Novembre 2006 | Period. mensile spedizione in A.P. art. 2, comma 20/b, legge 662/96 Filiale di Bologna | Anno XXXIII, N. 11/b

NOTIZIARIO
DELLA
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

XXV CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

«VALUTARE IN MATEMATICA»

Siena, 27-29 ottobre 2005

a cura di Giuseppe Anichini e Margherita D'Aprile

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

INDICE

PROGRAMMA 5

PRESENTAZIONE 7

CONFERENZE

ASQUINI GIORGIO, *"Che cosa ci dicono le risposte delle domande: item analisi classiche e item response theory"* **13**

BERNARDI CLAUDIO, *"Parliamo di matematica (a ruota libera)"* **23**

BRIGAGLIA ALDO, *"Luigi Cremona e la nuova scuola della nuova Italia: dagli obiettivi ai contenuti e alla loro valutazione"* **31**

CIARRAPICO LUCIA, *"Le prove di valutazione INVALSI"* **41**

GIACARDI LIVIA, *"Convergenze: una collana per la scuola"* **55**

FORILIZZI MARINA, *"La collana "Convergenze" e il punto di vista dell'editore"* **58**

BARTOLINI BUSSI MARIA G., MASCHIETTO MICHELA, *"Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola"* **59**

PAOLA DOMINGO, *"Le prove PISA ed INVALSI: possibili conseguenze sulla pratica didattica"* **63**

SALERI ANNA, POZIO STEFANIA, *"Capire i ragionamenti matematici dei quindicenni attraverso la metodologia del Pensare ad Alta Voce"* **71**

TESTA CLAUDIA, *"Docenti e valutazione degli apprendimenti in matematica: che cosa succede nella scuola?"* **79**

COMUNICAZIONI

AJELLO M., *Quand'è che due cose sono la stessa cosa? (Un'attività sperimentale nell'ambito della valutazione di competenze trasversali)* **91**

ANCONA ROSA LAURA, MONTONE ANTONELLA, *Alla ricerca dell'obiettività nel valutare in matematica nella scuola secondaria* **94**

PROGETTO SCIENCE CENTER, *La festa della matematica nell'anno* *mondiale della fisica* **96**

BRANDI PRIMO, *Fotografia digitale: la matematica ha sostituito la camera oscura* **99**

BRUNO GIORDANO, LORENZI CATERINA, *Matematica ed ecologia: tra forma e funzione. Un'esperienza di didattica fusionista nell'ambito della formazione primaria* **101**

DAPUETO CARLO, *Chi è / non è bravo in matematica?* **104**

FACENDA A.M., FULGENZI P., GABELLINI G., MASI F., NARDI J, PATERNOSTER F., *Uso integrato di modelli dinamici e Cabri a proposito di Triangoli* **106**

MOSCA SILVANA, *Apprendere dal feedback dell'autovalutazione in matematica – Progetto VALMAT* **109**

NASI ROMANO, *Analisi dinamica di protocolli relativi ad attività matematiche basate sulla discussione collettiva in classe: verso un modello teorico* **111**

OTTAVIANI MARIA GABRIELLA, MIGNANI STEFANIA, RICCI ROBERTO, *Metodi statistici per la valutazione di abilità e competenze: uno studio di caso che riguarda la matematica* **113**

SALVADORI ANNA, *Matematica&Realtà* **115**

VILLA BRUNA, *La storia di Penelope: gesti, parole e strumenti nell'apprendimento matematico* **117**

LABORATORI

ARZARELLO F., ACCOMAZZO P., DANÉ C., GIANINO P., LOVERA L., AGOSTELLI C., MOSCA M., NOLLI N., RONCO A. *Il senso dello spazio. La geometria su sfera, cilindro e cono* **123**

BARRA MARIO, *Aree di curve note o nuove calcolate con una nuova trasformazione non lineare* **125**

SAVIOLI KETTY ED ÉQUIPE PROGETTO VALMAT-AVIMES., *Strumenti per la valutazione e il miglioramento didattico* **127**

BOCCHINO C. TESTA C., *I docenti e le valutazioni degli apprendimenti, interne ed esterne al sistema scolastico* **129**

CATALANI DEGANI FRANCA, *Equazioni risolte alla maniera degli* *antichi* **132**

DAPUETO CARLO., *Prove di costruzione/personalizzazione di un "libro di testa" elettronico* **135**

IADEROSA ROSA, QUARTIERI ELISA, *Problemi di modellizzazione lineare: un contesto ricco per valutare conoscenze e competenze sulle funzioni* **137**

XXV CONGRESSO UMI-CIIM

VALUTARE IN MATEMATICA

Siena, 27-29 ottobre 2005

Programma

Giovedì 27 ottobre

- Iscrizioni
- Saluti delle autorità
- Conferenza: prof. Pietro Lucisano (Pedagogia sperimentale, Università di Roma "La Sapienza"), *Validità e affidabilità. Che cosa si può misurare e che cosa si può fare delle misure del profitto degli studenti.*
- Conferenza: dr. Raimondo Bolletta (INVALSI), *Le prove PISA per la matematica*
- Presentazione della nuova collana editoriale promosso dall'UMI-CIIM e pubblicata dalla Springer: *Convergenze. Strumenti per l'insegnamento della matematica e per la formazione degli insegnanti.* Intervengono: prof.ssa Livia Giacardi (Università di Torino, UMI-CIIM), Marina Forlizzi (Springer), Mariolina Bartolini Bussi e Michela Maschietto (autrici del primo volume della collana)
- Conferenza: dott.ssa Anna Saleri e dott.ssa Stefania Pozio (Dottorato di ricerca in Pedagogia sperimentale, Università di Roma "La Sapienza")
- Comunicazioni e Laboratori

Venerdì 28 ottobre

- Conferenza: prof. Anna Maria Caputo (INVALSI), *Le prove INVALSI*
- Conferenza: prof. Domingo Paola (Liceo "Issel" Finale Ligure SV, GREMG- Università di Genova), *Le prove PISA e INVALSI: possibili conseguenze sulla pratica didattica*
- Conferenza: prof. Claudia Testa (SIS Piemonte), *Docenti e valutazione degli apprendimenti in matematica: che cosa succede nelle scuole?*
- Conferenza: Dott. Giorgio Asquini (Dottorato di ricerca in Pedagogia sperimentale, Università di Roma "La Sapienza"), *Che cosa ci dicono le risposte delle domande; item analisi classica e item response theory*
- Comunicazioni e Laboratori

Sabato 29 ottobre

- Conferenza: prof. Claudio Bernardi (Università di Roma "La Sapienza"), *Parliamo di matematica (a ruota libera)*
- Tavola rotonda: *Valutare in Matematica*, coordina la prof. Lucia Ciarrapico (ispettrice MIUR)
- Conferenza: prof. Aldo Brigaglia (Università di Palermo), *Luigi Cremona e la nuova scuola della nuova Italia: dagli obiettivi ai contenuti e alla loro valutazione*
- *La riffa matematica* a cura del prof. Mario Barra
- Chiusura Convegno

PREFAZIONE

VALUTARE IN MATEMATICA è stato il tema del XXV Convegno UMI-CIIM, che si è tenuto a Siena dal 27 al 29 ottobre 2005.

Oggi l'insegnamento della matematica ha come obiettivo principale quello di trasferire allo studente, oltre a conoscenze tecniche, un messaggio preciso: che la matematica è una disciplina utile e necessaria, presente ovunque, come ormai riconosciuto da tempo, e fondamentale in ogni settore della scienza e della tecnica. Nel passato sono state attivate dalla CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) iniziative volte al miglioramento della preparazione e della formazione degli insegnanti di discipline matematiche sia dal punto di vista didattico sia da quello dell'aggiornamento disciplinare.

Un aspetto particolarmente decisivo, e in questi momenti assai discusso, è quello della valutazione. Negli ultimi anni, nei paesi occidentali, è forte la richiesta, da parte della comunità, di "provvedere alla valutazione degli apprendimenti nelle scuole statali e paritarie, della lingua nativa, della matematica e delle scienze". In Italia ciò viene fatto, secondo legge, con riferimento alla seconda e quarta classe della scuola primaria, alla prima classe della scuola secondaria di primo grado, ed alle classi prime e terza della scuola secondaria di secondo grado.

La CIIM ha inteso, con questo Convegno, affrontare la questione della valutazione degli apprendimenti in Matematica.

La valutazione degli apprendimenti in Matematica, nella scuola dell'autonomia, è un processo che il docente, pur nell'ambito della sua professionalità, non può portare a compimento da solo. Molte indicazioni operative provengono infatti da decisioni collegiali, che dovrebbero essere condivise anche nella attuazione, e dipendono da parametri e variabili, complessi e numerosi. Nel Convegno UMI-CIIM è stato affrontato il problema di tale valutazione, nella odierna realtà scolastica, in un quadro assai ampio, tenendo conto:

- del profondo mutamento del rapporto della scuola con istituzioni e società;
- del quadro normativo;
- della valutazione nelle (e delle) singole istituzioni scolastiche che vede coinvolta con un ruolo di primaria importanza la matematica, unitamente al rapporto tra valutazione interna ed esterna al sistema scolastico;
- della competenza didattica che, insieme ad altre competenze e alle caratteristiche professionali, è uno dei fattori di efficacia dell'insegnamento (della matematica).

Nel Congresso, ad esempio, sono state affrontate varie problematiche connesse alla presenza dei test nel processo di valutazione della matematica, evidenziandone limiti e positività; è noto che ogni insegnante conosce bene le difficoltà che devono affrontare gli studenti, anche i più abili e motivati, a descrivere, spiegare e giustificare le strategie risolutive che sono state adottate; (ciò non accade solo agli studenti ma anche a professionisti adulti i quali magari sanno risolvere un problema o sanno gestire una situazione, ma che trovano difficoltà a trasferire ad altri le competenze acquisite). Non c'è alcun dubbio che il passaggio, come è stato detto durante il Congresso, da un *sapere come* a un *sapere perché*, da una conoscenza tacita a una consapevole, siano obiettivi di primaria importanza per una scuola che abbia come compito quello di aiutare gli studenti a formarsi un pensiero critico che consenta loro di partecipare consapevolmente alle scelte della vita pubblica. Tali aspetti, legati alla matematica come costruzione teorica, possono però essere inevitabilmente poco presenti in un test.

È opinione condivisa che l'uso di test strutturati (a risposta chiusa) può ridurre la variabilità della valutazione al variare del soggetto che valuta e quindi, in questo senso, i test a risposta chiusa possono considerarsi prove che tendono all'oggettività, ovviamente nell'ottica dell'argomentazione precedente. Sottovalutare questi aspetti e sovrastimare la possibilità di una valutazione oggettiva potrebbe essere molto rischioso soprattutto in un momento in cui le tecnologie di apprendimento a distanza iniziano a essere guardate con particolare interesse.

Le attività suggerite, talora implicitamente, dai test PISA od INVALSI sono tese, in generale, a far capire l'origine degli errori, la portata dell'uso di termini non appropriati al contesto, le possibili implicazioni di informazioni nascoste o eccessivamente evidenziate rispetto ad altre, l'uso inadeguato di rappresentazioni grafiche (involontario o voluto); tali attività sono fortemente finalizzate ad aiutare gli studenti a formarsi uno spirito critico: è l'informazione, così come viene talvolta veicolata sui mezzi di comunicazione di massa, che è oggetto di analisi critica, proprio grazie agli strumenti matematici studiati. Nell'ottica, sempre perseguita dalle dinamiche della UMI-CIIM dell'ultimo decennio, di una matematica come attività umana, sempre collegata alla realtà, è presente un'attenzione che abbia implicazioni forti per l'educazione matematica, che deve proporre situazioni di insegnamento - apprendimento che siano concrete per gli alunni e rilevanti rispetto all'ambiente in cui vivono.

Nell'ambito del Convegno è stato anche presentato il primo volume della collana *Convergenze. Strumenti per l'insegnamento della matematica e la formazione degli insegnanti*; tale iniziativa è nata nell'ambito delle proposte finalizzate al miglioramento dell'insegnamento della matematica, promosse dalla Unione Matematica Italiana attraverso l'operato della sua commissione permanente, cioè la CIIM. Il suo scopo è quello di offrire volumi agili che affrontino temi importanti della matematica con rigore di metodo, ma con un ampio respiro culturale, con attenzione agli aspetti storici, didattici e applicativi e, se possibile, agli sviluppi più recenti della disciplina. Come recita il sottotitolo, la collana è rivolta soprattutto agli insegnanti, sia a quelli in servizio, sia a quelli che si preparano ad entrare nel mondo della scuola, ma può costituire una lettura piacevole e stimolante per tutti coloro che hanno curiosità verso la matematica.

Come al solito il Convegno è stato frequentato molto assiduamente per le "ricche" attività di laboratorio, per le comunicazioni da parte dei partecipanti, per le tavole rotonde molto apprezzate.

Organizzando un tale convegno, la CIIM, -- ed in particolare Ferdinando Arzarello, che l'ha diretta per tutto il periodo del progetto *Matematica per il cittadino*, -- ha contribuito a rendere operativi i fini promozionali dell'Unione Matematica Italiana e gettato un solido ponte verso la comunità dei docenti e degli studenti.

(g. anichini)

CONFERENZE

CHE COSA CI DICONO LE RISPOSTE DELLE DOMANDE: ITEM ANALISI CLASSICA E *ITEM RESPONSE THEORY*

Giorgio Asquini
(Università di Roma 'La Sapienza')

1. Prendere decisioni: il fattore I

Lavorare nella scuola richiede molto spesso la capacità di prendere decisioni. E quando si prendono decisioni diventa molto importante il fattore I.
I come ideologia: il percorso decisionale è orientato dall'insieme di valori che guidano le scelte di vita di ogni persona, che nel caso dell'insegnante si concretizzano nella scelta dei contenuti e dei metodi di insegnamento, sulle cui basi si fonda l'azione didattica.
I come imponderabilità: si deve agire per un determinato obiettivo, ma i risultati possono essere diversi dalle attese, perché è difficile considerare tutte le variabili in gioco, ma anche perché le variabili possono cambiare in corso d'opera. E anche perché la stessa azione è una variabile che modifica le altre variabili.
I come informazioni: se vogliamo prendere decisioni dobbiamo avere possibilità di scelta, quindi disporre di alternative, e per ogni alternativa dobbiamo avere dati di successo di rischio.
E' proprio su quest'ultimo aspetto che interveniamo, delimitandolo al tema specifico della valutazione attraverso le prove oggettive, convinti però che avere maggiori (e più corrette) informazioni riguarda anche le scelte ideologiche e il tasso di imponderabilità dei risultati che ogni insegnante sfida quando inizia una lezione.
Valutare significa trasformare una misura in un valore (sufficiente/insufficiente, eccellente/migliorabile ecc.), e in base a questa trasformazione prendere una decisione (promosso/bocciato, recupero/sviluppo, debito/credito). Sempre più spesso le misure all'origine del processo decisionale provengono da prove oggettive, vuoi per la diffusione delle indagini nazionali/internazionali che hanno coinvolto le scuole italiane e permesso a molti insegnanti di entrare in contatto con strumenti avanzati di rilevazione[1], vuoi per il loro ingresso nell'Esame di Stato, in quest'ultimo caso avvalorando la tesi che intervenire sugli strumenti di verifica finisce per avere un maggiore effetto sulla didattica rispetto all'intervento sui programmi di studio.
Inoltre le prove oggettive presentano molti vantaggi operativi, perché richiedono un lavoro preventivo di allestimento, ma risultano facili da utilizzare e permettono di avere molti dati sincronici, cioè valutazioni individuali rilevate contemporaneamente. Se poi si ha l'accortezza di creare un archivio di prove, magari coinvolgendo i colleghi, si può creare un efficace strumentario di rilevazione. Di questa possibilità se ne sono accorti anche gli studenti, che nei blog e nei gruppi in rete si scambiano dritte sui test in uso nelle scuole.

2. Riflettere sugli strumenti di valutazione

Ben vengano dunque le prove oggettive, se migliorano la raccolta di informazioni/misure sulle competenze degli studenti, ma molte volte, frequentando corsi di aggiornamento e

[1] Ricordiamo a titolo esemplificativo l'indagine OCSE-PISA, avviata nel 2000 e giunta al suo terzo ciclo, o l'indagine IEA-TIMSS, partita nel 1995 e anch'essa al terzo ciclo.

gruppi di lavoro nelle scuole, si ha l'impressione che la dicitura "oggettive" sia diventata un'etichetta da attaccare a tutte le domande seguite da due o più alternative di risposta, piuttosto che una caratteristica di un quesito, tutta da costruire e da verificare.
In realtà la dicitura "oggettive" sintetizza quelle che dovrebbero essere le caratteristiche di uno strumento di misura: non basta prendere un bastone e farci delle tacche sopra per avere un metro.
Il primo requisito di una prova dovrebbe essere la validità, cioè la capacità di misurare quello che si vuole misurare, coerenza quindi tra strumento e oggetto di valutazione. Se intendo verificare la comprensione dell'ultima lezione svolta NON devo inserire domande relative a lezioni precedenti. A nessuno verrebbe in mente di misurare con un termometro una lunghezza, ma purtroppo con un test si misura sempre qualcosa, sta al suo estensore capire, prima, cosa sta misurando.
Il secondo requisito è la vera e propria oggettività, cioè l'accordo indiscusso che la risposta giusta sia una, e che le altre risposte siano sbagliate. Può sembrare strano, ma di quesiti con due risposte giuste (magari una "più" giusta, l'altra meno) sono pieni i test, con ovvi riflessi sulla prima caratteristica (cosa stiamo misurando?). In questo caso funziona bene la condivisione del test, cioè costruire/verificare il lavoro con i colleghi, per mettersi d'accordo su cosa è giusto e cosa è sbagliato.
Infine l'affidabilità di una prova, cioè la capacità di riprodurre le stesse misure se utilizzata più volte, rappresenta una caratteristica indispensabile laddove è necessario ripetere e confrontare misure. In questo caso l'accortezza dell'insegnante deve estendersi dalla fase di costruzione a quella dell'utilizzo: se una prova diventa "pubblica" la misura ripetuta risulterà falsata (qualcuno già conosce le risposte) e anche in questo caso mi illuderò di star misurando una competenza, ma sto misurando l'abilità di aver trovato il foglio con le chiavi di risposta.
Un utile appendice è rappresentata dalla precisione, cioè dalla capacità della prova di distinguere le posizioni individuali del maggior numero di studenti possibili, evitando graduatorie troppo aggregate. Naturalmente tutto questo senza ricorrere a batterie di 200 domande (cosa sto misurando? La resistenza fisica al test?).
Quindi l'oggettività di una prova è un traguardo da raggiungere, e uno strumento utile per questo scopo è rappresentato dalla procedura di item analisi, cioè il controllo della qualità dei quesiti che compongono una prova per capire se i punteggi che ne derivano sono validi, oggettivi e affidabili.

3. L'item analisi classica

Per la definizione delle procedure di item analisi secondo il modello classico bisogna risalire al lavoro svolto da Spearman nei primi anni del '900. Con Spearman (1904a, 1904b) possiamo parlare per la prima volta di una vera e propria teoria psicometria dell'intelligenza, in cui vengono collegati due fattori, uno di tipo specifico misurato da una prova di profitto e uno di tipo generale rappresentato dall'intelligenza del rispondente. Partendo da questo assunto Spearman ha utilizzato il calcolo matematico per migliorare la qualità delle misure rilevate attraverso prove di profitto, con la definizione della formula base

$$X = T + E$$

dove X è il punteggio osservato (nella prova), T il punteggio vero (cioè l'intelligenza del rispondente) e E l'errore di misura. Questa formula rappresenta il punto di partenza per le applicazioni psicometriche elaborate nel corso del '900, sia in campo pedagogico che psicologico; Spearman stesso ha indicato la riduzione dell'errore di misura come l'impegno più critico per il "misuratore" dell'intelligenza, introducendo di fatto il concetto di *reliability* nella considerazione critica di una prova.[1]

Nel corso del '900 la teoria classica dei test (CTT, *Classical Test Theory*) viene affinata nei particolari fino al saggio *The axioms and principal results of classical test theory* di Novick (1966), anche se il contributo più importante alla sistemazione del trattamento statistico dei dati si ritrova nell'opera di Guilford (1950), *Fundamental Statistics in Psychology and Education.*

Nell'item analisi di tipo classico vengono considerate alcune caratteristiche dei quesiti (facilità, discriminatività, qualità dei distrattori) per poter giudicare l'efficienza dell'intera prova[2]. L'osservazione di queste caratteristiche permette una descrizione del test che permette di dare significato ai punteggi ad esso collegati, fornendo anche indicazioni esplicite per intervenire sui quesiti allo scopo di migliorare la qualità della prova.

Presupposto fondamentale dell'item analisi classica è l'attendibilità (*reliability*) della prova, cioè la sua capacità di misurare in modo preciso e costante, riducendo al minimo gli errori di misura. Il concetto di attendibilità non deve pertanto essere limitato alla prova in sé, ma esteso a tutti gli aspetti della sua utilizzazione: le condizioni di somministrazione, il comportamento dei rispondenti, i tempi assegnati, l'inserimento dei dati. In tutti questi momenti possono intervenire variabili diverse da quelle che la prova intende misurare (disturbi esterni, stanchezza, velocità) e verificarsi veri e propri errori materiali (un inseritore di dati che digita una lettera per un'altra) che aumentano l'errore (E) e riducono il valore cercato (T). La stima preventiva dell'attendibilità costituisce quindi un passaggio obbligato e preventivo dell'item analisi, e a questo scopo sono state elaborate diverse tecniche statistiche[3], da una parte basate sul concetto di duplicazione/ripetizione del test (forme parallele, re-test), dall'altra sul controllo della sua consistenza interna.

Naturalmente una verifica negativa dell'attendibilità di una prova non permette immediatamente di capire quanta parte dell'errore sia dovuta alla prova stessa e quanta agli aspetti legati alla somministrazione e al trattamento dei dati. Proprio per questo la standardizzazione e il controllo delle procedure di utilizzazione di una prova risultano determinanti per limitare, o almeno stimare ragionevolmente, il margine di errore che

---

[1] Da ricordare anche la definizione da parte di Spearman di un coefficiente di correlazione (rho) tra punteggi di rango, ancora largamente usato e la partecipazione alla definizione della misura di attendibilità Spearman-Brown per la lunghezza dei test.

[2] Il trattamento statistico dei dati di una prova permette di ricostruire decine di indici diversi (Boncori 1993), ma i tre aspetti indicati rappresentano la struttura base dell'item analisi classica.

[3] La consistenza può essere verificata anche con il metodo split-half (divisione in due parti del test e relativo confronto), o attraverso il calcolo di coefficienti quali l'Alfa di Cronbach (Boncori 1993).

sarà rilevato dal controllo della attendibilità.
Circa la verifica preventiva della funzionalità di una prova, bisogna anche ricordare che il costrutto da analizzare deve essere tipo unidimensionale, cioè i punteggi ricavati dalla prova devono far riferimento a una sola variabile indipendente[1].
Per capire il funzionamento dell'item analisi secondo il modello classico proponiamo un semplice esempio basato su una ipotetica prova composta da 10 item svolta in una classe di 19 studenti. Volutamente non si danno riferimenti di contenuto per concentrare l'attenzione sul trattamento dei dati. Nella tabella 1 sono riportati gli item (colonne) e le relative risposte degli studenti (righe). Nelle righe successive sono calcolati i totali per ognuna delle 4 alternative (A-D), più le eventuali omissioni di risposta (presenti solo nell'ultimo item) e i possibili errori di risposta (doppia crocetta, in questo esempio non ci sono errori di questo tipo). Questi dati sono già convertiti in valori percentuali. Da notare che gli studenti non sono inseriti secondo il numero d'ordine, ma in ordine decrescente di profitto, ricavabile (ultima colonna) dal punteggio complessivo nel test. In tal modo gli studenti migliori si trovano nella parte bassa della tabella, quelli peggiori nella parte alta.
Successivamente sono calcolati gli indici di facilità e discriminatività. Il primo si ottiene calcolando il rapporto tra risposte esatte e totale dei rispondenti: per il primo item 11/16=0,58. L'indice di discriminatività[2], cioè la capacità di un quesito di distinguere i bravi dai meno bravi, si può calcolare secondo la differenza fra le risposte corrette fornite dagli studenti migliori e quelle degli studenti peggiori (Gattullo e Giovannini 1989): è opportuno che questi due gruppi estremi siano formati da circa un terzo del gruppo totale, per cui in questo caso consideriamo i migliori 6 studenti (6 risposte corrette per il primo item) e i peggiori 6 (1 sola risposta corretta), la differenza deve essere poi divisa per il numero di componenti di ogni estremo, per cui (6-1)/6=0,83.
Che significato hanno questi indici? La facilità ideale è intorno a 0,50, cioè il quesito è risolto da circa metà dei rispondenti. Sono da considerare troppo facili i quesiti con indice superiore a 0,75-0,80, troppo difficili quelli inferiori a 0,25-0,20: nel nostro esempio i casi estremi sono gli item 2 (troppo difficile) e 4 (troppo facile, rispondono tutti), di fatto non misurano nulla e potrebbero essere esclusi dal test senza intaccare la validità dei risultati. Ma anche per l'item 10 abbiamo forti indizi di eccessiva facilità, perché tutte le risposte espresse sono corrette, con 5 omissioni probabilmente dovute a mancanza di tempo per rispondere. Per la discriminatività sono da considerare accettabili gli indici superiori a 0,30, per cui ci sono problemi per gli item 2 e 4, con addirittura una discriminatività negativa per l'item 7: vuol dire che hanno risposto più correttamente gli studenti peggiori (4 esatte) dei migliori (3 esatte), quindi l'item sta misurando una variabile diversa da quelle degli altri quesiti e dovrebbe essere escluso dalla prova.

[1] In situazioni in cui si può ipotizzare una multidimensionalità del costrutto, risulta opportuno svolgere un'analisi di tipo fattoriale, che distingua preventivamente le variabili secondo cui raggruppare i singoli item di un test.
[2] L'indice di discriminatività può essere ottenuto anche attraverso il calcolo della correlazione punto biseriale, in pratica la correlazione di Pearson tra il singolo item e il punteggio dell'intero test. In questo caso si è preferito il confronto fra gli estremi per la sua facilità di applicazione.

Tabella 1 – Esempio di item analisi classica

STUDENTI	ITEM 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale punti
10	B	D	C	B	B	B	A	C	C	n	1
15	C	B	C	B	D	D	A	D	B	D	3
05	C	D	A	B	A	D	C	B	A	D	4
13	B	B	B	B	A	C	C	D	C	n	4
06	A	A	A	B	D	B	C	C	B	n	4
03	B	B	A	B	B	B	C	D	B	D	5
09	A	B	A	B	D	A	C	D	B	n	5
07	C	B	A	B	A	C	D	D	C	D	5
14	D	B	C	B	C	C	D	D	B	D	5
08	A	A	A	B	C	A	A	B	B	D	5
19	A	A	A	B	C	B	C	B	C	D	6
01	C	A	A	B	B	C	A	D	D	D	6
11	A	B	A	B	C	B	C	D	B	n	6
17	A	B	A	B	C	C	B	D	B	D	7
04	A	A	A	B	C	D	B	D	D	D	7
02	A	A	A	B	C	C	B	D	D	D	8
12	A	B	A	B	C	C	C	D	B	D	8
18	A	B	A	B	C	C	C	D	D	D	9
16	A	C	A	B	C	C	C	D	D	D	10
Chiave	A	C	A	B	C	C	C	D	D	D	
Totale A	58	32	79	0	16	11	21	0	5	0	
Totale B	16	53	5	100	16	26	16	16	47	0	
Totale C	21	5	16	0	53	47	53	11	21	0	
Totale D	5	11	0	0	16	16	11	74	26	74	
Omissioni	0	0	0	0	0	0	0	0	0	26	
Errate	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Facilità	0,58	0,05	0,79	1,00	0,53	0,47	0,53	0,74	0,26	0,74	
Discrimin	0,83	0,17	0,50	0,00	1,00	0,67	-0,17	0,50	0,67	0,50	
Discriminatività distrattori											
A	0,83	0,17	0,50	0,00	-0,33	0,00	-0,33	0,00	-0,17	0,00	
B	-0,50	0,00	-0,17	0,00	-0,33	-0,50	0,50	-0,17	-0,17	0,00	
C	-0,33	0,17	-0,33	0,00	1,00	0,67	-0,17	-0,33	-0,33	0,00	
D	0,00	-0,33	0,00	0,00	-0,33	-0,17	0,00	0,50	0,67	0,50	

Oltre all'esclusione degli item con valori critici, si può intervenire anche per migliorare gli item con valori accettabili; in questo caso risultano utili i dati relativi ai distrattori, cioè alle alternative errate. Un distrattore non dovrebbe avere percentuale di scelta

superiore alla risposta corretta, perché si rivelerebbe troppo "distraente" (distrattore B della domanda 9), ma non dovrebbe nemmeno risultare talmente assurdo da non essere scelto da nessuno (distrattore A item 8), per cui su queste alternative, pur considerando la qualità complessiva dell'item, si può intervenire per renderle più equilibrate. Inoltre se la discriminatività delle risposte corrette deve essere marcatamente positiva, quella relativa ai distrattori (ultime 4 righe della tabella) dovrebbe essere marcatamente negativa, cioè le risposte sbagliate dovrebbero essere scelte soprattutto dagli studenti peggiori. Nel nostro esempio questo non succede per l'item 7, dove il distrattore B discrimina positivamente, un motivo in più per buttare via questo item.
Naturalmente la prova è stata costruita proprio per evidenziare tutti i possibili difetti degli item, per cui sono troppo pochi gli item che si salvano dalla verifica (1, 5, 6) e in questo caso tutta la prova andrebbe cestinata. Quello che si è voluto evidenziare qui è la concreta possibilità di realizzare questo controllo degli item con strumenti a disposizione di tutti, come un normale programma di foglio elettronico.

4. Un nuovo modo di fare item analisi

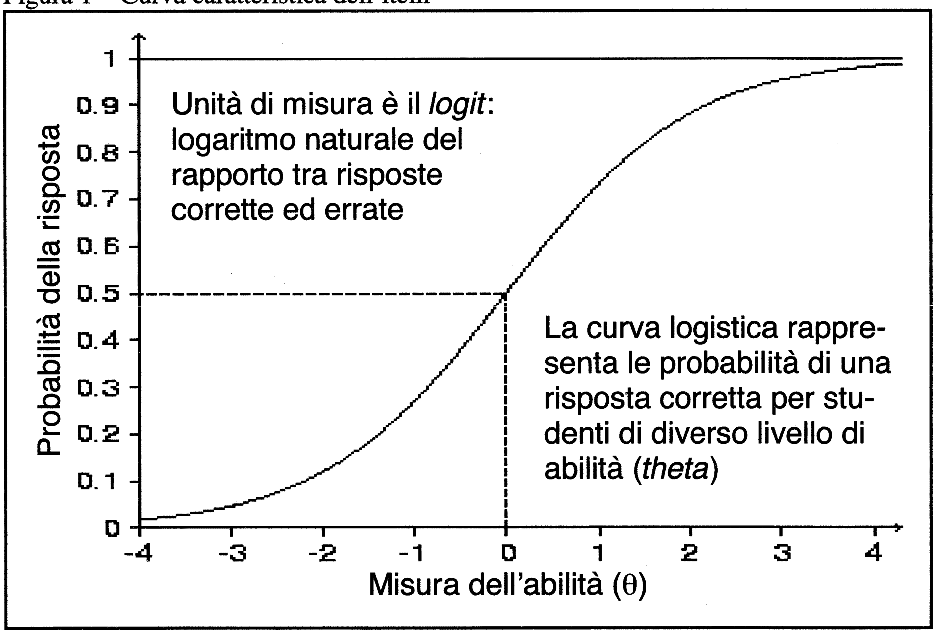
Accanto alla definizione del modello classico di item analisi si è sviluppata però una riflessione sull'effettivo rapporto esistente fra il quesito e lo studente, cioè fra la facilità/difficoltà di risoluzione del primo e l'abilità del secondo, in definitiva il complesso rapporto esistente fra misura, strumento di misura e oggetto della misura.
I principali aspetti critici della teoria classica di analisi degli item sono costituiti dalla forte sensibilità dei valori degli indici rispetto al gruppo che svolge la prova e dalla difficoltà di comparazione fra soggetti sottoposti a prove diverse; inoltre la verifica dell'attendibilità della prova non risulta nella pratica facilmente verificabile (per esempio con l'allestimento di forme parallele del test). In sintesi risulta non del tutto chiaro il rapporto esistente fra i punteggi ricavati dalle risposte degli studenti e le caratteristiche degli item.
La riflessione, avviata negli anni '40, ha proprio come primo obiettivo quello di approfondire il rapporto esistente fra le risposte a una prova e una variabile indipendente, quale può essere l'abilità o l'intelligenza. La nuova pista di lavoro è costituita dalla possibilità di ottenere misure dai singoli quesiti di ogni prova (indipendenza locale degli item), da cui il nome definito da Lord (1952) di *Item Response Theory* (IRT). Una prima importante svolta si ha con l'opera del matematico danese Georg Rasch, che formula un modello innovativo di item analisi. Rasch (1960) parte da un'assunzione: la probabilità che uno studente risponda correttamente a un quesito dipende da due fattori, la difficoltà dell'item e l'abilità dello studente, fattori che risultano misurabili con una sola variabile su una sola scala.
Mentre con l'item analisi classica le misure relative a un item non avevano niente a che fare con la scala dei punteggi degli studenti, con l'analisi IRT si utilizzano le stesse misure per stimare la qualità dell'item e la qualità dello studente, stimando per entrambi la posizione sulla scala dell'abilità misurata dalla prova, detta tratto latente (*theta*, θ). Il tratto latente è l'elemento che tiene uniti i quesiti di una prova (viene confermata la necessità di analizzare un costrutto di tipo unidimensionale, come per l'item analisi classica), in pratica corrisponde a ciò che la prova sta misurando, e con l'analisi IRT è possibile verificare sia quali quesiti non sono coerenti con il tratto latente della prova, sia quali studenti non sono coerenti, ciè hanno una preparazione anomala rispetto al resto del

gruppo.
Il classico modello Rasch dicotomico (ogni item ha due possibili risposte 0/1) suppone che la probabilità che il soggetto n risponda correttamente all'item i (Pni) dipende dall'abilità del soggetto (βn) e dalla difficoltà dell'item (δi), ma poiché la differenza tra abilità e difficoltà è potenzialmente infinita, a fronte di Pni variabile tra 0 e 1, viene specificato un legame logistico. Ecco la formula di riferimento definita da Rasch.

$\ln (Pni/(1 - Pni) = \beta n - \delta i$

La misura ottenuta non risulta pertanto proporzionale alla probabilità di risposta, quanto alla trasformazione logit[1]. Nel modello di Rasch si nota che βn dipende solo dall'abilità della persona n e che δi dipende solo dalla difficoltà dell'item i. Si noti che Pni aumenta all'aumentare di βn – δi, ma non in modo lineare, e che vale 0,5 se l'abilità del soggetto è uguale alla difficoltà dell'item. L'andamento dell'abilità e della probabilità di risposta è evidenziato nel grafico relativo all'*Item Characteristic Curve*.

Figura 1 – Curva caratteristica dell'item



Come si può notare con il crescere dell'abilità dello studente aumenta anche la probabilità di risposta corretta. Se l'abilità è 0 (corrispondente all'abilità media del

[1] L'intuizione del modello logistico deve essere attribuita a Lord (1952), che ha fornito la base per l'elaborazione di modelli di analisi IRT a più parametri (Birnbaum 1968). Tuttavia Rasch, pur partendo da un approccio legato alla teoria della probabilità, di fatto sviluppa un modello di tipo logistico.

gruppo cui appartiene lo studente) la probabilità è del 50% (0,5). La forma della curva è data dal particolare tipo di relazione fra le variabili, poiché l'abilità si misura in logit, cioè l'unità di misura dell'abilità dello studente è il logaritmo naturale del rapporto tra risposte corrette ed errate rispetto ad item che si trovano all'origine della scala, cioè che hanno valore 0.

Allo stesso modo si può "leggere" il grafico come la curva caratteristica dello studente che risponde all'item, dove le probabilità di risposta sono legate alla facilità dell'item, esattamente con lo stesso andamento: facilità 0 con probabilità 50%, superiore a 0 (più difficile) probabilità crescenti e quindi raggiungibili dagli studenti più abili, inferiore a 0 probabilità discendenti, alla portata anche degli studenti meno abili. Anche dal punto di vista visivo il grafico dimostra come difficoltà e abilità rappresentino due facce della stessa medaglia: al crescere della difficoltà dell'item, deve crescere l'abilità necessaria per dare una risposta corretta.

Sulla strada aperta da Rasch si sono avviati, in modo riginale, anche altri ricercatori, con la messa a punto di metodologie che considerano diversi parametri di analisi. Se il modello originario di Rasch considera unicamente la facilità/difficoltà dell'item, dalla fine degli anni '50 Birnbaum approfondisce dal punto di vista matematico il modello logistico di Lord, con la messa a punto di modelli di analisi che considerano anche la discriminatività (modello a due parametri) e le probabilità di risposta casuale all'item (modello a tre parametri).

A differenza dell'item analisi classica realizzabile con strumenti semplici, i calcoli necessari per svolgere l'IRT richiedono software specifici, che però risultano reperibili sul mercato e sostanzialmente accessibili, dal punto di vista economico, per le istituzioni scolastiche[1].

Un effetto pratico dell'analisi IRT, secondo il modello a due e tre parametri, è rappresentato dalla pesatura di ogni singolo item, cioè dall'assegnazione di un valore specifico a ogni item in relazione al profilo dei rispondenti. In questo modo anche studenti che hanno dato lo stesso numero complessivo di risposte corrette, possono ottenere un punteggio diverso, laddove la graduatoria standard fa riferimento al modello 1risposta=1punto. Questa caratteristica risulta estremamente utile per la precisione della scala di misura.

5. Gestire, condividere, comprendere le informazioni

Costruire prove oggettive rappresenta una vera e propria forma di artigianato d'autore, che però dovrebbe riprendere il modello rappresentato dalle botteghe rinascimentali, dove dietro un maestro passato alla storia agiva un articolato gruppo creativo. Ogni scuola può trasformarsi in una bottega di valutazione, dove ogni insegnante può contribuire con i suoi prodotti e usufruire dell'esperienza dei colleghi, dove accanto ad un esperto "referente della valutazione" in grado di svolgere item analisi sempre più raffinate sui

---

[1] A titolo esemplificativo ricordiamo qui il programma XCalibre, che si può visionare ed acquistare sul sito della società www.assess.com/index.htm, e Ministep, versione gratuita del programma Winsteps, visionabile ed acquistabile sul sito www.winsteps.com. XCalibre applica l'analisi IRT a due o tre parametri, Ministep invece il tradizionale modello di Rasch.

risultati delle prove, tutti sono però in grado di comprendere le tabelle riassuntive con gli indici dei quesiti e il significato dei punteggi degli studenti.
Discutere di qualità delle prove rappresenta forse uno dei migliori stimoli per riflettere sulla qualità complessiva della didattica, cercando di raccordare la fase della valutazione con l'intero processo formativo.
Concludiamo con una breve citazione per ritornare al nostro punto di partenza, l'esigenza di raccogliere informazioni adeguate per poter prendere decisioni efficaci nel lavoro quotidiano: valutare è un mestiere difficile, ma resta sempre affascinante.

Possiamo nettamente prevedere i risultati solo facendo un attento esame delle circostanze e l'interesse che portiamo al risultato fornisce il motivo per le osservazioni. Più queste osservazioni sono adeguate, più varia sarà la gamma delle condizioni e degli ostacoli e più numerose le alternative fra le quali esercitare la scelta.

John Dewey
Democrazia e educazione

Riferimenti bibliografici

- Asquini G. (1997), *Il foglio di calcolo nell'analisi delle prove a risposta chiusa*, in "Cadmo", V, 13-14.
- Asquini G., Piria L. (1998), *Elementi essenziali di item analisi e statistiche descrittive*, in Pagnoncelli L. (a cura di) Formazione e valutazione dell'apprendimento, Roma, Anicia.
- Birnbaum A. (1968). *Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability*, in Lord F.M., Novick M.R. (eds.), *Statistical theories of mental test scores*, Addison-Wesley, Reading.
- Boncori L. (1993), *Teoria e tecnica dei test*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Boomsma, A., Van Duijn, M.A.J., Snijders, T.A.B.(Eds.) (2000), *Essays on Item Response Theory*, New York, Springer-Verlag
- Gattullo M., Giovannini M.L. (1989), *Misurare e valutare l'apprendimento nella scuola media*, Bruno Mondadori, Milano.
- Guilford (1950), *Fundamental Statistics in Psychology and Education*, New York: McGraw- Hill.
- Lord, F.M. (1952), *The relation of the reliability of multiple-choice tests to the distribution of item difficulties*, in "Psychometrika", 17, 181-194.
- Novick, M. R. (1966), *The axioms and principal results of classical test theory*, in "Journal of Mathematical Psychology", 3, 1-18.
- Rasch, G. (1960) *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests.* Copenhagen: Danish Institute for Educational Research
- Spearman, C. E. (1904a), *'General intelligence' objectively determined and measured*, in "American Journal of Psychology", 5, 201-293.
- Spearman, C. E. (1904b), *Proof and measurement of association between two things*, in "American Journal of Psychology", 15, 72-101.
- Van der Linden W.J., Hambleton R.K. (Eds.), (1997), *Handbook of modern item*

response theory, New York, Springer-Verlag.
- Vincenti A.B. – Calvani A. (1987), *Item analisi e modello di Rasch*, in "Orientamenti pedagogici", vol.34, n.2, 223-248.
- Wood R. (1985), *Item Analysis*, in Husen T., Postlethwaite T.N., *The International Encyclopedia of Education*, New York, Pergamon Press.

PARLIAMO DI MATEMATICA (A RUOTA LIBERA)

Claudio Bernardi
(Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza")

Penso di dover, in primo luogo, precisare il titolo di questo intervento. Non sentendomi in grado di fare un discorso tecnico sulla valutazione, preferisco limitarmi a proporre varie osservazioni, suggerite dalla mia esperienza di insegnante di matematica.
Senza la pretesa di un'analisi sistematica, prenderò spunti dall'indagine internazionale *OCSE PISA* sull'apprendimento della matematica e dalle prove nazionali *INValSI.* Vorrei subito affiancare a queste indagini, che forniscono una valutazione globale per certi versi non positiva della Scuola italiana, altri punti di osservazione.
Partiamo dalle Olimpiadi di Matematica, che nelle prime fasi coinvolgono moltissimi studenti, mentre le fasi finali riguardano una piccola *élite*. Nel 2005 il risultato dei nostri studenti alle *IMO* (le Olimpiadi Internazionali, che si sono svolte in Messico nel mese di luglio) è stato lusinghiero: tutti e 6 i ragazzi italiani hanno vinto una medaglia, il che significa che si sono piazzati nella prima metà dei concorrenti.
Sempre pensando ad un'élite, che pure è presente nelle nostre Scuole, cito poi le prove per assegnare le 40 borse per matricole di Matematica bandite ogni anno dall'*Istituto Nazionale di Alta Matematica* (*INdAM*): nel 2005 hanno partecipato alle prove circa 500 candidati; di questi, almeno 70 hanno svolto un compito veramente buono.
Vorrei ricordare infine che alcuni ragazzi che escono dalle Superiori si presentano alle prove di accesso ad istituzioni prestigiose, come la Normale di Pisa, i collegi di Pavia, la Scuola Superiore di Catania. Ho avuto esperienze dirette e, anche in questo caso, posso testimoniare la presenza di ragazzi con un'ottima preparazione matematica.
Siamo in presenza di un quadro variegato. Mi sembra sbagliato tanto drammatizzare quanto ritenersi soddisfatti; come dire: non è vero che tutto va male, ma è fuori discussione che qualcosa potrebbe andar meglio.

Naturalmente, è ingenuo pensare a semplici ricette per migliorare l'efficacia del nostro insegnamento, e non è certo questo lo scopo del mio intervento. Mi propongo, invece, di sottolineare alcuni aspetti che forse meritano più attenzione, discutendo attività, problemi, atteggiamenti degli insegnanti e facendo riferimento alle indicazioni curriculari proposte dall'*UMI* (e reperibili nella pagina Internet www.umi.unibo.it).

Abitudine alle congetture e problem solving

A mio parere, oggi il punto principale dell'insegnamento della matematica *non* sta nel rinnovamento dei contenuti. L'esigenza di eliminare certi argomenti per lasciare spazio ad altri, specie nelle Superiori, era giustamente molto avvertita nei decenni scorsi (basti pensare al Piano Nazionale Informatica), ma oggi è meno urgente.
Anche il curriculum dell'*UMI* non contiene grosse novità sul piano dei contenuti. E' interessante, invece, la presenza di *nuclei trasversali* con pochi contenuti, o addirittura privi di contenuti. Cito in particolare il nucleo «*argomentare congetturare dimostrare*», che è stato recepito dal Ministero nei recenti Obiettivi Specifici di Apprendimento con il titolo «*forme dell'argomentazione e strategie del pensiero matematico*».

Nell'insegnamento tradizionale delle Superiori (e anche dell'Università) non c'è l'abitudine alle congetture, che invece rappresentano un primo passo per una completa comprensione di un risultato e, in generale, del modo di procedere di un matematico.
Vediamo subito qualche semplice esempio di congetture e di esplorazioni in campo aritmetico.

Che cosa si può dire della somma di due numeri dispari consecutivi?
Basta considerare qualche esempio (come 5 + 7, o 11 + 13) per accorgersi che la somma non solo è pari (il che è ovvio), ma è anche un multiplo di 4. Pensando ai primi anni delle Superiori, la dimostrazione non presenta difficoltà, purché si sappiano usare, con un minimo di familiarità, semplici scritture algebriche: $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n$.
L'esempio è molto facile, ma è interessante il percorso: si inizia con verifiche in casi particolari, alle quali segue una congettura (o più congetture), per passare infine ad una dimostrazione.

Vediamo un esempio meno banale. *La somma di k numeri interi consecutivi* ($k > 1$) *è divisibile per k?*
Qualche semplice controllo, come $4 + 5 + 6 = 15$ oppure $4 + 5 + 6 + 7 = 22$, fa subito capire che la risposta dipende da k. Più precisamente, se k è dispari, la risposta è ... (la somma è k volte il numero "intermedio"), mentre se k è pari ...
Si può proseguire con una domanda decisamente più impegnativa: quali numeri si possono esprimere come somma di k interi positivi consecutivi (con $k > 1$)? Per esempio, si ha $12 = 3 + 4 + 5$, $17 = 8 + 9$, $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, mentre non si riesce a scrivere 16 come somma di addendi consecutivi. Non riporto qui una risposta completa; mi limito a dire che i numeri cercati sono tutti e soli i numeri che *non* sono potenze di ...

Per formulare una congettura in geometria è molto importante disporre di disegni accurati e, almeno in quest'ottica, un *software dinamico* è indubbiamente utile (per inciso, io preferisco parlare di *software dinamico* piuttosto che *geometria dinamica*).
Vediamo due quesiti. *Due bisettrici di un triangolo possono essere perpendicolari?* Quando ho letto questa domanda nel volume "*Matematica 2003*", mi sono tranquillamente immaginato un triangolo con due bisettrici perpendicolari; poi, provando a costruire effettivamente un tale triangolo, o anche solo riflettendo meglio, ...
Due bisettrici di un quadrilatero possono essere perpendicolari?
Questa volta la risposta è affermativa: la circostanza si presenta nei trapezi e nei parallelogrammi, ma non solo, perché è verificata anche in alcuni quadrilateri concavi (in quest'ultimo caso le due diagonali escono da vertici non consecutivi).

L'idea generale è di incoraggiare, per quanto possibile, l'abitudine a fare verifiche e tentativi, a formulare congetture, cercando di *capire* un problema o una situazione.
Per questa strada si arriva al *problem solving*, inteso come gusto di affrontare problemi non legati alla parte di programma appena svolta, scoprendo e applicando strategie, e imparando a giustificarle e a comunicarle agli altri. A differenza di quanto (purtroppo) capita spesso negli esercizi standard, non c'è un'unica strada giusta per rispondere ad una domanda.
Riporto qui un solo esempio di problema, sicuramente molto difficile (tratto dalla rivista

Archimede, vol. LVI (2004), pag. 150, a cui rimando per la soluzione); preciso che per età si intendo un numero intero positivo.
L'età delle figlie del re. *Il re chiese al suo giullare: «Sai dirmi l'età delle mie due figlie? La somma è pari al numero delle finestre del palazzo che abbiamo di fronte.».*
Il giullare replicò: «Sire, questa informazione non mi basta».
Il re aggiunse: «I due numeri che stai cercando non sono primi fra loro».
Il giullare diede la risposta corretta, e poi notò: «La figlia maggiore del re ha la stessa età di mio figlio».
Quanti anni avevano le due figlie del re?
La difficoltà consiste nel fatto che non abbiamo alcun dato numerico: l'unica informazione è che il giullare ha le informazioni necessarie per rispondere.

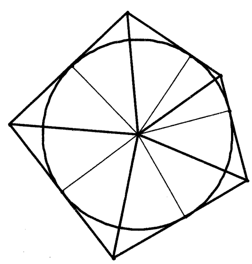
«Si sconsiglia di ...»

Nelle indicazioni curricolari dell'UMI, dopo le tabelle con *contenuti* e *competenze*, compare spesso un paragrafo con un breve elenco di argomenti o tecniche sconsigliate. Sulle singole voci, si può essere d'accordo o in disaccordo, ma l'idea è interessante (una volta tanto si danno consigli per togliere e non per aggiungere argomenti) e vale la pena discuterne.
Vediamo due esempi di tecniche algebriche sconsigliate nel primo biennio.
a) La *razionalizzazione* del denominatore di una frazione contenente un radicale. Personalmente, credo che un'uguaglianza del tipo $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, indubbiamente molto utile quando i calcoli si facevano a mano, sia tuttora significativa: è notevole che l'inverso di $\sqrt{2}$ sia uguale alla metà di $\sqrt{2}$. L'errore, a mio parere, sta nel vedere la razionalizzazione come un imperativo, una cosa che va fatta (specie quando non si sa che altro fare!). Inoltre, in certi casi l'uguaglianza precedente va letta da destra verso sinistra: in un certo senso si tratta di razionalizzare il numeratore o, se si preferisce, di semplificare numeratore e denominatore per $\sqrt{2}$.
b) La *regola di Ruffini* [alludo allo schema per la divisione di un polinomio $P(x)$ per un binomio del tipo $x-a$ e *non* al teorema di Ruffini secondo cui $P(a) = 0$ se e solo se $x-a$ divide $P(x)$].
La raccomandazione è, a mio avviso, più generale e si potrebbe esprimere dicendo di non esagerare con schemi e diagrammi. Schemi e diagrammi sono, spesso, strumenti utili. Ma la mia impressione è che molti studenti pensino che gli schemi *siano* la "matematica", confondendo i risultati veri e propri (i teoremi, che danno informazioni nuove) con rappresentazioni comode o strumenti occasionali; e questo è un grosso guaio. Di fatto, credo che la regola di Ruffini sia più nota del teorema di Ruffini, che invece esprime un risultato non banale.

Far apprezzare i risultati profondi

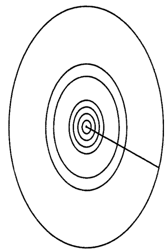
Quando si studia matematica, si tratta anche di *imparare a riconoscere i risultati profondi*, inquadrandoli correttamente e distinguendoli dai risultati più semplici.
Purtroppo, noi docenti spesso proponiamo concetti e procedure quasi fossero cose

scontate (come di fatto sono per noi); e questo porta gli studenti a *ripetere*, più che a raggiungere *consapevolezza* in ciò che fanno e che dicono.
Come esempio, consideriamo il numero π. Fin dalle Scuole Elementari e Medie, si impara la formula che fornisce la lunghezza c della circonferenza: $c = 2\pi r$. Ora, prescindendo dal calcolo del valore di π, la formula è sostanzialmente tautologica: l'uguaglianza è del tutto ovvia se π è stato introdotto come rapporto fra le lunghezze della circonferenza e del diametro (in effetti abbiamo solo la similitudine fra circonferenze diverse, similitudine del resto già implicita nella definizione di π).
Il fatto da notare, invece, è che la *stessa* costante π compare anche nella formula che dà l'area A del cerchio, $A = \pi r^2$: in sostanza, partendo dalla formula banale $c = 2\pi r$, ricavando π e sostituendo, si trova la formula più interessante $A = cr/2$.
L'ultima uguaglianza, se inquadrata in modo opportuno, è piuttosto intuitiva: non è difficile convincersi che, in generale, se un poligono P è circoscritto ad un cerchio di raggio r, allora $area_P = \dfrac{r \cdot perimetro_P}{2}$ (si veda la figura: le altezze dei vari triangoli in cui è scomposto P sono tutte uguali).



Pensando il cerchio come caso limite di un poligono in cui i lati diventano sempre di più e sempre più piccoli, si ottiene appunto $A = cr/2$.
Per un motivo analogo, il volume V di una sfera e l'area S della sua superficie sono legati dall'uguaglianza $V = r \cdot S/3$.

Tornando alle formule relative a circonferenza e cerchio, $2\pi r$ è la derivata di πr^2. Come si spiega questa circostanza?
Credo che una giustificazione sia più facile in termini di integrali. Pensiamo un cerchio di raggio r come unione di corone circolari di spessore "piccolissimo": l'area della corona circolare di raggio x e spessore dx è, a meno di infinitesimi di ordine superiore, 2□$x\,dx$ e l'area del cerchio è allora $\int_0^r 2\pi x\, dx = \pi r^2$.



Analogamente, nel caso della sfera, $4\pi r^2$ (area della superficie) è la derivata di $(4/3)\pi r^3$ (volume). Questo legame fra l'area della superficie e il volume, che si dimostra come nel caso del piano, non è banale ma nemmeno difficilissimo. Invece, il risultato geniale, dovuto ad Archimede, è la determinazione effettiva del volume, da cui poi si ricava l'area della superficie.
Siamo partiti da un'uguaglianza utile negli esercizi ma sostanzialmente banale, siamo poi passati a relazioni di un certo interesse, per concludere con un teorema molto profondo.
Da quanto precede, spero si colga che penso ad una *didattica lunga*, che consiste nel ritornare più volte su un problema, su un argomento già visto negli anni precedenti, per svilupparlo e approfondirlo.

Competenze matematiche

Quali sono, oggi, le competenze matematiche necessarie nella formazione di un cittadino?
Una volta, la matematica era vista come *far di conto*. Oggi, mi convince poco parlare di competenze aritmetiche "utili", direttamente spendibili nella vita: dopo tutto, disponiamo di calcolatrici piccole ed efficienti e, se una calcolatrice si rompe, basta prenderne un'altra. Il mio punto di vista è diverso: occorre imparare (a memoria!) le *tabelline* non perché servono, ma perché, in questo modo, il bambino impara operativamente a riconoscere numeri pari e numeri dispari, coglie regolarità e simmetrie, comincia a dare una struttura all'insieme dei numeri.
Oggi, forse, mancano a molti nostri studenti competenze più profonde, che hanno un carattere culturale: capire *quando* va usato il metodo matematico, e capire *come* va usato (*quali calcoli* fare, quale *procedimento* seguire). Non c'è molta differenza con la *literacy* di cui si parla a proposito delle prove *PISA*. Non sto affermando che si tratta delle competenze più importanti, ma di quelle che probabilmente non sono adeguatamente sviluppate nella nostra scuola.

Nel recente articolo «*A critique of impure unreason*» pubblicato negli Atti dell'*International Meeting in honour of Paulo Abrantes* (Lisbona, luglio 2005), Jeremy Kilpatrick cita cinque punti qualificanti per l'apprendimento della matematica. Oltre alla *comprensione dei concetti*, alla *scioltezza nei calcoli*, alla *conoscenza di strategie* per risolvere i problemi, Kilpatrick parla di *adaptive reasoning* (pensiero logico che sa adattarsi al contesto, riflessione e spiegazione, costruzione di analogie e metafore) e di

productive disposition (atteggiamento di chi vede nella matematica uno strumento utile). Per illustrare gli ultimi due punti, Kilpatrick porta come esempio la seguente questione. «Ci sono due piccole città *A* e *B*; in dieci anni, *A* cresce da 5 a 8 mila abitanti, mentre cresce *B* da 6 a 9 mila abitanti. Alla domanda "quale città è cresciuta di più?", Tizio risponde "la crescita è stata la stessa", mentre Caio risponde "*A* è cresciuta più di *B*". Quali possono essere le motivazioni matematiche alla base delle risposte di Tizio e di Caio?»
Solo pochissimi studenti (circa 1 su 30 alle Superiori) sanno dare motivazioni chiare. La domanda non è difficile, ma esce dalle abitudini scolastiche.

Prendiamo spunto da quello che capita

Come dicevo, la *productive disposition* si collega alla capacità di capire *quando* e *come* usare la matematica. Mi riferisco non tanto alle classiche applicazioni concrete della matematica, ma ad una mentalità matematica: abituiamoci a *pensare in termini matematici*, noi docenti per primi.
Possiamo trovare molte occasioni da esaminare con strumenti matematici, prendendo spunto anche da situazioni banali. Vediamo un paio di esempi, che volutamente si riferiscono a giochi che, per essere sincero, non mi piacciono più di tanto.

A) Il *Sudoku* e il ragionamento per assurdo.
Nel Sudoku, come è ben noto, occorre riempire una tabella con le cifre da 1 a 9, seguendo certe regole. Ora, se in una casella escludo tutti numeri salvo il 3 (cioè se ipotizzando che «ci sia una cifra diversa da 3» arrivo ad una contraddizione), allora concludo che in quella casella *devo* scrivere 3.
Questo modo di comportarsi è, di fatto, molto spontaneo. In altre parole: il ragionamento per assurdo non è una strana cosa che si fa in geometria, ma è uno schema naturale di ragionamento.

B) In alcune trasmissioni televisive il concorrente vince il contenuto di una scatola o il premio indicato da una carta; nel corso della trasmissione viene più volte proposto al concorrente di cedere il suo premio (che ancora non conosce) in cambio di una somma in denaro.
Esaminiamo un esempio appena un po' diverso, «*il Malloppo*», che va in onda alle 20.30 su Rai Uno in certi periodi o in certi giorni.
Verso la fine del programma, si presentano al concorrente alcune casseforti chiuse, una con una certa somma, le altre vuote; il concorrente sceglie e, naturalmente, vorrebbe indovinare qual è la cassaforte piena.
Si propone al concorrente di eliminare una cassaforte vuota in cambio di una riduzione della somma contenuta nella cassaforte piena; per esempio, si passa da 6 a 5 casseforti (e quindi è un po' più probabile indovinare la cassaforte piena), ma la somma che si vince diminuisce da 80 mila euro a 50 mila.
Nelle puntate che ho visto, i concorrenti si sono comportati in modo per lo più istintivo, accettando offerte che a me parevano ben poco convenienti. In effetti, per stabilire se conviene o no accettare un'offerta, io ricorrevo ad un semplice calcolo di probabilità. Nell'esempio precedente, la *speranza matematica* è a priori, in migliaia di euro, $80 \cdot 1/6$,

ma, se si accetta l'offerta, diminuisce a 50·1/5. Quindi l'offerta è sfavorevole al concorrente.
Questa conclusione è tuttavia discutibile, nel senso che appunto si può discutere, perché l'*utile* (nel calcolo della speranza matematica) non è necessariamente proporzionale alla somma che si vince. Per spiegarmi meglio, semplifico la situazione e aumento le somme in gioco (regola generale: per chiarire una situazione, molto spesso è utile considerare casi limite). Supponiamo di dover scegliere fra le due offerte seguenti:
i) un milione di euro sicuro e
ii) due milioni al 50% (nel senso che si lancia una moneta: se viene *T* vinco 2 milioni di euro, se viene *C* non prendo nulla).
Credo che ogni persona ragionevole scelga un milione sicuro. Dal punto di vista dell'utilità personale, 2 milioni *non* è il doppio di 1 milione: se con un milione di euro realizzo certi sogni, il secondo milione non mi dà altrettanta soddisfazione.
In altre trasmissioni televisive, le offerte si riferiscono ad una singola scatola o ad una singola carta. Naturalmente, qualora le offerte siano fatte da una persona che ha più informazioni del concorrente, cioè che conosce il valore della scatola o della carta, entrano in gioco anche considerazioni psicologiche (del tipo «se mi offrono poco, vuol dire che quella scatola o quella carta vale poco»).

L'ammissione alla SSIS e il punteggio in un test

Vorrei concludere riportando alcuni problemi che ho incontrato nella mia recente esperienza di coordinamento per la prima prova di ammissione alla *SSIS*.
Come è noto, la prima prova consiste in un test a risposta multipla. Da alcuni anni, per gli Indirizzi Fisico Matematico e Scienze Naturali, il test viene concordato fra diverse sedi; nel 2005 hanno aderito al *coordinamento nazionale* quasi tutte le *SSIS* italiane (per brevità non riporto l'elenco – per un'analisi dettagliata delle modalità di coordinamento e dei risultati rimando al report «*Coordinamento nazionale 2005 per la prima prova di accesso agli Indirizzi scientifici delle SSIS*» di C. Bernardi – D. Pro, che fa seguito al report di G. Anzellotti – F. Mazzini relativo alle prove 2004). Alla stesura e alla revisione dei quesiti (175 in tutto) hanno collaborato moltissimi docenti e supervisori delle varie sedi.
In generale, in un test è ovviamente necessaria la *massima chiarezza* nella formulazione dei quesiti. Anche Mario Marchi, coordinatore del gruppo di lavoro che ha preparato le prove *INValSI* di matematica, mi ha confidato di essersi spesso trovato in difficoltà nel tentativo di conciliare le esigenze di semplicità e chiarezza con le esigenze di precisione (se non si è precisi, si viene inevitabilmente criticati!).
Dirò di più: a mio parere, in occasione di un test è meglio evitare *ogni* spiegazione o chiarimento da parte del docente, perché spiegazioni e chiarimenti alterano l'oggettività della prova.

Torniamo alla *SSIS*. La legge fissa il numero di domande (50 per ogni classe di abilitazione), il numero di alternative fra cui scegliere (5 per ogni domanda), i tempi (sono concessi in media 2 minuti per domanda) e il punteggio generale della prova (per il test sono assegnati da 0 a 40 punti, mentre 30 punti sono riservati ai titoli e altri 30 alla seconda prova). Non viene invece specificato *come* valutare le singole risposte, e così rimane a discrezione delle sedi il metodo per attribuire il punteggio nel test a risposta

multipla. Vediamo il problema principale.
Anche durante questo convegno sono stati espressi pareri diversi su come valutare una *risposta lasciata in bianco*: va considerata al pari di una risposta sbagliata, oppure va premiato lo spirito critico di chi sa di non sapere?
Spesso, se in una domanda ci sono n alternative, si attribuiscono 0 punti per una risposta sbagliata, 1 punto in caso di risposta non data (cioè lasciata in bianco), n punti per una risposta giusta (il che equivale, a meno di "traslazioni" ai punteggi -1, 0, $n-1$). La motivazione è che, in questo modo, rispondere a caso o lasciare in bianco, in media, dà lo stesso risultato.
Tutto sommato, questo punteggio mi convince. Altri consigliano invece di equiparare una risposta in bianco ad una risposta sbagliata. La cosa dipende dalle motivazioni che attribuiamo al fatto che uno studente non risponda ad una domanda: si può trattare di un atteggiamento rinunciatario, sintomo di pigrizia, oppure di atteggiamento critico, o ancora di mancanza di tempo.
Aggiungo che una risposta lasciata in bianco equivale ad una risposta sbagliata nelle prove *INValSI* (ma non si tratta di valutare un singolo studente). Viceversa, nella prova per le borse *INdAM* a cui accennavo all'inizio, nei quesiti a risposta multipla si attribuiscono 0 punti per ogni risposta sbagliata e 5 per ogni risposta giusta (ci sono 5 alternative), ma per una risposta lasciata in bianco si danno 1,5 punti invece di 1.
Talvolta, mi è capitato di sentire proteste contro i punti assegnati ad una risposta in bianco: non facendo nulla, un candidato ha un punteggio positivo! Io invece ritengo che, anche in una prova orale, la scena muta non sia la peggior risposta possibile. Se poi, compilando la graduatoria, ci si accorge che i punti guadagnati con le risposte in bianco pesano troppo, questo significa che il test era troppo difficile.

Al momento di preparare il test, era stata concordata una lunga serie di indicazioni per la stesura di quesiti e risposte. Per esempio, abbiamo evitato la risposta «nessuna delle precedenti», cui si ricorre quando la fantasia non sorregge o quando si teme si sbagliare; ma questa risposta, fra l'altro, non permette una permutazione libera delle 5 alternative quando si vogliono produrre molte versioni del test.
Per motivi di spazio, non riporto qui tutte le indicazioni. Ma una cosa che ho imparato dal coordinamento, dove occorre necessariamente mediare fra molte persone e altrettanti pareri, è evitare di affezionarsi troppo alle proprie abitudini e alle proprie convinzioni.
Concludo rivolgendo quindi un invito a non rifiutare, quando si presenta l'occasione, forme diverse di valutazione: se qualche esperienza, sia all'interno di una Scuola sia a livello più ampio, è criticabile, questo non mi pare un motivo valido per ritenere affidabili solo gli strumenti tradizionali di valutazione.

LUIGI CREMONA E LA NUOVA SCUOLA DELLA NUOVA ITALIA: DAGLI OBIETTIVI AI CONTENUTI E ALLA LORO VALUTAZIONE

Aldo Brigaglia
(Dipartimento di Matematica, Università di Palermo)

Anche se il linguaggio è profondamente cambiato, obiettivi, competenze, metodi dell'insegnamento della matematica sono stati discussi su tematiche simili nel corso del tempo.

Recuperare il filo di una lunga tradizione può forse servire per evitare, come è stato detto, di dover sempre iniziare come se fosse l'anno 0. Questo contributo vuole collegare alcune problematiche attuali con quelle presenti nel ventennio 1860 – 1880, cruciale per la formazione dello stato unitario.

Il giovane allievo di Brioschi, sposato e con famiglia, bassino e calvo. Questa la schematica descrizione del ventottenne Cremona data dal matematico inglese Thomas Hirst, di passaggio dalla Lombardia, *seguendo gli eserciti vittoriosi di Francia e Piemonte attraverso le pianure della Lombardia e le raggiunse a SanMartino e a Solferino prima che quei sanguinosi campi di battaglia fossero sgombrati dai loro morti.*

La schematica descrizione è comunque efficace: Cremona (nato nel dicembre 1830) nel 1859 era un insegnante al Liceo di Cremona, era stato uno degli allievi prediletti di Francesco Brioschi, era sposato con Elisa Ferrari e aveva una figlia, Elena. Notiamo di passaggio che proprio l'avere famiglia gli aveva impedito di continuare la carriera universitaria come assistente di Brioschi.

Il gruppo di matematici che si era formato in Italia, principalmente nelle università di Pavia e di Pisa, era di primissimo ordine e stava preparando un vero e proprio boom per la ricerca scientifica della neonata nazione.

Di questo gruppo facevano parte Betti (1823-1892) a Pisa, Brioschi(1824-1897) a Pavia, Cremona, ma anche ... Casorati (1835-1890) a Pavia, Beltrami (1835-1900) a Pavia, Battaglini (1826-1894) a Napoli, e più tardi Pincherle (1853-1936), Ascoli (1843-1896), Bertini (1846-1933), Bianchi (1856-1928), Volterra (1860-1940), Peano (1858-1932), Ricci (1853-1925), Veronese (1854-1917), Segre (1863-1924), Castelnuovo (1865-1952), Enriques (1871-1946), Levi Civita (1873-1941), Severi (1879-1961), ...

Le parole d'ordine che accomunano i componenti di questo gruppo possono essere riassunte in: Modernità e Internazionalità.

Io mi soffermerò sulla figura di Luigi Cremona.

I piani di lettura entro i quali vedere l'avventura intellettuale di questo giovane è plurimo:

Il piano storico – in quanto egli fa parte integrante della storia culturale, ma anche politica, del nostro paese; il piano biografico – in quanto la sua vita ci insegna molto su come si forma un gruppo di ricerca coeso e di statura internazionale; il piano della ricerca matematica – in quanto egli ha dato contributi fondamentali allo sviluppo della geometria algebrica intorno alla metà del XIX secolo; il piano della didattica matematica – in quanto le sue idee hanno avuto un'influenza determinante sull'insegnamento della matematica nella scuola italiana.

Inizio da brevi riferimenti biografici, che possono mostrare quanto la sua formazione sia intessuta dagli ideali risorgimentali.

Una buona parte della prima gioventù la trascorre presso la sorella (di madre diversa) Giovanna a Gropello (ora Gropello Cairoli). Lì diviene amico dei fratelli Cairoli tutti ferventi garibaldini: Benedetto (nato nel 1825, futuro primo ministro), Ernesto (nato nel 1832 e morto nel 1859, combattente con Garibaldi nella battaglia di Varese), Luigi (nato nel 1838 e morto nel 1860, durante la spedizione dei mille. Luigi era stato studente di matematica a Pavia con Brioschi), Enrico (nato nel 1840 e morto nel 1867 a Villa Glori), Giovanni (nato nel 1842 e morto nel 1869 in seguito alle ferite riportate a Villa Glori). Un'atmosfera che vedeva in Garibaldi il centro del movimento nazionale.

Nel 1848 – 49 molti del gruppo dei matematici partecipa alle lotte rivoluzionarie:

Cremona partecipa alla difesa di Venezia, Betti alla battaglia di Curtatone sotto il comando del suo professore, Mossoti.

A Venezia Cremona conosce il giovane Nicola Ferrari, stretto collaboratore di Mazzini; nel 1854 sposa la sorella di Nicola, Elisa. Per dare un'idea dei legami tra la famiglia Ferrari Mazzini basti dire che nel 1852 lo zio di Elisa, Napoleone Ferrari, diviene esecutore testamentario della madre di Mazzini; alla sua morte le carte di Mazzini passano alla famiglia Cremona (legato Itala Cremona, istituto mazziniano, Genova).

Nel 1855, alla morte di Nicola, la giovane coppia Cremona ricevette una lettera di pugno di Mazzini (lettera poi passata alla letteratura con il nome di *Lettera sull'immortalità dell'anima*), di cui riporto l'incipit:

Alla sorella di Nicola Ferrari

Signora, rassegnatevi, consolatevi. Io non vi vidi mai; ma so che amavate teneramente il fratello, e so ch'ei v'amava di profondo amore. Son certo ch'ei vi parlava di me, della fiducia ch'io poneva in lui e del santo affetto che legava l'anime nostre nell'adorazione d'uno stesso ideale, nel culto dell'Italia avvenire. E vi scrivo come a sorella, a darvi, lamentando insieme e parlando di lui, quel conforto che per me si può. Io non credo nella morte. Credo nella vita.

Ho citato queste poche righe per cercare di trasmettere l'emozione che sulla giovane coppia può avere destato la lettura di queste righe in un momento nel quale gli ideali risorgimentali prevalevano anche sugli interessi scientifici. In ogni caso vanno tenuti presenti gli strettissimi legami, familiari e di amicizia, di Cremona con due delle famiglie più impegnate sia sul fronte garibaldino che su quello mazziniano.

Comunque, è proprio a partire dalla metà degli anni '50 che, in modo concorde anche se indipendentemente l'uno dall'altro, questi giovani decidono che il contributo principale che essi possono dare alla patria è quello di svilupparne la ricerca scientifica e, come è – o meglio come dovrebbe essere – naturale ciò può avvenire solo attraverso la scuola.

Il primo ad agire in questo senso è Enrico Betti, che a Firenze, insieme a Giovanni Novi, si fa protagonista di una grande impresa, la traduzione di alcuni testi scolastici francesi in italiano. Do qui di seguito le date e i titoli delle pubblicazioni, cercando di farne apprezzare la natura di progetto organico:

Agosto 1856: J. Bertrand, *Aritmetica*, trad. Novi; ottobre 1856: J. Bertrand, *Trattato di Algebra Elementare*, trad Betti; J. Serret, *Trattato di Trigonometria*, trad. Ferrucci; 1857: Novi, *Elementi di Aritmetica*; 1858: E. Amiot, *Trattato di Geometria Elementare*, trad. Novi.

Contemporaneamente il gruppo agisce anche sul piano scientifico attraverso:

- Un viaggio scientifico in Germania e Francia (Betti, Brioschi, Casorati).
- La riorganizzazione degli Annali di matematica, principale rivista matematica italiana-
- Lo sviluppo di ricerche in vari campi della matematica, tutti di avaguardia

(algebra e fisica matematica – Betti, che tra l'altro si occupa della teoria di Galois; geometria algebrica – Cremona; determinanti e invarianti – Brioschi, che tra l'altro scopre la risoluzione delle equazioni di sesto grado attraverso funzioni iperelleittiche; analisi – Casorati, che diffonde le idee di Weierstrass prima e di Riemann dopo).
Su questi temi rinvio al bel libro di Umberto Bottazzini, *Va' pensiero*, ed. Il Mulino.
Tornando a agli indirizzi didattici perseguiti dal gruppo, vorrei schematicamente indicare alcune parole chiave per interpretare il loro pensiero. Esse sono: immaginazione (certo disciplinata dal rigore); rapporto con la ricerca; contribuire allo sviluppo dell'industria nazionale e quindi relazioni (complesse) con le applicazioni; contribuire all'unificazione della scuola del paese (unificazione di contenuti, di metodi, di linguaggi).
Così leggiamo nella Prefazione di Betti alla traduzione dell'Amiot, a proposito dei legami tra insegnamento e ricerca:
In niuna parte delle matematiche apparisce di più cotesto inconveniente quanto nella Geometria pura; e basta por mente ai mirabili progressi in questa scienza operati nell'ultimo scorcio di tempo, per consentire con noi che i trattati più riputati manchino affatto di quelle dottrine che si sono trovate più fruttuose nella Geometria moderna; talché con ragione può dirsi che essi preparino i giovani più allo studio delle Collezioni Matematiche di Pappo che a quello delle opere di Chasles, Möbius, Poncelet, Steiner, ecc.
Le cagioni del grave divario che corre tra le opere di Geometria elementare e lo stato attuale di questa scienza, sono diverse e di varia natura; talune generali ad ogni maniera di scienza, altre peculiari alla Geometria. Le prime ripetono la loro origine dal potere che ha sulla maggior parte degli animi umani l'abitudine, e dall'opinione volgare seguita da molti che la scienza debba servire esclusivamente alla pratica; opinione onninamente falsa e che ove prevalesse annullerebbe ogni progresso.
La trasformazione delle figure è uno dei più fecondi mezzi d'investigazione geometrica. Ma le novelle teoriche sono per avventura difficili e complicate per modo che oltrepassino i limiti di un insegnamento elementare? Sono inutili per la pratica? Sono inutili per le parti superiori delle matematiche? Le nozioni fondamentali sul rapporto anarmonico, sulla involuzione, sulle divisioni omografiche ..., diremo senza tema di essere smentiti da chi le ha studiate, che sono più facili di molte parti della Geometria solida. I nuovi metodi prestandosi con grande facilità e generalità alla soluzione dei problemi geometrici, giovano per questo lato alle applicazioni della scienza.
Se mi si permette una divagazione poetica, l'atmosfera che Betti voleva creare nella scuola è quella descritta tanto bene da Stendhal:
Il mio entusiasmo per la matematica aveva origine forse dal mio orrore per l'ipocrisia.
Alla terza o quarta lezione passammo alle equazioni di terzo grado e a quel punto Gros ci disse cose completamente nuove. Mi sembra che ci abbia trasportato di colpo alle porte della scienza o davanti al velo che bisognava sollevare.
Provavo un piacere intenso, analogo a quello della lettura di un romanzo appassionante.
...
Ero allora come un grande fiume che va a gettarsi in una cascata, come il Reno sopra Sciaffusa dove il suo corso è ancora tranquillo ma sta per gettarsi in un'immensa cascata. La mia cascata fu l'amore per la matematica.
È proprio questo a cui si riferisce Betti: portare (certo in forme non facili) gli allievi almeno a percepire il *velo che bisogna sollevare* è la via per comunicare la matematica.
Luigi Cremona fu profondamente impressionato dal progetto didattico di Betti e nel

1859, ancora insegnante nel liceo di Cremona, si accinse a scrivere una lunga recensione, nella quale per la prima volta esprime le sue idee didattiche, le *Considerazioni di Storia della Geometria in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato a Firenze.*
Non vorrei qui ripetere troppe considerazioni generali, penso che il riportare qualche esempio delle attività proposte da Cremona alla luce della lettura del testo di Amiot possa chiarire più della teoria. Il primo esempio riguarda i poligoni stellati. Uso le parole stesse di Cremona:
Divisa una circonferenza in n parti uguali, se uniamo i punti di divisione, a cominciare da uno di essi, di 2 in 2, di 3 in 3, e in generale di h in h, si forma un poligono regolare di n lati, quando i numeri n ed h siano primi tra di loro. Il numero h costituisce la specie del poligono. Vi ha tanti poligoni regolari di n lati, quante unità vi sono nella metà del numero che esprime quanti numeri interi vi sono inferiori ad n e primi con esso. La somma degli angoli interni, formati dai lati successivi di un poligono regolare di n lati, è uguale a 2(n-2h) retti. Questi teoremi sono i fondamentali nella teorica dei poligoni stellati.
Il secondo esempio riguarda il metodo delle trasformazioni (si ricordi che siamo nel 1859, tredici anni prima della pubblicazione del programma di Erlangen di Klein):
Ora ci conviene dare un'idea della deformazione e della trasformazione delle figure piane. Imaginiamo che in un piano vi sia un punto che movendosi in modo affatto arbitrario descriva una certa figura. Nello stesso piano o in un altro imaginiamo un secondo punto mobile, il cui movimento sia collegato dietro una legge individuata al movimento del primo punto; nella qual legge entri la condizione che a ciascuna posizione di uno dei punti mobili corrisponda un'unica posizione dell'altro mobile, e reciprocamente. Il secondo mobile avrà così descritto una seconda figura, la quale del resto può, prescindendo da idee di movimento, anche desumersi dalla prima, supposta data, mediante un metodo di deformazione, che tenga luogo di quella legge determinata che legava i due movimenti.
Poligoni stellati, trasformazioni. Come si vede si tratta di una scelta di temi che ancora oggi sono considerati innovativi. Temi (in particolare il secondo) che pongono la didattica a stretto contatto con la ricerca dell'epoca, temi che fanno della matematica uno strumento non solo di sviluppo delle facoltà razionali dell'uomo, ma anche di quelle relative alla fantasia e all'immaginazione, come detto sopra.
Mi sembra anche interessante comprendere bene in quali circostanze sia venuto alla luce questa recensione. Il testo porta in calce: Cremona, 28 marzo 1859; l'8 giugno Vittorio Emanuele sarebbe entrato trionfalmente in Milano. Nata in una scuola dell'impero asburgico, la recensione sarebbe stata pubblicata un anno dopo, nel più battagliero dei giornali milanesi, *Il Politecnico* di Carlo Cattaneo. Anche la data di invio alla rivista è significativa: il 9 maggio 1860, due giorni prima dello sbarco a Marsala!
Questo succedersi di date può far meglio comprendere la nota aggiunta da Cremona all'articolo apparso nella rivista di Cattaneo:
Ora che il giogo straniero non ci sta più sul collo a imporci gli scelleratissimi testi di Moznik, Toffoli, ecc., che per più anni hanno inondato le nostre scuole e le avrebbero del tutto imbarbarite se tutt'i maestri fossero stati docili a servire gl'interessi della ditta Gerold – ora sarebbe omai tempo di gettare al fuoco anche certi libracci di matematica che tuttora si adoperano in qualche liceo e che fanno un terribile atto d'accusa contro chi li ha adottati. Diciamolo francamente: noi non abbiamo buoni libri elementari che siano originali italiani e giungano al livello de' progressi odierni della scienza. Forse ne

hanno i napoletani che furono sempre e sono egregi cultori delle matematiche; ma come può aversene certa notizia se quel paese è più diviso da noi che se fosse la China? I migliori libri, anzi gli unici veramente buoni che un coscienzioso maestrodi matematica elementare possa adottare nel suo insegnamento, sono i trattati di Bertrand, Amiot e Serret, così bene tradotti e ampliati da quei valenti toscani. I miei amici si ricorderanno che io non cominciato oggi ad inculcare l'uso di quelle eccellenti opere.

Come si vede, Cremona non potrebbe essere più esplicito nel sostegno al programma di svecchiamento dell'insegnamento di Betti. Per meglio comprendere l'atteggiamento di Cremona, riporto una pagina dal testo del Toffoli:

Problema I.

Di quanti metri quadrati è l' area dell'esagono regolare, il cui lato è di metri 3.20 ?

Soluzione

Essendo in generale (318),

$$\text{altezza} = \frac{\text{lato}}{2} \times 1.732\,,$$

$$\text{è apotema} = 1.6 \times 1.\ 1.732 = 2{,}771.$$

lato Met.	3.2
numero	6
perimetro Met.	19.2
$\frac{1}{2}$ Met.	9,5
apotema »	2.771
	16626
	24939
area Met.	26,6016

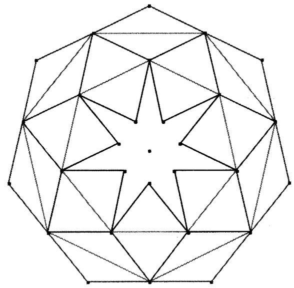
R. E' di metri quadrati 26.60 circa.

Come si vede un problema puramente calcolativo e mnemonico, pieno di "numeri fissi" e simili strumenti. Si può utilmente confrontare questa impostazione con quella di Cremona per capire perché egli definisse "scelleratissimo" questo testo. Do solo due altri esempi:

Scrive Cremona:

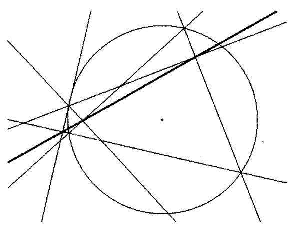
Prendiamo ... un ettagono regolare ordinario e dividiamone per metà tutti i lati. Intorno a ciascuna retta congiungente due punti medi consecutivi si faccia ruotare il piccolo triangolo che questa retta stacca dall'ettagono, finché questo triangolo cada all'interno della figura. Si otterrà così un poligono di quattordici lati ad angoli salienti e rientranti alternativamente, il quale ha lo stesso perimetro dell'ettagono proposto.

Ora intorno a ciascuna retta congiungente due vertici di angoli rientranti successivi del poligono di quattordici lati, si faccia rotare il piccolo triangolo da essa distaccato, finché cada entro alla figura; risulterà un altro poligono di quattordici lati ad angoli alternativamente salienti e rientranti, isoperimetro ai due precedenti.



Questi tre poligoni, isoperimetri tra loro, hanno però aree diverse, poiché il secondo è compreso dentro il primo e il terzo dentro il secondo. Le due figure così generate non sono altro che ettagoni di seconda e terza specie, nei quali siano stati levate le porzioni interne dei lati.

Un altro bel problema che può dare un'idea e quello di Servois: dimostrare che i piedi delle perpendicolari ai tre lati di un triangolo da un punto della circonferenza ad esso circoscritta sono allineati.



Vale tra l'altro la pena sottolineare come una simile impostazione si trasferisca, direi quasi "naturalmente" allo studio della geometria tramite software cosiddetti dinamici. Questo continuo appello all'intuizione (si veda l'uso della parola "immaginiamo") ben si sposa con altri dati della biografia di Cremona che era tra l'altro fratello di Tranquillo (1837-1874), il maggior pittore della scapigliatura lombarda.

Si può osservare come il progetto didattico di Cremona si legasse strettamente a quello scientifico. Così lo studio cremoniano delle curve e delle superfici prosegue l'evoluzione già avvenuta all'inizio del XIX secolo dallo studio delle singole curve (euclidee e affini), alle classi di uguale grado (coniche, cubiche – classificazione proiettiva); il passo successivo, compiuto soprattutto da Riemann, e completato proprio da Cremona, Clebsch, Noether vede il passggio alla classificazione per genere; sono proprio le trasformazioni cremoniane (o birazionali) a giocare il ruolo decisivo per questa classificazione: ancora una volta il concetto di trasformazione è decisivo; non è da stupirsi che Cremona abbia subito apprezzato l'opera del giovane Felix Klein.

Tornando al ruolo del matematico lombardo nell'edificazione della politica scolastica del nuovo stato, possiamo subito notare che tale ruolo si manifesta subito, sin dalla prima estensione dei programmi delle scuole del nuovo regno. Così Angelo Genocchi gli scriveva nel 1860: *Sono usciti nella gazzetta ufficiale anche i programmi d'algebra, geometria e trigonometria che sono i vostri né più né meno.*

Ma quali erano le innovazioni di questi programmi? Si possono immaginare, riguardano

principalmente lo studio del rapporto armonico, delle coniche, della polarità e la costruzione dei poliedri regolari, secondo le linee indicate prima.
Non mi sembra inutile riferire il progetto espresso da Cremona a quanto in quegli anni propugnato da Carlo Cattaneo, il più illustre dei politici milanesi, nella cui rivista Il giovane insegnante pubblicherà più volte articoli di carattere generale. Scriveva Cattaneo nel 1860:
Tutto il sistema scolastico dal quale usciamo era ordinato a un supremo fine: comprimere . ... Si tratta ora di capovolgere tutto questo sistema. L'antitesi deve commisurarsi alla tesi. Tutto l'insegnamento deve mirare a dar forza e dignità al popolo. ... Di una cosa fra tutte siamo grati all'illustre Matteucci. Egli rivendica interamente e assolutamente dall'arbitrio ministeriale le scienze: gli studii a chi studia. Fa cordoglio il pensare come la nostra libertà siasi inaugurata coll'abbandonar tutti gli interessi delle scienze alla mente angusta e al superstizioso beneplacito d'un profano. L'estremo grado d'avvilimento, a cui possa calare una nazione, è la servitù dell'insegnamento.
Questo il quadro di riferimento in cui si inquadrano bene le concezioni di Cremona circa l'insegnamento della matematica. Oggi li potremmo chiamare "obiettivi trasversali". L'obiettivo principe indicato da Cattaneo è chiaro "*dar forza e dignità al popolo*" e ciò sarà ottenuto, nella sua concezione, ponendo al centro dell'attenzione del nuovo stato la scuola e l'esercito. Ma a fianco di questi obiettivi sta la ferma rivendicazione dell'autonomia della scuola che non va affidata "*alla mente angusta e al superstizioso beneplacito d'un profano*".
Quando, nel novembre 1860, il giovane professore pronunzia la sua prolusione al corso di geometria superiore dell'Università di Bologna, non dimenticherà il riferimento a Cattaneo, di cui citerà un passo significativo:
La nuova poesia della scienza, esposta in semplice prosa, senza favole, senza persone ideali, senza iperboli, senza canto, invaghisce l'animo e lo sublima ben più che la poesia dei popoli fanciulli ... O giovani poeti, non eleggete la vostra dimora nei sepolcri; lasciate al passato le sue leggende; date una melodiosa parola alla semplice e pura verità; perrocchè questa è la gloria del vostro secolo; e voi non dovreste mostrarvi ingrati, torcendo li occhi dal sole nuovo della scienza a voi concesso, per tenerli confitti nei sogni della notte che si dilegua.
Vale la pena leggere qualche passo di questa Prolusione perché i punti di vista di Cremona vengono ribaditi e chiariti:
Respingete da voi, o giovani, le malevole parole di coloro che a conforto della propria ignoranza o a sfogo d'irosi pregiudizi vi chiederanno con ironico sorriso a che giovino questi ed altri studi, e vi parleranno dell'impotenza pratica di quegli uomini che si consacrano esclusivamente al progresso di una scienza prediletta. Quand'anche la geometria non rendesse, come rende, immediati servigi alle arti belle, all'industria, alla meccanica, all'astronomia, alla fisica; quand'anche un'esperienza secolare non ci ammonisse che le più astratte teorie matematiche sortono in un tempo più o meno vicino applicazioni prima neppur sospettate; quand'anche non ci stesse innanzi al pensiero la storia di tanti illustri che senza mai desistere dal coltivare la scienza pura, furono i più efficaci promotori della presente civiltà - ancora io vi direi: questa scienza è degna che voi l'amiate; tante sono e così sublimi le sue bellezze ch' essa non può non esercitare sulle generose e intatte animo dei giovani un' alta influenza educativa, elevandole alla serena e inimitabile poesia della verità! Lungi dunque da voi questi apostoli delle tenebre; amate la verità e la luce, abbiate fede ne' servigi che la scienza rende presto o

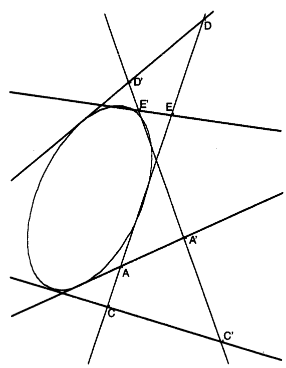
tardi alla causa della civiltà e della libertà. Credete all'avvenire. Questa è la religione del nostro secolo.

La libertà di ricerca e la necessità di puntare sulla ricerca pura sono altri elementi centrali della concezione di Cremona: la scienza pura non può essere subordinata alle immediate necessità applicative; solo vincendo questa sfida la scienza nazionale si inserirà a pieno titolo nel concerto europeo. Anche questo mi sembra di scottante attualità.

Sarebbe mio intendimento mostrare come questi obiettivi che, come ho detto, possiamo chiamare trasversali, si coniughino con gli obiettivi didattici disciplinari, e questi con quelli della ricerca. La Prolusione bolognese di cui ho parlato mostra meglio gli intrecci tra rinnovamento dell'insegnamento e ricerca. Torniamo un attimo alle trasformazioni:

Concepite in un piano due punteggiate o due stelle projettive; subito vi balenerà al pensiero questo problema, quale è la curva inviluppata dalla retta che unisce due punti omologhi delle due punteggiate, e quale è il luogo del punto ove s'intersecano due raggi corrispondenti delle due stelle? In entrambi i quesiti la curva richiesta è una sezione conica che nel primo caso tocca le due rette punteggiate e nel secondo passa poi centri dei due fasci. ... Ovvero imaginate sulla conica due punti fissi ed un punto mobile che percorra la curva: le rette congiungenti i due punti fissi al punto mobile genereranno due fasci proiettivi.

Si noti il susseguirsi dei verbi: *Concepite, balenerà al pensiero, imaginate*. Un vero cimento con le capacità evocative delle parole! Forse si può intuire lo sforzo comunicativo di Cremona attraverso una figura. Le punteggiate proiettive sono le rette AB e A'B'. Punti corrispondenti sono A e A', B e B', C e C', D e D'. Ciò che Cremona afferma è che le rette AA', BB', CC', DD', e più in generale qualsiasi retta che unisca punti corrispondenti è tangente a una conica fissa. Si tratta della ben nota generazione organica delle coniche già trattata da Newton, ma si tratta soprattutto di un metodo ben preciso.



La Prolusione definisce meglio il programma della geometria delle trasformazioni, secondo uno schema che va bene sia per la ricerca di punta, sia per la didattica:

Conoscendo le proprietà di una certa figura, concluderne le analoghe proprietà di un'altra figura dello stesso genere, ma di una costruzione più generale. Conoscendo alcuni casi particolari di una certa proprietà generale incognita di una figura, concluderne questa proprietà generale.

Sarà applicando questo semplice schema alle trasformazioni birazionali che la scuola geometrica italiana conseguirà i suoi strepitosi risultati:

Il 17 marzo 1861, a Torino viene proclamato il regno d'Italia. Ciò pone con sempre

maggiore urgenza il problema della formazione dei tecnici necessari per portare l'industria italiana a livelli europei. Già dal novembre 1860 Cremona aveva peraltro iniziato il corso di Geometria Descrittiva, diretto soprattutto ai futuri ingegneri. Anche se all'inizio Cremona fu tutt'altro che entusiasta di questo incarico, fu proprio attraverso questa esperienza che egli potè trasferire il suo progetto didattico in direzione delle applicazioni tecniche della matematica pura. Anche in questo caso le tendenze internazionali movevano proprio in questa direzione: applicare le punte più avanzate della ricerca alle necessità della tecnologia moderna.
Egli si ispira al corso di Fiedler geometria descrittiva, del Politecnico di Zurigo, che divenne ben presto modello per il futuro Politecnico di Milano.
Il modello cui si ispira Cremona può essere quindi così sintetizzato:
Mettere al servizio delle applicazioni i più avanzati risultati della geometria moderna e svolgere un corso basato sugli aspetti teorici della geometria descrittiva, e quindi sulla geometria proiettiva.
Nel 1867 Cremona è chiamato da Brioschi a insegnare Geometria al Politecnico di Milano, il che lo costringe a sviluppare e affinare i propri metodi. In particolare gli viene affidato l'insegnamento della Statica Grafica, che egli affronta secondo l'indirizzo di Cullmann (1821 – 1881; sempre del Politecnico di Zurigo): uso di metodi geometrici grafici (che evitano lunghi calcoli) per l'insegnamento della Statica, propedeutica alla Scienza delle costruzioni.
Cullmann aveva pubblicato da poco (1865) il suo libro più famoso, *Die Graphische Statik* che introduce lo studio della Geometria Proiettiva come propedeutica alla scienza delle costruzioni.
Uno dei suoi motti era: *das Zeichnen ist die Sprache des Ingenieurs*, il disegno è il linguaggio degli ingegneri. Può essere interessante leggere qualche passo dell'introduzione di questo celebre testo per comprendere gli intendimenti didattici del matematico lombardo (e di Brioschi che lo aveva chiamato a Milano):
Quando, nel 1855, fu creato il Politecnico di Zurigo e noi fummo chiamati al corso di scienza delle costruzioni, fummo obbligati a introdurre nel nostro insegnamento i metodi grafici di Poncelet per sopperire alle lacune dei corsi di meccanica applicata che non utilizzavano allora che i metodi analitici.
Come si vede si tratta di una fusione tra necessità pratiche e teoriche, aspetti applicativi e aspetti formativi nell'insegnamento della matematica, aspetti che non vengono visti come contrapposti, ma come armonicamente integrati.
Questo doppio aspetto si verifica pienamente nel 1867, quando Cremona, Brioschi e Betti intraprendono una battaglia per il *ritorno a Euclide*, almeno nell'insegnamento liceale. Si tratta in qualche modo di un passo indietro rispetto alle posizioni, di dieci anni prima, ma un passo indietro che va visto nella stessa ottica di dotare le scuole italiane di libri di testo validi. Come scrivono i tre matematici nell'introduzione del testo euclideo:
La matematica non deve considerarsi come un complesso di cognizioni utili in sé perché applicabili ai bisogni della vita, ma principalmente come un mezzo di cultura intellettuale, come una ginnastica del pensiero diretta a svolgere le facoltà del raziocinio ed aiutare quel sano criterio che serve a distinguere il vero da ciò che ne ha solo l'apparenza.
Questo atteggiamento nei confronti della matematica portava anche a importanti scelte sul fronte della didattica. Ne cito soltanto due:
1. La scelta del testo classico euclideo quale testo di geometria per i licei. Si tratta di una

scelta "purista" che prevede un'esposizione rigidamente deduttiva della geometria.
2. La scelta, nel 1871, fermamente voluta da Cremona, di introdurre la geometria proiettiva nel secondo biennio degli Istituti tecnici.
Ciò che lo stesso Cremona scrive nell'introduzione del suo testo di Geometria Proiettiva per gli istituti tecnici non differisce poi molto da quanto riferito al testo euclideo. Sia nei licei che negli istituti tecnici, sia che debba servire al futuro avvocato o al futuro ingegnere, la matematica riveste sempre un valore eminentemente formativo:
La vigorosa e nutritiva educazione geometrica, che i giovanetti riceveranno per tal modo negl'istituti tecnici, centuplicherà l'efficacia delle discipline applicative a cui dovranno attendere nelle scuole superiori, e allora il nostro ordinamento scolastico per la formazione degli ingegneri potrà ben reggere il confronto colle migliori istituzioni straniere.
Senza dilungarmi ancora su questi aspetti, mi pare importante sottolineare come, negli intendimenti di Cremona, questo carattere eminentemente *formativo* della geometria doveva essere elemento portante di una nuova politica educativa mirante a fare dell'istruzione scientifica il punto chiave della formazione della nuova classe dirigente. L'istituto tecnico, in questo quadro, veniva a conquistare una quasi pari dignità con il liceo e l'ingegnere era visto come componente essenziale della classe dirigente della nuova Italia.
Sarebbe troppo lungo seguire le tappe degli interessi di Cremona verso la didattica: basti qui ricordare alcune tappe: l'estensione dei programmi del 1867; l'impegno per lo sviluppo degli Istituti tecnici; e poi la carriera politica: Senatore, Presidente del Senato, Ministro della P. I., anche se solo per un mese; il problema del salvataggio dell'insegnamento del greco nei licei, il problema della scuola media unica (cui egli era avverso)...
Vorrei concludere con una citazione di un matematico della generazione successiva a quella di Cremona, Guido Castelnuovo, il cui impegno nei confronti della didattica non fu inferiore:
I precetti e i metodi che la geometria, considerata come scienza sperimentale, avrà insegnato ai giovani, troveranno una brillante conferma nei dettami di un'altra scienza, che, non inferiore a quella per valore educativo, più di quella risente il soffio dello spirito moderno. Alludo alla fisica, di cui ritengo grandissima l'efficacia didattica, purché l'insegnante si proponga, non già di fornire agli allievi una serie di notizie enciclopediche presto dimenticate, ma di mettere in luce i mezzi che l'uomo impiega per penetrare i misteri della natura.
Sono, queste come quelle di Cremona, considerazioni che possono ben far parte del dibattito attuale sulla didattica della matematica. Allora chiudo con una domanda cui non tento nemmeno di dare una risposta:
Er steht alles schon bei Dedekind, era già stato mostrato tutto da Dedekind, diceva Emmy Noether quando si lodavano le sue conquiste nell'algebra moderna.
Era già stato detto tutto:Ma allora perché ricominciamo sempre da capo?

LE PROVE DI VALUTAZIONE INVALSI

Lucia Ciarrapico

Premessa

Da alcuni anni anche in Italia, come in molti altri paesi, si effettuano prove per valutare il livello di apprendimento degli studenti italiani. Le prove sono approntate e analizzate da un Istituto, appositamente istituito per valutare l'efficacia del nostro sistema scolastico: l'INValSI, che ha sede a Frascati, nella villa Falconieri.
Parlerò di tali prove articolando il mio intervento sui seguenti punti:
- Quadro di riferimento normativo
- Aspetti generali delle prove INValSI
- Le prove di matematica: struttura, obiettivi, confronti
- Riflessioni su alcuni item
- Conclusioni

1. Quadro di riferimento normativo

Il quadro di riferimento normativo può essere sintetizzato in alcuni articoli di Legge e nei relativi Decreti applicativi approvati in anni abbastanza recenti.

a) Decreto Legislativo n. 258 del 1999

Esso prevede il riordino del CEDE in Servizio Nazionale di Valutazione del Sistema di Istruzione (INValSI), ne modifica il nome e ne rivede le finalità e le funzioni. Il contenuto del Decreto interpreta il bisogno di disporre anche in Italia, come avviene in molti altri Paesi, di un Servizio che valuti periodicamente l'efficacia del Sistema d'Istruzione.

b) Legge n. 53 del 2003 (Riforma della Scuola)

L'articolo 3, comma b, della legge sulla Riforma della Scuola afferma che "Ai fini del progressivo miglioramento della qualità del Sistema di istruzione e formazione, l'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema di Istruzione (INVALSI) effettua verifiche periodiche e sistematiche sulle *conoscenze e abilità* degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni scolastiche e formative".
Le norme attuative dell'articolo 3 sono previste in Decreti Legislativi e in Direttive del Ministro di cui si riportano i più importanti.

c) Decreto Legislativo n. 286 del 2004

In esso sono precisati le funzioni dell'INValSI: "*valutazione del Sistema di Istruzione e Formazione con l'obiettivo di verificarne l'efficienza e l'efficacia, inquadrando la valutazione nel contesto internazionale*".

d) Decreto Legislativo n. 59 del 2004

Indica i livelli scolastici interessati alla valutazione rappresentati dalle classi iniziali dei periodi didattici biennali previsti dalla Legge di Riforma:

Scuola Primaria (ex Scuole Elementare):	classe seconda classe quarta
Scuola Secondaria di primo grado (ex Scuola Media):	classe prima
Scuola Secondaria di secondo grado	classe prima classe terza

e) Direttiva del MIUR n. 56 del 2004

Indica le materie oggetto di valutazione: **Italiano, Matematica, Scienze**.
La scelta fatta è coerente con quanto avviene a livello internazionale in cui la lingua madre, la matematica e le scienze, oggetto di studio in tutti i Paesi, sono ritenute discipline basilari per la formazione degli alunni e oggetto di valutazione del sistema.

2. Aspetti generali delle prove INValSI

A partire dall'a.s. 2001/02 e nei successivi 2002/03 e 2003/04 sono stati attivati dei Progetti Pilota di valutazione. In tutti gli ordini di scuola le prove di valutazione sono state facoltative con partecipazione, quindi, volontaria delle scuole che, tuttavia, hanno aderito all'iniziativa in numero via via crescente. Tra le scuole partecipanti, statali e paritarie, e relativamente ai vari livelli scolari, ne sono state individuate alcune che hanno costituito un opportuno campione per un Item Analysis. Per ragioni organizzative le prove, pur essendo a regime previste ad inizio d'anno scolastico, sono state effettuate sempre nei mesi di marzo/aprile.
Nell'a.s. 2004/05 le prove sono divenute obbligatorie nel Primo ciclo (Scuola primaria e secondaria di primo grado), nel quale la Riforma degli ordinamenti era stata messa in atto, nel mentre sono rimaste facoltative per le scuole del Secondo ciclo. In tale anno gli istituti partecipanti, statali e paritari, sono stati per il primo ciclo 9631 (Istituti comprensivi, circoli didattici, istituti secondari di primo grado), mentre per il Secondo ciclo sono risultati 1786. Il periodo di somministrazione è stato ancora quello dei mesi di primavera, in giorni concordati con le scuole, non necessariamente gli stessi per tutte. L'Item Analysis è stata effettuata nel primo ciclo su tutte le scuole, mentre nel secondo su un campione, opportunamente individuato, di 325 scuole, suddiviso in cinque tipologie: licei, istituti tecnici, istituti professionali, istituti artistici, altri istituti superiori.
Nell'a.s. 2005/2006 le modalità, la struttura delle prove, l'Item Analysis saranno le stesse dell'anno 2004/05 con una presenza di 9488 Istituti del Primo ciclo (si tratta sempre della totalità delle scuole esistenti, diminuite come numero a causa di accorpamenti) e di 1646 Istituti del Secondo ciclo. Cambierà solo il periodo di somministrazione che sarà lo stesso per tutte le scuole ed è previsto nei giorni:

- 29 novembre 2005 per l'Italiano
- 30 novembre 2005 per la matematica
- 1 dicembre 2005 per le scienze.

3. Le prove di MATEMATICA

3.1 Struttura

Le prove di Matematica sono costituite da domande a scelta multipla, con tre o quattro alternative, delle quali una sola delle risposte proposte è corretta.
Si può discutere sulla convenienza di una prova con domande a risposta chiusa. Il carattere di assoluta oggettività che riveste una prova di tale tipo e la rapidità di somministrazione e di conteggio degli esiti, rendono tale scelta quasi obbligatoria in una verifica che vede coinvolto, per espressa decisione del Ministro, l'intero sistema scolastico. Va aggiunto il vantaggio di poter esplorare attraverso un test un ampio panorama di competenze, aspetto fondamentale se lo scopo del progetto è la verifica del livello di apprendimento degli studenti italiani in alcuni ambiti disciplinari. Vi sono, tuttavia, anche aspetti negativi che non vanno sottovalutati. Non si può negare, infatti, che un test difficilmente consente di verificare competenze afferenti al pensiero divergente o che richiedono passaggi logici di alto livello, oltre al fatto che non permette di avere conoscenza dei processi mentali messi in atto dagli studenti, se non parzialmente attraverso l'analisi delle risposte errate scelte dagli stessi e delle relative percentuali. A ciò occorre aggiungere la facilità di copiatura delle risposte che può condurre ad una distorsione delle informazioni e, di conseguenza, ad un quadro sulla situazione degli apprendimenti non rispondente alla realtà.

Scuola Primaria		
Classe seconda	Numero degli item	16
Alternative	3	
Tempo a disposizione	30 minuti	
Quarta classe:	Numero degli item	28
Alternative	4	
Tempo a disposizione	45 minuti	
Scuola Secondaria di I grado		
Classe Prima:	Numero degli item	28
Alternative	4	
Tempo a disposizione	45 minuti	
Secondo Ciclo		
Classe prima	Numero degli item	30
•	Alternative	4
•	Tempo a disposizione	60 minuti
Terza classe:	Numero degli item	30
•	Alternative	4
•	Tempo a disposizione	60 minuti

A partire dall'anno scolastico 2004/05 per la terza classe del secondo ciclo sono stati previsti due test:, A e B. Il test A, che può essere definito di matematica di base, fa riferimento ad argomenti fondamentali previsti in tutti gli indirizzi di scuola del secondo ciclo. Esso è destinato alle seguenti categorie di scuole: Liceo classico, Liceo linguistico, Liceo pedagogico, Istituto professionale, Liceo Artistico. Il test B, di matematica più avanzata, è rivolto agli indirizzi in cui si svolgono gli stessi argomenti del test A ad un livello più approfondito oppure argomenti non compresi nel test A. Esso è previsto per i seguenti tipi di scuola: Liceo scientifico di ordinamento, Licei scientifici ex sperimentali (Progetto PNI, Brocca scientifico, scient./tecnologico...), Liceo della comunicazione, ITI, Progetto Cinque, Cerere, Abacus, Alfa.

3.2 Obiettivi e contenuti

I quesiti di matematica mirano a misurare le conoscenze e abilità matematiche acquisite nei diversi segmenti del percorso scolastico, così come stabilisce l'Art. 3, comma b, della Legge n. 53/03.

Essi sono stati selezionati sulla base dei risultati di un pretesting realizzato per la taratura delle prove. Sono preparate numerose domande che, suddivise in più test (generalmente 4 per ogni livello scolastico), sono validate attraverso una prova su un campione di scuole. Sulla base delle risposte date e della rispondenza ad alcuni indici statistici, sono approntati i test finali.

I quesiti di matematica, in particolare, intendono verificare:

- il possesso dei significati concettuali fondamentali della matematica;
- la padronanza consapevole degli strumenti formali della matematica (non l'applicazione acritica di regole e formule);
- la capacità di matematizzazione di problemi (modellizzazione matematica);
- la capacità di cogliere e di esprimere collegamenti logici;
- la capacità di leggere e interpretare un testo.

Sui vari aspetti spesso sono proposte più domande, di diverso livello di difficoltà (generalmente tre), al fine di verificare sia il livello di formazione di base sia la presenza di "eccellenze".

I contenuti delle prove fanno riferimento ai curricoli di matematica degli anni scolastici precedenti alla classe cui la prova è destinata (ad esempio il test proposto alla prima classe della Scuola secondaria di primo grado si riferisce al curricolo della Scuola primaria), pur tenendo conto negli anni passati, in cui la prova si è svolta ad anno scolastico inoltrato, di quanto presumibilmente è stato svolto nel periodo trascorso dell'anno in corso. In questo periodo di transizione, in cui la Riforma è stata solo parzialmente attuata, si fa riferimento sia ai programmi ministeriali finora in vigore sia agli Obiettivi Specifici di Apprendimento (OSA) di matematica previsti nei decreti applicativi della Legge.

Per la definizione del test, conoscenze e abilità verificabili dai quesiti di matematica sono state suddivise in alcune aree (topics) - due o tre o quattro secondo il livello scolastico con-siderato - con appropriate percentuali di item.

Ad esempio per la prima e la terza classe del Secondo Ciclo le aree e le relative percentuali di item (all'incirca) sono le seguenti:

Numeri e algebra	30%
Geometria	30%
Relazioni e funzioni	20%
Dati e previsioni	20%

3.3 Il confronto con le prove OCSE PISA

Le prove OCSE PISA hanno come obiettivo la misura della cosiddetta literacy in matematica, dove per tale s'intende "La capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione".

I quesiti misurano, perciò, *competenze* spendibili in contesti problematici della vita reale, in altri termini la capacità di matematizzare situazioni problematiche appartenenti a contesti reali.

L'indagine OCSE-PISA assume come *competenze* di riferimento le seguenti:

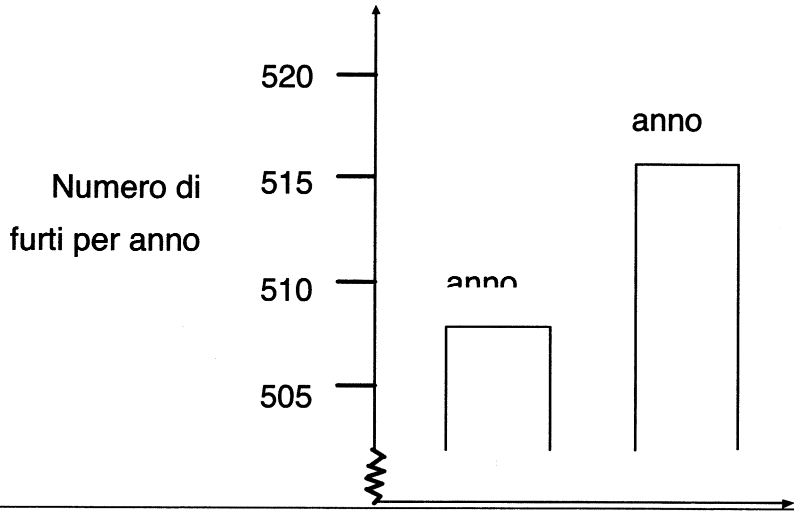
- Pensare e ragionare
- Argomentare
- Comunicare
- Modellizzare
- Porre e risolvere problemi
- Rappresentare
- Usare linguaggi e operazioni simbolici, formali e tecnici
- Usare aiuti e strumenti

Nei quesiti proposti la matematica come costruzione teorica appare, tuttavia, poco presente. Questo aspetto, appartenente tradizionalmente al curricolo ordinamentale delle nostre scuole e conservata anche nei progetti sperimentali che si sono via via succeduti, la si ritrova in maniera più pregnante nelle prove INValSI. Viceversa, in queste, il riferimento a contesti della vita reale è presente solo in pochi casi, nei test più recenti.

Un esempio di quesito della prova OCSE-PISA del 2003, prevista per studenti quindicenni, e un item del test INValSI dell'a.s. 2003/04 per studenti della terza classe del secondo ciclo, possono essere illuminanti in tal senso.

Domanda tratta dalla prova OCSE-PISA

Un cronista televisivo ha mostrato questo grafico dicendo:"Il grafico mostra che dal 1998 al 1999 si è verificato un notevole aumento del numero di furti".



Pensi che l'affermazione del cronista sia un'interpretazione ragionevole del grafico? Spiega brevemente la tua risposta.

Item tratto dal test INVALSI del 2003

Per quale valore di x l'espressione $\frac{x-2}{3x+1}$ *perde significato?*

A. 1/3
B. 0
C. 1/3
D. 2

4. Riflessioni su alcuni item

4.1 I risultati delle prove dell'a.s. 2003/2004

Sulle prove del 2003/04 l'INValSI ha effettuato, come negli altri anni, un Item Analysis. In particolare, per ogni item ha elaborato e resa pubblica una tabella con utili indicazioni, tra cui:

- Area di contenuto e tipologia dell'item
- Risposta esatta tra le alternative proposte
- Numero totale dei casi esaminati
- Numero di risposte esatte e relativa percentuale (indice di facilità dell'item) e numero di risposte per ciascuna delle alternative proposte
- Numero di casi senza risposta o con doppia risposta
- Indice di discriminazione, punti biseriali delle alternative.

Per le classi del Secondo ciclo l'elaborazione riguarda sia i casi del campione nella sua totalità sia quelli delle cinque tipologie di scuole considerate: licei, tecnici, professionali, artistici, altri istituti.
E' stata effettuata anche un'analisi per regione e una comparazione tra Nord, Centro e Sud.
Con riferimento all'intero territorio nazionale le risposte corrette sono in media percentualmente le seguenti:

Scuola primaria II classe	Scuola primaria IV classe	Scuola secondaria di I grado: I classe	Secondo ciclo I classe	Secondo ciclo III classe
79%	72%	56%	52%	49%

I risultati appaiono soddisfacenti nella scuola primaria, ma evidenziano un calo di competenze, al progredire dei livelli scolastici, decisamente preoccupante. I risultati della prova OCSE-PISA, somministrata ai quindicenni, confermano tali risultati, anche se in contesti meno scolastici.
Gli esiti delle prove nelle cinque tipologie di scuole del secondo ciclo sono le seguenti:
Prima superiore

Istruzione Liceale	Istruzione Tecnica	Istruzione Professionale	Istruzione Artistica	Altri tipi di Istituti
65%	54%	39%	47%	54%

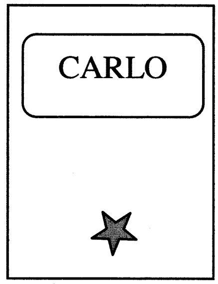
Terza superiore

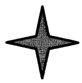
Istruzione Liceale	Istruzione Tecnica	Istruzione Professionale	Istruzione Artistica	Altri tipi di Istituti
60%	47%	37%	37%	47%

4.2 Qualche esempio di item

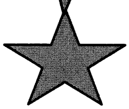
Scuola primaria - Seconda classe

1. Quale adesivo ha messo Carlo sul quadern?



□ *A.* 

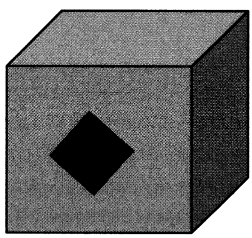
□ *B.* 

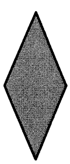
□ *C.* 

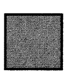
Tipologia item: Geometria (riconoscere figure geometriche, forme)

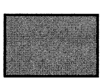
Risposte:
A. 0,30%
B. 97,73% *
C. 1,12%

2. *Quale pezzo manca?*



A. 

B. 

C. 

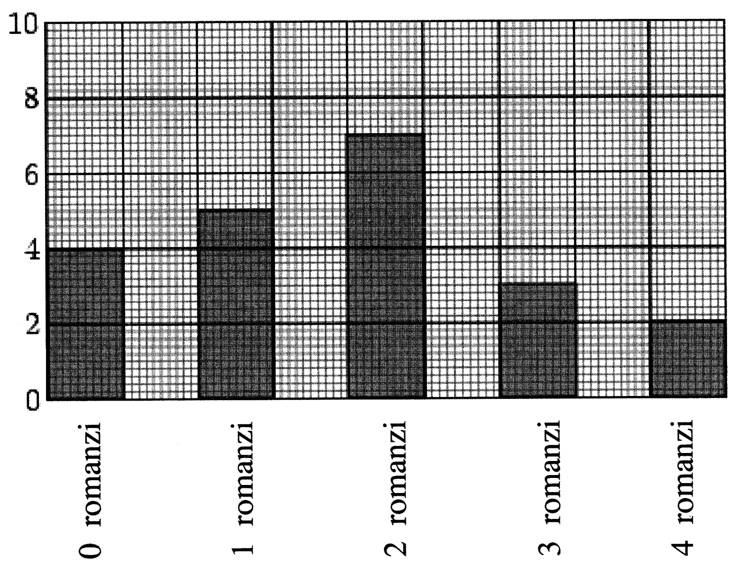
Risposte:
A. 52,17% *

B. 27,74%
C. 17,69%

Osservazioni
Le due domande fanno riferimento allo stesso tipo di abilità (riconoscere figure geometriche, forme...). La percentuale delle risposte corrette alla prima domanda è il 98%, mentre quella alla seconda scende al 52%; in altri termini circa la metà dei bambini che hanno partecipato alla prova non ha saputo rispondere. Nella seconda domanda gioca sfavorevolmente l'abitudine dei docenti, fin dalla scuola materna, a disegnare le figure geometriche (quadrato, rombo, triangolo...) sempre nella stessa posizione rispetto ai lati che delimitano il foglio su cui le rappresentano. E' lo stesso motivo che induce gli alunni della scuola elementare, ma anche delle classi successive, a disegnare in maniera errata l'altezza di un triangolo quando la base non è parallela a un lato del foglio.

Scuola secondaria superiore-Prima classe

1. *La figura indica quanti romanzi leggono gli alunni di una classe in un mese. Quanti sono gli alunni che leggono almeno 2 romanzi?*



A. 7
B. 9
C. 12
D. 16

Tipologia item: dati e previsioni, logica (leggere ed interpretare grafici e tabelle)
Risposte:
A. 60,50%
B. 5,79%
C. 26,94% *

D. 5,49%

Osservazioni
La bassissima percentuale di risposte esatte all'item mostra ancora una volta la scarsa attenzione posta nella lettura di un testo e l'incapacità di interpretazione. La presenza dell'avverbio "almeno" non è stata rilevata dal 60% degli studenti.

2. *Quanti numeri razionali sono compresi tra 2,4 e 2,85?*
A. Infiniti
B. Quattro.
C. Quarantacinque.
D. Ottantuno

Tipologia item: Numeri (Conoscere le proprietà dei numeri)

Risposte:
A. 35,81% *
B. 9,77%
C. 25,90%
D. 25,75%

Osservazioni:
Le alte percentuali delle risposte C e D (complessivamente quasi il 52%), la prima ottenuta calcolando la differenza tra 85 e 40 e la seconda addirittura tra 85 e 4, fanno molto riflettere.
Il raggiungimento dei concetti matematici e delle loro formalizzazioni non è lineare, passa per dei momenti cruciali che costituiscono salti cognitivi in quanto affrontano aspetti che possono costituire ostacoli per l'apprendimento o comunque essere fonte di fraintendimenti. Uno di questi momenti è certamente l'introduzione dei numeri razionali, rappresentati sotto forma decimale o di frazione. Il modello dei numeri naturali è sempre molto forte nella mente degli studenti e induce a ragionamenti errati sui numeri razionali. Tra due numeri è compreso un numero finito di altri numeri: questo è vero per i numeri naturali e, di conseguenza, per gli studenti è vero anche per i numeri razionali. Ciò verosimilmente ha indotti molti in errore, oltre, certamente, alla mancata comprensione del significato di numero razionale.

Scuola secondaria superiore-Terza classe

1. *Nel gioco della tombola qual è la probabilità di estrarre un numero maggiore di 20 e minore di 35?*
A. 7/18
B. 8/45
C. 1/6
D. 7/45

Tipologia item: Dati e previsioni (Applicare semplici definizioni di probabilità)

Risposte:
A. 11,37%
B. 16,41%
C. 38,42%
D. 29,74% *

Osservazioni:
La percentuale di quanti hanno dato la risposta esatta (7/45 = 14/90) non arriva al 30%. Il 38% degli studenti opta per la risposta C: 1/6 = 15/90. La preferenza per questa risposta non è la mancata comprensione del concetto di probabilità, che gli studenti sembrano avere chiaro, ma ancora una volta una lettura non attenta del testo: "estrarre un numero *maggiore* di 20 e *minore* di 35".

2. *Che cosa si indica con la scrittura* $-a$ *?*

A. Un numero negativo
B. L'inverso di a
C. L'opposto di a
D. Un numero sempre diverso da 0

Tipologia item: Numero (Comprendere i simboli algebrici)

Risposte
A. 30,59%
B. 7,20%
C. 54,28% *
D. 6,99%

Osservazioni:
Alla domanda risponde correttamente il 54% degli studenti, ma ancora il 30% ritiene che $-a$ sia un numero sempre negativo. Si tratta di studenti quasi alla conclusione della terza classe del secondo ciclo e, tuttavia, il modello dei numeri naturali persiste con forza nella loro mente.

5. CONCLUSIONI

Trarrò alcune brevi conclusioni in merito a due aspetti:
1. La formazione matematica degli studenti italiani
2. L'utilità delle prove INVALSI

5.1 La formazione matematica degli studenti italiani

In proposito emergono due domande fondamentali:
Quali conseguenze trarre dai risultati delle prove INVALSI?
Quali indicazioni per l'insegnamento della matematica?

I risultati delle prove INVALSI, confermati da quelli delle prove OCSE PISA, mostrano che l'educazione scolastica in ambito matematico non sembra fornire agli studenti italiani

adeguata padronanza concettuale e adeguate competenze applicative, soprattutto nel reale. I nostri studenti apprendono regole e non concetti, e le applicano acriticamente.
Diceva F. Arzarello[1], a proposito dei risultati delle prove Pisa, che "I nostri allievi non sanno applicare le abilità apprese a scuola a un contesto meno strutturato, in cui le istruzioni sono meno chiare e in cui devono decidere quali siano le conoscenze pertinenti e come si possano utilmente applicare...L'insegnamento matematico in Italia non si fa carico di superare la discontinuità tra l'apprendimento scolastico e la cognizione di ciò che avviene fuori della scuola."
Qualche breve suggerimento può essere utile:

- occorre pensare non tanto ad un programma prescrittivo per contenuti, quanto ad un curricolo che orienti alla costruzione di quelle competenze disciplinari e trasversali che si ritengono indispensabili per il cittadino;
- occorre un modello d'insegnamento non più puramente trasmissivo;
- occorre tenere nella dovuta considerazione il ruolo che possono svolgere le nuove tecnologie nell'insegnamento della matematica;
- occorre pensare a percorsi didattici che rendano la matematica più accattivante per gli studenti. In altri termini occorre trasmettere agli studenti *Il piacere di "imparare" la Matematica.*

Emerge, pertanto, la necessità di *rivedere la **trasposizione didattica** realizzata nelle nostre scuole*. Il D.L. del 14 ottobre 2005 (Norme generali in materia di formazione degli insegnanti ai fini dell'accesso all'insegnamento), appena firmato, è un'occasione importante per ridefinire il tipo di formazione, iniziale, ma anche in servizio, da offrire ai docenti.

5.2 L'utilità delle prove INVALSI

Il test di valutazione nazionale INVALSI non mira a valutare:

-i singoli studenti
-le singole classi
-i singoli insegnanti

Come si è detto, esso è uno strumento finalizzato a conoscere il livello di apprendimenti disciplinari degli studenti italiani nei singoli segmenti scolastici, contribuendo in tal modo a valutare l'efficacia del sistema scolastico italiano nella sua globalità.
Lo scopo è di fornire al centro tali informazioni e ciò è tanto più necessario quanto maggiore è il livello di autonomia delle istituzioni scolastiche.
Le prove INVALSI possono, tuttavia, risultare di estrema utilità per la singola scuola o il singolo docente. L'analisi attenta delle risposte date dagli studenti nei singoli item, effettuata (e quindi autorizzata) in tempi ravvicinati rispetto al momento della

---

1 1 Intervento svolto a Bologna in occasione dell'assemblea dei soci dell'UMI nel maggio 2005

somministrazione della prova, può, infatti:

- fornire al docente importanti informazioni sulle modalità di acquisizione delle abilità e conoscenze da parte dei propri studenti;
- consentire una valutazione, se si tratta di classe in cui ha già insegnato, dell'efficacia delle scelte didattiche messe in atto e indurlo, al caso, a rivedere e migliorare il proprio progetto d'insegnamento;
- costituire per le classi iniziali (svolgendosi a regime ad inizio d'anno scolastico) un test diagnostico della situazione di partenza, utile per effettuare un recupero precoce delle carenze negli aspetti basilari disciplinari, al fine anche di omogeneizzare i livelli di partenza e programmare un percorso coerente e realistico;
- permettere, quando i risultati nazionali saranno noti, un confronto dei livelli raggiunti dalle proprie classi con quello nazionale e del territorio locale e, in particolare, con il livello degli studenti italiani della stessa tipologia di scuola;
- rappresentare, in conclusione, una guida per il miglioramento dell'insegnamento.

Affinché ciò si realizzi è necessario formare i docenti sul significato della valutazione e sulle sue implicazioni. E' necessario, in altri termini, creare una "cultura della valutazione".

La valutazione è stata vista nel passato solo come mezzo per misurare l'apprendimento degli studenti ed esprimerne il livello attraverso un voto o un giudizio. E' questo, certo, ma può essere molto di più. Nei prossimi anni, quando la valutazione INValSI giungerà a regime, i risultati, se ben analizzati e interpretati, potranno rappresentare un significativo punto di riferimento per i docenti.

Questo comporta un compito di alta responsabilità per gli estensori delle prove e, al contempo, richiede un atteggiamento di disponibilità da parte dei docenti. Una loro posizione di rifiuto può generare demotivazione negli studenti, scarso impegno nella partecipazione alla prova e, di conseguenza, vanificare lo scopo della prova.

Una critica costruttiva da parte di coloro che quotidianamente vivono nella realtà scolastica è, invece, di fondamentale importanza. Se si vuole mettere a punto un progetto di valutazione sempre più rispondente alle finalità dette, è necessario, infatti, per quanti sono preposti alla formulazione della prova e all'analisi dei risultati, operare in piena intesa con i docenti che costituiscono una fonte preziosa e insostituibile di indicazioni.

CONVERGENZE: UNA COLLANA PER LA SCUOLA

Livia Giacardi
(Dipartimento di Matematica, Università di Torino)

La collana *Convergenze. Strumenti per l'insegnamento della matematica e la formazione degli insegnanti*, di cui abbiamo il piacere di presentare il primo volume, è nata nell'ambito delle iniziative finalizzate al miglioramento dell'insegnamento della matematica, promosse dalla Unione Matematica Italiana attraverso l'operato della sua commissione permanente, la CIIM (Commissione Italiana per l'insegnamento della matematica). Il suo scopo è quello di offrire volumi agili che affrontino temi importanti della matematica con rigore di metodo, ma con un ampio respiro culturale, con attenzione agli aspetti storici, didattici e applicativi e, se possibile, agli sviluppi più recenti della disciplina. Come recita il sottotitolo, la collana è rivolta soprattutto agli insegnanti, sia a quelli in servizio, sia a quelli che si preparano ad entrare nel mondo della scuola, ma può costituire una lettura piacevole e stimolante per tutti coloro che hanno curiosità verso la matematica.

Nel proporre questa nuova collana è inevitabile che il pensiero corra ai grandi maestri del secolo scorso che per primi affrontarono il problema di formare i futuri insegnanti tenendo conto tanto dell'aspetto disciplinare, quanto di quello metodologico e didattico. Fra tutti la figura più complessa e sfaccettata è sicuramente quella di Federigo Enriques (1871-1946), illustre rappresentante della scuola italiana di geometria algebrica e pensatore di acuta intelligenza e di profondi interessi storici, filosofici e interdisciplinari.

Nel 1906 durante il V Congresso della Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media svoltosi a Bologna, Enriques, allora trentacinquenne, tenne un'ampia relazione sulla formazione degli insegnanti. Egli proponeva una *laurea pedagogica*, distinta da quella *scientifica* e articolata in due bienni, il primo dedicato ad acquisire le conoscenze basilari della disciplina, e il secondo da effettuarsi nella Scuola di Magistero secondo le modalità seguenti:

«Che tale scuola svolga, pure durante un biennio, un programma di corsi, conferenze ed esercitazioni, ordinati come segue:
1) corsi su quelle parti della Scienza che si riattaccano ad una più profonda visione degli Elementi,
2) conferenze sulle questioni di Pedagogia concreta che interessano i varii rami d'insegnamento, particolarmente in rapporto colla critica dei testi,
3) esercitazioni comprendenti il tirocinio parte nell'Università e parte in una scuola secondaria, il disegno e la tecnica sperimentale
Che ad insegnare nell'Istituto di Magistero vengano chiamati, senza alcun criterio limitativo di scelta, tutti i professori universitari delle materie scientifiche, ed i più valorosi delle scuole medie, ai quali si dischiuda per tale scopo una speciale libera docenza».[1]

Enriques, infatti, come è noto, non solo diede importanti contributi alla ricerca

[1] F. Enriques, *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze*, in *Quinto Congresso Nazionale degli Insegnanti delle Scuole Medie. Atti (Bologna 25-26-27-28 settembre 1906)*, Pistoia, Ed.. Sinibuldiana, 1907, pp. 69-78.

matematica avanzata, ma si impegnò su vari fronti per la scuola. Scrisse insieme con Ugo Amaldi (1875-1957) libri di testo per la scuola secondaria, tenne per lunghi anni la presidenza della Mathesis (1919-1932) e la direzione del Periodico di matematiche (1921-1938, 1946)[1] e molto si adoperò per la formazione degli insegnanti. In particolare le sue molteplici iniziative editoriali costituiscono ancora oggi un utile riferimento. Innanzitutto le *Questioni riguardanti la Geometria elementare*, (a cura di F. Enriques, Bologna, Zanichelli, 1900) scritte espressamente per gli allievi delle Scuole di magistero (Introduzione p. II) e ampliate poi nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (I, 1912 - II, 1914); ma anche la collana di testi *Per la storia e la filosofia delle matematiche*[2] che prese l'avvio nel 1925 con il volume da lui curato *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, (Libri I-IV)*. L'idea della collana gli fu suggerita, come scrive egli stesso, "dalla pratica della Scuola di Magistero"[3] e il pubblico cui intendeva rivolgersi era quello degli educatori, ma anche quello degli studenti delle scuole secondarie superiori, e in generale degli uomini colti[4]. Come si vede scorrendo i titoli, Enriques ha voluto privilegiare la traduzione e il commento, spesso accompagnato da note storiche, di quegli scritti di grandi autori del passato che possono avere una rilevanza per l'insegnamento della matematica. Infatti egli scrive:

"La scuola non è un campo in cui la fantasia individuale abbia a sbizzarrirsi tentando esperimenti arbitrarii, anzi tanto più è atta ad accogliere gli spiriti e le voci della società circostante, quanto più si alimenti della tradizione in cui anche questa prolunga le sue radici: non già serbando viete forme e ripetendone la morta parola, ma riattaccando ... il passato al presente della cultura, in uno sforzo verso l'avvenire. E come la scuola la scienza. Anche per questa non vi ha un vero progresso, dove le nuove generazioni non attingano alla continuità del pensiero scientifico la visione dei problemi, facendosi valenti nello studio dei grandi modelli".[5]

---

[1] Dal 1921 al 1934 Enriques condivide la direzione con Giulio Lazzeri; dal settembre del 1938, a causa delle leggi razziali, non compare né come direttore, né come autore; nel 1946 ricompare come direttore accanto a Oscar Chisini.

[2] n. 1 F. Enriques (a cura di), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libri I-IV) Roma Alberto Stock 1925; n. 2 L. Heiberg, *Matematiche, scienze naturali e medicina nell'antichità classica* Roma Alberto Stock 1924, traduzione di Gino Castelnuovo con note di F. Enriques; n. 3 F. Enriques, U. Forti (cura di), *I. Newton: Principii di Filosofia naturale, teoria della gravitazione*, Roma, Alberto Stock 1925; n. 4 E. Rufini, *Il Metodo di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antichità*, Roma Alberto Stock 1926; n. 5 O. Zariski (a cura di), *Riccardo Dedekind: Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali*, Roma, Alberto Stock 1926; n. 6 M. Lombardini (a cura di), *A. C. Clairaut: La teoria della forma della terra dedotta dai principi dell'idrostatica*, Bologna Zanichelli 1928, con una nota di F. Enriques; n. 7 E. Bortolotti (a cura di), *L' Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, Libri IV e V comprendenti "La Parte geometrica" inedita tratta dal manoscritto B. 1569, Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna*, Bologna Zanichelli 1929; n. 8 F. Enriques (ed), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libri V-IX), Bologna Zanichelli 1930, a cura di Maria Teresa Zapelloni e Guido Rietti; n. 9 U. Forti, *Introduzione storica alla lettura del "Dialogo sui massimi sistemi di Galileo Galilei"* Bologna Zanichelli 1931; n. 10 F. Enriques (ed), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libro X) Bologna Zanichelli 1932 a cura di Maria Teresa Zapelloni e Ruth Struik; n. 11 F. Enriques (ed), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, (Libri XI-XIII) Bologna Zanichelli 1936 a cura di A. Agostini; n. 12 G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Bologna Zanichelli 1938.

[3] Enriques, *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, 1925, cit. p. 7.

[4] Enriques, Forti, *I. Newton: Principii di Filosofia naturale, teoria della gravitazione*, 1925, cit. p. 7.

[5] Enriques, *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, 1925, cit. p. 8.

Che cosa Enriques intendesse offrire agli insegnanti emerge da tutti i suoi scritti dedicati all'insegnamento della matematica e in particolare nella lettera ai lettori che dava l'avvio alla IV serie del Periodico di matematiche (1921) in cui è espresso un vero programma di lavoro i cui cardini sono i seguenti: "approfondire, in più sensi, la scienza stessa che s'insegna così da poterla dominare da nuovi e più alti punti di vista", utilizzare "la storia della scienza; dalla quale vuolsi apprendere, non tanto la notizia erudita, quanto la considerazione dinamica dei concetti e delle teorie, ravvisando l'unità del pensiero", far emergere i collegamenti con le altre scienze, in particolare la fisica per offrire più "larghe visioni della scienza e degli scopi o significati di tante svariate ricerche".[1]
Questo programma di lavoro veniva poi approfondito nel celebre articolo dal titolo *Insegnamento dinamico*, con cui Enriques volle aprire la nuova serie del Periodico di matematiche.[2]

Ciò che Enriques auspicava cento anni fa per la formazione degli insegnanti si è oggi in parte realizzato e la didattica che allora muoveva i primi passi, si è sviluppata come disciplina autonoma in grado di offrire un valido contributo alla formulazione dei programmi, alle metodologie di insegnamento e alla formazione degli insegnanti, ma, come diceva Enriques, le esperienze del passato ci possono ancora insegnare qualcosa.
Anche ora, come allora si sente l'esigenza di testi nuovi che affrontino quegli argomenti che gli insegnanti incontrano nella loro pratica di insegnamento e tengano conto dei progressi tanto della ricerca scientifica, quanto della ricerca e della metodologia didattica, come pure delle nuove tecnologie.
Proprio in risposta a questa esigenza nasce l'idea della collana *Convergenze*. Il titolo stesso rimanda ad una convergenza di approcci al tema affrontato, approcci che sono ancora sostanzialmente quelli indicati da Enriques: collegamento fra matematiche elementari e le matematiche superiori, interazioni con le altre scienze e attenzione agli aspetti storici e didattici. Il desiderio dei curatori è quello di offrire agli insegnanti in servizio e a quelli in formazione un utile strumento di lavoro che li aiuti, da un lato, a contrastare quell'immagine riduttiva della matematica che tende a far pensare che tutto sia già stato fatto e non vi sia più nulla da scoprire e, dall'altro, a ridare spessore culturale all'insegnamento scientifico, evidenziando l'unità profonda dei saperi e il valore formativo della matematica stessa; valore formativo, che scaturisce soprattutto dalla sua capacità di affrontare la complessità crescente dei problemi (problemi che possono venire tanto dall'interno della matematica, quanto dal mondo esterno) e di adeguarsi a tale complessità elaborando tecniche e metodi sempre più raffinati.
In questo senso il volume *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola* (Libro + CdRom) di Maria Bartolini Bussi e Michela Maschietto, è esemplare: nasce da un lavoro di ricerca di molti anni, si configura come un utile strumento per l'insegnante che vi può trovare sia attività didattiche basate sull'uso delle macchine coerenti con i curricoli di matematica delle scuole secondarie, sia riferimenti storici documentati che mostrano i rapporti fra matematica, tecnologia e arte, sia ancora quegli strumenti metodologici utili per costruire nuovi percorsi didattici.
Il volume e il CdRom annesso guidano il lettore in un mondo affascinante in cui, come scrive Ferdinando Arzarello nella prefazione, "l'artigiano e il matematico lavorano

[1] F. Enriques, *Ai lettori*, Periodico di matematiche, s. IV, I, 1921, pp. 1-5.
[2] F. Enriques, *Insegnamento dinamico*, Periodico di matematiche, s. IV, I, 1921, pp. 6-16.

insieme in una sorta di bottega ideale, dove i concetti matematici sono costruiti nel senso più pregnante del termine"[1].

LA COLLANA "CONVERGENZE" E IL PUNTO DI VISTA DELL'EDITORE

Marina Forlizzi
(Editor Mathematics, Physics, Computer Science, Springer-Verlag Italia)

Nel campo della matematica, in particolare nell'ambito della divulgazione scientifica e della didattica che di recente ha visto la realizzazione della collana *Convergenze*, Springer Italia ha promosso e sviluppato negli ultimi anni diversi progetti sulla divulgazione, che hanno contribuito a far sì che questa disciplina riscuotesse un sempre maggior interesse, anche da parte dei non addetti ai lavori. Tutto ciò, sebbene sia opinione comune che i luoghi ideali per "fare divulgazione" rimangano la scuola e l'Università.

Oggi l'insegnamento della matematica ha come obiettivo principale quello di trasferire allo studente, oltre a conoscenze tecniche, un messaggio preciso: che la matematica è una disciplina utile e necessaria, presente ovunque, come ormai riconosciuto da tempo, e fondamentale in ogni settore della scienza e della tecnica.

Se in questi ultimi anni si è aperto uno spazio importante in questa materia, facendo sì che i progetti di divulgazione, educazione e comunicazione della scienza in generale e della matematica in particolare, abbiano avuto e abbiano tuttora sempre crescente successo e diffusione, è stato anche grazie al lavoro costante e al quotidiano impegno di insegnanti e docenti. E Springer sta costantemente appoggiando proprio questi progetti.

Solo sette anni fa, quando ho iniziato a lavorare in Springer, il nostro catalogo era costituito essenzialmente da volumi e riviste di medicina. Successivamente, seguendo la tradizione della casa madre, si è pensato di sviluppare il settore della matematica con la pubblicazione di testi universitari (collane UNITEXT) e di periodici.

L'inizio della collaborazione con il centro Pristem dell'Università Bocconi per la rivista *Lettera Matematica Pristem*, e con Michele Emmer per la collana di *Matematica e cultura*, ci ha dato l'opportunità di cominciare ad ampliare il nostro programma nel campo della divulgazione e della didattica.

Nel catalogo Springer Italia, la medicina occupa attualmente ancora una posizione predominante - anche per effetto della recente acquisizione dell'editrice medico-scientifica Medicom - tuttavia le pubblicazioni di matematica rappresentano ormai quasi il 30% del totale.

Quando per la prima volta mi fu proposto di avviare, in collaborazione con l'UMI-CIIM, una collana di volumi che trattassero tematiche connesse alla formazione degli insegnanti, sono stata subito entusiasta.

Nell'attuale panorama editoriale, ritengo che la collana *Convergenze* rappresenti una novità per il mondo della didattica. Questa collana si propone di includere testi che trattino tematiche vicine al mondo degli insegnanti, affrontando sia l'aspetto storico che

[1] M. Bartolini Bussi, M. Maschietto *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, Milano, Springer, 2006, p. VI.

quello didattico, e che, pur senza essere dei veri e propri libri di testo, mantengano il rigore che questa disciplina richiede. Dal punto di vista editoriale presentano la caratteristica di essere volumi che definirei agili, con un numero di pagine non superiore a 200, in cui le numerose illustrazioni, l'inserimento di alcune pagine a colori e l'eventuale accompagnamento di un CD-Rom interattivo - come nel caso del volume *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola* - completano e arricchiscono la trattazione, facendo di essi un prezioso strumento per l'insegnante.

Siamo quindi onorati di collaborare con l'Unione Matematica Italiana a questo prestigioso progetto, che contribuisce allo sviluppo e alla divulgazione della "regina delle scienze".

MACCHINE MATEMATICHE: DALLA STORIA ALLA SCUOLA

Maria G. Bartolini Bussi e Michela Maschietto
(Dipartimento di Matematica pura ed applicata, Università di Modena)

Il libro qui presentato non è un catalogo di macchine matematiche, un manuale di didattica della matematica, un testo di storia della matematica, un trattato sul curricolo di geometria, un libro sulle "nuove" tecnologie o un lavoro sulla "valutazione. È, piuttosto un'opera sul laboratorio di geometria (secondo la descrizione data nel curricolo UMI – CIIM) per insegnanti (e futuri insegnanti) di tutti gli ordini scolastici in cui antiche e "nuove" tecnologie si intrecciano funzionalmente. Nel curricolo per il ciclo secondario preparato da una commissione nominata dall'Unione Matematica Italiana, sono nominati oggetti poco conosciuti dalla maggior parte degli insegnanti: le macchine matematiche. Esse sono appaiate, nella descrizione del laboratorio di matematica, ad altri tipi di strumenti: i materiali "poveri", i software di geometria dinamica e di manipolazione simbolica, i fogli elettronici, le calcolatrici grafico-simboliche.
Che cosa sono le macchine matematiche? Secondo una definizione data da Marcello Pergola nel 1992, "*una macchina matematica (in un contesto geometrico) ha come scopo fondamentale (indipendentemente dall'uso che poi si farà della macchina) risolvere questo problema: obbligare un punto, o un segmento, o una figura qualsiasi (sostenuti da un opportuno supporto materiale che li renda visibili) a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni seguendo con esattezza una legge astrattamente, matematicamente determinata*".
Pergola è, con i suoi collaboratori, il progettista e il costruttore della cospicua collezione di macchine collocata presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia (sede di Modena). La costruzione delle macchine avviene in un'officina di falegnameria "tradizionale", che ricorda i laboratori degli artigiani del passato. Gli oggetti prodotti sono "pezzi unici", costruiti a mano uno per uno, a partire dalle descrizioni contenute nelle fonti storiche. Questa realizzazione artigianale consente di riprodurre copie dei modelli, adattandoli a particolari esigenze. Così, recentemente, è stata avviata la produzione di strumenti destinati a un laboratorio per l'integrazione di studenti ciechi o ipovedenti, introducendo modifiche che favoriscono l'esplorazione aptica. In generale, lo scopo è quello di costruire strumenti funzionanti, con potenzialità didattiche, che evocano gli strumenti documentati nella storia e che sono mossi direttamente dalle mani dell'utente (senza il ricorso, quindi, ad altre fonti di energia).

L'uso prevalente del legno naturale (anche se combinato con materiali più moderni come il plexiglas, i fili di nailon, ecc.) consente di costruire oggetti che richiamano visivamente gli strumenti del passato.
In questo libro sono presentate due categorie di macchine: strumenti meccanici (che comprendono sistemi articolati ad uno o due gradi di liberta, per tracciare curve o realizzare trasformazioni) e prospettografi (che comprendono sia strumenti direttamente legati al disegno prospettico che i modelli statici di sezioni coniche importanti nella genesi della trattazione moderna della geometria proiettiva). Le due categorie rappresentano due stili di pensiero complementari (spesso ricordati con la contrapposizione analitico / sintetico), che sono incarnati, nella storia, da René Descartes e Girard Desargues.
A titolo di esempio, illustriamo brevemente due casi, che costituiscono i prototipi delle due categorie di strumenti prima ricordati: il compasso per tracciare cerchi e il vetro per realizzare disegni prospettici. Il compasso è utilizzato fin dalla scuola elementare per disegnare cerchi. Ma esso consente anche di segnare punti che hanno distanza data da punti dati e, abbinato alla riga, determina l'insieme dei problemi risolubili nella geometria elementare. Il primo è un uso di natura empirica, che potrebbe essere sostituito dal ricalco del bordo di un bicchiere o di una maschera sagomata. il secondo è un uso di natura teorica, che consente di demarcare in modo preciso il confine tra problemi possibili e problemi impossibili, a prescindere dalla possibilità di costruire empiricamente soluzioni approssimate, sufficienti per le eventuali applicazioni pratiche. Se si amplia l'insieme degli strumenti ammissibili, si costruiscono soluzioni dei problemi classici, impossibili da risolvere con riga e compasso. Consideriamo ora il secondo esempio, cioè il vetro per la realizzazione di disegni prospettici. Nel telaio di legno è inserito un vetro trasparente; l'occhio del disegnatore è fissato da un mirino; la mano del disegnatore traccia a mano libera con moto continuo i contorni della figura direttamente sul vetro. La verosimiglianza della rappresentazione è garantita dall'esecuzione stessa che via via sovrappone l'immagine costruita alle apparenze del mondo visibile percepite direttamente. Questo strumento incorpora il modello matematico della pittura intesa come "intersecazione della piramide visiva" secondo la ben nota definizione di Leon Battista Alberti, che sta alle origini della moderna geometria proiettiva.
I due esempi presentati illustrano l'importanza della cultura materiale degli strumenti nella genesi della geometria elementare e della geometria proiettiva. Queste ragioni da sole giustificano l'opportunità di introdurre alcuni semplici esempi di macchine matematiche concretamente manipolabili tra gli "arredi" di un Laboratorio, in aggiunta allo strumento che oggi non manca mai, il computer. Quest'ultimo, attrezzato con i software di geometria dinamica, di calcolo simbolico, di grafica tridimensionale, consente di realizzare grafici di curve e di costruire spazi ed oggetti virtuali "verosimili". Il computer è il depositario di un sapere complesso, costruito e accumulato in secoli di storia, e fornisce immediatamente "rappresentazioni". Per costruire il senso di esse, è necessario riempire le lacune tra esperienze e rappresentazioni, di ricostruire il complesso sistema di segni, di gesti, di linguaggio, di teorie che sta a fondamento delle procedure messe in opera in modo automatico e opaco dal computer.
Le macchine matematiche sono sussidi didattici particolari, non inventati artificialmente oggi per concretizzare un particolare concetto o una procedura della matematica. Esse sono state testimoni e protagoniste dello sviluppo storico della geometria. Assumerle come rappresentanti di un concetto o una procedura non è una forzatura convenzionale,

dal momento che essi sono incorporati nella macchina fin dalla sua origine. Se, da un lato, queste macchine si collegano a macchine usate per scopi pratici nella tecnologia e nell'arte (e questo collegamento sarà prezioso nella didattica), dall'altro, sono parte della fenomenologia storica che ha accompagnato, a volte anticipandolo, a volte seguendolo, lo sviluppo di teorie geometriche interne alla matematica.
Un ultimo aspetto merita di essere sottolineato. Le immagini del volume e del cd-rom che riproducono le macchine della collezione di Modena mostrano oggetti esteticamente piacevoli e caldi al tatto (come sanno essere gli oggetti realizzati in legno naturale), a volte resistenti alle forze impresse con la mano per realizzare il movimento, per la presenza di attriti. Quest'ultima caratteristica potrebbe infastidire il progettista di una macchina utensile, ma, nel nostro caso, ci ricorda in modo evidente la distanza tra il modello matematico e l'oggetto costruito, soggetto agli "*impedimenti della materia*„ che, secondo quanto diceva Galileo devono essere "*difalcati*„ dal filosofo geometra.
Il progetto didattico, realizzato sotto il coordinamento del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena, ha sostenuto molti esperimenti a partire dagli Anni Ottanta. Si è posto obiettivi ambiziosi, miranti a costruire, da un lato, la capacità di produrre congetture e costruire dimostrazioni anche complesse sulle proprietà e sul funzionamento di alcune macchine, dall'altro, il senso di un'esperienza che introduce nella classe un modo innovativo di far matematica, operando anche in piccolo gruppo, leggendo fonti storiche, costruendo relazioni sull'attività svolta.
La struttura del libro è articolata in tre parti. La prima parte introduce le macchine matematiche da un punto di vista storico - epistemologico. Il primo capitolo presenta una rassegna di strumenti meccanici, mentre il secondo una rassegna di prospettografi. Il terzo riesamina le due categorie dal punto di vista epistemologico, confrontando i due stili di pensiero complementari che hanno accompagnato la loro produzione: lo stile analitico di Descartes e quello sintetico di Desargues. La seconda parte contiene alcuni strumenti di natura metodologica, utili quando si progettano, si realizzano e si analizzano percorsi didattici sulle macchine matematiche. Il quarto capitolo introduce gli approcci strumentali alla conoscenza, mentre il quinto capitolo presenta alcuni strumenti di progettazione e interpretazione prodotti dalla ricerca didattica (la mediazione semiotica, la discussione matematica, il nodo semiotico). Per l'approccio al pensiero teorico, due paragrafi sono dedicati alla definizione in geometria (interpretata attraverso il costrutto teorico dei concetti figurali) e alla dimostrazione (con particolare attenzione al costrutto teorico dell'unità cognitiva). La terza parte presenta una rassegna di esperimenti didattici, sviluppati in altri paesi (sesto capitolo) o nel Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena (settimo ed ottavo capitolo). Il nono capitolo si occupa dell'espansione al di fuori dalla scuola, con una breve rassegna delle mostre realizzate con macchine matematiche. Al libro è allegato un cd-rom che contiene immagini a colori delle macchine citate nel testo; animazioni; schede di approfondimento; testi estesi sugli esperimenti didattici.
In definitiva, questo libro si propone di raccogliere i risultati di molti anni di ricerche didattiche, per offrire agli insegnanti uno strumento di lavoro e uno strumento di riflessione, nel difficile compito di dare vita ad un 'Laboratorio di matematica'.

LE PROVE PISA ED INVALSI: POSSIBILI CONSEGUENZE SULLA PRATICA DIDATTICA

Domingo Paola
(Liceo scientifico "A. ISSEL" Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova)

Premessa

Non mi propongo alcun obiettivo di descrizione approfondita delle prove PISA e INVALSI: è invece mia intenzione offrire alcuni spunti di discussione che possano aiutare a riflettere su come gli insegnanti percepiscono limiti e potenzialità, rischi e sicure utilità dei progetti nazionali e internazionali di valutazione dell'apprendimento nella pratica didattica. Spero che questa riflessione contribuisca al formarsi di un atteggiamento critico, attento, ma non privo di interesse da parte degli insegnanti nei confronti delle prove di valutazione dell'apprendimento e che tale atteggiamento possa aiutare a evidenziare le potenzialità insiste in questo tipo di prove, minimizzando quei rischi che possono essere anche devastanti e ai quali vorrei accennare.

Premetto e preciso che, per diversi motivi, ho deciso di concentrare l'attenzione sui problemi relativi alla valutazione delle conoscenze e delle competenze degli studenti; tutta la problematica che riguarda la valutazione del sistema formativo, inevitabilmente intrecciata alla valutazione delle competenze e conoscenze degli studenti, non verrà esplicitamente presa in considerazione in questo articolo.

Alcune riflessioni, dal punto di vista di un insegnante, sui test INVALSI e PISA

Negli incontri e nelle discussioni che ho avuto con colleghe e colleghi, in occasione di convegni, corsi di aggiornamento e nella quotidiana pratica didattica, ho rilevato una posizione predominante, assunta dagli insegnanti (e che io condivido), relativamente alle caratteristiche dei test PISA e INVALSI e alle funzioni che possono svolgere nella pratica didattica. Gli insegnanti vedono i test PISA non solo come uno strumento di valutazione delle competenze degli studenti, ma anche come un'opportunità di riflessione e approfondimento, come un aiuto per la costruzione di attività didattiche volte alla costruzione di conoscenze e competenze matematiche. Le prove INVALSI sono invece viste unicamente come strumento di valutazione delle conoscenze di base e sono ritenute poco adeguate per una valutazione significativa di competenze di livello tassonomico più elevato come, per esempio, il modellizzare, l'argomentare, il dimostrare. Inoltre i test PISA sembrano generare meno tensioni rispetto alle prove INVALSI, probabilmente a causa del tipo di rilevazione a campione e per il fatto che non vengono forniti i risultati ottenuti dalle singole scuole. Ciò dovrebbe far riflettere sull'opportunità di estendere obbligatoriamente i test INVALSI a tutte le scuole del territorio con il rischio di indurre comportamenti (non controllabili a causa dell'elevato numero di scuole coinvolte) che non solo rischiano di falsare i risultati, ma che farebbero pesare negativamente i test sull'azione didattica.

Nella seguente tabella propongo un confronto, dal punto di vista di un insegnante, fra i test PISA e le prove INVALSI:

Test PISA	Test INVALSI
Sono somministrati a un campione e consentono un'autovalutazione serena, anche perché difficilmente possono essere finalizzati alla valutazione della scuola.	Tendono a essere somministrati a tutte le scuole e quindi consentono una valutazione della scuola, creando tensioni e una sorta di rincorsa alla preparazione ai test (si veda a questo proposito la nota dell'Associazione Nazionale Presidi in cui si intravede la possibilità di utilizzare le prove INVALSI per fornire alle scuole un servizio avente come obiettivo la valutazione dei livelli di competenza degli alunni[1])
Sono affidabili per il controllo che è possibile esercitare sul campione.	Rischiano di non essere affidabili per la difficoltà di controllare la correttezza di una somministrazione a tappeto.
Rischiano di influenzare le politiche legate all'istruzione di un Paese e di influire sui percorsi di apprendimento senza che gli insegnanti ne siano adeguatamente consapevoli.	Rischiano di influire sull'autonomia scolastica relativamente alle pratiche didattiche e, in particolare, ai percorsi di apprendimento.
Consentono di valutare competenze di alto livello grazie alle risposte aperte che permettono valutazioni sui processi e non solo sui prodotti.	Consentono di valutare conoscenze, mentre a causa della presenza di sole risposte chiuse, che non consentono di osservare i processi, non offrono significative possibilità di valutare competenze di elevato livello tassonomico.
Consentono di costruire attività didattiche significative.	Non consentono di costruire attività didattiche significative, ma solo una valutazione del possesso o meno di certe conoscenze considerate (a livello centrale) come essenziali.

Vediamo, con l'aiuto di un esempio, quali problemi comporta la scelta dei test INVALSI di utilizzare solo risposte chiuse. Il seguente item è stato proposto per il PP4 nella prima classe di scuola secondaria:

7. Se al numero 0,999 si aggiunge1 centesimo, che cosa si ottiene?

A. 1 B. 1,009 C. 1,99 D. 1,999

Nella valutazione della risposta, si assegnerebbe uno stesso punteggio alle seguenti possibili strategie:

a) $0{,}999+\frac{1}{100}=\frac{999}{1000}+\frac{1}{100}=\frac{999+10}{1000}=\frac{1009}{1000}=1{,}009$

b) $0{,}999+0{,}01=1{,}009$

[1] "Rapporto dell'ANP: il parere dei dirigenti delle scuole", disponibile al sito: http://www.anp.it/anp/news/rapporto_anp_miur_invalsi.pdf

c)
$$\begin{array}{llll} 0, & 9 & 9 & 9 \quad + \\ 0, & 0 & 1 & \quad\;\; = \\ \hline 1, & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

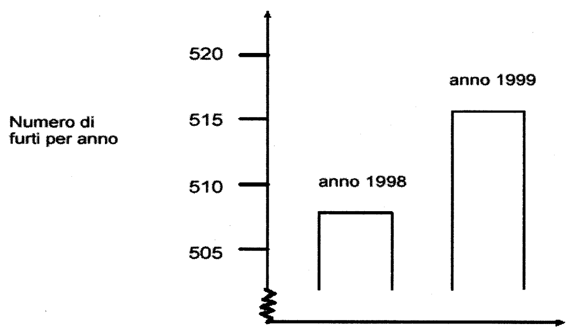
d) se a un numero che approssima per difetto 1 a meno di 0,001 aggiungo 0,01 devo ottenere un numero maggiore di 1, ma più piccolo di 1,01
Già prendendo in considerazione solo alcune possibili risposte corrette si può vedere la quantità di importanti informazioni che vengono perse utilizzando solo risposte chiuse; si pensi a tutte quelle che vengono offerte dalla ricchezza degli errori che potrebbero essere commessi. Le risposte chiuse, per loro natura, chiudono la possibilità di valutare i processi degli studenti, che dovrebbero essere l'oggetto di maggiore attenzione da parte degli insegnanti. Tutto ciò è riconosciuto dagli stessi proponenti il test INVALSI, come si evince da uno scritto di Mario Marchi, coordinatore per la matematica del Progetto Pilota: "Occorre infine essere consapevoli che gli esiti delle prove sono legati ai prodotti del sistema formativo scolastico e non ai processi di apprendimento. Per valutare tali processi il singolo insegnante dovrà dotarsi di altri opportuni e adeguati strumenti, che riguarderanno però sempre gli esiti educativi relativi ad un singolo studente, uscendo quindi dalle finalità valutative di Sistema, proprie delle Prove INVALSI"[1].
Sempre con l'aiuto di un esempio, vediamo come i test PISA offrono la possibilità di strutturare attività didattiche significative. Prendiamo in considerazione il seguente item:

FURTI

Domanda 7: FURTI *M179Q01*

Un cronista televisivo ha mostrato questo grafico dicendo:

«Il grafico mostra che dal 1998 al 1999 si è verificato un notevole aumento del numero di furti.»



Pensi che l'affermazione del cronista sia un'interpretazione ragionevole del grafico? Spiega brevemente la tua risposta.

[1] Marchi, M., Le prove di valutazione in matematica, disponibile al sito: http://www2.invalsi.it/valutazione/condivisa/prove/Quadro_mat.pdf

Al di là dell'interesse, di per se stesso notevole, delle risposte che gli studenti possono fornire (chi risponde che è ragionevole basandosi sull'impatto grafico o valutando una differenza assoluta; chi invece intuisce che è irragionevole, ma non spiega il perché; chi fornisce spiegazioni che fanno riferimento a un piccolo incremento rispetto al numero di furti, ma non fornisce una misura quantitativa; chi invece fornisce incremento relativo o percentuale; chi fa anche notare l'origine nascosta degli assi cartesiani), l'item può essere utilizzato per una significativa attività didattica su come possono essere veicolate idee non corrette con un'informazione che non contiene dati errati, ma che si limita a nascondere qualcosa o mette in evidenza certe informazioni lasciandone altre sullo sfondo. Si possono a tal scopo utilizzare altri esempi tratti dai quotidiani che possono riguardare notizie errate relative alla matematica, un uso, inappropriato al contesto, di termini specifici, confusioni tra concetti matematici, informazioni che possono creare fraintendimenti a causa della loro incompletezza o dell'uso non corretto delle rappresentazioni grafiche.
Attività di questo tipo, tese a far capire l'origine degli errori, la portata dell'uso di termini non appropriati al contesto, le possibili implicazioni di informazioni nascoste o eccessivamente evidenziate rispetto ad altre, l'uso inadeguato di rappresentazioni grafiche (involontario o voluto), sono fortemente finalizzate ad aiutare gli studenti a formarsi uno spirito critico: è l'informazione, così come viene talvolta veicolata sui mezzi di comunicazione di massa, che è oggetto di analisi critica, proprio grazie agli strumenti matematici studiati.
Il fatto che i test PISA consentano e suggeriscano, in modo molto più evidente rispetto ai test INVALSI, attività di questo tipo è scritto in qualche modo nel loro codice genetico; essi, infatti sono influenzati dalla prospettiva della *Realistic Mathematic Education* (RME), una teoria dell'insegnamento – apprendimento della matematica introdotta e sviluppata dal Freudenthal Institute in Olanda, ispirata alle idee di Hans Freudenthal, che, sostanzialmente, pone l'attenzione su due aspetti:
a) la matematica come attività umana
b) la matematica collegata alla realtà
Questa attenzione ha implicazioni forti per l'educazione matematica, che deve proporre situazioni di insegnamento – apprendimento che siano concrete per gli alunni e rilevanti rispetto all'ambiente in cui vivono. Tali situazioni devono consentire processi di riscoperte guidate, nelle quali gli studenti possano effettuare esperienze simili a quelle che hanno portato a scoperte e invenzioni nel campo matematico.
Il Freudenthal Institute ha giocato un ruolo predominante nello sviluppo di PISA 2000 e 2003 e il suo direttore, Jan De Lange, è stato coordinatore del gruppo di esperti matematici.
De Lange ha formulato i seguenti cinque principi guida per una valutazione efficiente ed efficace:
a) Il primo obiettivo di un test è quello di favorire il miglioramento dell'insegnamento e dell'apprendimento. Ciò vuol dire che la valutazione dovrebbe misurare gli studenti non solo alla fine di un percorso formativo, ma anche in itinere.
b) I metodi di valutazione dovrebbero consentire agli studenti di dimostrare che cosa sanno, piuttosto che ciò che non sanno. Ciò può essere realizzato proponendo problemi che possono avere diverse soluzioni ottenibili con differenti strategie.
c) La valutazione dovrebbe consentire di misurare tutti gli obiettivi dell'educazione matematica, sia i livelli più bassi, sia quelli medi, sia quelli più alti dei processi di

pensiero.

d) La qualità della valutazione matematica non è determinata dalla facilità di ottenere un punteggio oggettivo. In questo caso i test e gli esercizi più meccanici dovrebbero essere ridotti, fornendo agli studenti prove che consentano realmente di capire se essi comprendono i problemi posti.

e) Gli strumenti di valutazione dovrebbero essere pratici, adeguati alle esigenze e alla cultura dei sistemi scolastici e delle scuole e facilmente accessibili

(De Lange, 1995).

Riassumendo, si può dire che la tradizione della RME ha portato i costruttori dei test PISA a focalizzare l'attenzione sui concetti di:

a) competenza, che riassume in sé il conoscere e l'agire e supera quindi la distinzione tra sapere e saper fare;

b) matematizzazione, che si fa carico di superare la discontinuità tra l'apprendimento scolastico e la cognizione che avviene fuori della scuola e che è all'origine sia del formarsi delle competenze matematiche sia della costruzione di significato per gli oggetti matematici;

c) comunicazione, che consolida l'apprendimento della matematica attraverso lo scambio e il confronto delle conoscenze in una comunità di apprendimento.

Alcune riflessioni più generali sui test, dal punto di vista di un insegnante

Voglio qui esplicitare alcune considerazioni, in realtà implicitamente contenute in quanto precede, di carattere più generale relativamente all'uso dei test per misurare i livelli di conoscenze e competenze degli studenti.

La prima considerazione riguarda la differenza tra "sapere tacito o implicito" e "sapere consapevole o esplicito". Qualunque insegnante conosce bene le difficoltà che incontrano gli studenti, anche coloro i quali si dimostrano abili nella risoluzione dei problemi, a descrivere, spiegare e giustificare le strategie risolutive adottate. Non solo gli studenti, ma anche professionisti adulti che sanno risolvere un problema o sanno gestire una situazione, trovano difficoltà a trasferire ad altri le competenze acquisite. Non c'è alcun dubbio che il passaggio da un *sapere come* a un *sapere perché*, da una conoscenza tacita a una consapevole, siano obiettivi di primaria importanza per una scuola che abbia come compito quello di aiutare gli studenti a formarsi un pensiero critico che consenta loro di partecipare consapevolmente alle scelte della vita pubblica. Ebbene, gli aspetti legati alla matematica come costruzione teorica sono inevitabilmente poco presenti in un test: una pratica didattica in cui i test dovessero assumere eccessiva importanza per la valutazione delle competenze degli studenti rischierebbe di mettere in ombra aspetti fondamentali per la formazione del pensiero critico quali, appunto, quelli della comprensione del significato e delle funzioni delle costruzioni teoriche.

La seconda considerazione riguarda una preoccupazione legata al mito della valutazione oggettiva. È ovvio che l'uso di test strutturati a risposta chiusa riduce la variabilità della valutazione al variare del soggetto che valuta e quindi, in questo senso, i test a risposta chiusa possono considerarsi prove che tendono all'oggettività. È anche vero però, come ho già detto in precedenza, che con i test a risposta chiusa rimangono esclusi dal processo valutativo competenze fondamentali per la preparazione dello studente. Sottovalutare questo aspetto e sovrastimare la possibilità di una valutazione oggettiva potrebbe essere molto rischioso, soprattutto in un momento in cui le tecnologie di apprendimento a distanza iniziano a essere guardate con particolare interesse da differenti punti di vista e

da diverse agenzie preposte alla formazione e all'istruzione. Il binomio tecnologia dell'apprendimento a distanza – test può rivelarsi drammatico per l'insegnamento – apprendimento della matematica. Infatti i test, proprio per la loro efficacia ed efficienza nel valutare interventi di alfabetizzazione di base nelle varie discipline o interventi finalizzati all'addestramento, potrebbero influenzare le pratiche didattiche acuendo l'attenzione verso aspetti legati all'alfabetizzazione di base e all'addestramento.
La terza considerazione riguarda le risorse che si investono nella preparazione e nella somministrazione dei test e nel creare una cultura adatta alla loro accettazione e a una corretta somministrazione. Su questo punto ritengo che Paolo Boero abbia scritto un passo molto significativo "In modo sempre più pressante negli ultimi dieci anni si è posto il problema di valutare, oltre alle prestazioni degli studenti, anche la produttività dei singoli insegnanti e delle scuole. Tutto ciò ha impegnato gli insegnanti e la scuola nel suo complesso in discussioni, iniziative e attività che hanno sottratto tempo ed energie (ed altre ne sottrarranno) ad altri temi di importanza ben maggiore (come quello della realizzazione di un insegnamento adatto alle esigenze e alle caratteristiche in rapido mutamento dell'utenza o quello connesso del mutare degli obiettivi della formazione scolastica in una società in rapida trasformazione)"[1]
La quarta considerazione si riferisce all'uso che si può fare dei risultati di un test a livello politico, nella scelta degli investimenti e porta a possibili scenari particolarmente inquietanti. I test, infatti, sono un modo per suggerire se gli investimenti di denaro pubblico sono sprecati o meno. Dovrebbe essere abbastanza intuibile come, alla lunga, questa consapevolezza può portare a pratiche di addestramento ai test, con la conseguenza di una minor attenzione a una didattica tesa alla formazione della persona e del cittadino provocando, come risultato finale, la realizzazione di azioni didattiche non coerenti con le premesse dei documenti con cui si aprono l'attuale riforma scolastica, ma anche quella mai avvenuta.

Conclusioni

Vorrei concludere con alcune brevi proposte relative al *che fare*.

- Innanzitutto favorire la crescita di una maggiore cultura per la valutazione in un Paese, come l'Italia, che non ha una grande tradizione in questo senso; la crescita non può che avvenire in un clima di dibattito sereno, ma serio e serrato, che sappia cogliere le perplessità e le critiche, comprendendone le ragioni e valutandone i suggerimenti.
- Sviluppare forme sistematiche di valutazione delle competenze alternative ai test, che consentano di valutare anche i processi e non solo i prodotti (diari di bordo durante i lavori di gruppo; colloqui e interviste durante l'attività di risoluzione di problemi; saggi scritti su argomenti matematici; registrazioni e videoregistrazioni; preparazione di lezioni per compagni di livello scolare inferiore; redazione di documenti che descrivano ai genitori il lavoro svolto in classe; verifiche scritte tradizionali …) e richiedere che i risultati ottenuti in tali prove siano considerati essenziali nella valutazione del percorso formativo dello studente.
- Accettare che i processi valutativi sono caratterizzati da un aspetto paradossale che può essere così descritto: quanto più una prova è precisa (in termini di punteggio) e

---

[1] Boero, P. I test: aspetti culturali, pedagogici, tecnici e didattici del loro utilizzo a scuola, Conferenza all'ALIMA, Savona, Marzo 2004.

oggettiva, tanto meno essa fornisce informazioni significative. Tanto più le informazioni ottenute sono ricche e significative, tanto più la misurazione è soggettiva e quindi i risultati sono difficilmente confrontabili. La conseguenza di tale paradosso è che ogni valutazione significativa presenta inevitabilmente aspetti fortemente soggettivi, ineliminabili, se non al prezzo di rendere la valutazione meno significativa.

- Capire che è necessaria una profonda riflessione sulle pratiche valutative in vigore e soprattutto sull'attuale orientamento della valutazione delle competenze: è necessario accettare e pretendere, come insegnanti, la responsabilità di una valutazione soggettiva, che non si esprima con un voto (che è rassicurante, soprattutto per le famiglie, ma che non consente di descrivere a fondo l'evoluzione del percorso formativo), ma con un giudizio articolato di cui l'insegnante è responsabile come esperto che ha seguito l'evoluzione dello studente.
- Tutte queste considerazioni portano al cuore del problema e cioè che, anche in un sistema formativo centrato sullo studente, è necessario investire sull'insegnante. La figura dell'insegnante assume oggi, proprio con le nuove tecnologie, proprio in questa scuola e in questa società un peso ancora maggiore che in passato, almeno se gli obiettivi sono quelli dichiarati di aiutare tutti gli studenti ad acquisire competenze che consentiranno loro di inserirsi come partecipanti critici e consapevoli nella vita sociale. Investire sull'insegnante vuol dire investire in formazione e ricerca, tenendo conto di tutto quanto è stato fatto, spesso con iniziative locali e pionieristiche, negli ultimi anni. Solo in questo modo sarà possibile immergere gli studenti in ambienti di insegnamento – apprendimento sensati costruiti in seguito a una ricerca delle radici cognitive degli oggetti di studio e che propongano attività che consentano agli studenti di costruire, organizzare, richiamare, comunicare e sistemare teoricamente le conoscenze matematiche.

Bibliografia

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lange, J. de (1995). Assessment: No Change without Problems, in: Romberg, T.A. (eds). (1995). *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment.* New York, Sunny Press, 87-172.

CAPIRE I RAGIONAMENTI MATEMATICI DEI QUINDICENNI ATTRAVERSO LA METODOLOGIA DEL "PENSARE AD ALTA VOCE"*

Anna Salerni – Stefania Pozio*

In questo intervento presentiamo i risultati di un lavoro di ricerca che ha come obiettivo generale quello di cercare di capire quali sono le riflessioni e le congetture fatte da studenti quindicenni per risolvere alcuni quesiti di ambito matematico utilizzati nella ricerca PISA. Lo stimolo che ha dato il via al lavoro di ricerca sono i risultati negativi che gli studenti quindicenni italiani hanno ottenuto alle prove PISA 2003[1].
Per raggiungere l'obiettivo fissato nella ricerca si è andati oltre la semplice registrazione delle risposte date dagli studenti in una prova di matematica, si è cioè cercato di capire i ragionamenti che portano i lettori a dare determinate risposte, proprio per recuperare in modo efficace le difficoltà che essi possono incontrare nel risolvere problemi di matematica. Per raccogliere questi dati è stata utilizzata la metodologia del "pensare ad alta voce", che consiste nel fare esprimere nel modo più spontaneo possibile ogni singolo studente preso in esame evitando in ogni modo di direzionarlo verso una data risposta e di inibire o di censurare ciò che passa per la sua mente. L'uso di questa procedura è giustificato dal fatto che spesso chi insegna crede di conoscere, e dunque di poter interpretare, il pensiero seguito dagli studenti e di capire così la natura dell'errore da loro commesso e le difficoltà da loro incontrate. In realtà, infiniti sono i ragionamenti che è possibile seguire per arrivare a una soluzione, a volte, sono addirittura ragionamenti impensabili per una persona "esperta".

1. Centrare l'approccio sullo studente

Un'efficace interazione con gli studenti può consentire ai docenti/formatori di ottenere testimonianze su quanto essi hanno nella mente e aiutare a conoscere i percorsi che determinano il raggiungimento di un prodotto, con il principale scopo di mettere in atto situazioni di apprendimento-insegnamento che tengano realmente conto delle difficoltà e lacune dello specifico studente.
In altre parole, l'utilizzo di una tecnica di comunicazione verbale adeguata consente al docente di analizzare le informazioni relative al *processo* che l'allievo mette in atto per giungere a certi risultati e ottenere determinati *prodotti*. A maggior ragione, tale tecnica presenta notevoli vantaggi quando si ha a che fare non con studenti che presentano scarse 'doti' intellettuali, e a cui spesso si imputa la principale responsabilità dell'insuccesso

---

* Il testo è una sintesi di un articolo pubblicato da chi scrive sulla Rivista di matematica e didattica "Progetto Alice", vol. VI, n.18, 2006, pp. 519-541 dal titolo *"Pensare ad alta voce" come metodologia per capire che cosa pensano gli studenti quando rispondono ad alcune domande di matematica*. L'articolo è frutto di una riflessione comune delle due autrici tuttavia la responsabilità della stesura dell'introduzione e dei paragrafi 2 e 3 è di Anna Salerni, e dei paragrafi 3 e 4 di Stefania Pozio.

[1] Riguardo ai risultati ottenuti dagli studenti italiani alle prove di matematica del PISA 2003 *vedi* G. Benvenuto – S. Pozio, "Progetto Alice", *vol. VI , n. 17, 2005, pp.*

scolastico, ma con studenti "poco abili", "inesperti", linguisticamente svantaggiati, con deprivazione socioculturale e conseguenti frustrazioni scolastiche.
Per conoscere le difficoltà di apprendimento di chi apprende e per poter intervenire in maniera efficace, è necessario, quindi, adottare alcuni comportamenti verbali centrati sull'allievo in difficoltà che, come dimostrano ricerche e studi condotti in Italia da Lucia Lumbelli, sono in grado di permettere l'accertamento delle abilità degli studenti. L'intelligenza diventa, infatti, maggiormente studiabile quando "inciampa, si blocca e deve rallentare il proprio passo" (Lumbelli 1994, p.144). È in questa situazione che il lettore in difficoltà fa ipotesi per cercar di trovare la soluzione che lo aiuta a poter risolvere il problema incontrato. In altri termini, la difficoltà di comprensione può aiutare il formatore a conoscere quei processi nascosti e generalmente incomprensibili, perché effettuati dallo studente in modo automatico e inconscio.
Tra gli interventi efficaci, in grado di incoraggiare una partecipazione attiva dell'interlocutore, rientra certamente l'intervento indiretto, uno tra i comportamenti linguistici, utilizzato in ambito terapeutico (Rogers 1951). Tale atto linguistico, se ben adottato dal formatore, può aiutare lo studente a esprimersi liberamente e di conseguenza consente di raccogliere testimonianze più attendibili sulle affermazioni e sui processi cognitivi da lui messi in atto.
Gli interventi indiretti sono stati definiti dalla studiosa Lucia Lumbelli "un modo di domandare senza domandare". Tali atti hanno, infatti, la forma di una constatazione e l'effetto di un'interrogazione. Nella situazione specifica, con questi interventi si ripropone il contenuto delle affermazioni fatte dagli studenti formulando ipotesi di comprensione tramite glosse del tipo "tu pensi dunque che...", ripetendo le frasi pronunciate dagli studenti, riformulando o sintetizzando quanto da loro detto e facendo sempre in modo che il tono della voce non esprima alcun tipo di commento e di giudizio.
Questo tipo di intervento sostituisce espressioni come "prova a ripetere", "esprimiti in forma più chiara", "ricomincia daccapo", il cui probabile esito è segnalare allo studente la possibilità di aver commesso un qualche errore, provocando sullo studente un possibile effetto psicologico/emotivo negativo.
L'allievo, tramite gli interventi indiretti dell'insegnante/intervistatore, diventa così ascoltatore di se stesso e può confrontare quanto detto con ciò che ha nella mente e che credeva di avere espresso. È questo "confronto interno al parlante, divenuto ascoltatore di se stesso, che contribuirebbe a stimolare la sua produzione autonoma di quelle integrazioni e di quei chiarimenti che l'intervistatore gli ha chiesto solo indirettamente con la risposta a riflesso" (Lumbelli, 1997, p. XVI).
In altre parole, lo studente attraverso atti comunicativi di questo tipo percepisce l'attenzione dell'insegnante nei suoi confronti ed è maggiormente incoraggiato a parlare, cioè a chiarire meglio quanto pensa e quindi a fornire informazioni utili a conoscere i suoi ragionamenti e a poter meglio recuperare le sue lacune.

2. La metodologia del "pensare ad alta voce" utilizzata nelle interviste

La metodologia seguita nel corso di questo lavoro di ricerca per cercare di individuare le difficoltà di comprensione/ragionamento degli studenti è, come si è detto, quella del "pensare ad alta voce". La regola principale di tale tecnica è fare in modo che l'interlocutore/studente possa rendere immediatamente esplicito ciò che pensa a bassa voce quando è concentrato su un problema e cerca di risolverlo.

Questa tecnica prevede che vi sia *contemporaneità* tra processo mentale e verbalizzazione[1] e la sua utilità si fonda sul fatto che "thinking aloud will not change the corse of the cognitive processes" (Ericsson-Simon, 1980, p.227). Un tale approccio da parte dell'insegnante/intervistatore consente infatti di ottenere dati validi, in quanto fedeli al pensiero dello studente e in grado di testimoniare il processo che ha generato determinati ragionamenti.
La ricerca qui presentata è stata effettuata individualmente con studenti quindicenni, cioè dello stesso livello di età di quelli a cui sono indirizzate le prove PISA 2003. A ognuno di loro è stato chiesto di leggere, nel modo da loro preferito (a bassa o ad alta voce), ogni singola domanda di una prova e, *immediatamente* dopo, di risolverla esprimendo ad alta voce il ragionamento seguito.
Compito dell'intervistatore[2] è quello di raccogliere il maggior numero di informazioni, adottando adeguati comportamenti verbali, ed evitando qualsiasi occasione in grado di ostacolare il libero fluire della comunicazione da chi è osservato/intervistato. L'intervistatore, come si è detto precedentemente, riprende qualche aspetto del discorso dello interlocutore, riformulando o sintetizzando quanto da lui detto.
Per verificare l'uso coerente della tecnica del "pensare ad alta voce", come suggerisce la letteratura, e per una più affidabile analisi e interpretazione delle informazioni raccolte, è consigliabile poter registrare o videoriprendere lo scambio comunicativo tra lettore e intervistatore. Nel nostro lavoro di ricerca ci si è però limitati alla sola registrazione dei dati, anche in considerazione dei problemi tecnici che presenta la video registrazione. In effetti, la registrazione delle interazioni consente di controllare la coerenza dei comportamenti verbali adottati dall'interlocutore (parole, intonazione della voce, reazione a dichiarazioni ecc.), cioè permette di verificare in modo oggettivo se l'intervistatore è riuscito effettivamente a fare esprimere liberamente l'intervistato e di conseguenza a raccogliere dati validi.
Come afferma Lucia Lumbelli (1997) "il giudizio soggettivo", più o meno ottimistico, che l'intervistatore dà del proprio operare è *di regola* insufficiente, perché solo 'un'analisi oggettiva' delle parole espresse e del tono di voce con cui sono state pronunziate «può darci un'informazione adeguata sugli atteggiamenti che le azioni verbali rivelano, indipendentemente dalle interazioni pensate e dichiarate dall'intervistatore [...] la registrazione completa offre l'opportunità di confrontare ripetutamente i propri comportamenti (effettivi) con le proprie preoccupazioni (dichiarate) nei confronti dei destinatari di quei comportamenti» (p.XIII).
Infine, va detto che l'esame, da parte dell'intervistatore, del proprio comportamento

---

[1] Tale metodo si differenzia dall'introspezione (*tecnica in differita*) in cui le testimonianze possono essere filtrate. Agli studenti è, infatti, detto di osservare ciò che succede in loro e di dire in che modo si è arrivati a un dato risultato lasciandogli la possibilità di ragionare a bassa voce e di esporre successivamente ciò che si ritiene essenziale come risposta da dare. Infatti, attraverso la tecnica dell'introspezione "il soggetto chiamato a raccontare, alla fine del processo, quanto ha osservato dentro di sé, non riesce a sottrarre la sua testimonianza all'influenza delle inevitabili selezioni menestiche del gioco delle aspettative" (Lumbelli 1989, p.151).
[2] Le interviste sono state condotte da Stefania Pozio nell'ambito di un dottorato di ricerca in Pedagogia Sperimentale dell'Università "La Sapienza" di Roma.

verbale, attraverso l'ascolto della registrazione del colloquio, non solo serve a verificare l'implementazione dell'atteggiamento da lui assunto, ma è anche importante perché ha un obiettivo formativo, ossia permette di "[...] modificare e rendere più precisi l'atteggiamento o l'ipotesi da cui parto nel colloquio successivo. Un approccio corretto alla realizzazione di un'ipotesi è un'esperienza continua e reciproca" (Rogers 1951, trad. it. P.24).

3. Un esempio di intervista

Prendiamo in esame una delle prove rilasciate dalla ricerca PISA 2003: la prova "Tasso si cambio". La prova fa parte dell'area di contenuto "Quantità" e della situazione "pubblica"[1] ed è costituita da tre domande di diverso livello di difficoltà.
Per esplicitare tanto la tecnica utilizzata quanto le informazioni che è stato possibile rilevare, attraverso l'interazione, analizzando i ragionamenti seguiti dagli studenti per risolvere i problemi loro presentati, si riportano alcune parti delle risposte ottenute da due studenti quindicenni durante l'intervista.

Schema 1: *Stimolo prova Tasso di cambio*

TASSO DI CAMBIO
Mei-Ling, una studentessa di Singapore, si prepara ad andare in Sudafrica per 3 mesi nell'ambito di un piano di scambi tra studenti. Deve cambiare alcuni dollari di Singapore (SGD) in rand sudafricani (ZAR).

Il primo quesito corrisponde a un livello 1 di difficoltà[2], si tratta di un quesito molto facile che ha ottenuto il 71% di risposte corrette, il 17% di risposte errate e il 12% di omissioni.

[1] Le prove di matematica di Pisa 2003 fanno riferimento a 4 aree di contenuto: quantità, spazio e forma, incertezza, cambiamento e relazioni e a 4 diverse situazioni: personali, scolastiche o occupazionali, pubbliche e scientifiche e a tre aree di competenza: riproduzione, connessioni e riflessione. Per un approfondimento sulle caratteristiche delle prove utilizzate per rilevare la competenza matematica dei quindicenni e più in generale sull'indagine PISA 2003 si veda il Rapporto Nazionale di recente pubblicazione (2006).
[2] I quesiti di matematica dell'indagine PISA prevedono sei diversi livelli di difficoltà: dal più facile (livello 1) al più difficile (livello 6).

Schema 2: *Domanda 1 prova Tasso di cambio*

Domanda 1: TASSO DI CAMBIO

Mei-Ling ha saputo che il tasso di cambio tra il dollaro di Singapore e il rand sudafricano è:

1 SGD = 4,2 ZAR

Mei-Ling ha cambiato 3.000 dollari di Singapore in rand sudafricani a questo tasso di cambio.

Quanti rand sudafricani ha ricevuto Mei-Ling?

Risposta: ....

Il secondo quesito della prova si colloca nel raggruppamento di competenze "riproduzione" e corrisponde al livello 2 di difficoltà. Anche questo è ritenuto un quesito facile, ma, in realtà, il 20% degli studenti italiani ha risposto in modo errato.

Schema 3: *Domanda 2 prova Tasso di cambio*

Domanda 2: TASSO DI CAMBIO

Quando Mei-Ling torna a Singapore dopo 3 mesi, le restano 3.900 ZAR. Li cambia di nuovo in dollari di Singapore, notando che il nuovo tasso di cambio è:

1 SGD = 4,0 ZAR

Quanti dollari di Singapore riceve Mei-Ling?

Risposta:...

Attraverso l'intervista è stato possibile comprendere la natura degli errori effettuati dagli studenti. Matteo, uno degli intervistati qui preso in esame, pur sapendo impostare in modo corretto l'operazione, ha eseguito in modo errato il calcolo richiesto dalla domanda: sulla calcolatrice ha battuto 3.900 con la virgola, digitando cioè 3,900, e di conseguenza ottenendo come risultato 0,975 invece di 975. Lo studente non si è affatto reso conto dell'errore commesso, dimostrando, inoltre, di non avere alcuna idea dell'ordine di grandezza del risultato di una tale operazione[1].

Il terzo quesito della prova, rientra nel raggruppamento "riflessione" e corrisponde al livello 4 nella scala delle difficoltà. Si tratta di una domanda a risposta aperta, omessa da circa il 30% dei nostri studenti, e a cui hanno risposto in modo errato il 37% di loro.

[1] Rispetto a tale ragionamento la videoregistrazione dell'operazione effettuata dallo studente, ci avrebbe, forse, aiutato a chiarire e a comprendere meglio i ragionamenti degli studenti. Trattandosi, però, di un'operazione automatica (utilizzo della calcolatrice) e priva di scambi verbali è ovvio che non si possono riportare le interazioni registrate, esemplificative dei ragionamenti seguiti.

Schema 4: *Domanda 3 prova Tasso di cambio*

Domanda 3: TASSO DI CAMBIO
Durante questi 3 mesi il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD.
Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR nel momento in cui cambia i suoi rand sudafricani in dollari di Singapore? Spiega brevemente la tua risposta.

Niccolò, uno dei quindicenni intervistati, ha risposto alla domanda 3 senza riuscire ad arrivare alla giusta soluzione. Nello specifico ha seguito il seguente ragionamento[1]:

"Allora... **lei aveva 3000 dollari, li ha cambiati sono diventati 12600 zar**...se li avesse...faccio così...se il tasso qui era 4....3000 e 4 sarebbe venuta una cifra minore...quindi ci ha perso. Quindi scrivo che Mei Ling.....allora nel cambio...nel tasso.... essendo....nel cambio del tasso.... lei ha perso dei soldi..... dato che.....**come posso spiegarlo**? Dato che più è alto....più è basso il tasso di cambio...no che il tasso di cambio in ZAR rispetto al dollaro di Singapore (*silenzio*) ecco, più alto è lo ZAR... e più soldi...no, più alto è il dollaro di Singapore...no il dollaro di Singapore non ce l'abbiamo....no aspetta...più alto è lo ZAR.... e più nel cambio conviene...**lei ha perso dei soldi**...**perché essendosi abbassato il tasso**...(*lo scrive*)...essendosi abbassato lo ZAR.... **si abbassa anche la quantità di dollari di Singapore**."

Come si può leggere dalla trascrizione dell'interazione, lo studente ha difficoltà nell'esprimersi e risulta molto confuso. Innanzitutto, Niccolò per valutare se l'abbassamento del tasso di cambio è stato un vantaggio si riferisce alla domanda 1 (in cui Mei Ling cambia i dollari di Singapore in rand sudafricani) invece di prendere in riferimento la situazione presentata nella domanda 2 (in cui Mei Ling cambia i rand sudafricani in dollari di Singapore) e inoltre conclude erroneamente il suo ragionamento affermando che abbassandosi il tasso di cambio si ricevono meno soldi.
Tale risposta ci permette di fare alcune riflessioni relative sia ai ragionamenti dello studente sia al tipo di insegnamento che gli studenti ricevono a scuola.

1. Lo studente non ha chiaro il concetto di tasso di cambio. Ma, ci si chiede, quando mai a scuola si affronta il problema del tasso di cambio?
2. Lo studente ha avuto difficoltà a esplicitare il suo ragionamento (..."**come posso spiegarlo**?") perché, come egli stesso sostiene, a scuola nessuno gli ha mai chiesto, né tanto meno insegnato, di spiegare il ragionamento seguito quando si risolvono problemi di matematica.
3. Lo studente, come egli stesso ha dichiarato, non avrebbe fornito alcuna risposta se non ci fosse stata un'esplicita richiesta da parte dell'intervistatore e si fosse trovato da solo (situazione che si verifica la maggior parte delle volte quando si studia). Tale affermazione può spiegare l'alto tasso di omissioni registrato nelle domande a risposta aperta presenti nella ricerca PISA 2003.

[1] In grassetto sono riportati i ragionamenti che ci sembrano in grado di chiarire meglio il processo seguito dallo studente e che ci sono serviti per interpretare i suoi ragionamenti.

4. Conclusioni

Le prove PISA rappresentano certamente prove di matematica a cui gli studenti della scuola italiana non sono abituati. Il fatto che gli studenti abbiano difficoltà a risolvere questo tipo di prove, pur avendo ricevuto dalla scuola le basi matematiche necessarie, dimostra che essi non sono in grado di utilizzare la matematica al di là dello stretto ambito scolastico; hanno cioè difficoltà a trasferire le competenze matematiche apprese a scuola alla realtà quotidiana e, viceversa, non riescono a riconoscere nella realtà quotidiana la matematica scolastica. Gli studenti italiani, in altre parole, non sono in grado di "matematizzare" la realtà, ovvero di tradurre i problemi dalla "realtà" alla matematica (OECD, 2004).
Una delle cause di tale difficoltà, che andrebbe comunque verificata con ulteriori studi e ricerche, potrebbe risiedere nel fatto che la matematica nella scuola italiana è generalmente insegnata in modo mnemonico e meccanico(in particolare via via che si passa dalla scuola primaria alla scuola secondaria inferiore), e soprattutto senza che gli studenti capiscano il perché di alcune regole e di alcuni principi. Ciò impedisce agli studenti di interiorizzare determinati procedimenti e, quindi, non li rende in grado di riconoscerli quando si presentano in situazioni diverse.
Un'altra difficoltà che emerge dall'analisi di queste interviste è la limitata capacità degli studenti a esplicitare i loro ragionamenti. Ciò che risulta, infatti, è che i nostri studenti non sono abituati a esplicitare il ragionamento matematico e hanno difficoltà ad argomentare una risposta perché, come essi stessi affermano, nessuno mai ha chiesto loro di farlo né tanto meno ha insegnato loro come farlo. Spesso, infatti, a scuola, nei compiti di matematica è richiesto di svolgere un determinato problema per ottenere un risultato, ma raramente è viene detto di spiegare il ragionamento seguito. In altre parole gli insegnanti sono più interessati al raggiungimento di un risultato corretto che a conoscere il percorso che lo studente segue per arrivare a un detrminato risultato.

Riferimenti bibliografici

- Ericsson K. A. - Simon H. A. (1980), *Verbal Report as Data*, in "Psychological Review", vol.87, n.3, pp.215-251.
- Invalsi (2006), (a cura di) *Il livello di competenza dei quindicenni italiani in matematica, lettura, scienze e problem solving*, Roma, Armando.
- Lichtner M. (2004), *Valutare l'apprendimento: teorie e metodi*
- Lumbelli L. (1990a), *Un approccio alla valutazione formativa: per una metodologia dell'interrogazione orale*, in "Scuola e Città", n.1, pp.8-18.
- Lumbelli L. (1990b), *Per una fenomelogia di atti linguistici congruenti con l'intenzione di saperne di più*, in "Scuola e Città", n.2, pp.67-78.
- Lumbelli L. (1993), *Tecniche di intervista, processi cognitivi e ricerca educativa*, in "Età evolutiva", n.46, pp.38-95.
- Lumbelli L. (1994), *Fenomenologia dello scrivere chiaro,* Roma, Editori Riuniti.
- Lumbelli L. (1997), *Introduzione all'edizione italiana di* C. Rogers *Terapia centrata sul cliente*, Firenze, La Nuova Italia, pp.VII-XXXIII.
- Rogers C. (1951) *Client-centered Therapy*, Boston, Houghton Mifflin Company

(Trad. it. *Terapia centrata sul cliente*, Firenze, La Nuova Italia, 1997).

- OCSE(2004), *PISA 2003 Valutazione dei quindicenni*, Armando Roma 2004.

DOCENTI E VALUTAZIONE DEGLI APPRENDIMENTI IN MATEMATICA: CHE COSA SUCCEDE NELLA SCUOLA?

Claudia Testa
(IPIA "Plana" Torino, SIS Piemonte)

La valutazione degli apprendimenti in Matematica, nella scuola dell'autonomia, è un processo, che il docente, pur nell'ambito della sua professionalità, non definisce in totale libertà. Molte indicazioni operative, provengono da decisioni collegiali, che dovrebbero essere condivise anche nella attuazione, e dipendono da parametri e variabili complessi e numerosi.
Affrontiamo il problema della valutazione degli apprendimenti, in matematica, nella odierna realtà scolastica, in un quadro più ampio, alla luce di questi elementi:

- il profondo mutamento del rapporto della scuola con istituzioni e società.
- il quadro normativo;
- la valutazione nelle e delle singole istituzioni scolastiche che vede coinvolta, con un ruolo importante la Matematica e il rapporto tra valutazione interna ed esterna al sistema scolastico;
- la valutazione, competenza didattica, che, insieme ad altre competenze e alle caratteristiche professionali è uno dei fattori di efficacia dell'insegnamento;

Si farà riferimento a un'indagine, realizzata per conto dell'UMI-CIIM presso i docenti di scuole superiori di differenti tipi e città, attraverso un questionario e la raccolta documentazione.
Il questionario richiedeva informazioni circa le iniziative collegiali intraprese, a livello collegiale, dalla scuola, in tema di valutazione in Matematica, operate anche in conseguenza delle valutazioni esterne al sistema.
La documentazione consiste, in un volume in cui sono state raccolte le prove di verifica del primo anno di scuola superiore, utilizzate nel corso dell'anno scolastico e inviate dagli insegnanti, in risposta alla nostra richiesta. Nel dossier sono state classificate le prove di verifica assegnate nel primo anno in più di venti scuole secondarie superiori, non solo del Piemonte. Le prove sono 226, con circa 1600 esercizi tra cui risalta il diverso rapporto fra i temi oggetto di verifica. Si è completata la documentazione con materiali tratti dai siti delle scuole e esempi di griglie di valutazione o esplicitazioni di obiettivi minimi collegiali, con l'indicazione delle relative prestazioni, ricevute dai docenti.
Tale documentazione, comparata con le tipologie di esercitazioni con cui il docente facilita, consolida, verifica, il raggiungimento degli obiettivi dell'apprendimento di cui si hanno esempi nei manuali scolastici più usati, nelle proposte UMI e con le prove INValSI è stata oggetto di riflessione e confronti nel laboratorio che ha seguito la conferenza.

Rapporto della scuola con istituzioni e società.*

Quando la scuola era la fonte principale di educazione della società, era anche considerata un potente strumento per difenderla. Svolgendo il ruolo di controllo e

* "Una pagella per la scuola" "*N. Bottani e A. Cenerini*" Erickson 2003

legittimazione di ciò che è vero e di ciò che è falso era un apparato indiscusso di saperi: non c' era dunque attenzione o preoccupazione per i risultati che conseguiva. Ora, la scuola non è più un sostegno indispensabile di potere e rende evidente la inadeguata risposta alle esigenze della sua mutata utenza: deve dunque ritrovare credibilità nell'esplicare la sua funzione educativa, rendere conto dei risultati e giustificare le risorse che utilizza
In questo contesto *Bibl. 1 si colloca il processo dell'autonomia scolastica, con le istituzioni in difficoltà a ritrovare la propria identità all'interno delle trasformazioni richieste. L'autonomia pone dunque anche il problema che la scuola sia in grado di realizzare quanto si propone. In questo contesto la valutazione potrebbe essere un elemento importante che concorre a far conseguire alle scuole migliori risultati e distribuire equamente l'istruzione. La riforma dell'autonomia ha esplicitato, le indicazioni generali sul tema della valutazione ma, fino ad ora il binomio autonomia-valutazione è stato poco discusso e praticato. Ci sono state, esperienze di scuole, che hanno realizzato percorsi di autovalutazione sia di istituto che degli apprendimenti e, nell'ottica della qualità, di recente, soprattutto l'autovalutazione di istituto, è una preoccupazione innanzi tutto del Dirigente Scolastico, ma non ancora un'esigenza collegiale.

All'interno del quadro normativo

- nel regolamento dell'autonomia *dPR n.275/1999*
- *Legge 53 del 28/03/03*

Art. 3. Valutazionedegli apprendimenti e della qualità del sistema educativo di istruzione e di formazione.
1. Con i decreti di cui all'articolo 1 sono dettate le norme generali sulla valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione e degli apprendimenti degli studenti, con l'osservanza dei seguenti principi e criteri direttivi:
a) la valutazione, periodica e annuale, degli apprendimenti e del comportamento degli studenti del sistema educativo di istruzione e di formazione, e la certificazione delle competenze da essi acquisite, sono affidate ai docenti delle istituzioni di istruzione e formazione frequentate; agli stessi docenti è affidata la valutazione dei periodi didattici ai fini del passaggio al periodo successivo; il miglioramento dei processi di apprendimento e della relativa valutazione, nonché la continuità didattica, sono assicurati anche attraverso una congrua permanenza dei docenti nella sede di titolarità;
b) ai fini del progressivo miglioramento e dell'armonizzazione della qualità del sistema di istruzione e di formazione, l'Istituto nazionale per la valutazione del sistema di istruzione effettua verifiche periodiche e sistematiche sulle conoscenze e abilità degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa delle istituzioni scolastiche e formative; in funzione dei predetti compiti vengono rideterminate le funzioni e la struttura del predetto Istituto;
c) l'esame di Stato conclusivo dei cicli di istruzione considera e valuta le competenze acquisite dagli studenti nel corso e al termine del ciclo e si svolge su prove organizzate dalle commissioni d'esame e su prove predisposte e gestite dall'Istituto nazionale per la valutazione del sistema di istruzione, sulla base degli obiettivi specifici di apprendimento del corso ed in relazione alle discipline di insegnamento dell'ultimo anno.

La legge 53, ma in realtà nel regolamento stesso dell'autonomia si ritrovano le stesse indicazioni, prevede dunque due ambiti di intervento: uno interno all'istituzione scolastica: valutazione periodica e certificazione delle competenze ed uno esterno demandato all'Istituto Nazionale di Valutazione del Sistema Istruzione.
Le decretazioni successive:

- *D.Lgs 19/02/04 norme generali su scuola infanzia e I ciclo di istruzione: Indicazioni naz. per i piani di studio personalizzati*
- *Dir.n.56, 12/07/04 - Individuazione priorità per l'attività dell'INValSI*
- *D.LGS 28/10/04, attuativo L. 53/2003 - Istituzione e riordino dell'INValSI*
- *Accordo stato-regioni 28/10/04 G.U. n. 286 6/12/04: certificazione finale e riconoscimento crediti formativi in ingresso*
- *C.M. 8, 03/12/04 -Indicazioni per la valutazione e certificazione delle competenze, scuola primaria e sec. di I grado: modelli di certificazione per il riconoscimento dei crediti ai fini dei passaggi tra sistemi*

Con l'attuazione dell'autonomia scolastica, dunque maggiore attenzione è stata data alla valutazione scolastica rivolta: al controllo del processo di apprendimento-insegnamento, con l'obiettivo del successo scolastico o del superamento dell'insuccesso e al miglioramento della qualità del sistema scolastico.
Alle scuole inoltre, sono assegnate sempre maggiori responsabilità nella valutazione e certificazione delle competenze.

Valutazione delle e nelle istituzioni scolastiche*
L'esigenza e la pratica del quantificare, da quando si à cominciato a contare, è cresciuta in modo ossessivo: la possibilità di misurare soddisfa in nostro bisogno di oggettività e ci illude di potere sempre fare previsioni.
La scuola è stata ed è spesso rappresentata da numeri: in termini di quantità (numeri di utenza, personale ......) e, ora, di valutazione degli apprendimenti: indagini nazionali ed internazionali

Tali indagini ci possono aiutare a capire meglio i risultati dei processi di insegnamento/apprendimento, comparare gli esiti ed a collocarli nei contesti che li hanno prodotti, ma altra cosa dalle indagini statistiche sono le pratiche pedagogico didattiche: non si può "scambiare il significato delle statistiche per un significato educativo" Una cosa sono gli esiti scolastici, le valutazioni del sistema in momenti particolari del percorso,che necessitano di misurazioni standardizzate, altra cosa sono le modalità di verifica e valutazione in classe, finalizzate al miglioramento degli apprendimenti, in cui prevale la funzione educativa.
Nel nostro paese è possibile che, da un lato, prevalga negli insegnanti un aprioristico scetticismo nei confronti sia delle prove strutturate sia delle indagini conoscitive sui rendimenti scolastici che non favorirebbe la crescita di una cultura della valutazione e, dall'altro, tali modelli vengano assunti acriticamente dai docenti, come propri, senza

---

* "Una pagella per la scuola" "*N. Bottani e A. Cenerini*" Erickson 2003

elaborazione personale, e, all'interno degli stessi, situino le valutazioni degli studenti

Anche se l'Italia per molti anni ha partecipato con una delle maggiori frequenze tra gli stati partecipanti, alle indagini internazionali, non c'è stata ricaduta in termini di informazione, riflessione, dibattito, né utilizzo di tali rilevazioni per dare indicazioni al sistema scolastico e agli insegnanti. Dunque a livello internazionale l'Italia non ha acquisito, nonostante queste partecipazioni, l'autorevolezza nel campo della valutazioni che altri paesi meno assidui, si sono invece conquistati.

Peraltro la attenzione che si sta ponendo a livello istituzionale sia centrale che periferico al miglioramento delle prestazioni in Matematica, mentre può essere un'occasione ed uno stimolo per far riflettere gli insegnanti, non può essere affrontata senza la consapevolezza che le azioni da intraprendere per raggiungere questo obiettivo riguardano temi quali la didattica, la valutazione e gli obiettivi di apprendimento che i docenti a livello collegiale e personale si pongono e gli strumenti che usano per favorire e valutare gli apprendimenti
Si pone, in questa ottica, il problema delle iniziative prese all'esterno del sistema senza coinvolgimento dell'interno, in quanto immettendo dall'esterno nuovi input, senza avere contatti con l'interno o senza preoccuparsi di cosa produrranno all'interno di quella che è stata chiamata la "scatola nera", non ci sono garanzie di avere migliori output.
In Italia le politiche scolastiche, pensiamo alle pubbliche dichiarazioni di "strategie" del MIUR, necessitano di un reale collegamento con quanto avviene nella scuola.
Non è che non si conosca davvero quanto succeda nelle scuole, il loro funzionamento in rapporto alle loro decisioni, gli esiti finali, sono tutte scelte ed azioni pubbliche, ma non c'è una presa in carico del problema, né sostegno per le scuole. Quindi programmare dall'esterno input e output, senza tenere in conto "dell'interno" intendendo con ciò il contesto, la struttura,i docenti … non è assolutamente produttivo. Pensiamo a quando nei collegi docenti si parla delle valutazioni esterne al sistema.... Altro discorso se si intraprendesse un cammino per autovalutarsi o confrontarsi innanzi tutto a livello di dipartimenti disciplinari. Rispetto a ciò, comunque, nelle realtà che stanno intraprendendo questo cammino i Dipartimenti di Matematica sono spesso il motore di iniziative.

I soggetti della valutazione le interazioni tra gli stessi e le azioni della valutazione*
A seguito delle **Indicazioni Nazionali**

- Il Collegio docenti: **definisce** Criteri generali;

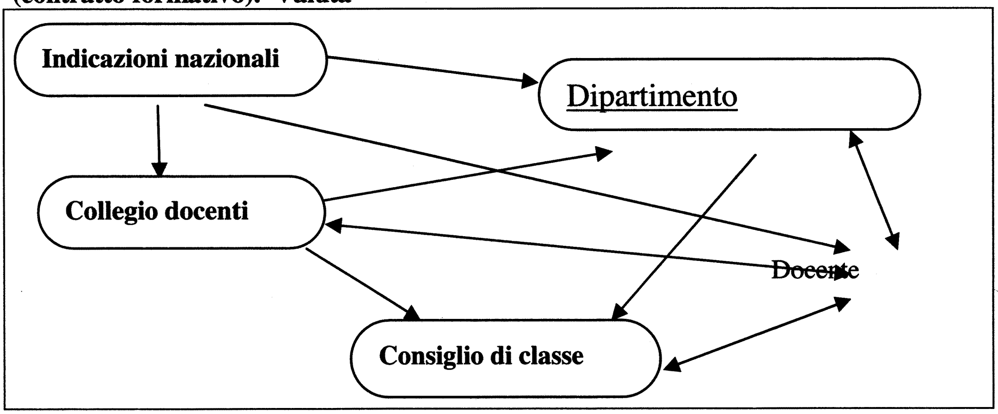
- Il **Dipartimento disciplinare:** definisce la programmazione, le tipologie delle prove, criteri e standard di riferimento;

- Il **Consiglio di classe:** adatta la programmazione ai criteri di valutazione. Definisce modalità tempi e strumenti della valutazione degli apprendimenti Esprime la **valutazione**

* "Valutazione Autovalutazione Certificazione" M.Castoldi, P.Cattaneo, A.Di Falco, La Tecnica della Scuola 2000

finale;

- Il **Docente adatta, propone, concorda, esplicita criteri, modalità, tempi e strumenti (contratto formativo). Valuta**



Non quindi è più pensabile collocare la valutazione soltanto al termine di un processo di insegnamento-apprendimento per accertare i livelli di conoscenze e di competenze raggiunti dagli studenti, deve invece essere una azione che accompagna il processo nel suo sviluppo che verifica costantemente la validità dei mezzi impiegati in rapporto agli obiettivi che si intendono perseguire all'interno del quadro di scelte di scuola condivise e trasparenti di cui abbiamo detto.

Rapporto tra valutazione esterna ed interna al sistema scolastico

Si riportano alcune delle ANALOGIE e DIFFERENZE TRA VALUTAZIONE INTERNA ED ESTERNA elencate dal Prof. Bertagna, Frascati, 18 gennaio2005

Entrambe accertano conoscenze e abilità con i relativi livelli e standard di prestazione, ma

Valutazione interna	Valutazione esterna
Le conoscenze e le abilità sono dato secondario, strumentale, necessario, ma non sufficiente (mezzo)	Le conoscenze e le abilità sono il dato primario (fine)
Il cuore delle pratiche valutative sono le competenze	Non ha presa sulle competenze
Affianca a metodi quantitativi, metodi qualitativi	Usa metodi quantitativi e docimologici, che tratta statisticamente
Essendo la competenza complessa occorre non spezzettarla ma valutarla in termini qualitativi	Elabora livelli di apprendimento e standard nazionali. Lo standard ideale è dato dalla prestazione corretta rispetto alla prova.
Si muove in direzione della divergenza, della molteplicità, della complessità	Lo scostamento rispetto ed esso, rappresenta il livello di apprendimento
....	Si muove in direzione dell'omologazione, dell'uniformità, della semplificazione

Ci domandiamo:
Nella valutazione esterna: le differenti difficoltà tra gli item li rende confrontabili?
E nel rapporto con quella interna:sono confrontabili con le valutazioni dei docenti?
Gli esiti della valutazione esterna al sistema si discostano davvero molto dai risultati degli studenti nelle valutazioni quadrimestrali e finali?
La valutazione interna è basata su varietà e tipologie differenziate di prove: equanimità e confrontabilità è garantita dalla professionalità del corpo docente La valutazione del docente è più complessa e completa ed in quanto tale, dovrebbe essere l'espressione più alta della sua professionalità.
Sono le scuole consapevoli degli esiti in Matematica nelle varie classi? Sono confrontabili in termini di valutazione degli apprendimenti? Quale peso hanno i risultati in Matematica sugli esiti finali, in termini di successo scolastico?
Che cosa fanno le scuole, come si attrezzano per monitorare i risultati? E per intervenire?
Dai siti delle scuole, dalla documentazione raccolta: Questionario UMI e prove di verifica e dal confronto con i colleghi di Matematica emergono le buone pratiche delle scuole e dei singoli docenti:
esperienze di scuole in cui i Dipartimenti di Matematica hanno esplicitato obiettivi comuni e prestazioni relative, a volte anche per la sollecitazione venuta dalle indagine esterne, in altre invece il lavoro del singolo docente è assolutamente isolato. Tali realtà, presenti ovunque, sono vissute spesso con fatica, disagio, dai colleghi per i quali l'esigenza di confronto è fondamentale.

Valutazione in matematica interna/esterna*

Valutazione interna	Valutazione esterna
E' coerente con l'immagine della matematica del docente	E' coerente con l'immagine della matematica del gruppo che ha costruito le prove
E' centrata sulla costruzione del concetto e sul significato. Ha tempi e modalità "distesi", non solo nella prassi didattica, ma anche nei momenti di verifica.	Gioca su riconoscimento operativo e non c'è sollecitazione ad applicare la definizione Ha tempi e modalità "da competitività" rappresentazioni rigide,

Esempi

L'espressione $16a^{10}b^6$ è il quadrato di ....?	*L'espressione $16a^{10}b^6$ è il quadrato di:* $4a^3b^5$; $-8a^5b^3$; $8a^5b^3$; $-4a^5b^3$
Nel costruire la risposta, lo studente applica la definizione di quadrato. C'è dinamica tra le forme di controllo nel momento in cui costruisce la risposta applicando la definizione.	Che rimando dà l'errore? Quale peso sulla scelta della risposta la proposta dei possibili errori. Quali considerazioni si possono fare? Ciascuna risposta errata ha motivazioni differenti.

* per valutazione estena , in questo caso, si fa riferimento alle prove INValSI

L'item(valutazione esterna)

Siano m e n due numeri naturali diversi da zero. Se si scambia m con n quale delle seguenti espressioni modifica il proprio valore? $m+n$ $m*n$ m^n m^0-n^0
è invece positivo, richiede un'attività da parte dello studente, non è giocato sul "tranello": errori di trasferimento di proprietà, riconoscimenti errati a "vista", sui dubbi. Anche se non esplicitato, occorre far muovere la commutatività,

Con tali prove, emerge "quanto gli studenti sbagliano" , ma quali i fattori concorrenti ai risultati?. La situazione sollecita la competitività che non facilita il ragionamento e fa venir meno il controllo. I test rispondono a obiettivi di abilità locali di tecnica piuttosto che a conoscenze matematiche o a concettualizzazioni
Certo, comunque, questo tipo di prove di verifica, dovrà far parte degli strumenti di cui si avvale l'azione valutativa, dopo aver aperto, a monte, un dibattito su vantaggi e svantaggi e in quali occasioni sia opportuno, utile, usarle.

Distinguiamo dunque
valutazione, che riguarda non soltanto il livello di apprendimento degli alunni, ma necessariamente anche tutte le variabili che intercorrono per la sua acquisizione, in primo luogo le modalità e gli strumenti che il docente è in grado di mettere in atto ed utilizza quindi controllo del processo di apprendimento/ insegnamento.
verifica, parte integrante della programmazione e della valutazione, strumento che comprende tutte le modalità che i docenti ritengono idonee per registrare i risultati degli apprendimenti effettivamente conseguiti dagli alunni
I momenti di verifica diventano formativi se rientrano nell'attività didattica quotidiana del docente e sono utilizzati per rendere via via consapevoli gli alunni dei livelli di apprendimento conseguiti.
Ritroviamo la distinzione di cui sopra nei termini coniati dal pamphlet Assessement for learning Beyond the black box redatto dal gruppo inglese per la riforma della valutazione '99:

Valutazione **per l'**apprendimento e Valutazione **dell'**apprendimento. *
Per il concetto di valutazione per l'apprendimento sono dati come tratti fondamentali:

- è incorporata nella visione dell'insegnamento e dell'apprendimento
- richiede di condividere con gli studenti i traguardi che si vogliono raggiungere
- aiuta gli studenti a riconoscere gli standard a cui mirano
- coinvolge gli studenti in forme di autovalutazione
- fornisce agli studenti i necessari feed back per individuare quali siano i passi successivi da fare e come farli
- coinvolge sia insegnanti che studenti nell'analisi e nella riflessione sui dati della valutazione

---

* "Insegnanti professionisti" Un modello di insegnamento efficace *A. Cenerini e R. Drago* - Erickson 2001

- è sostenuta dalla convinzione che ciascuno studente può migliorare:_sono chiaramente esplicitate le modalità per realizzarlo

Con le domande chiave per l'insegnante:

◊ sa riconoscere ciò che gli alunni non hanno capito e lo chiarisce?

◊ cura che sia verificabile la correzione degli elaborati? La utilizza in modo sistematico per la comprensione delle difficoltà?

◊ incoraggia gli allievi?

◊ rende gli studenti consapevoli degli errori e fornisce strumenti/attività per non ripeterli?

◊ prevede occasioni per migliorare, realmente accessibili per gli studenti?

La valutazione dell'apprendimento

Una valutazione incorporata nella visione dell'insegnamento/apprendimento che prende avvio nel momento della progettazione delle lezioni quando i docenti cercano di prevedere concetti e attività che saranno problematici per gli studenti individuando:

- Metodi e tecniche diversificate di verifica
- Regolare e rapida la correzione di prove
- Trasparenti e chiari i criteri di valutazione
- Modalità reali per un tempestivo recupero

Pensare alla valutazione contestualmente alla progettazione dell'intervento didattico significa, in particolare, individuati gli obiettivi, pensare a come verificare *specificamente* se sono stati raggiunti: gli obiettivi sono sterili senza una verifica mirata.

La struttura, la tipologia e le consegne delle prove di verifica, devono dunque essere elaborate con la funzione di :

- accertare il livello di apprendimento raggiunto,
- misurare tale livello quantificandolo
- e formulare un giudizio.

La dinamica tra le due valutazioni*

Incrociando" i risultati delle prove periodiche di accertamento degli apprendimenti con le informazioni raccolte nel corso delle attività svolte, sarà possibile individuare interventi utili per superare talune cause di insuccesso e per utilizzare al meglio le risorse degli allievi ai fini dello sviluppo delle loro capacità di far fronte con successo ai compiti proposti.

Attenzione, nei processi valutativi:

- alla *coerenza nelle richieste di prestazioni nelle fasi dell'acquisizione e dell'accertamento*
- alle distorsioni del percorso formativo che possono derivare dalle scelte su "cosa valutare" effettuate nella predisposizione delle prove valutative. *Spesso le competenze più facili da accertare in campo matematico non sono le più importanti*, d'altra parte spesso succede che le competenze che sono oggetto di accertamento *diventino le più importanti per insegnanti e allievi.*

---

* UMI 2003

- sopravvalutazione del valore predittivo delle prove valutative, soprattutto quando non accompagnate da una analisi attenta del percorso formativo degli allievi. Sia nel caso di successo che (e ancora di più) nel caso di insuccesso.
- Concludo con uno stralcio di una prova di verifica, tratto dal dossier delle prove di valutazione, inviate dai docenti, che si commenta da sé.

----

6. Un rettangolo di base b ed altezza h viene modificato aggiungendo 6 cm alla base e togliendo 2 cm all'altezza. Di quanto differisce il nuovo perimetro da quello precedente?

7. Ti piacerebbe di più che "fare gli auguri alla tua insegnante" fosse condizione necessaria o condizione sufficiente per avere la sufficienza sulla pagella? Perché?

8. Considera un triangolo isoscele PQR, sia M il punto medio della base PQ. Traccia le distanze di M dai lati RP ed RQ. Dimostra che tali distanze sono congruenti.

"L'opera del matematico, come quella del pittore, del poeta o del musicista deve essere bella: le idee, come i colori, i suoni, le parole, devono combinarsi in maniera armoniosa."
Questo mi aspetto da voi.
BUON LAVORO

Riferimenti bibliografici

- "Una pagella per la scuola" "*N. Bottani e A. Cenerini*" Erickson 2003
- "Valutazione Autovalutazione Certificazione" M.Castoldi, P.Cattaneo, A.Di Falco, La Tecnica della Scuola 2000
- Ricerca Educativa Collana INValSI Sezione strumenti: R. Melchiorri - ADAS "Il laboratorio della valutazione, 1 Aspetti concettuali
- UMI 2003
- "Insegnanti professionisti" Un modello di insegnamento efficace *A. Cenerini e R. Drago* - Erickson 2001

COMUNICAZIONI

QUAND'È CHE DUE COSE SONO LA STESSA COSA? (UN'ATTIVITÀ SPERIMENTALE NELL'AMBITO DELLA VALUTAZIONE DI COMPETENZE TRASVERSALI)

M. Ajello
(L.S. "Cannizzaro", Palermo)

L'esperienza è stata progettata, qualche anno fa, all'interno di un lavoro sulle competenze trasversali, realizzato in collaborazione con colleghi di altre discipline, per il C.I.D.I.(Centro di iniziativa democratica degli insegnanti) di Palermo. È stata sperimentata in due classi II del Liceo scientifico Cannizzaro di Palermo dalla Prof.ssa Ajello e questa comunicazione ha cercato di riproporre brevemente i momenti più significativi del lavoro in classe.

Il contributo di una disciplina come la matematica, nel curricolo di un alunno, non può non tenere conto dell'esigenza formativa di fornire anche competenze trasversali di tipo logico che consentano, ai futuri cittadini, di cogliere simultaneamente diversi aspetti della realtà. Si è pensato, in questo caso, per esempio, di allargare l'ambito di intervento disciplinare: l'ambito riguarda il significato che si può dare al concetto di uguaglianza.
La valenza trasversale di un percorso scolastico può anche manifestarsi in una attività, come quella riportata, dove si vede chiaramente che i modi di pensare della matematica fanno da supporto a un pensiero creativo e critico allo stesso tempo.
L'analisi degli elaborati prodotti degli studenti (singoli e di gruppo), attraverso una opportuna griglia di descrittori, ha contribuito a dare certificazioni del tipo: "l'alunno è in grado di utilizzare criteri di confronto" oppure "l'alunno è in grado di definire i caratteri di una questione", ecc..

Il lavoro prende spunto dal seguente brano:
"...Portando questa indagine sulla identità a un livello ancora più alto di astrazione, potremmo chiederci: <<Che cosa c'è di 'identico' in tutti i disegni di Escher?>> Sarebbe assolutamente ridicolo cercare di farli corrispondere tra loro pezzo per pezzo. La cosa sorprendente è che anche una parte piccolissima di un disegno di Escher o di un pezzo di Bach è sufficiente a rivelarne l'autore. Proprio come all'interno di ogni minuscolo pezzetto di pesce è contenuto il suo DNA, così come ogni piccolo frammento di un'opera porta la 'firma' del suo autore. Non sappiamo come chiamarla se non 'stile', una parola vaga e sfuggente. Continuiamo a scontrarci con il problema dell'uguale nel diverso e con la domanda
quand'è che due cose sono la stessa cosa?"

(Douglas R. Hofstadter - Gödel Escher e Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante - Adelphi)

È stata posta la domanda agli studenti invitandoli a discutere in piccoli gruppi per circa venti minuti e poi a riportare per iscritto le loro conclusioni.
Si propongono di seguito alcune risposte:

Due cose sono la stessa cosa quando anche se si presentano sotto forme diverse hanno "un'unica essenza". Quindi due cose possono essere la stessa cosa, sotto un'apparenza ingannevole anche quando appaiono con sfaccettatura varie differenti...Giulia

Questa domanda dovrebbe esser esaminata in vari campi perché ci sono risposte diverse in base alle cose a cui si fa riferimento. Per esempio per due gemelli i geni, il sangue ed altri elementi dell'organismo possono essere proprio uguali, ma dal punto di vista psicologico e del comportamento possono essere completamente diversi. Per due oggetti invece, possono essere identici e quindi diciamo che sono la stessa cosa ma sono pur sempre "due" oggetti e non lo stesso. Per la matematica il concetto è ancora diverso. Infatti due numeri, per esempio 1/2 e 2/4 sono lo stesso numero e quindi sono la stessa cosa anche se sono due segni diversi. Anche due equazioni possono essere la stessa equazione come $y=2x^2+4x+6$ e $2y=4x^2+8x+12$. Anche due problemi dal punto di vista della soluzione possono essere la stessa cosa, ma non dal punto di vista della formulazione...Gianluca

Per me tutti gli oggetti si possono dividere in classi di oggetti simili tra di loro. Ad esempio tutti gli esseri viventi appartengono ad una classe che a sua volta si divide in altre classi, quella dei vegetali e quella degli animali e ognuna si divide in altre. Quindi ad un oggetto si associano altri con il quali hanno caratteristiche in comune, ma più sono le caratteristiche in comune e meno sono gli oggetti che stanno in una stessa classe...Marianna

Una persona quando pensa a questa domanda risponde "nel caso in cui sono uguali", ma questo non copre tutte le circostanze relative al quesito. In matematica, per esempio, i numeri 5/10 e 1/2 come numeri sono la stessa cosa ma non come aspetto. Per vedere se due cose sono la stessa cosa bisogna conoscere bene tutte le proprietà e a volte si vedranno cose che prima non si erano viste...Corrado

Due cose possono essere la stessa cosa oppure non esserlo, dipende dal punto di vista dal quale le osserviamo e le confrontiamo. Sicuramente due cose non saranno mai identiche ma nemmeno perfettamente diseguali, possiamo trovare sempre qualche cosa in comune e molte altre no...Eleonora.

Per poter dire se due cose sono la stessa cosa, bisogna poterle confrontare e quindi devono appartenere ad uno stesso insieme dove è definita una relazione per il confronto. Le relazioni di equivalenza studiate in matematica ci possono dare un criterio per dire che due cose sono la stessa cosa: se appartengono alla stessa classe di equivalenza si possono considerare la stessa cosa, almeno rispetto alle proprietà collegate con il loro essere equivalenti e quindi rispetto alla relazione di equivalenza in questione...Maria

Il lavoro in classe, dopo la lettura di tutte le risposte, è andato avanti con la formulazione di "domande sensate", ovvero quelle, selezionate fra tante rispetto alle quali gli studenti si sentivano in grado di dare risposte "sensate". Qui di seguito alcune di queste:
Quand'è che due numeri sono lo stesso numero? Quand'è che due teoremi sono lo stesso teorema?
Quand'è che due equazioni sono la stessa equazione? Quand'è che figure sono la stessa figura?
Quand'è che due concetti sono lo stesso concetto? Quand'è che due parole sono la stessa

parola?
Quand'è che due idee sono la stessa idea? Quand'è che due problemi sono lo stesso problema?
Quand'è che due melodie sono la stessa melodia? Quand'è che due storie sono la stessa storia?
Quand'è che due notizie sono la stessa notizia? Quand'è che due film sono la stesso film?

Successivamente si è dato spazio alla discussione che è stata molto accesa e si ritornati ai lavori di gruppo per affrontare alcuni percorsi, in parte già noti e in parti tutti da esplorare. I tre itinerari che si sono rivelati di maggiore interesse sono stati quelli che hanno preso spunto rispettivamente dalle domande: "Quand'è che due numeri sono lo stesso numero?", "Quand'è che due ombre sono la stessa ombra?", " Quand'è che due film sono la stesso film?"

L'attività è stata condotta seguendo uno schema di problem solving che riporta per ogni fase le corrispondenti abilità che lo studente mette in campo in quel momento (per esempio, nell'analisi della situazione iniziale, mentre gli strumenti utilizzati sono: la raccolta di informazioni, l'analisi di possibilità e vincoli, il confronto con altre situazioni; le abilità osservabili negli studenti sono: giudicare la credibilità di un fonte, porre domande pertinenti, valutare i dati osservativi raccolti, utilizzare criteri di confronto).

ALLA RICERCA DELL'OBIETTIVITÀ NEL VALUTARE IN MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA

Rosa Laura Ancona, Antonella Montone
(Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Bari)

Introduzione

Questa ricerca si propone di conoscere , analizzare e approfondire l'esistente confrontarlo con il quadro teorico della letteratura, per orientare ricerche future finalizzate a migliorare la qualità della valutazione in matematica.
In maniera diversa e da alcuni anni ci siamo occupati di valutazione in Matematica sia nel lavoro con gli insegnanti del nostro nucleo di ricerca sia con gli specializzandi Ssis Puglia, attraverso la lettura delle relazioni finali di tirocinio e i laboratori di didattica della Matematica.

Quadro teorico

Nel consultare la letteratura esistente ci è parso interessante fare una distinzione tra i due termini inglesi *assessment* e *evaluation.* (Niss,1993) In Italia utilizziamo sempre indistintamente il termine valutazione, anche se sarebbe più opportuno distinguere tra il giudizio delle capacità matematiche, in riferimento al rendimento, al raggiungimento di determinati obiettivi, all'esecuzione di compiti da parte dello studente che in tal caso è il soggetto della valutazione (*assessment*), e il giudizio del sistema educativo e istruzionale nel quale l'insegnamento della matematica entra a far parte: il termine *evaluation* si riferisce a varie componenti del sistema quali: I programmi, i curricula, l'insegnante, il lavoro dell'insegnante, la scuola, il distretto scolastico (inteso come territorio e ambiente) ecc. (Niss,1993)
Un altro aspetto su cui la letteratura si sofferma è legato al gap sviluppatosi negli ultimi due decenni tra le evolute modalità di insegnamento - apprendimento della matematica e le tradizionali pratiche di valutazione. Al livello internazionale (OCSE, PISA,2001) il suggerimento è quello di spostare l'attenzione dalla valutazione di conoscenze e abilità alla valutazione delle competenze intese come "capacità di attivare e coordinare le proprie risorse interne e valorizzare quelle esterne disponibili al fine di portare a termine in maniera valida ed efficace un compito, o una classe di compiti, socialmente rilevante".
Fonti diverse, Ministero, Invalsi, singole scuole, in maniera diversa tentano di fornire criteri oggettivi di valutazione a cui riferirsi. Ma ciò non diminuisce il cosiddetto "disagio valutativo" degli insegnanti, in quanto questi strumenti non fanno emergere la qualità e le modalità diverse di apprendimento, difficilmente misurabili: gli alunni "reali" mostrano sempre stili di apprendimenti diversi, competenze non omogenee provenienti da storie personali e ambientali diverse e tutto ciò fa emergere quella necessità di interventi personalizzati che sfuggono all'uso di tecniche di valutazione anche molto raffinate. Anche recenti lavori mettono in evidenza tale disagio e il suggerimento che si fornisce e quello di utilizzare un curricolo per soglie di padronanza (Giambellucca , Letta,2005).
Alla luce di quanto detto si può concludere che i soggetti in gioco non sono due come si può pensare ma tre: lo studente, l'insegnante, il sistema, legati a nostro parere da una sorta di "contratto valutativo". Inoltre utilizzando la metafora di Niss si può pensare ad una modalità di valutazione come fosse un vettore con un insieme di componenti quali: il soggetto della valutazione, l'oggetto della valutazione; gli items, le occasioni di

valutazione, le procedure e le circostanze, il giudizio e la registrazione, il rendere noti i risultati.

La ricerca

Analizzando le relazioni del tirocinio e i lavori prodotti all'interno del laboratorio di Didattica della Matematica della Ssis Puglia e guardando le griglie presenti in tali lavori e più usate sul nostro territorio abbiamo ipotizzato che si possano avere valutazioni diverse valutando con griglie diverse gli stessi compiti e valutazioni diverse valutando con la stessa griglia in scuole diverse, tutto ciò facendo riferimento alle tre componenti di cui si parlava e alle componenti del vettore di Niss. L'insegnante infatti può essere condizionato dalla propria formazione matematica, dall'idea di valutazione legata sia alla sua esperienza di studente sia all'ambiente scolastico in cui opera, sia dall'ambiente sociale in cui è inserito nonché dal rapporto con lo studente.

La ricerca è stata realizzata in sei classi di un liceo scientifico, due di un altro liceo scientifico e una di liceo classico in due località diverse della nostra regione, coinvolgendo sei insegnanti (tre e tre).

In una prima fase gli insegnanti hanno corretto alcuni elaborati dei propri alunni e poi nell'ambito della stessa scuola hanno corretto gli elaborati degli alunni degli altri insegnanti. Successivamente c'è stato lo scambio tra le due scuole con relativa correzione. Nonostante l'uso di stesse griglie e di griglie differenti da scuola a scuola ci si accorge spesso del tentativo degli insegnanti di sfuggire alla griglia e di seguire un'idea di valutazione piuttosto tradizionale. Abbiamo notato, in una discussione finale con gli insegnanti quanto inoltre la valutazione sia influenzata dalla "conoscenza " dell'allievo e quanto ancora vadano di moda i mezzi voti o i "+ e –".

Conclusioni

Innanzitutto possiamo dire che ha senso utilizzare le griglie se queste si inseriscono in altri strumenti quali il portfolio e il pof, e non restino chiuse in se. Da un altro lato abbiamo notato che le griglie spesso sono un misto tra descrittori e indicatori "grezzi" e non operazionalizzati.

Infine abbiamo verificato che in molti casi gli insegnanti fanno appello alla propria esperienza per attribuire un voto che poi viene distribuito nella griglia.

- M. Niss, Investigation into Assessment in Mathematics Education, p.p.1-30, 1993 Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands.
- G. Giambelluca, L. Letta, Valutazione degli apprendimenti: analisi di una prova di verifica, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 28B N.3 Giugno 2005.
- V. Scalera, Il progetto OCSE/PISA-Cc. In Istituto Nazionale per la valutazione del sistema dell'istruzione (Cede), Ricerche valutative internazionali 2000, Milano, F Angeli, 2001.

LA FESTA DELLA MATEMATICA NELL'ANNO MONDIALE DELLA FISICA

Provincia di Torino Progetto Science center
Prof. Andrea Audrito (SIS Piemonte LS Curie Pinerolo (To)
Prof. Giovanni Cornacchia Itis Pininfarina Moncalieri (To)
Prof. Tommaso Marino (SIS Piemonte LS Curie Grugliasco (To)
Prof. Lorenzo Orio (SIS Piemonte LS Copernico Torino)
Prof. Luigi Pezzini (SIS Piemonte LS Copernico Torino)

Il 2005 è stato celebrato, su indicazione dell'Unesco, l'anno mondiale della fisica. In tutto il pianeta è stato celebrato in vario modo il centenario della pubblicazione dei lavori di Einstein. A Torino, insieme alle varie manifestazioni proposte alla scuola e alla città, si è voluto, per la seconda edizione, celebrare la festa della matematica.
Questa iniziativa, nata per affiancare la gara olimpica individuale, intende essere un momento di diffusione della cultura scientifica attraverso una giornata di "festa" per avvicinare non solo gli studenti, ma anche tutti coloro che hanno un interesse verso la matematica.
Nel corso dell'anno mondiale della fisica si è pertanto voluto creare "un ponte" tra le due discipline.

FESTA DELLA MATEMATICA

La gara di matematica si è svolta nelle due sezioni: la prima era riservata alle scuole, ciascuna delle quali ha iscritto sette studenti di classi diverse per favorire il ricambio e la crescita degli studenti dei primi anni. Alla seconda sezione, riservata al pubblico, si sono iscritti tutti coloro che hanno voluto cimentarsi per gioco o per competizione con i quesiti preparati da studenti della SIS in collaborazione con docenti della scuola superiore; i quesiti destinati alla gara ufficiale a squadre sono pervenuti, uguali a quelli delle altre sedi in tutta Italia, dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova. A questa seconda sezione hanno partecipato docenti che hanno composto squadre con i loro allievi creando così un'atmosfera di collaborazione e di festa che ha segnato positivamente il rapporto docente-allievo. In quest'ambito iniziative di questo tipo rafforzano il rapporto di collaborazione e di stima reciproca tra lo studente e il docente messi di fronte a situazioni da risolvere partendo da una condizione di collaborazione e non di "scontro" o di contrapposizione tra lo studente e l'insegnante.
Il regolamento della gara ricalca quello della gara ufficiale a squadre e comprende la possibilità di avere un problema "jolly" su cui puntare per avere, in caso di soluzione corretta, un maggiore punteggio. La classifica viene elaborata in tempo reale e questo fornisce alla gara una buona dose di divertimento. Il luogo di svolgimento dell'intera giornata è l'area dell'8 Gallery, un ex stabilimento di produzione di automobili riconvertito in un centro commerciale.

LA GIORNATA DI FESTA

La festa della matematica, ha previsto vari momenti: Al mattino due iniziative: una conferenza (in questa edizione si è trattato il tema "geometrie non euclidee") a cui ha fatto seguito una conferenza-spettacolo teatrale. Il tema scelto ha voluto essere uno stimolo per gli studenti di tutte le classi presenti alla festa. L'intento dell'iniziativa è consistito nella coniugazione di aspetti divulgativi e trattazione di temi legati alla

didattica delle classi che hanno partecipato. Contemporaneamente era stata allestita una mostra sui dieci esperimenti più belli di fisica.
L'iniziativa ha avuto un notevole successo, ha visto la partecipazione di 22 istituti alla gara olimpica a squadre ed oltre 200 persone alla gara del pubblico. Ha coinvolto quindi circa 400 persone per un'intera giornata, dalle 9 alle 18.
Nel pomeriggio si sono cimentati nelle due competizioni, che si sono concluse con la premiazione delle squadre che avevano ottenuto i punteggi migliori. Le squadre migliori hanno partecipato alla gara nazionale a Cesenatico.
I riscontri sono stati estremamente positivi, l'iniziativa è stata apprezzata, perché ha offerto agli studenti che amano la matematica l'opportunità di "divertirsi" cimentandosi con questa disciplina, in quesiti non di routine, con conferenze e spettacoli su argomenti non tradizionali.
L'informazione è circolata su alcuni giornali e televisioni locali.
Presso il liceo capofila Copernico è stato successivamente organizzato un corso di allenamento della durata di 2 giorni per gli studenti della provincia che partecipavano alla competizione nazionale nella gara individuale e in quella a squadre. Per ragioni finanziarie ed organizzative il corso è stato unico per entrambe le competizioni, tenuto dagli ex olimpionici della provincia di Torino che attualmente studiano alla scuola normale di Pisa. I risultati infatti sono stati ottimi in entrambi gli anni.
Per l'informazione ai partecipanti e per consentire agli studenti di allenarsi e di consultare le prove degli anni precedenti, è stato allestito un sito Internet all'indirizzo www.festadellamatematica.bussola.it da dove si possono scaricare le prove con le soluzioni degli anni precedenti e si trovano tutte le iniziative legate alle iniziative degli anni successivi.

ESPERIMENTI DI FISICA
Nell'anno mondiale della fisica si è voluto valorizzare le tante iniziative che le scuole hanno avviato per celebrare l'evento. L'idea è nata dal presentare nella cornice della festa della matematica gli esperimenti e i laboratori che le scuole avevano realizzato, in alcuni casi nell'ambito delle settimane della cultura scientifica. Con un processo riconducibile alla peer education gli studenti si sono cimentati nella preparazione e all'allestimento degli esperimenti e successivamente alla loro spiegazione ai partecipanti alla festa che avevano prenotato questa attività. Ciò ha permesso agli studenti di cimentarsi nella spiegazione di idee, concetti, congetture in un ambito extra scolastico a contatto con studenti e/o con il pubblico che era interessato agli esperimenti proposti.

Riportiamo qui di seguito le iniziative (mostre-laboratori) presentati dalle scuole alla festa:

MOSTRE PROPOSTE DA LICEO "CURIE" DI PINEROLO
Laboratori: "La luce: da Tolomeo ad Einstein" - La rifrazione attraverso l'esperimento di Tolomeo - Teoria corpuscolare della luce - La teoria ondulatoria con l'esperimento della macchia di Poisson - La diffrazione tramite reticolo –La diffrazione tramite un CD con relativa stima del passo del CD e della capacità di memoria - La polarizzazione della luce - Luce ed energia: Esperimento di Herschel, effetto fotoelettrico –
Mostra – Laboratorio: Solidi Platonici ed Archimedei - Solidi platonici - Il teorema di Eulero - La dualità - Gli archimedei - I deltaedri - I solidi kepleriani.

In particolare si è trattato del modo in cui si generano questi solidi, delle loro simmetrie, delle relazioni tra loro e dell'importanza storica. Si porteranno degli esempi di come utilizzare l'origami per lo studio della geometria.

Mostra – Laboratorio: "Strumenti di calcolo nella storia" - Dall'abaco romano all'algoritmo - La contesa tra abacisti e algoristi: esempi elementari di algoritmi per le moltiplicazioni- Il '500 e i primi strumenti semiautomatici: bastoncini di Nepero - L'invenzione dei logaritmi - La pascalina; I regolidi Genaille - Lucas. Il piccolo moltiplicatore di Leon Bollee - La Brunswiga, e le prime macchine a moltiplicazione diretta. I regoli calcolatori

Laboratorio: "Le macchine" - Le macchine semplici alla luce del principio di conservazione dell'energia: Carrucola mobile, paranco, verricello e torchio idraulico - Il mulino ad acqua e le prime riflessioni sul rendimento - Le prime macchine termiche: Le macchine di Savery, di Newcomen e di Watt - Il motore di Stirling - Il motore termomagnetico Tesla.

INIZIATIVE PROPOSTE DAL LICEO "MORO" DI RIVAROLO CANAVESE

Laboratorio Mostra: I frattali - Mostra di frattali nel piano complesso

Laboratorio Mostra: "Il moto browniano e il caos" - Mostra e simulazioni per spiegare il comportamento ordinato di fenomeni naturali caotici, con riferimento al moto browniano.

Laboratorio Mostra: "Gli ovali di Cassini" – Le coordinate polari per scoprire una miriade di belle immagini nascoste negli ovali di Cassini - Mostra sugli aspetti teorico-matematici e costruzione di curve con Cabrì e con strumenti artigianali.

Laboratorio: "Effetto fotoelettrico" Dai primi esperimenti (Hertz, Hallwachs, Lenard...) alle applicazioni odierne.

Laboratorio: "Marconi e le onde" - Prime tappe del lavoro di Marconi sulla trasmissione delle onde, che stanno alla base della telefonia cellulare e della trasmissione di onde elettromagnetiche - Trasmettitore e ricevitore secondo i primi brevetti.

INIZIATIVE PROPOSTE DAL LICEO "COPERNICO" DI TORINO

Laboratorio: "Vedo e non sento, sento e non vedo" - Giochi su suoni e loro fenomeni - Le scale musicali

Laboratorio: "33 modi per dimostrare il teorema di Pitagora"

INIZIATIVE PROPOSTE DAL LICEO "SEGRE'" DI TORINO

Mostra: "Il tempo e gli orologi" - Una mostra per descrivere i vari modi per misurate il tempo nel passare dei secoli.

FOTOGRAFIA DIGITALE: LA MATEMATICA HA SOSTITUITO LA CAMERA OSCURA

Primo Brandi
(Dipartimento di Matematica e Informatica,Università degli Studi di Perugia
e-mail: mateas@unipg.it)

A circa un secolo e mazzo dalla sua invenzione la fotografia sembra vivere un momento di vera e propria rinascita. Un numero crescente di appassionati sta infatti scoprendo le potenzialità della fotografia digitale, anche grazie ai numerosi software di gestione delle immagini che sono oggi disponibili. Le nuove generazioni spesso hanno visto solo "in esposizione" una macchina fotografica tradizionale, mentre sono "bombardati" da immagini video.

Le potenzialità offerte dal nuovo mezzo sono sorprendenti e non necessitano di esperti che lavorino in camera oscura con sostanze chimiche di non facile gestione, bensì possono essere scoperte e utilizzate da chiunque, ... con più consapevolezza e in modo ottimale se si conosce un po' di matematica!

Il supporto delle immagini nella fotografia tradizionale è di tipo chimico: carte, lastre di vetro o pellicole, ricoperte di gelatina contenente in sospensione granuli di sali d'argento. Questi sali sono sensibili alla luce, che modifica le loro proprietà e rende possibile attraverso un procedimento chimico (lo sviluppo) far comparire delle immagini sul supporto stesso. La nuova tecnica è radicalmente diversa e si basa su un processo di discretizzazione dell'immagine e sulla codifica e memorizzazione in codici binari.

Nell'ambito del *Progetto Innovamatica*[1] è stato sperimentato – in collaborazione con un gruppo di insegnanti di istituti superiori – il percorso *La matematica nascosta dietro le immagini digitali*, rivolto ai ragazzi di 14-19 anni.

L'esperienza, in linea con le tematiche dell'indagine OCSE-PISA, ha fornito un'ottima occasione per stimolare i ragazzi ad utilizzare le conoscenze curriculari in un ambito insolito, fortemente inserito nel loro quotidiano.

L'argomento si inserisce in un più vasto progetto di innovazione didattica promosso da *Innovamatica* e basato sulla educazione alla modellizzazione, che intende creare condizioni per stimolare i ragazzi ad utilizzare le conoscenze e le competenze matematiche acquisite a scuola, per orientarsi nella moderna società della conoscenza e gestire le proprie scelte in modo consapevole a attivo.

Nel corso della comunicazione, oltre ad illustrare i punti salienti del percorso, si è tracciato un bilancio dell'esperienza, anche sulla base delle schede di gradimento compilate dai partecipanti (docenti e studenti).

Per esigenze di spazio, ci limitiamo qui a riportiamo uno schema che mostra alcune delle interconnessioni fra fotografia digitale e matematica.

---

[1] Il Progetto *Innovamatica* (Innovazione&Matematica) del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Perugia, opera da circa venti anni promovendo ricerca e consulenza scientifica, innovazione e sperimentazione didattica, formazione e divulga-zione con l'uso di nuove tecnologie. Obiettivo principale del Progetto è promuovere una cultura matematica diffusa e "immersa" nel mondo reale, attraverso una educazione alla modellizzazione per la formazione e la divulgazione scientifica. Indirizzo internet del Progetto: www.innovamatica.it

Tema - modello - contenuti matematici di base coinvolti		
Acquisizione della immagine		
Dall'immagine reale alla immagine digitale	Processo di discretizzazione Risoluzione e settaggio Confronto fra vari dispositivi	Sistemi di riferimento Scale di misura Commutazione di scala
Memorizzazione in chiaro della immagine		
Traduzione della immagine digitale in linguaggio informatico	Codifica della informazione Dimensione di un'immagine	Corrispondenza biunivoca Rappresentazione *binaria* Matrici Scale di misura
Memorizzazione criptata		
Formati standard delle immagini digitali	Algoritmi di compressione Qualità di un'immagine	Processi iterativi
Visualizzazione della immagine a video		
Immagine in bianco-nero, nella scala dei grigi, a colori	Rappresentazione cromatica Sistema RGB	Sistemi di riferimento 3D Coordinate facce, spigoli e diagonali in un cubo 3D
Manipolazione della immagine		
Fotoritocco Effetti speciali	Zoom-in, riduzione a icona Rotazione, effetto *mirror* Zoom-out, interpolazione lineare o mediante *spline* Collage di immagini	Media aritmetica e pesata Matrice trasposta Trasformazioni geometriche Equazione retta e parabola Raccordo delle tangenti
Visualizzazione della immagine su carta		
Stampa in bianco e nero, nella scala dei grigi, a colori	Rappresentazione cromatica Sistemi CMY e CMYK Tecniche di dithering	Trasformazioni di sistemi di riferimento 3D Curve frattali

Referenze

- P.Brandi-A.Salvadori, *Modelli Matematici Elementari,* B.Mondatori Ed. (2004) pgg. 207;
- P.Brandi-A.Salvadori, *La matematica nascosta dietro le immagini digitali*, Atti Convegno Nazionale Mathesis Anzio-Nettuno (2004), pgg.468-480
- P.Brandi-A.Salvadori, *La matematica delle immagini digitali*, preprint
- C.Salvadori, *Acquisizione di immagini informa digitale*, Dispensa del Corso "Acquisizione di immagini", Master in Esperto nella promozione del territorio attraverso il Web, Università di Perugia (2002), pgg. 105

MATEMATICA ED ECOLOGIA: TRA FORMA E FUNZIONE UN'ESPERIENZA DI *DIDATTICA FUSIONISTA* NELL'AMBITO DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

Giordano Bruno[1], Caterina Lorenzi[2]

Lo spunto per questa comunicazione è nato nell'ambito di un'attività di laboratorio comune ai nostri corsi di Matematica e Didattica della matematica e di Ecologia, per il C.d. L. in Scienze della Formazione Primaria dell'Università Roma Tre. Viene presentata un'esperienza di *didattica fusionista*, costruita a partire dalla proiezione di immagini del mondo naturale. Lo scopo è stato quello di far scoprire direttamente agli studenti proprietà e aspetti che possano interessarli, incuriosirli, indurli a formulare domande, in modo da poter introdurre concetti sia matematici che ecologici in maniera stimolante e non artificiosa. Le immagini hanno riguardato oggetti naturali o meglio *sistemi naturali* rappresentativi della gerarchia biologica ed ecologica del mondo naturale: così individui-pianta e individui-animale, ma anche popolazioni biologiche, comunità biologiche ed ecosistemi, hanno fornito interessanti spunti di riflessione sulle complesse relazioni esistenti tra morfologie, processi biologici e processi ecologici in natura. E' da rilevare come tutto lo spirito degli incontri sia stato di *natura sistemica*, nel senso che si è cercato il più possibile di guardare alle proprietà espresse dai sistemi naturali esaminati, in chiave di proprietà *emergenti*, cioè aventi la caratteristica di essere tali solo per l'intero organismo o per i gruppi di organismi e non per i suoi componenti. Tale approccio nella comunicazione del sapere, sostenuto da vari autori quali Edgar Morin, presenta il grande vantaggio di indurre in colui che apprende *l'atteggiamento dell'osservatore spinto a formulare un modello nuovo*. Questo modo di procedere ci è apparso tanto più significativo proprio in quanto rivolto a futuri maestri, che potranno in tal modo influire positivamente nello sviluppo della costruzione di una forma mentis nei bambini, relativamente alle conoscenze scientifiche. In particolare, per quanto riguarda la matematica, la visione sistemica permette di concentrarsi su processi cognitivi basati sull'*induzione* del *pensare matematicamente*, sull'indurre il *riconoscimento e la costruzione* di matematica e quindi non solo sull'*opportunità* di pensare matematicamente, ma sulla *continuità cognitiva* esistente tra la rilevazione e il pensare matematicamente. E' importante sottolineare la distanza esistente tra *l'erogare* e *l'indurre* il pensiero matematico e tra la presunta *rigidità* della matematica e la *rigorosità* propria della matematica; quest'ultima, anziché essere imposta a priori, può essere motivata attraverso azioni didattiche mirate, e quindi accettata e condivisa dagli studenti.

Non possiamo qui riprodurre le immagini attraverso le quali abbiamo sviluppato il nostro laboratorio, ma possiamo accennare ai temi trattati.

Per prima cosa è stata presentata la foto di una colonia di otarie su una spiaggia della costa sud-occidentale dell'Africa e sono stati individuati e discussi con gli studenti gli aspetti biologici ed ecologici, quali il comportamento della specie e la dinamica di popolazione. Insieme ad essi sono emersi quelli matematici: la numerosità della

---

[1] Docente di Matematica e Didattica della Matematica, C.L. in Scienze della Formazione Primaria, Università di Roma Tre

[2] Docente di Ecologia, C.L. in Scienze della Formazione Primaria, Università di Roma Tre

popolazione e come misurarla, stime qualitative e quantitative, effetti topologici relativi alle stime. Da tutto ciò ne è nato un approfondimento del concetto di misura.

Una foto a maggiore ingrandimento ha poi mostrato la presenza nella colonia di uno sciacallo, per cui dal punto di vista ecologico è stato trattato il tema delle relazioni interspecifiche ed in particolare il rapporto preda-predatore. Questi hanno dato luogo alla necessità di introdurre i concetti matematici di relazione e di modello matematico, per ottenere una descrizione rigorosa del sistema oggetto di studio. Si è potuto così introdurre il modello di Lotka-Volterra, ragionando anche sui suoi limiti. E si è anche riflettuto sui concetti di probabilità e previsione, sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo.
Si è passati poi ad una foto di un cucciolo di otaria, studiandone la morfologia e soffermandoci sulle problematiche energetiche quali: assunzione di cibo, dispendio energetico dei processi vitali, perdita e guadagno di calore, naturalmente collegabili al comportamento animale (sono animali che amano oziare su spiagge possibilmente assolate), alle cure parentali (i cuccioli vengono nutriti con un latte altamente energetico) ma anche al rapporto superficie-volume di un corpo.
Come intermezzo spassoso, è stata proposta un'immagine di pinguini ed è stato chiesto come mai i loro movimenti siano così buffi. Una risposta accettabile è sembrata quella che attribuiva la goffaggine al ... baricentro basso!
Ancora, è stata esaminata la foto di una sogliola, osservandone la morfologia anche in funzione dell'adattamento al fondale marino cui l'individuo-sogliola giunge dopo aver compiuto drammatiche trasformazioni imposte dal ciclo biologico; da qui facilmente si è giunti a trattare matematicamente il problema dell'ottimizzazione della forma e del passaggio da un aspetto tridimensionale ad uno bidimensionale, con i dovuti riferimenti a Flatlandia.
Ci si è poi trasferiti all'esame del mondo vegetale. Si sono esaminati immagini di Dente di leone (*Taraxacum officinale*) provvisto di pappo (comunemente chiamato soffione): dello stelo è stata evidenziata la linearità come via più breve per raggiungere la luce e quindi percorso minimo per unire due punti. Nel soffione si è riconosciuta la struttura di trasporto di un insieme di semi, formata da elementi tutti simili, ad ombrello, identificando nella forma sferica, la più adatta a contenere il massimo numero di semi a parità di superficie occupata, e nella forma ad ombrello la più adatta a volare. L'immagine invece di una sezione trasversale del soffione ha consentito di osservare e studiare le tassellature del piano, le forme a spirale, e di compiere i collegamenti con la successione di Fibonacci e la sezione aurea. Infine, le foto di un caprifoglio (*Lonicera caprifolium*) hanno permesso di considerare il suggestivo adattamento di una pianta in grado di vivere in un ambiente complessivamente poco illuminato. Il caprifoglio è infatti un arbusto che, dal folto della vegetazione boschiva, protrude rami lunghi e sottili verso l'alto e verso l'esterno del bosco con foglie disposte ad elica per evitare l'auto ombreggiamento.
In conclusione, l'esperienza metodologica fatta ci è sembrata riuscita, nel senso indicato dall'ipotesi di lavoro formulata. In particolare, possiamo affermare che il nostro contributo didattico non è consistito nel trasmettere informazioni e soluzioni prestabilite, ma nel sollecitare una costruzione spontanea di conoscenza.

Riferimenti Bibliografici

1. G. Bruno, G. Minati, *Conoscere la sistemica attraverso la matematica*, Atti Congresso Nazionale Mathesis, Anzio - Nettuno, 18-21 Novembre 2004.
2. I. Stewart, *L'altro segreto della vita*, Longanesi & C., Milano, 2002.
3. C. R. Townsend, J. L. Harper, M. Begon, *L'essenziale di ecologia*, Zanichelli, Bologna, 2001.

CHI È / NON È BRAVO IN MATEMATICA?

Carlo Dapueto
(Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova)

E' nota la complessità del problema della valutazione: entrano in gioco aspetti "psicologici" e "cognitivi" (motivazioni, tensioni, ... di fronte alle prestazioni "ad hoc" richieste, atteggiamenti, linguaggi, forme di ragionamento, competenze esperienziali e riflessive, ... che esse coinvolgono), "culturali" (contenuti e metodi disciplinari a cui vengono riferite le prove, interazioni con altri concetti interni ed esterni alla disciplina, riferimenti a contesti, interni ed esterni alla disciplina), "organizzativi" e di "formato" (tempi, modi, ... delle prestazioni, loro collocazione rispetto al complesso delle attività didattiche, quesiti a risposta aperta o chiusa, ...). Cambiando le modalità delle prestazioni e/o il soggetto che le analizza possono cambiare notevolmente le valutazioni sulle competenze dei soggetti esaminati.

Nell'intervento che qui sintetizzo (rinvio a: http://macosa.dima.unige.it per una versione estesa) mi sono soffermato su alcune mie esperienze di somministrazione ed analisi di "quiz" in contesti diversi, con l'obiettivo di confermare queste considerazioni e proporre alcune riflessioni su come interpretare gli esiti delle prestazioni e sugli obiettivi formativi che, nei vari livelli di istruzione, ci poniamo.

In particolare ho preso in considerazione alcune indagini sulle conoscenze/competenze all'ingresso dell'Università e della SSIS, gli esiti di alcune prove, nei diversi livelli scolastici, nell'ambito di "gare matematiche" (Kangourou ed altre), e un'indagine sulla preparazione matematico-scientifica svolta nel passato anno scolastico nelle classi finali delle scuole secondarie superiori della Liguria.

Alcuni esempi di prestazioni in quest'ultima indagine:
-di fronte a "se $x^2>9$ allora ..." solo il 24% individua in "$x>3$ o $x<-3$" il modo in cui completare l'enunciato; ben il 27% sceglie "$x>\pm3$" (le risposte tra cui scegliere erano 4);
-il 56% sceglie "sul corpo agisce una forza costante" come interpretazione del fatto che esso si stia muovendo a velocità costante su una superficie liscia orizzontale, e solo il 33% sceglie correttamente "la risultante delle forze che agiscono sul corpo è nulla" (le risposte tra cui scegliere erano 3);
-appena il 18%, di fronte a una etichetta di vino con l'indicazione della gradazione alcolica, disponendo dell'informazione della densità dell'alcol, sceglie correttamente, tra 4 valori abbastanza diversi, quale sia la quantità di alcol presente in un bicchiere da 200 ml; il 23% ha scelto 1.9 grammi!

Complessivamente emergono da parte degli alunni:
-la tendenza ad affidarsi a procedimenti memorizzati attraverso attività di tipo ripetitivo, senza valutare la sensatezza delle risposte individuate;
-lo studio mnemonico di formule, definizioni, principi, ... che non vengono acquisiti come artefatti cognitivi per affrontare situazioni problematiche, reali o interne alle discipline (lo studente che, anche se negli esercizi standard sa applicare "F= ma", mantiene l'idea pregalileiana che ci voglia una forza per mantenere un oggetto in

movimento);
-la difficoltà ad intrecciare argomenti di discipline diverse ed aree diverse della stessa disciplina (la difficoltà a "vedere" la parabola e la retta la cui reciproca collocazione corrisponde alla disequazione $x^2>9$).

Si tratta di difficoltà (che emergono, mutatis mutandis, anche tra i laureati) non tanto tecniche quanto di atteggiamento nei confronti delle discipline e dello studio in generale. Del resto gli alunni hanno motivato le loro prestazioni con argomentazioni di questo tipo:
- i "bravi" (che sono in genere andati molto peggio rispetto alle aspettative loro e dei loro docenti) si sono lamentati di non aver saputo prima quali erano gli argomenti dei quesiti in modo da potersi allenare;
- molti hanno lamentato la presenza di argomenti (come le disequazioni o il concetto di forza) studiati in anni precedenti, senza rendersi conto della loro implicita presenza negli argomenti affrontati nelle ultime classi;
- quasi tutti hanno lamentato il fatto che i quesiti non fossero separati per discipline, la presenza di domande che intrecciavano discipline diverse, il linguaggio diverso da quello dei problemi dei libri di testo, che spesso indirettamente suggerisce a quali procedimenti risolutivi ricorrere.

Dalle elaborazioni statistiche emerge che, in attività in cui l'impostazione è meno "scolastica", le correlazioni tra gli esiti dei diversi quesiti tendono a ridursi, emergono le differenze degli stili cognitivi, vengono valorizzate abilità e conoscenze spesso trascurate.

Le scarse immatricolazioni nei corsi universitari matematici e scientifici, e le non brillanti prestazioni di chi ad essi si iscrive, non sono forse da collegare agli atteggiamenti negativi nei confronti delle discipline scientifiche e di che cosa si intende per l'essere "bravi" in esse che le attività formative stesse favoriscono?

USO INTEGRATO DI MODELLI DINAMICI E CABRI A PROPOSITO DI TRIANGOLI

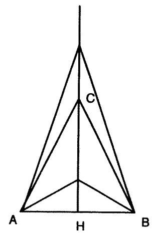
A.M. Facenda, P. Fulgenzi, G. Gabellini, F. Masi, J. Nardi, F. Paternoster
(Sezione Mathesis – Pesaro; e-mail: janna.nardi@libero.it)

La scarsa "appetibilità" della matematica è *solo* una questione di contenuti? Che ruolo gioca la metodologia nel determinare questa situazione?
Riteniamo che, nella maggior parte del tempo-scuola dedicato alla matematica, l'alunno sia "recettore" e non "produttore" di conoscenza, mentre la didattica della matematica, soprattutto nella scuola dell'obbligo, dovrebbe basarsi in prevalenza su esperienze percettive e pratiche. Coerentemente con queste convinzioni usiamo in classe, da tempo, in particolare nel campo della geometria, "modelli dinamici" (oggetti dotati di elementi mobili) e il software Cabri. Essi sono concretizzazioni dei prodotti del pensiero matematico e sono, contemporaneamente, mezzi per produrre concetti e sistemi di segni .
Caratteristiche comuni ai due strumenti didattici sono, a nostro avviso, le seguenti:

- Spostare l'attenzione dal prodotto al processo.
- Permettere un approccio strutturato (esplorare proprietà e relazioni fra esse).
- Essere registri di rappresentazione (con valore aggiunto del movimento).
- Facilitare la costruzione di controesempi.
- Favorire l'armonizzazione degli aspetti figurale e concettuale delle figure geometriche.
- Agevolare le congetture, la discussione, la validazione, l'argomentazione.
- I modelli si "toccano" con mano, sono parte della realtà concreta, mentre le figure Cabri sono un passo avanti nell'astrazione (la loro costruzione deve essere preceduta da una fase di apprendimento delle funzioni base e delle loro peculiarità di uso).
- La validazione con i modelli dinamici avviene attraverso l'osservazione dei casi limite e/o di controesempi o di esempi di appoggio, che sono altri modelli; con Cabri si effettua attraverso il "trascinamento" e usando le funzioni del software come controllo delle affermazioni da validare. La validazione fa riferimento, in entrambi i casi, alle proprietà e alle definizioni delle figure.
- Con i modelli non tutte le immagini (e previsioni) mentali possono essere realizzate, con Cabri ciò accade più estesamente, è possibile muoversi con maggiore libertà alla ricerca di situazioni significative.

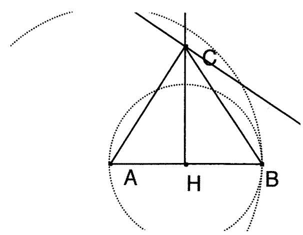
Come cambia il ruolo dell'insegnante quando si fa uso di questi strumenti?
È richiesto all'insegnante lo studio attento ed approfondito delle potenzialità di metodi e sussidi nuovi. Egli deve resistere alla "tentazione" di trasmettere ciò che sa e consentire agli alunni di fare le loro esperienze di costruzione della conoscenza, proponendosi non tanto come "depositario" del sapere ufficiale bensì come mediatore nel processo di apprendimento. Nella fase di costruzione delle conoscenze, il docente mette in atto interventi "muti" perché devono emergere le potenzialità degli alunni.
L'attività con i modelli deve precedere quella con Cabri, perché i programmi Cabri hanno un livello di astrazione maggiore. I modelli devono essere costruiti dagli alunni sulla base di una scheda di costruzione. Un programma Cabri ha bisogno della padronanza sintattica di questo linguaggio. È necessario che ogni passaggio di osservazione, scoperta,

validazione, sia verbalizzato, perché è attraverso la verbalizzazione che si costruisce il pensiero e/o si manifestano le immagini mentali che si vanno elaborando.
Esempio: Triangoli a vertice mobile



Il modello (AB segmento disegnato su cartoncino, HC incisione perpendicolare ad AB nel suo punto medio H, AC e BC lati in elastico; il vertice C scorre lungo l'incisione) permette di osservare tutte le tipologie di triangoli isosceli ma non consente di ottenere triangoli scaleni, per la presenza di vincoli di costruzione (posizione della incisione lungo la quale scorre il vertice mobile C). In classe si organizza un lavoro esplorativo che conduca alla individuazione delle condizioni necessarie, e di quelle compatibili per l'esistenza dei triangoli isosceli e l'esclusione di quelli scaleni.
Programma Cabri

Segmento AB
Asse t di AB
Semiretta z da H (intersezione t e AB) su t
Triangolo ABC con C punto sulla semiretta
Circonferenza centro A raggio AB
Circonferenza centro H raggio HB
Perpendicolare per C ad AC
Mostra nascondi asse t



Traslando il vertice C lungo la semiretta z si ottengono infiniti triangoli isosceli. Quando il vertice C cade sulla circonferenza di centro H, il triangolo ABC è rettangolo, CH=HB, quindi CHB è un triangolo rettangolo isoscele e la perpendicolare si sovrappone a CB. Quando il vertice C cade sulla circonferenza di centro A il triangolo ABC è equilatero.
Le attività di manipolazione di materiali, tendono alla creazione di "oggetti mentali" necessari per la costruzione prima e sistemazione poi delle conoscenze. Permettono inoltre di modulare l'ampiezza dei contenuti e il livello di approfondimento, a seconda delle caratteristiche degli allievi.

Bibliografia

- Laborde C. – 2004 *"come la geometria dinamica può rinnovare i processi di mediazione nella scuola primaria*" in La didattica per la matematica: una scienza per la scuola – Pitagora Editrice
- Mariotti M.A. – 2005 *"La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria"* Pitagora Editrice
- M. Facenda , P. Fulgenzi, G. Gabellini, F. Masi, J. Nardi, F. Paternoster 2003, "*I modelli dinamici: costruzioni di immagini mentali e avvio alla deduzione*" in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 26 A-B n. 6

APPRENDERE DAL FEEDBACK DELL'AUTOVALUTAZIONE IN MATEMATICA Progetto VALMAT

Silvana Mosca ed équipe del Progetto VALMAT-AVIMES [1]

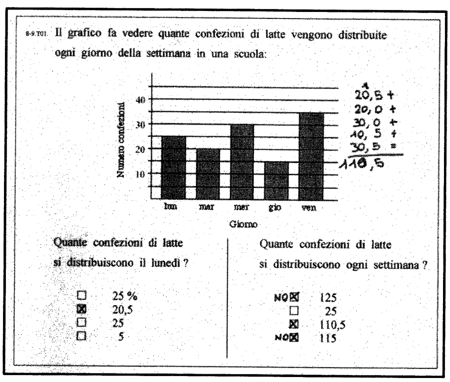
VALMAT è un progetto sul tema della Valutazione degli apprendimenti matematici in allievi da 9 a 12 anni, si svolge in partenariato internazionale tra rete di scuole AVIMES (Autovalutazione di Istituto per il Miglioramento dell'Efficacia della Scuola) Piemonte, Università di Torino, di Granada, di Budapest e di Atene. Si espongono qui alcuni tra i risultati ottenuti.

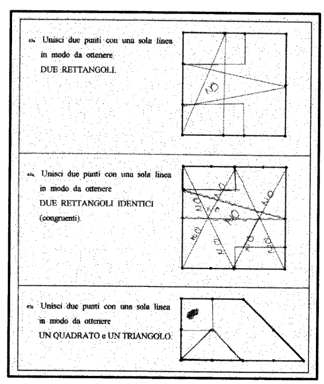
L'approccio pedagogico generale al progetto fa riferimento alle teorie delle scuole efficaci e della scuola come organizzazione che apprende. La valutazione è praticata prevalentemente come autovalutazione. Insegnanti e allievi vengono sollecitati ad apprendere e ad insegnare a partire dal feedback della valutazione.

L'approccio pedagogico specifico è basato sull'osservazione delle difficoltà di apprendimento degli allievi (ostacoli cognitivi, misconcetti, rapporto con la matematica, ecc.) sull'autoanalisi delle difficoltà di insegnamento, con l'obiettivo di migliorare la didattica d'aula e di sviluppare adeguati piani di studio dell'istituto.

I test e le prove oggettive sono utilizzati per rilevare dati comparabili e sollecitare riflessioni e interpretazioni di docenti e allievi con un approccio metacognitivo e riflessivo. In questo percorso interagiscono gli stessi esperti e consulenti della ricerca-azione, che riflettono anch'essi sui processi e determinano di fatto una situazione formativa di forte spinta allo sviluppo professionale degli insegnanti. Vengono utilizzati soprattutto item a risposta aperta, breve (scrivere un numero, un dato) o estesa (scrivere un ragionamento, dare una spiegazione).

E' basilare riflettere sui risultati delle prove: analizzare le informazioni, capire e interpretare i dati, entrare nelle risposte (lettura approfondita dei protocolli degli allievi). Nel primo esempio sotto riportato è importante osservare i tentativi di risposta dell'allievo così come i calcoli scritti a margine.





[1] L'équipe del progetto VALMAT-AVIMES è composta da Ferdinando Arzarello, Silvia Beltramino, Mariangela De Luca, Marina Gilardi, Paola Migliano, Silvana Mosca (coordinatrice), Massimo Perotti, Ketty Savioli.

Nel secondo esempio è prezioso osservare come alcune soluzioni corrette vengono trovate e subito cancellate dall'allievo che non ne è consapevole; si osserva inoltre una ripetuta incertezza nel distinguere il termine triangolo dal termine rettangolo.
L'errore diventa indizio del pensiero dell'allievo e sollecita i docenti a porsi domande sul proprio metodo di insegnamento.
- Perché gli allievi hanno sbagliato?
- Perché hanno dato quella risposta?
- Qual è l'ostacolo cognitivo?
"L'errore non è spazzatura", "Non ha senso evitare l'errore, occorre attivare dei sistemi di controllo dell'errore", "Errore e (è) apprendimento", sono alcune tra le affermazioni pedagogico-didattiche che VALMAT elabora, per giungere a ri-scoprire la pedagogia dell'errore, anche richiamandosi alla nozione di soglia prossimale di Vigotski.
"Capire davvero l'errore è condividere il pensiero. Non capita sempre di entrare in sintonia col pensiero di un altro, ma è una cosa bellissima. Capisco il tuo errore, lo condivido, mi sembra di sbagliare anch'io, però poi trovo le vie per farti evolvere..." [1].
L'autovalutazione delle proprie risposte e strategie cognitive da parte dell'allievo viene considerata altrettanto importante ai fini di un efficace legame tra miglioramento dei risultati e valutazione.
VALMAT sperimenta una tecnica metacognitiva e autovalutativa denominata "Il jolly", tratta da una idea di Vinicio Villani (indagine Ma-lì) ripresa da Ferdinando Arzarello per la ricerca-azione con il test PM5 (Pensare la matematica in 5ª classe, 11 anni). Alla conclusione del test viene consegnata all'allievo una piccola busta contenente cinque etichette autoadesive colorate con la seguente consegna: *Hai terminato la prova. Ora ti vengono consegnati cinque jolly. Incolla i jolly accanto alle cinque risposte di cui ti senti più sicuro (dove pensi di aver fatto giusto!)*[2]. Si possono determinare quattro tipi di possibilità, combinando i casi in cui gli allievi pensano di sapere o non sapere (corrispondenti alle situazioni in cui collocano o non collocano i jolly) e i casi in cui dimostrano di sapere o non sapere (cioè danno effettivamente la risposta esatta o non la danno).
Nel test applicato internazionalmente in VALMAT sono risultati in contrasto fra loro i dati relativi ai numeri decimali e sono risultati concordemente negativi i dati relativi ai problemi. Questo ha spinto il gruppo di progetto a ricercare pratiche didattiche capaci di affrontare le difficoltà individuate, ad esempio con le attività illustrate nel workshop "Contare con le pascaline: strumento didattico a ingranaggi di ruote dentate costruito a partire dalla macchina calcolatrice di Pascal" [3].

---

[1] Cfr. Ferdinando Arzarello, "Didattica metacognitiva", in Progetto VALMAT-AVIMES, "Valutazione didattica in matematica", ediz. USR Piemonte, Torino, 2006.

[2] La tecnica e i risultati della sperimentazione del jolly sono tratti da Marina Gilardi, "Esperienze di didattica metacognitiva", in Rapporto finale progetto VALMAT, atti convegno internazionale, Torino, marzo 2004, su DVD (inedito).

[3] Vedi relazione a cura di Ketty Savioli in questo volume "Laboratorio didattico *Le pascaline*", cfr anche www.avimes.it e l'inserto "Pascaline e didattica della matematica di base", in Rassegna dell'istruzione n. 5-6, Firenze-Roma MIUR, Le Monnier, 2006.

ANALISI DINAMICA DI PROTOCOLLI RELATIVI AD ATTIVITÀ MATEMATICHE BASATE SULLA DISCUSSIONE COLLETTIVA IN CLASSE: VERSO UN MODELLO TEORICO

Romano Nasi
(Supervisore SSIS-Università di Modena e Reggio-Emilia)

Nella scuola dell'obbligo, dove l'immagine della matematica si costruisce si punta oggi ad un insegnamento di tipo costruttivo centrato sulla devoluzione agli allievi dell'esplorazione, in relazione con l'insegnante, di situazioni paradigmatiche. E' inoltre fortemente valorizzata la metaconoscenza. Nelle scuole dove maggiore è la consapevolezza critica si sono avviate interessanti attività di ricerca-azione basate su una pratica riflessiva, cioè su un riesame puntuale della nostra azione come insegnanti nelle classi, con la guida di un responsabile scientifico di comprovata esperienza sul campo. Il mio gruppo (GREM di Modena) si dedica allo studio e sperimentazione di percorsi innovativi di approccio all'algebra. In questi ultimi anni abbiamo sperimentato direttamente alcune unità sviluppate nell'ambito del progetto ArAl, e prodotto, a nostra volta, una proposta di percorso di esplorazione delle relazioni funzionali di prossima pubblicazione, Si lavora con l'obiettivo di produrre materiali innovativi per il lavoro di classe e documentare i processi che si attivano con il loro utilizzo (N.A.Malara, R.Fiorini, V.Incerti, E.Magnani, R.Nasi, Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebrica nella scuola dell'obbligo, Pitagora, BO, 2004). Negli anni abbiamo definito delle strategie di condivisione basate principalmente su: formulazione collettiva di ipotesi di ricerca, messa a punto di situazioni problematiche per verificare le ipotesi formulate, analisi a priori delle situazioni e delle problematiche attese, condivisione dei protocolli (trascrizioni delle discussioni di classe accompagnate da commenti del docente) ed elaborazione di metodologie di analisi, confronto tra i percorsi collettivi e quelli individuali degli allievi durante le sperimentazioni effettuate, analisi delle difficoltà evidenziate, riflessione comune sui risultati ottenuti e sui mutamenti attivati negli studenti oltre che nei Docenti. Da queste riflessioni sono nate nuove pratiche di valutazione basate sul riconoscimento del valore formativo della discussione collettiva. Abbiamo verificato quanto sia importante, per arrivare ad un buon protocollo, partire da una videoregistrazione delle lezioni e passare per la sbobinatura delle stesse, in continuità con gli interventi didattici in classe. Il protocollo è per noi una immagine abbastanza dettagliata e fedele del lavoro di classe nella prassi didattica quotidiana, una fotografia. Ma questa immagine è essenzialmente statica, anche se arricchita dalle riflessioni critiche successive su un momento dello stesso. La numerazione introduce nel protocollo la dimensione temporale; ciò potrebbe permettere di arrivare ad una visione cinematica del processo didattico. Tuttavia il protocollo tende a limitare le dimensioni di analisi; un po' come una proiezione ortogonale, appiattisce molti aspetti del lavoro svolto e recuperarli è un "atto didattico" complesso. Il Protocollo si lega per sua natura all'idea dell'intreccio, tra aspetti cognitivi e non cognitivi dell'apprendimento. Raccoglie la summa dei linguaggi di tutti i soggetti coinvolti. Tra questi linguaggi va evidenziato quello matematico, nel suo definirsi e costruirsi progressivo ed in questo vorremmo distinguere i particolari del linguaggio algebrico. Ma anche sul fronte linguistico la fotografia è quella dell'intreccio, e l'analisi richiede un sottile equilibrio interpretativo. Come rendere il protocollo espressivo della realtà di classe evidenziando anche coloro che non appaiono nella discussione? Come trasformarlo in uno strumento di valutazione dei singoli? Riuscire ad individuare le 'cause' che determinano un certo effetto, ci permetterebbe di arrivare ad una lettura dinamica del protocollo. Le 'cause' di cui si parla non sono generalmente mai esplicite, perchè insegnante e studenti parlano la loro lingua-classe che è una lingua orale, intrisa di gergo, di gestualità, di atteggiamenti, e sul cui sviluppo incidono gruppi e ruoli. Il difficile è arrivare ad una visione integrata delle dinamiche cognitive e relazionali all'interno della classe. In particolare non risulta affatto evidente il controllo del gruppo. Il ruolo dei singoli ragazzi appare poi poco esplicito. Come controllare chi interviene poco o troppo? E chi rimane fuori dalla discussione? Rimane insomma il problema della dimensione individuale. Nel protocollo le individualità tendono comunque a sfumarsi a favore del processo collettivo di costruzione del dibattito. Come rendere più incisiva la lettura dei protocolli di una discussione, al fine di far emergere: il contributo dei singoli, l'intreccio delle dinamiche relazionali, il ruolo dell'insegnante proprio ai fini di una valutazione formativa? Lavorando per cercare di dare una risposta a queste domande ho adottato alcune strategie utili a far emergere dai protocolli i flussi delle varie micro-discussioni costituenti il processo. Queste strategie ci hanno portato a concepire un modello, del tutto originale, da noi denominato a 'voli d'ape' (Bees Flying) su cui ci soffermeremo. Il modello ha preso corpo anche attraverso una serie di tesi di specializzazione SSIS ed è oggi oggetto di studio in seno al gruppo di ricerca in cui opero. I voli delle api si prestano bene a rappresentare il percorso compiuto dagli allievi di una classe coinvolta in una situazione problematica di matematica. La danza che usano le api operaie per indicare la direzione in cui trovare nutrimento ha una certa analogia con la comunicazione che si instaura nel gruppo classe durante una discussione matematica. Il caricarsi delle operaie del 'bottino' appare una metafora delle conquiste operate dai singoli in seno ad una discussione matematica e la raccolta del miele nell'alveare rappresenta bene l'apporto delle conquiste individuali alla costituzione di un patrimonio comune di conoscenza. la lavagna rappresenta bene l'alveare in quanto luogo della rappresentazione delle conoscenze via via prodotte. Il modello 'Bees flying' può rappresentare uno strumento idoneo ad analizzare l'interazione tra i diversi soggetti nella classe e le dinamiche relazionali tra gli allievi, ed evidenziarne la partecipazione. Il modello consiste in una serie di 'istantanee' dei flussi di micro-discussione (un segmento della discussione relativo ad una specifica questione a cui fa seguito un insieme di risposte logicamente connesse che la esauriscono) registrati utilizzando una piantina della classe e delle frecce indicative degli interventi, le quali, collegate in sequenza, rappresentano il susseguirsi, chiudersi, intrecciarsi, degli interventi stessi. Su ciascuna mappa si stendono delle frecce numerate (o con altri caratteri) che riproducono il susseguirsi degli interventi. La freccia parte dalla posizione del soggetto che fa l'intervento e procede verso il soggetto che interviene successivamente. Ciascuna mappa evidenzia molto bene la rete degli interventi. Nei nodi della rete si delineano i soggetti. Emergono a colpo d'occhio i leader, le loro "spalle" ed i soggetti passivi. Si evidenziano vicinanze e lontananze tra i ragazzi e tra le loro idee. La struttura della rete in una mappa viene semplificata da ciò che metaforicamente chiamo "voli d'ape", sui quali si opera ai fini della valutazione. Si tratta di "grafi di interrelazione". Giustapponendo le mappe delle micro-discussioni si genera una stringa rappresentativa del flusso globale della discussione. La stringa dà una visione sintetica del coinvolgimento della classe e l'osservazione delle varie mappe porta a delineare una infrastruttura metacognitiva di controllo del processo.

METODI STATISTICI PER LA VALUTAZIONE DI ABILITÀ E COMPETENZE: UNO STUDIO DI CASO CHE RIGUARDA LA MATEMATICA

Maria Gabriella Ottaviani – Università di Roma "La Sapienza"
Stefania Mignani – Università di Bologna
Roberto Ricci – Istituto Regionale di Ricerca Educativa Emilia Romagna

Le ricerche nazionali ed internazionali condotte in questi ultimi anni per valutare le competenze di base della popolazione in età scolare ed adulta hanno messo in evidenza diversi aspetti metodologici legati alla misurazione nel contesto educazionale.

Come è noto, la valutazione della conoscenza è un problema interdisciplinare che interessa diversi ambiti di ricerca: le scienze educazionali, le discipline oggetto d'interesse e la misurazione di grandezze non direttamente osservabili mediante il metodo statistico.

Da un punto di vista statistico l'oggetto della misurazione in questo ambito di riferimento è un costrutto latente che viene valutato attraverso i risultati di una prova, ovvero mediante le risposte fornite alle domande opportunamente strutturate e calibrate di un questionario. Risulta quindi cruciale che lo strumento di misurazione, tipicamente un questionario, abbia determinate caratteristiche per garantire la congruità dei risultati ottenuti con il fenomeno oggetto d'interesse. In primo luogo è necessario che tutte le domande o loro sottogruppi misurino lo stesso tratto latente. Il mancato rispetto di questo requisito genera degli effetti distorsivi sulla valutazione difficilmente quantificabili ed individuabili e che quindi rischiano di compromettere anche gravemente l'attendibilità della misurazione e in conseguenza della valutazione. Un altro aspetto molto importante, spesso non adeguatamente affrontato, è quello della calibrazione delle domande, ovvero del controllo statistico della loro capacità di misurare effettivamente il costrutto latente di riferimento.

Dal punto di vista della metodologia statistico-psicometrica la valutazione di un questionario può essere effettuata facendo riferimento a due diversi ambiti metodologici le cui caratteristiche ed assunzioni sono fortemente differenziate: la teoria classica dei test psicometrici (TCT) e l'Item Response Theory (IRT).

La TCT ha trovato ampia applicazione in ambito docimologico ed è caratterizzata dalla valutazione del tratto latente mediante la trasformazione del numero di risposte esatte in un punteggio. La TCT mantiene ad oggi una sua validità, specie nelle operazioni di valutazione di microsistema (classe, gruppo di classi, ecc), anche se presenta alcuni aspetti che meritano una particolare attenzione. Nello specifico i valori delle statistiche ottenute dipendono dal particolare campione preso in considerazione e quindi sono scarsamente utilizzabili per effettuare dei raffronti e delle comparazioni tra contesti differenti. Per converso, la TCT si basa su assunzioni teoriche non particolarmente forti e ciò ne garantisce un'agevole applicabilità.

A partire dalla fine degli anni '60 si è andata consolidando e diffondendo l'IRT che permette di valutare la *performance* di un soggetto in funzione di un'abilità latente mediante la definizione e la specificazione di un modello statistico-matematico. Tale modello permette di giungere alla valutazione numerica non soltanto della *performance* di un soggetto, ma anche delle caratteristiche di ciascuna domanda. In linea generale è possibile esprimere mediante un particolare parametro la difficoltà di una domanda intesa come quel livello di abilità necessario per avere una probabilità di rispondere

correttamente pari al 50%. Mediante un altro parametro, poi, è possibile quantificare il potere discriminante di una domanda, ovvero la sua capacità di distinguere tra rispondenti con abilità differenti.
Un altro aspetto particolarmente importante dell'IRT è la cosiddetta indipendenza dal campione, ovvero la possibilità di giungere alla valutazione della *performance* di un soggetto in modo che questa sia effettivamente comparabile con quella di altri soggetti, anche nel caso che questi ultimi abbiano risposto a domande differenti, ma riferite allo stesso tratto latente.
Quest'ultimo aspetto ha determinato un'ampia applicazione della ricca modellistica IRT in diverse ricerche internazionali come l'indagine OCSE-PISA e l'indagine ALL. Infatti proprio mediante l'applicazione di alcuni particolari modelli IRT (Adams, Wilson, Wang, 1997) sono state realizzate diverse analisi proposte nelle differenti edizioni delle ricerche OCSE-PISA che hanno permesso di comparare le competenze di base dei quindicenni di diversi Paesi caratterizzati da sistemi educativi profondamente differenziati.
Si può quindi osservare come il metodo statistico giochi un ruolo molto importante per la realizzazione di ricerche ampie ed approfondite come l'OCSE-PISA. E' inoltre interessante notare come in quest'ultima ricerca la statistica giochi un duplice ruolo: quello di metodo di analisi e quello di oggetto di rilevazione.
Infatti dalla lettura delle domande proposte dall'OCSE-PISA si evince un'idea di matematica pienamente inserita come elemento importante della cultura di un cittadino consapevole ed informato nella quale rientra a pieno titolo anche la statistica e la probabilità (Mignani, Ricci, 2005, *a* e *b*). La lettura dei risultati internazionali e nazionali evidenzia, fra gli altri aspetti, come la "idea chiave" Incertezza (statistica e probabilità) sia quella che maggiormente necessita di una profonda riflessione didattico-metodologica al fine di migliorare le performance, sovente inadeguate, degli studenti (Ottaviani, 2003).
Ricerche come quelle dell'OCSE-PISA mostrano la loro importanza non solo per i risultati che da esse si possono evincere in termini di comparazione di performance, ma anche per l'idea di matematica e di cultura scientifica per il futuro cittadino che esse fanno emergere a livello internazionale. Tale idea comprende anche competenze di tipo statistico. E' infine importante osservare come un'adeguata comprensione degli aspetti fondamentali delle metodologie statistiche utilizzate per l'analisi possa favorire una consapevole diffusione e il consolidamento della cultura della valutazione del sistema educativo anche nel nostro Paese.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- R. J. Adams, M. R. Wilson, W. C. Wang (1997), *The Mixed Coefficients Multinomial Logit Model*, Applied Psychological Measurement, 21, pp. 1-23.
- S. Mignani, R. Ricci (2005a), *Metodi statistici per la misurazione delle competenze: analisi della preparazione matematica delle matricole*, in *Matematica e cultura in Europa* a cura di M. Manaresi, Springer-Verlag, pp. 23-37.
- S. Mignani, R. Ricci (2005b), *Il ruolo del metodo statistico nel progetto PISA*, Induzioni, 30, pp. 59-73.
- M. G. Ottaviani (2003), *Didattica della statistica: un campo di ricerca in evoluzione*, Induzioni, 26, pp. 65-71.

MATEMATICA&REALTA'

Anna Salvadori
(Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia, e-mail: mateas@unipg.it)

Tema di questo intervento è una proposta di innovazione didattica - rivolta agli studenti di 14-19 anni - che, in linea con le tematiche dell'indagine OCSE-PISA, intende creare condizioni per stimolare i ragazzi ad utilizzare le conoscenze e le competenze matematiche acquisite a scuola, per orientarsi nella moderna società della conoscenza e gestire le proprie scelte in modo consapevole a attivo.
Tale proposta è stata sperimentata nel contesto dei *Percorsi Orientamatica* - un progetto pilota di raccordo fra gli studi medi e quelli universitari - istituiti dal *Progetto Innovamatica*[1] nel 1997 ed attivati a livello inter-regionale in collaborazione al Centro PRISTEM dell'Università Bocconi nel 2002. L'attività ha complessivamente coinvolto otre 6000 studenti e circa 60 insegnanti di 50 Istituti Superiori delle regioni Umbria, Lombardia, Liguria e Piemonte. Il successo che l'iniziativa ha avuto fra i ragazzi e i loro insegnanti, ha evidenziato un vivo desiderio di un più stretto contatto fra il mondo della scuola e quello della ricerca ed un grande interesse per la divulgazione scientifico-tecnologica.
Queste aspettative hanno spinto il Progetto Innovamatica ed il Centro PRISTEM a creare il nuovo progetto Matematica&Realtà (M&R), che non intende porre attenzione alle offerte didattiche e ai servizi di una particolare Università o di un particolare Corso di Laurea, quanto

- avanzare precise proposte didattiche per sviluppare "insospettate" relazioni con il mondo *reale*;
- stimolare gli studenti ad acquisire una conoscenza consapevole dei linguaggi scientifici e dei metodi per *imparare* ad *apprendere*.

M&R intende potenziare e diffondere a livello nazionale l'attività di Orientamatica, investendo il know how maturato in dieci anni di sperimentazione per promuovere una radicale innovazione didattica che si alimenti con un continuo raffronto con la realtà, si avvalga appieno delle potenzialità dell'Informatica e di quelle offerte dalle nuove tecnologie, sviluppi una reale interazione multidisciplinare, non solo con discipline scientifiche.

Il progetto nasce con l'intento di offrire agli insegnanti una gamma di opportunità:

- per un <u>insegnamento tradizionale</u>, mettendo a disposizione numerosi modelli di supporto da sviluppare alla voce "saper fare" come "esercizi";

---

[1] Il Progetto *Innovamatica* (Innovazione&Matematica) del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Perugia, opera da circa venti anni promovendo ricerca e consulenza scientifica, innovazione e sperimentazione didattica, formazione e divulga-zione con l'uso di nuove tecnologie. Obiettivo principale del Progetto è promuovere una cultura matematica diffusa e "immersa" nel mondo reale, attraverso una educazione alla modellizzazione per la formazione e la divulgazione scientifica.

- per un insegnamento aperto alla innovazione tecnologica, fornendo un ampio ventaglio di modelli per il cui sviluppo è indispensabile il ricorso alle nuove tecnologie;
- per un insegnamento aperto alla innovazione didattica, proponendo un percorso di educazione alla modellizzazione.

M&R si articola in unità locali con un coordinamento centrale e prevede le seguenti attività:

- **laboratori didattici M&R**
- **corso di formazione dei docenti-tutors** (per la progettazione dei laboratori didattici)
- **test finale di valutazione** (per il conseguimento dei crediti scolastici)
- **convegno finale "Esperienze a confronto"**
- **concorsi a premi** (miglior test finale e la migliore comunicazione al convegno).

I temi proposti per i laboratori M&R - 2006 sono quattro:
tema zero (classi II): corrispondenze e funzioni per problemi di scelta
tema uno (classi III): geometria analitica e problemi di ottimo
tema due (classi IV): geometria analitica e trigonometria per la forma dagli oggetti
tema tre (classi V): analisi e percorsi di minimo spazio e minimo tempo.

Le singole unità locali possono sviluppare percorsi personalizzati per tener conto delle varie esigenze e competenze locali.
Il coordinamento mette comunque a disposizione degli iscritti:

- il supporto scientifico-didattico;
- unità di progettazione e coordinamento;
- il personale docente che ha acquisito esperienza nel contesto di Orientamatica;
- unità didattiche sviluppate dalla collaborazione pluriennale di docenti universitari e di scuola superiore;
- l'organizzazione di attività comuni a carattere nazionale (convegni, incontri di studio, forum, concorsi, giochi, ...)
- la gestione di una bacheca virtuale;
- uno spazio per materiale didattico (sintesi delle lezioni, temi da approfondire, test di autovalutazione, lezioni per auto-apprendimento, simulazioni di modelli elementari,
- animazioni, elaborazioni numerico-simboliche, etc.).

Referenze

P.Brandi-A.Salvadori, (a) *Un approccio alla modellizzazione matematica: i problemi di ottimizzazione*, In Atti XX Convegno Nazionale UMI-CIM, Orvieto 1998, 123-127
(b) *La modellizzazione del quotidiano come motore di innovazione didattica*, Parte I e Parte II, In Lettera Matematica PRISTEM , 43 (2002), 51-66 e 43 (2002), 17-23
(c) *Modelli Matematici Elementari*, B.Mondatori Ed. (2004) pgg. 1-207
A.Guerraggio, *Il mestiere del matematico*, *La Matematica e la vita quotidiana*, Piacenza 2005 pgg. 1-10

Progetto M&R: www.innovamatica.it
Coordinatori nazionali Angelo Guerraggio (Nord) e Primo Brandi (Centro-Sud)
Segreteria: progettomr@dipmat.unipg.it tel. 075 585 3820 fax. 075 585 3828

LA STORIA DI PENELOPE: GESTI, PAROLE E STRUMENTI NELL'APPRENDIMENTO MATEMATICO

Bruna Villa
(Nucleo di Ricerca Didattica, Università di Torino)

Nell'anno scolastico 2004-2005 nell'ambito del progetto europeo Comenius *"Dial Connect: using dialogue to connect learning and minds*", in otto classi della scuola elementare di San Mauro Torinese gli allievi hanno svolto una situazione problematica denominata 'La coperta di Penelope', una libera rielaborazione della storia omerica.

Nel problema la tela diventa una coperta che Penelope tesse e disfa ogni due giorni e non deve finire prima del ritorno di Ulisse, pena lo sposalizio con altri pretendenti; si vuole sapere se Penelope sia costretta a *'scegliere un altro sposo e perché'*. Dopo la soluzione, si elabora la tabella e il grafico del lavoro di Penelope e successivamente vengono costruite delle varianti della storia.

L'esperienza didattica è stata organizzata attraverso il lavoro di gruppo e la discussione che hanno coinvolto le classi nella loro interezza: gli allievi hanno lavorato nelle diverse fasi dapprima con carta, matita e altri materiali per risolvere il problema, poi usando il computer, per costruire tabelle, grafici e simulazioni della storia.

Complessivamente nelle classi ci sono state 58 soluzioni[1] riconducibili ad alcune tipologie prevalenti: un conteggio, a blocchi di 4 o di 2, dei giorni necessari a finire la coperta; una rappresentazione lineare dei giorni; una cancellazione dei giorni usati per disfare la coperta ed infine una soluzione solo aritmetica, frutto di ragionamenti astratti ed ipotetici - presente solo nelle classi dove il livello di apprendimento era buono e specificatamente nei gruppi di livello più alto.

In moltissime classi, scoprire il risultato ha portato a far commenti sull'astuzia di Penelope e sui suoi 'trucchetti', segno che gli allievi erano spinti a cercare la soluzione da una ben fondata e chiara motivazione: sapere se Penelope 'si teneva il marito o sposava un pretendente'.

Proprio il contesto del problema è stato l'aspetto più sorprendente e significativo di questa prima parte dell'attività: per quanto si trattasse di un'antica storia, si è rivelato di stretta attualità perché:

- intrigava come una soap opera (Penelope dovrà sposare o no un pretendente?)
- stimolava la curiosità e il desiderio di scoprire la conclusione (quanta coperta riesce a fare Penelope?)
- suscitava simpatia in quanto era palese l'astuzia della protagonista (Penelope è arguta...), permettendo l'immedesimazione e l'adesione degli allievi alla storia.

Ma l'interesse per il contesto è risultato visibile anche durante la soluzione: spesso gli allievi hanno letto e riletto la storia per comprenderne tutti gli aspetti e coglierne i particolari - ossia sono tornati spontaneamente sul testo perché era significativo e coinvolgente, come raramente avviene per i problemi usualmente proposti nelle classi.

Nelle soluzioni gli allievi hanno sempre lavorato in gruppo ed in una classe è stata documentata tutta l'attività anche con riprese video e registrazione delle discussioni. L'analisi di queste riprese ha permesso di osservare attentamente sia la gestualità che il

[1] Alcuni gruppi erano formati solo da due-tre allievi

linguaggio sviluppatisi durante una situazione problematica e, conformemente alle analisi di Ricardo Nemirovsky[1], vedere come la comprensione di un concetto matematico, piuttosto che avere un'essenza definizionale, sia accompagnata da diverse attività percettivo-motorie che divengono più o meno significative a seconda delle circostanze.

Così all'inizio d'ogni risoluzione si è visto che c'era sempre una primissima fase di incertezza, una specie di 'frullio mentale' abbastanza casuale, con i gesti che cominciavano ad abbozzarsi con brevi tratti; poi gli allievi acquistavano maggior sicurezza e i gesti accompagnavano il primo 'balbettio', la prima oggettificazione dei concetti in costruzione. Qualche gesto diventava condiviso e finiva per rappresentare un indice della conoscenza; ad esempio, in uno dei gruppi osservati, un allievo, per indicare la spanna di coperta produceva un gesto con le mani per simulare uno spazio[2]. Tale gesto, fatto circa all'ottavo minuto di lavoro insieme, diventava l'indicatore dell'intero concetto del 'fare e disfare' e, ripetuto a più riprese, si trasformava in uno dei punti fondamentali per la comprensione della storia.

Le parole accompagnavano poi tutta la laboriosa costruzione; anch'esse dapprima erano imprecise - col linguaggio che supportava o tentava di esplicitare in qualche modo i gesti - poi si facevano più chiare e serrate, comparivano le metafore, si enucleavano parole-chiave che cominciavano a rimandare a concetti più complessi - è il caso ad esempio, della parola 'sequenza' che sottintendeva già la ricorsività. Infine era con l'argomentazione che la situazione-problema veniva razionalizzata e chiarificata.

Parole e gesti, pur di registri diversi, s'intrecciavano strettamente in un processo elicoidale a cui si aggiungevano i segni (le rappresentazioni, i numeri, i calcoli), fino al raggiungimento della comprensione della situazione e alla costruzione della soluzione definitiva.

Le successive parti dell'attività sono state svolte con Excel e Power Point. L'uso di Excel in molte classi era un approccio a tecnologie nuove, ma è risultato agevolato perché si trattava di trasporre una vicenda già conosciuta; naturalmente agli allievi è piaciuto molto, ma l'aspetto più significativo è che oltre a connotare positivamente l'attività, la tecnologia ha aggiunto abilità e cambiato la comprensione delle conoscenze matematiche. Scrive per esempio un'allieva: "Ho imparato che dietro ogni grafico c'è una legge che spiega brevemente il problema raffigurandoti la situazione attraverso i numeri"[3]. Anche nei grafici prodotti a compendio del lavoro svolto e valutativi delle conoscenze acquisite[4], era visibile come le abilità tecniche e le conoscenze fossero strettamente connesse: le classi che avevano eseguito i grafici direttamente con Excel

---

[1] Cfr. R.Nemirovsky (2003), "Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics" in N.A.Pateman, B.J.Dougherty & J.T.Zilliox (eds.), *Proceedings of PME 27*, **1**, 103-135.

[2] Due mani messe in parallelo sul tavolo, per creare una larghezza

[3] Morgana, 5° B, 'Morante', nel test autovalutativo

[4] E' stato chiesto agli allievi di produrre due grafici secondo indicazioni date: le percentuali di esattezza sono state rispettivamente dell' 80% per il primo grafico e del 79% per il secondo

effettuavano meno sbagli, la comprensione risultava più approfondita e stabile, gli errori poco significativi[1].

Infine, al termine di tutta l'attività, insegnanti ed allievi hanno valutato l'esperienza svolta rispondendo ad un questionario elaborato all'interno della partnership del progetto Comenius. Le risposte fanno intuire un interesse non scontato per la vicenda narrata, ma soprattutto molta partecipazione emotiva che si traduce in un apprezzamento per l'attività. Ad esempio, alla domanda 'Cosa ti è piaciuto di più della storia?', quasi l'80% degli allievi risponde che ad intrigarli è l'astuzia di Penelope ed immaginare come finisce la vicenda. Ciò che rimane però, sono i concetti di matematica o il capire che dietro una tabella c'è una regola matematica (affermazione espressa dal 46.6 % degli allievi); "ho scoperto – dice un'allieva - che ci sono delle leggi da mettere per fare le tabelle sul computer e che per la soluzione dei problemi, i grafici sono utili"[2]. Fondamentale è stato anche il lavoro di gruppo, vero momento di confronto e costruzione del sapere: metà degli allievi riconosce che la discussione è utile per risolvere problemi, "perché così le idee che ha ognuno si possono scambiare, tirare fuori e discutere con altri vedendo dov'è l'errore; ciascuno aggiunge o modifica un pezzo di lavoro"[3] e per tutti c'è la sensazione che il lavoro di gruppo faciliti l'approccio al sapere nuovo, togliendo ansia e paura d'insuccesso.

Gli insegnanti indicano nel grado di coinvolgimento degli allievi il maggior pregio dell'attività. E non importa se si tratta di una storia lontana e neanche conosciuta: sembra una storia moderna, di quelle che continuamente appaiono in tv. Certo, una simile attività richiede ad insegnanti e allievi requisiti particolari, quali più cooperazione e più tempo, perché le soluzioni sono costruite lentamente con l'apporto di tutti e assecondando la naturale capacità immaginativa dei bambini.

---

[1] Percentualmente risultavano migliori del 16% rispetto alle classi che avevano svolto i grafici solo con carta e matita.
[2] Francesca, Cl.5° B Morante
[3] Stefania, Simona, Cl.5° B Morante

LABORATORI

Il SENSO DELLO SPAZIO. LA GEOMETRIA SU SFERA, CILINDRO E CONO

Ferdinando Arzarello (, Università di Torino)
Pierangela Accomazzo (, Liceo Scientifico Einstein, Torino)
Cristiano Dané, (Liceo Scientifico Volta, Torino)
Patrizia Gianino, (Istituo Tecnico Industriale Bodoni, Torino)
Laura Lovera (, I.I.S. Regina Margherita, Torino)
Claudia Agostelli (, Liceo Scientifico Galilei, Voghera)
Miranda Mosca (, I.T.I. Bodoni e supervisore di tirocinio SIS Piemonte)
Nicoletta Nolli (, Liceo Scientifico Aselli,, Cremona)
Antonella Ronco, (I.I.S. Regina Margherita, Torino)

La geometria euclidea del piano è familiare agli studenti; i suoi assiomi sono accettati facilmente e ritenuti poco interessanti. Scoprire spazi nei quali tali assiomi non sono più veri, in cui le proprietà devono essere ridefinite e dove dunque perdono validità anche famosi teoremi, ha l'effetto di ridare importanza a quegli assiomi e al ruolo che in generale gli assiomi rivestono in una teoria.
Inoltre estendere l'orizzonte verso altre geometrie , contribuisce a dare un maggior peso a questo settore in un percorso formativo che si proietti verso il mondo fisico reale. E' il caso della geometria sulla superficie sferica, modello per la geometria della nostra realtà terrestre, ed più in generale è il caso delle geometrie non-euclidee, di cui fisica e cosmologia fanno uso per descrivere lo spazio e l'evoluzione dell'Universo.
L'idea guida è costituita dalla ricerca, su ogni superficie, delle geodetiche, definite come "vie diritte" , e non come "vie più brevi", definizione che sarebbe valida solo localmente , in una visione che non contempli l'intera superficie.
Lo studio riguarda le superfici, dunque una geometria a due dimensioni, tuttavia occorre alternare il punto di vista di chi sta "sulla" superficie (visione intrinseca) con quello di chi sta nella terza dimensione (visione estrinseca); questa alternanza è stata uno strumento efficace per risolvere "stranezze" non euclidee che via via si presentavano.
In linea con le indicazioni delle recenti proposte dell'UMI, si è scelto di operare secondo le modalità del Laboratorio, non tanto luogo fisico, quanto situazione in cui gli studenti esplorano, costruiscono significati tramite la discussione. Gli oggetti, prima concreti e poi virtuali, sono stati i mediatori del processo; su di essi si sono basati sia le immagini mentali dei singoli sia il linguaggio di scambio interno a ciascun gruppo di lavoro. L'apprendimento si è focalizzato quindi su strategie di carattere percettivo-motorio; l'apparente lentezza con cui alcuni concetti si sono formati ha evidenziato quanto sia in generale illusorio un apprendimento rapido di concetti rilevanti acquisiti solo per trasmissione verbale. L'insegnante ha rinunciato alle consuete vie simboliche di trasmissione (ove il linguaggio ha il ruolo principale); le schede consegnate all'inizio di ogni attività sono state tracce che hanno favorito la ricerca, la messa a fuoco delle questioni e l'approfondimento, piuttosto che una guida verso risposte predefinite. L'insegnante ha raccolto le idee sorte dalle attività, condotto la discussione collettiva dalla quale sono emersi i principali risultati condivisi e nuovi approfondimenti.
I materiali concreti impiegati sono stati molteplici, per lo più di facile reperimento o costruzione. Mappamondi, palloni e coni stradali prestati dalle palestre, contenitori cilindrici di varie origini; cartoncino per i coni, apposite sfere e semisfere (più pratiche delle sfere per la facilità di appoggio, ma anche dotate di una geometria più semplice) su cui disegnare con i pennarelli ad acqua cancellabili; fogli di carta trasparente e spilli per

individuare punti corrispondenti sui successivi ricoprimenti di cilindro e cono, sottili strisce di carta, elastici, nastro metrico flessibile per i percorsi; goniometri e compassi.
Nelle fasi iniziali gli studenti hanno alternato curiosità e qualche disagio dovuto alla novità della proposta, sia nel contenuto, che, a volte, nella metodologia. Presto scemato il disagio, sono prevalsi interesse, divertimento, stupore, serietà di impegno, anche da parte di studenti per lo più poco interessati alla materia e con preparazione pregressa carente; essi sono stati attratti dalla semplicità dei prerequisiti espliciti necessari.
Sulla sfera gli studenti hanno scoperto che le geodetiche sono sempre circonferenze massime, e quindi che viaggiare su un parallelo terrestre non significa andare diritto; che non esistono rette parallele; che si possono costruire triangoli con due o tre angoli retti; che, conservata la definizione di circonferenza, non vale più il celebre valore del rapporto tra lunghezza della circonferenza e quella del diametro; anzi tale rapporto non è costante e dipende dalla circonferenza che si considera. Gli studenti hanno quindi visto cadere i principali pilastri loro noti della geometria euclidea del piano.
Scoperto il criterio dell'aderenza delle strisce di carta alla superficie come condizione per "l'andare diritto", sulla superficie cilindrica gli studenti hanno individuato, accanto a rette e circonferenze, geodetiche di tipo nuovo: le eliche; le hanno riconosciute in botanica nei fusti volubili e in costruzioni di scale a chiocciola o piste di salita a parcheggi; hanno preso coscienza che esse non si possono ottenere come sezioni piane (linee sghembe); che tra due punti se ne possono tracciare quante se ne vogliono, di diversa pendenza: si originano dai "giri" successivi, ossia dai molteplici ricoprimenti; nonostante la superficie cilindrica sia sviluppabile su un piano, i ricoprimenti fanno quindi cadere un assioma euclideo "semplice" come l'unicità della retta per due punti distinti.
Sulla superficie conica gli studenti hanno in parte ritrovato proprietà della cilindrica, ma anche novità quali le geodetiche "annodate" in guisa di "cravatte". Lo studio è iniziato con la costruzione dei modelli in cartoncino; essa ha fatto sorgere domande sulla relazione tra angolo di apertura del cono e angolo del settore circolare dello sviluppo piano; compilate tabelle di corrispondenza, la risposta è stata trovata nella trigonometria studiata in precedenza: bell'esempio di applicazione non artificiosa. Gli studenti sono stati inoltre guidati a ipotizzare coni ove l'angolo dello sviluppo è maggiore di 360°.
Per cilindro e cono si sono costruiti modelli virtuali con Cabri Géomètre II Plus. Su un'unica schermata si può disegnare un segmento su uno o due ricoprimenti piani e vedere originarsi la corrispondente geodetica sulla superficie conica o cilindrica. Inversamente, disegnando una linea sulla superficie del solido, se ne vede la traccia sullo sviluppo piano di uno o due ricoprimenti. La contemporaneità delle due visualizzazioni, uno spazio a due e uno a tre dimensioni, è stata essenziale per la concettualizzazione.
Il percorso sperimentato, prevalentemente in classi quarte, è iniziato dalla sfera sia per il suo più rilevante contenuto fisico ed esperienziale, sia perché essa segna una più marcata rottura con l'assiomatica euclidea. Non si esclude che sia possibile iniziare ad esempio dalla superficie cilindrica, pur di evitare il rischio di una banalizzazione con una immediata riconduzione al piano.

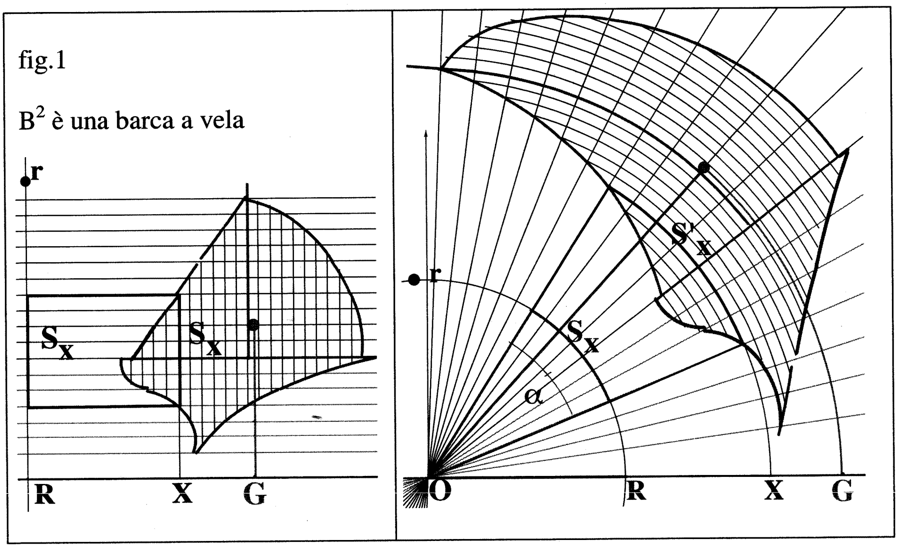
AREE DI CURVE NOTE O NUOVE CALCOLATE CON UNA NUOVA TRASFORMAZIONE NON LINEARE

Mario Barra

Un fascio di rette parallele (verticali in fig.1) in un piano sezionano una sua regione B^2. Una di queste rette, r, è avvolta intorno ad un cerchio ***C*** di raggio OR, in modo che la proiezione perpendicolare su r di una sezione di B^2 di lunghezza S_x, sia trasformata in un arco del cerchio ***C*** di pari lunghezza S_x e in modo che i punti del piano appartenenti alle rette perpendicolari ad r siano trasformati in punti del piano appartenenti alle rette per O.

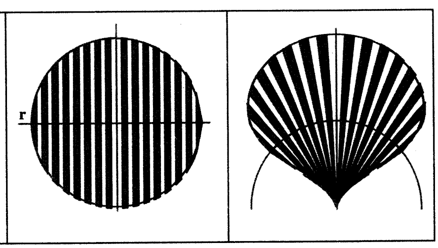
fig.1

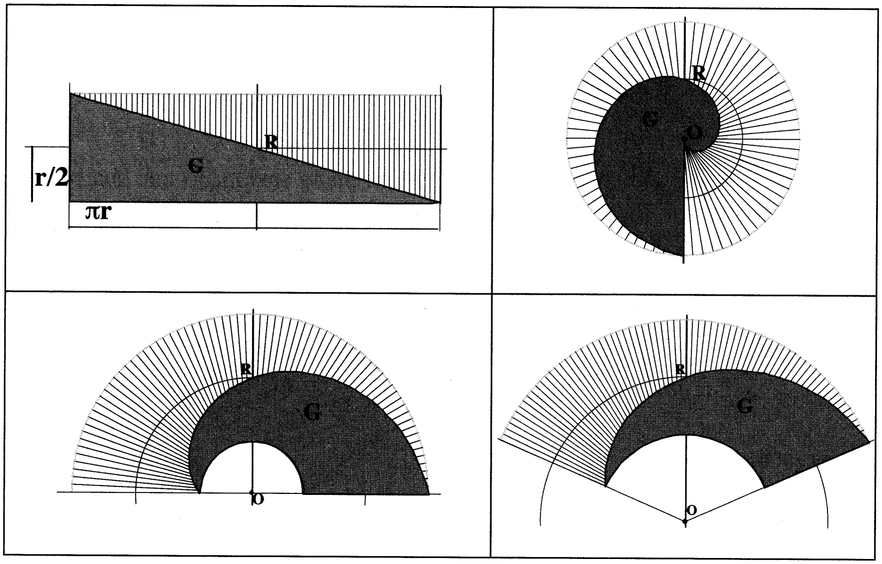
B^2 è una barca a vela



La sezione di B^2 di lunghezza S_x, è trasformata in un arco del cerchio, di raggio OX, di lunghezza S'_x e risulta: $S'_x / OX = S_x / OR$, cioè $S'_x = 1/OR\ (OX \cdot S_x)$.
Sommando su x si ha: □) **$A' = A \cdot OG/OR$**, ove A e A' sono le aree di B^2 prima e dopo la trasformazione e OG è il raggio del cerchio passante per baricentro di B^2. Questa trasformazione non è lineare e dipende dalla posizione della retta r rispetto a B^2 e da OR. Se B^2 è individuata da funzioni, è facile determinare le funzioni che individuano la trasformata di B^2. Chiamo questa trasformazione "**radialità**". Se la retta r passa per il baricentro di B^2, una radialità cambia la forma di B^2, ma non la sua area. In generale si può determinare in modo nuovo l'area di superfici individuate da curve nuove o già note.

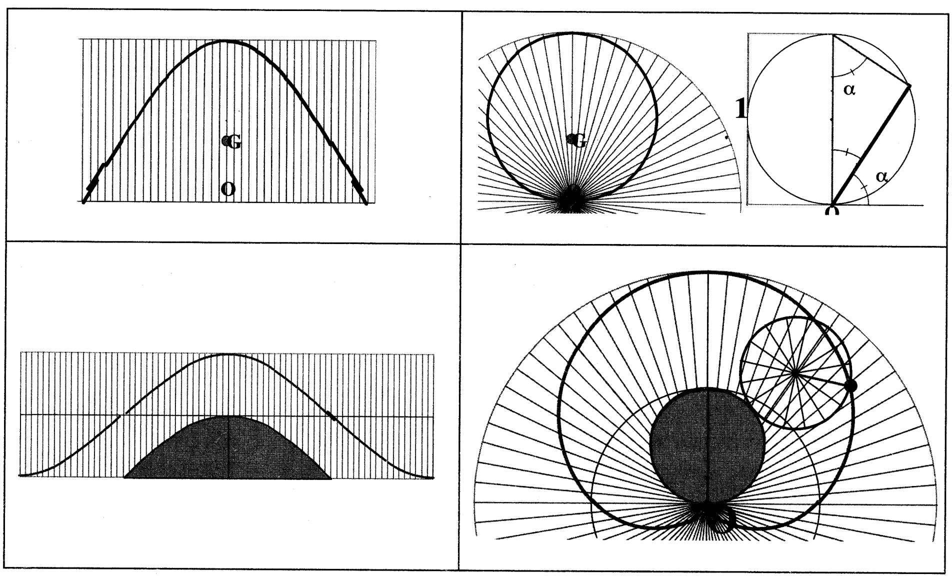
Un cerchio di raggio unitario con centro nel punto (0;1) del piano cartesiano, viene trasformato in un "**petalo**" che, nel piano polare con asse verticale, ha equazione: $1-\sqrt{1-\alpha^2} \le \rho(\alpha) \le 1+\sqrt{1-\alpha^2}$ con □in radianti, -1≤ □≤1





Il rettangolo in figura, di area A = □r^2, viene trasformato in un cerchio, sempre di area A. Il triangolo con baricentro "1/3 r" si trasforma nella spirale di Archimede con area 1/3 A, o in diverse altre curve, la cui area si determina attraverso OG e OR e la formula □).

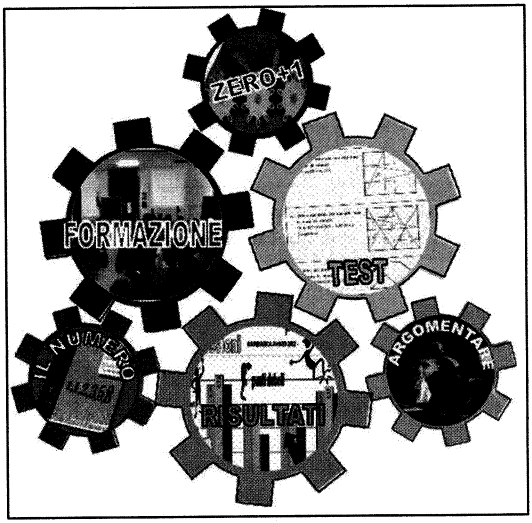
Con la stessa formula, sapendo che, per definizione, una sinusoide si trasforma per radialità in un cerchio, attraverso l'area di entrambi, si determina il baricentro della sinusoide. Con questo dato, e con una trasformazione radiale operante sulla sinusoide in figura, si ottiene sia la cardioide, sia l'area della sua superficie, che è sei volte maggiore dell'area del cerchio che, rotolando su una circonferenza di raggio uguale, la genera.



STRUMENTI PER LA VALUTAZIONE E IL MIGLIORAMENTO DIDATTICO

Ketty Savioli ed équipe del Progetto VALMAT-AVIMES [1]

"COME RUOTE DI INGRANAGGI"



Per rappresentare il lavoro del gruppo di matematica VALMAT-AVIMES[2] un'immagine efficace può essere quella degli ingranaggi. Attorno a tre ruote portanti (la formazione degli insegnanti, la valutazione diagnostica e i risultati) ci sono ulteriori piccoli ma importanti tasselli, derivati dall'esperienza e dalla collaborazione di esperti e insegnanti : il catalogo di prove oggettive e argomentazioni sul numero[3] (per allievi da 6 a 11 anni) , la sperimentazione nelle classi delle pascaline "Zero+1". L'interazione tra gli insegnanti partecipanti ai corsi di formazione, i loro colleghi nelle scuole, i bambini e gli esperti, rappresenta un importante momento di dialogo a più voci: l'elaborazione di esperienze professionali, di contributi e di riflessioni comuni sulla didattica della matematica diventa un patrimonio per tutti. Tale collaborazione è la ricchezza di una rete di scuole.

NUMERO e ARGOMENTAZIONE

Il catalogo di prove oggettive è il frutto di un lavoro meticoloso che si è basato sul nostro principale obiettivo di questi anni: migliorare la didattica della matematica nell'ottica del recupero dell'errore, utilizzando l'efficacia della metodologia dell'argomentazione e della discussione. Il *parlare e comunicare matematicamente*, l'*esporre il proprio ragionamento* da parte dell'allievo in un processo risolutivo permettono all'insegnante di avere chiarezza su ciò che produce una risposta: le strategie di soluzione, le intenzioni o i misconcetti. Accanto risposte dei bambini trascritte fedelmente dopo la sperimentazione, sono espressi alcuni commenti che tendono a *matematizzare* la strategia utilizzata, a interpretare gli errori e ad analizzare il linguaggio. La catalogazione delle argomentazioni non intende fissare parametri assoluti per una valutazione quantitativa, bensì vuol essere uno stimolo e una risorsa per gli insegnanti per avviare l'*educazione all'argomentazione*, approccio alla dimostrazione matematica. In tale prospettiva l'atteggiamento migliore da parte degli insegnanti è quello di *codifica* e non di correzione degli elaborati dei bambini.

---

[1] L'équipe del progetto è composta da Ferdinando Arzarello, Silvia Beltramino, Mariangela De Luca, Marina Gilardi, Paola Migliano, Silvana Mosca (coordinatrice), Massimo Perotti, Ketty Savioli.

[2] Vedi relazione a cura di Silvana Mosca in questo volume "Apprendere dal feedback dell'autovalutazione in matematica - Progetto VALMAT".

[3] "Valutazione didattica in matematica. Prove oggettive e argomentazioni su IL NUMERO", 2006, Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte, VALMAT-AVIMES.

Vediamo ora un esempio di item prodotto dai gruppi di insegnanti e sperimentato sulle classi quinte e una parte della relativa griglia di correzione.

91	x	11	=	1001
182	x	11	=	2002
*	x	11	=	4004

Che numero puoi scrivere al posto di *?______
Spiega come hai fatto a trovare quel numero.

Dalla griglia di correzione...

$$\begin{cases} ak = b \\ 2ak = 2b \\ *k = 2(2b) \end{cases}$$

per $k = 11$, $a = 91$, $b = 1001$ allora $* = 2(2a)$

L'alunno spiega in modo soddisfacente che:

4004 = 4 x 1001 (oppure 2 x 2002), 11 = k è costante

allora * = 4 x 91 (oppure 2 x 182) cioè * = 364

oppure utilizza l'operazione inversa alla moltiplicazione

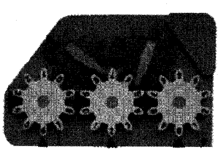
4004 : 11 = 364

La richiesta argomentativa *"Spiega come hai fatto a trovare quel numero"* eleva il livello di prestazione al massimo grado vale a dire quello di dare un senso a un risultato. Ecco due esempi di argomentazione, con la codifica e la matematizzazione della strategia utilizzata:

A. "364. Se il secondo fattore rimane uguale vuol dire che il problema è nel prodotto del primo fattore. Il risultato è sempre il doppio di quello prima. Allora è anche così nel primo fattore: 182 x 2 = 364."
Codifica: argomentazione corretta, completa e soddisfacente di ottimo livello (rappresentata in maniera convenzionale con le icone ☺☺).
Strategia: 11 è costante. 4004 = 2 (2b) → 364 = 2 (2a).

B. "364. Perché, visto che 4 004 è il doppio di 2 002, è sufficiente raddoppiare 182."
Codifica: argomentazione corretta ma non soddisfacente (rappresentata con l'icona ☹).
Strategia: non esplicita il fatto che 11 sia costante.

ZERO+1 la PASCALINA[1]



La sperimentazione della pascalina (soprattutto nelle prime classi della scuola primaria) ha generato interessanti spunti di riflessione per gli insegnanti. L'utilizzo della pascalina durante un percorso didattico matematico può consolidare alcuni aspetti inerenti al numero e al calcolo. Manipolare, osservare, ascoltare, toccare sono caratteristiche dinamiche che concorrono alla possibile visualizzazione di concetti matematici astratti come il significato del valore posizionale delle cifre e il "cambio" nel calcolo. Scoprire il funzionamento di un oggetto, il suo meccanismo e fare previsioni, argomentare un evento, sono aspetti trasversali fondamentali in campo matematico. Interessante ed efficace può essere un confronto con l'abaco dove il controllo del cambio è *esterno* e la notazione quantitativa. Inoltre il *modello ciclico* (discreto) della pascalina si sovrappone al modello lineare (continuo) della retta numerica reale sulla quale il verso di percorrenza determina il crescere o il decrescere dei valori numerici.

---

[1] cfr. anche www.avimes.it e l'inserto "Pascaline e didattica della matematica di base", in Rassegna dell'istruzione n. 5-6; Firenze-Roma MIUR, Le Monnier, 2006.

I DOCENTI E LE VALUTAZIONI DEGLI APPRENDIMENTI, INTERNE ED ESTERNE AL SISTEMA SCOLASTICO

C. Bocchino, C. Testa

Il laboratorio si proponeva di:
- riflettere sugli obiettivi dichiarati, oggetto delle indagini esterne al sistema scolastico e sulle relative prove;
- confrontare tali obiettivi e strumenti con quelli che i docenti si pongono nelle loro programmazioni e che utilizzano e/o hanno a disposizione nella pratica didattica per sollecitare, consolidare e verificare gli apprendimenti;
- discutere: se e come le scuole e i docenti utilizzino le esperienze di valutazione esterna al sistema nell'autovalutazione, traendone profitto.

Nel laboratorio si è scelto di lavorare sui temi, prendendo in esame esercizi tratti dalla prova di matematica del Servizio Nazionale di Valutazione dell'anno scolastico 2004-2005, per la classe prima superiore, ed esercizi dell'indagine PISA 2003, tratti dal volume "PISA 2003 – Valutazione dei quindicenni – quadro di riferimento: conoscenze e abilità in matematica, lettura, scienze e problem solving".

Si è fornita documentazione, oggetto di discussione, composta di:
- un estratto dalla rilevazione degli apprendimenti del Servizio Nazionale di Valutazione dell'anno 2004-2005 relativo alla prova di matematica per la prima classe della scuola secondaria superiore, con gli item, che si riferiscono ai temi NUMERO e GEOMETRIA;
- un estratto dai testi di matematica più adottati nelle classi prime superiori, con esercizi relativi agli stessi temi;
- un estratto di un dossier, che riporta i risultati di una ricerca condotta per l'UMI-CIIM dalla prof. Testa con l'aiuto di docenti e specializzati della SSIS di Torino; nel dossier sono raccolte e classificate le prove di verifica assegnate nel primo anno in più di venti scuole secondarie superiori, non solo del Piemonte; le verifiche sono 226, con circa 1593 esercizi; risalta il diverso rapporto fra i temi: gli esercizi relativi al NUMERO sono l'85% (50% di aritmetica, 35% di algebra), il 6% quelli relativi a GEOMETRIA. La geometria, quando compare, viene affrontata al termine del ripasso di aritmetica, prima dell'inizio dell'algebra. Per le prove del SNV considerate, il rapporto fra i temi è invece diverso: su 30 item, 11sono relativi a NUMERO (36%), 9 a GEOMETRIA (30%), 10 agli altri tre temi (34%); degli 11 item classificati come NUMERO, 3 sono più propriamente relativi ad ALGEBRA. Quindi, introducendo anche il tema ALGEBRA, la percentuale del tema NUMERO diventa 26%, quello del tema ALGEBRA 10%.

E' risultata evidente la differenza fra i problemi tratti da PISA 2003 e gli item del S.N.V.; i primi sono calati in contesti il più possibile prossimi alla vita dello studente, i contenuti matematici sono riferiti a quattro idee chiave (quantità, spazio e forma, cambiamento e

relazioni, incertezza) e la competenza matematica viene rilevata dal modo in cui il ragazzo utilizza conoscenze ed abilità matematiche per risolvere i problemi stessi.
La capacità di uso degli strumenti matematici viene sondata nelle prove INValSI da diversi punti di vista, richiedendo al ragazzo di:

- saper usare in modo appropriato il linguaggio matematico, saper interpretare un testo;
- saper eseguire calcoli non eccessivamente complicati, riconoscere operazioni e procedimenti;
- saper effettuare formalizzazioni mediante l'uso di simboli opportuni, interpretare un formalismo in un contesto assegnato;
- fare ed esprimere deduzioni, riconoscere i collegamenti logici;
- dare rappresentazioni adeguate, "leggere" diverse forme di rappresentazione.

Gli esercizi delle prove INValSI sono a risposta chiusa, quelli di PISA sono anche a risposta aperta e, rimanendo in uno stesso contesto relativo alla medesima situazione problematica, prevedono brevi catene di quesiti successivi di difficoltà crescente.
I questionari costituiti da quesiti a risposta chiusa sono un ottimo strumento se è necessario disporre di un gran numero di dati analizzabili in modo relativamente veloce, obiettivo e con basso margine di incertezza, ma non permettono di verificare competenze afferenti al pensiero divergente o che richiedono passaggi logici di alto livello, aspetto che crea limiti nella verifica delle competenze matematiche. A ciò occorre aggiungere la facilità di copiatura delle risposte, che può condurre, se investe un numero considerevole di prove, ad una distorsione delle informazioni e, di conseguenza, ad un quadro sulla situazione degli apprendimenti non rispondente alla realtà.

Sia il S.N.V., sia PISA forniscono valutazioni statistiche, che permettono di ottenere informazioni statistiche sul sistema scuola, di effettuare comparazioni nazionali ed internazionali; non hanno valenza formativa diretta ed immediata nel rapporto insegnamento/apprendimento, possono però costituire un ottimo strumento per le singole scuole o anche per i singoli insegnanti, utili per riflettere autonomamente sulle abilità e conoscenze acquisite dai propri alunni, sulla validità delle scelte didattiche effettuate (per es. se l'insegnamento si occupa di concetti chiave, oppure privilegia tecniche algoritmiche strumentali), sulla efficacia dell'offerta formativa programmata e sull'ampiezza, profondità e coerenza del curriculum educativo e disciplinare effettivamente svolto.
Un'attenta analisi dei risultati delle prove può contribuire a formare una guida per il miglioramento dell'insegnamento. Sarebbe al contrario un grave danno per la scuola se l'analisi degli esiti delle prove dovesse tradursi nella preoccupazione di addestrare gli allievi ad affrontare simili tipologie valutative, limitandosi ad imitarne la forma nelle prove di verifica svolte durante l'anno, senza invece curare l'effettiva crescita del retroterra cognitivo, di cui le prove di verifica dovrebbero invece rilevare e valutare l'esistenza. Il risultato sarebbe un impoverimento dell'insegnamento e quindi dell'apprendimento degli allievi e un ritorno al sapere nozionistico, ormai quasi definitivamente superato.
Conseguenze positive inoltre possono derivare dalla disponibilità di dati relativi a tutto il sistema al fine di promuovere ogni iniziativa utile a migliorarlo; altrettanto utile è la discussione che i dati possono provocare nei Collegi dei Docenti per analizzare i risultati

dell'istituto, per poter constatare il proprio livello di apprendimento di alcuni argomenti, rendendo possibile il paragone con un indicatore oggettivo quali i risultati ottenuti da altre scuole della medesima tipologia, della medesima regione, della stessa zona geografica e dell'Italia intera; è in base a questi risultati, confrontati con il proprio, che la scuola può procedere a ridefinire i propri livelli di qualità.
Considerato che la valutazione esterna è l'unica forma di valutazione non autoreferenziale esistente nella scuola italiana, vale la pena sfruttarne al massimo le potenzialità e utilizzarla come elemento oggettivo per l'autovalutazione di istituto.

La riflessione ha avuto come oggetto l'eventuale differenza fra gli esercizi proposti per la valutazione interna e quelli proposti per la valutazione esterna, l'eventuale necessità di una preparazione specifica per la valutazione esterna, le strategie adottate per migliorare le performance in occasione delle rilevazioni.
Opinione condivisa è stata che "l'obiettivo dell'insegnamento dovrebbe essere non quello di preparare a rispondere ad item di un tipo o di un altro, bensì di rendere capaci a risolvere problemi di natura diversa, mai standard".
Le ostilità, che si rilevano nei confronti del S.N.V., sono anche dovute a una scarsa conoscenza dell'iniziativa, degli obiettivi, dell'uso che si intende fare dei risultati; i docenti ritengono inoltre di non essere abbastanza coinvolti nella fase di preparazione; le verifiche esterne sono poco note e sovente i risultati non si conoscono neppure all'interno della stessa scuola.
I test, con il tempo, diventano sempre più aderenti alla realtà scolastica e, nonostante il non coinvolgimento degli insegnanti, non è assolutamente necessaria una preparazione specifica; gli esercizi presi in esame sono ritenuti alla portata degli allievi e si trovano esempi abbastanza simili sia sui testi maggiormente adottati, sia fra le verifiche raccolte nel dossier; del resto, anche nella prassi didattica dei partecipanti, sono frequenti esercizi dello stesso tipo. La differenza sostanziale è piuttosto nella forma in cui sono poste le domande, ma questo elemento non è considerato un punto critico, anzi dovrebbe permettere di evidenziare le competenze degli allievi; "un lavoro sistematico e in sintonia con gli allievi porta naturalmente i ragazzi ad avere capacità e competenze tali da affrontare anche prove diverse dal solito".
L'eventuale preparazione specifica alle verifiche esterne viene considerata come possibile causa di "distorsione" dell'attività didattica.
Specificatamente per PISA, si ritiene opportuno inserire nella prassi didattica un maggior numero di esercizi di tal tipo per favorire l'interdisciplinarietà e lo sviluppo di capacità di matematizzazione e di modellizzazione di situazioni problematiche reali.
Si è notato che le risposte degli alunni agli item INValSI, se errate, raramente permettono di comprendere la natura dell'errore; è pur vero che le prove non dovrebbero permettere la valutazione del singolo allievo, però potrebbero essere maggiormente utilizzate nella didattica, discutendone con gli allievi, per esempio; quasi tutti i docenti vorrebbero avere a disposizione la percentuale delle risposte esatte relative ai singoli item, e non solo al complesso degli item riconducibili allo stesso tema. Si è inoltre lamentato il fatto che le prove non siano facilmente reperibili.

EQUAZIONI RISOLTE ALLA MANIERA DEGLI ANTICHI

Catalani Degani Franca
(Università di Modena e Reggio Emilia)

I "maestri d'abbaco", cioè coloro che insegnavano nelle cosiddette "scuole d'abbaco" che fiorirono numerose soprattutto in Toscana dalla metà del 1200 alla metà del 1500, come facevano a tradurre i problemi aritmetici in equazioni e a risolvere queste senza far uso dell'algebra simbolica, sviluppatasi solo successivamente? Per dare una risposta sono state presentate, analizzate e discusse sei "ragioni" o problemi tratti da libri d'abbaco.
Le prime tre riguardano il procedimento di "falsa posizione"[1]; per brevità, riportiamo solo la seconda[2]:
Trovami uno numero che tratone il 1/3, 1/4, 1/5, che lo rimanente sia 21. Prima è da savere in che numero se trova 1/3, 1/4, 1/5, che si trova in 60 e la rachione de trovarllo è scrita da qui indreto. Piglia 1/3 e 1/4 e 1/5 de 60, ch'è 47 e il remanete sie 13, e io vorey 21; però multiplicha 21 via 60, fano 1260; parti per 13, ne viene 96 $^{12}/_{13}$*, sì che quello numero che voy sapere sie 96* $^{12}/_{13}$.
Noi oggi tradurremmo il problema nell'equazione

$$x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}x=21,$$

che risolviamo sommando a primo membro i monomi simili, cioè sommando le frazioni coefficienti della x, e poi ricavando $x=21\times\frac{60}{13}=96+\frac{12}{13}$. Col metodo di falsa posizione, supposto che x sia 60, si calcola il valore del primo membro, cioè 13; quindi si imposta la proporzione 60 : 13 = x : 21, da cui si ricava x.
Il metodo consente di lavorare per lo più con numeri interi, quindi con calcoli eseguibili più facilmente a mente, e le frazioni intervengono solo nel passaggio finale. Mediante l'analisi di un'altra ragione, si è poi sottolineato che esso è valido e veniva applicato solo ad equazioni della forma ax=b.
Si sono quindi lette e discusse due ragioni risolte con la "regola del cataym" o "della doppia falsa posizione". La prima di tali ragioni proposte è la seguente[3]:
Uno fa 3 viaggi. Al primo viaggio guadagnò 20 per 100 e spende 12dr; al secondo viaggio fa di 3dr 5dr e spende 17dr; al terso viaggio raddoppia i suoi denarj e spende 20. E poi non si trova niente. Adomando con quanti denari si mosse.
Per noi il problema si traduce nell'equazione:

---

[1] Cfr.: R. Franci e L. Toti Rigatelli, *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, 1979; E. Giusti, *Matematica e commercio nel Liber abaci*, in *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della Matematica in Occidente*, a cura di E. Giusti e R. Petti, Ediz, Polistampa, 2002, pp.59-120.
[2] Da: *Una raccolta di tre libri d'abbaco,* a cura di F. Cattelani Degani e A. Mantovani, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, Univ. di Siena, 25, 2000, p.116
[3] Da: Anonimo, *Libro di conti e mercatanzie,* a cura di S. Gregori e L Grugnetti, Univ. di Parma, 1998, p.45.

$$2\cdot\left[\left(x+\frac{1}{5}x-12\right)\cdot\frac{5}{3}-17\right]-20=0\,.$$

Il maestro d'abbaco esegue una prima falsa posizione: *Pognamo che si movesse con 30dr.* E svolgendo i calcoli da noi rappresentati a primo membro, nell'ipotesi di $x = 30$ trova 26. *Adonque, diremo così: per 30 ch'io m'appuosi mi viene più 26.* Ma poi prosegue: *Hora fa' un'altra positione e poniamo che si movesse con 25dr.* E svolgendo i calcoli a primo membro nella nuova ipotesi di $x = 25$, trova *6*. *Adonque, diremo chosì: per 25 ch'io mappuosy, mi viene più 6.* Infine ricava il valore di quella che è per noi l'incognita x attraverso la formula

$$\frac{25\cdot 26-30\cdot 6}{26-6}=23+\frac{1}{2}\,.$$

In generale, col metodo di doppia falsa posizione, nell'equazione $ax+b=c$ si suppone $x = x_1$ e poi $x = x_2$ ottenendo rispettivamente $ax_1+b=c_1$ e $ax_2+b=c_2$.
Poi si osserva che se passando dal valore x_1 al valore x_2 si è avuto un incremento (o decremento) del primo membro tale da passare dalla quantità c_1 alla quantità c_2, lo scostamento che si dovrà avere da x_1 per giungere al giusto valore della x dovrà far passare da c_1 a c, ovvero

$$(x_1 - x_2) : (c_1 - c_2) = (x_1 - x) : (c_1 - c)$$

da cui
$$x=\frac{x_2(c_1-c)-x_1(c_2-c)}{(c_1-c)-(c_2-c)}\,.$$

Il procedimento a prima vista appare un po' macchinoso, ma attraverso l'esame anche di un'altra ragione, si è discusso sulla sua validità e sulla sua proponibilità anche nella didattica attuale. Il confronto dei valori c_1 e c_2 rispetto al valore richiesto c permette di capire se nel passaggio da x_1 a x_2 si è ad esempio aumentato troppo, nel qual caso la soluzione cercata sarà intermedia tra x_1 e x_2,o troppo poco, e quindi la soluzione sarà maggiore di x_2, ed anzi si può stimare se ne dovrà essere maggiore di poco o di molto.
Infine si è presentata una "ragione" risolta mediante un'equazione di secondo grado:
(da: DIONIGI GORI, Libro d'Albaco, (Siena, 1544))[1]*: Uno conpra 10 dozine di berette fra verdi e rosse, più verdi che rosse e trova che multiprichata la quantità delle rosse contra le verdi fanno 21; adimando quanto n'aveva di ciascuna sorte. Questa non vol dire altro si non fammi di 10, 2 parti, che multiplichata l'una contro l'atra facia 21; poremo l'una sia una co, l'atra 10 m. una co et multiprichata una co via 10 m. 1 co farà 10 co m. 1 ce eguali a 21; dimeza le co, sarano 5, multipricate in sé fa 25, trane 21 numero del ragione, resta 4 et 5 m. R 4 è una parte e 5 p. R 4 è l'altra.*
Si è di fronte ad un esempio di "algebra sincopata", dove *co, ce, m., p.* e *R* stanno rispettivamente per *cosa* ossia l'incognita *x*, *censo* ossia x^2, *meno, più* e *radice quadrata*. Il proble-ma è tradotto nell'equazione per noi scritta coi simboli $x(10 - x) = 21$, ossia $10x - x^2 = 21$ e quindi $x^2+21=10x$, equazione che viene risolta applicando l'usuale formula ridotta, formula che era ben nota ai maestri d'abbaco fin da quando Leonardo Fibonacci aveva illustrato nel suo *Liber abaci* i metodi algebrici di Al-Kuwarizmi.

---

[1] Cfr.: R. Franci e L. Toti Rigatelli, *Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento*, Quattro Venti, 1982, p.60.

Il laboratorio si è concluso illustrando un paio delle dimostrazioni geometriche di Al-Kuwarizmi sulla risoluzione delle equazioni di secondo grado[1], discutendo dell'opportunità di proporle anche ai nostri studenti, come complemento alla tradizionale dimostrazione algebrica, spesso vista come troppo astratta.

[1] Cfr.: C. S. Roero, *Algebra e aritmetica nel Medioevo islamico*, in *Un ponte sul Mediterraneo*, a cura di E. Giusti e R. Petti, Ediz, Polistampa, 2002, pp.7-44

PROVE DI COSTRUZIONE/PERSONALIZZAZIONE DI UN "LIBRO DI TESTO" ELETTRONICO

Gruppo di lavoro coordinato da
Carlo Dapueto (Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova)

Il lavoro di gruppo è stato introdotto da alcune riflessioni del coordinatore sul concetto di "libro di testo":
- esistono, all'interno del dibattito internazionale sull'insegnamento della matematica, diverse posizioni sulle eventuali distinzioni tra libro di testo, manuale e libro scolastico, che investono anche il concetto più generale di "trasposizione didattica" (anche un lavoro scientifico non è forse, nella scelta delle definizioni, della esplicitazione dei passaggi, dell'articolazione dei paragrafi, ..., una forma di trasposizione didattica?);
- un libro di testo, comunque, è sicuramente un "modello" della "matematica" e della "attività matematica", che incorpora non solo conoscenze, ma anche intenzioni, visioni, filosofia, ... , ed eventuali misconcezioni dell'autore;
- è un artefatto cognitivo, come lo è ogni libro, ma, a differenza ad es. di un romanzo, è per l'autore un veicolo di interazione con due tipologie di utenti, l'alunno e l'insegnante;
- almeno, dovrebbe esserlo, mentre spesso, per come è impostato e/o come viene usato, per l'alunno e, in parte, per l'insegnante rimane solo una "cosa", non riesce a stabilire relazioni "culturali" e "cognitive" con e tra i soggetti che lo usano;
- su questi aspetti incidono anche il formato e l'articolazione (solo testo o anche schede di lavoro, presenza di una "guida" e/o di una esplicitazione delle scelte culturali e didattiche dell'autore, presenza di sussidi didattici, flessibilità spazio-temporale che consenta diversi percorsi d'uso da parte dell'insegnate e/o dello studente, ...);
- nella scelta dei libri di testo da parte dei docenti considerazioni di questo genere sono spesso del tutto assenti; perché?

Su quest'ultimo interrogativo si è aperta una breve discussione e si è avviata una attività di sperimentazione via Internet e di analisi critica (che tenesse conto degli aspetti sopra discussi) degli "Oggetti Matematici" dal sito http://macosa.dima.unige.it.
Si tratta di materiale ipertestuale rivolto, essenzialmente, alla scuola secondaria superiore, che costituisce lo sviluppo e la trasformazione in versione elettronica del progetto "MaCoSa" per il biennio superiore. Esso include una specie di dizionario enciclopedico matematico, schede di lavoro, eserciziario, software, animazioni, ... che può essere usato in vari modi: come testo di riferimento per la classe, eventualmente affiancato da un libro cartaceo stile "Che cos'è la matematica" di Courant-Robbins; come fonte di materiali o idee o riflessioni "didattico-epistemologiche" che il docente può usare per costruirsi proprie schede di lavoro, "dispense", ... per la classe; come sussidio da far usare agli alunni per revisioni o approfondimenti, individuali o a gruppi; ...

La sperimentazione e la discussione del materiale ne ha messo in luce l'impostazione didattico-culturale, da alcuni condivisa e da altri no (si tratta di materiale che non vuole essere buono per tutti gli usi), ha aperto una discussione su potenzialità e limiti delle presentazioni ipertestuali, e l'opportunità che, di fronte al livello scadente dei prodotti della nostra editoria scolastica, purtroppo adeguato alle scelte di adozione operate dalla maggioranza dei docenti, si sviluppi, sfruttando Internet, una maggiore diffusione, un maggiore utilizzo, e un maggiore scambio di osservazioni critiche, sui materiali alternativi prodotti e sperimentati da docenti e gruppi di docenti.

PROBLEMI DI MODELLIZZAZIONE LINEARE: UN CONTESTO RICCO PER VALUTARE CONOSCENZE E COMPETENZE SULLE FUNZIONI

Laboratorio didattico per insegnanti del biennio della scuola superiore

Rosa Iaderosa & Elisa Quartieri, GREM, Università di Modena e Reggio E.

Principale obiettivo del laboratorio è stato presentare tipologie di problemi che caratterizzino una varietà di situazioni da analizzare in termini di *interpretazione – transfert – adattamento* in situazioni nuove e di promuovere una discussione attorno al termine modellizzazione come descrittore di un'attività che sintetizzi la capacità di:

– **formalizzare** attraverso un modello matematico una situazione problematica
– **analizzare** aspetti del modello in relazione alla situazione di partenza e reinterpretarli.

Un altro obiettivo è stato identificare il contesto dei problemi di modellizzazione lineare come ambito particolarmente ricco per promuovere e accertare competenze;
Il laboratorio è stato articolato seguendo l'analisi, dal punto di vista didattico, di alcuni problemi di modellizzazione lineare, e sottolineando, attraverso i vari passi, quelli che sono i punti nodali dal punto di vista dell'apprendimento e delle possibili difficoltà degli allievi. A titolo esemplificativo, in fondo, è riportato uno dei problemi discussi.
Sono stati evidenziati, come momenti significativi di un percorso risolutivo di questo tipo:

- la messa in formula del problema
- l'individuazione di condizioni non esplicitamente espresse nel testo del problema
- la rappresentazione delle formule nel piano cartesiano.

Si è rilevato come, durante queste fasi, emerga con evidenza la necessità di:

– riconoscere le scritture, ottenute mediante la messa in formula delle relazioni contenute nel problema, nel loro aspetto funzionale, ed interpretarle nel piano cartesiano;
– riconoscere i vincoli espressi dal problema come un sistema misto di equazioni e disequazioni;
– rappresentare graficamente come rette le funzioni lineari,
– interpretare il significato della intersezione tra rette riconducendosi all'ambito algebrico (risoluzione di sistemi lineari) e reinterpretando il punto-soluzione nel contesto del problema,
– tradurre le disuguaglianze tra le variabili del problema come disequazioni e quindi, nella interpretazione grafica, trasferire le relazioni di disuguaglianza alla particolare posizione reciproca di due rette (tali rette nel grafico sono di pendenza diversa, quindi una "sta al di sopra" dell'altra, e conseguentemente individuano semipiani che si intersecano);
– gestire con una certa consapevolezza il differente ruolo di variabili e parametri nella equazione lineare, in particolare facendo riferimento alla scrittura e alla rappresentazione della funzione obiettivo.

Si è sottolineato come il contesto dei problemi di modellizzazione lineare appaia significativo per **testare l'acquisizione di competenze,** secondo quanto emerso da nostre esperienze didattiche compiute con allievi del biennio di scuola superiore di indirizzi liceali diversi. La messa in atto, infatti, da parte dello studente, di tutta questa gamma di

prestazioni, prima evidenziate, richiede non la semplice acquisizione di conoscenze, ma soprattutto la capacità di rielaborare queste in situazioni complesse, in cui contemporaneamente è richiesto il coordinamento di diversi registri rappresentativi anche a livello interpretativo. Ci si è soffermati sul fatto che, per questo motivo, non è facile valutare gli studenti in questo ambito a breve e medio termine; anzi, la nostra esperienza ci porta a ritenere che riproporre problemi di questo tipo a distanza di tempo rispetto a quando tali attività sono state condotte con sistematicità, consente di valutare come competenze acquisite prestazioni che a breve termine possono essere considerate semplicemente come conoscenze acquisite. Si è insistito sul fatto che nella programmazione scolastica debbano essere previsti dei momenti istituzionalizzati, in cui cercare di far riemergere a distanza di tempo le esperienze significative compiute nell'apprendimento. E' principalmente questo che **contribuisce alla costruzione di vere competenze** nell' ambito di ciascuna disciplina.
La discussione tra i docenti presenti, che si sono mostrati interessati alle questioni poste, ha riguardato anche la fattibilità nei vari istituti superiori di percorsi di questo tipo, in relazione ai vincoli posti dal tempo, dalla prescrittività di certi programmi, e anche dalla carenza di materiali didattici utili per lavorare più intensamente sui problemi di modellizzazione lineare, che i libri di testo correntemente in uso non forniscono.
A riguardo, è stata presentata una carrellata di proposte, per illustrare come sia possibile e utile, al di là di quanto fanno usualmente i testi che ne parlano, variare molto i contesti, cosa estremamente utili ai fini dell'apprendimento.
Si è infine ribadito come risulti utile inoltre, proporre, ai fini della formalizzazione algebrica, situazioni problematiche "grezze", che forzino nello studente una maggiore varietà e gradualità nei livelli di formalizzazione richiesti.

Un problema analizzato durante il laboratorio.
Il problema è centrato sull'interpretazione del modello algebrico proposto e l'interpretazione ai fini del problema della sua elaborazione sintattica e grafico-geometrica.
Prima parte del problema
Alla piscina MARE AZZURRO, per tutta l'estate (dal 15/6 al 15/9), si applicano le seguenti tariffe:
Piscina Mare Azzurro
Ingresso
▪*Intero.......................... € 8*
▪*Ridotto.........................€ 5* (*fino a 10 anni)*
Abbonati
▪*Intero..........................€ 4*
▪*Ridotto.........................€ 2*
▪*Abbonamento.............€ 20*
Conviene fare l'abbonamento ? E se tu avessi un fratello di 8 anni, a lui converrebbe? Esplora la situazione rappresentando algebricamente il prezzo nei due casi in funzione del numero di volte in cui una persona (adulto o bambino) va in piscina.
Seconda parte del problema
Un gruppo di amici, composto da 5 adulti e 8 bambini, decide di andare in piscina a turno nel periodo estivo, portando almeno due bambini ogni volta, perché non tutti sono

liberi dal lavoro per l'intero periodo e i bambini hanno comunque bisogno di almeno un accompagnatore adulto.
Per risparmiare, si decide di fare l'abbonamento soltanto per gli adulti, e quindi di ottenere la tariffa agevolata di 5 euro per ciascuno di essi, mentre ogni bambino pagherà 4 euro l'ingresso.
Si otterrà quindi un insieme di vincoli di questo tipo (spiega perché):

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ y < 8 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$$

La spesa giornaliera sarà data quindi dalla funzione:

$$s = 8x+2y$$

Considera i grafici delle funzioni $s(x, y)$ *così descritte, che descrivono la spesa giornaliera per la piscina, al variare di s* ($8x+2y=12$, $8x+2y= 15$, *ecc.)*
Quale relazione trovi tra questi grafici e quello della funzione $8x+2y = 0$*?*
Dopo aver rappresentato graficamente la regione ammissibile consentita dai vincoli del sistema, in quale punto si troverà il valore ottimale della spesa giornaliera? Quindi, quanti adulti e quanti bambini costituiscono il numero ottimale da portare in piscina ogni giorno? Quale valore della spesa gli corrisponde?
Durante il laboratorio, sulla base di protocolli di studenti, sono stati analizzate le principali difficoltà da loro incontrate ed evidenziate le attività necessarie, spesso di tipo metacognitivo, per il loro superamento.

Bibliografia

Iaderosa, R. 2003, *Grafici e funzioni: aspetti algebrici, geometrici e di modellizzazione del reale*, Pitagora, Bologna