicinare i giovani alla storia delle scienze attraverso letture commentate di passi dei classici della scienza. Vailati stesso leggeva ai suoi studenti e spiegava pagine tratte dagli *Elementi* di Euclide come risulta dai suoi appunti di lezione.

Bilanciare rigore e intuizione

Nei suoi scritti Vailati sembra voler evitare ogni netta contrapposizione tra intuizione e rigore e, in particolare, nell'articolo *L'insegnamento della Matematica nel Primo Triennio della Scuola Secondaria* [Vailati 1907], ponendosi nell'ottica peaniana, egli cerca di spiegare come il rigore non consista nel "numero" o nella "qualità" dei presupposti delle dimostrazioni, i quali potranno essere anche piuttosto numerosi, ma nel riconoscimento esplicito del loro carattere di postulati o ipotesi e nel modo in cui sono impiegati. Solo quando gli allievi avranno acquisito un maggiore grado di maturità, si mostrerà loro se e quanto il loro numero possa essere ridotto, conseguendo una maggiore *essenzialità* nelle costruzioni ipotetico-deduttive.

L'unica condizione assolutamente imprescindibile per il rigore delle dimostrazioni è che i postulati siano tra loro compatibili. Ben lontano dallo scoraggiare l'intuizione geometrica, Vailati intende

[11] G. Vailati a G. Vacca, 25.5.1901, EV, p. 187.

"disciplinarla ed educarla" al fine di evitare gli errori cui può dare origine "la fiducia inconsiderata e istintiva in essa" [Vailati 1904, p. 268]. Nella recensione al manuale di geometria razionale di Halsted, basato sull'opera di Hilbert sui fondamenti della geometria, Vailati mostra invece gli inconvenienti didattici a cui può condurre "la preoccupazione di garantire l'assoluto rigore e la perfetta coerenza logica delle dimostrazioni depurandole da ogni suggestione intuitiva" [Vailati 1905, p. 289]. Nella prassi didattica occorre dunque bilanciare intuizione e rigore.

La deduzione, inoltre, deve avere per Vailati un ruolo più ampio di quello che generalmente le viene attribuito: deve essere usata "non già a dimostrare proposizioni che agli alunni appaiano già abbastanza evidenti … ma piuttosto a ricavare, appunto da queste ultime, altre proposizioni che essi ancora non conoscano". Così si presenterà agli allievi come un modo per "economizzare" le esperienze e per giungere senza di esse a "prevedere" il risultato, e dunque anche come mezzo di scoperta [Vailati 1909, p. 485].

Conclusioni

Nel 1909 veniva pubblicato il progetto di riforma della Commissione Reale cui Vailati aveva collaborato e nel maggio dello stesso anno Vailati moriva. Pochi mesi dopo Guido Castelnuovo, presidente della Mathesis e delegato italiano dell'ICMI, invitava gli insegnanti a sperimentare nelle scuole i programmi di matematica da lui proposti.

Tuttavia la riforma elaborata dalla Commissione Reale non fu varata. Parte delle proposte di Vailati furono attuate nel 1911 con la creazione del Liceo moderno che, per quanto riguarda la matematica, divergeva dal classico a partire dalla seconda liceo e dove il greco era sostituito da una lingua moderna e le discipline scientifiche erano maggiormente valorizzate; non è un caso che a redigere i programmi e le relative istruzioni metodologiche sia stato proprio Castelnuovo.[12] Quella del liceo moderno fu però un'esperienza effimera. Con la Riforma Gentile del 1923 la riorganizzazione della scuola secondaria fu introdotta in termini completamente differenti: la cultura positivistica, liberal-democratica fu sconfitta dalle nuove correnti politiche e dal trionfante Neoidealismo.

Vari fattori impedirono che il laboratorio di matematica proposto da Vailati diventasse una pratica diffusa e si concretizzasse in libri di testo: innanzitutto Vailati, diversamente da Perry, non ne fece una esposizione sistematica e le sue idee vanno rintracciate qua e là nei suoi scritti e, in più, la sua morte prematura interruppe eventuali sviluppi. Inoltre la riforma proposta dalla Commissione Reale non fu mai approvata e la Riforma Gentile rese le discipline umanistiche l'asse culturale della nazione e soprattutto della scuola.

La caratterizzazione che Vailati dà della scuola-laboratorio rimane però quanto mai attuale ed è stata ripresa di recente nei curricoli di matematica proposti dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) dove si legge:

> *Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).* [Anichini et al., p. 28].

Ha quindi un significato più ampio sia del laboratorio di falegnameria di Borel, sia della *practical mathematics* di Perry basata sul *problem solving*, ma molto concentrata sulle procedure, sia del

[12] Si veda Giacardi 2006 e i programmi in Giacardi (2006-2011).

laboratory method proposto da Moore, caratterizzato soprattutto da aspetti "computazionali, grafici o sperimentali", sia ancora del semplice uso di modelli e macchine matematiche suggerito da Klein.

È, come Vailati auspicava, una metodologia basata su *problem solving,* congetture e argomentazioni, ma il cui fine ultimo è quello di pervenire alla costruzione di significati e a una sistemazione teorica della matematica.[13]

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. & Robutti, O. (a cura di) (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ciclo secondario*. Lucca: Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri".

Arzarello, F. (1987). La scuola di Peano e il dibattito sulla didattica della matematica. In *La matematica tra le due guerre mondiali,* a cura di A. Guerraggio. Bologna: Pitagora, 40-41.

Bartolini Bussi, M., Taimina, D. & Isoda, M. (2010). Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. *ZDM –The International Journal on Mathematics Education*, 42.1, 19-31.

Belhoste, B., Gispert, H. & Hulin N. (a cura di) (1996). *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger.* Paris: Vuibert - INRP.

Borel, E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 15, 431-440, anche in *Emile Borel philosophe et homme d'action. Pages choisies et présentées par Maurice Fréchet*, Paris: Gauthier-Villars, 1967, 1-21.

Châtelet, A. (1909). Le laboratoire d'enseignement mathématique de l'Ecole Normale Supérieure de Paris. *L'Enseignement mathématique*, 11, 206-210.

Chiosso, G. (1997). *Novecento pedagogico.* Brescia: Editrice La Scuola.

Dewey, J. (1903). The psychological and the logical in teaching Geometry. *Educational Review*, 25, 387-399.

Giacardi L. (a cura di) (2006). *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Pubblicazioni del Centro Studi Enriques, La Spezia: Agorà Edizioni.

Giacardi, L. (2010). *Humanitas* scientifica e democratizzazione del sapere. Giovanni Vailati e il progetto di riforma dell'insegnamento della matematica. In Roero 2010, 405- 436.

Giacardi, L. (2006-2011). *Documenti per la storia dell'insegnamento della matematica in Italia (1859-1923)*, http://www.subalpinamathesis.unito.it/storiains/it/documenti.php

Giacardi, L. (2008-2011). *Timeline*. In F. Furinghetti e L. Giacardi (eds.). *The History of ICMI*. http://www.icmihistory.unito.it/index.php.

Gispert, H. (2010). La réforme de 1902 et la réforme des mathématiques modernes (1967-1973), deux réformes dans leur contexte mathématiques, sociaux et épistémologiques. *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis*. Torino: KWB, 97-102.

Howson, G. (2010). Mathematics, Society, and Curricula in Nineteenth-Century England. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 5.1, 21-51.

Klein, F. (1907). *Vorträge über den mathematischen Unterricht.* Teil 1, Leipzig: Teubner.

Klein, F. (1925-1933). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, I *Arithmetik, Algebra, Analysis*, II *Geometrie*, III *Präzisions-und Approximationsmathematik*. Berlin: Springer.

[13] *Desidero ringraziare Mariolina Bartolini Bussi e Ornella Robutti per le proficue discussioni sul tema del laboratorio di matematica, Hélène Gispert, Gert Schubring, Geoffrey Howson, Michael Price per i suggerimenti e i materiali inviatimi.*

Moore, E.H. (1903). On the foundations of mathematics. *The School Review*, 11. 6, 521-538.

Perry, J. (1902). *Discussion on the teaching of Mathematics*. London, Macmillan and Co., http://www.archive.org/stream/discussiononteac00britiala#page/n7/mode/2up.

Perry, J. (1913). *Elementary Practical Mathematics*, London: Macmillan and Co.

Price, M. H. (1986). The Perry movement in school mathematics. In Price, M. H. (ed.) *The Development of Secondary Curriculum*. London: Croom Helm, 103-155.

Price, M. H. (1994), *Mathematics for the Multitude? A History of The Matematical Association.* Leicester: The Matematical Association.

Roberts, D. L. (2001). E.H. Moore's Early Twentieth-Century program for Reform in Mathematics Education. *The American Mathematical Monthly*, 108, 8, 689-696.

Roero, C. S. (a cura di) (2010). *Peano e la sua scuola fra matematica, logica e interlingua.* Torino: Deputazione Subalpina di Storia Patria.

Schubring, G. (2010). Historical comments on the use of technology and devices in ICME?????? and ICMI. *ZDM –The International Journal on Mathematics Education*, 42.1, 5-9.

Smith, D. E. (1912). Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools. *L'Enseignement mathématique*, 14, 1912, 507-534.

Vailati, G. (1987). *Scritti*. A cura di M. Quaranta, 3 voll. Sala Bolognese (Bo): Arnaldo Forni Editore (richiamato con la sigla S).

Vailati, G. (1971). *Epistolario 1891-1909.* A cura di G. Lanaro. Torino: Einaudi (richiamato con la sigla EV).

Vailati, G. (1897). Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle Scienze. S II, 3-17.

Vailati, G. (1899). Recensione di *C. Laisant. La Mathématique: philosophie, enseignement.* S III, 260-261

Vailati, G. (1904). Recensione di *F. Enriques U. Amaldi. Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori.* S III, 267-273.

Vailati, G. (1905). Recensione di *G.B. Halsted. Rational Geometry. A textbook for the science of Space, based on Hilbert's foundations.* S III, 288-290.

Vailati, G. (1906). Idee pedagogiche di H.G. Wells. S III, 291-295.

Vailati, G. (1907). L'insegnamento della Matematica nel Primo Triennio della Scuola Secondaria. S III, 302-306.

Vailati, G. (1909). Sugli attuali programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane. In *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, 6-11 aprile 1908.* Roma: Tip. Accademia dei Lincei, 482- 487.

Vailati, G. (1910). L'insegnamento della Matematica nel nuovo ginnasio riformato e nei tre tipi di licei. *Il Bollettino di Matematica*, Anno IX, 36-59.

Wolff, G. (1937). The Development of the Teaching of Geometry in Germany. *The Mathematical Gazette*, 21, No. 243, 82-98.