Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai Soci e non è in vendita.

FASCICOLO MONOGRAFICO STAMPATO CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA, DEL MINISTERO DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA SCIENTIFICA E TECNOLOGICA (fondi ex 40%) NONCHÉ DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE.

Autorizzazione n. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40138 Bologna (Italia)

Ottobre 1998
Supplemento al n. 10

ISSN 0393-0998

Ottobre 1998
Supplemento al n. 10

Period. mensile spedizione in A.P.
art. 2 comma 20/c legge 662/96
Filiale di Bologna

Anno XXV

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DICIANNOVESIMO CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

«APPRENDERE LA MATEMATICA: ERRORI, DIFFICOLTÀ, CONQUISTE»

VICENZA, 23-24-25 OTTOBRE 1997
a cura di Giuseppe Anichini e Bruno D'Amore

Direttore Responsabile:
ALBERTO CONTE

Comitato di Redazione:
GIUSEPPE ANICHINI (Vicedirettore)
MASSIMO FERRI
PIERLUIGI PAPINI
ELISABETTA VELABRI

Ufficio di Presidenza dell'U.M.I. (1997-2000):

Presidente Onorario Carlo Pucci

Presidente Alberto Conte
Vice Presidente Carlo Sbordone
Segretario Giuseppe Anichini
Segretario Aggiunto Massimo Ferri
Amministratore-Tesoriere Enrico Obrecht

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

INDICE

XIX Convegno Nazionale UMI-CIIM
sull'Insegnamento della Matematica

Apprendere la Matematica: errori, difficoltà, conquiste

Vicenza, 23-24-25 ottobre 1997

In data 23 - 24 - 25 ottobre 1997 si è svolto, presso l'Auditorium Canneti, a Vicenza, il XIX Convegno Nazionale sull'insegnamento della Matematica, **"Apprendere la Matematica: errori, difficoltà, conquiste".**

Il Convegno è stato organizzato dalla CIIM, Commissione permanente dell'UMI per l'insegnamento della Matematica.

La CIIM, presieduta nel 1997 dal Prof. Claudio Bernardi, era formata da Arpinati, Arzarello, Ciarrapico, D'Amore, Ferrari, Micale, Prodi, Rossi e Speranza. Nel 1997, in concomitanza con il rinnovo delle cariche sociali dell'Unione Matematica, la CIIM è stata rinnovata dalla Commissione Scientifica dell'UMI, ed è adesso formata da Arzarello, che la presiede, Anichini, Arpinati, Brigaglia, Ciarrapico, D'Amore, Marchi, Speranza e Tortora.

Il Convegno è stato organizzato con notevole impegno e con eccellenti risultati; la CIIM si è anche potuta avvalere, in sede locale, del prezioso contributo di un gruppo di docenti di Vicenza, coordinati dal prof. Sergio Zoccante.

Come si può evincere anche dal programma del convegno, pubblicato più avanti:

- hanno presenziato all'apertura del Convegno il dr. Giovanni TRAINITO, Direttore Generale e Capo di Gabinetto del MPI ed il prof. Alberto CONTE, Presidente dell'UMI;
- sono state tenute 6 conferenze di carattere generale con eccellente successo di partecipazione. (*Purtroppo per due di esse non è stato possibile pubblicare qui il testo: ogni altro intervento, dalle tavole rotonde alle singole comunicazioni, ai Gruppi di lavoro, ha invece negli Atti una sua traccia; la CIIM ringrazia di questo tutti i relatori che hanno collaborato alla pubblicazione del presente fascicolo*);

- si è tenuta una Tavola rotonda su: *Livelli scolastici e livelli di apprendimento in Matematica: un problema di qualità e di quantità*;
- sono state raccolte 6 comunicazioni scientifiche, pubblicate dopo un parere positivo da parte di una commissione di esperti designata dalla CIIM;
- sono stati raccolti i contributi di circa una dozzina di Gruppi di lavoro;
- al Convegno hanno partecipato giornalmente circa 400 fra docenti (universitari e, in gran numero, di scuola secondaria), insegnanti di scuola primaria e altri studiosi, a vario titolo interessati ai problemi della didattica della Matematica.

I numeri sopra evidenziati sottolineano, al di là di ogni altra considerazione, il notevole successo di questo Convegno organizzato ogni anno dalla CIIM.

L'Unione Matematica Italiana sente infine il dovere di ringraziare tutti coloro che hanno contribuito a ciò ed in particolare i colleghi di Vicenza.

Giuseppe Anichini, Bruno D'Amore

PROGRAMMA

giovedì, 23 ottobre

(ore 9.30)

- saluti delle Autorità e del Presidente dell'UMI
- intervento del Direttore Generale Giovanni Trainito (Ministero PI)
- Rosetta Zan (Università di Pisa), *Dalla correzione degli errori all'intervento sulle difficoltà*
- presentazione del gruppo "Matematica e Difficoltà"

(ore 15.00)

- gruppi di lavoro

venerdì 24 ottobre

(ore 9.00)

- dibattito sul tema *"Livelli scolastici e livelli di apprendimento in matematica: un problema di qualità e di quantità.* - introducono: Franca Masi (Cattolica, RN), Rosa Iaderosa (Milano), Giovanni Olivieri (Roma), Brunetto Piochi (Università di Siena)
- Franco Conti (Scuola Normale Superiore - Pisa), *Gare matematiche, luci e ombre*

(ore 15.00)

- Michele Impedovo (Arcisate, VA), *Errori tipici in matematica e inopportunità didattiche*
- comunicazioni

sabato 25 ottobre

(ore 9.00)

- dibattito sul tema *"Ragionamento quotidiano e logica (errori o razionalità alternative?)"* - introducono: Vittorio Girotto (Università di Trieste), Gabriele Lolli (Università di Torino)
- Umberto Bottazzini (Università di Palermo), *Gli "errori" dell'intuizione nella ricerca del minimo.*
- dibattito conclusivo

INTRODUZIONE DEL PROF. FERDINANDO ARZARELLO PRESIDENTE CIIM

Un mio collega, tanto sottile nell'argomentare quanto arguto nel narrare, mi raccontò un giorno il seguente episodio di vita scolastica. Un'allieva di quarta elementare, interrogata dalla maestra sulla natura dei verbi riflessivi, rispose: "Sono quei verbi che si fanno davanti allo specchio: lavarsi, pettinarsi, truccarsi,... "; al che la maestra rispose: "Vergognarsi, anche?".

La situazione è tipica dell'apprendimento anche in matematica: spesso il senso che gli allievi attribuiscono a una parola, un segno, un concetto è costruito elaborando e congetturando sottilmente, a partire più dalle situazioni quotidiane in cui esso è concretamente usato, che non dalle definizioni precise che si trovano sui libri. E' appena il caso di sottolineare che l'errore sui riflessivi rivela un'interessante elaborazione che riguarda sia il nome di tali verbi, sia il riferimento alle azioni concrete di fronte allo specchio che molti di questi evocano.

L'apprendimento in classe coinvolge abitualmente ostacoli di questa natura, che risultano poi in errori sistematici prodotti dagli allievi, tanto difficili da interpretare quanto da correggere. Quando l'insegnante incontra "errori" di questo tipo, deve risolvere un duplice difficilissimo problema: da un lato come correggere l'errore, dall'altro come valutarlo. E' quindi un tema davvero intrigante e difficile quello affrontato dal diciannovesimo Convegno UMI-CIIM, su cui è necessario un confronto tra i risultati della ricerca didattica ed il quotidiano e concreto operare degli insegnanti nella scuola.

Le conferenze generali cercano così di dare un quadro il più possibile aggiornato e comprensivo dei molteplici punti di vista da cui va impostato il problema nella scuola: dagli aspetti epistemologici e storici, a quelli psicologici ed affettivi, a quelli più propriamente didattici. L'idea è, come sempre, di fornire sia strumenti di analisi teorica che spunti ed idee concrete che possano aiutare i colleghi nella loro quotidiana attività in aula.

Oggi la scuola italiana vive un periodo di grandi proposte innovative: occorre che la comunità dei matematici - da quelli che fanno la ricerca più astratta ed avanzata a coloro che iniziano i giovani ai primi passi nella disciplina, tutti quanti accomunati dallo sforzo di accrescere la conoscenza matematica nella società civile - se ne faccia attivamente carico, proponendo alle autorità competenti, rappresentate a questo Convegno ai livelli massimi, problematiche precise e soluzioni corrette e serie, che non corrano dietro alle mode, ma affrontino con la dovuta scientificità le grosse questioni sul tappeto. Il tema degli errori è uno di questi: ritengo che dai risultati dei nostri lavori emergano anche proposte fattive per il progetto di revisione dei saperi, che vede al lavoro le varie Commissioni ministeriali.

Ringrazio quindi tutti quanti hanno contribuito con la loro partecipazione al successo di questo Convegno e mi impegno come CIIM-UMI a rappresentare al Ministero i risultati qui emersi.

Ferdinando Arzarello
(Presidente CIIM)

SALUTI DELLA MATHESIS
SOCIETÀ ITALIANA DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

Porgo i saluti della MATHESIS ai partecipanti a questo congresso. Questi incontri consentono di migliorare la qualità della didattica della matematica, grazie alla possibilità di confrontare e di analizare diverse esperienze didattiche. Anche là dove non sia possibile trovare delle regolarità utili ad una più moderna dialettica è comunque importante che i docenti abbiano momenti di riflessioe e di scambio di idee, per poter apprendere, varie modalità d'insegnamento, non conformi a quanto da loro fatto in classe. Così diminuiranno le convinzioni soggettive di molti docenti, su come svolgere dati argomenti, per il bene dei discenti. Qual'è il modo migliore per fare scuola di matematica? Forse non c'è un modo migliore di altri; forse ci sono tanti modi buoni di svolgere il lavoro di docente, purché essi siano accompagnati da molta umiltà e spirito di avventura. Tale spirito si manifesta là dove il docente è aperto a nuove soluzioni didattiche, a nuovi percorsi, a diversi punti di vista, anche degli studneti. Così si smuovono i parassitismi metodologici e cognitivi e si aprono vie nuove.

MATHESIS considera rilevante l'innovazione didattica e auspica una stretta collaborazione tra tutte quelle associazioni che lavoroano per lo sviluppo del sapere della matematica pura ed applicata. L'anno scorso il congresso nazionale MATHESIS - tenutosi a Verona - venne orientato prevalentemente nel campo della logica, quest'anno - a Caserta - l'orientamento è nel campo della dialettica e dei processi algoritmici: sempre però con una particolare attenzione alla didattica. Oggi, infatti, vale più di prima l'importanza di dare ai giovani validi strumenti di interpretazione critica delle informazioni, in modo che possano costruire bene il pensiero, il modo di ragionare, per affrontare meglio la selezione delle informazioni, altrimenti i risultati che potranno ottenere sarannosolo confusi, basati su esperienze che non supereranno mai la sfera della superficialità. Quanto possiamo sperimentare oggi nella nostra società, conferma il bisogno che c'è di uno sviluppo rigoroso del metodo.

Buon lavoro e grazie.

Il Segretario Nazionale
Prof. Luciano Corso

INTERVENTO DELL'ASSESSORE AI SERVIZI CULTURALI DEL COMUNE DI VICENZA

E' con particolare piacere che saluto i relatori e il pubblico del XIX Convegno nazionale sull'insegnamento della matematica.

Credo che la scelta di Vicenza quale sede di questo importante appuntamento -scelta che mi ha trovato, fin da subito, entusiasta- abbia una duplice valenza. Da un lato questa iniziativa, proprio per il suo notevole livello didattico-culturale, rappresenta un avvenimento particolarmente significativo, in grado di convogliare l'interesse di studiosi, docenti e semplici appassionati di questa disciplina. D'altro canto essa, rappresentando un'occasione di richiamo per centinaia di partecipanti, offre anche un'allettante opportunità per conoscere il ricco patrimonio storico-artistico della nostra città. Ed in questo senso l'impegno dell'Assessorato ai Servizi culturali e al Turismo è stato quello di offrire al pubblico, oltre a una serie di servizi di supporto all'niziativa, anche la possibilità di visitare i principali monumenti e musei cittadini, nonchè la mostra "Il fronte nuovo delle arti" allestita alla Basilica Palladiana.

Mi auguro che questa "tre giorni" possa essere proficua e interessante per quanti vi partecipano e che questa sorta di "contaminazione" tra matematica e cultura vicentina, tra "contenuto" e "contenitore" di questo evento, possa essere apprezzata da tutti e accolta dalla città nel migliore dei modi.
Buon lavoro

Assessore ai Servizi culturali e al Turismo
Francesca Lazzari

SALUTO DEL COORDINATORE DEL COMITATO ORGANIZZATIVO LOCALE

A nome del Comitato organizzativo locale, ringrazio l'UMI-CIIM che ha accettato la candidatura di Vicenza quale sede per il convegno.

Ringrazio sentitamente il Comune di Vicenza e gli Assessorati alla cultura e all'istruzione per l'organizzazione e tutto il supporto fornito.

Da parte mia ringrazio in particolare tutti i colleghi del comitato stesso per il lavoro svolto.

Ci scusiamo per i possibili disguidi e per le difficoltà; d'altra parte, se si dovesse fare una tavola rotonda locale sull'argomento del convegno, il titolo sarebbe: "Apprendere a gestire un convegno: errori, difficoltà, conquiste".

E questo mi permette di passare al secondo punto, su cui vorr ei porre l'attenzione come insegnante. Negli ultimi anni c'è stata nella scuola una grande agitazione attorno al recupero dell'insuccesso scolastico. Mi sembra che spesso si consideri l'insuccesso come la fase terminale di un apprendimento mancato, mentre esso dovrebbe essere visto come parte 'integrante' del processo di apprendimento stesso (sbagliando s'impara..), e come tale dovrebbe essere gestito. Non è così che ora viene recepito: viene inteso soprattutto come fallimento dell'alunno, dell'insegnante e dell'istituzione, piuttosto che come stimolo e sfida a proporre modelli e procedimenti diversi più idonei a gestire la confusa complessità del nostro mondo e della nostra cultura.

In questo senso il poster del Convegno esprime bene il concetto: la matematica (teorica, astratta) attraverso le difficoltà e gli errori, simbolizzati dal filo spinato, può uscire dal ristretto mondo scolastico e diventare strumento per il mondo reale. Ecco, io mi aspetto che in questo convegno emergano strumenti che permettano di gestire l'errore in modo efficace.

Responsabile del comitato organizzativo locale
Sergio Zoccante

DALLA CORREZIONE DEGLI ERRORI..... ALL'INTERVENTO SULLE DIFFICOLTÀ

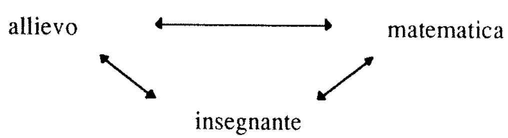
Rosetta Zan*

"...per una buona educazione dei propri figli, non bisogna cercare di essere dei genitori perfetti, né tanto meno aspettarsi che lo siano, o che lo diventino, i nostri figli. La perfezione non è alla portata del normale essere umano, e l'accanimento nel volerla raggiungere è inevitabilmente di ostacolo a quell'atteggiamento di tolleranza verso le imperfezioni altrui, comprese quelle dei figli, che, solo, rende possibili rapporti umani decenti.
E' invece alla portata di tutti essere genitori passabili, vale a dire genitori che educano bene i figli. Occorre però che gli errori che commettiamo nell'educarli (...) siano più che compensati dalle molte occasioni in cui ci comportiamo in modo giusto con loro." [Bruno Bettelheim, "Un genitore quasi perfetto", pg.9]

1. INTRODUZIONE

Il riferimento esplicito alle difficoltà che è presente nel titolo indica la scelta di uno fra i tanti possibili approcci che una relazione sugli errori in matematica può assumere: si tratta di un approccio *didattico*, relativo cioè a situazioni di insegnamento / apprendimento.

In tali situazioni si possono sempre riconoscere tre elementi importanti, come è messo in rilievo dal modello delle situazioni d'insegnamento di Brousseau:



Anche se un approccio didattico al problema dell'errore terrà quindi comunque presenti queste tre componenti, l'attenzione potrà privilegiare alcuni aspetti del diagramma rispetto ad altri. Ad esempio focalizzare l'attenzione sulla disciplina porta a chiedersi:

* Dipartimento di Matematica - PISA

"Ci sono nella matematica delle fonti intrinseche di errori? In caso affermativo, quali sono?"

Villani (1993) suggerisce che tra le fonti intrinseche di difficoltà vi siano i seguenti aspetti della matematica: la terminologia e il simbolismo; le tecniche di calcolo; la sequenzialità; i problemi e la loro traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico; l'astrazione e il rigore; l'infinito. Alcune fra le difficoltà legate a tali aspetti di carattere generale, ma anche a contenuti specifici, evidenziano la presenza di *ostacoli epistemologici*, cioè "cause di stagnazione e di regresso" (Bachelard, 1995) che, prima ancora che nel singolo individuo che apprende, hanno un riscontro nella storia del pensiero matematico.

Ma come insegnanti siamo interessati anche agli altri due vertici del triangolo di Brosseau, l'insegnante e l'allievo, e alle relazioni che li legano, cioè agli aspetti dinamici di quel diagramma. Ed è su quelli che vorrei proporre alcune riflessioni.

In particolare sposterò l'attenzione dagli *errori* che fanno gli allievi, ... agli *allievi* che fanno gli errori, soprattutto se questi allievi continuano a fare errori nonostante i nostri interventi; soprattutto cioè se questi allievi hanno difficoltà in matematica. Perché questa scelta? Perché a mio parere ogni insegnante si sente sfidato soprattutto sul terreno delle difficoltà, e spesso ha la sensazione di perdere questa sfida. Vale in altre parole una specie di *antinomia dell'insegnante:* «Riesco ad insegnare qualcosa *soltanto* a quelli che imparerebbero lo stesso. E non riesco ad incidere su quelli che *veramente* avrebbero bisogno di me.» Questa convinzione, che ho ritrovato frequentemente negli insegnanti più coinvolti e impegnati, genera naturalmente frustrazione, e nasce anche dal fallimento degli interventi tradizionali sull'errore. Interventi per *curare*:

- correggere l'errore, dove e quando c'è ("così non va bene perché..." "dovevi *invece* fare così:...");
- ripetere le spiegazioni;

  e per *prevenire*:
- mettere in guardia da errori tipici;
- suggerire strategie (descrivere: "devi fare così...").

Questi interventi, dicevamo, non sembrano funzionare. O meglio funzionano... ma solo con gli alunni "bravi", cioè quelli che ne hanno meno bisogno! Ecco il senso di frustrazione, ecco la sensazione di non ottenere risultati. Ma approfondiamo la nostra analisi. L'intervento sugli errori descritto è un intervento centrato sulle conoscenze: l'interpretazione implicita in tale intervento vede l'errore come effetto di mancata conoscenza. Ma se l'intervento non funziona, viene da chiedersi se l'interpretazione, o addirittura l'osservazione che precedono l'intervento, siano davvero adeguate.

Proviamo allora ad *interpretare* in modo diverso; ... ma prima ancora, proviamo ad *osservare* in modo diverso.

2. OSSERVAZIONI

Prima osservazione: l'atteggiamento metacognitivo.

Cerchiamo di immaginare la nostra classe, e pensiamo agli studenti che consideriamo "bravi" e a quelli che consideriamo invece studenti con difficoltà in matematica.

La differenza fra gli uni e gli altri sta nel fatto che i "bravi" non commettono mai errori?

No: ma il comportamento degli studenti "bravi" davanti agli errori è molto diverso, in genere, da quello dei compagni con difficoltà. I *bravi* non accettano acriticamente l'autorità dell'insegnante: sono in grado di argomentare (a meno che non si tratti di errori di distrazione) e motivare il processo mentale che li ha portati al prodotto sbagliato. In altre parole davanti all'errore commesso si assumono la *responsabilità dei propri processi di pensiero*. In particolare, come abbiamo osservato prima, con i bravi pare funzionare l'intervento tradizionale di correzione, di ripetizione e di messa in guardia: cioè successivamente essi si dimostrano *consapevoli* e *attivano processi di controllo*. Possiamo riassumere queste differenze osservando che i bravi evidenziano un buon atteggiamento metacognitivo, e che tale atteggiamento pare essenziale perché funzioni l'intervento tradizionale (locale) sulle conoscenze.

Seconda osservazione: l'apprendimento come attività costruttiva.

L'insegnamento (non solo della matematica) ha risentito per lungo tempo dell'influenza di un modello di apprendimento secondo il quale la conoscenza poteva essere semplicemente trasferita da un soggetto (l'insegnante) ad un altro (l'allievo). Negli ultimi decenni questo modello è stato superato dalla teoria *costruttivista*, secondo la quale la conoscenza è in gran parte costruita dal discente, che non si limita ad aggiungere nuove informazioni al suo magazzino di conoscenze, ma invece crea collegamenti e costruisce nuove relazioni fra queste strutture. Più in generale davanti alla "realtà" l'individuo fin dai primi anni di vita è soggetto attivo che costruisce interpretazioni dell'esperienza, nel tentativo di *dare senso* al mondo e di anticipare così le esperienze future. Come conseguenza di questo continuo processo di interpretazione della realtà già all'età di cinque o sei anni i bambini hanno sviluppato dei sistemi di convinzioni, cioè delle vere e proprie *teorie*, riguardo i tre ambiti che costituiscono il reale: quello degli oggetti fisici, quello degli organismi viventi, quello degli esseri umani (Gardner, 1993). Tali teorie si accompagnano a competenze, interessi, valori e tutto questo influisce notevolmente sul modo in cui il bambino e poi lo studente apprende le nozioni nuove che incontra. In particolare recenti ricerche nel campo della fisica, della probabilità, dei processi decisionali, hanno messo in evidenza che le intuizioni ingenue che un individuo sviluppa riguardo ad alcuni aspetti della realtà possono coesistere con la conoscenza formale acquisita in merito, anche se tale conoscenza è in manifesta contraddizione con esse. I risultati di queste ricerche mettono in evidenza un fenomeno particolarmente significativo in questo contesto: l'*errore* non è necessariamente sintomo di mancanza di conoscenza; esso può derivare da intuizioni scorrette e precoci che possono coesistere, nella mente del soggetto, con la conoscenza formale successivamente acquisita. In una situazione di problema, il *contesto* pare essere cruciale nel determinare il ricorso ad un tipo di conoscenza oppure all'altro (Schoenfeld, 1985).

Secondo Howard Gardner le carenze del sistema scolastico occidentale, messe in evidenza da rapporti periodici sempre più allarmanti, sono dovute proprio al fatto che "coloro che si sono occupati di educazione non hanno dato il giusto peso nè alla forza delle concezioni, degli stereotipi e dei 'copioni iniziali' che gli studenti portano con sé quando affrontano la scuola nè alla difficoltà di riplasmarli o di sradicarli." [Gardner, 1993, pg.14]

Nel caso della matematica Gardner parla di "copioni", cioè di "rigida applicazione degli algoritmi", piuttosto che di "concezioni errate" che gli studenti portano a scuola con sé. E in effetti fra gli ambiti di studi citati e la matematica possiamo cogliere differenze che hanno implicazioni significative a livello didattico. Nel caso della fisica, della probabilità, dei processi decisionali, le convinzioni che un soggetto elabora, in un processo che ha inizio fin dai suoi primi anni di vita, derivano comunque dalla sua interazione con la realtà, e dal tentativo di interpretarla. Il ruolo della matematica formale in questa interazione del soggetto con la realtà è decisamente marginale. Se problemi significativi di fisica o di scelta si presentano nell'esperienza del bambino fin dai primi anni di vita, le prime esperienze con la matematica avvengono per lo più a scuola, ed è proprio a scuola che i bambini costruiscono eventualmente le prime convinzioni errate, interpretando in modo *personale* i messaggi dell'insegnante.

Ma come è possibile interpretare in modo distorto un messaggio linguisticamente chiaro e rigoroso? In realtà l'approccio costruttivista smonta la fiducia ingenua che precedenti teorie dell'apprendimento avevano nel linguaggio: anche il processo di attribuzione di significato e di senso alle parole è un processo complesso che si articola in una serie di interazioni del soggetto con l'ambiente che lo circonda. In particolare non si può dare per scontato che le rappresentazioni di colui che ascolta un messaggio siano le stesse di colui che lo emette.

Ma andiamo a vedere più nello specifico cosa accade in classe, quando l'insegnante fa matematica. In altre parole, riprendendo lo schema di Brousseaù sulle situazioni d'apprendimento introdotto all'inizio, fissiamo l'attenzione sul rapporto insegnante-allievo:

allievo　　　　matematica

insegnante

L'insegnante manda all'allievo messaggi intenzionali *espliciti* e *impliciti*:

- ➔ illustra / utilizza algoritmi;
- ➔ definisce / utilizza termini e simboli specifici; ma soprattutto:
- ➔ introduce / utilizza concetti.

L'allievo *interpreta* tali messaggi. Dà loro un *senso*. E in questo processo di attribuzione di senso egli può "distorcere" il messaggio che l'insegnante intendeva comunicare.

Vediamo qualche esempio di queste interpretazioni distorte: gli esempi proposti non pretendono in alcun modo di essere esaustivi, ma piuttosto vogliono essere un invito ad individuare tipologie simili di errori in altri contesti.

Interpretazione distorta di algoritmi.

Forse l'esempio più chiaro ed espressivo di come il soggetto interpreta gli algoritmi spiegati dall'insegnante è quello proposto dalle ricerche di Brown e Burton (1978) relative ad errori sistematici ("bugs" nel testo inglese) nella sottrazione. Tali ricerche mettono in evidenza che molti bambini sbagliano non perché applicano in modo scorretto algoritmi corretti, ma perché **applicano in modo corretto algoritmi scorretti**.

Un *bug* piuttosto tipico si può riscontrare nello svolgimento delle seguenti operazioni:

278-	352-	406-	543-	510-	1023-
135=	146=	219=	367=	238=	835=
143	214	213	224	328	1812

L'errore è sistematico, e deriva da una *modificazione plausibile della procedura standard*: "in ogni colonna si sottrae *sempre* la cifra più bassa da quella più alta, indipendentemente dalla posizione".

Particolarmente suggestivo è l'esempio con cui Brown e Burton sottolineano come è importante che l'insegnante sia consapevole della presenza di *bugs* in certi comportamenti.

Se questo non avviene, essi osservano, l'insegnante tenderà ad interpretare il fallimento come negligenza o come ignoranza completa dell'algoritmo: nel primo caso assegnerà al bambino numerosi esercizi, nel secondo rispiegherà probabilmente l'intero algoritmo.
Ma mettiamoci dalla parte del bambino:

> Egli sta seguendo quello che ritiene essere l'algoritmo corretto e che, apparentemente a caso, viene segnato come errato. Questa situazione può essere esacerbata da diagnosi improprie. Ad esempio, Johnnie sottrae 284 da 437 e ottiene 253. L'insegnante commenta: "hai dimenticato di sottrarre 1 da 4 nella colonna delle centinaia." Disgraziatamente, l'algoritmo di Johnnie consisteva nel sottrarre la cifra più bassa da quella più alta in ogni colonna. Johnnie non ha la minima idea di quello che intende l'insegnante e si sente molto stupido per il fatto che non capisce. L'insegnante è d'accordo con questa affermazione dato che nessuno dei suoi rimedi ha avuto effetto sulla performance di Johnnie. [Brown e Burton, 1978, pp.167-168]

Vorrei sottolineare quanto emerge chiaramente dalle riflessioni fatte: non è importante che l'insegnante diventi un esperto di errori, e più in generale che capisca *quale* tipo di ragionamento sta seguendo uno studente, ma è fondamentale che si renda conto *che* lo studente sta seguendo un ragionamento. Solo allora il suo atteggiamento potrà cambiare: cercherà di porre domande per aiutare l'allievo ad esplicitare il *suo* processo personale piuttosto che suggerire risposte per far percorrere all'allievo un cammino prestabilito.

Interpretazione distorta di termini e simboli specifici.

Gli errori causati dall'interpretazione distorta dei messaggi dell'insegnante sono caratterizzati dal fatto di essere sistematici, ma non necessariamente tipici. In alcuni casi l'interpretazione è estremamente personale, e in questo caso ancora più difficile da riconoscere.

> Alice, 4ª ginnasio, è alle prese con la distinzione fra ipotesi e tesi. Deve riconoscere in alcuni enunciati di teoremi qual è l'ipotesi e qual è la tesi, ma, *regolarmente*, chiama ipotesi la tesi. Le spiego ripetutamente cosa si intende per ipotesi e tesi, ma inutilmente. Finalmente smetto di spiegare e cerco di capire,

attraverso alcune domande, come sta ragionando. La sua argomentazione, una volta esplicitata, è perfino convincente: "Quando in un discorso normale, o anche nelle scienze, diciamo "faccio un'ipotesi" poi però dobbiamo far vedere che è vera... cioè la dobbiamo dimostrare."

In generale il fatto che un termine venga usato anche in altri contesti più naturali (o almeno più naturali per *quello* studente) con significati diversi è motivo frequente di confusione: accade così ad esempio per i termini "angolo", "spigolo", "quadrato /rombo" (cfr. Villani, 1993).

Anche i simboli utilizzati possono essere interpretati in modo distorto. Numerose sono le ricerche sul significato generalmente attribuito al segno "=" , che viene interpretato (anche da molti ragazzi di scuola superiore) come "comando" di esecuzione di operazioni: questa interpretazione crea non poche difficoltà in contesto algebrico, dove è richiesta invece la comprensione della valenza relazionale del simbolo. Ma vorrei ricordare anche l'uso delle parentesi: lo studente usa le parentesi come una stenografia personale, per rimarcare a se stesso un ordine, solo se tale ordine è percepito come innaturale.

Interpretazione distorta di concetti.

E' forse il caso che ha le conseguenze più pesanti sull'attività matematica complessiva di un allievo.

Alcuni esempi di convinzioni piuttosto diffuse fra gli studenti (e non solo):

- moltiplicando due numeri si ottiene un numero maggiore di entrambi;
- un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione compare esplicitamente il segno "-";
- gli elementi di un insieme devono avere una caratteristica comune percettibile;
- confusione fra integrale definito e area.

Un'analisi più approfondita di queste interpretazioni distorte mette in luce che in alcuni casi il soggetto fa riferimento ad un *modello primitivo tacito* del fenomeno o del concetto in questione, cioè ad un'interpretazione significativa di quella nozione matematica che si sviluppa ad uno stadio iniziale del processo d'apprendimento (spesso suggerita in modo esplicito dall'insegnante) e che continua ad "influenzare, tacitamente, le interpretazioni e le decisioni risolutive dell'allievo. Il termine *tacito* significa semplicemente che l'individuo non è consapevole di questa influenza, oppure, per lo meno, della sua estensione." [Fischbein, 1992, pag.26]. Ad esempio la

convinzione errata che il prodotto di due numeri sia maggiore di ogni fattore può derivare dal modello primitivo di moltiplicazione come addizione ripetuta.

E' evidente che un insegnamento flessibile, attento a presentare uno stesso concetto o fenomeno in più contesti, da più punti di vista, costituisce un'ottima prevenzione per la formazione di convinzioni errate del tipo descritto. Ma i ricercatori per lo più concordano sull'impossibilità di evitare la costruzione di stereotipi, di convinzioni errate, di modelli primitivi. Quello che appare fondamentale per l'insegnamento non è quindi evitare gli errori, ma "aiutare gli studenti a costruire efficienti sistemi di controllo concettuale che avrebbero il compito di controllare l'impatto di questi modelli." [Fischbein, ibidem, pag.35]. L'attenzione torna quindi ancora una volta sulla necessità di sviluppare capacità di tipo metacognitivo (consapevolezza / processi di controllo) che possano permettere una gestione produttiva dell'errore.

Se assumiamo il punto di vista descritto, possiamo capire come mai interventi che si limitano a correggere il prodotto sbagliato e a sostituirlo con quello corretto, eventualmente riproponendo anche il processo corretto, siano destinati al fallimento: se l'errore è frutto di convinzioni distorte, una correzione che voglia essere efficace dovrà prima esplicitare e poi rimuovere tali convinzioni; in caso contrario l'errore si ripresenterà puntualmente, magari in contesti diversi.

Terza osservazione: l'epistemologia distorta degli studenti con difficoltà.

Gli errori imputabili ad interpretazioni personali dei messaggi diretti dell'insegnante sono sistematici, anche se personali. Ma non tutti gli errori che incontriamo sono così. Molti sembrano frutto di risposte casuali, tanto che lo studente sembra il primo a non credere nella risposta che ha dato, ed è prontissimo a modificarla. In questi casi non è tanto l'interpretazione che il soggetto dà di un argomento specifico ad essere distorta, quanto l'interpretazione globale che egli ha costruito dell'attività matematica. Questa interpretazione, che nasce dal senso dato alle varie esperienze matematiche, agisce da guida nei processi decisionali, come è reso in modo molto efficace dal comportamento di Scenetra (Cobb, 1985), descritto di seguito:

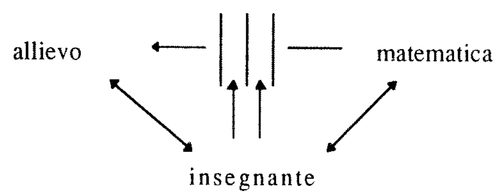
Scenetra frequenta la 2ª elementare. La sua insegnante vuole verificare se la bambina è in grado di mettere in relazione fatti aritmetici, in particolare se sa utilizzare una somma nota per trovare una somma incognita. Scrive quindi, una sotto l'altra, le due espressioni:

$$34 + 9 = 43; \quad 34 + 11 =$$

Invitata a completare la seconda espressione Scenetra incolonna 34 e 11 ed esegue l'addizione. Alla domanda esplicita: "Ma potevi utilizzare il risultato della prima espressione?" la bambina risponde di no, quasi turbata.
Fortunatamente l'insegnante e l'assistente presente alla sessione, Marva, insistono. Così l'insegnante chiede: "Secondo te, come avrebbe fatto Marva?" E Scenetra semplicemente: "Avrebbe aggiunto 2 a 43."

Scenetra ha apparentemente fallito nel rispondere alle richieste della maestra: la strategia seguita dalla bambina non è però dovuta a mancanza di conoscenze, ma alla decisione a priori di non utilizzare certe conoscenze. Questa decisione a sua volta è dettata dalla convinzione di Scenetra che è scorretto utilizzare "scorciatoie" piuttosto che l'algoritmo spiegato dall'insegnante a scuola.

Da cosa nascono le convinzioni di Scenetra? Scenetra ha interpretato le proprie esperienze, e quelle dei compagni, con la matematica. Queste esperienze costituiscono il tramite attraverso il quale la bambina interagisce con la matematica, e sono per lo più organizzate dall'insegnante, che si pone quindi come **mediatore** fra la bambina e la disciplina:



Più in generale l'allievo interpreta il comportamento dell'insegnante (non solo i messaggi diretti) elaborando in questo modo *convinzioni*:

- sugli obiettivi dell'insegnamento/apprendimento;
- sugli indicatori e sulle cause del successo/fallimento in matematica (*teorie del successo*);
- sulle proprie capacità;
- sulle caratteristiche della matematica.

Costruisce in questo modo una visione complessiva dell'attività matematica, cioè una *epistemologia personale*, che lo guiderà nei processi decisionali.

Vediamo qualche esempio di questo tipo di convinzioni: anche in questo caso ogni insegnante potrà arricchire con le proprie osservazioni la galleria proposta.

Convinzioni sugli obiettivi dell'insegnamento.

Ad esempio i bambini di scuola elementare interpretano l'attività di soluzione di problemi, costruendo delle convinzioni anche sulle finalità in base alle quali, a loro parere, l'insegnante fa risolvere problemi in classe. Tale finalità non è in genere esplicitata dall'insegnante, e i bambini utilizzano per dare senso all'esperienza tutte le informazioni di cui dispongono. Così alla domanda "Cos'è per te un problema?", le risposte raccolte possono essere estremamente varie:

"Per me un problema è come una prova di capacità, che serve per riconoscere l'intelligenza del ragazzo o della ragazza." [Barbara, 5ª el.]

"Per me il problema è una cosa che serve a far ragionare la mente a tenerla allenata." [Francesco, 5ª el.]

Le motivazioni di Barbara e Francesco nel risolvere problemi saranno diverse, e diverse saranno quindi le risorse che essi riterranno di dover investire.

Teorie del successo.

Alessio sta preparando l'esame di Istituzioni di Matematiche.
Si presenta al colloquio di ricevimento con un pacco di esercizi sui numeri complessi, pieni di errori. Alla domanda: "Ma tu sai che cos'è un numero complesso?" risponde quasi infastidito:
"No. Intanto imparo a fare gli esercizi. Poi, se passo lo scritto, studierò la teoria."

Questo comportamento riflette una convinzione molto diffusa:
♦ Per studiare matematica occorre e basta fare esercizi.

La teoria oggetto delle spiegazioni dell'insegnante o addirittura dei libri di testo viene interpretata come "istruzioni per l'uso" e quindi può essere dimenticata appena si acquisisce la tecnica.

Questo tipo di convinzioni riflette, in genere fedelmente, le scelte didattiche dell'insegnante (i suoi criteri di valutazione, le sue richieste...), scelte didattiche a loro volta guidate dalle convinzioni, spesso implicite, dell' insegnante stesso. In questo senso non mi sembra corretto definire distorte o sbagliate le convinzioni che costituiscono le teorie del successo, ma mi sembra più opportuno parlare di convinzioni *vincenti* o *perdenti*: vincenti in un certo contesto, con un certo insegnante, perdenti in un altro, con un altro insegnante. Ad esempio la convinzione citata che "per riuscire in matematica non c'è bisogno di studiare la teoria, basta fare esercizi", per molti studenti è perdente all'Università, ma vincente alle scuole superiori. Anche in questo caso risulterà importante la consapevolezza di un soggetto e la sua flessibilità, cioè, ancora, un buon atteggiamento metacognitivo.

Convinzioni sulla matematica.

Ma ritorniamo all'osservazione in classe degli studenti dopo che hanno commesso degli errori.

Alla nostra richiesta: "Come hai fatto?" alcuni studenti hanno difficoltà a rispondere, non sono in grado cioè di ricostruire i processi di pensiero che li hanno portati a quel risultato o a quel procedimento. Per prepararsi ad una verifica d'altra parte fanno una quantità incredibile di esercizi, che ai loro occhi sono tutti diversi uno dall'altro, e se hanno difficoltà chiedono: "Come viene *quest*'esercizio?" In altre parole agiscono guidati dalla convinzione che:

♦ In matematica quello che conta sono i **prodotti** [e non i **processi**].

Tale convinzione è associata ad una visione della matematica come un insieme di prodotti scollegati tra loro, in quanto svuotati dei processi sottostanti, ed ha delle conseguenze molto gravi in relazione all'errore:

➔ Se il prodotto è sbagliato, lo studente percepirà come fallimentare l'intera prestazione. E d'altra parte viceversa è difficile convincere davanti ad un risultato che "torna" che il procedimento è sbagliato. Ma soprattutto:
➔ Se il prodotto è riconosciuto come sbagliato, dopo la correzione viene semplicemente ***sostituito*** col prodotto giusto.

Una conseguenza estremamente importante di questa visione distorta della matematica è che secondo lo studente tutti i prodotti vanno ricordati, senza potersi appoggiare ai processi sottostanti.

Ne segue un'altra convinzione, più precisamente legata al successo, estremamente diffusa fra gli studenti con difficoltà:

♦ In matematica ci vuole tanta memoria.

"Non è possibile ricordarsi tutte queste definizioni di limite! Ci vuole troppa memoria!" [Elisa, studentessa di Biologia]

Ma dato che è *davvero* impossibile ricordarsi TUTTO, segue in modo naturale un'altra convinzione:

♦ La matematica è una disciplina incontrollabile.

Le conseguenze di questa convinzione sono a mio parere fra le più disastrose: il soggetto rinuncia al controllo dei propri processi di pensiero, non assumendosi in questo modo la responsabilità dell'errore e più in generale dell'apprendimento. Questa mancata assunzione della responsabilità dell'apprendimento si riconosce anche dal fatto che questi studenti tendono

ad attribuire le cause del proprio fallimento a fattori esterni, e comunque non controllabili: "Ho fatto male il compito perché era difficile, perché il professore è severo, perché sono sfortunato..."

La costruzione di una visione della matematica come disciplina incontrollabile è alimentata da alcune scelte e pratiche didattiche. Ad esempio:

■ L'insegnante appare come unico depositario delle "regole del gioco". Egli può dire "Dal disegno si vede che..." o ancora "E' evidente che...", ma le stesse frasi pronunciate dagli studenti vengono censurate. Ma allora certe cose si possono dire, si possono fare, oppure no? E quando? Ma soprattutto come si può riconoscere quando è lecito e quando no? L'insegnante in genere non lo esplicita, e gli studenti si convincono semplicemente che certe cose le può fare *solo* l'insegnante.

■ Anche gli insegnanti spesso privilegiano i prodotti rispetto ai processi. Tipici esempi di questo:
-l'abitudine di far memorizzare molte formule (ad esempio in trigonometria) e più in generale:
-la frammentazione di un fenomeno in tanti casi particolari (ognuno con il suo nome!) senza far cogliere la logica sottostante.

■ Ma soprattutto non si insiste sulla sistemazione rigorosa delle prime conoscenze aritmetiche, le "basi" su cui poggia l'intero edificio matematico. L'aritmetica viene presentata nella scuola dell'obbligo come un insieme di fatti e di procedure. Alle scuole superiori, quando finalmente lo studente sarebbe in grado di capire i processi che stanno alla base di tali fatti e procedure, l'aritmetica viene sacrificata ad argomenti considerati più "utili" (la geometria analitica, la trigonometria, l'analisi). Questa scelta ha molte conseguenze negative: impedisce di sfruttare una enorme potenzialità di incuriosire e divertire con problemi significativi gli studenti meno motivati alla matematica ma magari più fantasiosi (Scimemi, 1986); aumenta le difficoltà, già consistenti, dell'approccio all'algebra (Malara, 1997); ma soprattutto favorisce una visione distorta proprio delle *basi* della matematica, che continuano ad essere viste come prodotti, quasi magici, e non come processi. In particolare non si esplicitano i processi sottostanti certe procedure e certe regole, e non si sottolinea che tali processi possono essere profondamente diversi, motivando tutto genericamente e nello stesso modo. Non si esplicita che ci sono diversi ***perché***: il *perché* $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$ è diverso dal *perché* $5^0 = 1$ e ancora diverso dal *perché* $4 + 2 \cdot 3 = 10$, mentre $(4+2) \cdot 3 = 18$.

L'eventuale sforzo di uno studente di "capire" tutte queste uguaglianze nello stesso modo sarà destinato al fallimento. Lo studente potrà convincersi che in realtà in matematica non c'è niente da capire (oppure, vedremo dopo, che *lui* non è in grado di capire), che la matematica è un'accozzaglia di regole convenzionali indipendenti l'una dall'altra:
"Vorrei proprio sapere i motivi, le cause, perché così mi sembrano tutte regole astratte e appiccicate qui e là." [Giacomo, 1ª media]

L'edificio matematico poggerà allora su basi estremamente precarie:
"Le persone 'portate' hanno una base su cui appoggiarsi. Le persone 'negate' hanno una base che però è pericolosa può cadere da un momento all'altro." [Pierpaolo, 1ª ITC]

Probabilmente molti ritengono che gli studenti arrivino da soli a porsi certe domande e a darsi certe risposte. Ma non è così. La maggior parte degli studenti di scuola superiore non è in grado di argomentare l'algoritmo usualmente utilizzato per eseguire la moltiplicazione di fattori con più cifre. Alle domande:

a] Esegui la moltiplicazione: 216 x 37 =	b] Perché secondo te la moltiplicazione si esegue così? Cioè: come mai facendo tutti quei passaggi viene proprio il risultato della moltiplicazione 216x37?

su 383 studenti di varia provenienza e classi, solo 60 (meno del 20%) rispondono con argomentazioni corrette.

Convinzioni sulle proprie capacità.

Ma torniamo alla convinzione che la matematica è incontrollabile. Per alcuni studenti questa convinzione non è legata ad una visione distorta della matematica, ma alla convinzione di non possedere le capacità per controllarla, cioè ad uno scarso senso di auto-efficacia.

Questo scarso senso di auto-efficacia può avere origine dallo sforzo inutile (cui abbiamo accennato prima) di capire quelle che sono in realtà definizioni o convenzioni, sforzo che produce confusione e senso di inadeguatezza. Più in generale esso nasce dal ripetersi di esperienze percepite come fallimentari: "Alle elementari non ero una grossa cima in matematica, quindi in 3ª elementare vidi che non ero brava e chiusi così la mia testa, dicendo che questa non faceva per me." [Azzurra, 1ª media]. Fra le responsabilità dell'insegnamento nella costruzione di convinzioni su di sé debilitanti possiamo riconoscere un atteggiamento spesso poco incoraggiante da parte

degli insegnanti, che non sempre sono disponibili a modificare il proprio giudizio su un allievo considerato inizialmente poco volenteroso o addirittura poco capace[1]. Spesso poi i giudizi iniziali sono dati sulla base dei risultati a prove oggettive d'ingresso: chi usa abitualmente questi test dovrebbe conoscere a mio parere i risultati delle ricerche sul cosiddetto effetto Pigmalione (Rosenthal e Jacobson, 1991). Inoltre troppo spesso il giudizio dato sulla prestazione viene in realtà esteso alla persona: non è il compito che viene valutato con un "4", ma lo studente!

Ma sulle convinzioni riguardo le proprie capacità hanno responsabilità non indifferenti anche i familiari, in particolare i genitori, che spesso *si aspettano* dai figli risultati negativi, e li accettano come immodificabili. Inoltre certi luoghi comuni alimentano l'ineluttabilità del fallimento in matematica, arrivando a considerarlo un fenomeno quasi più naturale del successo!

Quarta osservazione: le emozioni.

Spesso gli studenti attribuiscono i propri errori a fattori emotivi che sfuggono al controllo. Indubbiamente le interrogazioni e i compiti di matematica riescono a scatenare le emozioni più forti: "Quando vengo interrogata, o viene annunciato un compito in classe entro in uno stato d'ansia, le mani iniziano a tremare e vengo avvolta dalla paura di sbagliare." [Erika, 2a media]

E' possibile quindi che la mancanza di lucidità associata a tali emozioni possa essere la causa di errori, anche assolutamente imprevedibili e privi di alcuna logica apparente. Ma anche su questo aspetto l'insegnante può fare molto. Le emozioni associate ad un evento infatti sono strettamente legate all'interpretazione che il soggetto dà dell'evento stesso: così l'ansia o addirittura la paura sono spesso associate in studenti con difficoltà alla percezione di non poter controllare la situazione (cfr. Zan, 1997). Un intervento dell'insegnante finalizzato a modificare questa percezione può quindi avere effetti indiretti notevoli sull'ansia e sugli errori che ne derivano, anche se naturalmente non è facile sradicare un atteggiamento che si è costruito lentamente negli anni.

3. CONCLUSIONI

Riassumendo le osservazioni fatte, possiamo concludere che all'origine degli errori ci può essere una grande varietà di cause:

---

[1] Suggerisco a questo proposito la lettura del libro "L'arte dell'incoraggiamento", di Franta e Colasanti, 1991.

→ ostacoli epistemologici;
→ mancanza di conoscenze;
→ interpretazione distorta di procedure, termini, simboli, proprietà, concetti;
→ interpretazione distorta dell'attività matematica che si articola in:
- ■ convinzioni sulla matematica
- ■ convinzioni su di sé

e che è spesso associata a:
→ emozioni negative.

Naturalmente queste cause possono coesistere e interagire fra di loro: ad esempio abbiamo ipotizzato che la mancata conoscenza dei processi sottostanti le "basi" della matematica possa generare una visione complessiva distorta della disciplina. Carenze a livello metacognitivo possono inoltre amplificare gli effetti degli errori, e impedirne il superamento.

Concluse in un certo senso le fasi preliminari di osservazione ed interpretazione, viene naturale pensare all'intervento (di prevenzione e di recupero) che ne può seguire: in altre parole, che fare?

Un elemento mi sembra emergere chiaramente: non ha senso cercare di evitare gli errori. Il rischio dell'errore è connaturato infatti all'attività di soluzione di problemi, come sostiene in modo deciso ed espressivo Karl Popper: "Evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza." [citato in Baldini M., 1986, pag.17]. Il valore dell'errore è stato ormai recuperato a livello epistemologico e didattico: alcune ricerche suggeriscono addirittura un uso dell'errore nella didattica della matematica come stimolo naturale per riflessioni ed esplorazioni che altrimenti risulterebbero artificiosamente imposte (cfr. Borasi, 1988; Arzarello, 1994). Ma questo tipo di approccio richiede che *l'insegnante per primo* accetti il rischio dell'errore. Molto spesso invece siamo proprio noi a passare agli studenti la paura di sbagliare. Questa paura si riconosce in molti comportamenti: l'abitudine di proporre schede molto strutturate e percorsi che minimizzano il rischio di sbagliare; di evitare domande "troppo difficili"; di privilegiare l'attività di esecuzione di esercizi di routine a quella di soluzione di problemi.

Zofia Krygowska (1957) parla a questo proposito di "blocco delle occasioni di errore", mentre Gardner (1993) sostiene più in generale che l'insegnamento spesso preferisce le risposte corrette ai processi significativi, in quanto non vuole assumersi i "rischi del comprendere".

La tolleranza, se non addirittura la sollecitazione alle occasioni d'errore, che emergono da queste riflessioni non vanno intese come un invito a non intervenire, ma piuttosto come una raccomandazione a finalizzare l'intervento allo sviluppo di capacità che consentano allo studente:

→ di minimizzare l'effetto degli errori;
→ di interpretare l'errore in modo da ricavare informazioni utili per riorientare l'impegno e realizzare un'effettiva comprensione.

L'insegnante ha un ruolo centrale per lo sviluppo di queste capacità. In particolare le può favorire:

■ dedicando un'attenzione esplicita alle capacità metacognitive degli studenti, quali:
- la capacità di analizzare e descrivere i propri processi di pensiero (pensiero riflessivo);
- la consapevolezza di sé, delle proprie risorse (non solo cognitive);
- la attivazione di processi di controllo;

■ abituando gli studenti ad esplicitare le proprie convinzioni e favorendo occasioni di confronto e di discussione;
■ ponendo domande piuttosto che dando risposte;
■ ascoltando i suoi allievi; ma soprattutto:
■ favorendo una visione della matematica come disciplina creativa e contesto naturale di problemi significativi e stimolanti, non appiattita nel presente ma ricca di una dimensione storica: in definitiva come disciplina di **processi** piuttosto che di **prodotti**.

Certo, solo un insegnante perfetto è in grado di seguire fedelmente il percorso che è emerso da queste osservazioni.

Ma se non possiamo essere insegnanti perfetti, anzi, se non dobbiamo nemmeno cercare di esserlo, come ci suggerisce la citazione di Bruno Bettelheim riportata all'inizio, possiamo invece diventare insegnanti attenti, consapevoli, disposti ad imparare dai *nostri* errori: possiamo diventare cioè..... insegnanti *passabili*.

BIBLIOGRAFIA

ARZARELLO F. Il ruolo dell'errore nella costruzione del sapere matematico. In Caredda C., Piochi B., Sandri P. (a cura di) *Handicap e svantaggio: Individuare risorse ed interpretare errori per fissare obiettivi in Matematica*. Pitagora, 1994.

BACHELARD G. *La formazione dello spirito scientifico*. Cortina, 1995.

BALDINI M. *Epistemologia e pedagogia dell'errore*. La Scuola, 1986.

BETTELHEIM B. *Un genitore quasi perfetto*. Feltrinelli, 1987.

BORASI R. Sbagliando s'impara: alternative per un uso positivo degli errori nella didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.11, n.4, 1988.

BROWN J.S., BURTON R.R. Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, n.2, 1978.

COBB P. Two Children's Anticipations, Beliefs, and Motivations. *Educational Studies in Mathematics*, n.16, 1985.

FISCHBEIN E. Modelli taciti e ragionamento matematico. In D'Amore B. (a cura di) *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, Pitagora, 1992.

FRANTA H., COLASANTI A.R. *L'arte dell'incoraggiamento*. La Nuova Italia Scientifica, 1991.

GARDNER H. *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Feltrinelli, 1993.

KRYGOWSKA A. Z. Sul pericolo del formalismo e del verbalismo nell'insegnamento dell'algebra. *Archimede*, n.4-5, 1957.

MALARA N. Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra. In Jannamorelli B. e Strizzi A. (a cura di) *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche*. Edizioni Qualevita, 1997.

ROSENTHAL R., JACOBSON L. *Pigmalione in classe*. Franco Angeli, 1991.

SCIMEMI B. Attualità e validità dell'aritmetica. Atti del X Convegno sull'insegnamento della matematica. *Notiz. U.M.I.*, suppl. al n.7, 1986.

SCHOENFELD A. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, 1985.

VILLANI V. Perché la matematica è difficile. In Pertichino, Sandri, Zan (a cura di) *Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà*. Pitagora, 1993.

ZAN R. Emozioni e matematica. In D'Amore B. (a cura di) *Didattica della matematica e realtà scolastica*. Pitagora, 1997.

MATEMATICA E DIFFICOLTÀ*

Carla Caredda[1]

Premessa

Una iniziale, e non per questo meno importante, attenzione ai problemi dell'handicap e comunque ai diritti delle persone in situazione di difficoltà la troviamo nel documento Falcucci del 1975, il quale mette in risalto la necessità di fare una scuola "diversa" che offra a tutti uguali opportunità di apprendimento.

Pur senza percorrere cronologicamente la normativa ministeriale che si è via via accumulata è opportuno mettere in risalto la legge quadro n.104 del 1992 che esplicita in modo chiaro la necessità di una sinergia di interventi istituzionali per assicurare l'esercizio dei diritti a tutte le persone. Non siamo ancora certi che questa legge sia effettivamente operativa in tutti i suoi articoli e in tutto il territorio nazionale, tuttavia la sensibilizzazione che è stata creata ci rende fiduciosi perché questi diritti vengano rispettati.

Le istituzioni scolastiche nel loro complesso da sempre attente alle problematiche legate all'insegnamento - apprendimento vantano certamente il primato dell'intervento a favore delle persone in situazione di handicap.

La scuola elementare è sicuramente l'ordine di scuola che ha mostrato maggior attenzione alla situazione dei soggetti in difficoltà .

Alle prime e "autarchiche" esperienze di intervento si è via via sostituita una notevole mole di attività sempre più "scientifiche" perché collegate con istituti universitari di ricerca.

La pratica ha trovato un valido interlocutore nella ricerca che ha progressivamente elaborato e approfondito le teorie dell'apprendimento, dello sviluppo cognitivo, dello sviluppo dell'intelligenza, ...

Lo stato attuale della situazione, cioè il binomio ricerca e pratica, è ad un sufficiente punto interlocutorio che richiede uguale impegno da entrambe le posizioni, ma anche una continua azione di confronto e di continuo feedback degli interventi.

---

* lavoro eseguito nell'ambito delle ricerche finanziate con contratto CNR n.97.00868.CT01

[1] Dipt. di Matematica Università di Cagliari

La ricerca in Italia

Ciò che in questa sede interessa far presente è il discorso Matematica e Difficoltà. La ricerca italiana in questo settore è ormai copiosa, lo testimoniano i numerosi convegni che sono stati organizzati.

La data ufficiale di costituzione del gruppo di ricerca che si occupa proprio di Matematica e Difficoltà - **GRIMED** - (Gruppo di Ricerca Interuniversitario su Matematica e Difficoltà) risale al 1991, tuttavia le esperienze e sono state condotte dai singoli nuclei di ricerca universitari hanno date [illegible] cedenti.

Certamente si tratta di lavori sporadici legati a sensibilità personali che costituiscono tuttavia una solida base di partenza per definire storicamente l'evoluzione stessa dei nuclei di ricerca.

Mi riferisco in particolare alle sedi di Bari, Bologna, Cagliari, Genova, L'Aquila, Lecce, Milano (che con una riunione il 31 maggio 1991 ha dato inizio all'attività di confronto e di scambio delle esperienze), Napoli, Parma, Pavia, Pisa, Siena, Torino. Senza citare tutti i contributi o i filoni di ricerca che vedono impegnati i ricercatori e gli insegnanti delle sedi citate vorrei, a titolo esemplificativo, fare qualche flash sulle più recenti attività di ricerca attivate. Il gruppo di Pisa coordinato da R. Zan attualmente si occupa del *ruolo dei fattori metacognitivi e affettivi nell'insegnamento/apprendimento della matematica con particolare attenzione ai problemi di raccordo scuola superiore/Università e, su questo tipo di approccio alle difficoltà sono stati organizzati anche corsi di recupero.*

Bari e Siena, soprattutto nelle persone di M. Pertichino e B. Piochi, e con la collaborazione di A. Contardi (Associazione persone down - Roma) conducono una ricerca *sul ruolo della matematica nell'educazione di una persona con handicap cognitivo* e inoltre si stanno occupando *di produzione e sperimentazione di software didattico e originale.*

Il gruppo che opera a Bologna sotto la direzione di B. D'Amore si sta dedicando a *sperimentare se i due strumenti della "corrispondenza" e del "gruppo comunicativo", agendo sul piano relazionale ed emotivo, sollecitino maggiormente i bambini ad apprendere e a riflettere sulla matematica per comunicarla a compagni della propria classe o di classi diverse per ordine e grado. I ricercatori ritengono, infatti, possibile che tali tecniche abbiano importanti ricadute sul piano cognitivo in relazione ai contenuti e alle strategie di tipo matematico.*

A. Davoli, a Milano, ha elaborato un progetto di ricerca, per il corrente anno scolastico,. per *lo studio di metodi atti ad individuare precocemente alunni a rischio in prima classe elementare.* Gli obiettivi del progetto possono essere sintetizzati nella elaborazione di strumenti di osservazione che consentano di scoprire difficoltà più o meno latenti, nella ricerca di metodi

di sostegno e di prevenzione, nel perfezionamento di metodi di indagine che siano in grado di valutare la validità dell'intervento in tempi brevi.

Il gruppo che opera a Parma sotto la guida di M. Venè e P. Vighi fonda il suo lavoro essenzialmente *nella ricerca continua di una matematica "essenziale", "di sopravvivenza" che possa trasformarsi in vera ricchezza e possa essere utile per il ragazzo, e di quei pilastri di conoscenza su cui fondare la programmazione didattica e curricolare.*

A Torino, A. P. Longo ha sempre rivolto il suo interesse verso quei casi di *difficoltà d'apprendimento determinate da svantaggio di tipo sociale (famiglia, società , scuola) orientando la sua ricerca all'analisi delle cause di tipo scolastico che contribuiscono a generare difficoltà (miscomprensioni, misconoscenze, incapacità di metodo nello studio, ...)*

A Cagliari C. Caredda in collaborazione con M. R. Puxeddu, insegnante elementare laureata in psicologia, e con altri insegnanti, alcuni dei quali specializzati nel sostegno, si occupa *dell'elaborazione e sperimentazione, a livello di scuola dell'obbligo, di adattamenti di unità didattiche che rendano possibile una reale integrazione dell'allievo in situazione di handicap nel gruppo classe.* La filosofia di base della ricerca cagliaritana è stata da subito quella di interpretare l'handicap come una differenza individuale e, quindi la programmazione delle attività didattiche ha tenuto sempre conto dei singoli allievi cercando di valorizzare quelle differenze interpersonali e intrapersonali che caratterizzano l'essere umano e che l'insegnamento deve essere capace di fronteggiare affinché il conseguente apprendimento abbia effettivamente valore educativo.

Che l'argomento handicap occupi oggi un suo spazio e un suo specifico interesse nella ricerca in didattica della matematica lo si capisce dal numero di Convegni che sono stati organizzati e che vivono la loro autonomia indipendentemente dagli altri argomenti trattati in didattica della matematica.

Si riportano di seguito i temi dei sei Convegni, che hanno tutti avuto luogo a Castel San Pietro Terme (BO) e la cui nascita, non va dimenticato, si deve a B. D'Amore che nel 1991 offrì, nell'ambito del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica n.5: La Matematica fra gli 8 e i 15 anni", uno spazio per dibattere su questo importante e sempre più coinvolgente argomento:

1. Handicap mentale e difficoltà d'apprendimento. Che obiettivi e che attività matematiche proporre? (1991).
2. Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà (1992).
3. Handicap e svantaggio. Individuare risorse ed interpretare errori per fissare obiettivi in matematica (1993).
4. Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia (1994)

5. Spazio e tempo: esperienza e apprendimento (1996)
6. Problemi e alunni con problemi (1997)

Il tema del 7° Convegno è "Matematica e affettività. Chi ha paura della matematica?"

Gli atti dei Convegni "Matematica e Difficoltà" sono pubblicati dalla casa editrice Pitagora, nella collana omonima diretta da Patrizia Sandri (NRD di Bologna).

Chi ormai lavora da un certo tempo nella ricerca in Matematica e Difficoltà è consapevole del ruolo che questa disciplina ha nel processo di sviluppo cognitivo.

Non è un caso se alcuni documenti programmatici sottolineano il ruolo della matematica nello sviluppo del pensiero.

Ci troviamo cioè di fronte ad uno strumento che, contrariamente a quello che sino a poco tempo fa era uno stereotipo comune: **Matematica = far di conto**, aiuta il pensiero ad essere creativo e ad acquisire quel senso di divergenza che lo rende unico e originale.

La nuova prospettiva e forse potremmo dire la nuova scommessa della didattica della matematica sta proprio nel superare questa visione e nell'utilizzare la matematica come strumento di evoluzione personale e come criterio per conoscere la realtà in tutte le sue parti.

Considerato che la matematica, nella sua accezione più ampia non è solamente "far di conto" ma è forma, dimensione, misura, arte, ...è, a pieno titolo, parte della nostra esistenza non in modo virtuale, ma in modo reale.

A maggior ragione acquista valore nell'esistenza di chi è in situazione di handicap dal momento che la matematica può offrire possibilità di scelte e di applicazioni che non sempre la lingua riesce a realizzare. Conosciamo, oltre alle ormai numerose esperienze italiane anche altre ricerche, ad esempio in Belgio il lavoro di Frederique Papy, che seppure limitate a singoli individui danno il senso e la forza di continuare a provare.

La diversità degli handicap è una ragione in più per "inventare" nuove strategie e per costruire la storia di esperienze che hanno reso possibile, in moltissimi casi, l'integrazione nella società.

Se è vero, come è vero, che resta da fare ancora tanto cammino è anche vero che sono stati superati molti pregiudizi e che il discorso Matematica e Difficoltà è uno dei tanti settori della ricerca in didattica della matematica.

BIBLIOGRAFIA
(ultimi quattro anni)

- Addari, M. and Caredda, C.: 1994, "Un approccio multidisciplinare per la comprensione della cronologia di eventi in un soggetto affetto da grave sindrome di Down", in Caredda, C., Longo, P. and Piochi, B. (eds.), Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia, Pitagora, Bologna, 29-35.
- Baldi, F. and Sani, E.: 1994, "Un esempio di collaborazione tra un insegnante di sostegno ed una neuropsichiatra: analisi incrociata delle difficoltà di risoluzione di problemi aritmetici in un soggetto psicotico", in Pertichino, M., Sandri, P. and Zan, R. (eds.), Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà, Pitagora, Bologna, 59-64.
- Bondesan, M.G.: 1994, "Uso di tematiche economiche per la diagnosi e lo sviluppo dell'autonomia di bambini/e con difficoltà di apprendimento: un'esperienza in III elementare", in Caredda, C., Longo, P. and Piochi, B. (eds.), Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia, Pitagora, Bologna, 51-59.
- Bruno Longo, A.P.: 1994, "Problemi sul M.C.D. in un allievo di prima media in difficoltà di apprendimento", in Caredda, C., Longo, P. and Piochi, B. (eds.), Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia, Pitagora, Bologna, 119-121.
- Bruno Longo, A.P., Di Carlo, A., and Ambrosione, M.: 1994, "Didattica della matematica contro la dispersione scolastica: esperienze di recupero nell'inserimento di allievi in prima superiore", in Caredda, C., Longo, P. and Piochi, B. (eds.), Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia, Pitagora, Bologna, 123-131.
- Bruno Longo, A.P.: 1994, "La matematica i soggetti in difficoltà: esperienze di un ricercatore", Convegno Facoltà di Neuropsichiatria, Università di Torino, 46-147.
- Bruno Longo, A.P. 1997, "Imparare dai problemi di una bambina in difficoltà", in In Aschieri I, Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (a cura di) Problemi e alunni con problemi, Pitagora, Bologna, 39-43.
- Caredda, C.: 1995, "Problemi e rappresentazioni", Integrazione , 5/6, 42-44.
- Caredda, C. and Puxeddu, M.R.: 1994, "Un intervento didattico per un caso grave di ritardo nell'apprendimento", Scuola e Didattica, 4, 70-71.
- Caredda, C., Puxeddu, M.R. 1996 "Il gioco: strategia pedagogica per l'apprendimento di concetti matematici in bambini in difficoltà", Scuola e didattica, n.11 La Scuola Ed.

- Caredda, C., Puxeddu, M.R. 1996 "Una integrazione possibile: attività psicomotoria e altro", Scuola e didattica n.9 La Scuola Ed.
- Caredda, C., Vighi, P., 1996 "Mathematics and students with learning difficulties" in Italian research in Mathematics Education 1988-1995, CNR
- Contardi, A., Pertichino, M., Piochi, B.: 1994, "Verso la geometria". Integrazione, n.1/2, 49-50
- Contardi, A., Pertichino, M., Piochi, B.: 1994, "Il diritto alla Matematica." Insegnare, n.6,38-39
- Contardi, A., Pertichino, M., Piochi, B.: 1994, "Apprendimento della matematica: insegnamento per problemi e alunni con handicap", Psicologia e Scuola, 71, (XV), 3-8.
- Contardi, A., Pertichino, M., Piochi, B.: 1994, "Obiettivi matematici e crescita nell'autonomia", in Caredda, C., Piochi, B. and Sandri, P. (eds.), Handicap e svantaggio, Pitagora, Bologna, 199-204.
- Contardi, A., Pertichino, and M., Piochi, B.: 1995, "Orientamento e uso dei servizi: dall'apprendimento per problemi all'uso del software come sussidio didattico", in Caredda, C., Longo, P. and Piochi, B. (eds.), Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia, Pitagora, Bologna, 89-94.
- Contardi, A., Pertichino, M., Piochi, B.: 1995, "Ausili software per disabili: alcune esperienze", Atti Convegno AICA, Cagliari 27-29 settembre 1995, 958-965.
- Contardi, A., Pertichino, M., Piochi, B.: 1995, "Proposta di situazioni a-didattiche nel biennio della scuola media superiore", in Iannamorelli B. (a cura di) Lingue e linguaggi nella pratica didattica, ed. Qualevita, 193-195.
- Contardi, A., Pertichino, M., Piochi, B.: 1995, "Didattica della Matematica e Handicap", in Atti XV Congresso UMI, Padova 11-16 settembre, 1995, 348.
- Contardi, A., Pertichino, M., Piochi, B.: 1995, "Apprendimento della Matematica: insegnamento per problemi e alunni con handicap." In Atti IV Convegno Nazionale AIRIPA I disturbi di ragionamento e di apprendimento matematico. Trieste 27-28 ottobre 1995, 46.
- Contardi, A., Pertichino, M,. Piochi, B.: 1995, "Dall'apprendimento per problemi all'uso del software come sussidio didattico." In Atti IV Convegno Nazionale AIRIPA I disturbi di ragionamento e di apprendimento matematico. Trieste 27-28 ottobre 1995, 80-81.
- Contardi, A., Pertichino, M. Piochi, B.: 1996, "Educazione matematica e deficit cognitivo: una sfida per il software." IS Informazione e Scuola, IV n.3 16-20.
- Contardi, A., Faggiano L., Pertichino, M. and Piochi, B.: 1997, "Lo stereotipo del testo del problema" in In Aschieri I, Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (a cura di) Problemi e alunni con problemi, Pitagora, Bologna, 25-31

- Davoli Albini, A.: 1994, "Razionalità e simbolismo nell'educazione logico-matematica", Libertà di Educazione, 4, 21-23.
- Davoli, A. and Manara, M.A.: 1994, "Recupero alla logica ed al ragionamento attraverso la costruzione di modelli di poliedri", in Caredda, C., Piochi, B. and Sandri, P. (eds.), Handicap e svantaggio, Pitagora, Bologna, 145-150.
- Davoli, A. and Panceri, A.: 1994, "Insufficienza mentale e attività di recupero sulla moltiplicazione", Scuola e Didattica, 4, 72-73.
- Davoli, A. and Panceri, A.: 1995, "Autonomia di pensiero e capacità di collaborazione per cercare risposta a problemi aritmetici nella vita quotidiana", in Caredda, C., Longo, P. and Piochi, B.(eds.) Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia, Pitagora, Bologna, 95-98.
- N.R.D di Parma, 1997 "Problemi per bambini con problemi", in In Aschieri I, Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (a cura di) Problemi e alunni con problemi, Pitagora, Bologna, 53-59.
- N.R.S. di Bologna, 1997 "Problemi senza problemi e problemi tra problemi" (mostra-laboratorio), in In Aschieri I, Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (a cura di) *Problemi e alunni con problemi*, Pitagora, Bologna, 137-138.
- Piochi, B.: 1994, "La comprensione del testo dei problemi', Integrazione,1/2, 57-58.
- Poli P., Zan R. 1995, "Problemi e convinzioni" in Caredda, C., Longo P., Piochi, B. (a cura di) Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia. Pitagora, Bologna
- Poli P., Zan R. 1996, "Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione di problemi: presentazione di un questionario elaborato per un'indagine nella scuola elementare." La matematica e la sua didattica, n.4.
- Scali, E.: 1994, "Economia" come terreno di scelte strategiche mirate alla conquista dell'autonomia", in Caredda, C., Longo, P. and Piochi, B.(eds.) Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia, Pitagora, Bologna, 173-178.
- Zan R. 1995, "Chi non riesce in matematica?" in D'Amore B. (a cura di) Insegnare ad apprendere la Matematica in aula: situazioni e prospettive. Pitagora, Bologna.
- Zan R. 1995, "Difficoltà d'apprendimento in Matematica: l'approccio metacognitivo." Le Scienze e il loro insegnamento. N.4/5
- Zan R. 1996, "Un intervento metacognitivo "di recupero" a livello universitario." La Matematica e la sua didattica, n.1.
- Zan R. 1996, "Difficoltà d'apprendimento e problem solving: proposte per un'attività di recupero." L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.19 B, n.4.

- Zan R. 1997, "Problemi e decisioni." In Aschieri I, Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (a cura di) Problemi e alunni con problemi, Pitagora, Bologna.

ERRORI TIPICI IN MATEMATICA E INOPPORTUNITÀ DIDATTICHE

Michele Impedovo*

Archelao di Atene, maestro di Socrate, credeva che i terremoti fossero sfogo di vento compresso sottoterra. Democrito credeva invece che fossero flussi di acque sotterranee. Anassagora di Clazomene vide il cielo come una volta di pietre incastrate, soggette a cedimenti e crolli. [...]

Oggi sappiamo che sbagliavano, però scrutavano il mondo con tutti i sensi, lo meditavano per intero e abitavano la natura. Possedevano in loro tutti i punti del sapere di allora, conoscevano le stelle come le facce dei loro cari, predicevano eclissi e comete, affacciati sull'universo, nell'impresa di prevederlo.

Noi siamo accampati in stanze protette contro la notte, il suolo e lo spazio aperto. Ci occupiamo di frammenti di ricerca sempre più minuscoli. Siamo gnomi nei confronti dei loro pensieri imprecisi, ma profondi, scaturiti da notti intere trascorse su terrazze e tetti a ragionare d'infinito.

Erri De Luca

Errore tipico = errore didattico?

Solo in matematica l'errore è tanto enfatizzato. Sembra che nella pratica didattica la maggior preoccupazione dell'insegnante sia che gli alunni non commettano errori. A differenza che in altre discipline, in matematica il confine tra ciò che è errato e ciò che è corretto è preciso, inesorabile, indiscutibile: è davvero così?

Supponiamo, per assurdo, che sia così. Allora ciò che ci guida nella valutazione è soprattutto una preoccupazione di carattere logico: l'errore è una manifestazione di incoerenza, di contraddizione rispetto alla teoria codificata, rispetto ai paradigmi della comunità matematica. Quindi l'errore è visto come fatto assoluto, non relativo.

Ciò sarebbe vero se fossimo certi di avere presentato quella teoria in modo perfettamente coerente e logicamente organizzato. Ciò sarebbe vero se presentassimo ai nostri allievi una teoria formale. Naturalmente (per fortuna) questo non è pensabile: sappiamo bene che le righe che tracciamo sulla lavagna non sono le rette della geometria. Tuttavia siamo convinti che l'insegnamento della matematica è sostanzialmente rigoroso, e che quindi l'errore è un dato assoluto.

Purtroppo non è sempre così: nella pratica di insegnamento della matematica (dalle elementari alla università) e ancor più nei libri di testo sembra di scorgere un vizio antico e costante, che consiste nel presentare (senza averne coscienza) gli oggetti matematici in modo impreciso, un po'

*Liceo Scientifico G. Ferraris di Varese, Nucleo di Ricerca Didattica di Milano

ambiguo, a volte confuso, a volte incoerente, quasi mai giustificato. Tale imprecisione spesso va di pari passo con una pedante categoricità; si finge una precisione e una mancanza di dubbio che sono solo fittizie, e che suscitano spesso nell'allievo la rinuncia al proprio senso critico.

ESEMPIO. *"Prima di effettuare qualsiasi operazione con le frazioni, **esse vanno ridotte ai minimi termini**"*. La parola più pericolosa di tale affermazione (tratta da un libro di testo delle scuole medie inferiori) è "vanno": non è una esortazione, è una prescrizione; si tratta esattamente di un esempio di quelle *"ricette di cucina"* di cui parlava Benedetto Croce. Di fronte a tale raccomandazione l'allievo più debole si rifugerà in un mondo di procedimenti puramente sintattici, per lui privi di significato, e l'allievo più intelligente, che di fronte all'operazione

$$\frac{1}{6}+\frac{4}{6}$$

si accorge che la prescrizione è insensata, accetterà il *contratto didattico*, spostando il suo obiettivo dalla comprensione di ciò che è la matematica alla comprensione di ciò che l'insegnante richiede.

ESEMPIO. *"Nell'equazione $ax^2+bx+c=0$, se b è pari si usa la formula ridotta"*. Se stabiliamo che i polinomi che ci interessano sono quelli a coefficienti in **R** (e non in **Z**: la probabilità di avere equazioni risolubili sarebbe nulla), che senso ha parlare di coefficienti pari e di formula ridotta?

ESEMPIO. *"L'insieme **C** dei numeri complessi **non è ordinabile**. Pertanto in **C** non ha alcun senso risolvere una disequazione"* (l'affermazione è falsa, **l'insieme** **C** è ordinabile in infiniti modi, ma non è questo il problema). Dopodiché alla successiva prova d'esame (Analisi I) si dà il seguente esercizio: *"Stabilire per quali numeri complessi **ha senso** la disequazione $z-3i>0$"*. Si tratta di un tranello: nelle intenzioni del docente la relazione d'ordine va interpretata in **R** (quindi: per quali numeri complessi $z-3i$ è un numero reale positivo?) e la risposta corretta dovrebbe $\{z\in C:\mathrm{Im}(z)=3i \text{ e } \mathrm{Re}(z)>0\}$. Tuttavia la formulazione della richiesta è ambigua e, a voler essere pignoli, sbagliata: $z-3i$ non è in nessun caso un numero reale, semmai è un numero complesso con parte immaginaria nulla.

Gli esempi proposti sottolineano il fatto che il confine tra l'errato e l'esatto non è poi così netto, e che può succedere che la fonte dell'errore stia in una pratica didattica un po' facilona, che si ammanta di un rigore che essa per prima non è in grado di rispettare. Solitamente è proprio dietro all'ossessiva ostentazione di rigore che si nasconde l'errore didattico, il quale

si trasformerà inesorabilmente nell'errore tipico dell'allievo. Quanto più l'insegnamento risulta prescrittivo e rigidamente regolamentato, tanto più l'errore è in agguato; anzi, in un certo senso è addirittura evocato.

Ripeto: solitamente proprio il testo in apparenza più categorico e pignolo, che ad ogni riga mette in guardia dall'errore, che classifica puntigliosamente, è quello che presenta la matematica in modo impreciso. Per rendersene conto è utile controllare in che modo viene presentato il calcolo letterale.

ESEMPIO. *"Due monomi si possono sommare solo se sono simili. In questo caso si sommano i coefficienti e la parte letterale rimane la stessa"*. Questa infelice affermazione non può che indurre all'errore: introduce un comportamento prescrittivo per il quale occorre dare ben tre definizioni: monomi simili, coefficiente di un monomio, parte letterale di un monomio, con relativa dose di esercizi di consolidamento. La definizione di monomi simili non è una definizione **di struttura**, non serve a nulla, se non a enunciare la ricetta della somma di monomi simili. La proprietà di struttura è invece la proprietà distributiva: quale può essere il risultato di $2x+3x$ se non $(2+3)x$? (Per l'introduzione al calcolo letterale si confrontino gli attuali libri di testo del biennio con la splendida trattazione di Giovanni Prodi su *Matematica come scoperta*, ed. D'Anna.)
Esempio analogo: "L'uguaglianza $(x^2-1)/(x-1)=x+1$ *è vera, tranne per* $x=1$". Lo studente più curioso si chiederà perplesso il motivo di tale limitazione, dato che in ogni caso $(x+1)(x-1)=x^2-1$. Andrebbe precisato il contesto: stiamo parlando di polinomi o di funzioni? Sarebbe buona norma, nell'approccio al calcolo letterale, inizialmente ignorare l'aspetto funzionale dei polinomi e trattarli in modo sintattico; alla x non vanno sostituiti numeri, il polinomio è definito dal suo grado n e dalla sequenza degli $n+1$ coefficienti. Quali sono, con questi dati in ingresso, gli algoritmi per sommare e moltiplicare due polinomi? Come si determinano quoziente e resto tra due polinomi?

Nella pratica didattica esistono casistiche e intere classificazioni di **errori tipici**. L'errore tipico è l'errore che viene individuato come errore collettivo, che quasi trascende il singolo allievo, che appartiene allo Spirito Assoluto Scolastico. E' l'errore che l'insegnante si aspetta prima ancora di correggere il compito in classe. Per esempio:

$$1+\frac{3}{4}=\frac{4}{4},\quad -2-5=+10,\quad \frac{a+b}{a}=b$$

Un errore tipico è evidenziato addirittura a livello nazionale dal test Prometeo; alla domanda "*Il doppio di 3/4 è?*" il 70% degli alunni che iniziano la scuola superiore risponde 6/8.

Credo che ogniqualvolta un errore in matematica è "*tipizzabile*", cioè lo si riconosce come errore comune, allora in qualche modo è possibile riscontrare un parallelo errore didattico, cioè è possibile "tipizzare" anche la pratica di insegnamento che conduce (in modo quasi inevitabile) a quell'errore.

ESEMPIO. Da un test in seconda liceo scientifico. "*Quali fra le seguenti sono coppie di equazioni equivalenti?*"

A) $2a = 7 \quad 7a = 2$ C) $4x - 3 = 0 \quad 4x^2 - 3x = 0$

B) $3 + x = 5 \quad 3x = 5$ D) $x^2 + 7 = 0 \quad x^2 + 3 = 0$

Nelle intenzioni dell'insegnante la risposta corretta è D; l'alunno ha risposto C. Qual è la **definizione** di *equazioni equivalenti*? Avere lo stesso insieme delle soluzioni? Le complicazioni che sorgono da tale definizione sono enormi. E' fuorviante (e quindi è un errore pedagogico) presentare come equivalenti le equazioni $x^2 + 7 = 0$ e $x^2 + 3 = 0$ (in **C** esse non lo sono); sarebbe opportuno definire equivalenti soltanto le equazioni lineari a coefficienti in un campo, altrimenti, anche lasciando stare i numeri complessi, dovremmo dichiarare equivalenti equazioni come $x - 1 = 0$ e $(x-1)^2 = 0$. Anche in questo caso la definizione di equivalenza che presuppone l'esercizio è ambigua e in definitiva sbagliata; se due equazioni sono equivalenti oppure no al variare dell'insieme su cui si considerano le soluzioni, allora **tutte** le equazioni sono equivalenti (per esempio sull'insieme vuoto), e la risposta dello studente è esatta. Se poi si aggiunge l'ambigua nozione secondo cui un'equazione è risolubile o meno a seconda dell'insieme numerico in cui la si considera, allora per esempio

$$2x = 1 \quad \text{e} \quad 2x + 1 = 2x + 2$$

sono equivalenti in $\mathbf{N}$: il che è francamente deludente.

Ma soprattutto: a che serve la nozione di *equazioni equivalenti*? E una nozione di struttura? Forse serve ad enunciare i cosiddetti *principi di equivalenza*. Stupisce che una nozione così antiquata sopravviva nell'insegnamento; il nocciolo del problema sta semplicemente nella reversibilità delle operazioni di addizione e moltiplicazione (quindi nella struttura di *campo* dei coefficienti). Non è necessario alcun *principio* (a proposito: che cos'è un principio? è un assioma? un teorema? una definizione?). E' necessaria invece un'analisi delle strutture algebriche con cui si opera.

L'apprendimento deve essere, nella fase iniziale, **denso** di significato: l'allievo deve poter rendere vivi gli oggetti della propria intuizione con rappresentazioni mentali efficaci, solide, con esperienze dirette, concrete, vicine alla propria realtà e alla propria fantasia (questa fase di rafforzamento dell'immaginario **semantico** dei nostri alunni è spesso poco rilevante, talora addirittura assente nell'insegnamento).

Una volta che si sia arricchito e consolidato questo terreno di intuizioni e di immagini, allora (solo allora, in modo distinto) può iniziare la fase della formalizzazione, dell'astrazione, della concettualizzazione, della padronanza **sintattica**. Ma questa fase (che spesso risulta di rilevanza eccessiva) non può in alcun modo peccare di ambiguità, confusione, pressapochismo. Come dire: quando ci mettiamo a fare sintassi, allora dobbiamo fare sul serio.

A proposito di equazioni: con DERIVE (per esempio) è possibile risolvere passo-passo un'equazione lineare, utilizzando il comando F4, che copia nella riga di Author l'ultimo output racchiuso tra parentesi:

Author	$5x - 4 = 2x + 3$
Author, F4+4	$(5x - 4 = 2x + 3) + 4$
Simplify	$5x = 2x - 7$
Author, F4-2x	$(5x = 2x - 7) - 2x$
Simplify	$3x = -7$
Author, F4/3	$(3x = -7)/3$
Simplify	$x = -7/3$

Costringere l'alunno a questa risoluzione rigidamente sintattica è utile per l'apprendimento.

Semplificare e strutturare

Occorre semplificare la struttura dei contenuti matematici (e soprattutto quelli densi di errori tipici: per esempio il calcolo letterale, la dimostrazione in geometria, ...) con lo scopo non tanto di evitare gli errori (vige una sorta di principio di conservazione dell'energia: l'errore si trasforma, non si distrugge) quanto di impiegare al meglio le risorse mentali dei nostri alunni e migliorare e arricchire le modalità di apprendimento.

Diceva Giovanni Prodi nel 1985:

In matematica tutti i risultati acquisiti vengono conservati, ma tutto questo enorme materiale rischia di diventare ingombrante se non viene continuamente risistemato in modo organico. [...] Questi processi di chiarificazione, di approfondimento, di ***semplificazione*** *sono una componente essenziale del* *progresso della matematica e costituiscono appunto quella che io chiamerei* ***ricerca didattica*** *in senso lato.*

Ecco un compito di fondamentale importanza per la ricerca didattica nei prossimi anni: **semplificare** la rete di nodi concettuali che sorregge l'edificio matematico, **strutturare** le conoscenze intorno a (pochi) nuclei tematici e operativi, **ridurre** il bagaglio di nozioni agli elementi costitutivi, riflettere sulle **trame** concettuali che legano tra loro gli argomenti, (si legga in proposito il saggio di V. Villani *Le trame concettuali della matematica* su *Le trame concettuali delle discipline scientifiche*, ed. La Nuova Italia), **distinguere** tra ciò che è centrale e ciò che è marginale. In questo modo sarà possibile per l'allievo cogliere (ed apprezzare) analogie e differenze strutturali: questo è, in ogni disciplina, uno dei più ambiziosi obiettivi didattici.

Un esempio per tutti: a detta di molti l'enfasi con la quale viene insegnato il calcolo letterale nei bienni (e anche alla scuola media inferiore, senza che sia previsto da alcun programma ministeriale) è eccessiva, tuttavia non sembra di vedere sostanziali cambiamenti di rotta.

Diceva Vinicio Villani nel 1982:

Il tempo mediamente impiegato nelle nostre scuole secondarie superiori per far acquisire agli allievi una discreta padronanza dell'algebra è senz'altro eccessiva rispetto ai risultati conseguiti. [...] Le capacità e le abilità che il tradizionale insegnamento del calcolo algebrico contribuisce a sviluppare nei nostri studenti sono per lo più di tipo mnemonico-ripetitivo. [...] E' assurdo insistere sulle equazioni biquadratiche o su altri tipi di equazioni di terzo e quarto grado, riconducibili con particolari artifici a equazioni di secondo grado, sorvolando invece sul fatto che si tratta di casi del tutto eccezionali.

Per quanto riguarda il calcolo letterale: tutte le cosiddette "regole" del calcolo algebrico sono da ricondursi essenzialmente alle caratteristiche della struttura algebrica di **campo**, e quindi sono tutte riassumibili in poche, semplici proprietà che riguardano le due operazioni fondamentali di addizione e moltiplicazione. Già dalla scuola media inferiore, con l'approccio a **Z**, è utile definire con chiarezza l'opposto e solo in seguito la sottrazione (addizione con l'opposto) anziché definire la sottrazione come operazione indipendente (idem per la divisione: è la moltiplicazione per l'inverso); per esempio, nel calcolo della derivata di una funzione $f(x)$ c'è una *regola del prodotto* e una *regola del quoziente*, anziché la regola per $1/f(x)$. Ancora: che senso ha, se l'ambiente è il campo dei numeri reali, parlare di formule di addizione e di **sottrazione**?

Sarebbe interessante al biennio sperimentare un percorso di matematica **senza calcolo letterale**, o meglio che lasci il calcolo letterale sullo sfondo, senza dedicare ad esso un lungo intervallo di tempo e un ruolo *propedeutico* ad altro, bensì trattando, nell'arco del biennio, gli argomenti interessanti e utili che via via si presentano, riservando al triennio una sistemazione razionale delle strutture algebriche. Si veda, come interessante esempio di questo percorso, il testo *MACOSA*, prodotto dal Nucleo di Ricerca Didattica di Genova e sperimentato con successo in alcune scuole dell'area genovese.

Per quanto riguarda le equazioni, è tempo ormai di ridurne il volume all'essenziale, e soprattutto di introdurre sistematicamente **metodi di risoluzione approssimata** (già a partire da equazioni e sistemi lineari).

ESEMPIO. *Risolvere l'equazione* $x^5 - x + 1 = 0$. *Risolvere l'equazione* $x^x = 2$. *Risolvere l'equazione* $e^x = x + 1$. Non è facile convincere l'allievo che arriva al triennio (e che ha sempre associato alle equazioni opportuni algoritmi di risoluzione) che tali equazioni non sono trattabili algebricamente: la soluzione non è esprimibile mediante una funzione elementare (cioè ottenibile in termini finiti mediante composizione e inverse di funzioni algebriche, circolari, esponenziali). Allora sarebbe bene comunicare agli allievi che le equazioni risolubili (le cui soluzioni sono esprimibili mediante funzioni elementari) sono *poche*: quali? Ecco un problema di struttura e, al tempo stesso, di cultura storica: il problema di risolvere equazioni con strumenti assegnati è stato un motore formidabile nella storia della matematica.

Il rischio invece, ricorrente nell'insegnamento della matematica, è quello di immergersi in tecniche raffinatissime che finiscono per far perdere di vista la visione più generale di risolubilità. Si pensi ad esempio alle tecniche per la ricerca della primitiva di una funzione: perché non limitarsi alle primitive più semplici e ricorrere sistematicamente alla integrazione numerica? Il problema della ricerca della primitiva di una funzione è ormai un problema in un certo senso *banalizzato*: l'algoritmo di Risch (R. Risch, *The problem of integration in finite terms*, Trans. Amer. Math. Soc., 139, 1969) stabilisce in un numero finito di passi se la primitiva di una funzione elementare è una funzione elementare, nel qual caso la genera (in modo efficiente, dato che l'algoritmo è implementato nei programmi di manipolazione simbolica). Insistere in modo eccessivo sulla ricerca della primitiva, come si fa anche in alcuni corsi di Analisi I, ottiene l'effetto di concentrare l'attenzione dello studente su aspetti tecnicistici, e i risultati ottenuti hanno talvolta scarso valore semantico. Per esempio, la primitiva di

$$f(x)=\frac{1}{x^3+1}$$

è

$$F(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3}\ln(x+1)$$

E' una conoscenza utile? Il suo peso semantico, in relazione per esempio all'esigenza di calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$$

è nullo. Meglio approssimare, per esempio con il metodo dei trapezi. Con DERIVE:

#1: $F(x):=\frac{1}{x^3+1}$

#2: AREA (a, b, n):= $\frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{F(a)+F(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}F\left(a+\frac{k\cdot(b-a)}{n}\right)\right)$

#3: AREA (0, 1, 10)

#4: 0.835022

E' bene fornire da subito anche strumenti di approssimazione per **la pendenza di una curva**, già a partire dalle parabole, confrontando metodi algebrici standard e metodi di approssimazione. La funzione

$$m(x):=\left(f(x+h)-f(x-h)\right)/(2h)$$

(con h abbastanza piccolo, per esempio $h=0.01$) è facilmente implementabile con qualunque programma di manipolazione simbolica (anche con diverse calcolatrici scientifiche) e fornisce già un'ottima approssimazione del coefficiente angolare della retta tangente. Ecco con DERIVE un confronto tra valori esatti e valori approssimati della pendenza di $f(x)=e^x$.

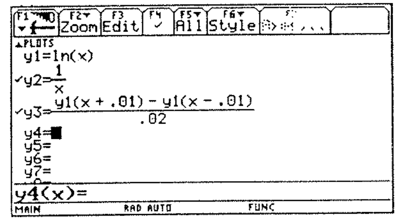
#1: $F(x):=EXP(x)$

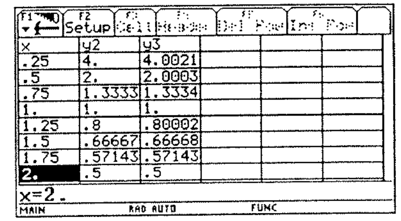
#2: $M(x):=\frac{F(x+0.01)-F(x-0.01)}{0.02}$

#3: VECTOR([k, F(k), M(k)], k, 0, 5)

#4:
$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2.71828 & 2.71830\\ 2 & 7.38905 & 7.38912\\ 3 & 20.0855 & 20.0859\\ 4 & 54.5981 & 54.5986\\ 5 & 148.413 & 148.414\end{bmatrix}$$

Con la TI92 abbiamo già a disposizione un ambiente di tabulazione: vediamo un analogo confronto per $f(x)=\ln(x)$.





I grafici delle funzioni circolari, esponenziali, logaritmiche non sono studiati in modo esauriente se non si analizza anche il loro modo di crescere, e questo si può fare ben prima di iniziare in modo sistematico il calcolo infinitesimale. Inoltre questo metodo permette di introdurre i primi germi del concetto di limite.

Trasparenza e velocità

Un'altra tendenza nell'insegnamento della matematica che spesso genera errori è quella di richiedere all'allievo rapidità di esecuzione dei calcoli. In nome di tale rapidità si saltano importanti passaggi intermedi dell'apprendimento e soprattutto si sacrifica una certa *trasparenza* della matematica. Un esempio tipico è quello della risoluzione delle equazioni di primo grado: può capitare che l'enfatizzazione di automatismi precoci del tipo "portare di qua, portare di là" renda opaco all'allievo il significato delle operazioni effettuate.

ESEMPIO. Il teorema di Ruffini: $p(a)=0$ se e solo se $p(x)=(x-a)q(x)$. Questo importantissimo teorema, che fa da ponte tra l'aspetto *sintattico* (il polinomio come elemento di un anello euclideo, a fattorizzazione unica) e l'aspetto semantico (il polinomio come funzione), viene talvolta svilito e banalizzato in una famigerata *regola* che consentirà sì di fare i conti in fretta, ma non fa cogliere la distinzione tra i due aspetti. Non è raro il caso che gli allievi giungano al triennio conoscendo la regola di Ruffini (tipico esempio di scorciatoia non trasparente) ma ignorando il *teorema di Ruffini* e l'algoritmo euclideo nell'anello dei polinomi.

Questa tendenza è evidente fin dalla scuola elementare, quando si insegna (ancora?), nella moltiplicazione in colonna, a mettere i "trattini" anziché lo 0: così si insegna una regola, e non si rende trasparente il nocciolo della questione, cioè la proprietà distributiva. Un algoritmo alternativo alla moltiplicazione in colonna consiste nel mostrare chiaramente il ruolo della proprietà distributiva; per esempio

$$\begin{aligned}54\cdot 23 &= (50+4)\cdot(20+3)\\ &= (50\cdot 20)+(50\cdot 3)+(4\cdot 20)+(4\cdot 3)\\ &= 1000+150+80+12\\ &= 1242\end{aligned}$$

o ...re, più schematicamente:

x	50	4	54
20	1000	80	1080
3	150	12	162
23	1150	92	1242

Il ruolo positivo dell'informatica

La spinta di questi ultimi anni ad implementare rami della matematica via via più estesi in programmi di calcolo simbolico, quindi la necessità di trasformare in strutture di dati, in comandi e in algoritmi gli oggetti della matematica, ci ha costretto ad una maggior consapevolezza di che cosa debba essere o possa essere un oggetto matematico.

ESEMPIO. Con MAPLE è possibile definire una **funzione** come oggetto; la sintassi è la seguente:

f : = x -> x^3-x+1;

Il simbolo "->" (un "meno" seguito dal simbolo di "maggiore") nella sintassi di MAPLE vuole rappresentare la freccia della notazione

$$x \to f(x)$$

(che tra le tante notazioni utilizzate per le funzioni sembra la più efficace). Ora è possibile calcolare valori di $f(x)$ con la stessa sintassi che utilizziamo solitamente; per esempio

f(-2);

$$-5$$

f(-x);

$$-x^3+x+1$$

f(x-2);

$$(x-2)^3-x+3$$

f(f(x));

$$(x^3-x+1)^3-x^3+x$$

(f(x+h)-f(x))/h;

$$\frac{(x+h)^3-h^3-x^3}{h}$$

simplify(");

$$3x^2+3xh+h^2-1$$

subs(h=0,");

$$3x^2-1$$

L'oggetto *funzione* in MAPLE è del tutto diverso dall'oggetto espressione. Mentre i due comandi

f : = x -> x^3-x+1; e **g : = t -> t^3-t+1;**

definiscono esattamente lo stesso oggetto, cioè la stessa funzione (quindi le lettere x o t sono "mute", non svolgono alcun ruolo di variabile), i due comandi

f : = x^3-x+1; e **g : = t^3-t+1;**

definiscono due oggetti (due espressioni, in questo caso due polinomi) differenti. Questo esempio non è scelto a caso: come già segnalato, spesso la confusione tra espressione e funzione genera errori facilmente evitabili.
Sfruttiamo ancora MAPLE. Abbiamo visto in un esempio precedente come approssimare la pendenza di una curva. Se la funzione è algebrica, per esempio una funzione polinomiale $y = p(x)$, allora è possibile mettere a confronto il metodo di approssimazione con un'applicazione significativa del teorema di Ruffini: l'equazione risultante dal sistema tra la curva e la generica retta passante per il punto della curva di ascissa a

$$\begin{cases} y = p(x) \\ y = m(x-a)+p(a) \end{cases} \quad \to \quad p(x)-m(x-a)-p(a)=0$$

deve ammettere due soluzioni coincidenti in a, cioè il polinomio

$$p(x)-m(x-a)-p(a)$$

deve essere divisibile per $(x-a)^2$, il che significa imporre che il resto della divisione sia nullo. Calcoliamo, a titolo di esempio, la pendenza della funzione $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2$ nel punto di ascissa 1.

p:=x->x^4/4-2*x^3/3-x^2;

$$p := x \to \frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2$$

La funzione "rt" definisce la generica funzione lineare passante per il punto $(a, p(a))$.

rt:=a->m*(x-a)+p(a);

$$rt := a \to m(x-a) + p(a)$$

Per esempio, nel punto di ascissa 1:

rt(1);

$$m(x-1) - \frac{17}{12}$$

Il comando predefinito "rem" (remainder) dà in uscita il resto della divisione tra due polinomi.

rem(p(x)-rt(1),(x-1)^2,x);

$$(-m-3)x + m + 3$$

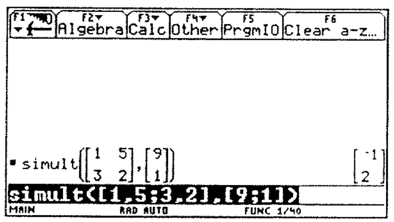
Ecco un caso in cui è essenziale distinguere tra l'aspetto sintattico di un polinomio e l'aspetto funzionale: cosa vuol dire "imporre che il resto sia nullo"? Nel primo caso (è quello che ci interessa) significa annullare tutti i coefficienti, e quindi $m = -3$. Nel secondo caso significa determinare il valore di x tale che $p(x) = 0$, cioè $x = 1$, il che non ha nulla a che fare con il nostro problema.

ESEMPIO. La TI92 risolve i sistemi lineari con il comando "simult"; per esempio il sistema

$$\begin{cases} x + 5y = 9 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

è risolto dal comando

simult([1,5;3,2],[9;1])



Il sistema è ridotto all'essenziale: gli argomenti sono la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti. Potrebbe essere di grande utilità didattica avviare i nostri studenti a tale essenzialità: ora sì che la pignoleria è giustificata, perché è *puramente sintattica*! Si noti, nella matrice e nel vettore, l'uso della virgola (che separa gli elementi di una stessa riga) e del *punto e virgola* (che separa gli elementi di righe diverse).

In generale le nuove tecnologie didattiche offrono all'insegnamento della matematica la possibilità di sperimentare, di rendere più ricco l'immaginario dell'allievo, ma anche (proprio per mezzo di questa precisione sintattica) di avvicinarsi al fondamentale concetto di **algoritmo**: l'allievo

che si costruisce un programmino per la risoluzione dei sistemi lineari ha la sensazione di costruire da sè gli oggetti del proprio apprendimento.

Le notazioni e il linguaggio

Auspico che prima o poi i matematici si decidano a produrre, a livello nazionale, un glossario. E' ormai accertato da numerosi studi pedagogici che una delle difficoltà maggiori nella comunicazione tra insegnante e studente consiste nell'incomprensione dei simboli (o dei termini) utilizzati; per esempio (è un tipico errore) l'insegnante utilizza lo stesso simbolo in contesti semantici differenti, oppure denota lo stesso oggetto a volte con un simbolo, a volte con un altro.

Per esempio perché ricorrere a termini come "luogo", "fascio", "campo di esistenza", ... anziché usare "insieme"? A volte si ha l'impressione che questo sia un vezzo (tipico del matematico): perché parlare di luogo? Forse che all'insieme dei numeri dispari non appartengono **tutti e soli** i numeri dispari?

Hanno ancora valore didattico classificazioni come le seguenti: *frazioni proprie, improprie, apparenti*, equazioni *pure, spurie, complete*, punti di discontinuità di *prima, seconda specie*, ...?

Mi pare che su questi aspetti la nostra riflessione sia in ritardo rispetto alla ricerca didattica, almeno per la scuola secondaria: l'apprendimento è reso difficoltoso senza motivo.

Un esempio significativo: si usa per il segno "meno" uno stesso simbolo in due contesti semantici differenti; in

$$-2-5$$

il primo è un simbolo unario (l'opposto di) e il secondo è un simbolo binario. Nei programmi di manipolazione simbolica si usa sempre lo stesso simbolo in ingresso (non esiste ancora una tastiera dedicata al matematico ...), ma in uscita i simboli sono diversi (inevitabilmente, dato che hanno diverso significato).

Ho provato a proporre agli allievi una notazione algebrica in cui si tenesse conto di tale distinzione, per esempio usando per l'opposto un trattino in alto a sinistra:

$$^{-}2-5.$$

(è la notazione usata dai programmi di calcolo simbolico).

Il miglioramento nelle abilità di base è stato netto: gli alunni hanno presto deciso (con ragione) di omettere le parentesi in espressioni come le seguenti

$$^{-}2 - {^{-}5} \qquad {^{-}2} \cdot {^{-}5}$$

guadagnando in comprensione personale e in chiarezza di esposizione.

Una riflessione sulle notazioni dovrebbe in particolare coinvolgere il calcolo infinitesimale: i simboli leibniziani ci sono molto cari, ma sono francamente un ostacolo oggettivo all'apprendimento.

I contenuti

Forse è l'aspetto più importante. In epoca di grandi dibattiti pedagogici e cognitivi mi pare che il problema di definire i contenuti sia almeno altrettanto importante rispetto all'analisi delle difficoltà di apprendimento.

In un Paese in cui i programmi del Liceo scientifico sono quelli del 1923 sarebbe auspicabile che i contenuti fossero rivisti **ogni anno**: soltanto la discussione critica sul valore e sulla collocazione di ogni argomento rispetto ad ogni altro può consentire di rendere valido e attuale l'insegnamento della matematica.

Un esempio per tutti: la **geometria**. Tra opposti estremismi (la geometria euclidea è morta; la geometria euclidea è insostituibile dal punto di vista formativo) mi pare che ci possa essere una mediazione costruttiva.

Coloro che difendono la geometria a spada tratta devono essere in grado di **motivare** criticamente la loro posizione: perché la geometria è insostituibile? Soltanto accettando il confronto critico potranno uscire rafforzati nelle loro convinzioni e perciò sicuri che non si tratti di un tabù da difendere. I criteri di congruenza e i criteri di similitudine hanno ancora un ruolo centrale nella rete concettuale delle conoscenze di matematica?

Coloro che sostengono la fine della geometria devono chiarire i loro intenti: è ben vero che ad una geometria dei triangoli sempre più si oppone e si rafforza una geometria delle curve, strettamente legata allo studio di funzioni e alle rappresentazioni grafiche (nella geometria tradizionale non è neppure possibile esprimere una affermazione semplice come "tutte le parabole sono simili"). E' ben vero che in fondo l'intera geometria del piano non è altro che uno dei modelli di spazio vettoriale bidimensionale con prodotto scalare, e che il tradizionale insegnamento euclideo continua ad offuscare la distinzione tra proprietà affini e proprietà metriche, tra parallelismo e perpendicolarità, tra geometria dei parallelogrammi e geometria dei triangoli (si rilegga oggi, a distanza di quasi trent'anni, l'illuminante introduzione di Jean Dieudonné al suo *Algebra lineare e geometria elementare*, ed. Feltrinelli); è tuttavia vero che il lento ma inesorabile affermarsi nella pratica didattica delle trasformazioni geometriche e del concetto di invariante modifica in modo sostanziale l'impianto euclideo. Agli oggetti geometrici si sostituiscono le relazioni e le funzioni tra oggetti geometrici: lo spirito del programma di Erlangen si fa faticosamente strada anche nella scuola italiana, e questo è davvero uno dei pochi positivi elementi di novità.

Un'attenzione rinnovata dovrà necessariamente essere rivolta alla **geometria dello spazio**: chi promuove una virata decisa dalla geometria sintetica alla geometria analitica sostiene che nel piano tutto è "schiacciato", le proprietà si accavallano confusamente; lo stesso concetto di parallelismo è frainteso quando si ricorre alla caratterizzazione insiemistica (nello spazio due rette con intersezione vuota non sono necessariamente parallele). La caratterizzazione più generale (e più *densa*) di parallelismo è **vettoriale**: una retta passante per un punto A e avente come direzione quella di un vettore v è il luogo dei punti P (nel piano o nello spazio, non importa) tali che $\underline{AP} = kv$ (equazioni parametriche della retta); allora il parallelismo di due rette è tradotto dall'essere uno multiplo dell'altro dei vettori direzione. Una retta nel piano ha sia equazioni parametriche (è l'insieme dei punti raggiungibili a partire da un punto lungo la direzione di un vettore) sia equazione cartesiana (è l'insieme dei punti raggiungibili a partire da un punto lungo la direzione perpendicolare a quella di un vettore dato). Nello spazio questa confusione dovuta alla sovrapposizione concettuale di parallelismo e perpendicolarità non si presenta: il primo procedimento definisce una retta e il secondo definisce un piano. Nello spazio finalmente emerge il concetto di **dimensione**; un vettore genera una retta, due vettori (non paralleli) generano un piano.

In un contesto algebrico, laddove si intenda per **punto** una terna ordinata (x,y,z) di numeri reali, e per vettore $[x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]$ la relazione di posizione del punto (x_2,y_2,z_2) rispetto al punto (x_1,y_1,z_1), lo studio delle proprietà lineari dello spazio tridimensionale risulta naturale e relativamente semplice; non è necessario un complesso e articolato sistema assiomatico, è sufficiente la struttura **di spazio vettoriale** di $\mathbf{R}^3$. In tale ambiente si realizza una feconda fusione tra sintassi e intuizione, tra oggetti matematici e rappresentazioni mentali. Per esempio: nella ricerca della distanza tra due rette sghembe, l'intuizione guida l'alunno a cercare la retta perpendicolare ad entrambe ed è una piacevole sorpresa scoprire che gli oggetti algebrici assecondano le proprie intuizioni. Quando questo non accade, allora c'è una rappresentazione mentale sbagliata, da correggere, e l'alunno è il primo a rendersene conto. Ecco, in questa sovrapposizione e interazione continua tra oggetti formali (equazioni, coordinate, ...)e intuizione si realizza un apprendimento fecondo della matematica.

Per quanto riguarda l'**algebra**, si è già detto: tradizionalmente si privilegiano accumulazioni di esercizi particolarissimi a discorsi di struttura, con risultati mediocri dal punto di vista culturale, dal punto di vista operativo, e anche dal punto di vista dell'interesse che si riesce a suscitare nell'allievo. L'aritmetica e la teoria dei numeri (algoritmo euclideo, MCD, numeri primi, anelli $\mathbf{Z}_n$ e campi $\mathbf{Z}_p$, teorema di Fermat, numero di Eulero) sono sostanzialmente ignorate, mentre potrebbero risultare decisive proprio per incuriosire gli allievi (si pensi ai numerosissimi e semplici *problemi non risolti dell'aritmetica*) e mettere a fuoco problemi di struttura, di fondamenti e problemi epistemologici che riguardano l'intera matematica.

Un discorso a parte merita il calcolo infinitesimale. In alcuni lavori di ricerca didattica (vedi per esempio "*Alcune difficoltà sulla comprensione del concetto di limite*", di I. Dimarakis e A. Gagatsis, su La matematica e la sua didattica, n. 2, 1997) si dice a chiare lettere che sarebbe opportuno non insegnare agli studenti pre-universitari la definizione $\varepsilon-\delta$ di limite, perché troppo difficile. Un problema centrale è invece la determinazione della retta tangente ad una curva, che viene ignorato in forma generale fino all'ultimo anno del liceo scientifico. Come si è già detto, l'attenzione alle funzioni esponenziali, logaritmiche e circolari è modesta (come sempre si privilegiano equazioni e disequazioni particolarissime) soprattutto per quanto riguarda il consolidarsi del concetto di "pendenza" di una curva e le conseguenti interpretazioni fisiche. Anche qui la caratterizzazione insiemistica di retta tangente ad una curva (retta con un solo punto di intersezione) sembra ostacolare il processo di apprendimento: l'allievo è spesso disorientato dal fatto che una retta tangente possa intersecare la curva in un altro punto. La caratterizzazione algebrica (retta con un punto di intersezione almeno di molteplicità due) è inutilizzabile quando si passa a funzioni trascendenti. Questo è un terreno invece da sfruttare per fare matematica sperimentale (si veda ad esempio il bel libro di Dodson e Gonzales, *Experiments in Mathematics using Maple*, ed. Springer): per approssimare la pendenza di $f(x)$ in x_0 abituiamo i nostri allievi a calcolarsi la pendenza delle rette per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, e a prendere x_1 via via più vicino a x_0. E' un'occasione per fare un po' di calcolo numerico, per fare congetture, per avvicinarsi gradualmente al concetto di limite, per raccontare le critiche e le perplessità che tale metodo ha suscitato fino a Cauchy, per dotarsi di un metodo generale di indagine, che va bene per qualunque funzione.

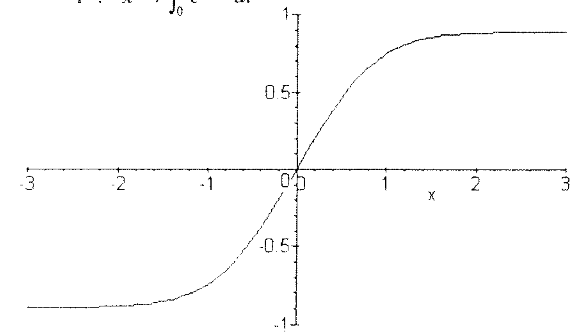
Succede invece (in particolare al liceo scientifico) che si sorvoli sui polinomi di Taylor. Si tratta di un argomento importante che collega la teoria del calcolo infinitesimale ai metodi di approssimazione delle funzioni trascendenti; dà almeno un'idea di come si possano approssimare con addizioni e moltiplicazioni (le operazioni nell'anello dei polinomi) le funzioni trascendenti (quindi come funzionino le calcolatrici scientifiche), permette di approssimare facilmente l'integrale definito di funzioni come $f(x)=e^{-x^2}$, che non ammettono primitiva elementare. Il tradizionale studio di funzione, cavallo di battaglia dell'analisi da tanti decenni, è destinato a diventare, nelle forme tradizionali, un tema obsoleto, perché la moderna tecnologia

permette in pochi secondi di tracciare e soprattutto di esplorare il grafico di una funzione, di tracciare i grafici della derivata prima e seconda, di trovare punti di intersezione con altre curve. Anche la famigerata "funzione integrale" si implementa facilmente; per esempio con MAPLE:

```
F:=x->int(exp(-t^2),t=0..x);
```

$$F := x \to \int_0^x e^{(-t^2)}\,dt$$

```
plot(F(x),x=-3..3);
```



Invece il **calcolo delle probabilità** e la **statistica** (o almeno quel sottoinsieme della statistica che sfrutta modelli matematici) non possono più essere ignorati: si tratta di temi che sono legati da una fitta rete concettuale ad altri argomenti centrali della matematica e consentono in modo ricco e interessante (per l'allievo e per l'insegnante) di vedere la matematica come modello della realtà, di realizzare una interazione feconda tra oggetti matematici e intuizione.

La matematica come avventura

Il ministro della P.I. ha di recente convocato una commissione di studio (la commissione dei 40 saggi) a cui è stato chiesto "che cosa insegnare ai bambini e ai ragazzi delle prossime generazioni". Questa commissione ha prodotto un documento (e un ipertesto, prelevabili al sito web della Biblioteca Didattico Pedagogica di Firenze: linux.bdp.fi.it/mpi.htm) per molti aspetti interessante. A proposito della matematica si dice:

"Un'attenzione particolare e profondamente innovativa sul piano metodologico va riservata all'insegnamento della matematica, che attualmente registra, soprattutto a partire dall'attuale scuola media, il maggior numero di fallimenti a cui si aggiungono un gran numero di esiti al limite dell'accettabilità."

E' un'analisi impietosa, ma dobbiamo riconoscere che è sostanzialmente esatta. In alcune programmazioni didattiche i contenuti proposti, l'attività di insegnamento e gli esercizi svolti sembrano finalizzati esclusivamente alla valutazione, senza più riferimento alla cultura matematica. Non è raro che alla domanda "a che cosa serve questo?" gli alunni rispondano "a far bene il compito in classe".

Non solo l'insegnamento della matematica, ma tutta la scuola italiana è in crisi di identità: il meccanismo **lezione frontale** → **interrogazione** deve essere spezzato. Lo studente dovrebbe essere totalmente coinvolto nell'analisi epistemologica della disciplina, e dovrebbe essere impegnato di più, molto di più in attività autonome di apprendimento e di progettazione. Per esempio le *definizioni*, strumenti fondamentali per l'apprendimento della matematica, potrebbero essere il frutto di approssimazioni successive ottenute attraverso un lavoro critico che coinvolga tutti gli alunni, fino ad ottenere una definizione che trovi concorde la piccola *comunità matematica* della classe. Anche in questo campo le tecnologie didattiche possono fornire un valido strumento d'appoggio. Costruire e implementare algoritmi per la soluzione di problemi dà all'allievo la sensazione di aver **prodotto** qualcosa, punto di partenza per una attività (in piccolo) di *ricerca matematica*. Inoltre l'allievo che sfrutta il calcolatore per *fare* matematica può controllare (e sostenere) il proprio lavoro e può verificare da sé ciò che dice l'insegnante: questo è, nella dinamica studente-insegnante, tranquillizzante e contribuisce ad una immagine della matematica più serena.

Allo studente in futuro si chiederà sempre meno di calcolare, e sempre più di rappresentare modelli, di sfruttare strumenti automatici di calcolo, di risolvere problemi utilizzando dati strutturati.

In fondo si potrebbe pensare ad una scuola in cui le equazioni di secondo grado siano un dettaglio, una tecnica (e in quanto tale si apprende in pochi minuti) e l'attenzione sia spostata agli innumerevoli problemi la cui modellizzazione richiede quella tecnica. La matematica, come e più di altre discipline, ha la possibilità di sfruttare la sua stessa storia e la ricchezza dei problemi che sa sollevare per suscitare motivazioni, interesse, senso di avventura.

Ecco, questa è la scuola che immagino: una scuola in cui l'apprendere sia faticoso ma avventuroso, ricco di sorprese, di scoperte e di errori. Come diceva Federigo Enriques, l'errore è un passo verso la verità.

DIBATTITO SUL TEMA
LIVELLI SCOLASTICI E LIVELLI DI APPRENDIMENTO IN MATEMATICA: UN PROBLEMA DI QUALITÀ E DI QUANTITÀ

Intervento di Franca Masi*

Al termine del quinto anno di scuola elementare il livello di competenza raggiunto da un alunno "medio" (con tutte le cautele d'uso per il termine qui utilizzato), comprende traguardi che una lettura attenta dei programmi 1985 fa ritenere irrinunciabili. A questi gli insegnanti, peraltro, ancor prima dell'entrata in vigore dei vigenti programmi, hanno comunque e sempre dedicato largo spazio.

Nella parte relativa a "obiettivi e contenuti" tali traguardi sono così enunciati:
- i numeri naturali;
- i numeri decimali;
- le abilità di calcolo;
- alcuni contenuti di geometria.

Ed inoltre:
- alcuni elementi di logica, probabilità, statistica, informatica, introdotti ad un primo livello e visti come strumenti a disposizione per una lettura più "sofisticata" della realtà anche in ambiti trasversali rispetto alla matematica.

Un alunno "medio", nella mia sfera di esperienza:
- sa "maneggiare" abbastanza speditamente e con discreta padronanza i numerali, le cifre e le grandezze che questi rappresentano;
- ha una buona abilità di calcolo negli algoritmi delle addizioni, delle sottrazioni, delle moltiplicazioni, si mostra spesso più incerto in quello delle divisioni, non è particolarmente veloce nella esecuzione di calcoli;
- nelle operazioni con i decimali incorre più facilmente in errore;
- può cadere in errore nel sistemare particolari numeri decimali sulla retta o nel confrontarli;
- sa completare semplici equivalenze con unità di misura diverse;
- sa confrontare le frazioni utilizzando la linea dei numeri;
- trova le frazioni che rappresentano parti di figure geometriche, di insiemi di oggetti o di numeri e, con minor sicurezza, data una frazione, sa indi-

* Scuola Elementare, Cattolica (Rn)

viduare in figure geometriche, in insiemi di oggetti o in numeri la parte corrispondente;
- riconosce le principali figure geometriche e ne sa calcolare area e perimetro, ma i risultati sono inferiori alle aspettative quando occorre applicare i concetti appresi in contesti leggermente diversi da quelli usuali;
- è un discreto risolutore di problemi scolastici nei quali gli sia richiesta l'applicazione dei concetti e dei contenuti matematici appresi;
- sa distinguere con correttezza proposizioni vere o false;
- sa utilizzare convenientemente le parole "certo", "possibile", "impossibile";
- sa leggere un grafico statistico e realizzare un diagramma a barre;
- sa leggere e ricavare i dati da una tabella a doppia entrata;
- sa calcolare una media aritmetica;
- nella rappresentazione di proposizioni sa usare in modo corretto i principali connettivi;
- sa usare in modo corretto i principali quantificatori;
- riconosce oggetti di opportune raccolte in base ad attributi stabiliti.

L'alunno medio è comunque un soggetto che evidenzia scarsa flessibilità nelle prestazioni e che spesso resta legato agli schemi e ai contenuti di apprendimento.

I punti fin qui enunciati potrebbero essere caratterizzati da un insegnamento anche solo verbale che ha assolto una semplice funzione di trasmissione.

Finora, infatti, sono state descritte una serie di competenze che indicano per lo più la quantità, competenze di tipo strumentale che si prestano ad essere saggiate con prove oggettive, quasi a controllare lo stoccaggio di nozioni, il possesso di algoritmi e di procedure.

Ma la qualità delle prestazioni? Il grado di acquisizione dei concetti esperiti? Lo sviluppo di "metodi e atteggiamenti"?

Sotto questo punto di vista diventano fondamentali le scelte metodologiche, gli approcci didattici, le modalità organizzative che l'insegnante mette in atto nella classe, dove l'alunno dovrebbe assumere il ruolo di primo attore che impara la matematica "facendo matematica".

Quanto più il "fare matematica" avrà preso il posto del "trasmettere contenuti matematici", tanto più profondo e consapevole sarà il raggiungimento dei traguardi cognitivi sotto elencati:

1. Il nostro alunno "medio", un ragazzo di 10/11 anni che sta terminando la scuola elementare, riesce, ad un primo livello, a generalizzare, a formulare cioè regole o nozioni generali da fatti particolari individuando i casi specifici riferibili al concetto considerato (ad esempio, riconosce e giustifica il valore posizionale delle cifre quando esegue un'addizione in colonna).

2. Sa definire: è in grado di spiegare la natura di una cosa dichiarando o descrivendo gli attributi che la distinguono da altre (per esempio, leggendo una successione di numeri identifica gli attributi propri dei multipli di 2, di 5, ecc.); va tuttavia precisato che nella enunciazione di proprietà ed attributi che definiscono un concetto può incorrere in espressioni assai lontane dall'essere rigorose sul piano delle scelte lessicali: d'altra parte va considerato che, di pari passo alla sua conquista di concetti matematici, procede l'arricchimento del suo vocabolario ed è in fieri la costruzione di un linguaggio che tende, per approssimazioni successive, ad una sempre maggior precisione e pertinenza.
3. Sa discriminare: l'alunno sa stabilire una differenza o operare una selezione distinguendo [in riferimento a persone, o cose, o concetti] tra elementi pertinenti e non, tra elementi essenziali e secondari (per esempio, nell'insieme dei numeri naturali riconosce i multipli di 2).
4. Sa applicare: l'alunno sa usare correttamente un concetto per risolvere un problema (ad esempio, posto di fronte ad una situazione di partizione o contenenza riconosce la necessità di una divisione).
5. Sa astrarre: sa considerare un elemento di una nozione o di una rappresentazione, isolandolo da altri con cui si trova in rapporto (ad esempio, esaminando alcune figure geometriche piane, sa riconoscere quelle aventi proprietà in comune).
6. Posto di fronte a situazioni problematiche nelle quali è richiesto il recupero di concetti appresi, può essere negativamente influenzato dalla novità del contesto in cui il problema si colloca: infatti la sua capacità di trasferire apprendimenti in modo autonomo si rivela spesso debole e in ogni caso bisognosa di sollecitazioni che lo indirizzino e lo inducano alla riflessione per attivare competenze possedute, ma evidentemente non automaticamente disponibili (per esempio, quando affronta il sistema metrico decimale trasferisce al sistema di misura il modello utilizzato nella numerazione a base dieci, scoprendone l'analogia); inoltre non è raro il caso che le operazioni di transfer, partendo da analogie evidenti, lo conducano a conclusioni errate.
7. Per certi aspetti la sua capacità di metacognizione si caratterizza per scarsa efficacia: egli mostra scarso controllo dei processi e delle strategie utilizzate, è invece un buon utente di procedure, ma difficilmente riesce a riflettere sul modo in cui tali procedure sono state da lui attivate, né sembra sempre in grado di porsi domande significative o di autovalutarsi in senso appropriato.

Le conquiste parziali che su questi punti il nostro alunno è andato realizzando sono fortemente influenzate dalla significatività delle esperienze scolastiche compiute, significatività che è tanto più valorizzata quanto più è attivata da concrete esperienze, concrete osservazioni, concrete azioni; in pratica se non è esclusivamente legata a modalità carta e penna.

Entro uno scenario come questo diventa fondamentale per la scuola la possibilità che non tutto ciò che è significativo necessiti di essere esperito a scuola, il recupero delle esperienze culturali che il bambino compie fuori della scuola diventa una risorsa la cui utilizzazione, implicita o esplicita, costituisce lo spartiacque tra un percorso di apprendimento con enormi potenzialità di sviluppo, e un percorso invece routinario, legato agli aspetti quantitativi, alla memorizzazione di procedimenti e nozioni.

Il nostro alunno medio raggiunge obiettivi minimi indispensabili: ciò che varia è il loro radicamento profondo. Ed inoltre abbiamo chiara consapevolezza che il prodotto scuola non è omogeneo; esistono sicuramente differenze di dimensioni significative nei profitti a livello di aree regionali, tra classi di una stessa zona, all'interno di una stessa classe ed anche, quindi, nell'intendere il significato dell'espressione "risultati medi".

Il nostro alunno medio, dicevamo, è andato costruendo abilità, competenze e conoscenze al fine di acquisire un solido substrato culturale sul quale agganciare tutti gli apprendimenti successivi.

Finora abbiamo parlato di quantità e qualità dei livelli di apprendimento, ma la qualità della sua vita scolastica?
Per questo è indispensabile, anche in matematica, che abbia compiuto il suo lavoro con amore e che questo amore gli sia rimasto.

Nel qual caso l'alunno medio:
- ha ancora una certa fiducia nella propria capacità di formulare congetture e verificarle;
- sa essere flessibile, con un pensiero che si riadatta se messo in crisi;
- è in grado di analizzare il proprio comportamento;
- sa apprendere anche dagli errori;
- sa essere tenace;
- conserva la curiosità, la voglia di conoscere;
- sa stupirsi, meravigliarsi;
- sa trovare gratificazione nella "fatica della quotidianità" e vivere il suo percorso scolastico come conquista;
- ha insomma un atteggiamento positivo nei confronti della matematica e della scuola.

Dopo questa serie di considerazioni concluderei con:

Quante cose sa fare il nostro "alunno medio"! Quale enorme percorso ha compiuto!

Il pericolo, a questo punto, è che quello che per comodità comunicativa ho chiamato "alunno medio" possa trasformarsi in un "alunno mediocre"; il rischio è in gran parte racchiuso nel percorso formativo che il ragazzo ha compiuto nella scuola elementare, ma dal quale potrà preservarsi nella misura in cui il suo lavoro pregresso avrà metodologicamente attivato il gusto per l'indagine, la scoperta e il confronto, avrà promosso la capacità metacognitiva e avrà dato spazio alla dimensione creativa e al gusto per la sfida.

In una situazione favorevole come quella appena descritta si pone con forza il problema della continuità metodologica con il livello scolastico contiguo perché il nostro alunno medio durante il suo percorso molto ancora dovrà imparare e potrà farlo al meglio se la sua curiosità non verrà spenta, se continuerà ad avere l'opportunità di essere attivamente coinvolto come artefice delle sue conquiste culturali.

Intervento di Rosa Iaderosa*

L'insegnamento della Matematica nel triennio della scuola media inferiore pone al docente forse più che in altri ordini di scuola il dilemma qualità-quantità.

Infatti, se da un lato esistono, a questo livello scolare, indubbiamente dei contenuti irrinunciabili la cui conoscenza deve essere data all'allievo perché possa affrontare con un minimo di maturità e autonomia l'inserimento nel mondo del lavoro, oppure prepararsi agli studi successivi nella scuola superiore, è anche vero però che diventa sempre più urgente l'esigenza di adeguare la scelta dei contenuti da affrontare alle esigenze dei ragazzi, motivandoli, e di superare difficoltà di apprendimento particolarmente diffuse sia per la fascia d'età in questione, sia per la realtà scolastica profondamente disomogenea rispetto ad aree geografiche, (o perfino a zone cittadine), situazioni familiari, sociali, culturali, in cui si trovano a vivere e a crescere i nostri alunni.

La nostra personale esperienza scolastica passata ci rimanda quasi sempre ad una serie di attività prevalentemente tecniche, cui noi allievi eravamo allenati, o peggio addestrati, attarverso la ripetitività. Eppure, poiché l'esercizio era intenso e notevole nella quantità e nella complessità, in questo modo si forniva al ragazzo un bagaglio di nozioni e di tecniche che, con le sue capacità, egli prima o poi sarebbe riuscito a rielaborare autonomamente, e che costituivano comunque una base sufficiente per affrontare gli studi superiori. La scarsa riflessione su quello che si faceva e sul perché era compensata dal vantaggio di arricchire in quantità le esperienze dei ragazzi, dal livellare le difficoltà, in quanto comunque l'addestramento richiede minori capacità ed energie da esplicarsi sia per il docente che per l'allievo, e dal renderli "pronti" ad affrontare attività più complesse negli anni successivi.

I programmi del '79 hanno portato una ventata di novità e di innovazione a livello metodologico rispetto all'insegnamento della Matematica di tipo tradizionale sopra descritto.

E' stato posto l'accento sul fatto che nella scuola media le varie discipline, i loro contenuti e le loro metodologie sono **strumentali alla formazione dell'allievo**: si tratta di un passo importante che ha spostato certamente l'attenzione dai contenuti culturali agli aspetti metodologici delle varie discipline. La matematica quindi in questa prospettiva "serve" non solo come linguaggio privilegiato a descrivere le scienze, non solo come scienza che modellizza svariate situazioni reali, nell'ambito del certo e dell'incerto,

* Docente Scuola Media Inferiore - Milano

ma "serve" perché insegna a risolvere, o anche semplicemente ad affrontare e dominare con degli strumenti intellettuali e metodologici i problemi, e questo è importante da imparare per tutti, per coloro che saranno i cittadini di domani, sia che vogliano proseguire gli studi, sia che vogliano comunque inserirsi in qualche modo nella società civile e contribuire con il loro lavoro a farla crescere e ad esserne parte.

Si sono allora fatte strada nella scuola media, in seguito a questo cambiamento di prospettiva dei programmi, scelte "alternative", da parte dei docenti e di interi collegi, a volte fin troppo radicali: si è deciso talvolta di lavorare anche solo su pochi temi nel triennio, di fare dei drastici tagli anche sui contenuti tradizionali, pur di tentare l'approfondimento, l'interdisciplinarietà, il coinvolgimento attivo e operativo delle classi anche fuori dell'ambiente scolastico.

E' da segnalare inoltre, a partire dagli anni settanta, la grande evoluzione che c'è stata nella didattica delle varie discipline, e della matematica in particolare, frutto anche di stimoli che provenivano dalla ricerca internazionale.

Questi importanti studi hanno messo in luce la grande valenza di un insegnamento di tipo **metacognitivo**, in cui l'allievo deve essere guidato non solo nell'apprendimento di procedure, ma anche nella riflessione su queste, puntando alla sua consapevolezza dei procedimenti seguiti.

E' chiaro che in un insegnamento che abbia questa prospettiva trovi una collocazione privilegiata l'attività di risolvere problemi, e si ponga come obiettivo importante da far acquisire al ragazzo la capacità di trasferire, riapplicare in situazioni nuove, le esperienze culturali fatte in situazioni guidate da parte dell'insegnante.

Si tratta di una prospettiva affascinante, ma anche ambiziosa: da un lato una didattica che punti soprattutto all'acquisizione sicura e il più ampia possibile di nozioni e di tecniche *può essere più rassicurante*, soprattutto per gli allievi con maggiori difficoltà, ma anche per gli insegnanti che possono verificare più a breve o medio termine i frutti del loro insegnamento, e non richiede di operare tagli considerevoli sulla quantità dei contenuti. I rischi tuttavia ci sono: si rischia che gli allievi finiscano per acquisire automatismi e non riescano ad operare un transfert su quanto sono arrivati ad apprendere.

D'altra parte, puntare a livello di scuola media in maniera esasperata sulla riflessione sui contenuti, su una didattica per problemi sempre nuovi, operando inevitabilmente per vincoli di tempo scelte notevoli sulla quantità dei contenuti da trasmettere e privilegiando la qualità può essere poco produttivo e rassicurante: risulta più difficile la verifica, possibile solo su tempi lunghi, dell'efficacia del nostro insegnamento, che può diventare in certi casi selettivo.

La situazione è simile a mio giudizio a quella che si pone nell'apprendimento della musica: la tecnica è l'aspetto meno gratificante, che meno fa conoscere il valore e il gusto del mondo con cui ci si confronta, e che meno motiva ad imparare: tuttavia è impossibile arrivare a suonare o a cantare ad un livello accettabile senza passare attraverso un itinerario che preveda anche esercizi numerosi e ripetitivi.

E' necessario quindi che il docente sappia mediare tra queste due posizioni senza estremizzarle, che operi una sintesi, non trascurando l'importanza e l'irrinunciabilità di alcuni contenuti, ma nello stesso tempo curando che questi vengano fatti propri dagli allievi attraverso la riflessione personale e prima ancora attraverso la conquista più o meno guidata delle conoscenze.

Non si tratta solo di rinnovare l'insegnamento nei contenuti; anzi è possibile perseguire un insegnamento di tipo metacognitivo anche con contenuti e attività di tipo tradizionale: l'innovazione sarà sulle metodologie e sulla priorità data ad obiettivi trasversali che privilegino la qualità dell'apprendimento. Tutto ciò è realizzabile, e le numerose esperienze e sperimentazioni nell'ambito della ricerca didattica lo dimostrano, valorizzando i contributi e gli errori dei ragazzi attraverso sistematiche discussioni collettive nella classe, lasciando che la conoscenza si costruisca insieme mediante il confronto con le ipotesi, le confutazioni, le argomentazioni, facendo in modo che tutti gli allievi imparino, secondo le loro possibiltà, a *parlare di* quanto fanno e apprendono nelle ore di matematica, che tentino di giustificare le proprietà che intuiscono, e di argomentare sui problemi che hanno affrontato, anche se non sono riusciti da soli a risolverli.

Il seguente problema può essere in qualche modo esemplificativo delle potenzialità che un'attività proposta in classe può offrire se si utilizzano gli strumenti metodologici sopra accennati:

Il numero $2^2 \times 3 \times a^2$, *scomposto in fattori primi, è multiplo di 20?*

E' inevitabile a questo punto affrontare una questione di enorme complessità e importanza quando ci si proponga di analizzare i possibili livelli di apprendimento degli allievi: **la valutazione**.

Nella prospettiva di un insegnamento che voglia essere di tipo metacognitivo è estremamente importante una valutazione di tipo formativo, che segua il percorso di maturazione degli allievi e tenga conto dei livelli di partenza, del contesto socio-culturale in cui si opera, dei problemi di crescita e affettivi che i ragazzi si trovano ad attraversare.

E' indispensabile fare la seguente considerazione: *una stessa prestazione può essere valutata diversamente in momenti diversi del percorso di apprendimento, può essere il massimo che ci si può aspettare da un allievo o il minimo, anche se oggettivamente è la stessa.*

Una situazione didattica che può illustrare adeguatamente le problematiche didattiche sollevate dall'affermazione precedente e chiarire come una stessa prestazione scolastica possa considerarsi in quest'ordine di scuola, per certi allievi solo il punto di inizio di un cammino formativo, e per certi altri un traguardo, dopo aver superato molte difficoltà, è presentata nell'Allegato 1.

Nel passaggio da un ordine di scuola ad un altro, soprattutto nel momento di passaggio attuale dalla scuola di base alla scuola superiore è delicatissima la valutazione a causa del particolare momento di crescita che i ragazzi stanno attraversando. Spesso allievi che alla fine della terza media hanno raggiunto una buona acquisizione dei concetti non sono ancora in grado di controllare completamente la gestione del linguaggio specifico: esprimono idee che hanno chiare in mente con un linguaggio impreciso o confuso. *I tempi di maturazione non sono uguali inoltre per tutti gli allievi*; a volte a distanza di meno di un anno scolastico si verificano notevoli progressi nella capacità di affrontare e risolvere problemi, a volte un allievo impiega anche due o tre anni della scuola media solo per riuscire ad avere un minimo di controllo sulla correttezza delle regole che ha applicato.

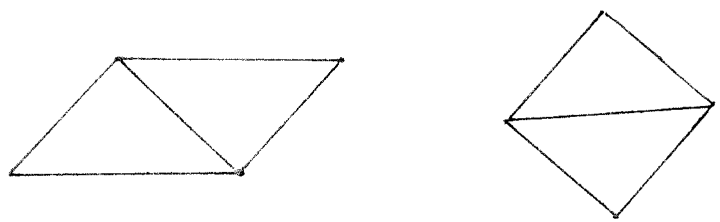
Ancora, meritano almeno un accenno le difficoltà connesse con *l'attività di risolvere problemi*. Diventa indispensabile in questo ambito porre attenzione ai livelli di apprendimento per quanto riguarda soprattutto la cosiddetta "fascia debole". I libri di testo più tradizionali prevedevano itinerari sui problemi aritmetici o geometrici in cui l'allievo aveva la possibilità di acquisire attraverso la *ripetitività*, su problemi molto simili tra loro, degli schemi che gli consentissero di risolverli in maniera più o meno autonoma. Questa scelta, estremamente riduttiva, e anche superata, nell'ambito del problem-solving, richiede comunque una riflessione a livello didattico. E' altrettanto rischioso infatti affrontare attività in maniera più significativa ma solo episodica, per mancanza di tempi adeguati. L'attività di risolvere problemi può divenire selettiva, se condotta in maniera poco attenta alle difficoltà dei ragazzi, che si manifestano maggiormente proprio in questo ambito. Bisogna che il docente cerchi comunque di *non trascurare la quantità a vantaggio della qualità*: la quantità in questo caso potrebbe essere la ricerca della pluralità di situazioni da affrontare senza esagerare nella varietà, in modo da consentire comunque all'allievo di appropriarsi del modello cui essi si rifanno.

A riguardo, si pensi che anche una attività di semplice analisi dello svolgimento di un problema, fatto da altri, può essere qualficante e, se ben graduata secondo le difficoltà, può consentire anche a quegli allievi che non hanno ancora conquistato una buona autonomia nella risoluzione di offrire prestazioni accettabili, anche dal punto di vista della "qualità".

Un altro aspetto che potrebbe rivalutare la qualità, pur rimanendo in un ambito tradizionale per scelte dei contenuti è suggerito dal famoso VII tema dei programmi ministeriali, putroppo spesso trascurato o frainteso. Cogliere analogie tra problemi, attraverso l'analisi delle procedure risolutive e non solo attraverso i testi, confrontare relazioni e proprietà analoghe in vari ambiti, numerici e non, sono attività che il docente può proporre e gestire promuovendo la qualità dell'insegnamento e che richiedono comunque una consistente base di quantità nelle esperienze fatte.

Allegato1

Osserva attentamente le seguenti figure. Stabilisci:
- se hanno lo stesso perimetro; - se hanno la stessa area; - spiega le motivazioni di ciascuna risposta.



Possibili risposte in una classe seconda media, corrispondenti a diversi "livelli" di maturazione e conseguentemente di apprendimento:
- Risposta legata alla misura sul *disegno* (l'allievo misura i vari lati e calcola separatamente perimetro e area delle due figure);
- Risposta legata ad aspetti percettivi fuorvianti (l'allievo percepisce la seconda figura come "più grande" e non si accorge che deve essere equiestesa alla prima, affermando che ha area maggiore);
- Risposta contenente verifica e argomentazione insieme (l'allievo riesce a giustificare argomentando perché le due figure non hanno lo stesso perimetro, ma hanno la stessa area, tuttavia sente ugualmente il bisogno di misurare le dimensioni sul disegno e verificare le sue affermazioni attraverso il calcolo;
- Giustificazione razionale, che prescinde completamente dalla misura.

BIBLIOGRAFIA

- MALARA N.A., 1993, Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol.16, n.10, 928-954
- IADEROSA R., 1994, L'avvio alla dimostrazione nella scuola dell'obbligo, Tesi di perfezionamento in Didattica della Matematica (rel. prof. C.Marchini), Università Cattolica di Brescia, A.A.1993-1994
- IADEROSA R., 1996, L'avvio all'argomentazione e alla dimostrazione nella scuola media, in GRUGNETTI L. et al. (a cura di) *Argomentare e dimostrare nella scuola media,* atti XV convegno nazionale dei Nuclei di Ricerca Didattica sez.scuola media, Salice Terme (PV), aprile 1996
- MALARA N.A., L'insegnamento della Geometria nella Scuola media- Questioni teoriche e didattico-metodologiche, in *Quaderno 19/1 MPI, atti del seminario di formazione per docenti di Viareggio, 1995.1996,* 13-76
- GHERPELLI L., 1996, Intervento al Dibattito sul tema "Programmi scolastici a confronto", *atti del XVIII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della Matematica,* 71-77
- IADEROSA R., Problemi aritmetici: la scelta del contesto, l'analisi del testo, *Scuola e Didattica,* ed La Scuola, Brescia, n.5, novembre 96
- IADEROSA R., Problemi aritmetici e logici: strategie risolutive - analisi dei processi di risoluzione, *Scuola e Didattica,* ed. La Scuola, Brescia, n.14, aprile 1996
- IADEROSA R. Il problema geometrico, *Scuola e Didattica*, ed. La Scuola, Brescia, in via di pubblicazione, dicembre 1997
- IADEROSA R., La teoria della divisibilità nella scuola media, in BASSO M. e ALTRI (a cura di) *Numeri e Proprieta'*, CSU Parma, Parma 1994 e su *Scuola e Didattica*, ed. La Scuola , Brescia, gennaio 1995.

Intervento di Giovanni Olivieri*

Premessa

Alla fine della scuola secondaria superiore tutti gli studenti sono posti di fronte a una serie di scelte piuttosto impegnative: trovarsi un lavoro o proseguire gli studi all'università? E in questo secondo caso, a che tipo di corso di laurea iscriversi? Le scelte possibili sono tante e di diversa natura.

La scuola secondaria superiore deve quindi tenere presenti entrambe le finalità: fornire le basi sia per la prosecuzione degli studi che per l'inserimento nel mondo del lavoro.

In questo quadro di formazione più ampia si inserisce il problema dell'insegnamento della matematica, delle difficoltà che si incontrano nel far sviluppare le abilità logico matematiche, degli obiettivi che la formazione matematica deve raggiungere *a livello generale* e *a livello particolare*.

Parte degli studenti non proseguirà gli studi o non li proseguirà in corsi di laurea a contenuto tecnico o scientifico, mentre altri si iscriveranno a Matematica, a Ingegneria, a Fisica, a Statistica, o ad altri corsi di laurea in cui la matematica è più o meno fortemente presente. La riflessione sui problemi dell'insegnamento della matematica a livello di scuola secondaria superiore deve avere presenti entrambe le categorie di studenti e il fatto che per parte non trascurabile di essi non vi saranno in generale ulteriori occasioni formative in ambito matematico o generale.

Non va inoltre dimenticato la grande frammentarietà di indirizzi nella quale si trova oggi la scuola secondaria superiore; tra scuole di ordinamento e scuole sperimentali si arriva a quasi un centinaio di percorsi diversi, per i quali la trasversalità della matematica, nei fatti, è ancora lontana da venire.

Un problema di quantità?

Se guardiamo a quello che sta succedendo nella scuola da un po' di anni a questa parte, paradossalmente non sembra esserci un vero problema di "quantità": è significativo il numero di studenti che "diligentemente" studia la matematica; la quantità di programma che generalmente viene svolto dagli insegnanti è tutto sommato adeguata e "congrua" rispetto ai programmi delle scuole di ordinamento, cioè delle scuole cosiddette "tradizionali".

Nelle scuole sperimentali è invece in generale assicurato lo svolgimento di nuclei concettuali storicamente consolidati, tra i quali l'algebra, la geometria analitica, l'analisi matematica. A questi temi "classici" sembrano ormai definitivamente aggiunti alcuni contenuti legati all'algebra lineare e, in parte, alle trasformazioni geometriche (trascurate però negli istituti tecnici).

Uno studente "medio" è in generale in grado di applicare una regola o una procedura che conosce per svolgere un esercizio o per risolvere problemi per i quali è "evidente" la necessità di utilizzare quella particolare regola, cioè quando la natura e le caratteristiche dei problemi affrontati non si discostano più di tanto da quelli analizzati e risolti in classe.

Da un punto di vista quantitativo, duole constatare che rimangono ancora generalmente ignorati i temi emergenti dei "nuovi" programmi che vengono via via prodotti per i vari tipi di sperimentazione: statistica e probabilità, ma anche "logica". Sorvoliamo sulla questione dell'informatica, ancora presente nei programmi di matematica, poiché oggi sta diventando sempre di più un supporto strumentale, svincolata dai problemi legati all'uso di particolari linguaggi.

A livello di questioni contingenti, connesse anche ad una lettura consapevole di fatti legati alla vita quotidiana, personalmente ritengo inverosimile che uno studente alle soglie del 2000 esca dalla scuola secondaria superiore senza sapere adeguatamente interpretare un *numero indice* e senza essere generalmente in grado di andare oltre il calcolo di una *media aritmetica semplice*. L'uso dinamico di una *percentuale*, ad esempio nei calcoli cosiddetti inversi, mette inoltre non pochi studenti (forse anche adulti) in non lieve difficoltà.

Gli argomenti di logica, esplicitamente introdotti nei diversi "nuovi" programmi (sperimentali), rappresentano a mio avviso un ulteriore esempio del fatto che l'apprendimento della matematica, ridotto soprattutto allo sviluppo di procedure di tipo algoritmico, non mette gli studenti di fronte a particolari difficoltà. Nonostante le indicazioni metodologiche, con le quali si evidenzia il carattere fortemente trasversale della logica, a scuola viene invece affrontato soprattutto il problema della costruzione delle tavole di verità (cfr. anche libri di testo per il biennio) e neanche in modo generalizzato (parecchi insegnanti non affrontano affatto questo tipo di problematiche). In questo modo si hanno studenti in grado di attribuire valori di verità a espressioni anche complesse, ma che non sono mediamente in grado, ad esempio, di cogliere i punti deboli di un'argomentazione, di analizzare la coerenza dei risultati con le premesse e in relazione al contesto, di cogliere connessioni o conseguenze implicite o esplicite tra fatti e fenomeni.

Un problema di qualità?

Parecchi studenti, direi la maggior parte, incontrano spesso difficoltà quando si deve "interpretare" una situazione o quando si deve sviluppare

* docente di Scuola Media Superiore - Roma

una strategia che ottimizzi il processo di soluzione, cioè quando si deve sviluppare un processo di "qualità".

L'assenza generale di un apprendimento di qualità della matematica si evidenzia dai risultati relativi a particolari domande di vari test di indagine, dall'esperienza quotidiana di tutti noi docenti, dalle riflessioni che si pubblicano a vari livelli.

Tutto questo forse nasce dal continuo aumento del gap conoscitivo tra acquisizione di conoscenze e applicazione dinamica delle conoscenze. La riflessione non è in generale spontanea, anche se occorre rilevare il fatto che, messi con le spalle al muro, gli studenti in genere "se la cavano".

Seguono brevi citazioni di questioni di matematica "applicata" soltanto per dare il senso del fatto che anche in piccoli fatti interpretativi di quotidiana realtà, legati a semplici contesti di contenuto, si evidenzia il problema fondamentale della **qualità** nell'insegnamento della matematica.

Penso sia nota a tutti la difficoltà generale degli studenti a utilizzare la *legge di annullamento del prodotto* come metodo di risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo, ma anche come metodo alternativo per particolari equazioni di secondo grado. Se questo tipo di equazioni vengono infatti presentate già scomposte nel prodotto di due fattori, allora non è infrequente il caso in cui lo studente riconduce il problema alla forma conosciuta, più o meno canonica, in modo da poter utilizzare la "rassicurante" formula risolutiva.

Credo sia parimenti nota a tutti la difficoltà che gli studenti hanno in generale nel prevedere a priori l'eventualità di dover dividere per 0, in una situazione per la quale non esiste una procedura più o meno codificata, quale è invece, ad esempio, quella relativa allo studio di una funzione (determinazione dell'insieme di definizione). Se questa possibilità è invece appena un po' nascosta, allora non viene generalmente presa in esplicita considerazione. Sto facendo riferimento, ad esempio, al tipico caso dello sviluppo di modelli o procedure da utilizzare al calcolatore (Derive, Excel, Pascal o altro), ma anche al caso delle "semplificazioni per x" in un'equazione.

Attenzione però, se "costretti" a riflettere sul problema, allora quasi tutti sanno che "non si può dividere per 0"! Personalmente ogni volta che capita l'occasione faccio una sorta di "drammatizzazione" e chiedo: supponiamo che in questo momento entri un rompiscatole, che vuole a tutti i costi "fregarvi", ... Quasi immediatamente esce fuori il problema della divisione per 0!

Un ulteriore esempio sulla legge di annullamento del prodotto e sulla divisione per 0.

Da 6 anni proponiamo agli studenti in ingresso ai Corsi di Laurea in Matematica e in Ingegneria Informatica, all'università La Sapienza di Roma, un test nel quale è inserita la seguente domanda:
Nel piano cartesiano, l'insieme dei punti verificanti la condizione $(x-5)(y+3)=0$ *è* ...

La risposta più gettonata è "l'insieme dei punti della curva $y=\frac{15-3x}{x-5}$", pensando all'esplicitazione della variabile y (procedura algebrica conosciuta e rassicurante) trascurando "ovviamente" il fatto che deve invece essere $x \neq 5$. Non più del 30% risponde esattamente ("l'unione della retta $x=5$ e della retta $y=-3$"), utilizzando così in modo corretto la legge di annullamento.

Le implicazioni parassite

Nell'uso del linguaggio matematico sembra stabilirsi una sorta di codice implicito tra studenti e docenti, spesso mediato dai libri di testo e dalle rappresentazioni in essi presenti. Lo sviluppo delle lezioni proseguono spesso senza contraddittorio e gli stessi libri di testo generalmente non presentano controesempi o esempi di casi limite.

Le situazioni vengono lette per prassi consolidata e, ad esempio, quando uno studente "legge" *variazione maggiore* automaticamente "pensa" a *maggior aumento* oppure quando "legge" *10 persone parlano Inglese* in realtà "pensa" a *10 persone parlano* solo *Inglese*.

I seguenti sono esempi di situazioni più complesse di cui può essere colto il "punto debole" soltanto se i concetti a cui si riferiscono sono pienamente acquisiti nelle loro sostanza e nella loro forma.

1. Si chiama *simmetria* di asse a la trasformazione geometrica tale che:
   - ad ogni punto P di a corrisponde se stesso;
   - ad ogni punto P non appartenente ad a corrisponde un punto P' tale che:
     - appartiene alla retta condotta per P perpendicolare all'asse;
     - ha distanza da a uguale alla distanza di P da a.
2. Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione algebrica letterale per uno stesso polinomio intero si ottiene una frazione equivalente alla data.
3. Se i coefficienti angolari di due rette sono uguali, allora le rette associate sono parallele e il sistema non ha soluzione.

Nel primo caso gli studenti sono abituati a costruzioni e rappresentazioni in cui il punto P', di fatto, è sempre nel semipiano opposto a quello del punto P rispetto alla retta a; pochi, se non pochissimi di loro sarebbero quindi in grado di cogliere l'omissione, cioè la necessità di precisare che P' deve essere nel semipiano opposto a quello di P.

L'abitudine a un certo tipo di rappresentazione funziona in questo caso da *implicazione parassita*, cioè viene implicitamente dato per scontato un modo di pensare e di vedere le cose in base al quale non esistono alternative. Tipico esempio, ormai piuttosto vecchio, anche se purtroppo quotidianamente di drammatica attualità, è quello dell'altezza delle figure geometriche, che *deve* sempre essere interna oppure l'aggiunta implicita della parola *solo* in frasi quali "35 studenti studiano inglese".

Il secondo caso pone ancora una volta il problema della divisione per 0, mentre il terzo caso fa riferimento il problema delle rette coincidenti, poco trattato nella prassi didattica.

Un possibile atteggiamento didattico

Nei primi anni della scuola secondaria superiore, ma sempre più spesso anche a ridosso degli ultimi anni, le implicazioni parassite condizionano in modo evidente il percorso formativo dello studente e risulta sempre più difficile sradicarle, anche se non impossibile.

Occorre però dire che "se gli studenti sono sul chi vive", allora in generale dimostrano di possedere una preparazione qualitativamente accettabile. Il guaio però è che quasi mai, nell'apprendimento della matematica, sono in fase di posizione critica e restano invece adagiati su una tranquilla posizione di rendita legata soprattutto all'applicazione di regole e procedure codificate. D'altronde occorre riconoscere che, dal loro punto di vista, cioè per la loro carriera di studenti, questo atteggiamento è nella maggior parte dei casi sufficiente per raggiungere i loro obiettivi (promozione, diploma o laurea).

Una delle conquiste fondamentali che l'insegnamento della matematica dovrebbe raggiungere alla fine della scuola secondaria superiore è proprio quella di aver sviluppato negli studenti la **capacità di elaborare concetti** e non soltanto procedure. Uno dei noccioli fondamentali della questione sta proprio qui: aiutare gli studenti a svincolarsi dalla rappresentazione contingente, sia essa grafica o algebrica o di linguistica o ancora di qualunque altra natura, e sviluppare in loro la capacità di "vedere" le situazioni e di ragionare in modo "naturalmente" critico.

Credo che come insegnanti dovremmo avere un atteggiamento che punti continuamente alla riflessione, costruendo e proponendo sempre più spesso attività e problemi non di routine nei quali non è soltanto necessario costruire o dare la risposta corretta, ma anche fornire le motivazioni che hanno portato a una determinata scelta. Ad esempio, di fronte a un'ipotesi o a una congettura o a una semplice relazione tra enti, chiedere *se è o può

essere vera e perché*. Ma non basta, occorre essere ancora più incisivi e proseguire con i suggerimenti all'analisi e chiedere: *se non è vera perché* (dove sta l'errore o l'incompletezza di informazione) e *come dovrebbe o potrebbe essere* (correzione dell'errore o individuazione di dati mancanti; formulazione di ipotesi da sottoporre a verifica) oppure chiedere le ragioni del *perché il tutto non sta proprio in piedi* (individuazione di incoerenze strutturali tra i dati e i parametri della situazione).

Lo studente dovrebbe inoltre essere sempre più spesso sollecitato ad analizzare casi limite, a individuare errori e contraddizioni, a sviluppare esempi e controesempi, ad essere insomma sempre più spesso in atteggiamento di analisi critica.

Riferimenti bibliografici

1. G. Alleva, E. Lombardo - *Le conoscenze matematiche elementari tra le matricole nella facoltà di economia di Roma "La Sapienza"* - Induzioni 9, 1994 (pagg. 99 - 105)
2. F. Arzarello - *L'apprendistato al senso dei simboli in algebra* - L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 17a 17b, n.5, 1994 (pagg. 534 - 553)
3. W. Bencivelli, V. Villani - *Su un test per l'ammissione ad un corso di laurea* - La matematica e la sua didattica n. 2, 1994 (pagg. 157 - 167)
4. A. Branda, P. Suria, G. Travaglini - *Un'indagine sulle capacità matematiche degli studenti dei licei scientifici* - L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 18b, n. 4, 1995 (pagg. 312 - 326)
5. F. Furinghetti - *Che cosa resta e cosa dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica* - Quaderni del dipartimento di Matematica di Lecce, A.A. 1989/90, (pagg. 86 - 118)
6. G. Lucchini - *La matematica in prove di selezione per l'ammissione ai corsi di laurea: un'occasione per riflettere* - La matematica e la sua didattica, n. 2, 1992 (pagg. 18 - 22)
7. M. A. Mariotti - *Lo zero è un problema?* - L'educazione matematica, n. 2, 1990 (pagg. 263 - 277)
8. G. Prodi - *Insegnamento secondario e insegnamento universitario della matematica* - Archimede, n. 4, 1989, (pagg. 163 - 174)
9. G.Accascina, S. Bornoroni, M. De Vita, G. Della Rocca, G. Olivieri, G.P. Parodi, F. Rohr - *Le conoscenze in matematica delle matricole. le aspettative dei docenti* - Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica (Pisa 12-14 ottobre 1995)
10. G.Accascina, S. Bornoroni, M. De Vita, G. Della Rocca, G. Olivieri, G.P. Parodi, F. Rohr - *Il "saper fare" in matematica delle matricole. le aspettative*

dei docenti e la realtà - Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica (Pisa 12-14 ottobre 1995)

11.G.Accascina, G. Olivieri, F. Rohr - *Le conoscenze degli studenti. un test d'ingresso ai corsi di laurea in matematica e ingegneria informatica* - Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica (Pisa 12-14 ottobre 1995)

12.G.Accascina, G. Olivieri, F. Rohr - *Le difficoltà del primo anno. Un'indagine tra gli studenti del primo anno del corso di laurea in ingegneria informatica* - Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica (Pisa 12-14 ottobre 1995)

Intervento di Brunetto Piochi*

Volendo parlare di insegnamento della Matematica in ambito universitario, occorre distinguere fra diversi livelli di proposta, ognuno con proprie caratteristiche, con diverse scale di valutazione di qualità e quantità nonché di "successi" e "insuccessi" nell'apprendimento, con differenti problematiche da risolvere. Chi scrive, dopo aver consultato gli Atti dei numerosi Convegni promossi dall'U.M.I. su questo tema (Atti regolarmente riportati sul Notiziario), ha voluto coinvolgere in una riflessione su questi temi altri colleghi impegnati in modi differenti nella didattica, con un ventaglio ampio di Corsi di Laurea e di sedi rappresentati; non poche sono state le osservazioni pervenute ed esse mostrano una significativa concordanza sui nodi che saranno di seguito evidenziati. Questo fatto da un lato assicura che le idee esposte non sono il parto di una singola mente, dall'altro indica forse che ci si avvia verso una esperienza di insegnamento più condivisa rispetto a tempi anche recenti.

Essenzialmente vorrei far riferimento a tre tipi di proposta di apprendimento della Matematica per studenti universitari, che qui riassumo con una (per forza approssimativa) caratterizzazione:

- corsi di matematica per i futuri Matematici (includendo fra questi non solo i ricercatori, ma anche gli insegnanti), dove si ha la necessità di presentare contenuti tecnici di alto livello all'interno di una offerta culturale ampia e approfondita;
- corsi di matematica "di servizio" (Biologia, Economia, Farmacia, ecc.), dove i contenuti tecnici specifici da offrire possono essere relativamente ristretti, ma è molto importante trasmettere un metodo di lavoro ed una "mentalità";
- corsi di matematica per quelle che si potrebbero definire "hard sciences" (Fisica, Ingegneria), dove i rilevanti contenuti tecnici vanno presentati insieme alla proposta di un metodo di studio e di impostazione dei problemi.

Matematica per i futuri matematici

Indubbiamente il futuro matematico deve saper unire ad una visione culturale della materia una solida preparazione tecnica. Si corre tuttavia un pericolo, quello di restringere troppo precocemente l'insegnamento culturale e critico, a favore di contenuti "professionalizzanti" per la ricerca o l'impiego nel mercato del lavoro informatico. Troppo spesso nel primo biennio del Corso di Laurea in Matematica si inizia a preparare soprattutto

---

* Università di Siena

dei matematici alla ricerca e non ai loro molteplici altri compiti: si hanno così studenti che sanno tutto o molto di alcuni argomenti specialistici, e poco o niente di altri, magari forse più centrali per l'insegnamento della materia nei vari livelli scolastici. A questo si accompagna uno stile di esposizione spesso troppo astratto, con una carenza di modelli ed esemplificazioni, dove la teoria appare totalmente decontestualizzata e generalmente priva di riferimenti storici ed epistemologici, che invece sarebbero di importanza cruciale non solo per i futuri insegnanti, ma anche per uno sviluppo culturale generale del matematico. Ogni studente dovrebbe essere stimolato ad usare la propria testa, non studiare solo la definizione, ma chiedersi *perché quella definizione*, non studiare solo la dimostrazione di un teorema, ma cercare anche di collocarla in un quadro di riferimento storico-epistemologico ...

Lo studente raramente sa crearsi esempi adeguati e così non riconosce il caso particolare della struttura generale, spesso a dispetto del fatto che separatamente abbia familiarità (almeno apparente) con entrambe. Sgomenta talvolta, anche fra studenti di matematica del secondo biennio, l'incapacità di scegliere il giusto contesto per risolvere un problema (geometria analitica o sintetica, disegno o calcolo,...). Sarebbe forse opportuno affiancare alla teoria dei diversi corsi una attività di formalizzazione di vari problemi con tecniche avanzate, invece di un eccesso di dimostrazioni che rischiano di formare più "dimostratori di teoremi" che matematici, fatto questo che rivela poi tutta la sua pericolosità nel momento in cui l'ex-studente mette piede in una classe come insegnante.... Almeno per la matematica, il "sapere da insegnare" è sempre più lontano dal "sapere sapiente" che si pretende di insegnare all'università, con gravi conseguenze per le nuove generazioni, come sottolineato ad es. da Bernardi in (Bernardi, 1995) o da Prodi nella conferenza di apertura all'ultimo Congresso UMI.

Resta aperto anche il problema di come sfruttare le nuove possibilità di "tecniche di calcolo" offerte dagli elaboratori. Siamo in presenza di una rivoluzione molto maggiore di quella che ha fatto cadere in disuso lo studio dei logaritmi nella scuola secondaria; come raccordare, ad es., lo studio della teoria dell'Analisi con le potenzialità grafiche di un MatLab, o MathCad, per non parlare di Mathematica ? Eppure, questa potrebbe essere una strada promettente per promuovere un approfondimento nella direzione sopra accennata, quella della riflessione sul contesto dei problemi e sulla loro modellizzazione.

Matematica "di servizio"

Solitamente, nei corsi di servizio (Biologia, Economia, Farmacia, ecc.) si trova sottolineato il ruolo strumentale della matematica; sembra quasi che al matematico si chieda di insegnare allo studente quali tasti pigiare su un

computer per ottenere mirabilmente le soluzioni cercate ! A questo si accompagna spesso una ignoranza matematica dei colleghi, formati su altre materie magari in tempi in cui la matematica era considerata un "sovrappiù" (sia detto senza nulla togliere ai tanti colleghi di altre discipline che usano tecniche matematiche specifiche talvolta con una abilità da far invidia a noi matematici!).

Tuttavia il ruolo strumentale della materia nei corsi di servizio va ribaltato nel compito di esporre un metodo razionale (non esclusivamente quantitativo) di approccio ai problemi specifici della disciplina "principale". La matematica ha un valore centrale nell'apprendimento del metodo scientifico. Eppure, ancora sembra prevalere in questi corsi una certa tendenza ad insistere su aspetti tecnici piuttosto che sul metodo (tipologia e carattere del ragionamento matematico), mentre è chiaro che, data anche la preparazione matematica media degli studenti che scelgono questi corsi, il gusto per ragionamenti raffinati assai difficilmente può venire recepito.

Per i corsi di servizio occorrerebbe collegare la matematica con le altre discipline del corso, rinunciando magari all'esposizione di tutta una teoria, per privilegiare la comprensione dei concetti fondamentali e utili: una "matematica di servizio", insomma. Ritengo che i primissimi obbiettivi di tali corsi dovrebbero essere quelli di convincere gli studenti dell'utilità dello strumento matematico, e della sua accessibilità. Vale forse la pena di togliere qualche teorema sulle funzioni continue, o qualche osservazione sull'indebolimento delle ipotesi (a meno che non sia questa la strada per tentare approcci "metacognitivi", ma forse il discorso ci porterebbe lontano...; per un'idea su quel che si potrebbe fare si può leggere [Zan, 1996]), per far posto a un po' di statistica elementare e di matematica discreta, oppure di probabilità, che presenta fra l'altro begli esempi di risultati controintuitivi applicati ad esempio a questioni bio-mediche.

Matematica per "hard sciences"

Qui il problema presenta due facce, assolutamente complementari, dato che è importante trasmettere non solo un metodo di studio e di impostazione dei problemi, ma anche rilevanti contenuti tecnici. Naturalmente occorre offrire allo studente di Fisica o di Ingegneria un corso formativo, che prepari all'applicazione rigorosa del metodo matematico; questo però non può significare (e purtroppo troppo spesso ancora è così) proporre un corso con gli stessi difetti che segnalavo sopra a proposito di quelli per matematici, motivandolo appunto con tale necessità.

D'altro lato è indispensabile fornire allo studente le tecniche matematiche avanzate che gli sarano utili per gli altri corsi e un domani per la professione. Tuttavia non di rado si assiste alla introduzione precoce di argomenti avanzati, senza preoccuparsi delle basi teoriche; in alcuni casi vengono eccessivamente privilegiati approcci di simulazione informatica (penso ad es. alla geometria ed alla meccanica razionale in corsi di ingegneria di talune sedi).

Ora, in entrambi i casi ci sono indubbiamente motivi reali per agire secondo una certa direzione, ma... quanto gioca la pigrizia di noi docenti ? Quanto invece non sarebbe il caso di studiare un approccio equilibrato fra le due esigenze che notavo sopra ?

A proposito di prerequisiti

Come si vede, non pochi sono i problemi che ci si presentano sul versante dell'offerta didattica. Conviene però anche accennare, almeno velocemente, a un altro aspetto, quello che riguarda il "versante" dei prerequisiti posseduti dagli studenti. E' un luogo comune quello di osservare come di anno in anno "la preparazione media degli studenti peggiori" e se da un lato gioca in questo una certa abitudine a rimpiangere tempi andati sempre presunti migliori degli attuali, dall'altro però si notano nelle diverse situazioni alcune difficoltà comuni che inevitabilmente rimandano a prerequisiti, non tutti di carattere matematico e non tutti putroppo "recuperabili" nella durata di un corso. Molte sono le ricerche che studiano questo tipo di problemi e le aspettative degli insegnanti (di Scuola secondaria oppure dell'Università) al riguardo; oltre a quelle citate in (Fiori Pellegrino, 1996), pag. 181, fra quelle di più recente pubblicazione citiamo (Accascina et al. 1995) e (Boito Fiori, 1997).

Dal sondaggio informale da me condotto risulta che le carenze maggiori lamentate nell'ambito dei corsi di Matematica sono le seguenti:

- scarsa confidenza con la lingua italiana (ad esempio non è chiara la distinzione fra termini quali sufficiente/necessario, probabile/possibile, ecc.), mancanza di abitudine ad utilizzare la lettura come strumento di conoscenza
- ignoranza del metalinguaggio che permette di passare dall'italiano alla scrittura "matematica" mediante formule e viceversa
- insufficiente "manualità matematica" (trigonometria di base, disequazioni, ordini di grandezza), che assai difficilmente si riesce a recuperare; anche se non sempre tutto è attribuibile alla storia scolastica dello studente, indubbiamente un forte peso ce l'hanno in questo certe "abitudini" definitorie astratte non correlate a sufficiente esercizio pratico, abitudini purtroppo presenti ad ogni livello scolastico.

Come si nota, tali carenze vanno a toccare nodi ancora più di fondo rispetto ai contenuti dell'insegnamento (si veda [Prodi, 1980] per considerazioni su quali debbano essere tali contenuti); esse in gran parte coincidono

con quelle evidenziate nelle ricerche sopra citate, salvo la sottolineatura forte e sempre più evidente sull'importanza del "linguaggio" nell'apprendimento ad ogni livello. Esse, seppur difficilmente recuperabili nella durata del corso di matematica, dovrebbero comunque rappresentare un forte stimolo per noi docenti al fine di orientare l'insegnamento in modo da tenerne conto, sia per guidare gli studenti a superare le maggiori difficoltà derivanti da tali lacune, sia per fornire loro indicazioni che li possano mettere poi in grado di compiere autonomamente un percorso di approfondimento, compito sempre più ineludibile nel nostro sistema formativo.

Riferimenti bibliografici

- Accascina G. et al., 1995, Problemi di raccordo in Matematica tra Scuola Secondaria Superiore e Università, Rapporti interni del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici, Università "La Sapienza", Roma
- Bernardi C., 1995, *I matematici e l'indirizzo didattico*, L'Educazione Matematica, n. 1, pp. 33-49
- Boiti A., Fiori C., 1997, *Sulla preparazione matematica all'inizio dell'Università:test, indagini, riflessioni*, L'Insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate, vol. 20/B (2), pp. 119-144
- Fiori C., Pellegrino C., 1996, *The conceptual and the popular images of Mathematics*, in Malara N.A., Menghini M., Reggiani M. (eds), Italian Research in Mathematics Education 1988-1995, C.N.R., Roma 1996, pp. 176-191
- Prodi G., 1980, *Proposta della CIIM di un Syllabus per la Scuola Media Superiore*, L'Insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate, vol. 3 (2), pp. 11-22
- Zan R., 1996, *Un intervento metacognitivo di recupero a livello universitario*, La matematica e la sua didattica, n. 1, pp. 65-89

DIBATTITO SUL TEMA
RAGIONAMENTO QUOTIDIANO E LOGICA
(ERRORI O RAZIONALITÀ ALTERNATIVE?)

Intervento di Vittorio Girotto*

Su cosa si basano le inferenze che facciamo nella vita quotidiana? Un logico potrebbe stupirsi all'idea che le capacità di ragionamento delle persone comuni vengano attribuite ad una sorta di conoscenza implicita degli schemi di inferenza della logica standard. Eppure, fino ad un paio di decenni fa, quest'idea è stata alla base della teoria che ha dominato la ricerca in psicologia del ragionamento, cioè della disciplina che si occupa di come le persone non esperte di logica possano fare delle inferenze valide.

In questo lavoro presenterò brevemente i principali problemi che la teoria della cosiddetta logica mentale (di seguito TLM) deve affrontare e mostrerò come tali problemi vengano risolti dalla principale teoria alternativa, cioè quella dei modelli mentali (di seguito TMM; per una rassegna generale, v. Girotto, 1994).

L'idea che il ragionamento comune si identifichi con la logica può essere fatta risalire ad Aristotele. In psicologia del pensiero quest'idea ha trovato la sua massima espressione nell'opera di Piaget, secondo il quale, a partire dall'adolescenza, nella mente delle persone non esperte di logica si sviluppa una competenza deduttiva che permette di ricavare inferenze valide. Per esempio, date le premesse

Se c'è un Asso, c'è un 2
C'è un Asso

quasi tutte le persone interrogate (compresi i bambini) concludono che

C'è un 2.

Secondo la TLM le persone arrivano a questa conclusione perché applicano lo schema modus ponens alla forma proposizionale delle premesse (Se P, allora Q; P). In altre parole, per spiegare l'esistenza di un'inferenza valida è sufficiente assumere che uno schema inferenziale equivalente (in questo caso il modus ponens) sia presente nel repertorio di schemi di inferenze delle persone non esperte di logica.

* Università di Trieste e CREPCO, Aix-en-Provence

Anche se, nel caso del modus ponens, questo tipo di spiegazione appare plausibile, rimane però il fatto che in molti casi le persone non esperte non traggono inferenze valide, e/o ne traggono di non valide. Per esempio, solo una parte delle persone interrogate riesce a ricavare una conclusione valida dalle premesse di un argomento modus tollens, come

Se c'è un Asso, c'è un 2
Non c'è un 2.

Molte persone, infatti, si limitano a concludere che "Nulla ne consegue". Secondo i sostenitori della TLM, questo errore si spiega con la maggiore complessità dell'inferenza modus tollens rispetto a quella modus ponens. La prima, infatti, richiede l'uso di una strategia di ragionamento sofisticata come la reductio ad absurdum, che non fa parte delle capacità di ragionamento comune, essendo appresa solo attraverso l'insegnamento superiore (per esempio quello della geometria).

L'interpretazione delle inferenze erronee proposta dai sostenitori della TLM riduce, ovviamente, le capacità deduttive ad insieme ristretto di schemi inferenziali semplici. Inoltre, ci sono altri due problemi che questa versione ridotta della TLM non riesce a spiegare in modo adeguato.

In primo luogo, se si assume che gli schemi inferenziali ingenui siano di natura formale, cioè che si applichino a qualsiasi tipo di contenuto e in qualsiasi contesto, è difficile spiegare perché le prestazioni di ragionamento varino in funzione del contenuto delle premesse e dal contesto in cui queste vengono presentate. Il caso più noto, da questo punto di vista, è quello del problema delle quattro carte inventato dallo psicologo inglese Peter Wason.

Problema 1

Nella sua versione classica (Wason, 1966), questo problema presenta quattro carte, ognuna delle quali ha un lato con una lettera ed uno con un numero. Di ogni carta risulta visibile solo uno dei lati, o quello con la lettera o quello con il numero. Si immagini, per esempio, che siano presentate quattro carte, di cui due sono girate dal lato della lettera (rispettivamente "A" e "C") e due da quello del numero (rispettivamente "2" e "7"). Si informano poi le persone che queste carte sono state estratte da un mazzo per il quale vale la regola: "Se su un lato della carta c'è la lettera A, allora sull'altro lato c'è il numero 2". Si chiede, infine, alle persone di indicare quali carte è assolutamente necessario girare per stabilire se la regola in questione è vera o falsa.

La soluzione di questo problema consiste nell'indicare i due potenziali controesempi della regola condizionale ("Se P, allora Q"), cioè le due carte che possono presentare la combinazione falsificante "P & non-Q" (nel caso in questione "lettera A e numero diverso da 2"). Ora, benché la maggior parte delle persone interrogate indichi correttamente la carta P (quella con la lettera A), solo una minoranza di loro indica anche l'altra carta di cui è necessario controllare la parte nascosta, cioè la carta non-Q (quella con il numero 7). La maggior parte delle risposte scorrette consiste nell'indicare le carte P e Q.

Se si segue la TLM, il fatto che la stragrande maggioranza delle persone non sia in grado di risolvere un problema come quello delle quattro carte è già difficile da spiegare. Ma ancor più difficile da spiegare è il fatto che, modificandone il contenuto e il contesto, il problema in questione può risultare facilmente risolvibile. Per esempio, consideriamo il seguente scenario:

Problema 2

Immaginate di fare un'inchiesta sul principato del Bargustan, dove il principe regnante ha imposto una forma estrema di liberalismo. Nel Bargustan, infatti, c'è la pensione a 65, ma, a parte ciò, mancano le garanzie dello stato sociale: né l'assistenza sanitaria, né la pensione sono garantite, non c'è diritto al lavoro, né cassa integrazione, né salario minimo, ecc. Tuttavia, sostiene il principe, nel suo paese non ci sono gravi problemi economici o sociali. Grazie alla azione dei soli meccanismi economici, secondo lui, tutti si trovano nella miglior posizione possibile: "Per esempio - dice il principe - se una persona è in età di lavoro, allora quella persona ha un impiego".

Vi trovate nell'ufficio del principe, dove vedete quattro schede corrispondenti a quattro persone diverse. Su un lato della scheda è indicata l'età della persona, sull'altro la sua professione. Di due schede vedete il lato con l'età (rispettivamente "32 anni" e "79 anni"), delle altre due il lato con la professione (rispettivamente "ha un impiego" e "non ha un impiego"). Il vostro compito è quello di indicare le schede che bisogna assolutamente girare per stabilire se ciò che ha detto il principe (cioè: "Se una persona è in età di lavoro, allora quella persona ha un impiego") è vero oppure no.

In questo scenario, usato da Sperber, Cara e Girotto (1995), viene presentato un problema formalmente identico a quello originale di Wason. Si tratta infatti di indicare i potenziali controesempi di una regola condizionale. Ora, in questo caso la grande maggioranza degli individui interrogati (circa il 70%) indicò le due schede corrette, cioè P ("persona di 32 anni") e non-Q ("persona senza un impiego").

Questo risultato era stato predetto da Sperber e colleghi sulla base di un'analisi pragmatica delle frasi condizionali. Nel caso in questione, infatti, l'intenzione comunicativa della persona che ha prodotto la frase condizionale era quella di negare l'esistenza dei controesempi: il principe voleva dire "Nel mio paese non ci sono persone adulte che non abbiano un impiego" (cioè "non ci sono casi P & non-Q"). Inoltre, la combinazione di tratti P & non-Q è facilmente rappresentabile perché corrisponde a un concetto (anche lessicalizzato, per esempio, nella lingua italiana), cioè quello di "disoccupato".

Entrambi questi fattori (interpretazione del condizionale come negazione dell'esistenza di casi P & non-Q, e facilità di rappresentazione degli stessi) sono ovviamente assenti nella versione del problema originale di Wason. Come pure sono assenti in un'altra versione del problema del Bargustan, assolutamente identica alla prima tranne che per la regola da controllare. In questa seconda versione il principe diceva: "Se una persona ha più di 65 anni, allora quella persona è senza un impiego". Naturalmente in questo caso è difficile interpretare l'asserzione del principe come una negazione dell'esistenza di controesempi, come pure è difficile rappresentarsi la combinazione di tratti "ha più di 65 anni ed ha un impiego" come un concetto unico. Infatti, come nel caso del problema (1), anche in quest'ultima versione del problema del Bargustan solo una minoranza delle persone indicò le schede corrispondenti ai controesempi (P: "ha più di 65 anni" e non-Q "non ha un lavoro").

Questa variazione della prestazione in funzione del contenuto e del contesto di uno stesso problema di ragionamento non può essere spiegata sulla base della TLM, secondo cui gli schemi inferenziali spontanei sono di natura formale. Si noti, d'altro canto, che le prestazioni corrette ottenute con il problema (2) non possono essere attribuite al maggior "realismo" di tale condizione rispetto al problema (1). Infatti, la seconda versione del problema del Bargustan era egualmente realistica, eppure solo poche persone si dimostrarono capaci di risolverla.

Infine, la TLM non riesce a spiegare un fenomeno recentemente scoperto sulla base delle predizioni della TMM. Si consideri il seguente problema:

Problema 3

Solo una delle due seguenti asserzioni, relative ad una mano di carte, è vera:

i) Se c'è un Asso nella mano, allora c'è un 2

ii) Se c'è un Re nella mano, allora c'è un 2.
Cosa ne consegue?

La stragrande maggioranza delle persone cui viene presentato questo problema (inclusi eminenti colleghi dei dipartimenti di psicologia e filosofia!) concludono che "Nella mano c'è un 2" (v. Johnson-Laird e Savary, 1996). Ora, questa risposta rappresenta un grossolano errore, dato che è diametralmente opposta a quella corretta ("Nella mano non c'è un 2"). Infatti, qualora sia vera la (i), ne segue che la (ii) è falsa, e dunque non ci può essere un 2. Viceversa, se è vera la (ii), allora è falsa la (i), di conseguenza, ancora una volta, non ci può essere un 2.

Questa e altri tipi di inferenze illusorie scoperte da Johnson-Laird e colleghi rappresentano un imbarazzante problema per la TLM. Infatti, a meno di prevedere l'esistenza di regole di inferenza non valide nel nostro repertorio inferenziale, non si vede come si possano spiegare queste illusioni di ragionamento partendo dall'assunto che la nostra competenza deduttiva è costituita da regole che ci permettono di ricavare conclusioni valide.

In sintesi, la TLM si trova di fronte tre tipi di problemi (gli errori, gli effetti di contenuto e le illusioni), cui non riesce, almeno nelle sue versioni correnti, a trovare una soluzione. Per ognuno di questi problemi, invece, la TMM sembra in grado di offrire una soluzione accettabile.

Secondo la TMM il ragionamento è un processo semantico che consiste nella costruzione e nella manipolazione di rappresentazioni (modelli) mentali dei contenuti delle premesse. Per esempio, data la premessa condizionale

Se c'è un Asso, allora c'è un 2

è probabile che le persone si costruiscano la seguente rappresentazione

Asso 2
...

nella quale la prima riga indica il modello (esplicito) in cui sono presenti sia l'Asso che il 2, e la seconda gli altri modelli (impliciti e, per convenzione, simbolizzati da tre punti) in cui quella premessa è vera. Dati i noti limiti della nostra memoria di lavoro, è probabile che la maggior parte delle persone non renda espliciti questi modelli, cioè non si rappresenti le seguenti combinazioni:

-Asso 2
-Asso -2

dove il simbolo "-" indica la negazione.

Ora, mentre è possibile ricavare una conclusione valida per un argomento modus ponens in cui la premessa condizionale sia rappresentata solo in modo incompleto, non è possibile fare lo stesso per un argomento modus tollens. Infatti, a meno di rendere espliciti gli altri modelli del condizionale (cioè quelli in cui è rappresentata l'assenza dell'Asso), dalla premessa minore "Non c'è un 2" sembra che si debba concludere che "Nulla ne consegue". Come si ricorderà, questa è proprio la conclusione più frequentemente tratta dalle persone che non risolvono un problema di forma modus tolllens.

Più in generale, se un argomento (es. il modus tollens) richiede la costruzione di più modelli espliciti, è probabile che la prestazione delle persone risulti meno corretta rispetto agli argomenti in cui è possibile ricavare conclusioni valide anche a partire da una rappresentazione incompleta delle premesse. (es. il modus ponens) In questo modo, la TMM riesce a rendere conto del fatto che alcune inferenze sono più difficili di altre senza dover assumere che le seconde siano dovute all'applicazione di regole inferenziali.

Anche gli effetti di contenuto possono essere spiegati seguendo gli assunti della TMM. Per esempio, le versioni del problema delle quattro carte che risultano facili da risolvere sono quelle per le quali è probabile che le persone si costruiscano facilmente la rappresentazione dei controesempi (es. "disoccupato" nel caso della prima versione del problema del Bargustan) e, di conseguenza, siano maggiormente in grado di cercarli.

Infine, le illusioni inferenziali sono state scoperte proprio sulla base delle predizioni della TMM. Infatti, assumendo che le persone tendano a rappresentarsi solo una parte dei modelli possibili, in particolare quelli in cui sono presenti delle contingenze vere, è probabile che la loro rappresentazione iniziale delle due premesse condizionali del Problema (3) sia:

Asso 2
Re 2
...

Da tale rappresentazione sembra seguire che nella mano c'è sicuramente un 2. Il numero 2, infatti, è l'unica contingenza presente in entrambi i modelli che rappresentano la disgiunzione dei due condizionali.

Insomma, per ognuno dei problemi per i quali la teoria della logica mentale si trova in difficoltà, la TMM sembra offrire delle soluzioni plausibili. Va inoltre ricordato che la TMM è stata recentemente applicata con successo allo studio del ragionamento probabilistico (v. Girotto e Legrenzi, 1998; per una posizione diversa, v. Lolli, 1996) e dei processi decisionali (Legrenzi, Girotto e Johnson-Laird, 1993). Perciò, anche se è difficile concludere in modo definitivo, la TMM rappresenta attualmente la più coerente ed economica alternativa ad una visione del ragionamento umano basata su una semplice identificazione tra logica standard e competenza deduttiva spontanea.

Bibliografia

- Girotto, V. (1994). Il ragionamento, Bologna, Il Mulino.
- Girotto, V. e Legrenzi, P. (1998). Logica, probabilità e ragionamento ingenuo, in F. Castellani e L. Montecucco (a cura di), Normatività logica e ragionamento di senso comune, Bologna, Il Mulino.
- Johnson-Laird, P.N. (1983). Mental models, Cambridge, Cambridge University Press, trad. it. Modelli mentali, Bologna, Il Mulino, 1988.
- Johnson-Laird, P.N. e Savary, F. (1996). Illusory inferences about probabilities. Acta Psychologica, 93, 69-90.
- Legrenzi, P. Girotto, V. e Johnson-Laird, P.N. (1993). Focussing in reasoning and decision-making. Cognition, 49, 37-66.
- Lolli, G. (1996). Capire la matematica. Bologna, Il Mulino.
- Sperber, D., Cara, F. e Girotto, V. (1995). Relevance theory explains the selection task. Cognition, 57, 31-95.
- Wason, P.C. (1966). Reasoning. In B. Foss (a cura di) New horizons in psychology. Harmondsworth, Penguin.

Intervento di Gabriele Lolli*

Gli studi e gli esperimenti degli psicologi hanno messo in luce che senza un'educazione mirata nel ragionamento si commettono errori, ed errori con caratteri di sistematicità. Una cosa è ormai certa, che imparare a ragionare e a fare matematica non è come imparare la propria lingua. Gli elementi innati che regolano il ragionamento non sono, se ci sono, gli stessi che soprassiedono all'apprendimento della lingua; e quanto meno rilevanti e determinanti sono gli elementi innati, tanto più importante è il ruolo dell'educazione e dell'insegnamento[1]..

Errori si manifestano con caratteristiche simili in tutte le attività intellettuali, e molti di quelli del ragionamento deduttivo hanno lo stesso carattere di quelli generali. Così è declinata l'impostazione razionalista, secondo cui i processi mentali potevano essere spiegati in termini di strategie normative che descrivono strategie ottimali (salvo deviazioni minori): che gli esseri umani cioè prendessero decisioni in base a una teoria dell'utilità attesa, che ragionassero secondo la logica classica, che formulassero giudizi di probabilità in base al teorema di Bayes.

Non si vuole ora supporre che esista una mentalità magica o una razionalità inferiore. Gli psicologi, pur con varie tendenze, sono d'accordo che le cause degli errori non sono da rintracciare in zone irrazionali della nostra natura, ma in onesti processi di pensiero. L'impostazione relativistica a cui si può essere così condotti ha i suoi pericoli; se tutto è razionale allo stesso modo, cosa si intende per razionale? Una esposizione estrema del relativismo si può leggere in un recente libro di Steven Stich, che sfocia inevitabilmente in un superficiale pragmatismo[2]. Poveri noi insegnanti il giorno che gli studenti, edotti di queste conclusioni, al rilievo sui loro errori risponderanno descrivendo i loro supposti processi mentali, e chiederanno il diritto di pari opportunità (per fortuna spesso non sanno descrivere cosa hanno fatto).

---

* Politecnico di Torino

[1] Il dibattito tra regole mentali e modelli è stato anche uno scontro sulla innatezza o meno delle capacità deduttive. I sostenitori della logica mentale, che si pronuncino o no sul tema, sono portati a presupporre l'innatezza delle regole: queste non si imparano induttivamente, e la loro giustificazione richiede la comprensione preliminare delle regole stesse. Anche i sostenitori della teoria dei modelli mentali presuppongono alcune capacità manipolative e costruttive di tipo logico-algebrico, o semantico, anche se non è chiaro, ed è materia di approfondimento, cosa e quanto si debba presupporre e assumere come probabilmente innato.
Sulle due impostazioni, oltre a V. Girotto, *Il ragionamento*, Il Mulino, Bologna, 1994, si vedano anche G. Lolli, "Logica e psicologia del ragionamento deduttivo", *Paradigmi* **15** (1997), fasc. 44, e J. St. B. T. Evans e D. E. Over, "Rationality in reasoning: The problem of deductive competence", *Cahiers de Psychologie Cognitive* **16** (1997), n. 1-2, numero speciale introdotto dall'articolo citato, con commenti e risposte degli autori.

[2] S. P. Stich, *La frammentazione della ragione* (1991), Il Mulino, Bologna, 1996.

Non convince neanche il presupporre innata una logica mentale diversa da quella classica prima ipotizzata, sia pure una logica debole, come sembra essere quella dei modelli mentali, che permetta di innestare su di sé le varie possibilità, sia quella classica sia solo frammenti di quella, incompleti (e per alcune prestazioni per forza devianti), allo stesso livello di giustificazione. Le caratteristiche delle prestazioni cognitive dei soggetti non addestrati devono essere ricondotte ai vincoli della struttura fisica e architettonica del sistema cerebro-mentale, o della mente e dei suoi elaboratori. Tali vincoli non dovrebbero però essere interpretati come se configurassero un sistema da chiamare accettabilmente logica; dovrebbero essere visti come condizionamenti, su cui eventualmente fare aggio positivo nell'addestramento.

Esistono diverse teorie generali sugli errori[3]. Gli errori della razionalità *limitata* (secondo la teoria della razionalità limitata) hanno origine principalmente dai vincoli imposti dallo spazio di lavoro cosciente; quelli della razionalità *imperfetta* dall'affidarsi troppo ad euristiche semplificatrici, soprattutto al confronto di similarità, trovandosi così a disagio con la negazione e la differenza, come già indicato da Bacone a proposito degli *idola tribus* («quello di essere maggiormente sollecitato ed animato dalle cose affermative piuttosto che da quelle negative è l'errore peculiare perenne dell'intelletto umano», 1620); quelle della razionalità *riluttante* emergono dai processi cognitivi coinvolti nel ragionamento analitico. Questi ultimi sembrano restii ad intraprendere elaborazioni potenti da un punto di vista computazionale in quanto laboriose. Già William James (1908) aveva osservato che processi che richiedono intervento dell'attenzione sono difficili da condurre per lunghi periodi di tempo.

Le ricerche iniziate da Bruner hanno messo in evidenza che ci sono strategie per minimizzare la tensione cognitiva nei compiti con uso intensivo dell'attenzione; una strategia è quella generale della previsione della persistenza, in cui rientra il ricorso al criterio della somiglianza (preferire indizi che si sono rivelati utili nel passato); questa porta a applicare soluzioni preconfezionate a problemi ricorrenti, e solo in situazioni convenzionali o inusuali si rivela non economica.

Anche in compiti che non richiedono uso intensivo dell'attenzione, per esmpio nei quiz, quando le operazioni cognitive sono sottospecificate, si manifestano tendenze alla similarità e al contesto semantico dell'intenzione (innescata da certi effetti di trascinamento, o da certi attivatori, per esempio fonologici). I meccanismi di recupero della risposta sono complessi; a una prima valutazione sulla possibilità che l'elemento cercato sia nella me-

[3] Per un'ampia rassegna delle teorie e degli studi psicologici sugli errori si veda J. Reason, *L'errore umano* (1990), Il Mulino, Bologna, 1994.

moria semantica segue un confronto di similarità, che è la base primaria di ricerca nella memoria; liberati gli indizi, si ha un processo rapido ed efficiente, probabilmente parallelo; l'azzardo in base alla frequenza è la strategia più comune nella selezione tra i vari candidati. Ma richiamati alla mente i candidati con questi processi automatici, si instaura anche una procedura di ricerca seriale; le persone possono ricavare la risposta con inferenze che usano anche altre conoscenze.

In tutti i casi (qualunque sia la teoria della razionalità) l'effetto previsto è quello di una riduzione dell'esplorazione delle configurazioni di problemi. I vantaggi economici di simili strategie, e quindi il rafforzamento delle stesse dalle risposte della vita quotidiana, sono ovvi; per la matematica e il ragionamento si ha un problema; anche qui si può dire che l'impostazione essenziale consiste proprio nel non generare tutte le configurazioni possibili[4], ma la scelta di quelle buone non pare certo dettata dai criteri di similarità o di frequenza.

Per quel che riguarda il ragionamento matematico, non ci sono molti studi nella letteratura accessibile su come si presentano e manifestano le limitazioni architettoniche o le predisposizioni e le strategie abbrevianti negli errori tipici degli studenti di matematica. Prima degli esperimenti dei cognitivisti, alcuni elementi e alcune spiegazioni sono state avanzate dai matematici stessi, e non sono poi del tutto scentrate, forse solo parziali. Sono note le riflessioni di Poincaré sulla memoria[5], che sembrerebbero a una prima lettura adattarsi alla teoria della razionalità limitata.

> «Che la maggior parte delle persone non sia capace di invenzione, non c'è niente di misterioso. Che la maggior parte delle persone non riesca a ricordare una dimostrazione dopo che l'hanno appresa, passi ancora. Ma che la maggior parte delle persone non sia capace di comprendere un ragionamento matematico nel momento in cui glielo si espone, ecco un fatto che appare ben sorprendente se ci si riflette. Eppure quelli che non possono seguire un ragionamento che con difficoltà sono la maggioranza: è un fatto incontestabile, e l'esperienza degli insegnanti della scuola secondaria non mi smentirà.
>
> E c'è di più: come è possibile l'errore in matematica? Una intelligenza sana non deve commettere errori di logica, e tuttavia ci sono spiriti fini, che non si ingarbuglierebbero in un ragionamento corto come quelli che si devono fare negli atti ordinari della vita, e che sono incapaci di

[4] Si veda H. Poincaré, *La scienza e il metodo* (1907), Einaudi, Torino, 1997, in particolare il capitolo sull'invenzione matematica. Ivi è anche la descrizione di una sua scoperta raggiunta attraverso l'alternanza di processi subcoscienti e di attività cosciente, che sembrano corrispondere alle attività coordinate in parallelo e seriali-inferenziali messe in luce dalle scienze cognitive.

[5] *ivi*.

seguire o ripetere senza errori le dimostrazioni matematiche che sono più lunghe, ma che non sono dopo tutto che un accumulo di piccoli ragionamenti del tutto analoghi a quelli che essi fanno così facilmente. E' necessario aggiungere che i matematici stessi non sono infallibili?»

La risposta che si impone, per Poincaré è la lunghezza. Tra il momento in cui incontriamo una proposizione come conseguenza di un sillogismo, e quella in cui la ritroviamo come premessa di un altro si sono sviluppati molti anelli della catena; può succedere che si sia dimenticato o, che è più grave, che se ne sia dimenticato il senso? Può succedere che la si rimpiazzi con una un poco differente, che con lo stesso enunciato esprime qualcosa di un po' diverso?

La memoria che Poincaré ritiene essenziale per la matematica non è solo quantitativa, è una memoria che coglie l'ordine, le connessioni, l'andamento della dimostrazione. Il che alla fine vuol dire che non è questione di memoria, anche se è vero che il ragionamento breve si presta meglio a essere dominato, capito, adattato a varie situazioni. Inoltre l'invenzione si presenta anche nella soluzione dei problemi o nelle piccole costruzioni di spiegazioni, di non maggior lunghezza di quelle che gli spiriti fini farebbero così facilmente.

In questo campo si manifesta un fenomeno particolare e drammatico, disperante per chi insegna, quello del panico, e susseguente blocco di ogni attività di pensiero.

Il panico si presenta essenzialmente solo in matematica, per quel che riguarda le attività intellettuali (si può presentare naturalmente come paralisi fisica), le altre scienze studiate a scuola sono di tipo più descrittivo (salvo forse la chimica, che con le composizioni e le reazioni ha aspetti che sono vicini alla matematica, se non sono matematica anch'essi). E si presenta soprattutto nella risoluzione di problemi e nel ragionamento; con le operazioni numeriche, o le trasformazioni di espressioni, gli errori sono spesso del tipo *cioc per brocla*[6], e vi si possono riconoscere alcune tipologie generali di errore messe in luce dalla psicologia per prestazioni intellettuali di qualsiasi genere. Ma nel caso del panico è proprio il silenzio. Si vede chiaramente, dietro l'opacità degli occhi spersi, il girare a vuoto del motore in attesa della risposta che non arriva da nessuna parte.

Gli effetti del panico richiedono anche il contributo della psicologia delle emozioni[7], ma qualcosa si può dire in base all'esperienza didattica, perché forse è proprio nell'insegnamento sbagliato una causa del fenomeno.

[6] Lingua del Nord Ovest.

[7] Per quel che riguarda la matematica, ci sono studi sulla ansietà, come fonte di errori, che è quello che più si avvicina al panico, ma non è proprio la stessa cosa.

Una caratteristica dell'apprendimento della matematica è che si imparano prima di tutto algoritmi deterministici (le operazioni), si impara cioè a fare una cosa e adeguarsi in modo assoluto, ad ubbidire. Questo è già un aspetto che blocca il pensare, o induce a ritenere che la matematica non consista in pensare, ma nell'ubbidire. Ma un fenomeno più complesso si presenta non appena si va oltre, dove prevalgono algoritmi non determinisitici o pluralità di algoritmi, cioè alla soluzione di problemi e al ragionamento; non sempre si mette in evidenza e si è consapevoli del fatto che nonostante l'accostamento naturale (e l'integrazione necessaria) si tratta di due attività intellettuali del tutto diverse; forse sarebbe bene usare due etichette diverse (non osiamo fare proposte, ma "calcolo" e "matematica" rendono forse l'idea).

Di fronte a problemi creativi, da una parte il soggetto cerca di utilizzare un algoritmo, che non ha, o ne utilizza comunque uno che si rende conto lui stesso che è sbagliato, o non sa come usare correttamente nel contesto. Lo stesso succede di fronte a problemi numerici di cui si sia dimenticato l'algoritmo (per esempio quello per l'estrazione della radice).

In ogni caso non si ricorre alla ricerca e alla prova di diverse strade. Il panico blocca, ma il panico può essere dovuto anche al fatto di sapere che ce ne è più di una e di non avere criteri su quale scegliere.

In particolare di fronte a un problema per cui manca l'algoritmo, o perché manca[8] o perché non lo si ricorda, non ci si mette a far qualcosa per *trial and error*, non inizia la ricerca sulla base della definizione (procedimento di solito inefficiente, ma corretto e spesso capace di condurre alla soluzione o alla scoperta di algoritmi). Poincaré diceva che se un matematico deve servirsi di una regola, incomincia a dimostrarla, e da quel momento la regola è perfettamente compresa nella sua portata e nel suo senso, e non rischia più di alterarla. Dopo la affida alla memoria, e «se la memoria gli fa difetto» può succedere che la applichi in modo sbagliato. Tuttavia che la regola sia perfettamente compresa significa forse che il matematico è capace di ricostruirsela, e sa che è possibile. Gli studenti non hanno questa fiducia, forse perché non hanno visto come l'algoritmo discenda dalla definizione e la dimostrazione di correttezza[9] (delle volte si vede ma non la si interiorizza, perché non è messo sufficientemente in luce che è più importante la definizione che non l'algoritmo).

Dovrebbe essere un motto dell'insegnamento della matematica, un imperativo categorico: mai dare una sola soluzione. Possedere più di una tecnica, da quelle sintattiche a quelle semantiche, da quelle algebriche a

[8] Si noti che per la soluzione dei problemi (almeno quelli che hanno soluzioni) un algoritmo esiste sempre, fornito da uno dei sistemi completi di logica, ma è altamente non deterministico.

[9] Si veda G. Lolli, "Le dimostrazioni di correttezza", *Matematica - Lettera Pristem*, 1997, n. 26.

quelle geometriche, e usarle a seconda dei contesti, e magari insieme, e magari saperle modificare, è una prova di competenza, ed è la definizione stessa di competenza. Secondo Poincaré la generazione delle configurazioni buone è guidata da un senso estetico che coglie le armonie; ma le armonie sono la presenza di affinità inaspettate in situazioni apparentemente diverse. Una sola tecnica è difficile che permetta l'accostamento di elementi diversi; tecniche diverse lavorano su elementi diversi, ne possono rivelare l'accostamento.

Insegnare (solo) le regole di un solo algoritmo, quando non sia strettamente deterministico, o quando ce ne siano più di uno, non serve e può essere dannoso. Conoscere le regole degli scacchi non significa saper giocare a scacchi, è stato detto sino alla noia. Conoscere le regole logiche di un sistema non significa saper ragionare e fare dimostrazioni (questo vale sia per le regole mentali sia per la costruzione dei modelli mentali). Bisogna sempre insegnarne più di uno e vedere i rispettivi vantaggi, le diverse opportunità applicative, le opportune integrazioni. Per esempio è del tutto plausibile che all'inizio di un ragionamento in cui si deve risolvere un problema ci si costruisca una immagine dei dati, un modello, come si fa in ogni situazione in cui ci raccontano un fatto o una storia. Ma naturalmente non ci si può fermare lì, se ci si ferma lì si fanno errori perché quello che si deve sviluppare dipende da regole che non sono le stesse delle situazioni comuni, in cui le varie euristiche rapide o quasi immediate utilizzano i dati immediati; le regole ad esempio devono sviluppare analiticamente certe definizioni.

In matematica la scoperta di una soluzione richiede una previsione e un percorso. Bisogna sapere dove si vuole arrivare, ma bisogna anche vedere alcuni massi che sporgono dal fiume per saltare da una sponda delle premesse alla conclusione. Il processo del ragionamento è creativo, perché bisogna dare risposte intermedie, e per questo bisogna vedere la strada. Non basta conoscere le regole che spingono a fare uno di un certo numero di possibili passi avanti dal punto in cui si è arrivati. Bisogna vedere l'ordine, come diceva Poincaré, le armonie.

In questa prospettiva, si coglie come il ragionamento sia cosa ben diversa dal linguaggio. Nel parlare è la singola frase che è importante, anche se complessa; la strategia di prevedere cosa dovrò dire fra un po' è veramente tutt'altra cosa.

D'altra parte è un luogo comune spesso ripetuto che imparare la matematica è imparare un linguaggio, e non è del tutto sbagliato, ma molto più complicato; un cattivo insegnamento del linguaggio matematico è un'altra delle cause di fondo, dopo non più correggibili, della confusione e insicurezza di chi vi è stato esposto.

La matematica è un linguaggio molto speciale, un linguaggio senza semantica, o con una semantica costruita a ogni nuova definizione, diversa da quella naturale su cui si appoggia, modificata e svuotata (a questo proposito si fa spesso l'esempio di "addizionare" e "moltiplicare", che nel parlato naturale significano sempre crescere)[10]. Oltre a essere diversa, la semantica è anche determinata in modo diverso, e la sua definizione, con le sue regole, deve accompagnare lo sviluppo delle frasi; altrimenti gli utenti si adagiano sui significati intuitivi, non levigati, delle parole da cui derivano i termini tecnici, e poi applicano le strategie ed euristiche evocate da quelle parole nella vita quotidiana.

Si pensi agli studenti quando fanno le espressioni, e scrivono catene di uguaglianze senza alcuna spiegazione; noi cerchiamo di imporre loro una scrittura ordinata, in cui in ogni riga ci sia solo a sinistra un'espressione e a destra la regola applicata; non è solo per lo sfizio della pagina elegante; è che un linguaggio matematico è in verità sempre una coppia di linguaggi, e si svolge proprio a due livelli, quello formale e il metalinguaggio. Uno solo dei due non basta; sapere che si deve applicare una proprietà ma non saperlo fare non permette di andare avanti; applicarla senza sapere cosa si fa e perché, ugualmente non permette certo di vedere strategie o ordini.

E' una situazione unica dal punto di vista intellettuale; non bisogna nasconderla cercando semplificazioni eccessive che non sono possibili; bisogna imparare a dominarla, e a metterne in luce il carattere formidabile di scoperta intellettuale; non è altro che la scoperta della matematica, con parti del linguaggio comune che progressivamente si staccano e sono ipostatizzato in un uso formale e oggettivo, non espressivo[11]. Se le regole non sono insegnate in modo preciso, e sostenute da un formalismo adeguato, ci si porta dietro troppo del linguaggio naturale da cui si è partiti; si pensi alle confusioni dovute all'uguaglianza, al dire che sono uguali espressioni diverse, quando non si ha ancora il concetto di funzione; e non lo si avrà mai, perché per la notazione riguardante soprattutto variabili e funzioni i matematici perversamente insistono su un formalismo incompleto e ingannevole, contro cui inutilmente ha lottato Frege.

Per il ragionamento (matematico) e per la soluzione dei problemi sono essenziali, ancorché forse non sufficienti, sia l'abitudine a esplorare più strade, permessa solo dal dominio di più tecniche, sia la padronanza formale del linguaggio, naturalmente introdotto progressivamente al momento giusto di maturazione, ma questo non significa avallare prima un uso sbagliato e cencioso, da cui non ci si libera più.

---

[10] L'innatismo si riferisce sì alla grammatica, ma solo alla strutturazione formale delle frasi.
[11] Si veda anche per ulteriori osservazioni G. Lolli, *Capire la matematica*, Il Mulino, Bologna, 1995.

GRUPPO DI LAVORO: SCUOLA ELEMENTARE - SCUOLA MEDIA

DIFFICOLTA' ED ERRORI INDIVIDUATI E SUPERATI ATTRAVERSO I MODELLI DINAMICI

Coordinatori: J. Nardi - F. Paternoster*

La costruzione di significati e conoscenze, nella nostra attività didattica, avviene anche attraverso l'uso di modelli dinamici. Questi sono oggetti materiali che "concretizzano" e schematizzano un concetto matematico, che è astratto. Il modello ha delle analogie con il disegno, ma rispetto a questo, ha in più il dinamismo e una forte componente spazio temporale. Infatti l'uso di modelli dinamici richiede la capacità di collegare la situazione di partenza con la situazione di arrivo, passando per la continuità di tappe intermedie e la capacità di collegare fatti e concetti.

Il percorso operativo parte dall'osservazione, che interagisce con le immagini già possedute, per sfociare nelle interpretazioni attraverso:
- la sollecitazione delle dinamiche mentali degli alunni o la individuazione delle dinamiche mentali poste in essere. Ad esempio da come esplicitano quante figure si formano nel movimento (attraverso la lingua naturale, il disegno..), si comprende se gli alunni hanno colto l'infinito oppure no.
- la diagnosi di difficoltà e stereotipi. Ad esempio osservando disegni non coerenti con ciò che si osserva si comprende la presenza di immagini mentali stereotipate.

Le modalità concrete di lavoro partono dalla costruzione del modello e attraverso l'osservazione guidata vogliono arrivare alla esplicitazione della immagine mentale che si va costruendo, con l'uso di più registri linguistici (lingua naturale, disegni, schemi...).

I modelli contribuiscono alla costruzione delle conoscenze per passaggi successivi, così come per tappe successive si conquista l'uso in senso univoco della lingua naturale che accompagna questa modalità di lavoro.

I modelli, che fanno riferimento all'aspetto figurale e facilitano l'accesso all'aspetto concettuale, sono una rappresentazione e le rappresentazioni sono necessarie per costruire concetti. Ma le rappresentazioni si dominano compiutamente solo se i concetti sono già formati. Questa è una contraddizione da tenere in conto, particolarmente nella scuola dell'obbligo, e che ci deve sollecitare ad individuare la via di accesso più idonea alla conoscenza e che si basi prevalentemente sulla operatività. In questa via

* NRD Parma, sezione Mathesis, Pesaro
Hanno collaborato: A.M.Damiani, A.M.Facenda, P.Fulgenzi, F.Masi

all'apprendimento il ruolo dell'insegnante sarà quello di sollecitare la riflessione a livello metacognitivo. Lo scopo sarà: rendere gli alunni capaci di analizzare e descrivere i propri meccanismi di pensiero; creare consapevolezza di ciò che possono o non possono fare e di ciò che sono o non sono capaci di fare; essere in grado di controllare le proprie affermazioni. (Per una esposizione più esauriente e completa della didattica con i modelli dinamici si rimanda ai nostri lavori citati in bibliografia).

MODELLI ED ERRORI

Ciò che proponiamo è un percorso euristico che sia capace di "aggredire" la molteplicità delle variabili che possono generare errori. Si tratta di un percorso che utilizza modelli dinamici.

La scoperta dell'errore o del misconcetto fatta attraverso la manipolazione di un modello può risultare meno frustrante, e quindi meno demotivante, rispetto alla evidenziazione fatta dall'insegnante (componente affettiva).

L'analisi del modello parte da una riflessione individuale, per poi diventare collettiva; in questa fase c'è una sorta di socializzazione del sapere e anche dell'errore. Questo da "vergogna" diventa stimolo per la costruzione delle conoscenze attraverso l'argomentazione e la valutazione critica. L'insegnante deve prestare attenzione agli aspetti che emergono dalla presa di coscienza e dal percorso di superamento.

La nostra esperienza ci porta ad affermare che l'uso precoce dei modelli, evidenziando sia le variazioni che le permanenze consente di uscire da situazioni statiche che creano condizionamenti e quindi errori e misconcetti.

Attraverso l'esame di modelli dinamici è anche possibile accertare la correttezza dei concetti posseduti. Si tratta infatti di una autodiagnosi che mette in crisi ciò che si sa per costruire altro sapere, corretto e ben fondato.
L'attività di superamento degli errori e delle difficoltà, poiché si serve di più modelli relativi allo stesso concetto, pone in essere una riflessione ricca di controesempi, giustificazioni, prove, confutazioni per approdare alla costruzione di corrette immagini mentali.

IL CASO PRESO IN ESAME

Esaminiamo una situazione operativa specifica: quella in cui intervengono i concetti di area e perimetro. Dalla nostra esperienza didattica emerge che gli alunni, di fronte a situazioni problematiche presentate con modalità dinamico/operative, "trattano" i due concetti allo stesso modo: se l'area cambia, deve cambiare anche il perimetro e viceversa. C'è una sorta di effetto "trascinamento" che lega i destini di queste due misure. La nostra ipotesi, come abbiamo già affermato, è che l'abitudine ad affrontare i due concetti in modo statico, anche se contemporaneamente, abbia un grosso peso nell'instaurarsi di questi misconcetti.

Le nozioni di contorno e di superficie vengono introdotte, nel primo ciclo della scuola elementare, partendo da situazioni topologiche. Si fanno esperienze concrete su percorsi e sulla ricopertura di superfici. Gli alunni sono capaci di distinguere le due situazioni, ma quando si inizia ad affrontare la misura o si esaminano casi in cui due aspetti interagiscono si constatano con frequenza degli errori. Come spiegarli? Possiamo fare alcune ipotesi.

- I concetti non sono ben radicati, manca la consapevolezza.
- Contorno e superficie, riferiti ad una stessa figura, condividono lo stesso spazio e lo stesso tempo. Perché non devono comportarsi allo stesso modo? (componente psicologica)
- Area e superficie come misure riferite alla stessa figura vengono trattate in modo analogo, infatti il pensiero analogico negli alunni è uno dei più forti e radicati.
- Nella vita quotidiana (senso comune) l'area e il perimetro sono usati per la "misura" di un oggetto, spesso senza distinzioni.

Sono quindi molteplici le cause che conducono agli errori e sarà più complessa la strategia di superamento, poiché diventa necessario tenere sotto controllo più variabili dell'apprendimento.

LABORATORIO

Durante il laboratorio sono stati analizzati alcuni modelli dinamici per scoprire quali potenzialità ci sono di prevenzione, diagnosi e superamento di errori e difficoltà, derivanti dalla mancata disgiunzione fra i concetti di area e perimetro. Sono stati affrontati due percorsi operativi, ciascuno dei quali prevedeva l'utilizzazione di modelli che generano: figure con la sola area variabile; con il solo perimetro variabile; con la variazione di entrambi. Nel primo caso sono stati esaminati il modello "quadrato articolabile" (f.1) che genera figure isoperimetriche; i "triangoli (o i parallelogrammi) equiestesi" (f.2) che generano figure con perimetro variabile; il modello "triangoli isosceli a lati costanti" (f.3) che genera triangoli con area e perimetro variabili. Nel secondo sono stati esaminati il modello "un mezzo di quadrato in cornice" (f.4) che genera figure equiestese; il modello "rettangoli isoperimetrici" (f.5) che evidenzia figure con area variabile; il modello "deltoide" (f.6) col quale si ottengono figure dove variano sia l'area che il perimetro. L'analisi ha riguardato, in particolare, i possibili errori che questi modelli fanno emergere. Ad esempio il modello "triangoli equiestesi" evidenzia in modo forte il misconcetto che lega la variazione dell'area alla variazione dei

lati. I partecipanti hanno constatato direttamente come le osservazioni sono dipendenti dal contesto, dalle conoscenze possedute, dalle immagini mentali già costruite, in una costante interazione stimolante e motivante. Hanno anche colto come i casi limite permettano di individuare spiegazioni e giustificazioni di ciò che si osserva. In queste situazioni dinamiche area e perimetro hanno destini diversi: fare osservazioni, discutere ed argomentare su di esse, scoprendo variazioni e permanenze, partendo da una evidenza percettiva da interpretare, porta alla costruzione di un sapere concettuale ben fondato.

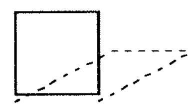


fig.1

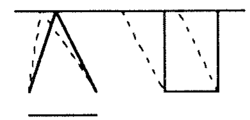


fig.2


fig.3

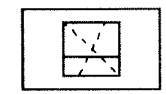


fig.4

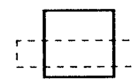


fig.5


fig.6

BIBLIOGRAFIA

1. Borasi R., *Fare degli errori un trampolino di lancio per la ricerca*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, n.5, 1996.
2. Cornoldi M., *Matematica e metacognizione*, Erikson.
3. Damiani A.M., Facenda A.M., Fulgenzi P., Masi F., Nardi J., Paternoster F., *Costruire immagini mentali attraverso i modelli: una esperienza didattica*, L'Educazione matematica, n.3, 1996.
4. Duval R., *Interaction de niveaux de reprèsentation dans la comprèhension de textes*, Annales de didactique et de Siences cognitives, vol.4,1991.
5. Facenda A.M., Manna M.C., Nardi J., Paternoster F., - NRD Parma, Sezione Mathesis di Pesaro, *Dallo studio di un "modello dinamico" alle definizioni: un percorso interattivo*, Atti del II Convegno Nazionale dei nuclei di ricerca per la scuola dell'obbligo, 1997.
6. Fishbein E., *Modelli taciti e ragionamento matematico*, Matematica e scuola, 1992.
7. Mariotti M.A., *Immagini e concetti geometrici*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, n.9, 1992.
8. Masi G., *Componenti cognitive e metacognitive nella risoluzione dei problemi*, Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà, 1997.

9. Speranza F., *Dallo spazio alla geometria*, Atti del II Convegno Nazionale dei nuclei di ricerca per la scuola dell'obbligo, 1997.

10. Tizzani P., *Quelques hypothèses pour interpréter les difficultés qui se présentent dans la représentation plane de situations spatiales et leurs implications pour ce qui est de l'inseignemente*, Atti del 46° CIEAEM, Tolosa 1994.

11. Zan R., *Il ruolo dei comportamenti metacognitivi nella risoluzione dei problemi*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, n.1, 1995.

GRUPPO DI LAVORO: SCUOLA MEDIA

IL COINVOLGIMENTO DI TUTTA LA CLASSE NEL DISCORSO MATEMATICO

Coordinatori: E. Giuliani, A. Pesci, M. Reggiani, F. Tomassini*

Prima di presentare le due esperienze didattiche svolte in due classi seconde di scuola media, si sono illustrate e discusse le idee fondamentali condivise dagli insegnanti che da anni collaborano con il nostro gruppo di ricerca. Sono le seguenti:

- L'insegnante è colui che aiuta i ragazzi nel processo di costruzione personale della loro conoscenza matematica
- L'insegnamento è un processo attivo, costruttivo, durante il quale gli studenti cercano di risolvere problemi posti dall'insegnante ma di cui loro stessi si fanno carico
- Il processo di insegnamento - apprendimento è interattivo, caratterizzato da una continua negoziazione dei significati matematici
- Il linguaggio e le relative interpretazioni negoziate in classe fungono dunque da mediatori, nella costruzione della conoscenza che gli alunni attuano attraverso il dialogo, tra i processi cognitivi e l'esperienza vissuta in classe.

La discussione in classe è considerata come momento fondamentale del processo di insegnamento - apprendimento.

Durante la discussione il ruolo dell'insegnante è quello di coordinatore. Più precisamente l'insegnante:

- incoraggia ciascun ragazzo a motivare la propria risposta o la propria strategia
- dà la parola a coloro che la chiedono
- invita gli alunni ad ascoltare e ad esprimersi sulle posizioni dei compagni
- favorisce la negoziazione dei significati delle parole usate
- sintetizza (eventualmente) le differenti posizioni emerse nella classe
- non si esprime sulla correttezza delle proposte degli alunni ma sollecita la riflessione di tutti su ognuna di queste proposte
- Solo alla fine del processo, formula, insieme alla classe, nel modo più adeguato (dal punto di vista matematico) e comunque aderendo agli esiti del lavoro condotto insieme, il concetto o la procedura oggetto di discussione (momento di "istituzionalizzazione").

Alcuni aspetti positivi relativi alle esperienze condotte ed osservati dagli insegnanti di classe sono stati sintetizzati nei seguenti punti:

---

* Nucleo di Ricerca Didattica, Dipartimento di Matematica, Univ. Pavia

- si realizza una maggiore partecipazione della classe al lavoro proposto
- i ragazzi acquisiscono consapevolezza dèl loro coinvolgimento diretto nella costruzione del sapere
- lasciare aperta (e a lungo) una situazione problematica (cioè il non esprimersi, da parte dell'insegnante, sulle strategie che emergono in classe) consente a tutti tempi adeguati di "maturazione" e molte opportunità di espressione e di confronto
- lasciare liberi gli alunni di esprimersi mette in maggiore evidenza il percorso del loro apprendimento e mette in luce gli ostacoli che essi incontrano
- l'interazione tra pari sviluppa la capacità di argomentare sul proprio punto di vista e di interpretare quello degli altri (educazione al rispetto e al confronto con le idee altrui)
- insegnante ed alunni sono consapevoli che si sta costruendo la conoscenza matematica attraverso momenti che sono esclusivi della storia della classe.

Si sono segnalati, infine, alcuni problemi aperti relativi alla realizzazione della modalità didattica illustrata e che costituiscono un ostacolo, ovviamente, per chi volesse attuarla nelle proprie classi. Anzitutto l'insegnante non è ancora preparato a realizzare un tale progetto educativo: occorre l'accettazione e la preparazione per questo nuovo ruolo da parte dell'insegnante e questo nuovo modo di stare in classe; inoltre il materiale didattico adeguato per un tale progetto è tutto da costruire (il libro di testo, per sua natura, non può proporre situazioni aperte che si adattino poi alla evoluzione dello specifico discorso di una classe).

La prima esperienza che si è presentata e discussa con i partecipanti al gruppo di lavoro è relativa alla costruzione della funzione di proporzionalità in una classe in cui il ragionamento proporzionale non è stato semplicemente descritto ai ragazzi ma fatto emergere e discusso abbastanza a lungo in precedenti opportune situazioni problematiche. Attraverso tre successive schede di lavoro (riguardanti un miscuglio di farina e uova per ottenere pasta all'uovo) si è focalizzata l'attenzione dei ragazzi su due fatti:

- la relazione di proporzionalità diretta ha una sua caratteristica rappresentazione grafica in un riferimento cartesiano, ovvero una retta per l'origine;

dal punto di vista simbolico, la proporzionalità diretta è caratterizzata dalla relazione: $y = kx$ o $y/x = k$.

Facendo osservare ai ragazzi che sia in riferimento al grafico cartesiano che alla scrittura simbolica è possibile immaginare "moltissime" coppie di elementi legati dalla relazione considerata, si è voluto anche favorire un primo approccio all'idea di infinito.

Si sono analizzati e discussi insieme, in particolare, alcuni passi significativi di una discussione di classe, sottolineando ogni volta il ruolo dell'insegnante e quello delle varie voci della classe.

La descrizione di una discussione di classe condotta con le modalità su esposte e relativa alla prima parte del lavoro sul ragionamento proporzionale si trova in **Castagnola E., Joo C., Pesci A.**, 1996, Argomentazioni di alunni nella discussione e costruzione del ragionamento proporzionale, *X V Internuclei Scuola Media, Argomentare e dimostrare nella scuola media*, a cura di L. Grugnetti, R. Iaderosa, M. Reggiani, Salice Terme (PV), 43-50.

La seconda esperienza presentata è un lavoro di tipo geometrico che si propone di far acquisire in modo consapevole il concetto di equiestensione come equiscomponibilità e di farne il punto di partenza per la determinazione ragionata delle aree delle consuete figure geometriche.

Dal punto di vista più generale della costruzione di abilità e conoscenze in ambito geometrico, l'attività si propone il recupero della figura come oggetto di studio, attraverso la sua "concretizzazione" e la possibilità di manipolazione su di essa anche nel suo aspetto dinamico attraverso l'uso delle trasformazioni.

Strumento fondamentale è il tangram, il ben noto gioco di origine cinese, del quale vengono sfruttate sia le potenzialità come strumento didattico e ludico, che costituisce un momento di stimolo per la classe, sia la versatilità di utilizzo che favorisce da parte degli alunni risposte creative e consente di coinvolgerli in costruzioni e collegamenti logici di grande interesse.

Momenti fondamentali di questo lavoro sono la costruzione di figure poligonali con il tangram, svolta singolarmente o a piccoli gruppi, anche in forma di gara, seguendo le consegne fornite dall'insegnante, il confronto delle figure costruite dal punto di vista della forma e dell'estensione, il confronto delle modalità di lavoro dei singoli gruppi, la sintesi scritta del lavoro svolto, delle discussioni collettive e dei risultati raggiunti.

Una descrizione di questa attività didattica si può trovare in **Reggiani M., Tomassini F.**, 1997, Un'attività didattica sull'equiestensione, *Atti del secondo Internuclei Scuola dell'obbligo*, Grugnetti ed., Università di Parma, 83-88

LE RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE E LE DIFFICOLTÀ DI APPRENDIMENTO

Coordinatori: Loredana Gherpelli - Nicolina A. Malara*

Le rappresentazioni grafiche sono comunemente utilizzate in un gran numero di situazioni pratiche e in discipline diverse per comunicare informazioni che non potrebbero essere espresse con la stessa sinteticità ed efficacia verbalmente o attraverso dati numerici. Lo sviluppo delle abilità nell'uso delle rappresentazioni grafiche, pur essendo un obiettivo proprio di altre discipline (educazione tecnica, artistica, geografia etc), è centrale in matematica dove tali rappresentazioni hanno anche il particolare ruolo di mediare tra situazioni in esame e la loro matematizzazione.

C'è da sottolineare tuttavia che generalmente, e non solo in Italia (si vedano ad esempio Gaulin 1985 e Janvier 1987), l'insegnante non è consapevole dell'importanza di studiare le rappresentazioni in quanto tali e non sempre coglie, o dedica la dovuta attenzione, alle numerose occasioni offerte in varie circostanze, a volte proprio dagli stessi allievi, per indurre una riflessione sulle potenzialità o i limiti di tali strumenti. Spesso inoltre, proprio per il fatto che le rappresentazioni vengono viste esclusivamente come mezzo da utilizzare, l'insegnante trascura di verificare se l'allievo le interpreta in modo pertinente.

Nostro primo obiettivo nel proporre il laboratorio è stato perciò quello di attirare l'attenzione degli insegnanti sulle rappresentazioni grafiche come oggetto di studio, proponendo alla discussione una serie di situazioni attraverso cui evidenziare l'importanza, nella attività di classe, di una costante riflessione sul ruolo da loro svolto nelle situazioni problematiche studiate. In particolare si voleva poi sottolineare la correlazione tra le rappresentazioni e le difficoltà degli allievi, soprattutto in riferimento alla risoluzione di problemi, mostrando come la rappresentazione condizioni di fatto l'individuazione della strategia risolutiva.

Il laboratorio ha visto una scarsa partecipazione di insegnanti, cosa che per certi versi conferma la sottovalutazione ed il disinteresse a questo tema di molti di loro.

Nel laboratorio inizialmente si è discusso sulle rappresentazioni in generale, distinguendone il doppio carattere:

i) mezzo canonico, socialmente utilizzato, di comunicazione sintetica e visiva di informazioni complesse;

ii) mezzo spontaneo di espressione della configurazione mentale di una situazione, messo in atto da un individuo per organizzare, indirizzare o controllare il proprio pensiero nella risoluzione di un problema e più in generale nella costruzione di un concetto.

* GREM Università di Modena

Per quanto riguarda il primo aspetto, si è richiamato come, per la grande diffusione dei mezzi di comunicazione visiva, rappresentazioni grafiche quali: ideogrammi, ortogrammi, areogrammi, tabelle a doppia entrata, diagrammi cartesiani, frecce, diagrammi ad albero, diagrammi di flusso ecc siano diventati mezzi espressivi di impiego sempre più vasto e che pertanto occorra insegnare agli allievi ad esercitare un controllo sul loro uso e rilevare eventuali manipolazione delle informazioni da loro veicolate (Malara 1990a). Al riguardo sono sono state mostrate e analizzate criticamente rappresentazioni tratte da quotidiani e libri di testo.

Circa il ruolo della rappresentazione nella risoluzione di problemi si è iniziato in riferimento al problema in geometria. Si è rilevato come la rappresentazione in scala, utile per dare un'immagine fedele della forma di un oggetto o per risalire dalle dimensioni del modello all'oggetto reale, in situazioni al limite divenga strumento poco affidabile e portatore di conflitti nell'allievo. Basti pensare a certi "triangoli" impossibili che vengono invece da loro rappresentati o al classico problema noto come "scherzo di Fibonacci" (si veda ad esempio Malara 1997) o anche a pseudo risoluzioni di problemi che si basano erroneamente su proprietà della particolare figura geometrica utilizzata nella rappresentazione. Si è convenuto sulla necessità di affrontare con gli allievi questo genere di situazioni al limite per renderli consapevoli della differenza tra l'astratto di una situazione problematica ed il concreto della rappresentazione che si realizza. Al riguardo sono stati presentati alcuni problemi da noi concepiti nell'ambito di una ricerca sulla didattica del problema (Malara 1990b).

Successivamente sono stati posti in discussione vari esempi di problema, tratti da altri nostri studi e sono stati evidenziati vari tipi di vantaggi offerti dalla rappresentazione nella risoluzione di ciascuno di essi:

a) come chiarificazione di una situazione problematica in cui la semplice lettura del testo può indurre risposte automatiche ed errate (si veda il "problema di Marcello" in Malara 1993a);

b) come aiuto nella risoluzione di problemi con incognite, in particolare per allievi in difficoltà, consentendo l'oggettivazione dei dati, la sintesi delle relazioni tra essi ed il concatenamento di tali relazioni (si veda Malara 1993b); c) come "perno" di strategie risolutive (si veda in Malara e Gherpelli (1994) la soluzione di Salvatore ad un problema, di tipo metacognitivo, di analisi e controllo del processo risolutivo di un dato problema).

Infine si sono presentati alcuni problemi tratti da studi di altri autori (Cifarelli 1991, Doblaev 1969, Galletti ed altri, 1989), e si sono invitati gli insegnanti ad analizzarli dal punto di vista delle possibili rappresentazioni utilizzate dagli allievi e dalle conseguenti difficoltà o facilitazioni offerte.

Fra tutti ci limitiamo a riportare il seguente, adattato da Cifarelli ed interessante perché coinvolgente la dimensione verticale "*In un zona delle Alpi ci sono due laghi, il lago Chiaro ed il lago Blu. Il fondo del lago Chiaro è 12 metri sopra il fondo del lago Blu. La superficie dell'acqua del lago Chiaro è 35 metri sopra la superficie dell'acqua del lago Blu. Il lago Chiaro è profondo il doppio del lago Blu. Cerca di scoprire, aiutandoti con un disegno, quale è la profondità di ciascuno dei due laghi*".

Si sono mostrati infine vari protocolli degli allievi attraverso i quali si è rilevato come la rappresentazione inizialmente messa in atto sia per alcuni bloccante, per altri vincente, mentre per altri ancora sia oggetto di successiva elaborazione e schematizzazione fino al raggiungimento della soluzione.

Gli insegnanti, vivamente interessati e attivi nella discussione, hanno condiviso molti nostri punti di vista e pur inizialmente valutando difficili per la scuola media alcuni dei problemi da noi proposti, dopo aver analizzato le produzioni degli allievi, hanno convenuto sulla loro fattibilità.

BIBLIOGRAFIA

- Cifarelli V., 1990, The development of conceptual structure as a problem solving activity, *proc. PME XIV*, vol.2, 19-26
- Gaulin C., 1985, The need for emphasizing various graphical represntations of 3-dimensional shapes and relations, *proc. PME* , vol. 2, 53-71
- Doblaev L. P., 1969, Thought processes in setting up equations, in Kilpatrick J. (cura di) *Soviet Studies in the Psycgology of Learning and Teaching Mathematics*, vol. III, 103-183, National Council of Teachers of Mathematics
- Janvier C., 1987, *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics*, LEA, Hlilsdale, New Jersey
- Malara N.A., 1990b, Affinamento delle capacità di soluzione di problemi in allievi di Scuola Media, *La Matematica e la sua Didattica*, IV, n. 2, 39-53
- Malara N.A., 1990a, *Probabilità e Statistica nella scuola media: analisi di alcuni libri di testo*, quaderno n. 6 della collana *Innovazioni e tecnologie didattiche*, CNR, Modena, 1990
- Malara N.A., 1993a, On the assesment of pupils involved in mathematics research activities, *Proc. CIEAEM 45*, Cagliari, 1993, 178-185, in versione italiana su *L'Educazione Matematica*, 1995, serie IV, vol. 2, 85-100
- Malara N.A., 1993b, Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 16 n. 10, 928-954

- Malara N.A., Gherpelli L., 1994, Problem posing e ragionamento ipotetico in ambito geometrico, *La Matematica e la sua Didattica*, 1994, n. 3, 229-244
- Malara 1996, L'Insegnamento della Geometria nella scuola media: questioni teoriche e didattico metodologiche, in *L'Insegnamento della Geometria: seminario di formazione per docenti della istruzione secondaria di primo grado*, Quaderno n.19/1 del Ministero della Pubblica Istruzione, 13-76
- Galletti L. ed altri, 1989, La strategia dell'errore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 12B, n.8, 971-1001

GRUPPO DI LAVORO: SCUOLA MEDIA - BIENNIO SUPERIORI

STORIA DELLA MATEMATICA IN CLASSE: IL PROCEDIMENTO PER ANALISI/SINTESI*

Coordinatore Annamaria Somaglia**

Ai lavori hanno partecipato 24 insegnanti di scuola secondaria e 2 professori universitari.

All'inizio è stato distribuito un questionario "di ambientamento" sull'insegnamento della geometria, (F.Furinghetti, 97, 49-50), un questionario finale (25 copie), un fascicoletto contenente un problema del 1600 di M.Ghetaldi (F.Furinghetti, A.Somaglia, 97, 38), alcuni esempi di esercizi e questioni sviluppate in classe sul ***procedimento per analisi-sintesi***, il testo degli esercizi da svolgere nel lavoro di gruppo.

Durante i lavori si sono alternati momenti introduttivi all'uso del procedimento in questione a momenti nei quali i partecipanti stessi svolgevano esercizi:seguiva la presentazione e discussione della soluzione di quelli più interessanti.

L'esperienza presentata si inserisce nel quadro delle varie proposte sull'uso della storia della matematica nell'insegnamento (F.Furinghetti, A.Somaglia, 97) basandosi su un metodo di lavoro che nasce dallo studio della evoluzione del ***procedimento di analisi-sintesi*** nella storia e dalla constatazione che gli studenti hanno difficoltà sulla dimostrazione, questioni per le quali si rimanda alla comunicazione presentata in questo stesso convegno.

L'attività in classe è iniziata in un triennio di liceo scientifico con programma tradizionale, ma è stata presentata con riferimenti anche alla proposta di nuovi programmi Brocca per il Liceo scientifico (Studi e Documenti, 91, 92): dalla attivitànel biennio su algebra e geometria euclidea con riferimenti alla introduzione dell'incognita nella scuola media (un primo esempio nel curriculum di studi di procedimento per analisi) si è passati alla attività nel triennio sulla geometria euclidea da cui è tratto, a titolo di esempio, il problema nella fig.1, usualmente svolto in quarta (altri testi dai manuali tra cui Cateni-Fortini-Bernardi "Il nuovo pensiero geometrico", 2).

---

* Ho presentato tale procedimento sviluppato in classe per la geometria euclidea nel Corso di aggiornamento per docenti "L'insegnamento della geometria" (Dir.F.Furinghetti), Genova, a.s.96/97

** Liceo scientifico c/o Convitto naz. "C:Colombo" Via D.Bellucci 4 -16124 Genova

Si sono viste poi le applicazioni del ***procedimento per analisi-sintesi*** ad esercizi di trigonometria, nei quali si richiede una dimostrazione, alle dimostrazioni dei teoremi di calcolo infinitesimale su continuità/derivabilità di una funzione in un punto e su positivitàdella derivata prima / crescenza di una funzione su un intervallo, chiarendo come proprio tale ultima applicazione abbia reso evidente agli studenti come nel percorso per analisi i passaggi non siano sempre univoci, ed abbia rafforzato in loro l'idea che solo il percorso sintetico possa condurre univocamente a conseguenze vere.

Si è accennato infine al fatto che gli studenti hanno applicato tale metodo di lavoro, come sequenza logica, alla soluzione di problemi di fisica e di geometria analitica.

Dal questionario finale, in cui si chiedeva ai partecipanti

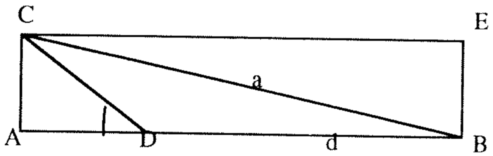
a) se avessero già utilizzato in classe il metodo per analisi-sintesi,
b) in quali elementi della attività dimostrativa in classe ritenevano esso intervenisse maggiormente (Furinghetti,F.,97)
c) quale tipologia di esercizio, tra quelle presentate, ritenevano più utile per approfondire il metodo presentato,

risulta tra l'altro che:

a) 17/25 avevano già utilizzato in classe il metodo di analisi-sintesi, anche se in modo non formalizzato,
b) 23/25 ritengono che intervenga maggiormente nella attività di produzione autonoma di una dimostrazione
c) 10/25 ritengono più utile far svolgere agli studenti il seguente esercizio "mettere in evidenza il legame analisi/sintesi in un esercizio svolto" e 9/25 hanno scelto "data una dimostrazione usuale di un teorema, ricostruire il percorso analitico".

Problema

"Costruire un rettangolo avente una data diagonale a, ed essendo d la differenza tra le sue dimensioni"



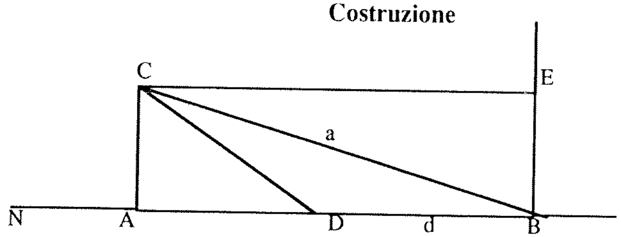
Analisi
Supponiamo il problema risolto:
abbiamo il rettangolo $ABCD$/
BC =a
$AB - AC$ =d
riporto $AD = AC$
$AB - AD$ =d $= BD$
ACD tr. rett. isoscele

$A\hat{D}C = 45°$
BDC noto

Sintesi
$AB - AD = AB - AC =$ d

ADC isoscele
ADC tr.rett. per costruzione
$A\hat{D}C = 45°$
diagonale $BC =$ a per costruzione

Costruzione



Sulla retta BN prendo $BD =$ d
Prendo $N\hat{D}M$ = metà di un angolo retto = 45°
Traccio $C(B$,a) trovo il punto C
$CE // BN$
$CA \perp BN$
$BE \perp BN$
$ABEC$ è il rettangolo cercato

Figura 1

BIBLIOGRAFIA

Si fa riferimento in generale alla bibliografia della comunicazione presentata in questo stesso convegno.In modo più specifico qui mi sono riferita a:

Furinghetti F., 97, "Insegnamento/apprendimento della geometria nella scuola secondaria superiore. Riflessioni su strumenti e prescrizioni a disposizione degli insegnanti" in MPI, Quaderni 19/2, *L'insegnamento della geometria*, Seminario di formazione per Docenti, a.s. 95/96, Lucca,1997.

Furinghetti F., Somaglia A., 97, "Storia della matematica in classe" in *L'Educazione matematica* a. XVIII, s.V, v.2, n° 1, 1 997,2 6-46.

Studi e documenti degli Annali della Pubblica Istruzione, 91, 92, "Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni", n° 56, Roma,1991. "Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei trienni", n° 59/60* e relativa Appendice, n°61, Roma,1992.

PROBLEMI IN RETE: UN GIOCO DA RAGAZZI (UN'ATTIVITÀ PER MOTIVARE, PER RAGIONARE, PER DISCUTERE)

Coordinatore: G. Margiotta*

Il lavoro di gruppo, rivolto ad insegnanti di scuola media inferiore e superiore, si è sviluppato attraverso la discussione di alcuni problemi tratti da "Geometry problem of the week" attività proposta in rete agli alunni da "The Math Forum". (http://forum.swarthmore.edu/geopow/). Si è poi brevemente, sia esplorato alcuni siti significativi per l'insegnamento della matematica, sia presentato il progetto Flatlandia (http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/).L'obiettivo del lavoro è stato quello di stimolare, da una parte, riflessioni su come utilizzare nell'insegnamento della matematica l'uso delle informazioni disponibili in rete per motivare allo studio, dall'altra di mostrare come sia possibile, partendo da queste, realizzare attività di scoperta, di congettura e di formalizzazione. La discussione si è articolata in due momenti: il primo ha riguardato l'analisi dei problemi, i risultati e le soluzioni proposte dagli alunni, nel secondo sono stati presentati alcuni spunti di indagine legati ai problemi risolti. Durante il lavoro è stata seguita una scheda che indicava dettagliatamente le attività da svolgere e proponeva elementi di discussione.

* Liceo Scientifico Francesco d'Assisi, Roma

Ringrazio la prof.ssa A. M. Arpinati per l'attiva collaborazione nella realizzazione di questo lavoro ed il prof. V. Mezzogori per l'aiuto tecnico. Utilissimo è stato il loro entusiasmo!

Problema 1: *Un rettangolo è diviso in quattro rettangoli con area rispettivamente 45, 25, 15 e X. Determinare il valore di X.*

Spunti di indagine

- Il valore dell'area del rettangolo X dipende dal modo in cui si accostano i rettangoli ?
- C'è dipendenza tra la posizione dei rettangoli ed il valore dell'area del rettangolo X?

Si interpreta graficamente il problema: si costruisce un punto che ha per coordinate le dimensioni di un rettangolo di area 45, e si traccia il luogo di punti che individua; si ripete la costruzione per gli altri due valori e si ha per risultato i grafici di figura 1a .

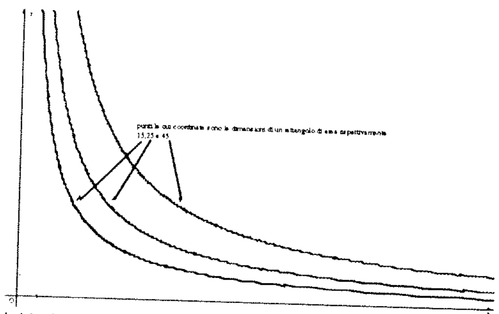


fig.1a

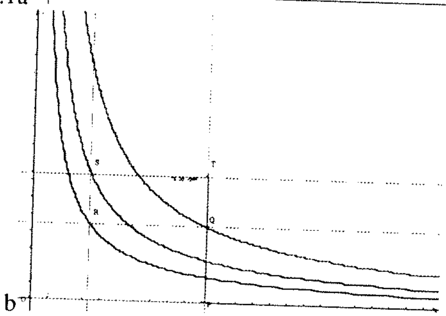


fig.1b

- Quanti valori distinti può assumere l'area del rettangolo X? Quali sono? Trovare la soluzione per via grafica. (figura 1b).
- Generalizzazione: dividere un rettangolo in quattro rettangoli di area rispettivamente a, b , c e x. Determinare i valori di x.

Problema 2: *ABCD è un quadrato inscritto in un cerchio unitario. ABF è una retta. FC è tangente al cerchio. Determinare la lunghezza di FC.*

Spunti di indagine

Con il Cabri si costruisce un quadrato di centro O e vertice B assegnati, inscritto in un cerchio; si determina il punto P intersezione tra la retta per A e B e la tangente in C al cerchio, al variare del vertice B il punto P descrive un cerchio; giustificare l'affermazione.

Si considerano le intersezioni, per ogni coppia di vertici consecutivi del quadrato, tra la retta individuata dal lato del quadrato e le tangenti passanti per gli altri due vertici, così facendo si ottiene un ottagono (figura 2a).

Descrivere le proprietà del poligono.

Si ripete la costruzione precedente per il pentagono (figura 2b) e per l'esagono (figura 2c).

- I poligoni costruiti sono equiangoli?
- Nel caso dell'esagono sono corrispondenti rispetto a qualche trasformazione del piano?
- Perché nel caso del pentagono regolare si costruisce un solo poligono e nel caso dell'esagono regolare se ne costruiscono due?
- Che cosa accade per l'eptagono? E per l'ottagono?
- Cosa accade nel caso generale di poligono regolari con un numero pari di lati? E per i poligoni con un numero dispari di lati?

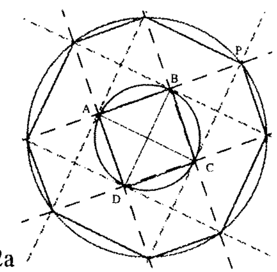


fig.2a

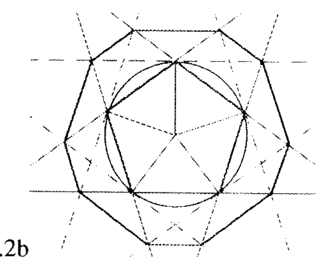


fig.2b

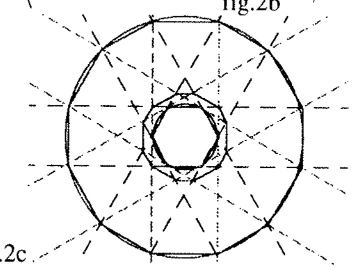
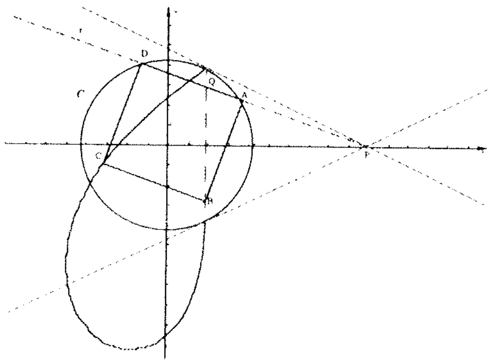


fig.2c

Nel problema iniziale il punto P è costruito dato il quadrato ed il cerchio, è possibile costruire il quadrato inscritto dato il cerchio ed il punto P ? Più precisamente: dato un cerchio C e un punto P ad esso esterno, esiste un quadrato inscritto nel cerchio con i vertici consecutivi allineati con P?
Si studia il problema per via grafica:



1- si costruisce la corda che unisce i punti di contatto tra il cerchio e le tangenti passanti per il punto P;
2- si individua un punto Q variabile su tale segmento e costruisco la retta r per P e Q
3- si determinano le intersezioni A e D con il cerchio C
4-si costruisce il quadrato di lato AD
5- si individua il luogo di punti descritto dal punto C al variare del punto Q sulla corda.
- Questa costruzione fa congetturare l'esistenza e l'unicità del quadrato, perché ?
-Risolvere il problema: dato un cerchio C di centro il punto di coordinate (0,2) e raggio unitario e il punto O di coordinate (0,0) , determinare le coordinate dei vertici di un quadrato inscritto nel cerchio con i vertici consecutivi allineati con P.

Problema 3: *Un foglio rettangolare di dimensioni 6 x 8 è piegato in modo tale che i vertici opposti si sovrappongono. Determinare la lunghezza della piegatura. Come fai per trovarla?*

Spunti di indagine

Si suppone di piegare il foglio in modo che il vertice A appartenga alla retta individuata dai punti A e C. Con l'aiuto del Cabri, si costruisce un modello del problema. In questo modo

i - si individua un punto L che ha per ascissa il punto G, intersezione tra la piegatura e l'asse delle ascisse, e per ordinata la lunghezza della piegatura;
ii - si costruisce il luogo dei punti descritto da L al variare di G tra A e C. (figura 3a)
- Analizzare le proprietà del luogo descritto nella figura 3a e giustificarle rispetto al problema geometrico utilizzando argomentazioni sintetiche.
- Descrivere analiticamente il luogo.
- Utilizzando la costruzione precedente si individua al variare di G tra A e C il luogo descritto dal punto L che ha per ordinata il valore dell'area del poligono ottenuto piegando il foglio. (figura 3b)
- Analizzare le proprietà del luogo e giustificarle rispetto al problema geometrico.

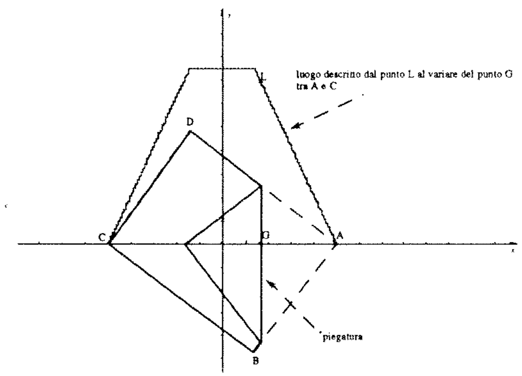


figura 3a

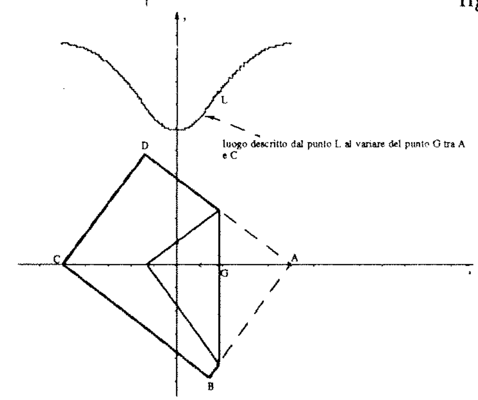


figura 3b

Per ulteriori informazioni si può consultare l'indirizzo **http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/sommario.html**

CONVINZIONI, ASPETTATIVE ED ERRORI IN ALGEBRA

Coordinatori: Fabrizio Monari - Giuseppina Fabris

Considerare gli errori in algebra come eventi tecnici è probabilmente uno dei dogmi ai quali ci siamo più tenacemente aggrappati. Anche se spesso non dichiarata, l'adesione a tale dogma garantisce infatti una chiara e univoca linea di azione: l'errore è una anomalia nel comportamento atteso da parte dell'alunno, che deve solo essere verificata e sanzionata. Memori forse del "prevenire è meglio che reprimere", cerchiamo talvolta di arricchire l'intervento didattico con l'esame di errori "tipici". Ammesso che sia possibile tipizzare un errore, creando in un certo senso una partizione dell'insieme degli errori (problema suggestivo che probabilmente verrà risolto in sede di Giudizio Universale), è esperienza comune che gli alunni non sono in grado di evitare l'errore anche in situazioni già fatte oggetto di esame e discussione.

E' possibile che l'errore sia indotto da un sistema di convinzioni che l'alunno matura, secondo tempi e modalità che l'insegnante non riesce ad avvertire, e che rimangono attive anche dopo i tradizionali interventi di recupero. Accanto a quelle riguardanti i singoli elementi del sapere matematico ($-a$ rappresenta un numero negativo, $a+b$ è maggiore di a, $x+3$ è divisibile per $x+1$), sono probabilmente presenti, ma a un diverso livello, altre convinzioni (meta-convinzioni?). Queste ultime sembrano agire non tanto sulla singola conoscenza, quanto nella fase di organizzazione del "curriculum nascosto", ossia nel momento in cui l'alunno cerca di collegare e rendere in qualche maniera disponibili gli elementi del suo patrimonio cognitivo. I criteri che orientano questa opera di organizzazione, gli eventuali attrattori presenti in quello che appare come un suggestivo sistema dinamico, sono sapientemente celati, tanto che talvolta nemmeno l'alunno sa quali siano. Una possibile organizzazione passa per una sorta di connotazione degli oggetti del pensiero algebrico, e in particolare delle stringhe che ne fanno parte, mediante tre attribuzioni distinte (chiamarle coordinate o numeri quantici può piacere ma è eccessivo).

In questa prospettiva, che segue l'impostazione data da Arzarello, Bazzini, Chiappini in "L'algebra come strumento di pensiero", ogni oggetto dell'algebra viene esaminato secondo tre prospettive diverse:

procedurale-relazionale, sintattico-semantica, linguaggio naturale-simbolico. L'alunno attribuisce quindi una sua densità lungo i tre assi a ciascuno degli oggetti algebrici che incontra. Per intenderci, è comune l'esperienza di alunni che collocano le equazioni in ambito procedurale, innescando errori nella determinazione dell'insieme delle soluzioni o nella sua interpretazione. E' altrettanto comune la difficoltà incontrata a passare da equazioni del tipo $ax+b=c$ a equazioni del tipo $ax+b=x$, conseguenza del fatto che le prime interagiscono fortemente col linguaggio naturale, che si presta a mediare la strategia risolutiva con una sorta di "algebra parlata", mediazione impossibile per il secondo tipo di equazioni. La formazione della terna avviene in forma inconsapevole, ed è condizionata da immagini mentali, contratti didattici più o meno vincolanti, convinzioni già maturate (anche da parte dell'insegnante) che spesso indirizzano la percezione di un oggetto lungo uno degli aspetti che lo caratterizzano. In questo ordine di idee, l'errore è conseguenza della collocazione di un oggetto dell'algebra in uno scenario che non gli compete, oppure che non ne descrive appieno la ricchezza e le articolazioni. Già gli elementi dell'alfabeto algebrico, pur nella loro semplicità sintattica, benché agevolmente inseriti dall'alunno all'interno di alcuni frames tipici delle polarità accennate, pongono interessanti problemi. Anche limitando l'analisi a "=", "-", ":", esistono atteggiamenti e convinzioni radicate, che penalizzano l'aspetto interpretativo del segno, denudato e ridotto a mero elemento stenografico.

Curiosamente, il piu' comune e diffuso errore algebrico, collegato a quella che ingenuamente viene definita "regola dei segni", è di solito qualificato come "errore di calcolo", mentre in realtà afferisce più alla sfera simbolico-relazionale che non a quella schiettamente procedurale. L'esame degli errori collegati a semplici stringhe, di uso comune nel biennio superiore, ma anche nell'ultimo anno di scuola media, sembra confermare e rafforzare l'ipotesi che l'alunno utilizzi meccanismi di riconoscimento e qualificazione degli oggetti algebrici secondo modalità affatto trasparenti.

L'errore, così frequente nel biennio, commesso dall'alunno che sostituisce $1+3x$ con $4x$, oppure lo uguaglia a 0, può essere interpretato come la difficoltà di rivestire di un significato il polinomio $1+3x$, e quindi come una fuga dall'ambito semantico verso i lidi più sicuri degli ambiti procedurali o relazionali. Si ovvia alla "mancanza di chiusura" della formula, percepita come una oggettiva difficoltà nella sua interpretazione, con una sorta di quantificazione, mediata dal segno "=". Nello stesso modo operano gli studenti del biennio che non discutono le equazioni fratte, e che identificano l'equazione con la "risoluzione", sostenuta spesso da un uso ingenuo dei segni "=" ed "x". Di fatto, l'equazione viene privata dei suoi connotati relazionali ed inserita in uno scenario che privilegia gli aspetti dinamici e trasformativi, inibendo i collegamenti fra il processo in atto e l'oggetto da esso designato.

Affrontando i cosiddetti "problemi applicativi" dell'algebra, sostenuti di solito da semplici situazioni geometriche o numeriche, lo studente utilizza spesso la variabile come puro elemento simbolico. Gli oggetti del problema vengono designati mediante nomi di modesta valenza interpretativa, incapaci di prefigurare sviluppi e orientamenti del pensiero.L'attribuzione del nome è quindi ricondotta a mero fatto formale: un numero dispari può essere indicato, assai maldestramente, con x; esperienze con gli alunni mostrano, nel caso di una nominalizzazione più meditata e profonda, come $x+x+1$,una significativa riluttanza nei riguardi della trasformazione in $2x+1$, a conferma di una difficoltà nell' agire in algebra quando l'oggetto del pensiero è soggetto a tensioni interpretative. Il nome di una grandezza sostiene dunque se' stesso, in una sorta di bootstrap, in uno scenario tutto simbolico, senza coinvolgere la sfera relazionale e quella procedurale.

GRUPPO DI LAVORO: BIENNIO SUPERIORI

PROBLEMI RELATIVI ALL'USO DEL SIMBOLISMO ALGEBRICO

Coordinatore: Luciana Bazzini*

La prima parte del lavoro di gruppo è stata dedicata a un esame dei principali problemi dibattuti in letteratura sul ruolo del simbolismo algebrico.

Numerosi studi in letteratura hanno evidenziato le difficoltà incontrate dagli studenti, a diversi livelli di scolarità, di fronte all'uso del linguaggio simbolico. In effetti lo sviluppo di un linguaggio simbolico specializzato può spogliare di significato il linguaggio in cui l'attività algebrica si era precedentemente espressa. Se guardiamo allo sviluppo storico della disciplina, vediamo che l'algebra retorica e quella sincopata erano abbastanza facili da seguire e da capire. Tuttavia, il salto ad un sistema simbolico può nascondere i significati dei termini e delle operazioni che agiscono su di essi. Il linguaggio simbolico ha il potere di rimuovere molte delle distinzioni che il linguaggio naturale preserva, espandendo in questo modo la sua applicabilità. Ne risulta una certa debolezza semantica: allo studente può sembrare che questo linguaggio, che si adatta a tutti i contesti, non appartenga in realtà a nessuno.

In sintesi possiamo dire che i processi di costruzione-interpretazione delle lettere (variabili-parametri) sono cruciali in algebra. Ad esempio la scelta dei nomi per indicare gli oggetti in gioco si lega strettamente al controllo delle variabili che vengono introdotte per caratterizzare le proprietà che si vogliono magnificare di tali oggetti, in relazione al contesto di enunciazione del problema. La difficoltà di questo processo sta nel fatto che il pensiero non può operare con il codice algebrico appoggiandosi sulla semantica del linguaggio naturale per esplicitare le proprietà che si vogliono magnificare. Quindi l'allievo, pur in grado di esprimere con il linguaggio naturale le relazioni tra gli elementi in gioco nella risoluzione del problema (come fa nell'algebra sincopata) può non essere in grado di esprimere tali relazioni attraverso un uso appropriato del codice algebrico.

Il processo di costruzione-interpretazione delle espressioni simboliche può risultare impoverito e spesso bloccato quando il soggetto costruisce e interpreta i termini in modo rigido, cioè senza capire la relazione che si stabilisce tra senso e denotazione all'interno del nome (Arzarello, Bazzini e Chiappini, *L'Algebra come strumento di pensiero*, Quad. CNR, 1994).

---

* Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia

Di conseguenza non vengono colte le possibilità del codice algebrico di incorporare proprietà diverse all'interno del nome. Il nome diventa un designatore rigido, fonte di ostacolo per il ragionamento algebrico, in quanto inibitore della flessibilità necessaria.

Tutte queste considerazioni impongono un esame attento dei problemi connessi all'apprendimento dell'algebra come linguaggio; problemi che affondano le radici nei primi livelli di scolarità, nel rapporto dialettico tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico, tra semantica e sintassi, tra procedure e relazioni.

"Un'armonia di dualità opposte" potrebbe forse sintetizzare il tentativo, a livello di didattica, di far conoscere agli allievi i valori profondi e le potenzialità del linguaggio algebrico.

La seconda parte del lavoro di gruppo si è articolata attorno all'analisi di un'esperienza didattica e ai comportamenti degli allievi nella risoluzione di problemi e nella risposta a domande mirate.

L'esperienza didattica descritta, svolta in una classe di V Ginnasio, era finalizzata a studiare i comportamenti degli allievi in situazioni di apprendimento coinvolgenti l'uso ragionato dei simboli. Come abbiamo già osservato, se i simboli si scollano dai significati, spesso non resta altro allo studente che tentare una vuota manipolazione di segni. Emerge quindi la necessità di una presentazione dell'algebra come strumento ed oggetto di pensiero e non come una serie di meccanismi fini a se stessi, di trucchi misteriosi che funzionano ma non si sa perché.

L'esperienza si è svolta presso il Liceo Classico "Ugo Foscolo" di Pavia nel periodo marzo-giugno 1995. La classe era composta da 20 allievi, considerati di livello medio-alto.

Già dall'anno precedente l'insegnante aveva condotto un insegnamento orientato verso una sistematica abitudine al ragionamento e alla riflessione.

In collaborazione con l'insegnante si è programmato l'argomento "rette e sistemi lineari", dando particolare rilievo al ruolo dei simboli matematici che intervengono di volta in volta.

Al termine della trattazione, i ragazzi hanno riposto a un questionario e successivamente, verso la fine dell'anno, ogni studente è stato intervistato singolarmente.

Si sono discusse alcune risposte significative a domande del questionario e dell'intervista: tali risposte hanno evidenziato persistenti difficoltà nell'uso ragionato dei simboli e la persistenza presenza di "designatori rigidi".

In particolare si sono esaminati i due problemi seguenti, presenti nel questionario:

I)
Date le rette $y = 3x + q$ e $y = mx + 5$
esprimi una condizione perché siano parallele
esprimi una condizione perché siano perpendicolari
esprimi una condizione perché abbiano il punto (1,3) in comune
esprimi una condizione perché abbiano il punto (0,0) in comune

II)
Un sistema lineare di due equazioni in due incognite ammette come soluzione la coppia (1,1)
Discuti le seguenti affermazioni:
Per avere una soluzione che sia doppia di quella data (cioè per avere la soluzione (2,2) occorre:
moltiplicare per due entrambi i membri delle due equazioni;
moltiplicare per due entrambi i membri di una sola equazione
costruire un altro sistema

Si sono esaminate inoltre le seguenti domande, poste ai ragazzi sotto forma di interviste individuali:

I)
Problema del cubo
Prova ad esprimere nel linguaggio algebrico che il rapporto fra il volume di un cubo, di cui non conosci lo spigolo, e l'area del quadrato di lato doppio dello spigolo del cubo è due volte l'area di una faccia del cubo aumentata di tre.

II)
Che senso dai a queste espressioni: $x^2 = px + q$, $y = mv + h$?

GRUPPO DI LAVORO: BIENNIO E TRIENNIO SUPERIORI

COME RECUPERARE L'INTERESSE E LE CAPACITÀ DEGLI STUDENTI IN ALGEBRA E IN GEOMETRIA?

Coordinatori: Giuseppe Accascina - Paolo Maroscia - Giovanni Olivieri - Ferruccio Rohr

Hanno partecipato ai lavori 64 docenti, ai quali è stato distribuito all'inizio del materiale relativo a quattro progetti di lavoro. Dopo la distribuzione del materiale preparatorio i partecipanti sono stati suddivisi in tre sottogruppi, che hanno lavorato separatamente in tre aule. Ciascun sottogruppo ha discusso uno dei primi tre progetti ed è stato coordinato dal presentatore del progetto stesso. La partecipazione è stata attiva e stimolante. Alla fine tutti i partecipanti al gruppo di lavoro si sono di nuovo riuniti in un'unica aula. I professori Gabriella Aprilini, M.Chiara Bazan, Vanna Lombardi hanno illustrato brevemente le attività svolte nei rispettivi sottogruppi.

Viene qui riportata una sintesi del materiale distribuito relativo ai vari progetti.

Progetto n.1: La geometria che serve al computer (presentato da Giuseppe Accascina)

"La matematica ha un'importanza scientifica molto ridotta perché è soltanto calcolo numerico, non è importante per la formazione umana e può essere facilmente sostituita dal computer" ha scritto uno studente nello svolgere il tema n. 4 assegnato alla maturità scientifica nel 1995 (cfr. "Matematica e poesia: un tema difficile?" IRRSAE Toscana, 1997).

Gli studenti che hanno questa opinione sono demotivati nello studio della matematica. Ad essi è dedicato il seguente percorso didattico in cui viene usato il programma di calcolo simbolico DERIVE.

Nel percorso didattico proposto si è fatto ampio uso di figure. Per ragioni di spazio esse vengono qui omesse. Chi è interessato può facilmente riprodurle con DERIVE.

1. Disegno di figure bidimensionali.

1.1 Rappresentazioni di curve assegnate per mezzo di equazioni cartesiane esplicite.

DERIVE permette di disegnare grafici di funzioni del tipo $y = f(x)$. Spesso i grafici danno una buona idea dell'andamento della funzione, ma non sempre. Se proviamo, per esempio, a disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x - 1}$, la funzione appare definita per $x < 1$. Solo cambiando scala ci si rende conto di come stiano effettivamente le cose.

In altri casi la situazione è ancora più complicata. Un'analisi superficiale del grafico della funzione $y = \sqrt{x}\log x$ fa pensare che la funzione, definita per $x > 0$, sia inizialmente decrescente e poi crescente. Il cambiare scala non fa cambiare idea allo studente inesperto. Solo centrando la figura in modo opportuno (e cambiando scala) ci si può rendere conto che la funzione in un intorno sufficientemente piccolo di 0 è crescente. Ma siamo sicuri che non vi siano altri punti di massimo e di minimo? Sarà compito dell'insegnante spiegare agli alunni che con la sola osservazione del grafico non è possibile rispondere a tale domanda.

1.2 Rappresentazioni di curve assegnate per mezzo di equazioni cartesiane implicite.

La versione 3 di DERIVE o una versione successiva permette di disegnare anche curve assegnate per mezzo di equazioni del tipo $g(x,y) = 0$.

Ma in alcuni casi succedono cose molto strane. Se chiediamo, per esempio, di disegnare la curva $xy + 2x - y - 2 = 0$, appare sullo schermo solamente la retta di equazione $y = -2$.

DERIVE permette di esplicitare un'equazione rispetto ad una variabile. Proviamo ad esplicitare rispetto alla y. La risposta è $y = -2$ e sembra confermare la rappresentazione della curva ottenuta in precedenza. Ma, se proviamo ad esplicitare rispetto alla x, otteniamo come risposta $x = 1$. Ciò è una contraddizione.

Proviamo allora a fattorizzare l'equazione usando DERIVE. La risposta è $(x-1)(y+2) = 0$.

Ora finalmente tutto è chiaro: la curva è costituita da due rette. La rappresentazione fornita da DERIVE è sbagliata.

E' quindi prudente non usare le equazioni implicite di una curva ed usare equazioni esplicite. Ma non tutte le curve sono dotate di equazioni cartesiane esplicite. Basta considerare ad esempio la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

1.3 Rappresentazioni di curve assegnate per mezzo di equazioni parametriche.

DERIVE permette di disegnare curve rappresentate per mezzo di equazioni parametriche $[x = f(t), y = g(t)]$. Possiamo pertanto disegnare la circonferenza data sopra.

Possiamo poi chiedere agli studenti di disegnare circonferenze con centro in un punto qualsiasi o ellissi con assi paralleli agli assi coordinati.

Se poi vogliamo dare agli studenti un'idea degli sviluppi successivi, potremmo accennare al problema del disegno di ellissi con assi non paralleli agli assi coordinati o, più in generale, di coniche non espresse in forma canonica. Spiegheremo allora che per risolvere questo problema occorre conoscere ancora altre nozioni che vengono insegnate di solito durante il primo anno di studi universitari.

2. Disegni di figure tridimensionali.

Alcuni studenti sono interessati alla computer grafica. Perché non spiegare loro i primi rudimenti?

Dovremo spiegare come si rappresentano nel piano figure tridimensionali. Introdurremo quindi le proiezioni su un piano parallele ad una retta e le proiezioni su un piano da un punto.

Per poter fare al computer qualche disegno di figure solide bisognerà introdurre le coordinate cartesiane nello spazio, le equazioni delle rette e dei piani e quindi le equazioni delle proiezioni dello spazio sul piano.

Alla fine di questo percorso gli studenti saranno in grado di disegnare una sfera e forse si saranno convinti che, anche per fare con il computer disegni molto semplici, è necessario conoscere molta matematica.

<u>Spunti per la discussione.</u>

- E' possibile introdurre in classe un percorso didattico di questo genere?
- Quali vantaggi ne potrebbero avere gli studenti? Quali svantaggi?
- E' opportuno far sapere agli studenti che anche i più sofisticati software possono commettere errori?
- E' opportuno portare gli studenti nel laboratorio informatico oppure è conveniente chiedere agli studenti di usare il loro computer di casa? E gli studenti senza computer?

<u>Progetto n. 2: Curiosità e non solo .....</u> . (presentato da Paolo Maroscia)

Viene data una lista di problemi concreti che potrebbero essere proposti agli studenti con l'obiettivo di:

- stimolare la curiosità e suscitare l'interesse per la matematica;
- permettere a tutti di impegnarsi nella risoluzione, utilizzando preliminarmente un lavoro di tipo "sperimentale" ;
- partire dalla soluzione di tali problemi per giungere a stabilire alcuni risultati fondamentali.

1. E' vero che tra le persone che partecipano ad un party ve ne sono sempre almeno due che incontrano uno stesso numero di amici?

2. E' vero che un grafo contiene sempre un numero pari di vertici <u>dispari</u> (ossia, tali che per essi passa un numero dispari di lati del grafo)?
3. Esiste nel piano cartesiano un triangolo equilatero tale che tutti i suoi vertici abbiano coordinate <u>intere</u> ?
4. Verificare che il prodotto di due numeri interi positivi che terminano per 76 è ancora un numero che termina per 76. Esistono altri numeri di due cifre aventi tale proprietà?
5. E' possibile esprimere l'inverso del numero reale $x = 1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ nella forma $x^{-1} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, con a, b, c numeri razionali? Un'espressione siffatta di x^{-1} è unica?
6. E' possibile trovare un numero intero positivo x tale che:
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \end{cases} ?$$
7. E' vero che esiste uno ed un solo polinomio a coefficienti reali $f(x)$, di grado minore di 4, tale che: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 10$?

Per finire, un problema più impegnativo:

8. E' vero che:

(a) <u>non</u> esiste alcun numero razionale a tale che $a^3 - 3a - 1 = 0$?
(b) <u>non</u> esiste alcun numero reale α tale che $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$?

<u>Spunti per la discussione.</u>

- E' possibile introdurre in classe un'attività di questo genere, eventualmente come lavoro di gruppo? Come scegliere i problemi?
- Esistono controindicazioni per una tale attività? Esiste il rischio di scoraggiare ulteriormente gli studenti meno motivati?
- Qualcuno di voi ha fatto esperienze di questo tipo? Quali risultati ha ottenuto?

<u>Progetto n. 3: Punti, numeri e figure</u> _ (presentato da Giovanni Olivieri)

Livello. Inizio del biennio della scuola secondaria superiore.

Finalità e obiettivi. Le attività sono finalizzate al perseguimento dei seguenti obiettivi:

- utilizzare in modo produttivo le intuizioni e le conoscenze dei ragazzi;
- destrutturare l'idea di una matematica fatta solo di calcoli e di formule da applicare;
- introdurre a problemi aperti (con più soluzioni e senza strategie prefissate di risoluzione).

Ciò consente di programmare un'attività didattica fondata sull'anticipazione dei concetti. Gli studenti lavorano utilizzando in modo intuitivo conoscenze che in parte già possiedono, anche se non ancora razionalmente organizzate.

Attività introduttive. Uso intuitivo del piano cartesiano e proprietà di base delle figure.

- Dato il punto di coordinate (2, 0), determinare le coordinate degli altri 3 vertici di un quadrato di lato $l = 4$.
- Dati due punti A=(1, 0), B=(4,1), determinare le coordinate degli altri due vertici di un quadrato di lato il segmento AB.
- Determinare le coordinate del quarto vertice di un parallelogramma avente tre vertici nei punti di coordinate (2, 0) , (5, 2) , (0, 2).

Attività di consolidamento. Proprietà di base delle figure.

- Determinare le coordinate del quarto vertice di un parallelogramma avente tre vertici nei punti di coordinate (-2, -3) , (7/2, 2) , (0, 2).
- Determinare le coordinate dei rimanenti vertici di un rettangolo di area 20, contenuto nel primo quadrante e avente due vertici nei punti (1, 1) e (6, 1).
- Determinare le coordinate dei rimanenti vertici di un rettangolo avente due vertici nei punti (2, 1) e (8, 1) e tale che le sue diagonali si intersechino nel punto (5, 3).

Attività avanzate. Anticipazione di concetti.

- Dati i punti A=(2, 1) e B=(6, 2) determinare le coordinate di almeno un altro punto allineato con A e B.
- Dati i punti A=(2, 3) e B=(4, 0) determinare una sequenza di almeno altri tre punti tali che tutti i punti risultino allineati e il segmento individuato da due punti successivi sia uguale al segmento AB.

Attività di approfondimento. Relazioni complesse tra elementi.

- Dato un triangolo di vertici $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$ determinare le coordinate dei vertici A', B', C' di un triangolo avente lati doppi del precedente, il vertice A' coincidente con il vertice A e il vertice B' allineato con A e B.
- Dato il punto P =(4, 3) determinare le coordinate di un punto Q tale che i segmenti OP e OQ risultino tra loro perpendicolari, dove $O = (0,0)$.

<u>**Progetto n. 4: La sfida**</u> – (presentato da Ferruccio Rohr)

Libri di giochi matematici (ad esempio quelli di M.Gardner), siti Internet (ad esempio Flatlandia), gare e olimpiadi di vario livello e nazionalità, offrono una innumerevole quantità di esercizi non standard che la didattica tradizionale non sfrutta adeguatamente. Si tratta di questioni poste in forma di gioco o di competizione, il cui contenuto matematico è spesso

rilevante e non banale, e che in modo dinamico e stimolante possono catturare il ragazzo coinvolgendolo in una **sfida**. Una sfida non solo e non tanto nella competizione collettiva, ma soprattutto una sfida con se stessi, per misurare le proprie forze e potenziare il proprio impegno. Certamente un tale tipo di prove coinvolge maggiormente, può risvegliare interessi, può generare fiducia nelle proprie capacità, può aiutare a recuperare, motivandoli, contenuti matematici, può favorire atteggiamenti autonomi e forme di ricerca personale e autoapprendimento. Presenta però alcuni rischi, tra i quali quello di creare una frattura, una contrapposizione pericolosa tra una matematica creativa, interessante ed una matematica noiosa, necessaria e quello di scoraggiare gli allievi "meno bravi" esaltando il divario tra i più bravi e i più deboli, per i quali viene inesorabilmente sancita una condizione di incapacità.

Ci si chiede allora se sia possibile superare il rischio della frattura e ricondurre ad una struttura didatticamente unitaria la matematica "divertente" e quella "scolastica". E, nel caso in cui ciò fosse impossibile, ci si chiede se valga comunque la pena di mantenere, anche se fortemente separate, le due attività ovvero se sia meglio rinunciare.

Naturalmente dietro alla nostra proposta c'è una valutazione complessivamente positiva circa la possibilità di costruire un certo habitus mentale nell'allievo (ed anche nell'insegnante), anche se siamo convinti che non sono gli esercizi, da soli, a produrre determinati effetti (positivi o negativi che siano).

Discuteremo questi argomenti analizzando vari problemi o assegnati in gare di matematica oppure tratti da libri e da siti Internet.

STRATEGIA DELL'ERRORE

Coordinatori: A.Morelli - F.Casolaro

Si è iniziato con la discussione sull'importanza che hanno gli errori nella didattica, come l'hanno nella ricerca e nello sviluppo della scienza, richiamandosi, fra gli altri ad Enriques ed a Popper. Si considerano ineluttabili, necessari ed, in ogni caso, utili sia gli errori degli alunni, che hanno il diritto di sbagliare e di pretendere correzioni, sia quelli contenuti nei libri di testo, che vanno analizzati, discussi, compresi ed utilizzati, sia quelli degli insegnanti, che anch'essi hanno il diritto di sbagliare, ma anche il dovere di correggersi.

In particolare è stata presentata e descritta la "strategia dell'errore", considerata, anche sulla base di sperimentazioni fatte, molto efficace, consistente nel preparare e presentare agli alunni una situazione problematica che si conclude con un risultato contraddittorio, palesemente impossibile, dovuto al fatto che è presente, ma non evidenziato, un errore nell'impostazione, o nel ragionamento o nel calcolo, messo ad arte, in modo da ingannare gli studenti: questi, resisi conto della assurdità della situazione, cioè fatto quello che è un passo fondamentale nel lavoro di ricerca, sono allora incuriositi e spinti a sciogliere il nodo. Sono stati forniti alcuni esempi di queste "strane situazioni" e indicati vari esempi di errori tipici e frequenti, in riferimento ai quali si potrebbero imbastirne altre. Sono stati considerati diversi temi di maturità scientifica, che offrono sempre ottime occasioni di discussioni e approfondimenti, anche per la presenza talvolta di lievi, spesso opinabili, imprecisioni di linguaggio e inesattezze di affermazioni.

Come esempi di situazioni già confezionate, accenniamo alle seguenti:

1) Ammesso che nella geometria iperbolica la somma degli angoli di un qualsiasi triangolo è minore di un angolo piatto, considerato un triangolo nel quale la somma degli angoli sia massima, con semplici deduzioni, a partire dalla scomposizione di questo triangolo in due triangoli, si trova che la somma degli angoli del triangolo considerato è un angolo piatto. La contraddizione con quanto ammesso risulta evidente e non può essere superata affermando che la geometria iperbolica è contraddittoria: l'errore consiste nell'ammettere l'esistenza del massimo per la somma degli angoli dei triangoli in geometria iperbolica: un insieme limitato può bene non essere dotato di massimo, e se ci fosse non sarebbe minore dell'estremo superiore.
2) Si pone il problema di determinare le equazioni delle tangenti ad una data circonferenza da un punto esterno. Si pongono i dati e si impostano i calcoli in modo che, con un procedimento o con un altro, si trova una sola retta. La "stranezza" qui proviene dal fatto che una delle rette da trovare è parallela all'asse y e si vogliono trovare le equazione delle rette nella forma ridotta, esplicitata rispetto ad y. Volendo presentare una situazione in cui il nodo sia più intricato, si propone un problema in cui c'è da determinare una o più rette o coniche di un fascio che soddisfino ad una data condizione, e una delle rette o delle coniche che soddisfano a questa condizione, pur essendo sicuri dell'esistenza, non si trova, perché essa è la retta o la conica del fascio che sfugge alla rappresentazione utilizzata.
3) Si chiede di studiare e rappresentare la funzione $y = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$, che si trovava in una tema di una recente maturità scientifica. Facilmente si sbaglia trovando un asintoto obliquo, sia per x che tende a più infinito sia per x che tende a meno infinito, presenza questa che è in contrasto con altri elementi e caratteri del grafico della funzione. La contraddizione proviene da uno degli errori tipici, secondo il quale nel calcolare il limite per x che tende a meno infinito, si passa x, negativo, sotto il segno di radicale senza lasciare il segno meno fuori.

Come esempi di errori tipici e frequenti sono stati commentati, fra gli altri, i seguenti.

1) Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto P si tiene conto che il suo coefficiente angolare è dato dalla derivata della funzione calcolata nel valore della variabile corrispondente al punto P, anche quando la funzione è esplicitata rispetto ad x. Ciò accadde in occasione di un tema di maturità scientifica , nel quale si chiedeva di studiare la funzione $x = -y^2/2 + 4y - 6$ e determinare le tangenti al suo grafico nei punti di intersezione con l'asse y.
2) Si applicano le proprietà dei logaritmi a numeri non positivi: ciò porta per esempio a sbagliare quando si deve considerare il campo di definizione della funzione $y = \log((x+1)/(x-1))$, considerandola uguale alla funzione $\log(x+1) - \log(x-1)$.

Inoltre è stata utilizzata una nuova calcolatrice grafica, dotata sia di funzionalità grafiche che della possibilità di effettuare calcoli simbolici, per illustrare alcuni errori tipici.

1) Errori dovuti all'arrotondamento.
   Si parte dal problema. i punti A(-4,-2), B(2,3), C(4,5) sono allineati?
   Come si sa tre punti A, B, C sono allineati, e B è compreso fra A e C, se vale la relazione AB + BC = AC.
   Arrotondando alla prima cifra decimale, nel nostro caso si ottiene:
   $$AB = \sqrt{61} = 7{,}8 \quad BC = 2\sqrt{2} = 2{,}8 \quad AC = \sqrt{113} = 10{,}6$$
   e l'uguaglianza 7,8 + 2,8 = 10, 6 è, in effetti, vera. D'altra parte, se si inserisce l'uguaglianza $\sqrt{61} + 2\sqrt{2} = \sqrt{113}$, la calcolatrice segnala che è falsa: (Può essere un utile esercizio di calcolo sui radicali la dimostrazione della falsità di tale uguaglianza).
2) Errori dovuti all'approssimazione.
   Sono stati preparati due programmi per verificare l'allineamento di tre punti: il primo predisposto per lavorare in modo approssimato e il secondo in modo esatto. Inserendo come dati di ingresso i tre punti A(2,2), B(-1,-1), C(15,15), il primo programma visualizza che i tre punti non sono allineati, mentre il secondo visualizza correttamente che i punti sono allineati. Tutto ciò mette in evidenza la necessità di considerare questo tipo di errori quando si utilizzano i comuni linguaggi di programmazione.
3) Errori "del grafico".
   E' stato messo in evidenza che, analogamente a quanto comunicato da Paolo Boieri in un articolo della rivista Archimede (n. 4 del 1996), a pro-

posito del programma *derive*, anche alcuni grafici di funzioni elementari sulla calcolatrice grafica risultano vistosamente sbagliati: ciò è dovuto al fatto che la calcolatrice grafica, per le funzioni, lavora (al suo interno) nel campo complesso.

COMUNICAZIONI

L'USO DELLE CALCOLATRICI GRAFICHE E SIMBOLICHE NELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA: DIFFUSIONE E PROSPETTIVE

di Sebastiano Cappuccio*

Una della prime applicazioni dei chip, nei primi anni '70, è stata la calcolatrice scientifica (CS), un oggetto non più grande di una agenda tascabile che forniva con buona approssimazione tutte le funzioni elementari e le loro inverse.

Successivamente l'evoluzione della tecnologia ha visto apparire le calcolatrici a cristalli liquidi, con un drastico abbattimento dei prezzi e dei consumi, le calcolatrici programmabili (CP) dotate di linguaggi di programmazione sempre più potenti e sofisticati ed infine le calcolatrici grafiche (CG), prodotte da varie ditte costruttrici come Casio, Sharp, Hewlett Packard e, ultima in ordine di tempo, Texas Instruments.

Di norma queste CG includono, tra l'altro, le seguenti capacità:

1) inserire funzioni in formato algebrico "lineare", ad esempio $y1(x) = x^2 - 4$;
2) tabularne i valori partendo da un dato valore di x ad un passo specificato;
3) tracciarne il grafico relativamente ad un dato intervallo;
4) modificare la scala del grafico.

A queste capacità, essenzialmente legate alla grafica, se ne aggiungono spesso anche alcune altre, a seconda della marca e del prezzo; ed esempio:

5) calcolo numerico di derivate e integrali definiti;
6) manipolazione di matrici e risoluzione di sistemi lineari;
7) risoluzione numerica di equazioni differenziali e graficazione del risultato;
8) gestione di liste;
9) calcoli statistici;
10) manipolazione di frazioni;
11) possibilità di scambio di dati e programmi con altre macchine simili, usando varie tecnologie;
12) possibilità di collegamento con "data display" da usare con la lavagna luminosa.

Una ulteriore evoluzione è la capacità di eseguire anche calcolo simbolico incorporando sistemi di elaborazione algebrica (Computer Algebra

---

* Istituto Tecnico Aeronautico - Forlì

Systems = CAS), simili a quelli già da tempo esistenti nel mondo dei calcolatori, come ad esempio *DERIVE*. Questa strada però è seguita solo da pochissimi produttori, sia per una politica di contenimento dei costi, che, e forse soprattutto, per paura che le accresciute capacità di calcolo rendano il prodotto inviso agli insegnanti ed alle autorità scolastiche e che queste ne proibiscano l'uso in classe e durante gli esami.

D'altra parte, malgrado queste resistenze, le capacità delle calcolatrici grafiche (CG) e simboliche (CAS) sono viste da molti non come un pericolo ma al contrario, come una importante opportunità offerta dalla tecnologia alla didattica della matematica e in molti paesi la ricerca didattica si sta orientando verso questo promettente settore.

AGGIORNAMENTO DEGLI INSEGNANTI

Tutti sono d'accordo che si deve passare attraverso un adeguato training degli insegnanti, effettuato in vari modi, di solito attraverso organismi istituzionali (IREM : Istituti di ricerca sull'insegnamento della matematica in Francia, Istituti Pedagogici in Germania), e/o associazioni di insegnanti tra cui spicca la T3, nata negli USA e diffusa in molte nazioni soprattutto europee, sponsorizzata attraverso convenzioni temporanee dalla Texas Instruments. Spesso (ad esempio in Germania) vengono adottate, per l'aggiornamento degli insegnanti, soluzioni di tipo "misto": gli organismi istituzionali organizzano i corsi che vengono poi affidati ad organizzazioni private.

MODALITÀ DI UTILIZZAZIONE

- Come supporto all'insegnante ("lavagna intelligente");
- come controllo del proprio lavoro da parte dello studente, con la possibilità di autocorreggersi;
- come strumento per una strategia di "discovery learning", cioè di scoperta guidata nell'approccio a vari argomenti;

A questi modi di utilizzo, comuni praticamente a tutte le esperienze in atto nei vari paesi, aggiungerei anche i seguenti:

- come cavallo di Troia, per sfruttare l'atteggiamento di interesse e di maggiore collaborazione che di norma gli studenti hanno non appena si usa la tecnologia;
- come recupero e sostegno di alunni in difficoltà, un campo d'azione questo secondo me molto promettente anche se ancora tutto da esplorare (a quel che mi risulta solo in Giappone esistono esperienze al riguardo).

Comunque tutti concordano sul fatto che un uso sistematico dei CAS richiede profonde modifiche del tipo di quesiti e di esercizi di verifica da proporre agli studenti e soprattutto sul modo di presentarli.

DOVE SONO UTILIZZATE?

E' importante distinguere tra due situazioni: l'uso in classe e l'uso durante gli esami; ovviamente questa seconda situazione condiziona pesantemente la prima sia dal punto di vista quantitativo che qualitativo. Bisogna dire che, nei paesi nei quali sono state attivate sperimentazioni sull'uso dei CAS ed esiste un esame al termine della scuola secondaria superiore (Maturità, Bac, Matura, Abitur...), agli studenti viene proposto un tema d'esame preparato ad hoc.

Le situazioni nei vari paesi sono tra le più disparate: si va dalla completa libertà d'uso all'obbligo di utilizzo in tutte le attività o solo in alcune, fino alla assoluta proibizione.

Vedremo ora un po' più in dettaglio la situazione relativa a vari paesi. Sarà dato particolare rilievo ai paesi europei perché, pur avendo sistemi scolastici piuttosto differenti tra loro, sono accomunati da uno stesso plafond culturale che induce a porre l'accento, nell'insegnamento della matematica, più sui concetti e sulle dimostrazioni che su una pura e semplice acquisizione di tecniche di calcolo.

AUSTRIA

L'Austria viene da esperienze che la vedono all'avanguardia nell'uso dei CAS, grazie al RISC Institute dell'Università di Linz con la supervisione di Bruno Buchberger, che è riuscito a coinvolgere il Ministero della Pubblica Istruzione.

Fin dal 1991-92 tutte le scuole secondarie austriache sono dotate di un programma di elaborazione simbolica (*DERIVE*) e nel 1993 è stato iniziato un progetto di ricerca sull'uso dei CAS nella didattica della matematica che coinvolge circa 700 studenti e 28 insegnanti di 34 classi di 17 diverse scuole austriache. Dall'anno scorso è partito un analogo progetto con la calcolatrice TI-92.

FRANCIA

Insieme all'Austria è il paese in cui maggiormente le autorità scolastiche sono sensibili all'uso delle CG e dei CAS nella scuola: nelle scuole secondarie superiori l'uso delle calcolatrici programmabili e dotate di funzioni statistiche è obbligatorio. Dal settembre 1995 l'uso dei CAS è entrato a far parte dei curricoli degli studenti universitari in facoltà scientifiche.

Gli esami di Baccalaureato (che sono preparati a livello ministeriale con possibilità di modifiche a livello regionale, le "academies") danno curiosamente limitazioni solo per quando riguarda le dimensioni fisiche (superficie d'appoggio non superiore a quella di un foglio A5) e non per le prestazioni di calcolo. Questi vincoli escludono l'uso dei computer portatili ma non quello di tutte le calcolatrici (e dei "palmtop").

L'uso delle calcolatrici agli esami è di norma consentito e solo per certi quesiti è proibito.

Fin dal 1990 sono state realizzate sperimentazioni con i CAS (soprattutto *DERIVE*) che ora è diventata sperimentazione con le calcolatrici simboliche (TI-92).

GERMANIA

Il sistema scolastico tedesco varia da Land a Land e gli atteggiamenti sono molto diversi; da rilevare (stranamente?) una maggiore sensibilità da parte della Autorità scolastiche verso le CG e l'uso della tecnologia nella didattica in genere da parte dei Land dell'ex DDR rispetto a quelli delle regioni occidentali.

PORTOGALLO

Dal 1990 le calcolatrici (non CG) sono obbligatorie in classe e negli esami; dal 1998, con l'introduzione di nuovi curricoli, tutti gli studenti devono avere una CG. (*DERIVE* è presente in tutte le scuole).

DANIMARCA

Ora l'uso delle CG (non CAS) è consentito; dal 1998 le CG (non CAS) saranno obbligatorie. Durante gli esami gli studenti devono sostenere due prove scritte, in due giorni diversi, una con CG e l'altra senza.

FINLANDIA

Le CG sono consentite dal 1995; saranno obbligatorie dal 1999; non è consentito l'uso dei CAS.

SPAGNA

Situazione simile a quella italiana: le CS sono permesse ma il loro uso non viene di norma insegnato; la CG sono praticamente sconosciute. È imminente però una riforma dei curricoli che prevede esplicitamente l'uso delle CG e il loro uso sarà previsto anche durante gli esami finali. L'aggiornamento degli insegnanti avviene su base privata e volontaria; l'interesse è notevole: solo nel 96/97 più di 1000 insegnanti hanno seguito corsi sulle CG.

GRAN BRETAGNA

A quel che mi risulta il nuovo governo britannico sembra prestare maggiori attenzioni all'uso dei CAS a livello undergraduate che di High

School. Sono presenti centri, di norma legati ad Università (ad es. Chichester, Plymouth) che si occupano di organizzare e seguire sperimentazioni e di aggiornare gli insegnanti.

ITALIA

Grande interesse da parte dei docenti indirizzato forse più verso i CAS che verso le CG, a giudicare dalle richieste di partecipazione a corsi di aggiornamento (v. ad es. quelli dell'IRRSAE Emilia e Romagna). L'aggiornamento avviene praticamente solo su base privata e volontaria. Le Autorità Scolastiche mostrano uno scarso interesse verso l'uso delle calcolatrici di qualunque tipo e sembrano attirate più da altre applicazioni della tecnologia (multimedialità, ipertesti, Internet ...). Le calcolatrici sono praticamente ignorate dai curricoli e anche gli organismi istituzionali non mostrano un particolare impegno su questo fronte (fatte ovviamente le debite eccezioni: vedi ancora l'IRRSAE Emilia-Romagna)

Non diciamo nulla su paesi a struttura federale, come Canada, Stati Uniti, Australia, nei quali l'educazione segue indirizzi variabili da stato a stato o addirittura da scuola a scuola. Si ripropongono comunque gli stessi atteggiamenti già descritti: calcolatrici proibite, ignorate, consigliate, obbligatorie.

Le notizie che qui sono state riferite sull'uso delle calcolatrici grafiche e simboliche nei sistemi scolastici di varie nazioni provengono dalla partecipazione dello scrivente ad alcuni convegni internazionali, da colloqui informali con colleghi di altri paesi e dalla consultazione della letteratura esistente. Chi volesse approfondire l'argomento potrà attingere ai risultati di una ricerca che il Prof. Adrian Oldknow ha sviluppato nell'ambito del Working Group 3.1 della International Federation of Information Processing (un organismo dell'UNESCO). I risultati della ricerca saranno riferiti nel corso della "IFIP WG 3.1 Working Group Conference", Grenoble, 26-31 ottobre 1997 avente per tema: "Secondary School Mathematics in the World of Communication Technologies: Learning, Teaching and the Curriculum".

Gli Atti del Convegno saranno pubblicati da Chapman & Hall, a cura di David Johnson e David Tinsley.

****

RIFLESSIONI SULLE RISPOSTE DEGLI STUDENTI A PROBLEMI DI ANALISI MATEMATICA

di B. Barigelli[1] - V.Tombolesi[2]

Riflettendo sui nuovi programmi di Matematica per l'ultima classe del Liceo Scientifico sperimentale che prevedono oltre all'Analisi Matematica anche argomenti quali la Probabilità e la Statistica, visti gli errori che ripetutamente si registrano nei problemi assegnati nelle prove d'esame della Maturità Scientifica e dei Corsi di Matematica di base, quali ad esempio Matematica Generale nelle Facoltà di Economia o Istituzioni di Matematiche in molte Facoltà scientifiche, ci siamo chiesti se fosse opportuno privilegiare la qualità rispetto alla quantità.

Alla luce dell'esperienza accumulata in lunghi anni d'insegnamento, abbiamo pensato che fosse utile raccogliere gli errori più significativi, da noi incontrati, in un volume di prossima pubblicazione.

Ci è sembrato opportuno proporre alcuni degli errori, che secondo noi possono essere abbastanza interessanti, in un Convegno di Didattica della Matematica impostato sugli errori, sulle difficolta', sulle conquiste nell'apprendimento della Matematica.

Problema n. 1: Studiare, nei punti $x = 0$ ed $x = 1$, la continuita' della funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\log x}{\log x} & 0<x<1\\ 0 & x=0\\ 3 & x=1\end{cases}$$

Lo studente incomincia a notare che $f(0) = 0$, poi calcola

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\log x}{\log x}=\frac{\cos(-\infty)}{-\infty}=\overset{\text{Hospital}}{\rightarrow}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x}\sin\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\sin\log x$$

ed ottiene che il limite non esiste.

Per la continuità nel punto $x = 1$, calcola $f(1) = 3$ e $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{\cos\log x}{\log x}=-\infty$

[1] Ist.Mat-Stat.- Fac. Ec. Univ.Ancona, Via Pizzecolli – 60100 ANCONA

[2] Liceo Scient. "Da Vinci", Jesi (An)

Lo studente conclude che la funzione non è continua né in $x = 0$, né in $x = 1$.

Si noti che è il "rapporto" $\dfrac{\cos(-\infty)}{-\infty}$ a suggerire allo studente di applicare la regola di de L'Hospital e, poiché il limite non esiste, lo studente conclude che la funzione non è continua in $x = 0$.

Lo studente studia invece correttamente la continuità in $x = 1$.

Problema n. 2:

La funzione $f(x) = x^2|x|$ è derivabile in $x = 0$?

Lo studente calcola subito la derivata del prodotto di due funzioni ed ottiene

$$f'(x)=2x|x|+x^2\frac{x}{|x|}$$

poi esamina il dominio della derivata prima: $D_{f'(x)}=\{x\in R\setminus x\neq 0\}$ e conclude che la funzione non è derivabile in x=0.

Cerchiamo di interpretare il ragionamento dello studente: egli nota che la funzione da derivare è il prodotto di due funzioni ed applica subito la regola di derivazione del prodotto, senza chiedersi se ciò sia possibile. Non ha capito che tale regola esprime una condizione solo sufficiente e che, in questo caso, non è applicabile.

I Problemi 1 e 2 sono stati proposti recentemente in un test rivolto a 27 studenti di una classe V del Liceo Scientifico di Jesi (An) tendente a verificare la preparazione sulla continuità e sulla derivabilità .

Il risultato ottenuto è il seguente:

Problema n. 1:	7	(26%)	studenti hanno applicato la regola di de L'Hospital
	20	(74%)	studenti hanno risposto in modo corretto
Problema n. 2:	10	(37%)	studenti hanno risposto 'non è derivabile'
	17	(63%)	studenti hanno risposto in modo esatto

Questo cosa ci fa dedurre?

Che la funzione coseno è stata assimilata abbastanza bene per cui di fronte ad un 'cos(-∞)' lo studente capisce che non è necessario, né possibile applicare la regola di de L'Hospital.

I risultati del problema n.2 dimostrano che sulla derivabilità il problema è più serio.

Da alcuni anni viene proposto agli studenti che affrontano la prova d'esame di Matematica Generale nella Facoltà di Economia di Ancona il seguente problema:

Problema n. 3:
Indicare, motivando la risposta, che cosa rappresentano i simboli

1) $\int \frac{1}{x}dx$ 2) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x}dx$ 3) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}dx$ 4) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ 5) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}dx$

Riportiamo solo alcune delle risposte ottenute:

- il primo è un integrale indefinito perché "non è dichiarato" l'intervallo di integrazione;
- il secondo e il terzo sono entrambi integrali definiti perché "ci sono" gli estremi di integrazione;
- il quarto è un integrale indefinito perché l'intervallo di integrazione non ha gli "estremi definiti ";
- il quinto integrale non esiste perché una primitiva di $\frac{1}{x}$ è log x ma non esistono né log (-3) né log (-2).

Come può aver ragionato lo studente sull'integrale 5)? Egli ha perfettamente capito che il logaritmo di numeri negativi non esiste, per cui non esistono né log(-3) né log(-2). Ma ha qualche problema sul concetto di primitiva. Invitato a motivare ulteriormente la sua affermazione, lo studente insiste e dice che la funzione logaritmo è " situata " a destra dell'asse y per cui " l'area tra -3 e -2 non c'è ".

Una riflessione che viene spontanea è: l'insegnante è stato abile nel trasmettere il messaggio? Come intervenire sullo studente per evitare che ripeta gli errori?

Siamo concordi nel ritenere che l'insegnante dovrebbe:

- insistere maggiormente sulla parte teorica, in particolare, sul significato di condizione necessaria, sufficiente, necessaria e sufficiente; di integrale indefinito e quello definito;
- presentare un'ampia gamma di esempi e controesempi;
- ribadire inoltre che non basta ascoltare: bisogna anche capire e soprattutto studiare.

Chi di noi infine non ha dovuto correggere errori del tipo:

Problema n. 4:
Dare la definizione di funzione pari.

"Una funzione è pari quando contiene x elevata ad esponente pari", oppure –peggio- "x elevata a potenza pari".

Problema n. 5:
Calcolare la derivata della funzione y = log2.

"Poiché la derivata di logx è $\frac{1}{x}$, la derivata di log 2 è $\frac{1}{2}$".

****

UNA INDAGINE SULLA "REGOLA DI *DE L'HOSPITAL*": CONSIDERAZIONI E CONTROESEMPI.

di B.Barigelli[3] - M.Russo[4] - E.Vighi[5]

Come è ben noto, "la regola di *de L'Hospital*" è di valido aiuto per il calcolo dei limiti che si presentano nelle forme indeterminate 0/0 e ∞/∞.

La ricerca e l'analisi di "controesempi" ci hanno indotto ad esaminare dettagliatamente alcuni dei testi più noti a livello universitario ed a livello di Scuola Media superiore e le annate più recenti di alcune Riviste di Didattica della Matematica.

Alcuni testi prima enunciano due teoremi, il primo con riferimento alla forma 0/0, il secondo alla forma ∞/∞ e poi, passando alla fase operativa, parlano di "Regola di de L'Hospital" intendendo per regola "qualcosa di meccanico" che va tuttavia applicata con attenzione, nel senso che non sempre conduce ad ottenere un valore del limite.

Abbiamo constatato che le formulazioni del teorema relative, ad esempio, alla forma 0/0, possono essere, a grandi linee, suddivise in due gruppi:

[3] Ist.Mat-Stat.- Fac. Ec. Univ.Ancona,Via Pizzecolli – 60100 ANCONA
[4] Liceo Scient. "Cambi", Falconara M. (AN)
[5] I.P.C. "Podesti", Ancona

Formulazione 1	Formulazione 2
<u>IPOTESI</u>:	<u>IPOTESI</u>:
sia $x_0 \in H$ (con H intervallo $\subseteq R$)	sia $x_0 \in H$ (con H intervallo $\subseteq R$)
a) se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$	a) se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
	a1) se esistono $f'(x)$ e $g'(x)$ in $H_0 = H \setminus \{x_0\}$
	a2) se per $x \in H_0$, si ha $g(x) \neq 0$
	a3) se per $x \in H_0$, si ha $g'(x) \neq 0$
b) se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} L \in R \\ \pm \infty \end{cases}$	b) se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} L \in R \\ \pm \infty \end{cases}$
<u>TESI</u>:	<u>TESI</u>:
allora esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	Allora esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
e risulta $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$	e risulta $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

nel primo sono sottintese alcune ipotesi relative all'annullarsi della funzione $g(x)$ e della sua derivata $g'(x)$, nel secondo, invece, tali ipotesi sono rese esplicite.

La formulazione 1 è riportata soltanto in meno del 10% dei testi esaminati.

Tra gli autori che seguono la formulazione 1, alcuni intendono che le ipotesi a1), a2), a3) sono verificate implicitamente se è verificata l'ipotesi b); altri invece sostengono che l'esistenza del limite b) richiede che la funzione f'/g' sia definita in qualche intervallo aperto contenente x_0, (escluso eventualmente x_0), ciò implica che f e g siano derivabili e $g' \neq 0$.

Da un punto di vista didattico ci sembra che questo modo di esporre la regola di de L'Hospital a studenti che affrontano il calcolo di limiti di forme indeterminate possa risultare in qualche caso fuorviante. Inoltre riteniamo che sia opportuno evidenziare le ipotesi "implicite" e verificarle nelle applicazioni per evitare calcoli onerosi che potrebbero risultare del tutto inutili e/o condurre a conclusioni errate. Si consideri il seguente esempio.

Siano: $f(x) = x + \cos^2(\frac{\pi}{4} - x)$, $g(x) = (x + \operatorname{sen} x \cos x) e^{\operatorname{sen} x}$,

$f'(x) = 2\cos^2 x$, $\quad g'(x) = \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x)$.

Risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cos^2 x}{\cos x\, e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x + 2\cos x)} = 0,$$

mentre non esiste il limite del rapporto delle funzioni perché l'esponenziale assume infinite volte tutti i valori compresi nell'intervallo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

In questo esempio la regola di de L'Hospital non è applicabile perché è caduta l'ipotesi relativa alla $g'(x) \neq 0$ in *un* intorno di più infinito.

Da qualche autore l'ipotesi $g(x) \neq 0$ viene presentata come una ipotesi implicita nella $g'(x) \neq 0$. Infatti l'ipotesi $g'(x) \neq 0$ implica che la funzione $g(x)$ sia crescente o decrescente in senso stretto e quindi interseca l'asse x al più in un punto. Tuttavia nell'applicazione del teorema, è più opportuno esaminare direttamente la $g(x) = 0$ prima di prendere in conside-razione la $g'(x) = 0$, perché se risulta $g(x) = 0$ non occorre, prima di tutto calcolare la $g'(x)$ e non serve poi calcolare le eventuali soluzioni della $g'(x) = 0$.

Su alcuni testi si trovano controesempi dovuti essenzialmente a Cesaro, Peano ed altri autori, che riguardano l'ipotesi dell'esistenza del limite del rapporto delle derivate, mentre soltanto tre testi riportano un controesempio sulle altre ipotesi.

E' opportuno inoltre sottolineare che la Regola di de l'Hospital non va applicata in modo meccanico perché si può cadere in calcoli pesanti ed infruttuosi. Non è detto, come viene scritto in testi, anche a livello universitario, che nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate prime risulti una forma indeterminata, riapplicando una o più volte la Regola, cioè calcolando il limite del rapporto tra le derivate seconde, tra le derivate terze, e così via si arrivi all'eliminazione della forma indeterminata.

A tal proposito consideriamo due esempi:

1) siano $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Risulta $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^{-1}} = \dfrac{0}{0}$.

Applicando ripetutamente la regola si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{k!\,x^{-k-1}} = \frac{0}{0};$$

2) siano $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Risulta

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Non tutti i testi danno la dimostrazione dei teoremi. Quelli che la riportano utilizzano il teorema degli incrementi finiti di Cauchy vissuto dal 1789 al 1857, cioè circa un secolo dopo la pubblicazione di de L'Hospital. Solo due sono le dimostrazioni da noi trovate [1] e [2] che non fanno ricorso al teorema di Cauchy.

Nella tabella seguente vengono riportate le varie accezioni sul modo di scrivere il nome de L'Hospital e la frequenza con cui esse compaiono.

		UN.	SC. SUP.
1	di l'Hospital	1	0
2	di l'HÙpital	2	0
3	di L'Hospital	1	0
4	di L'Hopital	7	1
5	di L'HÙspital	7	0
6	di L'HÙpital - Bern.	1	0
7	de l' HÙpital	5	2
8	de l'HÙspital	1	0
9	de l'Hospital	2	1
10	de L'HÙpital	2	2
11	de L'HÙspital	1	0
12	de L'Hopital	1	1
13	de L'Hospital	9	6
14	De l'HÙspital	1	0
15	De l'Hospital	2	4
16	De L'HÙspital	1	1
17	De L'HÙpital	2	0
18	De L'Hospital	5	3
19	Dell'Hospital	2	0
20	l'HÙpital	2	0
21	L'Hospital	3	0
22	Nessun nome	2	0

BIBLIOGRAFIA:

[1] Harting ; L'HÙpital's Rule Via Integration; Am. Math. Monthly, pp.156 - 157; 1991

[2] Myskis A. ; Lezioni di matematica generale; MIR pp.152; 1979

****

CONCEZIONI E CONCETTI DIFFORMI COSTRUITI DALLA SCUOLA

di Carlo Dapueto, Simonetta Greco*

Premessa

In questo intervento si vuole mettere in evidenza il fatto che molte delle difficoltà incontrate dagli studenti nell'apprendimento della matematica sono indotte dal modo in cui certi concetti vengono introdotti e, più in generale, sono da collegare all'immagine della matematica che viene costruita attraverso le attività didattiche.

Queste riflessioni sono emerse durante la preparazione e la sperimentazione di un progetto per l'insegnamento della matematica realizzato dal nucleo di ricerca didattica Macosa e indirizzato alla scuola secondaria superiore. Immagine della matematica

Agli alunni delle classi prime che sperimentano il progetto viene proposto all'inizio dell'anno scolastico un questionario che comprende sia domande di carattere generale sia domande tecniche; le prime hanno lo scopo di esplorare l'immagine della matematica che gli alunni hanno alla uscita dalla scuola media.

Limitandoci ad alcuni quesiti, osserviamo che (indipendentemente dall'indirizzo: sono coinvolti sia licei che istituti professionali e tecnici) di fronte alla domanda "Secondo te a che cosa serve la matematica?" più della metà degli studenti sceglie "per imparare a ragionare", di fronte alla domanda "Secondo te che cosa serve per essere bravo in matematica?" (con la richiesta di indicare 2 risposte) la maggior parte degli studenti sceglie la coppia "saper riflettere" e "essere attenti a non sbagliare calcoli, passaggi,...".

Da queste risposte emergono chiaramente la visione culturale della matematica e l'atteggiamento verso il lavoro matematico che tende a co-

* Nucleo di Ricerca Didattica MaCoSa, c/o Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova; via Dodecaneso, 35 - Genova; e-mail: macosa@dima.unige.it

struire la scuola, confermati anche dal netto prevalere di "problemi su triangoli e solidi", "calcolo di espressioni, polinomi, ..." e "risoluzione di equazioni" come risposte a "Tra le seguenti, indica le 2 attività che ti sembra di avere svolto più spesso?" (solo l'1% sceglie "usi della matematica per affrontare temi di vario genere").

Dalle risposte a una domanda sul modo di lavorare in classe durante le lezioni di matematica emerge che sono quasi del tutto trascurati l'uso di schede di lavoro, le discussioni collettive e i lavori di gruppo, il che (oltre a testimoniare una scarsa attenzione alla presenza tra gli alunni di diversi stili cognitivi, e alle sue potenzialità, alla esplorazione delle difficoltà concettuali degli alunni, alla verifica in itinere, ...) mostra come più in generale l'apprendimento scolastico sia spesso separato da altre forme di apprendimento; si pensi alle forme di istruzione e di comunicazione diffuse in ambiti extrascolastici come il gioco, lo sport, il lavoro, ...

Significatività culturale e didattica dell'introduzione dei concetti

In molti casi è il modo stesso in cui vengono introdotti i concetti matematici a creare confusioni che sono all'origine delle difficoltà e degli errori degli alunni. Vediamo alcuni esempi.

I numeri interi vengono spesso introdotti come "numeri con segno" (i numeri naturali diventano numeri assoluti, che sono altro rispetto ai numeri non negativi; invece di "3" si scrive "+3"; il valore assoluto è il numero senza segno; ...), il loro prodotto viene ricondotto a regole sui prodotti tra "+' e "-", ...

In questo modo si vorrebbe riprodurre la costruzione insiemistica dei numeri interi a partire dai numeri naturali, ma non se ne può fare altro che una caricatura, sia dal punto di vista tecnico (vengono banalizzati o trascurati i concetti di "immersione", "legge quoziente", ...) che culturale (non vengono messe in luce le motivazioni fondazionali di tale costruzione). Non si tiene conto delle esperienze degli alunni: i calcoli, le notazioni, ... che gli alunni hanno già sperimentato e possono sperimentare in ambiti extrascolastici (le temperature, per esempio) o usando le calcolatrici tascabili (in cui "+" è solo un operatore binario, in cui i numeri negativi sono introdotti mediante il tasto di "negazione",...). Inoltre questo approccio è alla base di alcuni errori frequenti:

(-1)(-n) considerato sempre positivo, a(-b)(-c) che diventa a+bc, |-x| che diventa x, ...

Per l'introduzione del concetto di probabilità in genere si ricorre alla "definizione" (classica) di Laplace, con la motivazione (in qualche modo opposta a quella che è all'origine del citato approccio ai numeri interi) secondo cui sarebbe una definizione semplice, essendo stata la prima messa a

punto storicamente. Ma questo approccio induce a considerare uniformemente distribuite anche variabili casuali che non sono tali, a ritenere che le probabilità siano numeri razionali, ..., preclude il riferimento a vari fenomeni reali che sono spesso oggetto di valutazioni probabilistiche e tende a ridurre il calcolo delle probabilità ad esercizi di calcolo combinatorio, rafforzando l'immagine della matematica come insieme di nozioni e prestazioni fini a sé stesse.

Perché non seguire un approccio più moderno (sostanzialmente assiomatico) a tale concetto: introdurre le proprietà delle misure di probabilità come strumenti per trovare valutazioni probabilistiche di nuovi eventi a partire da valutazioni note (in base a considerazioni non solo matematiche!) di altri eventi, in analogia alle proprietà delle frequenze percentuali.

I polinomi vengono in genere introdotti per sviluppare il calcolo letterale, che invece non dovrebbe essere riferito solo ai termini polinomiali ma andrebbe collegato alle proprietà dei numeri reali, all'analisi della struttura dei termini, alla composizione di funzioni, ...

Il concetto di polinomio (che non può essere motivato come modello matematico di fenomeni reali) dovrebbe trovare una introduzione significativa in contesti più interni alla matematica (analogie strutturali e, poi, approssimazioni di funzioni, ...). Per altro lo sviluppo del calcolo letterale solo sui polinomi induce l'acquisizione di meccanismi che poi vengono estesi acriticamente ad altre situazioni. Si pensi alla applicazione dei cosiddetti "principi di equivalenza" per trasformare $3x+5/(x-2)=6+5/(x-2)$ in $3x=6$ e, poi, in $x=2$ senza porsi problemi di dominio.

Hard e soft

Le difficoltà degli studenti nella risoluzione di equazioni sono state esplorate anche mediante il questionario iniziale già menzionato. Vediamo alcuni comportamenti di fronte a una sequenza di equazioni proposta (riportata nella tabella 1, riordinata in modo da facilitare il commento; non sono considerati tutti i tipi di risposte).

Tabella 1

		risposte corrette	non rispondono	combinazioni sbagliate	dicono che non ci sono soluzioni
(1)	6/x=3/2	48%	37%	13%	-
(2)	12/x=6	65%	23%	8%	-
(3)	75/100=x/4	52%	40%	5%	-
(4)	x/2=0.5	48%	37%	8%	-
(5)	3/4=x	28%	52%	8%	8%

(6)	3=x-1	40%	40%	15%	5%
(7)	5x=0	45%	42%	-	7%
(8)	2(x-x)=0	45%	42%	-	7%
(9)	x=3x	17%	70%	7%	-
(10)	3/x=0	11%	43%	44%	-

Le più alte percentuali di risposte corrette nelle equazioni (1)-(4) sono forse da collegare al fatto che, per come sono state scritte, esse richiamano alla mente procedimenti di semplificazione di frazioni (a cui gli alunni sono abbastanza allenati); ciò può spiegare le difficoltà incontrate in altre equazioni che, in quanto tali, sono più semplici.

(5) e (6) mettono in evidenza come i ragazzi (grazie alle batterie di esercizi di calcolo di espressioni in cui "=" è sempre "fa" o "diventa") non padroneggino la commutatività di "=".

Anche le basse percentuali di risposte corrette di fronte a (8)-(10), che non sono equazioni in forma standard, rispetto a (7), che invece lo è, evidenziano l'abitudine a usare "ricette" senza riferirsi al significato di "risolvere un'equazione", abitudine coltivata da un insegnamento che, nelle spiegazioni e nelle valutazioni, privilegia le abilità hard (da "macchine") e trascura il confronto tra diversi metodi di risoluzione (algebrico, grafico, numerico), la modellizzazione mediante equazioni, ... , cioè le attività più soft (da "umani"), che motiverebbero e farebbero comprendere meglio il significato della risoluzione di equazioni.

<u>Interferenze linguistiche e rapporti con altre discipline</u>

Nell'insegnamento algebrico, per facilitare la descrizione e la memorizzazione di alcuni procedimenti, vengono introdotti e usati diffusamente modi di dire ("cancello", "porto a destra", ...) tratti dalla lingua comune senza chiarire agli alunni il significato che sta dietro al loro uso convenzionale; queste confusioni sono all'origine delle risposte che nella tabella 1 abbiamo classificato come "combinazioni sbagliate", cioè ottenute trasportando o cancellando pezzi di equazione, ottenendo x=3 o x=0 nella (10), x=9 o x=4 nella (1), x=4/3 nella (5), ...

Interferenze linguistiche di tipo diverso si presentano anche in altre aree matematiche. Si pensi ad esempio all'uso in geometria di termini come "angolo" (che nel linguaggio comune è una parte limitata di piano: angolo di una stanza, di un campo di calcio,...), "movimento" (che nel linguaggio comune e in fisica include la considerazione della variabile tempo), ...
Sono interferenze spesso trascurate a scuola o ridotte alla pura correzione di errori (mentre rispetto al linguaggio comune può essere "sbagliato" intendere l'angolo una regione illimitata).

Un altro aspetto che è all'origine di alcune difficoltà incontrate dagli alunni riguarda le differenze di linguaggio e di metodi con cui gli argomenti matematici vengono trattati in altre discipline: si pensi a come la risoluzione di equazioni (e proporzioni) sono affrontate nelle materie economiche o a come il calcolo algebrico e l'analisi vengono impiegate e fatte usare nelle materie tecnico-scientifiche: vi sono spesso contraddizioni, sfasamenti, ... a cui gli alunni fanno fronte adattando il proprio comportamento alle diverse "matematiche" loro proposte, rinunciando alle motivazioni, alla comprensione dei concetti e dei metodi, ...

Anche l'insegnante di matematica ha le sue responsabilità: da una parte, nel fare esempi di applicazione riferiti ad altre aree disciplinari, spesso non tiene conto delle specificità e degli obiettivi di esse (si pensi alla modellizzazione di fenomeni fisici spesso ridotta a cercare una funzione che approssimi i dati sperimentali), dall'altra, quando introduce e motiva nuovi argomenti, a volte non tiene conto delle esigenze e dei possibili intrecci con le altre materie. A questo riguardo si pensi ai numeri complessi, che in genere vengono introdotti solo rifacendosi all'opportunità di poter trovare soluzioni per tutte le equazioni polinomiali, senza che tale opportunità sia motivata (solo alcuni di coloro che proseguiranno gli studi saranno poi in grado di comprenderla), mentre una introduzione che faccia riferimento ai collegamenti tra numeri complessi, trasformazioni geometriche e trigonometria potrebbe essere più significativa anche in relazione agli usi della matematica nelle discipline tecnologiche.

****

UN MODO PER AFFRONTARE LE DIFFICOLTÀ DELLA DIMOSTRAZIONE E L'EVOLUZIONE DELLA ANALISI/SINTESI NELLA STORIA DELLA MATEMATICA

di Annamaria Somaglia*

Gli studenti hanno spesso difficoltà nell'affrontare ***la dimostrazione***, difficoltà che riguardano la comprensione sia dell'aspetto semantico che di quello sintattico: questo si nota giàall'inizio della scuola secondaria nello studio della geometria euclidea. ma il problema non è di facile soluzione

* Liceo scientifico c/o Convitto Nazionale "C. Colombo" di Genova - Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova

perché, come dice Evelyn Barbin "*L'apprendimento della dimostrazione va di pari passo con la costruzione della conoscenza e la costruzione della razionalità degli allievi* !" (Barbin E., 88, p.38)

Individuata la ***dimostrazione come ostacolo epistemologico*** che per gli studenti è "*una sorgente persistente di errore*" (Waldegg G., 97, p.44, trad.ns) possiamo leggere nella storia della matematica l'evoluzione e il superamento di tale ostacolo in accordo con quanto affermato da Luis Radford, secondo il quale per usare la storia della matematica per l'insegnamento "*bisogna fare una scelta esplicita e dire che cosa è che vogliamo vedere nel passato*" (Radford L., 97, p.27, trad.ns.).

Seguiamo l'evoluzione storica del ***procedimento per analisi-sintesi.***

Nella Repubblica di Platone troviamo l'idea di un doppio percorso, dalle idee ai principi (Ascendente) e dai principi alle idee (Discendente) che viene ripresa da Aristotele:egli chiarisce il ruolo della induzione, percorso inverso, regressivo, fase di ricerca dei principi primi, e la contrappone al ragionamento (deduttivo) che procede dalla causa universale alle cause particolari (Lelouard, etalii, 90, 170-175)

Il percorso seguito nell'algebra (Radford L., 95) per la soluzione dei problemi mette in luce una graduale focalizzazione di un procedimento per analisi (Al-Khwarizmi nell'830 d.C.),mentre nella geometria euclidea una delle prime testimonianze dell'analisi-sintesi geometrica, anche se in forma non completamente corretta, viene da "scolii" di Leodama di Thasos (circa 300 a.c.) al l. XIII degli Elementi di Euclide (Lelouard et alii, 90, 176-177) ma solo con le Collezioni di Pappo (circa 320 d C.) abbiamo un uso consolidato di tale procedimento (Pappo, 1660)

Riletti e tradotti i classici nel tardo medioevo,il ***metodo per analisi sintesi*** viene riscoperto e utilizzato.

Viete, alla fine del 1500, riprendendo questa antica tradizione, come si legge anche nel caput I della sua "*In artem analyticen isagoge*"del 1591 (Viete, 1646, p.1) inventa l'algebra "*per species*" e Cartesio,superando sia l'analisi degli antichi che l'algebra di Viete, costruisce la geometria analitica. (Furinghetti F., Somaglia A., 97)

Il legame tra percorso analitico e sintetico è messo in luce in modo chiaro da M.Ghetaldi nel suo "*De resolutione et compositione mathematica libri quinque*" pubblicato nel 1630 (Somaglia AM., 87).

Si viene cosi' chiarendo, attraverso il percorso storico, il significato di ***processo dimostrativo*** e non sorprende che nell'insegnamento la proposta di usare il procedimento per analisi-sintesi non sia nuova: ricordiamo per esempio le indicazioni agli insegnanti di D.E.Smith nel suo "*The teaching of geometry*"*(*1911), e l'articolo di A.Sabbattini (1926) nelle "*Questioni*" di

F.Enriques sui metodi per per la risoluzione dei problemi geometrici inseriti anche negli "Elementi di geometria" di Enriques-Amaldi.

Oggi una tale proposta trova rispondenza nei programmi della scuola media e nella proposta per la scuola secondaria (Programmi Brocca) (Studi 91 e 92).

La prospettiva storica mette in luce come l'introduzione, attuata usualmente in terza media, della incognita per la soluzione dei problemi costituisca l'introduzione, nel curriculum di studio, del procedimento "per analisi": dalla terza media si puo'quindi costruire un percorso che porti al procedimento dimostrativo completo con una fase "analitica"che mette in evidenza la sua caratteristica di ricerca di una dimostrazione e una fase "sintetica" che porta in modo univoco a risultati sicuri.

Si rimanda al lavoro di gruppo in questo stesso convegno per seguire l'iter didattico prospettato ed entrare direttamente nel ***procedimento per analisi-sintesi.***

Gli studenti, avviati a tale metodo di lavoro, su problemi di geometria euclidea, per superare le difficoltà della ***dimostrazione***, lo usano o ne riconoscono l'uso nel fare matematica (calcolo infinitesimale, trigonometria) testimoniando in tal modo che la dimostrazione è diventata essa stessa oggetto di studio: la sequenza logica rappresentata in forma schematica (HintikkaJ., Remes U., *74*, 41) è utile agli studenti nella soluzione di problemi in ambiti diversi (geometria analitica,fisica) indicando la logica quale terreno comune tra i metodi che stanno a fondamento di discipline diverse.(Speranza F., 90) (Arzarello F. ed altri, 83).

Si potrebbe concludere che, individuata,secondo le indicazioni di Brousseau (Radford L., 97, p.29), la ***dimostrazione come ostacolo epistemologico***, la ricostruzione storica della ***evoluzione del procedimento per analisi-sintesi***, ha permesso, come suggerito da Radford, di tracciare un iter didattico per affrontare il problema.

In questo caso il metodo in questione ha fornito anche una metodologia di lavoro applicabile ad altre situazioni.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. ed altri,83, "*Per una didattica interdisciplinare*",Modena,1983.

Barbin,E.,88,"La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche", Seminario di didattica IRMAR di Rennes,23/3/88 in *Quaderno di lavoro* n°10A, *Centro E.Morin*,traduz. C.Sitia.

Furinghetti,F.,Somaglia,A.,97, "Storia della matematica in classe" in *L'Educazione Matematica*, a.XVIII, s.V, v.2, n°1,1997, 26-46.

Hintikka,J.,Remes,U.,74,"*The method of analysis*"Dordrecht,1974

Lelouard,M.,Mira,C.,Nicolle,J.M.,90,"Differentes formes de demostrations dans les mathematiques greques"in *"La démostration mathématique dans l'histoire"* Actes du 7-ème colloque inter Irem, Epistémologie et histoire des mathématiques,Besançon,1989,155-180,1990.

Pappo,1660,"Pappi Alexandrini *Mathematicae Collectiones* a Federico Commandino urbinate in latinum conversae et Commentariis illustratae", Bononiae, 1660.

Radford, L.,95,"L'emergence et le developpement conceptuel de l'algebre" in Actes de la premiere universitè d'ete europeenne.*"Histoire et epistemologie dans l'education mathematique"*, Montpellier '93, 1995, 69-83.

Radford, L.,97, "On psychology, historical epistemology, and the teaching of Mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics" in *For the learning of mathematics*, v.17, n°1, 26-33.

Sabbatini,A.,26,"Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici" in *F.Enriques*, *"Questioni riguardanti le matematiche elementari"*,p.II,1-154,Bologna,1924/27.

Somaglia,AM.,87, *"La variorum problematum collectio di M.Ghetaldi"* in Sunti delle comunicazioni del XIII Congresso UMI, Torino,1987, sez.XI,19.

Speranza, F.,90, "Matematica e scienze: quale distinzione, quale integrazione?" in *L'educazione Matematica*, a.XI, s.III, suppl.al n°2, 1990, 47-54.

Studi e documenti degli Annali della Pubblica Istruzione, 91,*"Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni"*, n° 56, Roma, 1991.

Studi e documenti degli Annali della Pubblica Istruzione, 92, *"Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei trienni"*, n°59/60* e relativa *Appendice*, n°61, Roma, 1992.

Viete,F.,1646,"Francisci Vietae *Opera mathematica* opera atque studio Francisci a Schooten", Lugduni Batavorum,1646.

Waldegg, G.,97, "Histoire,Epistémologie et Méthodologie dans la recherche en didactique" in *For the learning of mathematics*, v.17, n°1, 43-46.

****

ESPERIENZE E RIFLESSIONI SULL'UTILIZZO DELLE CALCOLATRICI GRAFICHE NELLA DIDATTICA

di Raffaele Mauro

Al X Congresso sull'insegnamento della Matematica svoltosi a Salsomaggiore nel 1985 ho presentato una mia esperienza relativa

all'insegnamento di Matematica e Informatica in un biennio I.G.E.A. Ebbene, il momento attuale per la Scuola Italiana presenta analogie a quanto avvenuto 12 anni fa. Allora veniva proposto un Piano d'aggiornamento ambizioso, il Piano Nazionale per l'Informatica. Ora viene presentato un nuovo Piano d'investimento in tecnologie che porterà i docenti a confrontarsi con tematiche in parte nuove ma anche con problemi tecnici non semplici da gestire. Sta di fatto che oggi i laboratori d'informatica delle Scuole Medie Superiori sono spesso sottoutilizzati o malutilizzati e il programma realmente svolto dai docenti di Matematica-Informatica ha risentito poco delle innovazioni previste.

Per quanto riguarda l'informatica all'interno dell'insegnamento della Matematica c'è da dire che in taluni casi ci si è spinti in un utilizzo troppo specialistico del Pascal. Saper costruire semplici algoritmi e scrivere un programma in Pascal per rappresentarli è un obiettivo per raggiungere il quale può bastare un sottoinsieme abbastanza ridotto del Pascal. E' sufficiente presentare le istruzioni di lettura e scrittura, di assegnazione, di selezione binaria, l'iterazione, una riflessione su alcuni tipi di dati, in particolare quelli numerici... L'"ambiente di programmazione" della calcolatrice grafica TI-92 ha caratteristiche tali da potersi validamente considerare la possibilità di un utilizzo alternativo al computer e al TurboPascal.

Negli ultimi anni si è andato sempre più diffondendo l'uso di alcuni "ambienti informatici", quali fogli elettronici o software come Cabrì o Derive. La TI-92 incorpora le funzionalità di Derive e Cabrì , permette di lavorare su tabelle, di rappresentare serie statistiche con diagrammi a dispersione, istogrammi....

Al prezzo di una stazione multimediale viene proposto alle scuole un KIT costituito da una valigia contenente 16 TI92 e un Display per lavagna luminosa. In ogni caso anche il solo utilizzo da parte del docente di una TI-92 collegata alla lavagna luminosa permette di svolgere lezioni efficaci. Con la TI-92 possiamo organizzare anche significative attività di recupero di matematica.

Presento qui ora un'applicazione particolare svolta con la TI-92 e che riguarda lo studio della Matematica per l'Economia.

Negli Istituti Tecnici Commerciali esistono problematiche affrontate dagli allievi nello studio dell'Economia Aziendale che poi sono "rivisitate" nello studio della Matematica ma spesso in modo eccessivamente rapido o con angolazioni molto diverse.

La questione che ora brevemente affronto è quella relativa allo studio del break-even point, cioè la ricerca della quantità di produzione per cui costi e ricavi si eguagliano e del diagramma di redditività.

In Economia Aziendale quasi sempre si presenta agli allievi una funzione dei ricavi lineare e una funzione dei costi lineare, si sottolinea l'importanza del punto d'intersezione delle due rette (il break-even point) e si evidenziano le regioni angolari fra le due rette definendole come area di perdita e area di profitto).

Quasi mai si riprende in Matematica questo modello quando si trattano i problemi di scelta in condizioni di certezza.. Quasi sempre invece si presentano agli allievi problemi in cui la funzione dei costi è lineare mentre la funzione dei ricavi è quadratica. E tutto viene risolto studiando gli zeri della funzione dei guadagni, anch'essa quadratica.

Vale la pena invece partire proprio dalle conoscenze già acquisite degli allievi, presentando problemi con funzioni dei ricavi e costi lineari, poi passando a modelli più complessi. L'utilizzo della calcolatrice grafica può accompagnare tutta questa "unità didattica" permettendo spunti vari sullo studio delle funzioni, anche con metodi elementari.

Quella che segue è la presentazione dello studio di un problema con funzione dei ricavi quadratica e dei costi lineari.

Problema:

Una ditta che agisce in condizioni di monopolio e che ha una capacità produttiva giornaliera massima di 1600 Kg., deve sostenere giornalmente una spesa fissa di £ 240000 più £ 200 per ogni Kg. di merce prodotta. La legge della domanda è :p = 1000 -0,5x (x è il numero di Kg. di merce e p è il prezzo per Kg.). Quanto dovrà produrre per non andare in perdita? E quanto dovrà produrre per ottenere il massimo profitto?

Il lavoro che si intende svolgere prevede in primo luogo di recuperare (potenziandolo) l'approccio dato in Economia Aziendale e che consiste nel costruire il diagramma di redditività che evidenzia la relazione ricavi-costi. In un secondo tempo invece si studierà esclusivamente la funzione del profitto.

Il ricavo si ottiene moltiplicando il prezzo di vendita al Kg. per il numero di Kg prodotti ed è quindi dato dalla funzione quadratica:

$$r(x) = -0{,}5x^2 + 1000x$$

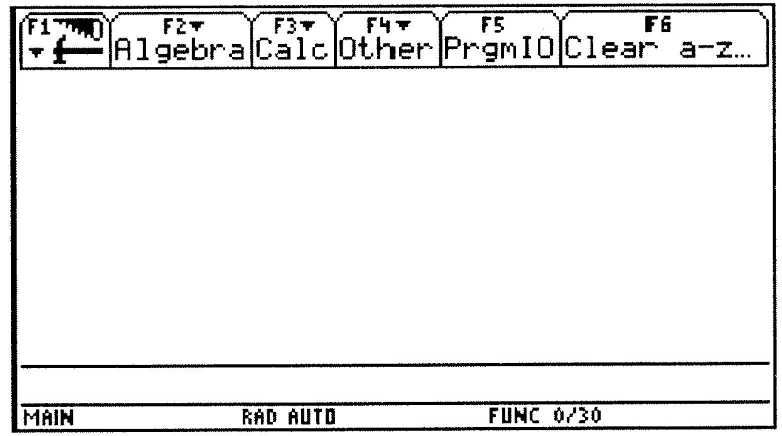
mentre i costi totali si esprimono con la funzione lineare:

$$c(x) = 200x+240000$$

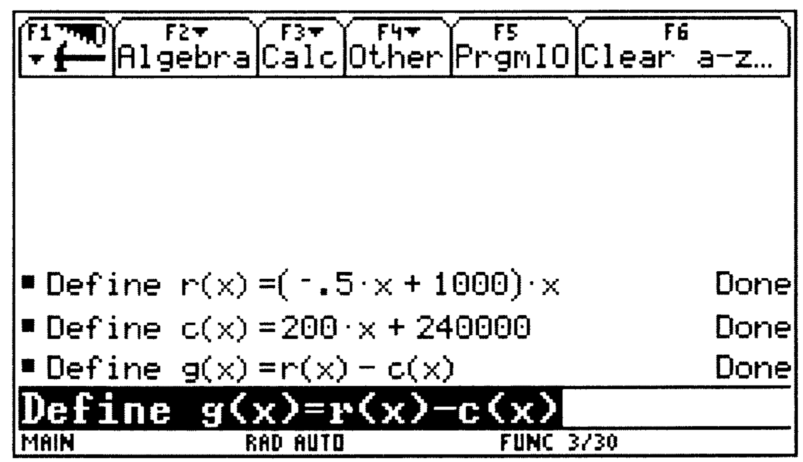
La funzione obiettivo si ottiene per differenza tra ricavi e costi e risulta anche essa quadratica: $g(x) = r(x)-c(x) = -0{,}5x^2 \quad +800x-240000$.

Lavoro da svolgere con la TI 92.

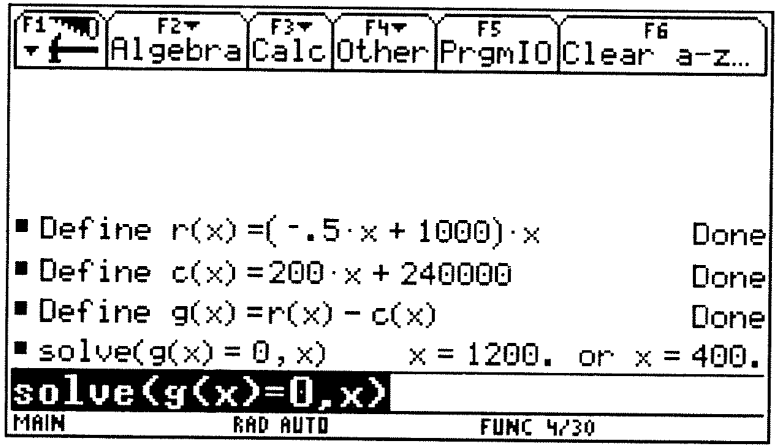
Prima parte _:
Accesa la calcolatrice lo schermo dovrebbe apparire come in figura:



Premere allora F4 e scegliere *1:Define* .
Nella riga di input comparirà il comando Define.
Scrivere la funzione del ricavo come
r(x) = (-0,5x +1000)x e premere ENTER.
Ripetere il procedimento per la funzione dei costi: c(x) = 200x+240000 .
Ripetere il procedimento per la funzione obbiettivo scrivendo semplicemente: g(x)=r(x)-c(x).

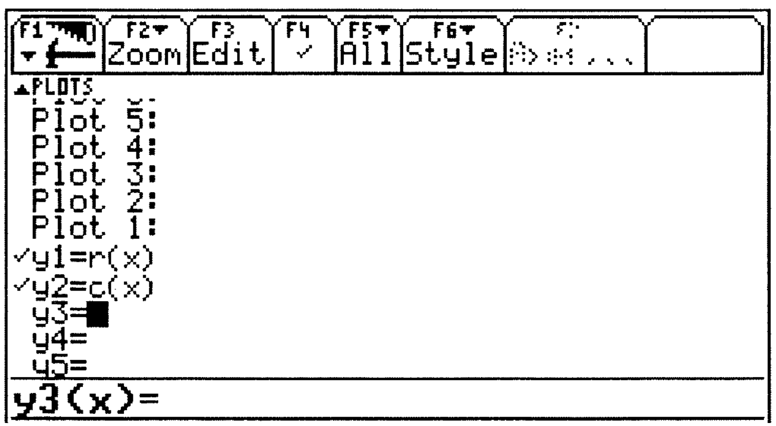


Premere F2 e scegliere *1:solve(*
Sulla riga di input scrivere g(x)=0,x). Premere ENTER.
Sullo schermo saranno indicate le soluzioni x = 400 e x = 1200 .

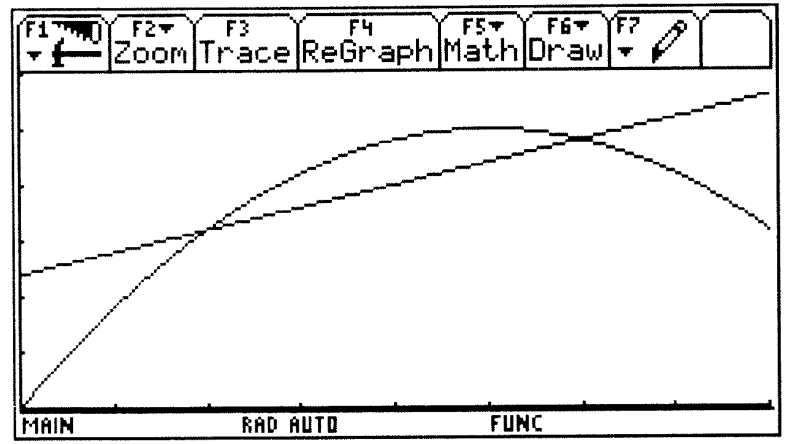


Bisognerà produrre almeno 400 Kg. perché il ricavo sia superiore al costo. A partire da questo punto detto di indifferenza (break-even) e fino a x=1200 vi sarà profitto.

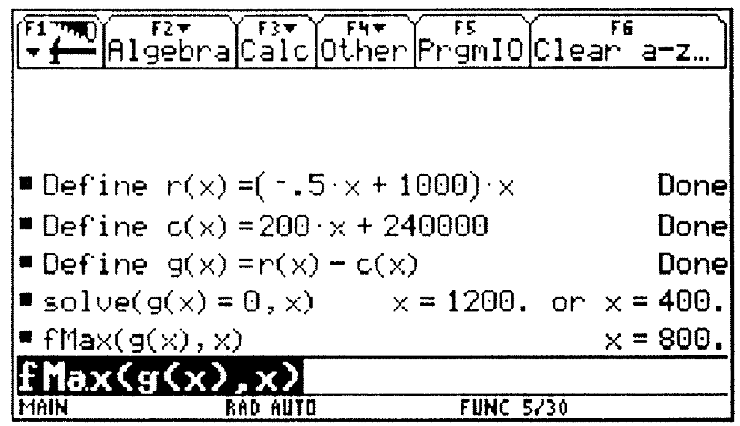
Risolviamo graficamente:
Premere Y= e poi CLEAR per cancellare funzioni eventualmente utilizzate in precedenza. Premere ENTER .
Sulla riga di input appare y1(x)=. Scrivere r(x) e premere ENTER .
Spostare il cursore su y2, premere ENTER, scrivere c(x) sulla riga di input e poi premere ENTER .



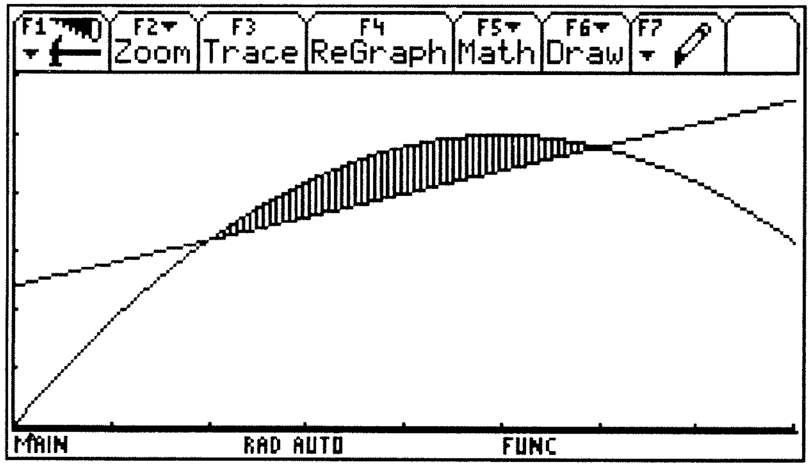
Premere WINDOW .
Inserire i seguenti dati:
xmin=0; xmax=1600; xscal=200; ymin=0; ymax=600000; yscl=100000; xres=1.
Premere GRAPH.



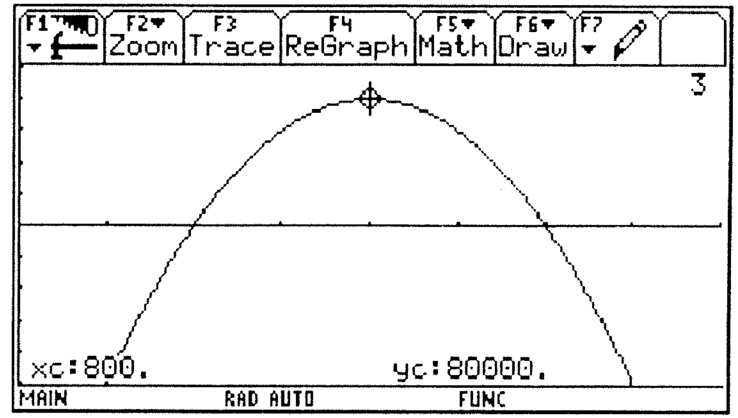
Ottenuto il grafico delle due funzioni possiamo evidenziare la zona di utile.
Concentramoci ora esclusivamente sulla funzione del profitto.
Ritornare allo schermo iniziale premendo HOME.
Per trovare il massimo profitto premere F3 e scegliare *7:fMax(*.
Sulla riga di input scrivere g(x),x.) e premere ENTER.
Il massimo si ha per X= 800.



Passiamo alla rappresentazione grafica. Preme Y=, portare il cursore su y1 e premere F4.
Premere F5. Scegliere *C:Shade*. Compare sullo schermo la domanda *Above?*.
Portare il cursore sulla retta e premere ENTER.
Compare sullo schermo la scritta *Below?* e il cursore si sposta sulla parabola. Premere ENTER.
Successivamente viene chiesto il limite inferiore per x. Indichiamo 400.
Indichiamo poi 1200 come limite superiore di x. A questo punto l'area di utile verrà tratteggiata.



<u>Parte seconda</u>
Portare il cursore su y2 e premere F4. Porre y3=g(x).
Premere WINDOW.
Inserire i numeri seguenti:
xmin=0; xmax=1600;xscal=200; ymin=100000; ymax=100000; yscl=20000; xres=1.
Premere GRAPH e poi TRACE .
Viene evidenziato il massimo che si ottiene per x=800. In corrispondenza il guadagno è di £ 80000.



****

LE ISOMETRIE: OSSERVA, COSTRUISCI E SCOPRI

Paola Nanetti[6] - Maria Cristina Silla[7]

Descrizione dell'esperienza

Il lavoro, sviluppato su proposta dell'I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna con coordinatrice la Prof. Annamaria Arpinati, è indirizzato al biennio delle scuole medie superiori e, nel dare continuità allo studio della geometria nel passaggio medie-superiori, si propone come obiettivi:

- stimolare l'interesse degli studenti per lo studio della geometria;
- recuperare le difficoltà più frequenti riscontrate nell'introduzione delle isometrie;
- favorire la creatività e l'autonomia nel lavoro;
- far emergere le capacità di ogni studente;
- far creare e manipolare oggetti per scoprire e verificare proprietà.

Articolazione del percorso:

1. ***Introduzione a Cabri II***. Utilizzando questo software didattico vengono riproposti agli studenti gli argomenti cardine della geometria nella scuola media inferiore. La dinamicità di tale software che permette di creare, muovere e modificare figure consente di recuperare, approfondire conoscenze e superare difficoltà legate all'impossibilità di "manipolare"

[6] ITC "G.Salvemini", Via S.Pertini 3, 40033 CASALECCHIO DI RENO BO
[7] ITCG "L.Fantini", Via Cavour 10, 40038 VERGATO BO

gli oggetti geometrici. Tale scelta didattica nasce dalla consapevolezza che costruire figure geometriche in modo rispondente a determinate definizioni (es. costruire un parallelogramma che rimanga tale anche quando se ne muovano i vertici) costringe lo studente a ipotizzare un percorso coerente facendo emergere capacità manuali e creative, e contestualmente a riflettere e correggere eventuali errori compiuti nella costruzione. Inoltre un momento di verifica visiva facilita la successiva dimostrazione teorica di teoremi e proprietà.

2. ***Introduzione alle trasformazioni geometriche***. Nella prima fase ci si pone l'obiettivo di far emergere le capacità di osservazione degli studenti invitandoli ad osservare, attraverso esempi proposti, la realtà che li circonda per cogliere e analizzare eventuali "regolarità". Successivamente, sempre attraverso esempi proposti si arriva a dare la definizione di trasformazione geometrica, di invarianti e di elementi fissi.

3. ***Le isometrie***. Utilizzando il software CABRI II vengono proposte agli studenti delle schede di lavoro guidate che permettono di definire la simmetria assiale, la traslazione, la rotazione e la simmetria centrale e si prefiggono come obiettivo di condurre gli studenti, attraverso esercizi mirati, a individuare gli invarianti, gli elementi fissi e gli elementi uniti. Al fine di ripensare e consolidare le definizioni apprese ci è parso utile e stimolante chiedere agli studenti di costruire una loro Macro che permettesse di trasformare una qualsiasi figura secondo le isometrie introdotte, senza utilizzare i comandi già presenti in Cabri II. Le schede relative a ciascuna isometria si concludono con attività di recupero e di approfondimento corredate anche da esercizi che prescindono dall'ambito prettamente geometrico.

4. ***Uno sguardo su ...*** Ci si propone di utilizzare le conoscenze appena acquisite dallo studente per stimolarlo a guardare con occhio da "geometra" la natura, a riflettere su come le varie espressioni artistiche nel corso della storia abbiano fatto ricorso all'armonia delle isometrie per creare molti dei loro capolavori e infine a convincerlo che con le isometrie si possano ottenere effetti curiosi e divertenti.

5. ***Il piano cartesiano***. Utilizzando CABRI II si è ipotizzato un percorso che in una prima fase prevede un recupero/consolidamento delle conoscenze già introdotte alla scuola media e in una seconda fase si propone di far ricavare attraverso esercizi mirati le leggi di trasformazione delle isometrie precedentemente introdotte.

Metodologia e strumenti

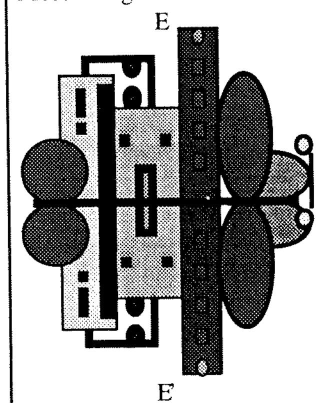
- lavoro di gruppo su schede guidate con il coordinamento del docente nel laboratorio di informatica;
- lavoro di gruppo su schede di manualità con il coordinamento del docente in classe;
- momenti di discussione collettiva utilizzando lucidi e lavagna luminosa;
- lavoro per gruppi di livello con schede di recupero/approfondimento.

Esempi di parti di schede di lavoro guidate

SIMMETRIA ASSIALE **SCHEDA DI MANUALITA'**

Obiettivi: definire punti e rette unite in una simmetria assiale
distinguere rette unite e rette fisse

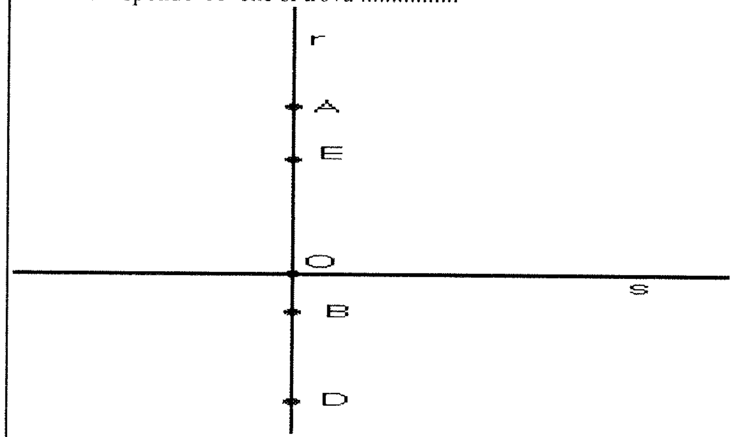
Metodologia: scheda di lavoro guidata



Nel disegno sopra è rappresentata la città Futura che si rispecchia nel lago Passato.
Puoi affermare che in questa immagine è rappresentata una simmetria assiale ?........Qual è l'asse di simmetria? ....
Da che cosa sono rappresentati i punti fissi ? .... E le rette fisse?...........
Osserva la parete sinistra del palazzo più alto e osserva il punto E estremo di tale parete. L'estremo si rispecchia in se stesso?........... Questo avviene per tutti gli altri punti della parete? ....
Anche per F? (che sta sulla strada)? .... Perché?..........
Si può dire che E, F ed E' appartengono alla stessa retta? .... Com'è questa retta rispetto alla strada?

Data la seguente figura, disegna il simmetrico rispetto alla setta s di ogni punto assegnato

ad A corrisponde A' che si trova ....



ad E corrisponde E' che si trova ....

ad O corrisponde O' che si trova.................

....

Quindi tutti i punti appartenenti ad r hanno come loro simmetrico un punto che si trova ancora ...., ma................

In questa simmetria alla retta r corrisponde ....**Concludendo**: in una simmetria assiale ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria si trasforma in se stessa, ma cambia il suo ordinamento, perché ogni punto si trasforma in un punto simmetrico appartenente alla semiretta opposta. Tali rette si dicono **UNITE**.

SIMMETRIA ASSIALE **PARTE SECONDA**

Obiettivi: definire la simmetria assiale
individuare gli invarianti
costruire la figura simmetrica di figure date

Metodologia: lavoro di gruppo con scheda di lavoro guidata

Strumenti: strumento informatico

La simmetria assiale: elementi uniti

Proviamo ora a risolvere il problema della scheda precedente con l'utilizzo di Cabri.

- Crea una retta per due punti e chiamala s

- Crea un'altra retta r incidente ad s
- Costruisci il punto O intersezione di r e s
- Segna l'angolo di vertice O e lati r e s e misuralo
- Trova r' simmetrica di r rispetto ad s. Illustra i passaggi che sarebbe necessario eseguire se il programma non fosse in grado di determinare direttamente il simmetrico di una retta. Riporta di seguito tali passaggi e verifica che originano la figura corretta.

Cosa noti?...

In quali casi r coincide con r?...... In ciascuno di tali casi puoi affermare che ogni punto di r ha come simmetrico se stesso?.........

Quali punti hanno se stessi come corrispondenti in ogni caso?...

Ci sono rette unite in una simmetria assiale? Se si quali sono?

....

L'asse di simmetria chi ha come corrispondente in una simmetria assiale rispetto a se stessa? ....

Che differenza rilevi tra l'asse di simmetria e le rette unite? ....

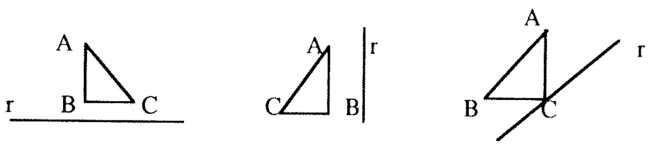
....

Esempio di parte di scheda di recupero

ESERCIZI DI RECUPERO/CONSOLIDAMENTO SULLA SIMMETRIA ASSIALE

Rispondi e verifica le tue risposte

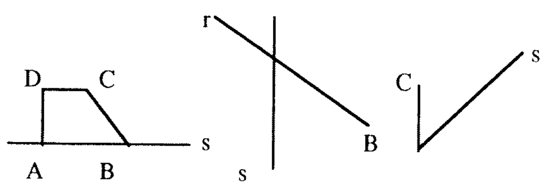
1. Se 2 rette a e b sono tra di loro parallele le loro simmetriche rispetto ad una retta s sono ancora parallele?
2. Come si trasforma una retta parallela all'asse di simmetria ?
3. La simmetrica di una retta a, rispetto ad un certo asse, è parallela ad a? In quali casi?
4. Che figura ottengo se eseguo due volte di seguito la simmetria di una figura rispetto ad uno stesso asse?
5. Disegna un parallelogramma. Traccia i punti medi dei lati del parallelogramma. Considera il quadrilatero che si ottiene congiungendo tali punti medi. Il quadrilatero ottenuto ha assi di simmetria?
   E' ancora un parallelogramma?
   Riporta sul quaderno i seguenti triangoli e per ciascuno di essi costruisci il simmetrico rispetto alla relativa retta r.



6. Completa :

Figura	Asse/i di simmetria	Quanti	Quali
Triangolo scaleno			
....			

8. Traccia rispetto alla retta s le figure simmetriche delle figure date.



Esempio di parte di scheda di approfondimento

SIMMETRIA ASSIALE 🕮 PER SAPERNE DI PIU'........

Obiettivi: stimolare la curiosità e la creatività

Metodologia: lavoro individuale o di gruppo con scheda di lavoro

Strumenti: laboratorio informatico

1) Date le rette r ed s incidenti se trasformi un triangolo T in una simmetria assiale di asse r e poi in una simmetria di asse s si ottiene lo stesso risultato invertendo l'ordine delle trasformazioni?.........

Cioè $\text{sim}_r \circ \text{sim}_s$ ....$\text{sim}_r \circ \text{sim}_s$

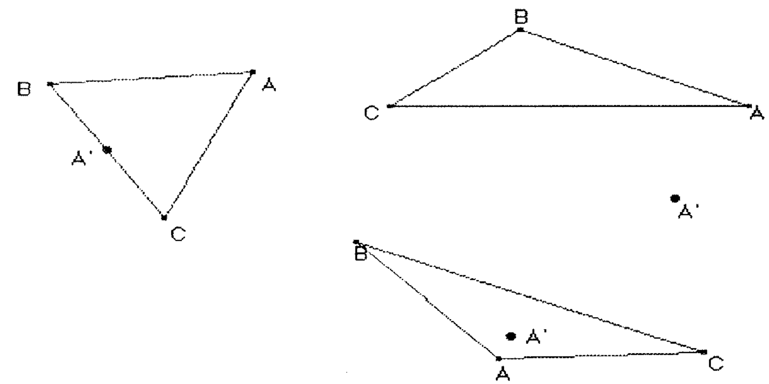
Quindi si può concludere che l'ordine in cui le simmetrie vengono applicate successivamente è importante, dunque l'operazione di composizione di due simmetrie assiali .... Cercando particolari posizioni reciproche delle rette r ed s, puoi trovare casi in cui la composizione delle due simmetrie assiali è commutativa? ....

2) Disegna punti equidistanti da un punto C. Quanti sono? .... Formano una figura geometrica nota?......................

3) Disegna punti equidistanti da due punti A e B. Quanti sono? .... Formano una figura geometrica nota?...............

4) Dati tre punti non allineati A, B, C disegna gli assi di due segmenti consecutivi AB e BC: che cosa puoi dedurre? E se i punti A, B, C sono allineati cosa succede?

5) Completa l'immagine della figura data in una simmetria assiale, sapendo che il punto A ha per simmetrico il punto A'.



6) Determina gli eventuali assi di simmetria delle figure:

♥ * Ψ Δ

ELENCO DEI PARTECIPANTI

ACCASCINA Giuseppe (Roma), AGNOLI Mirca (Belluno), ALBANI Giuseppina (Roma), ALIQUO' Maria (Roma), ANDREELLA Chiara (Vicenza), ANDREINI Mara (Milano), ANDRIANI Maria F. (Parma), ANELLI A. Laura (Frosinone), APRILINI Gabriella (Roma), ARPINATI Annamaria (Bologna), ARTUSO Giorgio (Bassano del Grappa VI), ARZARELLO Ferdinando (Torino), SCHIERI Igino (Parma), ASCOLI M.Teresa (Roma), AUTOLITANO enzina (Aosta), BADOER Giovanna (Padova), BALDAN Giuliana (Strà VE), DISSARA Elisa (Quinto Vicentino VI), BALDONI Corrado (Umbertide PG), BALDUINI Ambra (Roma), BALELLO Lisa (Mira VE), BARIGELLI BRUNO (Ancona), BARON Silvia (Vicenza), BARSOTTI Lidia (Vicenza), BATINI Maria (Roma), BAZZINI Luciana (Pavia), BELTRAME Gianna (Vicenza), BENEDINI Marina (Vicenza), BERNARDI Claudio (Roma), BERNECOLI Sandra (Vicenza), BERTOLOTTI Peppino (Valdagno VI), BESSO Milena (Padova), BETTINI Giuliana c/o IRRSAE (Bologna), BIGARELLA Fiorella (Vicenza), BIZZARRI Maria (Noventa Vicentina VI), BIZZOTTO Renata (Vicenza), BOLZON Maria Luisa (Valdagno VI), BONETTI Ester (Pavia), BONETTO Giovanni (Vicenza), BORGO Daniela (Vicenza), BORIN Vanna (Vicenza), BORNORONI Silvana (Roma), BOSCHIERO Maria (Vicenza), BOTTAZZINI Umberto (Milano), BRIGAGLIA Aldo (Palermo), BROVEDAN Siro (Udine), BRUNELLI Alberto (Padova), BUEMI Antonia (Quart.Cogne AO), BULGARELLI Emilia (Torino), BUONO Rosa (Noicattaro BA), CACCARO Arianna (Padova), CAMERA Graziella (Genova), CAMMILLERI Carmela (Vicenza), CANNIZZARO Francesca (Sondrio), CANTARELLA Anna (Grisignano di Zocco VI), CAPASSO Maria (Roma), CAPATORI Patrizia (Brescia), CAPODICASA Susanna (Vicenza), CAREDDA Carla (Cagliari), CARIGNAGO Ilario (Pinerolo TO), CARIOLATO Luigi, CARIOLATO Ottorino (Cornedo Vicentino VI), CARLI Leda (Bolzano Vicentino VI), CARLOTTI Gianna (Vicenza), CAROLLO Tiziana (Torri di Arcugnano VI), CARRONE Raffaeluccia (Vicenza), CARTONICCHI Simonetta (Vicenza), CASAROTTO Bertilla (Torri di Quartesolo VI), CASAROTTO Franco (Monteviale VI), CASTAGNOLA Ercole (Formia LT), CASTELLINO Michela (Roma), CATTELAN Maria Elisa, CAZZAVILLAN Edi (Vicenza), CECCHETTI M.A. (Cassola VI), CELENTANO Adriana (Roma), CELI Maria Luisa (Padova), CERASOLI Mauro (L'Aquila), CEROCCHI Elisa (Roma), CHILESE Gioia (Valdagno VI), CHIMETTO Maria Angela (Vicenza), CO' Rosanna (Vicenza) CONTE Alberto (Torino), CONTE Monica (Gorizia), CONTI Franco (Pisa), CORTONICCHI Simonetta (Vicenza), COSTA Manuela (Schio VI), CROCINI Paola (Aprilia LT), CROSTI Daniela (Roma), CUCCIA Patrizia (Padova), D'ADAM SONIA (Marano Vicentino VI), D'ALESSANDRO Rossana (Cosenza), D'AMORE Bruno (Bologna), D'ANDRIA Maria N. (Roma), D'APRILE Margherita

(San Fili CS), DALL'AGLIO Paolo (Trieste), DALL'ARMELLINA Carla (Vicenza), DAMIANI Annamaria (Fano PS), DANIELI Paola (Padova), DANTE Marisa (Vicenza), DAPUETO Carlo (Genova), DE ANNA Silvia (Vicenza), DE MORI Gabriella (Vicenza), DE TACCHI M.Luisa (Vicenza), DE VITA Mauro (Roma), DEL PENNINO Rosalinda (Vicenza), DEL VECCHIO Francesca (Roma), DELFRATE Maria Grazia (Parma), DESTITO Vittoria (Civitavecchia RM), DI MARTINO Luigi (Selvazzano PD), DOLCI Mariuccia (Brescia), DONAGGIO Daniela (Montecchio Maggiore VI), FABRIS Giuseppina (Bologna), FABRIS Mauro (Vicenza), FACCHIN Margherita (Recoaro Terme VI), FACENDA Anna M. (Fano PS), FARA Rina (Manziana RM), FATTORI Rosaria (Valdagno VI), FAVORIDO Mara (Mirano VE), FERRINI Gianfranco (Perugia), FESTINI Leandro (Valdagno VI), FIANCHI Anna Maria (Cecina LI), FILIPPI Monica (Roma), FIORENZATO Antonella (Padova), FIORIN Gisella (Vicenza), FONGARO Paola (Valdagno VI), FONTANA Giovanna (Verona), FORMICA Domenica (Catania), FRANCESCHIN Maurizio (Camponogara VE), FREDDI Fabiola (Civitavecchia RM), FULGENZI Annarita (Formia LT), FULGENZI Paola (Fano PS), FURINGHELLI Fulvia (Genova), GABELLIN Giorgio (Cattolica RN), GALLO Daniela (Torino), GALLONI Monica (Roma), GECELE Afra (Vicenza), GELATI Flavia, GENTILIN Daniela (Torri di Quartesolo VI), GERMANI Laura (Valdango VI), GHELLINI Luigi (San Tomia di Malo VI), GHERPELLI Loredana (Rangone MO), GIACOMIN Antonella (Castion BL), GIAMMEI Francesca (Roma), GILARDI Marina (Torino), GIROTTO Vittorio (Annone Veneto VE), GIULIANI Elda (Pavia), GIULIANI Francesca (Vicenza), GIUNTA Carmelo (Vicenza), GNATA Francesco (Fara Vicentino VI), GOBBATO Sara (Vigonza PD), GONELLA Corrado (Verona), GRASSI Grazia (Casalecchio di Reno BO), GRECO Annalisa (Vicenza), GRECO Simonetta (Genova), GRESELIN AnnaMaria (Vicenza), GRUGNETTI Lucia (Parma), GUIZZON Maria Elisabetta (Vicenza), IADEROSA Rosa (Milano), IMPEDOVO Michele (Arcisate VA), INDOVINA Grazia (Palermo), INVENTO Mara (Ronco all'Adige VR), ITALIA GianBattista (S.Agata di Battiati CT), JACONA Dorotea (S.Agata di Battiati CT), LA GRUA Antonella (Belluno), LA TORRE Anna (Roma), LAGANA' Gaetano A. (Roma), LAZZARIN Carla (Schio VI), LAZZARO Daniela (Maerne VE), LAZZAROTTO Alberto (Bassano del Grappa VI), LEGATO Antonella (Verona), LEGNAME Liboria (Torri di Quartesolo VI), LIZZIO Angelo (Catania), LO CICERO Angela (S.Agata di Battiati CT), LOLLI Gabriele (Torino), LOMBARDI Vanna M. (Roma), LORENZI Paolo (Bolzano), LORENZONI Maria (Vicenza), MACCAGNI AnnaRita (Roma), MAFFINI Achille (Parma), MAGNABOSCO Donatella (Padova), MAGNANI Carla (Roma), MALARA NICOLINA A. (Modena), MAMMANA Carmelo (Catania), MAMMI Antonio (Roma), MANIGLIA Giuseppe (Civitavecchia RM), MARCHI Mario (Brescia), MARCHIONI Annarosa (Sarego VI), MARCONI Carla (Torino), MARCONI

G.Basilio (Verona), MARCONI Paola (Vicenza), MARGARONE (Catania), MARGIOTTA Giovanni (Roma), MARIOTTO Grazia (Vicenza), MAROSCIA Paolo (Roma), MARTINI Berta (Bologna), MASATO Paolo (Dolo VE), MASI Franca (Cattolica RN), MASIN Daniela (Cornuda TV), MATEROZZOLI Alessandra (Roma), MAURO Raffaele (Terracina LT), MELILLO Rosa (Triggiano BA), MELONI Alessandra (Roma), MENON Gianna (Bassano del Grappa VI), MENTI Fiorella (Arzignano VI), MERELLO Angela (Genova), MICALE Biagio (Catania), MILONE Carmela (S.Gregorio di Catania CT), MOAURO Vincenzo (Isernia), MODICA Maria (Grumolo delle Abbadesse VI), MOLON Teresa (Vicenza), MONARI Fabrizio (Monghidoro BO), MONDIN Marco Giovanni (Schio VI), MORBIATO Monica (Villafranca Padovana PD), MORELLI Aldo (Napoli), MORETTI Cinzia (Collodi Pesca PT), MORETTIN Paola (Vicenza), MOTTERLE AnnaMaria (Vicenza), MUNARETTO Giovanni (Bassano del Grappa VI), NANETTI Paola (Casalecchio di Reno BO), NAPOLETANA Patrizia (Padova), NARDI Ianna (Pesaro), NAVA Francesca (Roma), NOE' Franca c/o IRRSAE (Bologna), OCCHI Antonella (Morgex AO), OLIVELLO Antonia (Napoli), OLIVERO Federica (Racconigi CN), OLIVIERI Giovanni (Roma), ORANESE Raffaella (Bassano del Grappa VI), ORLANDONI Aurelia (Casalecchio di Reno BO), OSS Armida (Tione di Trento TN), PALLESCHI Giuliano (Villafranca VR), PALSANO Gianfranca (Dueville VI), PANAGIOTE Ligouras (Alberobello BA), PANOZZO Alessandra (Vicenza), PANTALFINI Rita (Latina), PARISELLA Berta (Fondi LT), PARISI Ada Maria (Alte di Montecchio Maggiore VI), PATERNOSTER Floriana (Pesaro), PAVERANI Enrico (Roma), PAZZI Elisabetta (Caldogno VI), PEDROTTI Daniela (Sondrio), PELLEGRINO Innocenza (Brescia), PENNISI Mario (Catania), PERAZZOLO Simonetta (Vicenza), PERCARIO Zelinda (Grosseto), PERDON Maria Luisa (Vicenza), PERETTI Gianni (Vicenza), PERETTI Renato (Montecchio Maggiore VI), PESCI Angela (Pavia), PETRONE Alfio (Catania), PETRONE Marietta (Vicenza), PIERANGELI Paola (Lonigo VI), PILLA Federico (Vicenza), PIOCHI Brunetto (Parma), PIRRONE Federica (Padova), PLATEROTI Massimo (Roma), PLUCHINO Salvatore (Catania), POLI Lucia (Pinerolo TO), POLI Maria Fortunata (Rutigliaro BA), POLIMENO Maria Cristina (Vicenza), PORRONI Emanuela (Montefiascone VT), POZZATO Giovanna (Vicenza), QUAGLI AnnaMaria (Breganze VI), RADIN Bernardo (Breganze VI), RANALLO Adriana (Isernia), RAPPO Loretta (Arcugnano VI), REGGIANI Maria (Pavia), RIDOLFI Irma (Roma), RIZZI Giovanni (Thiene VI), RIZZOLO Emanuele (Mira VE), RIZZOTTO Francesco (Breganze VI), ROGNONI Daniela (Pavia), ROHR Ferruccio (Roma), ROMANO Maria G. (Mestre VE), RONCOLINI Maria L. (Roma), ROSSI Gabriella (Vicenza), RUI Rossella (Bassano VI), SABATINI Maria (Vicenza), SACCARDO Cristina (Vicenza), SALTARELLI Lucia (Aprilia LT), SAMELE Lidia (Vicenza), SANDRINI Valeria (Vicenza),

SARTORI Daniela (Breganze VI), SARTORI Maria (Breganze VI), SAVARINO Luigino (Torino), SAVASTANO Francesca (Vicenza), SAVIO Tiziana (Torino), SCARNATI Anna (Cosenza), SCHIAVON Amabile (Venezia), SCORTEGAGNA Miriam (Schio VI), SCORZONI Antonella (Rovigo), SERAFINI Giuseppe (Vicenza), SERVI Grazia (Cosenza), SILLA Cristina (Casalecchio di Reno BO), SILVAGNI Francesca (Montecchio Maggiore VI), SINIBALDI Fausta (Roma), SINIGAGLIA AnnaMaria (Vicenza), SOMAGLIA Annamaria (Genova), SORICHETTI Anna (Padova), SPAMPINATO Giovanna (Vicenza), SPEROTTO Lia (Vicenza), SPINELLO Rossana (Vicenza), STAROPOLI Francesco (Tropea VV), STOPPA Margherita (Vicenza), TABARIN Carla (Roma), TELATIN Graziella (Pont Saint Martin AO), TESCARO Giorgio (Vicenza), TESHONE Berhe (Vicenza), TESTA Caludia (Torino), TESTA Giuliano (Vicenza), THIELLA Caterina (Vicenza), TOLETTI Cristiana (Padova), TOMASI Luigi (Lama Polesine RO), TOMBOLESI Velia (Iesi AN), TORMENA Stefania (Verona), TORRISI Rosa Maria (Vicenza), TRAINITO Giovanni (Roma), TRECCANI Cecilia (Brescia), TRENTO Cristina (Belluno), URBANI Francesca (Vicenza), VARAGNOLO Giuseppina (Mira VE), VENDRAMI Luisella (Villa di Villa BL), VERGINE Antonio (Schio VI), VETTORE Micaela (Torino), VETTORE Silvia (Vicenza), VIANI Gisella (Brescia), VICHI Elena (Marina di Monte Marchiano AN), VIGHI Paola (Parma), VITELLA Carla (Schio VI), VOLPE Stefano (Roma), VOLPI Rosa (Vicenza), ZAMBONIN Carlo (Vicenza), ZAMPICININI Dina (Semonzo del Grappa TV), ZAN Rosetta (Pisa), ZANCANI Renato (Pescara), ZANINI Laura (Santorso VI), ZATTERA Rosetta (Padova), ZIRILLI Giuseppe (Perugia), ZOCCANTE Sergio (Vicenza), ZOGLI Enrico (Vicenza)

COLLANA DI QUADERNI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

0. C. SITIA (a cura di): *La didattica della matematica oggi. Problemi, ricerche, orientamenti,* 1979, pp. VIII - 412 .... L. 7.000
1. M.G. GASPARO, M. MACCONI, A. PASQUALI: *Risoluzione numerica di problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie mediante problemi ai valori iniziali,* 1979, pp. V - 217 .... L. 4.000
2. Z. KRIGOWSKA: *Cenni di didattica della matematica,* 1, 1979, pp. VIII - 244 .... L. 4.000
3. F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA, F. LAZZERI: *Topologia delle superficie algebriche in $P_3(C)$,* 1979, pp. II - 171 .... L. 4.000
5. C. CATTANEO: *Teoria macroscopica dei continui relativistici,* 1980, pp. V - 105 .... L. 3.500
6. A. TOGNOLI, A. ZEPPILLI: *Teoremi di approssimazione per gli spazi analitici reali,* 1980, pp. 121 .... L. 3.500
7. AA. VV.: *Ottimizzazione non lineare e applicazioni,* a cura di S. Incerti e G. Treccani (Atti del Convegno Italsiel-UMI, l'Aquila 18 - 20 giugno 1979), 1980, pp. XI - 372 .... L. 10.000
8. L. SALCE: *Struttura dei p-gruppi abeliani,* 1980, pp. IV - 300 .... L. 8.000
9. S. COEN: *Una introduzione ai dominii di Riemann non ramificati n-dimensionali,* 1980, pp. VI - 222 .... L. 5.000
.0. C. CATTANEO: *Elementi di teoria della propagazione ondosa,* 1981, pp. VI - 216 .... L. 6.000
.1. G. GALLAVOTTI: *Aspetti della teoria ergodica, qualitativa e statistica del moto,* 1981, pp. XII - 388 .... L. 8.000
.2. A. CONTE: *Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni,* 1982, pp. 136 .... L. 4.500
.4. L. CATTABRIGA: *Alcuni problemi per equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti,* 1983, pp. VIII - 192 .... L. 7.000
5. A. CASSA: *Teoria elementare delle curve algebriche piane e delle superfici di Riemann compatte,* 1983, pp. VIII - 360 .... L. 10.000
7. R. BENEDETTI, M. DEDÒ: *Una introduzione alla geometria e topologia delle varietà di dimensione tre,* 1984, pp. VIII - 152 .... L. 5.000
8. P. BALDI: *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni,* 1984, pp. VIII - 312 .... L. 10.000
9. P. de LUCIA: *Funzioni finitamente additive a valori in un gruppo topologico,* 1985, pp. VIII - 188 .... L. 7.500
0. R. CONTI: *Processi di controllo lineari in IR^n,* 1985, pp. VIII - 192 .... L. 7.500
1. A. BACCIOTTI: *Fondamenti geometrici della teoria della controllabilità,* 1986, pp. VIII - 184 .... L. 9.000
2. L. PANDOLFI: *Alcuni metodi matematici nella teoria dei sistemi lineari di controllo,* 1986, pp. XII - 296 . L. 15.000
3. S. BENENTI: *Relazioni simplettiche: la trasformazione di Legendre e la teoria di Hamilton-Jacobi,* 1988, pp. XII - 336 .... L. 20.000
4. F. BORCEUX: *Fasci, logica e topoi,* 1989, pp. VIII - 300 .... L. 24.000
5. S. DRAGOMIR, J. C. WOOD: *Sottovarietà minimali ed applicazioni armoniche,* 1989, pp. IV- 168 .... L. 15.000
6. C. PROCESI: *Aspetti geometrici e combinatori della teoria delle rappresentazioni del gruppo unitario,* a cura di E. Rogora, 1991, pp. VIII - 172 .... L. 20.000
7. J. KIJOWSKI: *Elasticità finita e relativistica: introduzione ai metodi geometrici della teoria dei campi,* a cura di D. Bambusi e G. Magli, 1991, pp. IV - 256 .... L. 25.000
8. P. BASSANINI: *Leggi di conservazione iperboliche e onde d'urto,* 1993, pp. VIII - 160 .... L. 25.000
9. G. BUTTAZZO, A. MARINO, M.K.V. MURTHY (a cura di): *Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni,* 1995, pp. 252 .... L. 30.000
0. C. BERNARDI (a cura di): *Sviluppi e tendenze internazionali in didattica della matematica,* 1995, pp. 304 ... L. 35.000
1. W. WOESS: *Catene di Markov e Teoria del Potenziale nel Discreto,* 1996, pp. 170 .... L. 25.000
2. E. PITACCO, A. OLIVIERI: *Introduzione alla teoria attuariale delle assicurazioni di persone,* 1997, p. 248. L. 30.000
3. A. MARCJA, C. TOFFALORI: *Introduzione alla Teoria dei Modelli,* 1998, pp. VIII - 252 .... L. 35.000
4. P.M. SOARDI: *Appunti sulle Ondine,* 1998, pp. VIII - 132 .... L. 25.000

Distribuzione: Pitagora Editrice s.r.l., Via del Legatore 3, 40138 Bologna
Tel. 051530003 – Fax 051535301 – c.c.p. 20264404
http: //www.pitagoragroup.it – e-mail: pited@pitagoragroup.it
Ai soci UMI sconto del 20% sui prezzi di copertina.