Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai Soci e non è in vendita.

FASCICOLO MONOGRAFICO STAMPATO CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA, DEL MINISTERO DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA SCIENTIFICA E TECNOLOGICA (fondi ex 40%) NONCHÉ DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE.

Autorizzazione n. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40138 Bologna (Italia)

Ottobre 2001
Supplemento al n. 10

ISSN 0393-0998

Ottobre 2001
Supplemento al n. 10

Period. mensile spedizione in A.P.
art. 2 comma 20/c legge 662/96
Filiale di Bologna

Anno XXVIII

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

XXI CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

«NUCLEI FONDANTI DEL SAPERE MATEMATICO NELLA SCUOLA DEL 2000 (IN RICORDO DI FRANCESCO SPERANZA)»

SALSOMAGGIORE TERME (PR), 13-14-15 APRILE 2000
a cura di Giuseppe Anichini

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Indice

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Dedicato a Francesco Speranza

Questo volume raccoglie gli Atti del convegno didattico che la CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) tradizionalmente organizza ogni anno. In questa occasione la sede del convegno, la data stessa del convegno sono state scelte per ricordare un matematico che all'insegnamento della Matematica ha dedicato tutte le sue migliori energie ovvero Francesco Speranza.

Francesco Speranza era nato a Milano il 4 ottobre 1932. Come alunno del collegio Ghislieri ha studiato a Pavia dove si è laureato nel 1954 con Vittorio Emanuele Galafassi. Nel 1967 è stato nominato professore ordinario, dapprima di Geometria a Messina e, successivamente, di Matematiche Complementari a Parma.

L'influsso delle idee di Francesco Speranza è stato orientato verso le riflessioni sulle "matematiche" viste come linguaggio, con una attenzione particolare all'epistemologia. È opinione comune che, trasversale a tutto il suo lavoro, possa essere considerato lo studio della difficoltà di interpretare i fenomeni dell'insegnamento "versus" l'apprendimento.

Tale difficoltà può essere riferita all'iniziale esperienza di Speranza riguardo la scuola dell'obbligo e riguardo all'inserimento dei portatori di handicap: tali tematiche, oggi considerate "normali" in qualunque discussione sulla scuola, non lo erano sicuramente negli anni settanta, periodo in cui Speranza già iniziava a riflettere sui protocolli degli alunni, sulle riprese video delle situazioni didattiche in classe, ecc.

Da un articolo di un suo allievo, che riferisce di una partecipazione di Francesco Speranza ad una trasmissione televisiva (quando il bianco e nero rendeva forse culturalmente apprezzabile lo strumento di comunicazione!), si possono ricordare due punti sottolineati in quella occasione:

- la matematica "moderna" è una disciplina per tutti e non solo per le persone nate con il "sacro fuoco" della matematica;
- la matematica occupa una posizione strategica, al confine fra le discipline scientifiche e quelle umanistiche.

Adesso, a cavallo del secolo, nel momento in cui si parla (o si cercava di parlare?) di riforma della scuola (con particolare riferimento alla scuola di base ed a quella dell'obbligo), queste due affermazioni, che vogliono sottolineare un aspetto di valenza culturale che una commissione di studio nominata dall'UMI ha sintetizzato in "Matematica per ogni cittadino", sono di quantomai pregnante

attualità.

Dalle parole di Speranza si auspicava allora quello che ancora oggi viene richiesto, ovvero il cercar di rompere l'isolamento di cui sembra soffrire la matematica, soprattutto nella cultura (oggi massmediatica) dominante, ricollocandola in un posto centrale della Cultura (e, seguendo lo spirito di Francesco, volutamente non aggiungo aggettivi a questo sostantivo).

Tutto ciò Francesco Speranza ha cercato di costruire nelle sue opere, attraverso una concezione epistemologica "non assolutista", secondo cui la matematica deve essere vista *come una costruzione umana, problematica e in evoluzione.*

Di qui la sua continua ricerca delle interazioni della matematica non solo con la fisica o le scienze, ma anche, e specialmente, con la linguistica, la psicologia, la filosofia, le arti figurative.

Ho avuto il privilegio di conoscere, per molti anni, Francesco Speranza come collega impegnato nella Commissione Scientifica dell'UMI. Ed è stato in occasione di appassionate, franche e vivaci discussioni sui temi dell'insegnamento, nella scuola e nell'università, forse ancor più che in conferenze ufficiali, che ho potuto apprezzare il genuino entusiasmo e la grande disponibilità di Francesco a confrontarsi con i colleghi, a sviscerare gli aspetti positivi di ogni proposta, al solo scopo di costruire, migliorare e arricchire la possibilità di far interagire – i bambini, gli alunni e gli studenti di ogni fascia scolastica – con la matematica, nel suo aspetto più culturale e più fecondo per la società civile.

Gli autori degli articoli presenti in questo volume, i membri della CIIM, la Commissione Scientifica dell'UMI hanno voluto così ricordare, in uno dei modi che sicuramente avrebbe gradito, l'eredità scientifica e culturale di questo nostro maestro.

Giuseppe Anichini - (Segretario UMI).

XXI Convegno Nazionale sull'Insegnamento della Matematica

Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)

Salsomaggiore Terme (PR)
13-14-15 Aprile 2000

Programma

Giovedì, 13 aprile 2000

- Saluti delle Autorità e del Presidente dell'UMI
- prof. Claudio Bernardi (Univ. La Sapienza, Roma) "La mia matematica"
- prof. Lucio Russo (Univ. Tor Vergata, Roma) "Alcune considerazioni sulla didattica della matematica"
- Gruppi di lavoro
- Comunicazioni
- Laboratori
- Proiezione di film matematici

Venerdì, 14 aprile 2000

- prof. Marco Borga (Univ.Genova) "Dimostrazioni e Fondamenti"
- prof. Massimo Galuzzi (Univ.Milano) "Diffusione e critica delle idee di Bourbaki in Italia nel secondo dopoguerra"
- Tavole rotonde
- prof. Gabriele Lolli (Univ.Torino) "Matematica e donne"
- Laboratori
- Proiezione di film matematici

Sabato, 15 aprile 2000

- Tavola rotonda
- prof. Michele Emmer (Univ. La Sapienza, Roma) "Escher: utile per la matematica?"

RELAZIONI

Dimostrazioni e fondamenti

Marco Borga

1. Introduzione

Quando si parla di fondamenti della matematica, si fa in genere riferimento alle ricerche che sono state condotte, nel periodo che va approssimativamente da Frege a Gödel, dalle cosiddette "scuole fondazionali" (logicismo, intuizionismo, formalismo). Si sottolinea poi, quasi sempre, il ruolo importante svolto dalla logica (matematica) in relazione alle indagini fondazionali e, non di rado, si aggiunge che i fondamenti hanno a che fare anche con la filosofia della matematica, nel senso che le scuole fondazionali affrontavano anche problemi filosofici, in particolare quello dell'esistenza degli enti matematici.

A nessuno sfugge, d'altronde, che il discorso così impostato appare relativizzato a un certo periodo storico, dagli ultimi anni dell'Ottocento alla data fatidica del teorema di Gödel (1931), sicché si deve prendere posizione sulle due alternative seguenti: o le indagini sui fondamenti si sono esaurite col teorema di Gödel, o invece – come si vuole sostenere in questo contributo – vi sono temi fondazionali, ereditati dalla tradizionale cultura dei fondamenti o genuinamente nuovi, che permettono ancora oggi di attribuire un interesse scientifico alla problematica. Il riferimento cui prima si è accennato, ai rapporti fra logica, fondamenti e filosofia della matematica, rivela altresì una più o meno diretta ricaduta di queste tematiche sull'insegnamento della matematica: alcune riflessioni sull'assiomatica e sui problemi metateorici possono trovar posto nel triennio della scuola secondaria superiore; la logica è presente nei programmi dalle elementari alle superiori e, se viene intesa nel senso più ampio del termine, va da sé che di deve in qualche modo presupporre e al tempo stesso coltivare in relazione alle varie forme di ragionamento (matematico e non); la filosofia della matematica, è perfino superfluo sottolinearlo, si trova alla base dell'insegnamento nel senso che una didattica della matematica presuppone sempre una filosofia della matematica, anche se questa rimane il più delle volte implicita e deve in ogni caso essere mediata con le capacità di apprendimento dei discenti.

2. Cenni storici al problema dei fondamenti

Il quadro di riferimento tradizionale dei rapporti fra logica, fondamenti e filosofia della matematica può schematicamente essere descritto illustrando due linee di ricerca, idealmente alquanto diverse fra loro, che fra Ottocento e Novecento hanno finito per confluire. La prima è quella che potremmo etichettare come "evoluzione del metodo assiomatico": si parte dalla visione euclidea dell'assiomatica e si arriva alla fine alla cosiddetta "assiomatica moderna" (a volte detta "hilbertiana", facendo in verità torto alla scuola di Peano e a Pieri in particolar modo). Nel passaggio, che di fatto avviene quasi interamente nella seconda metà dell'Ottocento, viene meno il criterio dell'evidenza nella scelta degli assiomi (tipicamente della geometria) e si rinuncia a caratterizzare (in modo necessariamente vago) i concetti primitivi, dei quali si arriva a dire che sono "definiti implicitamente" dagli assiomi; matura dunque l'idea di sistema ipotetico deduttivo (termine coniato da Pieri) e si cominciano ad affrontare problemi metateorici relativi alle teorie assiomatiche, in particolar modo l'indipendenza e la non contraddittorietà. I protagonisti sono essenzialmente quelli già menzionati, la scuola di Peano e Hilbert, ma con differenze di impostazione non trascurabili: se la scuola di Peano compie una sintesi di sapore ottocentesco, le idee di Hilbert, sia pur inizialmente con qualche lato oscuro, influenzeranno le ricerche sui fondamenti nel corso del Novecento. Questa differenza di impostazione si può notare in particolare nell'atteggiamento delle due scuole di fronte ai citati problemi di indipendenza e non contraddittorietà: per la scuola di Peano una prova di indipendenza significava che si era ottenuto quell'ideale di "purezza logica" o "perfezione logica" di una teoria assiomatica (della quale si erano effettivamente individuate le idee fondamentali, non ulteriormente riducibili); per Hilbert, al contrario, una prova di indipendenza prefigurava una nuova teoria, quella cioè che annoverava fra i suoi assiomi la negazione dell'assioma di cui si era provata l'indipendenza (era in definitiva, in un certo senso, uno strumento di effettiva ricerca matematica). Ancora più marcata è la differenza di impostazione per quanto concerne la non contraddittorietà: se Peano e la sua scuola, inizialmente con l'eccezione di Pieri (il quale peraltro tornò ben presto sulla posizione dominante nella scuola), mostrano indifferenza di fronte al problema, Hilbert lo ritiene tanto importante da inserirlo (riferito alla teoria dei numeri reali) in una posizione di primo piano nella celebre lista di problemi matematici aperti esposta nel 1900 a Parigi, dopo averlo affrontato per la geometria nelle *Grundlagen del 1899.*

L'altra linea di ricerca è quella che possiamo ritenere iniziata col movimento del rigore in analisi, il cui punto culminante dal punto di vista fondazionale è la definizione, ottenuta nel 1872, dei reali a partire dai naturali (e da altre nozioni che oggi diremmo insiemistiche). Il passo successivo fu quello di rivolgere l'attenzione all'aritmetica, che si era trovata, insieme a quelle tecniche insiemistiche o di logica delle classi che dir si voglia, a fondamento della matematica. E qui ritroviamo uno dei protagonisti di prima, ossia Peano, che nel 1889 assiomatizza l'aritmetica e ritiene con ciò di averle dato il necessario rigore. Troviamo però anche Frege, che tenta un passo ulteriore: mostrare che l'aritmetica, e per quanto già era stato realizzato anche il resto della matematica, poteva essere ricondotta alla logica. L'impresa di Frege non riesce: è l'antinomia di Russell, nel 1902, a segnarne il fallimento e a portare, anche per questa via e questa volta in modo concreto, al problema della non contraddittorietà.

Si arriva in definitiva a quella che, con un termine introdotto da Weyl, siamo abituati a chiamare la "crisi dei fondamenti". I tentativi di porre rimedio a tale crisi, che culmineranno col teorema di Gödel, sono ancora oggi indicati come il periodo d'oro delle ricerche sui fondamenti (anche se, come si è già osservato, fanno ormai parte di quella che più appropriatamente si dovrebbe considerare la storia dei fondamenti).

Da un lato troviamo il tentativo di Russell di proseguire il programma logicista di Frege dopo averlo emendato con l'introduzione della teoria dei tipi e semplificato formalmente usando il più conveniente simbolismo di Peano; il punto d'arrivo è costituito dai *Principia Mathematica*, scritti con Whitehead, i cui esiti, peraltro assai ragguardevoli, non soddisfano i requisiti di riduzione della matematica alla logica: il sistema dei *Principia* contiene fra gli altri tre assiomi, quello di scelta, quello dell'infinito e quello di riducibilità (finalizzato a un parziale recupero delle definizioni impredicative), sul cui carattere puramente logico pesano molti dubbi. Si preferisce oggi insistere, se mai, sul fatto che l'eredità dei *Principia* è la riduzione della matematica alla teoria degli insiemi, che è una disciplina fondante ma non è pura logica.

Una posizione assai peculiare, di fronte alla crisi dei fondamenti, è rappresentata dall'intuizionismo, di cui Brouwer è considerato il fondatore e l'esponente più rappresentativo anche se si deve a Heyting, diversi anni dopo, quell'opera di chiarificazione e di "mediazione" che ne ha in seguito favorito la (relativa) diffusione. L'intuizionismo si ricollega anch'esso a una tendenza che precede la scoperta delle antinomie, ossia al movimento dei costruttivisti tedeschi seguaci di Kronecker e ai preintuizionisti francesi (Baire, Borel, Lebesgue, ...). Dal punto di vista intuizionista la diagnosi di fronte alla crisi dei fondamenti è essenzialmente la seguente: le antinomie, e gli altri problemi fondazionali emersi nel frattempo nell'ambito della teoria degli insiemi, sono dovuti all'eccessivo uso di procedimenti non costruttivi. Di qui la proposta di costruire una nuova matematica – o meglio, nell'ottica intuizionista, di ricostruire *la* matematica – ispirandosi a canoni costruttivi e al tempo stesso, per salvare le proprietà del continuo, con l'aggiunta di nuovi elementi come le successioni di scelte. La matematica che ne risultava, da un lato forse più sicura nei suoi fondamenti ma dall'altro considerevolmente "diversa" dalla matematica classica, non fu considerata una soluzione alla crisi dei fondamenti; o forse sarebbe più giusto dire che nella disputa fra Brouwer e Hilbert, dai toni a volte particolarmente accesi, alla fine ebbe la meglio Hilbert, la cui accusa agli intuizionisti era quella di voler "smembrare" e "mutilare" la matematica.

In effetti Hilbert ebbe la meglio proponendo un programma fondazionale che da un lato non era fuorviante rispetto alla pratica matematica corrente, dall'altro appariva in grado, in linea di principio, di risolvere una volta per tutte il problema dei fondamenti: il primo passo era la formalizzazione delle teorie matematiche attraverso l'esplicitazione del loro apparato logico; quello successivo era costituito dalla ricerca di una dimostrazione diretta di non contraddittorietà, da ottenersi lavorando sulle dimostrazioni formali, con tecniche affidabili, nell'ambito di quella che si era delineata come teoria della dimostrazione. Per l'autorevolezza di Hilbert, per il fascino, matematico e filosofico al tempo stesso, esercitato dal problema della non contraddittorietà, l'impostazione hilbertiana finì per prevalere e, alla luce anche di alcuni successi parziali ottenuti negli anni venti (con le dimostrazioni di non contraddittorietà per alcune parti dell'aritmetica ottenute da Ackermann e Von Neumann), sembrava davvero costituire la via giusta per uscire dalla crisi dei fondamenti.

Il teorema di Gödel, o meglio i teoremi di Gödel, rivelano tuttavia nel 1931 l'inadeguatezza del programma (originario) di Hilbert: il primo teorema stabilisce l'incompletezza sintattica dell'aritmetica (e dei sistemi che la contengono), il secondo mostra che una prova di non contraddittorietà deve far uso di tecniche dimostrative che non sono formalizzabili nella teoria in esame e quindi, in particolare, il complesso dei metodi "finitisti" che Hilbert aveva proposto di impiegare nelle dimostrazioni di non contraddittorietà non poteva portare al risultato auspicato.

Questa è dal più al meno la storia come la si racconta di solito e, se il racconto finisse qui, bisognerebbe prendere atto che si tratta in effetti di una storia di relativi fallimenti, almeno guardando a quelli che erano gli obiettivi originari, non raggiunti, delle scuole fondazionali. Ma prima di raccontare un altro pezzo della storia, è utile soffermarsi su un punto che, altrimenti, rischierebbe di essere trascurato. Il programma di Hilbert aveva fatto entrare in gioco le dimostrazioni formali, o più in generale la formalizzazione come passo ulteriore rispetto all'assiomatizzazione: una dimostrazione formale si configura come una successione finita o come un albero finito di formule fra loro collegate attraverso regole logiche completamente esplicitate (l'esempio più ovvio e più noto di queste ultime è la regola del *modus ponens*, che permette di passare dalle premesse α e $\alpha \rightarrow \beta$ alla conclusione β). Le dimostrazioni formali erano quelle che si dovevano studiare in teoria della dimostrazione, con lo scopo di far vedere che era impossibile dimostrare una contraddizione. Ebbene, pur avendolo (sfortunatamente) scritto in qualche occasione, vi sono molti dubbi sul fatto che per Hilbert la matematica "vera e propria" fosse quella formalizzata; la formalizzazione era da considerarsi un passo preliminare all'analisi metateorica, originariamente finalizzata, come si è detto, alla ricerca di una prova di non contraddittorietà. Per essere più espliciti, nessun sostenitore del formalismo hilbertiano si sognerebbe di pretendere che nella normale attività di ricerca il matematico debba procedere con dimostrazioni formali, a meno che il matematico di turno non sia ... un computer (il che lascia intendere, ma il discorso ci porterebbe troppo lontano, che le dimostrazioni formali hanno di recente trovato una nuova collocazione in quei settori di ricerca in cui ci si occupa di dimostrazione automatica).

3. Dopo Gödel ...

In seguito al teorema di Gödel vi fu un certo disorientamento, non drammatico come a volte lo si racconta, anche fra i sostenitori del programma hilbertiano. Quest'ultimo, tuttavia, ritrovò presto un nuovo slancio in virtù di un importante risultato ottenuto indipendentemente da Gentzen e Gödel nel 1933: si tratta della dimostrazione di equiconsistenza dell'aritmetica classica e della sua versione intuizionista, il cui passo cruciale era la "traduzione" della prima nella seconda. Il risultato fu inteso come una dimostrazione (non finitista!) della non contraddittorietà dell'aritmetica classica, ma soprattutto consentì di affermare che i metodi intuizionisti, per loro natura affidabili, erano più potenti di quelli originariamente proposti da Hilbert. Aveva dunque una legittimità epistemologica l'idea di riformulare un programma "modificato" o "generalizzato" di Hilbert con lo stesso obiettivo originario (la non contraddittorietà), da ottenersi tuttavia per mezzo dei più generali metodi costruttivi impiegati nella matematica intuizionista. In tale linea di ricerca si ottennero ben presto dimostrazioni dirette della non contraddittorietà dell'aritmetica classica, ad esempio ad opera di Gentzen nel 1936 e, con una versione che ebbe miglior fortuna, nel 1938.

Il vero problema, comunque, non era tanto la non contraddittorietà dell'aritmetica, ma piuttosto il caso dell'analisi (che, seguendo le indicazioni di Hilbert e Bernays, era stata inizialmente identificata con l'aritmetica del secondo ordine), per la quale le cose si preannunciavano assai più complicate alla luce del teorema di Gödel: quanto più una teoria è generale, infatti, tanto più è problematico trovare tecniche dimostrative che almeno in parte trascendano la teoria pur possedendo un carattere costruttivo. Alcuni risultati sono stati conseguiti a partire dagli anni sessanta, sia cercando di estendere le dimostrazioni già ottenute a sottosistemi dell'aritmetica del secondo ordine, sia, secondo una linea di ricerca piuttosto recente, sviluppando la matematica, o quanta più matematica è possibile, in sistemi formali che, in un senso da precisarsi, si possano considerare "deboli": si tratta, mi si passi il riferimento un po' tecnico, o di estensioni conservative dell'aritmetica del primo ordine o di sottosistemi dell'aritmetica del secondo ordine che sono estensioni conservative dell'aritmetica ricorsiva primitiva per certe classi di formule; in quest'ultimo caso, identificando i metodi finitisti con quelli dell'aritmetica ricorsiva primitiva, siamo di fronte a soluzioni, ancorché parziali, del programma *originario* di Hilbert.

Accanto alla prosecuzione del programma hilbertiano, è doveroso almeno citare, in ordine sparso, alcuni altri risultati fondazionali ottenuti nel periodo postgödeliano. Gli studi sulla ricorsività, inizialmente rivolti alla chiarificazione concettuale della nozione di algoritmo, culminano in una prima fase con la tesi di Church e aprono la strada per successive ricerche sulla complessità computazionale. Ai tradizionali problemi di indipendenza e non contraddittorietà, e a specifici problemi fondazionali della teoria degli insiemi, si ricollegano i risultati di Gödel e Cohen sull'assioma della scelta e sull'ipotesi del continuo: Gödel dimostra nel 1938 che non portano contraddizione se vengono aggiunti agli altri assiomi della teoria degli insiemi; Cohen, in un lavoro assai celebre del 1963, prova che anche la negazione dell'assioma della scelta e la negazione dell'ipotesi del continuo non portano contraddizione, sicché si ottiene un risultato di indipendenza per certi versi simile a quello relativo al V postulato di Euclide. I "fondamenti della geometria", argomento di gran moda a cavallo fra Ottocento e Novecento, tornano alla ribalta sul finire degli anni cinquanta in un importante lavoro di Tarski, ove viene presentata una formalizzazione della geometria e ne vengono studiate alcune proprietà

metateoriche, e in diversi altri contributi (alcuni dei quali, per inciso, si ricollegano a risultati ottenuti da Pieri all'inizio del secolo). I fondamenti della geometria meriterebbero in verità un discorso a parte, che non può qui essere proposto per ragioni di spazio; vogliamo solo menzionare l'idea di recente espressa da Simpson di una "reverse geometry", con caratteristiche simili a quelle della "reverse mathematics", che si aggiunge ad altri segnali di rinnovato interesse scientifico per questa problematica, già rivitalizzata sul versante didattico sull'onda del successo di Cabri.

4. L'empirismo

I pochi cenni che abbiamo dedicato alla prosecuzione (in varie forme) del programma di Hilbert lasciano intendere che, almeno fra gli addetti ai lavori, il teorema di Gödel non ha avuto quegli effetti drammatici sui quali spesso si insiste. È vero che esso costituisce un risultato di impossibilità (relativa), ma è altrettanto vero che in matematica si trovano molti esempi di risultati analoghi (impossibilità di eseguire una costruzione geometrica con dati strumenti, impossibilità di risolvere equazioni di un dato tipo con certe tecniche, ecc.), dai quali hanno spesso preso l'avvio nuove e importanti linee di ricerca. D'altro canto il teorema di Gödel, per la sua pregnanza epistemologica, costituisce in questo panorama un caso per certi versi atipico: potendo essere inteso come risposta (almeno parzialmente negativa) ad una domanda in ultima analisi filosofica, non c'è da sorprendersi del fatto che abbia provocato vari tipi di reazione sul piano filosofico. A volte questi vengono etichettati come limiti della formalizzazione, o limitazioni dei sistemi formali, e appaiono condivisibili nella misura in cui si afferma che se la formalizzazione consente da un lato di affrontare la problematica metateorica, dall'altro essa comporta un certo ritorno all'informale (ciò è particolarmente evidente nel caso delle dimostrazioni di non contraddittorietà, che sono dimostrazioni informali). È un atteggiamento rintracciabile in molti dei protagonisti delle vicende fondazionali, che tuttavia non si è inizialmente configurato come una vera e propria posizione filosofica. Solo in tempi più recenti queste riflessioni sono state approfondite da chi, in un contesto di filosofia generale nel frattempo mutato, ha tentato di codificarle e trasformarle in una nuova filosofia della matematica, alla quale si fa in genere riferimento con termini come "empirismo", "quasi-empirismo" o "fallibilismo matematico".

Il riferimento classico è Lakatos, di cui in genere si cita il saggio *Dimostrazioni e confutazioni*, anche se altri suoi contributi sono probabilmente più rilevanti per avere un'immagine più nitida della sua filosofia della matematica. A Lakatos si riallacciano all'inizio degli anni ottanta opere "divulgative" destinate a una più ampia cerchia di lettori, come il volume di Davis e Hersh e quello di Kline, che tentano di far leva sugli esiti del "fondazionalismo", in particolare sugli effetti ritenuti devastanti del teorema di Gödel, per propagandare la concezione fallibilista di una matematica che avrebbe perso la sua certezza.

In estrema sintesi la posizione empirista costituisce il tentativo di rendere oggetto di analisi epistemologica direttamente la matematica informale, senza passare attraverso la sua idealizzazione costituita dalla matematica formale. La tesi di fondo è che la matematica (informale) non è dissimile a livello metodologico dalle teorie empiriche: gli assiomi delle teorie matematiche non sono indubitabilmente veri (come vorrebbe la tradizione euclidea), ma sono piuttosto congetturali e sottoposti a una continua verifica; il tentativo di Lakatos è in effetti quello di adattare alla matematica il falsificazionismo di Popper. A nessuno sfugge, d'altronde, che il problema cruciale consiste nell'individuazione dei falsificatori potenziali della matematica. L'idea che una contraddizione possa essere intesa come un falsificatore "di tipo logico" di una teoria è plausibile, ma al di là dei termini usati non è una novità. Il fatto che una teoria formale possa essere falsificata da un risultato della "corrispondente" teoria informale può anch'esso in una certa misura essere condiviso, almeno nel caso in cui il punto di partenza è una "consolidata" teoria informale che si cerca di formalizzare. Quello che tuttavia ci si aspetterebbe, soprattutto nell'ottica lakatosiana di rivalutazione delle teorie informali, è trovare una soluzione dei problema dei falsificatori potenziali delle teorie informali; ma questo è un punto sul quale, non solo a parere di chi scrive, Lakatos non è riuscito ad essere convincente.

Lakatos e i suoi seguaci toccano anche il tema della didattica della matematica, di cui lamentano i cronici problemi; appaiono tuttavia opinabili sia l'attribuzione delle colpe sia i rimedi proposti. Nel mirino finiscono spesso le dimostrazioni, che qualcuno critica perché sono troppo rigorose, o troppo lunghe, o semplicemente "vive": la critica sarebbe condivisibile se davvero si pretendessero dimostrazioni formali (ma abbiamo già osservato che le dimostrazioni formali non le fa nessuno, nemmeno i logici); d'altro canto, ma per dire questo non è necessario essere empiristi, le dimostrazioni devono, o dovrebbero, essere presentate dopo un lavoro preparatorio, che ne faccia cogliere la necessità inserendole nel contesto di una teoria, che permetta di individuare l'idea della dimostrazione e i suoi passaggi cruciali, senza trascurare, almeno in alcuni casi, quel lavoro preliminare fatto di verifiche su casi particolari, tentativi ed errori, introduzione di condizioni restrittive, e via discorrendo.

5. Conclusioni

La ricerca didattica si sta occupando seriamente di questi problemi; al tempo stesso, proprio dall'analisi dei fondamenti abbiamo ereditato gli sviluppi di una teoria "generale" della dimostrazione, che da un lato costituisce un settore di ricerca della logica matematica, dall'altro ha ancora oggi a che fare coi fondamenti. A questa tematica vogliamo accennare brevemente in conclusione, soffermandoci in particolare sulla deduzione naturale di Gentzen.

Hilbert scriveva nel 1928 di voler redigere un protocollo delle regole secondo le quali procede il nostro pensiero; Hilbert psicologo cognitivista, verrebbe da chiedersi. Ma quand'anche gli si volesse attribuire tale qualifica, è difficile sostenere che abbia davvero conseguito lo scopo: le dimostrazioni formali nei (cosiddetti) sistemi hilbertiani sono artificiose, smisuratamente lunghe e in genere molto lontane dall'idea di dimostrazione che possiede il matematico. Risultati importanti si devono invece a Gentzen, che presenta negli anni trenta il calcolo della deduzione naturale, con l'idea di offrire quella che oggi chiamiamo la controparte formale canonica delle dimostrazioni informali (così come i numerali lo sono, rispetto ai naturali, in un sistema formale per l'aritmetica). Prawitz riprende (e valorizza) le idee di Gentzen negli anni sessanta: si arriva alla fine a sostenere che *tutti e soli* i passaggi di tipo logico che intervengono nelle dimostrazioni informali corrispondono alle regole della deduzione naturale, che sono codificate fin dall'inizio sotto forma di introduzione e di eliminazione dei vari segni logici (ad esempio, il *modus ponens* si configura in questo contesto come eliminazione del condizionale, il teorema di deduzione, per chi ha un po' di familiarità con la logica matematica, come introduzione del condizionale).

Uno degli obiettivi di Gentzen era quello di provare che le dimostrazioni potevano essere ridotte a una (e una sola) forma normale, caratterizzata dalla proprietà seguente: ogni formula che entra in gioco nella dimostrazione è sottoformula della formula finale; questo fatto, che in gergo è noto come proprietà della sottoformula, esprime sul piano formale l'idea intuitiva che in una dimostrazione normale non ci sono passaggi inutili e si utilizza solo ciò che è indispensabile per ottenere il risultato. Il teorema di normalizzazione, provato in verità da Prawitz, fornisce ulteriori informazioni sulla struttura delle dimostrazioni normali: queste sono composte da una parte analitica, in cui si applicano solo regole di eliminazione, seguita da una parte sintetica, ove figurano solo regole di introduzione, in accordo con l'idea intuitiva che in una dimostrazione informale si lavora prima sulle ipotesi, scomponendole in conseguenze più elementari, poi si mettono insieme queste conseguenze per arrivare alla tesi. I risultati sulla deduzione naturale, in definitiva, appaiono in sintonia con quanto normalmente accade nella pratica dimostrativa informale. È altresì interessante notare che alcuni psicologi (sostenitori della logica mentale) sono arrivati a conclusioni non dissimili da quelle di Gentzen: quando ragioniamo in matematica, ragioniamo secondo le regole della deduzione naturale; una significativa convergenza, si potrebbe dire, fra il momento normativo e quello descrittivo.

In conclusione, a certe critiche rivolte alle dimostrazioni, che in verità proprio dove erano nate sembrano aver fatto il loro tempo, è lecito contrapporre un lavoro tecnico, sia sul versante strettamente scientifico sia su quello della ricerca didattica, che in ultima analisi ribadisce, ammesso che ve ne sia bisogno, la centralità dell'attività dimostrativa nella cultura matematica.

Nota bibliografica. Per un primo approfondimento dei temi qui trattati, e per un'ampia bibliografia, cfr. M. Borga e D. Palladino, *Oltre il mito della crisi: fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo,* La Scuola, Brescia, 1997. Mi fa particolarmente piacere, inoltre, citare in questa occasione i due volumi F. Speranza (a cura di), *Epistemologia della matematica: seminari 1989-1991,* Quaderno CNR n. 10, 1992 e M. Ferrari e F. Speranza (a cura di), *Epistemologia della matematica: seminari 1992-1993,* Quaderno CNR n. 14, 1994, che costituiscono gli atti degli incontri del Gruppo di Epistemologia della Matematica coordinato da Francesco Speranza. Per la prosecuzione, in tempi recenti, del programma di Hilbert, cfr. S.G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic,* Springer, 1999, volume che vuole proporsi come un testo di riferimento per i fondamenti della matematica.

La mia matematica

Claudio Bernardi*

Il titolo di questo intervento non deve far pensare ad un progetto ambizioso, quasi che io pretenda di fondare una nuova matematica. Più semplicemente, vorrei parlare della matematica che mi piace e che sento mia, nella speranza che altri si riconoscano, e che la mia matematica non sia solo mia.

In ambito didattico si parla spesso di storia, di insegnamento per problemi, di ostacoli epistemologici, di contesto e di concretezza, di interdisciplinarità e transdisciplinarità, di multimedialità e, più recentemente, di capacità e competenze, di nuclei fondanti, ecc.

Non ho nulla in contrario ai termini che ho elencato un po' alla rinfusa, ma vorrei evitare il rischio che, nel tentativo di tenersi aggiornati sulle attuali tendenze pedagogiche e didattiche, si perda di vista la cosa principale: e cioè la matematica.

A me piace la matematica, come credo a tutti i partecipanti al Convegno. In questo intervento cercherò di spiegare i miei gusti, esaminando alcuni aspetti peculiari della matematica, sia sul piano culturale sia da un punto di vista didattico.

Matematica come tecnica di calcolo o come parte della cultura?

Il titolo pone un problema con cui gli insegnanti si misurano ogni giorno. È fuori discussione che, per raggiungere elasticità e sicurezza nel calcolo, sono inevitabili esercizi ripetitivi. Ma anche il calcolo può essere intelligente; vediamo tre esempi.

a) 899 è un numero primo?
b) In base 10, si ha $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Esiste una base in cui il simbolo 1001 rappresenta un numero primo?
c) Calcolare $\frac{1}{1+2000^{2000}} + \frac{1}{1+2000^{-2000}}$

Per rispondere alle tre domande una calcolatrice non è di grande aiuto, mentre arriviamo rapidamente al risultato con semplici (ma inconsuete) applicazioni dell'algebra all'aritmetica.

Infatti, nel primo caso basta osservare che $899 = 900 - 1 = 30^2 - 1$ ed è facile scomporre la differenza di due quadrati. Nel secondo caso siamo in presenza di una somma di cubi ($b^3 + 1^3$, dove b è la base del sistema di numerazione), che non può essere un numero primo. Infine, l'ultimo calcolo diventa molto più semplice,

*Università di Roma "La Sapienza"

e anche più generale, se si sostituisce al numero 2000^{2000} una variabile a:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}=\ldots=1$$

Un'identificazione fra matematica e calcolo, inteso come esecuzione di regole meccaniche, va rifiutata perché grossolana e superficiale. D'altro lato, perfino le regole hanno un valore formativo se vengono acquisite con consapevolezza (il che non esclude automatismi); inoltre, va incoraggiata la scelta fra più regole per ridurre i calcoli. Ricordo volentieri l'affermazione di Oscar Chisini secondo cui "La matematica è l'arte di non fare i calcoli".

Il rigore e gli errori

Al pari, credo, di ogni altro matematico, mi considero pignolo, e sono spontaneamente portato a criticare molte dizioni, anche di uso frequente. Cito qualche esempio:

"sono *date* due matrici A e B; il loro prodotto è *dato* da ..." .

"per ogni ϵ positivo *e* arbitrario"

"due rette sghembe non giacciono *sullo stesso piano*"

Nella prima frase non mi piace l'uso del verbo dare, che compare due volte con significati diversi (per inciso: qual è in matematica il significato di *dare*?). Nella seconda trovo inopportuna la congiunzione *e* che collega un aggettivo che esprime un attributo (*positivo*) con un aggettivo che non esprime alcun attributo ma rafforza, in modo più o meno appropriato, il quantificatore *per ogni*. Infine, nell'ultimo caso preferisco su uno al posto di *sullo*.

Altri avrebbero citato esempi diversi, probabilmente non tutti coerenti fra loro. Per questo, pur ritenendo importantissimo prestare attenzione al linguaggio, aggiungo che è bene non attribuire carattere di rigore assoluto alle proprie preferenze personali, per quanto lecite e motivate.

Federigo Enriques diceva che: "Il Maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua arte didattica"; e si affrettava a distinguere le "affermazioni gratuite di sfacciati che cercano di indovinare" dalle "tappe del pensiero nella ricerca delle verità".

Non so se sia vero che, come sostiene qualcuno, ogni errore nasce da un'applicazione corretta di una regola sbagliata; ma, di fronte ad un'affermazione sbagliata, vale la pena cercare di capire. Vediamo un esempio.

È ben noto che non tutti riconoscono nella figura 1 un quadrato, perché è storto, mentre i quadrati sono diritti (??).

Invece di scandalizzarci, riprendiamo il programma di Klein: due figure sono *uguali*, rispetto ad un certo gruppo G di trasformazioni, se in G esiste una trasformazione in cui una è l'immagine dell'altra. Si pone allora una domanda: qual è il gruppo di trasformazioni più spontaneo per la nostra percezione?

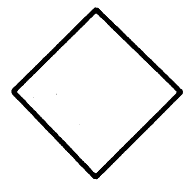


figura 1

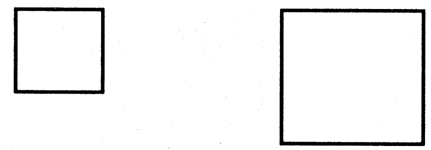


figura 2

Ho sentito una risposta, che mi pare convincente, da Francesco Speranza: il gruppo di trasformazioni che corrisponde all'idea più ingenua di *uguaglianza di forma* contiene solo le *traslazioni* e le *omotetie*. Si tratta delle trasformazioni che Choquet chiama dilatazioni o, in altre parole, delle collineazioni che mandano ogni retta r in una retta r' parallela ad r (o equivalentemente in cui i punti impropri sono uniti); si potrebbe discutere se è il caso di restringersi o no alle omotetie con parametro positivo.

L'errore iniziale rimane, ma ora è più chiaro: il concetto di *forma* viene ingenuamente collegato non alle similitudini ma a traslazioni e omotetie; siamo disposti a traslare, a ingrandire e impiccolire (nella figura 2 tutti riconoscono due quadrati), mentre mutare le direzioni richiede una maggiore elasticità, che corrisponde ad un allargamento del gruppo.

Fino a che punto il giudizio sulla *gravità* degli errori è oggettivo? Non alludo a differenze nella valutazione fra insegnante e insegnante, ma ad incongruenze nei miei giudizi. Ad esempio, in geometria non accetto da uno studente una spiegazione del tipo "dalla figura si vede che ...", ma poi io stesso, quando spiego, sono disposto a trascurare casi particolari o, peggio, a generalizzare in modo indebito.

Vediamo un esempio meno personale. Usualmente, per introdurre $\sqrt{2}$, prima dimostriamo che non esiste (fra i numeri noti) un x tale che $x^2 = 2$, e poi ... diciamo che, per definizione, si indica con $\sqrt{2}$ un numero che abbia 2 come quadrato; dopo di che proseguiamo tranquillamente applicando le consuete regole algebriche.

È insostenibile didatticamente (e forse anche culturalmente) l'idea di aspettare le sezioni di Dedekind prima di parlare di $\sqrt{2}$, ma è altrettanto chiaro che il procedimento precedente (a cui si ricorre pure nel caso dell'unità immaginaria i) non dà alcuna garanzia di coerenza. Se ci comportiamo in modo analogo con la somma infinita $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ arriviamo ad un risultato assurdo. Infatti, posto

$$X = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

si ha

$$2X = 2 + 4 + 8 + \ldots$$

Osservando che i secondi membri differiscono solo per la presenza dell'addendo "1", possiamo scrivere $X = 1 + 2X$, da cui, applicando le consuete regole algebriche, ricaviamo:

$$X = -1 \qquad \text{cioè} \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = -1$$

L'ultimo esempio mi porta ad accennare al legame sintassi-semantica e, in particolare, ai pregi e ai rischi di una sintassi che diventa autonoma. Ricordo che per sintassi si intende l'introduzione dei simboli e la loro manipolazione, mentre la semantica indica l'interpretazione dei simboli, che permette di attribuire un significato alle formule.

Ora, la matematica deve il suo successo alla possibilità di operare a livello puramente sintattico, trovando risultati che possono essere applicati. D'altra parte, il semplice gioco simbolico, come abbiamo visto, se non è consapevolmente controllato, rischia di essere fonte di paradossi.

Io ritengo che la capacità di gestire i rapporti fra sintassi e semantica sia un punto cruciale nell'apprendimento della matematica. Rientrano in questo quadro molte attività scolastiche: la comprensione di un testo e l'esecuzione di regole, la descrizione linguistica di una figura (che è, in qualche misura, l'attività inversa delle precedenti), il controllo di un risultato, la capacità di rappresentare una situazione con uno schema.

L'infinito, i paradossi, lo zero

A giudicare dalla pratica didattica (anche universitaria) sembra che, secondo la maggioranza dei docenti, meno si parla di infinito, di paradossi, di zero, meglio è.

Io non sono assolutamente d'accordo. La matematica va presentata (direi: va vissuta) *senza paura*. Il discorso è complesso, perché nella matematica cerchiamo sicurezza; ma, su un piano educativo e culturale, la sicurezza della matematica non va accettata in modo acritico e passivo: è una conquista, un convincimento che si sviluppa con l'esperienza e con l'esercizio.

Parlare di paradossi non solo suscita curiosità, ma contribuisce ad acquisire un maggior rigore. Così l'infinito è causa di situazioni difficili da precisare, ma la considerazione di insiemi infiniti (squisitamente matematica) presenta aspetti affascinanti. Proprio nelle situazioni a rischio si acquisisce sicurezza; in questo senso mi piace la logica.

A proposito del numero 0, riprendo un problema presentato da Franco Conti nel Convegno UMI-CIIM di Vicenza (1997).

Consideriamo n punti su una circonferenza: in quante parti al massimo è diviso il cerchio dai segmenti che hanno gli estremi nei punti dati?

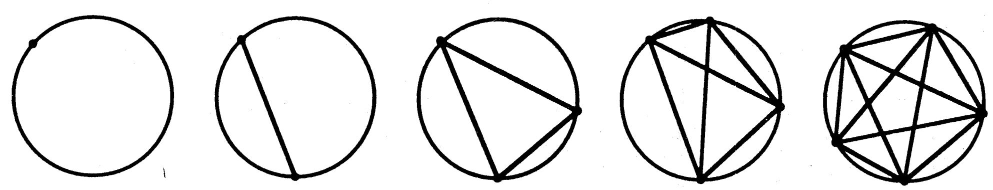


figura 3

Considerando i casi illustrati in figura 3, si costruisce la seguente tabella

valore di n	1	2	3	4	5
numero delle parti	1	2	4	8	16

È spontaneo congetturare che nella seconda riga compaiano le successive potenze di 2, e quindi che il numero richiesto sia 2^{n-1}.

Ma per $n = 6$... si hanno 31 parti e non 32 (contare per credere!).

In realtà, abbiamo trascurato il caso $n = 0$, in cui si trova comunque 1 parte (e non 2^{0-1} parti!). La tentazione di rifiutare lo 0 è forte, ma chi accetta lo 0 come numero (a tutti gli effetti!), deve onestamente considerare la successione

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad \ldots$$

che sembra di difficile interpretazione. Una risposta viene dal *calcolo delle differenze finite*, strumento molto efficace in problemi di questo tipo. Calcolando le differenze fra ogni termine e il precedente, otteniamo successivamente le sequenze

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & \dots \\ & 1 & & 1 & & 2 & & 4 & & \dots & \\ & & 0 & & 1 & & 2 & & \dots & & \\ & & & 1 & & 1 & & \dots & & & \end{array}$$

Assumendo, con un po' di ottimismo, che l'ultima riga sia la successione costante "1" (o, equivalentemente, che nella penultima riga compaia la successione dei naturali), si ricostruiscono le differenze precedenti, e si trova che il termine che segue 16 nella successione iniziale è proprio 31.

Non riporto la dimostrazione (per induzione, piuttosto complessa) che l'ultima riga è effettivamente una successione costante. Vorrei invece sottolineare un atteggiamento che può apparire contraddittorio, ma ha un suo senso: è ingenuo fidarsi di pochi casi e concludere affrettatamente che il risultato è costituito dalle potenze di 2, ma bastano due numeri uguali ad 1 per accettare che l'ultima riga è costante. Questione di fiuto?

Le applicazioni

La matematica trae origine da esigenze pratiche; anche oggi, nella ricerca così come nella didattica, bisogna partire dai problemi posti dalle altre scienze.

L'affermazione precedente è senz'altro ragionevole, ma io non sono d'accordo. Io sono contento se la matematica trova applicazioni, ma il mio interesse per la matematica non dipende da queste. Per fare un esempio: i numeri reali sono indubbiamente utili per lo studio della realtà, ma a me interessa di più la loro bella struttura algebrica e topologica.

Godfrey Hardy ha una posizione radicale in proposito, quando afferma che solo "la matematica banale è utile [...] la vera matematica è quasi totalmente inutile".

La mia matematica è libera bella inutile, come sono libere belle inutili l'arte, la filosofia o una passeggiata, e come è libera bella inutile gran parte delle eredità più significative che ci hanno lasciato le civiltà passate, dai poemi omerici alle piramidi.

Tornando all'insegnamento della matematica, ben venga l'illustrazione di legami fra le varie scienze, si dia il giusto rilievo alle applicazioni della matematica alla fisica, o a quelle più recenti all'economia, all'informatica e alla biologia, ma ci si mantenga fedeli al metodo matematico.

Semmai, dal mio punto di vista, l'applicazione più importante della matematica consiste nel fatto che la matematica aiuta a porre un problema, a capire una situazione, o nel fatto che chi conosce la matematica sa argomentare correttamente. La matematica è un metodo, un linguaggio, è un modo di pensare; in questo senso la matematica parla di noi, ed è quindi parte integrante del nostro patrimonio culturale.

Estetica in matematica

C'è un valore estetico in matematica: ha senso parlare non solo dell'eleganza di un procedimento o della chiarezza di uno schema, ma anche della bellezza di una formula, o della suggestione esercitata da una definizione. Al solito, preferisco chiarire il mio punto di vista con un esempio.

Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza e sia P un punto dell'arco AC. Allora $PA + PC = PB$.

L'uguaglianza si può dimostrare ricorrendo alla goniometria, ma ci sono dimostrazioni più eleganti. Una di queste è suggerita in figura 4, dove Q è il punto dell'arco BC tale che $QB = PC$: non è difficile dimostrare che l'ampiezza dei quattro angoli indicati con un archetto è 60° e, considerando opportuni triangoli equilateri, si conclude che:

$$PA + PC = PH + QB = PH + HB = PB.$$

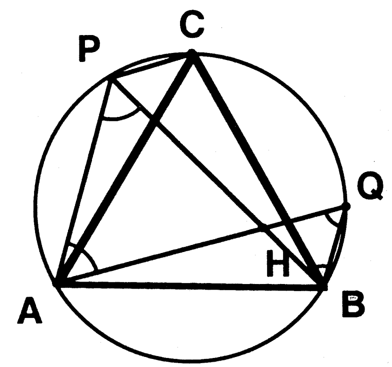


figura 4

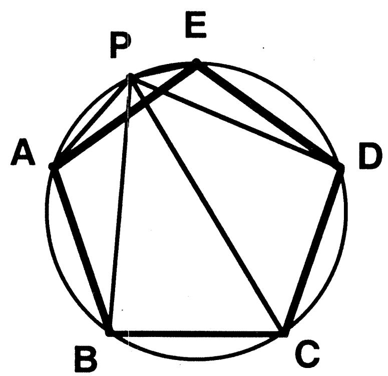


figura 5

Un enunciato analogo vale i per pentagoni regolari (fig. 5):

Sia $ABCDE$ un pentagono regolare inscritto in una circonferenza e sia P un punto dell'arco AE. Allora $PA + PC + PE = PB + PD$.

Per la dimostrazione si può procedere applicando il teorema di Tolomeo (secondo cui se $QRST$ è un quadrilatero inscrivibile allora $QR \cdot ST + RS \cdot TQ = QS \cdot RT$) ai quadrilateri $PABE, PACE, PADE$.

Come a questo punto è facile sospettare, il teorema si generalizza ad ogni poligono regolare con un numero dispari di lati.

Tentando di enucleare qualche criterio che chiarisca il valore estetico del teorema precedente, cito: il risultato inaspettato, l'eleganza della figura, la semplicità dell'enunciato, la generalità. Per altro, devo aggiungere che non conosco una dimostrazione elegante dell'enunciato generale.

L'astratto, il concreto, il gioco

Preciso subito che non ho paura dell'astratto, nemmeno nella Scuola dell'obbligo, e non condivido l'atteggiamento di quegli insegnanti che, di fronte a un problema astratto, si sforzano di rendere concreto l'enunciato, anche a costo di complicarlo. A mio parere, astratto non significa strano, artificioso, astruso: il riferimento alla realtà non è di per sé garanzia di maggiore semplicità e chiarezza; d'altra parte, un gioco è astratto, perché basato su finzioni e su regole convenzionali, eppure è spontaneo per un bambino.

Di più, l'educazione matematica rende naturali situazioni astratte: la retta, vista come linea illimitata e senza spessore, i numeri negativi, l'infinità dei numeri naturali, sono concetti di cui è difficile trovare rappresentazioni nella realtà, ma che diventano intuitivi proprio nella loro astrattezza.

D'altra parte, non ho paura nemmeno del concreto. Alle Superiori molti insegnanti hanno paura di ricorrere a modelli concreti nello studio della geometria. In un'ottica non troppo diversa, c'è chi evita ogni forma di gioco, mentre io trovo stretti legami fra la matematica e il gioco. Mi limito qui a ricordare che in quasi tutti i giochi sono presenti numeri o configurazioni geometriche (si pensi alle carte, o a una scacchiera), che nei problema di dama o scacchi abbiamo a che fare con quantificatori (*per ogni* mossa esiste una contromossa), che le regole di un gioco corrispondono quasi sempre a implicazioni (ed accettiamo la tavola di verità secondo cui se l'antecedente è falso l'implicazione è comunque soddisfatta: se non siamo nelle condizioni previste, la regola non ci pone alcun obbligo).

L'informatica, le mode, la logica

Spero che nessuno me ne voglia perché non ho parlato di informatica: mi rendo conto di quanto sia importante a scuola, ma noto con rammarico che, se da un lato la pratica con il computer è sempre più diffusa nel nostro mondo, dall'altro l'uso dei computer è sempre meno matematico per l'utente. Certo, nella didattica occorre tener presente la realtà odierna e forse, in qualche misura, adeguarsi al gusto mutevole degli studenti.

Diceva Kronecker che "la logica è eterna, può aspettare" e che "ciò che non si può costruire non esiste" (quest'ultima affermazione riferita, fra l'altro, ai numeri irrazionali). La mia matematica è molto diversa: risente il meno possibile delle mode ed è bella anche (direi: soprattutto) quando non è costruttiva. Per rispondere a Kronecker scomodo addirittura S. Paolo, rubandogli una frase che lui certo non riferiva alla matematica:

(2 Corinzi, 4, 18) "*.. poiché noi non miriamo alle cose che si vedono ma a quelle che non si vedono. Infatti le cose che si vedono sono temporanee; quelle che non si vedono, eterne*".

M.C. Escher: utile alla matematica?

Michele Emmer*

1 - Escher e i matematici

Il 17 giugno 1998 l'artista grafico olandese Maurits Cornelis Escher avrebbe compiuto cento anni. Escher morì nel 1972. Al convegno a lui dedicato all'università di Roma "La Sapienza" del 1985 parteciparono tra gli altri Roger Penrose, oggi Sir Roger Penrose, e H.S.M. (Donald) Coxeter. Tutti e due avevano conosciuto Escher molti anni prima, ne erano divenuti amici. In particolare Penrose aveva conosciuto Escher alla prima grande mostra che venne organizzata in coincidenza con il congresso mondiale di matematica del 1954 che si tenne ad Amsterdam. Quella mostra fece conoscere l'opera di Escher ai matematici, non solo a Coxeter e Roger Penrose, con cui l'artista ebbe poi un durevole e proficuo rapporto. Nella introduzione al catalogo della mostra il matematico N.G. Brujin scriveva che non vi erano solo i motivi geometrici che potevano interessare i matematici. Molto più interessante era il ritrovare la stessa fantasia che si riscontra ovunque nella matematica e che per la gran parte dei matematici è uno degli aspetti più affascinanti della loro professione.

Penrose ha raccontato una ventina di anni dopo nel mio film *Il mondo fantastico di Escher* il suo incontro con le opere dell'oggi famoso grafico: "Rimasi molto colpito da quello che avevo visto e quando tornai in Inghilterra cominciai a pensare se sarei stato capace di fare anch'io qualcosa di geometricamente bizzarro, ma non proprio dello stesso genere di cose di Escher. Ho cominciato a fare dei disegni di figure in un certo senso impossibili. Li ho via via semplificati finché ho disegnato il triangolo impossibile (noto come triangolo di Penrose)".

Escher incorporò poi in due delle sue opere più famose, *Waterfall* e *Ascending and Descending* i disegni di Penrose. Come ricorda lo stesso Penrose, Escher aveva realizzato negli stessi anni e in modo indipendente da Penrose un'opera "impossibile", *Belvedere*.

2 - Escher spiega le opere di Escher

Escher affermava che aveva ricavato una immensa soddisfazione dall'acquisizione della pratica artistica e dalla completa comprensione delle proprietà dei materiali che si utilizzano. Tuttavia, tutto questo non era sufficiente per lui. Non era

*Dip.to di Matematica, Univ. di Roma "La Sapienza", email: emmer@mat.uniroma1.it

soddisfatto della acquisizione della sola capacità tecnica: "Ad un certo punto è come se un velo fosse caduto dai miei occhi. Ho scoperto che la maestria tecnica non era più il mio solo scopo. Mi venivano alla mente idee non direttamente legate all'arte grafica, idee così affascinanti che volevo riuscire a comunicarle alle altre persone."

Escher si rende conto che queste sue idee non potevano essere comunicate con parole, non potevano essere espresse in forme letterarie, perché si trattava di immagini mentali di un tipo che poteva essere reso comprensibile agli altri solo mostrandole come immagini visive. Il metodo, la tecnica, diventavano molto meno importanti. Ovviamente aggiungeva che l'aver esercitato per tanti anni le tecniche grafiche aveva fatto diventare questa sua abilità una sorta di seconda natura. Era quindi essenziale per lui utilizzare questa capacità per cercare di comunicare con il maggior numero di persone possibili, con il pubblico. La svolta fondamentale della sua vita, come lui stesso la definisce, avviene nel 1938, quando la famiglia Escher ha già abbandonato l'Italia, dopo molti anni di permanenza :

"In Svizzera, Belgio ed Olanda ho trovato molto meno interessanti sia i paesaggi che l'architettura rispetto a ciò che avevo visto nel Sud d'Italia. Mi sono così sentito spinto ad allontanarmi sempre di più dalla illustrazione più o meno diretta e realistica della realtà circostante. Non vi è dubbio che queste particolari circostanze sono state responsabili di aver portato alla luce le mie *visioni interiori*.". Tutte le illustrazioni del suo primo libro sono state realizzate con l'intento di comunicare una particolare di queste visioni interiori. Le idee che ne sono alla base "...sono una diretta testimonianza della mia meraviglia e del mio coinvolgimento per le leggi della natura che operano nel mondo che ci circonda. Chi riesce a meravigliarsi scopre che questa capacità stessa è meravigliosa."

In qualche modo contraddicendo quello che aveva appena affermato, che le sue *visioni interiori* non potevano essere descritte a parole, Escher suddivide il volume del 1961 in capitoli, in ognuno dei quali fornisce una chiave di lettura delle opere. Se ne scusa nell'introduzione ma si giustifica affermando che alcune delle sue creazioni hanno bisogno di essere *spiegate* anche se le parole sono inadeguate. Ed ecco i capitoli, i temi in cui Escher suddivide le sue opere (sino al 1961 ovviamente):

- la divisione regolare del piano, uno dei capitoli più importanti, suddiviso in sottocapitoli: simmetria di riflessione in uno specchio con traslazione (un piede si può considerare l'immagine riflessa in uno specchio dell'altro piede, ma quando camminiamo, l'immagine riflessa si sposta via via in avanti); le figure come sfondo; lo sviluppo di forma e contrasto; numeri infiniti; immagini che raccontano una storia (*story pictures scrive Escher*, parole che richiamano esplicitamente *story board*, i disegni che si realizzano nel cinema di animazione, e non, per avere un'idea della successione delle sequenze della scena ripresea), una storia di passaggio dalla seconda alla terza dimensione.
- lo spazio illimitato
- gli anelli spaziali e le spirali
- le riflessioni nello specchio
- i poliedri
- relatività (ovvero la molteplicità di punti di vista nella prospettiva)
- il conflitto tra piano e spazio
- le costruzioni impossibili.

Se avete un libro con le immagini delle opere di Escher potete divertirvi a vedere se riuscite a collocare ogni immagine nelle caselle indicate dall'autore. Naturalmente solo per le opere dopo il 1938; i paesaggi precedenti, realizzati quasi tutti nel Sud d'Italia vengono come ripudiati dall'autore, ma basta avere visitato una delle mostre che comprende anche alcune delle opere precedenti al 1938 per capire come siano essenziali non solo per le opere successive ma siano molto interessanti di per sé.

3 - Gli oggetti impossibili

Escher descrive *Belvedere*: suggerisce di leggere l'immagine che si ha davanti guardando per primo il personaggio, seduto sulla sinistra, che ha in mano un oggetto *incomprensibile* come lo chiama Escher (oggetto noto con il nome di cubo di Necker dal nome del cristallografo svizzzero che per primo nel secolo scorso si accorse studiando i cristalli del fenomeno per cui uno spigolo che appare più vicino a noi ad un certo punto appare invece più lontano da noi). Davanti al personaggio vi è un foglio in cui è tracciato un disegno, quello sì perfettamente possibile in quanto disegnato su un foglio piano (a due dimensioni). Siamo pronti per guardare in alto alle colonne; tutto sembra normale, ma ecco che qualcosa ci confonde: le due persone sulla scala stanno salendo dall'interno dell'edificio e arrivano all'esterno! E i due personaggi che guardano le montagne (abruzzesi) sono dalla stessa parte? Il tutto è ottenuto con molta semplicità, scambiando tra loro nel disegno (bidimensionale) la posizione corretta (?) di due punti, per cui quello che dovrebbe essere vicino ci appare lontano e viceversa. Stessa idea che ebbe Penrose con il triangolo impossibile, in cui basta coprire con un foglio uno o due degli estremi e si ha un oggetto del tutto coerente; se si scopre tutto l'oggetto si ha un oggetto incoerente; insomma un oggetto incoerente composto di parti tutte coerenti tra loro.

Vale la pena ricordare che né i Penrose né Escher sono stati i primi ad utilizzare graficamente gli oggetti impossibili. A parte le situazioni dovute ad errori più o meno consapevoli da parte di artisti, sembra che il primo sia stato l'artista e storico svedese Oscar Reutersvärd. Nel 1934, come ha messo in luce Bruno Ernst, biografo e grande amico di Escher, Reutersvärd aveva scoperto il *Triangolo di Penrose*, dunque una ventina di anni prima della sua invenzione *ufficiale*.

4 - Escher e i mosaici del piano (le tassellazioni)

Se nel caso delle costruzioni impossibili Escher aveva una sorta di pudore nel chiarire sino in fondo i motivi che lo avevano indotto a realizzare le tre opere sul tema, nel caso dei famosi mosaici periodici l'artista olandese è molto più esplicito. Escher scopre i disegni periodici che ricoprono il piano sin dalla sua prima visita all'Alhambra di Granada nel 1922. Ritornerà all'Alhambra nel 1935 dopo aver lasciato l'Italia. Anche nel caso delle tassellazioni il punto di partenza di Escher è squisitamente geometrico. È lui stesso a riconoscere che il problema del ricoprimento periodico del piano è stato la più ricca fonte di ispirazione per il suo lavoro. Escher era interessato alla struttura geometrica dei disegni ripetitivi che man mano realizzava sui suoi taccuini. L'artista veniva costruendo un suo metodo di classificazione di questi motivi, un metodo indipendente dal metodo ufficiale dei matematici e dei cristallografi. Il metodo di Escher, descritto ed illustrato, o forse è meglio dire viceversa, nei suoi quadernetti in gran parte mai pubblicati, è stato studiato da una matematica americana, Doris Schattschneider, che ne ha messo in luce la validità rispetto al lavoro svolto da matematici e cristallografi negli stessi anni.

Tanto era interessato a questo tema l'artista olandese, che dedicò un intero libro alla questione. Nel volume spiegava il perché del suo grande interesse per le tassellazioni con il colore. Anzi nel testo spiegava quali fossero i suoi rapporti con il mondo della matematica, avendo ben chiaro quanto il suo mestiere fosse diverso da quello del matematico: "L'aspetto matematico del riempimento periodico del piano è dal punto di vista teorico ben studiato perché fa parte della cristallografia. È una buona ragione per considerarlo un fenomeno solo matematico? Non lo penso. I cristallografi hanno dato una definizione di questa nozione, hanno studiato e determinato quali sono i sistemi o procedimenti per riempire in modo periodico un piano e quanti ve ne sono. Così hanno aperto una porta che dà accesso ad un vasto dominio, senza peraltro penetrarvi essi stessi..... A volte ho l'impressione di aver percorso questo dominio in tutta la sua estensione, ammirato tutti i panorami, preso tutte le strade ed ecco che ne scopro un'altra che mi procura una gioia nuova."

Nel famoso volume *Fantasy & Symmetry* nato dalla collaborazione con la cristallografa Caroline Macgillavry come dispense per gli studenti e poi divenuto libro d'arte, Escher annotava: "La linea di confine tra due forme adiacenti ha una doppia funzione e tracciare una linea del genere è molto complicato. Da un parte e dall'altra di essa, simultaneamente, prendono forma due figure. Ma l'occhio e la mente umana non possono essere occupati con due cose allo stesso tempo e così vi è un continuo e velocissimo salto dall'una all'altra. Questa difficoltà è forse il vero motivo della mia perseveranza."Gli elementi che funzionano inizialmente da figure diventano ciclicamente sfondo e così via senza fine; si crea così un equilibrio dinamico in cui tuttavia vi è sempre un rapporto, ad ogni istante, tra figura e sfondo. O si osserva l'una o l' altro.

"Ripetizione e moltiplicazione, due parole semplicissime. Tuttavia la totalità del mondo che ci è possibile percepire attraverso i nostri sensi, conoscerebbe una disintegrazione caotica se non potessimo riferirci a queste due nozioni. Come ci sembra senza speranza e inaccettabilmente impietoso questo mondo non appena ce ne astraiamo. Tutto quello che amiamo, impariamo, mettiamo in ordine, riconosciamo ed accettiamo, noi lo dobbiamo a queste due nozioni. Ripetizione e moltiplicazione."Ciò che è originale in Escher è la sua sistematica analisi della struttura matematica dei motivi che ricoprono il piano. Ma proprio per questo, proprio perché riteneva la sua una indagine di tipo scientifico, i suoi quaderni e i disegni acquerellati in essi contenuti erano e dovevano restare nelle sue intenzioni degli studi utili per la realizzazione delle opere (incisioni, litografie) in cui i disegni periodici sono molto spesso, a partire dagli anni 40, un elemento importante.

La famosa *Metamorfosi* del 1940 rappresenta in questo senso una sorta di riassunto dell'opera di Escher. Vi sono inserite le forme di vari animali che ricoprono il piano in modo sistematico; i disegni sono tutti tratti dai taccuini; vi è un passaggio graduale da una forma ad un'altra, una deformazione successiva molto precisa ed ordinata in modo tale che si è condotti naturalmente, nella lettura dell'opera, che procede necessariamente da sinistra verso destra per una lunghezza complessiva di 4 metri, da una all'altra. Vi è un momento in cui la forma precedente svanisce, non è più distinguibile perché è già apparsa la successiva. È la tecnica che in cinematografia si chiama della dissolvenza, ed è Escher stesso a utilizzare la tecnica cinematografica per dare una chiave di lettura delle sue *storie visive.*

5 - Escher e le nuove tecnologie

Sin dagli anni Sessanta alcune opere di Escher venivano viste come precorritrici della *Optical Art*; basta guardare il *Balcone* che in realtà era stato realizzato molti anni prima, nel 1945. Escher oltre ad aver suggerito una lettura cinematografica di alcune sue opere, aveva partecipato alla realizzazione di un breve film in cui alcune delle sue opere erano state animate con la tecnica del passo uno (in pratica si *fotografa* ogni immagine realizzando un singolo fotogramma dell'animazione; con 24 fotogrammi si ha un secondo di animazione; per avere unn movimento fluido dell'animazione ogni fotogramma viene ripetuto 4-8 volte). Escher, scomparso nel 1972, non ha avuto il tempo di imbattersi nella grande diffusione della computer graphics. Tuttavia una delle prime animazioni al computer mai realizzate è quella della scala impossibile di Penrose che la Bell Laboratories realizzò negli anni Sessanta.

Sarà poi Douglas R. Hofstadter con il libro *Gödel, Escher, Bach: una Eterna Ghirlanda Brillante* (Adelphi, Milano, 1984; il libro ha vinto il premio Pulizer) a legare il nome di Escher a quello della intelligenza artificiale. Che cosa lega il logico Gödel, l'artista Escher, il musicista Bach? Uno *Strange loop* (uno anello strano). Scrive Hofstadter: "Il fenomeno dello Strange Loop consiste nel fatto di ritrovarsi inaspettatamente, salendo o scendendo lungo i gradini di qualche sistema gerarchico, al punto di partenza." Salire una scala e ritrovarsi ai piedi della scala. È un fenomeno che Escher ha disegnato, che Bach ha messo in musica, che Gödel ha posto al centro del teorema che porta il suo nome.

Non mancano in Escher figure autoreferenti, che si riproducono in scala diversa. E l'autoreferenza fa pensare ai frattali; ecco perché nel volume *The Beauty of Fractals* di H-O. Peitgen e P.H. Richter (Springer-Verlag, Berlino, 1986) compaiono delle opere di Escher. Nel congresso dedicato ad Escher tenutosi a Roma nel 1985 molte erano le opere dell'artista olandese animate con la computer graphics. In particolare *I tre mondi* in cui nell'animazione una astronave penetrava da una delle aperture e ogni volta che passava cambiava il paesaggio. (in H.S.M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose, M. Teuber *M.C. Escher: Art and Science*, North-Holland, Amsterdam, 1986).

Da allora sono moltissime le immagini di Escher animate con la tecnica della computer graphics; è stato di recente realizzato un CD Rom *Escher Interactive* che oltre a contenere una galleria delle opere più significative permette di modificare ed animare alcune delle immagini. CD Rom come quello molto divertente di Kevin Lee, *Tasselmania* per realizzare disegni periodici alla Escher, in mostra tra l'altro alla sezione matematica della Città della Scienza di Napoli o quello di Al Seckel sulle illusioni ottiche, in cui l'opera di Escher ha grande spazio.

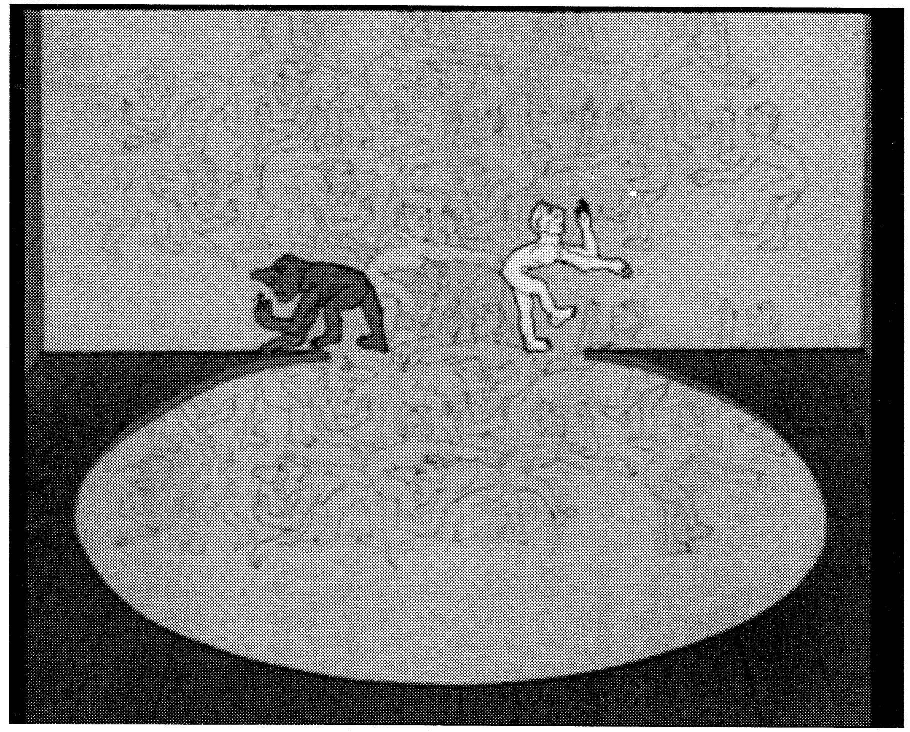
Il mondo di Escher è un mondo chiuso, altro dal nostro, in cui si penetra e si resta affascinati, da cui si può anche rinunciare ad uscire. Un mondo realistico e assurdo, enigmatico e però geometrico. Non è certo per caso che Escher intitolò il secondo libro *The World of M.C. Escher.*

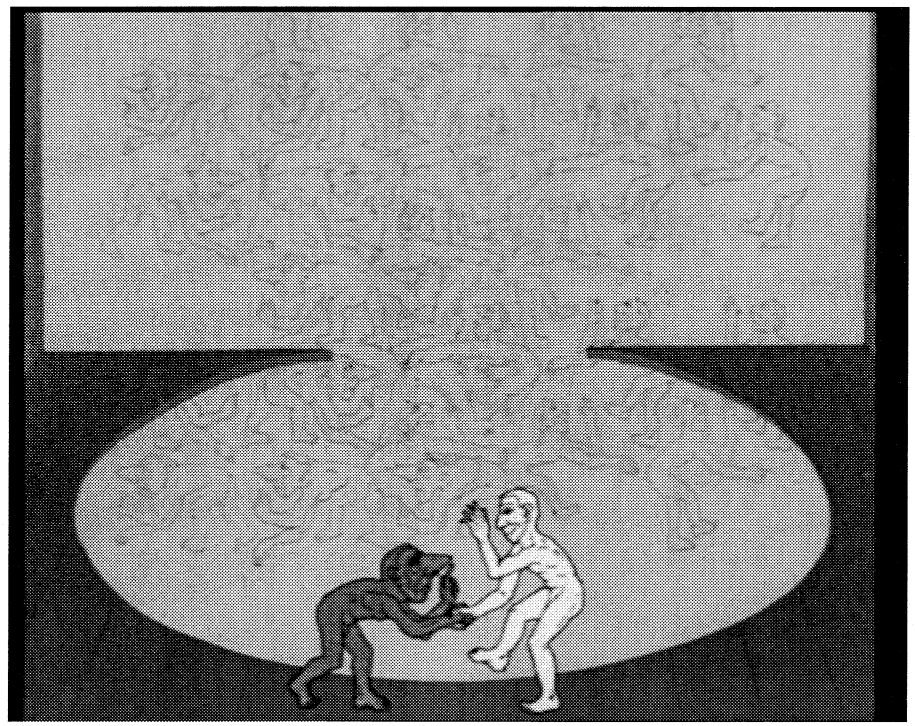
Escher ha avuto uno strano destino. Le sue opere sono probabilmente tra le più note in ogni parte del mondo. Sono riprodotte ovunque, su ogni tipo di oggetti. Forse proprio per questo mentre Escher ha conosciuto sin dagli anni Sessanta una grande notorietà negli ambienti scientifici di tutto il mondo, la sua figura di artista grafico è stata molto poco studiata e apprezzata specialmente nel nostro paese da coloro che si occupano di arte. Escher è un artista? Il consiglio dei matematici è: la domanda probabilmente non ha una risposta oppure ne ha molte, anzi probabilmente la domanda non ha molto senso. Se volete ricordatevi i legami tra le opere di Escher e la matematica oppure dimenticateveli ma non rinunciate al piacere, al divertimento e all'emozione che le visioni di Escher vi possono dare.

Bibliografia essenziale

- B. Ernst, *Avventura con oggetti impossibili*, Taschen ed. Berlino, 1990.
- B. Ernst, *Lo specchio magico di M.C. Escher*, Taschen ed. Berlino, 1990.
- H.S.M. Coxeter, M. Emmer, M L. Teuber, R. Penrose (a cura di) *M. C. Escher : Art and Science*, Amsterdam, North-Holland, 1986.
- M. Emmer, C. van Vlanderen (a cura di), *Maurits C. Escher*, catalogo della mostra, Istituto Olandese, Roma, 1985.
- M. Emmer, *The Fantastic World of M.C. Escher*, film della serie *Art and Mathematics*, video 50 m., sonoro, colore, FILM 7 Prod., Roma, 1994. (versioni italiana, inglese, francese, spagnola)
- M.C. Escher, *The Graphic Work of M.C. Escher*, MacDonald ed. London, 1967.
- M.C. Escher, *Escher on Escher: Exploring the Infinite*, H. N. Abrams Inc., New York, 1989.

- D. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, Basic Books Inc, New York, 1979.
- J.L. Locher (a cura di), *The World of M. C. Escher*, H. N. Abrams Inc., New York, 1971.
- J. L. Locher (a cura di), *La vie et l'oeuvre de M. C. Escher* , Chêne, Paris, 1981.
- C.H. Macgillavry, *Fantasy & Symmetry: the Periodic Drawings of M.C. Escher*, H.N. Abrams Inc, New York, 1976.
- D. Schattschneider, *Visions of Symmetry*, Freeman & Co., New York, 1990; ed. it. Zanichelli, 1993).





Diffusione e critica di Bourbaki in Italia nel secondo dopoguerra

Massimo Galuzzi

Un confronto di testi

Può essere utile iniziare con un confronto tra tre testi che formulano contenuti concettuali simili e sono carichi di un grande impegno etico.

Il primo è il celeberrimo saggio-manifesto di Bourbaki, apparso nel 1948 nel volume edito da Le Lionnais [Bou48], che presenta i tratti essenziali del programma bourbakista.

Sebbene Bourbaki voglia riferirsi all'*intera matematica* e fornire le linee guida per un proficuo concepimento *globale* di essa, il saggio rappresenta *una* proposta, sia pure autorevole, in un volume collettivo. A giudizio di Bourbaki

"... l'évolution interne de la science mathématique a ... resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties, et y a crée une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été" [Bou48, p. 37].

Questa unità profonda può essere rivelata dall'uso dell'assiomatica (contrapposta al *formalismo logico*).

"Là où l'observateur superficiel ne voit que deux ou plusieurs théories en apparence très distinctes... la méthode axiomatique enseigne ... à trouver les idées communes enfouies sous l'appareil extérieur des détails propres a chacune des théories considerées, à dégager ces idées et à les mettre en lumière [Bou48, p. 38].

Strettamente connessa all'assiomatica è l'individuazione di un piccolo numero di *strutture-madri*: le strutture *algebriche*, le strutture d'*ordine* e le strutture *topologiche* le quali, presenti in ogni oggetto matematico concreto, debbono essere studiate nella loro indipendenza logica per giungere, attraverso la loro ricombinazione, ad una comprensione più profonda dell'oggetto considerato. Inoltre

"Au delà de ce premier noyau, apparaissent les structures qu'on pourrait appellere multiples, où interviennent à la fois deux ou plusieurs des grandes structures-mères, non simplement juxtaposées ...mais combinées organiquement par un ou plusieurs axiomes qui les relient [Bou48, p.44].

Il grado di sicurezza espresso da Bourbaki è notevole, ma non vi è l'dea che la proposta bourbakista rappresenti senz'altro la 'matematica moderna'.[1] Il carattere provvisorio della proposta bourbakista è affermato con chiarezza:

"Pour garder une juste perspective, il nous faut ... ajouter aussitôt qu'elle ne doit être considerée que comme une approssimation très grossière de l'état actuel des mathématiques, tel qui est en réalité; elle est à la fois schématique, idealisée et figée" [Bou48, p. 44].

Ancora:

"... rien n'est plus éloigné de la méthode axiomatique qu'une conception statique de la science, et nou ne voudrions pas laisser croire au lecteur que nous avons prétendu retracer un état definitif de celle-ci. Les structures ne son immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence..." [Bou48, p.45].

A contrasto con questa 'apertura' verso possibilità evolutive differenti si pone la sezione conclusiva, ove la posizione bourbakista è ricondotta esplicitamente ad una linea evolutiva *naturale* che contiene Dedekind, Peano e Hilbert. La questione dei rapporti della matematica con le scienze naturali, in particolare con la fisica, è liquidata in modo piuttosto sommario.

Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites – les structures mathématiques; et il se trouve – sans qu'on sache bien pourquoi – que certain aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certain de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elle portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur" [Bou48, pp. 46-47].

Il manifesto bourbakista è molto chiaro: la matematica ha una sua profonda *indipendenza* dalle scienze naturali e deve procedere secondo una sua logica interna. La logica matematica ha un ruolo *marginale.*[2]

[1] "...il subsiste de très nombreux résultats isolés qu'on ne sait jusqu'ici classer ni relier de façon satisfaisante à des structure connues"[Bou48, p. 45].

[2] La logica che serve al matematico "...pour l'essentiel, est celle codifiée depuis Aristote sous le nom de <<logique formelle>>, convenablement adaptée aux buts particuliers du mathematicien" [Bou48, p. 37].

Si tratta di una concezione portata innanzi da un gruppo di matematici di grande prestigio, che negli anni immediatamente successivi recheranno alla matematica contributi di enorme rilievo, anche dal punto di vista degli strumenti introdotti (i fasci, gli schemi, i topoi). Tuttavia la pretesa che questo complesso di idee e di tematiche rappresenti una parte importante della 'matematica moderna' sembra ancora lontana.

Veniamo ora ad una conferenza di Choquet ([Cho61])[3] che ripercorre le stesse tematiche di [Bou48] con una diversa enfasi sul significato dell'impresa bourbakista.

Dopo aver osservato come lo sviluppo storico della matematica mostri il succedersi di periodi di 'ricerca in estensione' seguiti da periodi di sintesi, "... où des méthodes générales sont élaborées, et l'édifice mathématique basé plus solidement" [Cho61, p. 109], Choquet osserva che "aujourd'hui le nombre des mathématicians est tel que ces deux tendences peuvent coexister" [Cho61, p. 109]. Ecco il ruolo di Bourbaki (per quanto attiene alla sintesi).

"... l'oeuvre de synthèse des cinquante dernières années, rendue possible par la création de la théorie des ensembles et de son langage est particulièrement remarquable; elle s'est nettement concrétisée chez BOURBAKI *et c'est là que je veux l'étudier.*
Pour BOURBAKI *il n'y a plus désormais qu'une Mathematique et l'outil essentiel de cette évolution vers l'unité a été la méthode axiomatique"* [Cho61, pp. 109-110].

Segue una breve riproposta della tematica delle *strutture-madri* e delle strutture multiple, che Choquet preferisce chiamare *structures-carrefour.* Alcune pagine successive ripercorrono le conquiste dei metodi bourbakisti. Emergono poi due temi nuovi ed importanti. Ecco il primo: *"Bourbaki est essentiellement algébriste"* [Cho61, p. 124].

Sebbene questa affermazione sia relativa all'analisi, essa ha valenza generale. I promotori del movimento bourbakista

"...ont decouvert l'algèbre auprès des grands algébristes allemands à

[3] Choquet, in un'intervista del 1990 (cfr. MR 93f:01025), ha dichiarato di non essere mai stato membro del gruppo Bourbaki. Tuttavia il suo nome, come relatore, compare in innumerevoli *Seminaires Bourbaki.*

une époque où, en France, on ignorait l'algèbre moderne; aussi leur ouvre d'Analyse est-elle imprégnée d'algèbre et de notations algébriques. [...] Ils ont le goût des transformations, des propriétés qui s'expriment sous forme de relation algébrique.
Lorsque une théorie, classiquement considérée comme de l'Analyse, peut s'algébriser, totalment ou en partie, le Bourbakiste ne résiste pas au plaisir de le faire" [Cho61, p. 124].

Si noterà che questo 'piacere' corrisponde ad una legittima e motivata esigenza scientifica solo se si aggiunge l'ipotesi (implicita) che l'algebra (nella forma particolare datale da van der Waerden in [Wae30],[Wae31]) sia un modello di scientificità.

Un altro tema di grande importanza riguarda la scelta delle definizioni:

La véritable justification d'une bonne axiomatique ·, c'est son succès. Observons BOURBAKI *à l'oeuvre dans le choix des définitions: L'Analyse classique partait de définitions ¡¡naturelles¿¿; dans un context historique, et en déduisait des théorèmes-clefs; puis poursuivait l'étude de la théorie, en gardant les définitions de départ.*
BOURBAKI*, dans la même situation, va modifier les définitions en fonctions des théorèms-clefs; il va, en termes incorrectes mais expressifs, prendre les théorèmes-clefs pour definitions. C'est là un des aspects les plus importants de la bourbakisation des théories* [Cho61, p. 126].

Il cambiamento di prospettiva dato dall'assumere alcuni risultati centrali come punto di partenza per riformulare una teoria può condurre ad acquisizioni di enorme rilievo. Tuttavia, la completa libertà qui descritta per la bourbakizzazione delle teorie non si può disgiungere dall'assumere programmaticamente, come *dato di fatto* ciò che in [Bou48] aveva ancora il senso di un'ipotesi di lavoro, ossia la separabilità della matematica dalle scienze naturali. La matematica diviene ora notevolmente più libera e le proposte che ne conseguono per l'insegnamento sono ben note:

... en géométrie élémentaire, on dégagera très vite la structure affin du plan ou de l'espace et on outilisera l'algèbre des vecteurs; puis d'une façon ou d'une autre, on introduira le produit scalaire qui ramènera à quelques calculs simples l'essentiel de la géométrie métrique usuelle [Cho61, p. 133].

In questo saggio di Choquet non vi sono radicali semplificazioni. Però, se ne possono trarre queste conclusioni: Bourbaki rappresenta in modo significativo

la 'matematica moderna'; inoltre questa matematica è una conseguenza *naturale* dell'algebra, così come descritta nell'opera classica di van der Waerden. Questa matematica, a sua volta, discende naturalmente dal metodo assiomatico di Hilbert.[4][Cho61p. 116].

La ricezione del messaggio bourbakista in Italia è condizionata da numerosi aspetti contingenti. Tra la fine degli anni Cinquanta e l'inizio degli anni Sessanta, si realizzano cambiamenti radicali e profondi nel sistema scolastico italiano, accompagnati, o più esattamente sollecitati, da un dibattito culturale che forse non ha uguali nella storia della nostra organizzazione scolastica.

A livello generale si può ricordare l'istituzione (con la legge del 31.12.1962) della Scuola Media Unica,[5] un processo che coinvolse, nel Parlamento e fuori di esso, eminenti personalità del mondo della cultura e della scienza in un acceso dibattito.[6]

La riforma della laurea in matematica fu fortemente voluta dalla comunità dei matematici e accompagnata prima e dopo la riforma stessa (decisa con il Decreto Presidenziale del 26.7.1962, e resa immediatamente operativa nella maggior parte delle sedi universitarie) da un'estrema attenzione verso il nuovo assetto didattico. Le sezioni di *Notizie* del *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* e la *Sezione Storico-Didattica*, tra la fine degli anni Cinquanta e l'inizio degli anni Sessanta, contengono non solo le necessarie ed abituali informazioni burocratiche, ma anche relazioni e notizie di dibattiti, convegni, iniziative varie, che tutte hanno al loro centro un vivo interesse per la riforma degli studi.[7]

Nella nuova laurea in matematica (separata dalla fisica per volontà comune di entrambe le comunità scientifiche) e divisa nei tre indirizzi applicativo, didattico, generale, l'*algebra* figura al primo anno in sostituzione della chimica. Contenuti di algebra lineare si trovano anche, in varia misura nel corso di *Geometria* I, ed

[4] "HILBERT est d'ailleurs, pour BOURBAKI, un modèle et presque un père..."

[5] Val la pena di ricordare, per misurare l'importanza dei cambiamenti, che prima della 'media dell'obbligo', soltanto i bambini (10-11 anni) che superavano l'esame di ammissione alla Scuola Media potevano proseguire gli studi. Mentre agli altri era unicamente consentito l'accesso all'Avviamento Professionale.

[6] Si veda in proposito la parte finale del saggio [Bes80].

[7] Si veda per esempio [Tog61]. O si esamini l'ampia notizia sul Convegno di Bologna, tenutosi dal 4 al 7 ottobre 1962, le cui relazioni appariranno poi su *L'Enseignement Mathématique*, ma di cui è dato un ampio resoconto nella *Sezione Storico-Didattica*del volume del 1962.

altri contenuti algebrici possono essere presenti in altri corsi istituzionali o in corsi complementari (nell'insegnamento delle *Matematiche Complementari* si trova spesso la Teoria di Galois e in molte sedi si attiva un corso complementare di *Algebra Superiore*.)

L'insegnamento dell'algebra è visto come lo strumento necessario per colmare un ritardo culturale, accumulatosi per varie ragioni.[8]

Il rinnovamento degli studi, l'attenzione che di necessità doveva essere assegnata al metodo assiomatico la cui importanza,– dopo gli studi pionieristici di Peano e della sua scuola, era stata disattesa,– l'indubbio fascino della proposta bourbakista e la generale tendenza di parte della comunità scientifica internazionale verso la 'matematica moderna', vengono a fondersi in una sorta di sintesi che gravita intorno all'insegnamento dell'algebra. Tra i molti testi che compaiono negli anni Sessanta[9] particolarmente interessante è quello di Lombardo Radice [Lom68].

Il libro non vuole essere solo un testo per gli studenti. Vuole essere "...un libro di informazione culturale e di formazione mentale da tutti utilizzabile (almeno in parte). Vorrebbe esporre quei fondamenti dell'astrazione matematica di oggi che debbono diventare 'senso comune' domani, non diversamente da quanto è accaduto per il principio posizionale della numerazione" [Lom68, p. xi].

La carica illuminista che pervade il libro è avvertibile anche nella forma espositiva, con ampio spazio a note marginali,– per ricapitolare, puntualizzare, ammonire,– secondo un modello di lontana origine cartesiana, largamente utilizzato anche da Ludovico Geymonat.

Il libro inizia con un interrogativo nel quale la netta contrapposizione tra matematica 'moderna' e matematica 'classica' è affermata vigorosamente.

Che cosa è la matematica moderna? In che cosa si differenzia da quella "classica"? in particolare qual'è la differenza tra l'algebra astratta studiata nel primo anno del corso di laurea in Matematica, e l'algebra elementare delle scuole medie superiori? [Lom68, p. 1].

[8]Le molteplici ragioni di questo ritardo sono analizzate in [BC], [BS]

[9]Mi limito a segnalare ulteriormente [ZP63], e [Bar68]. Il primo di notevole estensione (concettuale), potendo essere anche utilizzato per un corso avanzato sulla teoria di Galois, proviene appunto da lezioni precedenti di Matematiche Complementari tenute da Zappa a Napoli. Il secondo, volutamente conciso ("non contiene parti discorsive, e contiene pochissimi esercizi ed esempi, che sono tutte cose che ogni docente può fornire e variare a piacimento"), si pone il compito di combattere l'analfabetismo "...in una delle due grandi branche in cui la matematica viene oggi divisa". Un chiaro giudizio sulla situazione precedente dell'algebra.

Dopo avere osservato che una risposta esauriente è data solamente dalla conclusione del libro, l'autore affronta rapidamente il tema della astrazione.

La matematica è sempre *astrazione. Anche gli elementarissimi* numeri naturali *(interi positivi) sono astrazioni. La matematica moderna si differenzia da quella classica per* un più elevato grado di astrazione,*raggiunto, in primo luogo, coll'impiego sistematico del procedimento di* assiomatizzazione [Lom68, p. 1].

Lombardo Radice preferisce confrontare gli interi relativi con i polinomi per riformulare l'esempio iniziale del saggio di Bourbaki. Dopo avere così chiarito che ciò che l'algebra elementare studia separatamente viene unificato nell'algebra astratta, vi è una breve, ma esauriente ripresentazione delle *strutture-madri* e delle *strutture-multiple*. Quasi a conclusione della sezione relativa troviamo l'affermazione seguente.

Algebra e topologia appaiono quindi, nella visione moderna, come i due pilastri fondamentali di tutto l'edificio della matematica. Per restare nel paragone, è da osservare però che algebra e topologia non sono esse stesse il fondamento primo delle matematiche, ma che poggiano ambedue su di una base comune: la teoria degli insiemi*'privi di struttura'* [Lom68, p. 8].

Il metodo assiomatico richiede, per individuare i tratti comuni di teorie differenti, una certo grado di astrazione. Ma in Bourbaki (e ancora in Choquet) la misura di quest'astrazione è data dagli *oggetti* che debbono essere posti a confronto. L'astrazione è nettamente subordinata all'individuazione delle *strutture*. Non è un dato preliminare.

Inoltre, sebbene la proposta originale bourbakista, avesse certamente come fine il possesso *unitario* della matematica, la cesura tra la matematica 'classica' e la matematica 'moderna' non aveva certamente la stessa nettezza che le assegna Lombardo Radice.

Nella posizione espressa nelle *Istituzioni* di Lombardo Radice si manifestano questi punti.

i) Il ruolo dell'astrazione, come *natura* della matematica, il cui progresso si lega strettamente al suo progredire;

ii) Una matematica *moderna* diversa dalla matematica *classica*, nettamente caratterizzata dal rilievo delle *strutture*;

iii) L'*algebra*, come la disciplina ove più chiaramente si avverte il carattere della matematica moderna;

iv) Bourbaki come *interprete autorevole* della matematica moderna.

A queste formulazioni si giunge con un'*interpretazione* della storia della matematica moderna fondamentalmente coincidente con quella che viene espressa da Bourbaki in [Bou63].

2. Un nuovo livello di astrazione

Nel 1970, Lombardo Radice ritorna sul tema dell'astrazione con un articolo molto importante [Lom70], volto ad illustrare il significato della *Teoria delle categorie* ad un vasto pubblico. L'articolo inizia con una sorta di presentazione iniziale:

I progressi della matematica sono segnati dai progressi nell'astrazione. Da circa un quarto di secolo hanno acquistato una grande importanza le astrazioni di terzo grad [Lom70, p. 38].

Ovviamente le categorie corrispondono a queste astrazioni. Ad un primo livello di astrazione vi sono i concetti più semplici, (semplici ma *concetti*, osserva Lombardo Radice), come i gruppi di sostituzioni, i gruppi di trasformazioni, ecc. Da essi si astrae il nuovo concetto più astratto di *gruppo*. Ma se i gruppi vengono considerati nella loro *totalità*, congiuntamente ai loro *morfismi*, abbiamo un nuovo livello di astrazione possibile: la *categoria* come oggetto concreto. Se prescindiamo dall'esempio (ora particolare) dei gruppi e consideriamo gli anelli, gli spazi vettoriali, gli spazi topologici, ecc., alla totalità di questi enti e dei loro morfismi corrisponde un concetto generale di categoria.

Perché questa astrazione sia significativa, occorre che, discendendo da una categoria *generale* verso i casi particolari, la presenza od assenza di determinate costruzioni, o di particolari proprietà, renda il confronto proficuo. Così come avviene per i gruppi, ad esempio, i quali possono essere commutativi o meno, finiti od infiniti, ricchi di sottogruppi o semplici; ed è vedendo il singolo gruppo all'interno di questa trama di confronti che esso acquisisce la sua peculiarità.

Lombardo Radice ha cura di mostrare come la stessa situazione si riveli interessante anche in rapporto alle categorie. In una singola categoria possono esistere oggetti di natura particolare (terminale ed iniziale) possono o meno essere possibili

costruzioni universali. Analizzando questa situazione riusciamo a cogliere differenze profonde tra vari tipi di strutture algebriche, anelli e campi, gruppi e spazi vettoriali, ecc.

L'esposizione di Lombardo Radice è molto nitida e chiara (soprattutto se si tiene conto del breve spazio nel quale essa avviene), ma l'idea del *terzo livello di astrazione* coglie solo in parte il motivo ispiratore della teoria.[10]

Nella formulazione di Lawvere (e di Joyal, Schanuel, Kock, ecc.) ed in parte anche in quella originale di Eilenberg e MacLane una categoria va vista come un oggetto (concetto) di base che descrive le più semplici esperienze legate alla vita quotidiana.[11] Partendo da questa *struttura base* progressivamente arricchita giungiamo agli insiemi astratti e poi, aggiungendo via via nuove proprietà a situazioni più determinate. Ma è essenziale, in questa prospettiva concettuale, comprendere come la struttura *interna* di un oggetto sia progressivamente costruita a partire dall'*esterno*, ossia dai morfismi che giungono e partono dall'oggetto stesso.

Il tema dell'astrazione si rivela una chiave di lettura parziale. Ma la motivazione di fondo non è in una pretesa, *soggettiva*, mancanza di comprensione. Si trova, *oggettivamente*, nei caratteri del momento storico contingente.

3. Qualche considerazione finale

Nella *Presentazione* della traduzione italiana della storia della matematica di Kline [Kli91], Alberto Conte avverte chiaramente il lettore che il bersaglio polemico di Kline è la *new mathematics*,

cioè quella concezione della matematica che ne esalta al massimo gli aspetti astratti introdotta alla fine degli anni '30 dal gruppo di matematici francesi che si celava sotto lo pseudonimo di Nicolas Bourbaki ... [Kli91, pp. XXIII-XXIV].

Osserva ancora Conte che

---

[10] Lawvere, allora in Italia, pur accogliendo con estremo favore la 'propaganda' per la teoria delle categorie certamente non condivideva questa visione di ascesa verso l'astratto. La sua posizione in proposito (condivisa da Schanuel) è desumibile con molta chiarezza da [LS97].

[11] La posizione di Lawvere è menzionata anche in [Spe97b, p. 159] e giudicata "ristretta a una piccola comunità [che] oggi sembra [...] aver perso la sua spinta (una rivoluzione non riuscita ?)". Un giudizio che forse Lawvere non vorrebbe sottoscrivere, ma che sembra il frutto di una constatazione non priva di un fondamento oggettivo.

Il suo atteggiamento radicalmente negativo nei confronti della matematica astratta è certamente da respingere... [Kli91, pp. XXIV].

Ma aggiunge:

Non c'è dubbio, però, che il delirio astrattivo a cui abbiamo assistito negli anni '50 e '60 dovesse suscitare una salutare inversione di tendenza, ed è significativo che ciò si sia verificato più o meno proprio a partire dall'anno di pubblicazione (1972) del volume di Kline, il cui bersaglio dichiarato risulta perciò essere pressoché totalmente scomparso [Kli91, ibidem].

Nel breve saggio finale *Dagli anni '30 ad oggi*, posto a conclusione ed a completamento dell'opera di Kline, Conte riafferma l'importanza di Bourbaki e di coloro che a questo gruppo si sono ispirati. Anche se la tendenza alla costruzioni delle grandi teorie astratte si è affievolita (cfr. [Kli91, p. 1425]) è possibile trarre un bilancio più che confortante dai risultati ottenuti.

Oggi sembra prevalere l'idea che Bourbaki sia un movimento concluso, da lasciare ormai come oggetto per l'indagine storiografica con le sue dispute relative. Naturalmente è più che ragionevole che nell'arco di cinquant'anni un evento storico abbia un inizio ed una fine.

Tuttavia, su Bourbaki, in modo particolare in Italia, sono venute a sovrapporsi molte più cose di quante non fosse nelle intenzioni iniziali,[12] ed è importante operare alcune distinzioni. I deliri astratti (che certo vi sono stati) non vanno confusi con l'esigenza tutt'ora legittima di ricercare una fondamentale *unità* nella matematica.

Né certo le *strutture* rigidamente fissate vanno poste per contenere od eliminare nuovi aspetti della matematica,– i frattali, la computer algebra, l'informatica, ecc.,– che ravvivano profondamente questa disciplina. Tuttavia l'idea *dell'unità della matematica* che ad esse si collega può ben ripresentarsi proficuamente in altre forme.

Riferimenti bibliografici

[Bar68] I.Barsotti, *Appunti di Algebra.* Zanichelli, Bologna, 1968

[BC] A.Brigaglia e C.Cliberto. Geometria algebrica. In *[DGN98]*, pp.185-320.

[12]Ho completamente tralasciato i molti aspetti ideologici e politici che sono venuti a circoscrivere l'opera di Bourbaki. Su questo genere di questioni ha scritto molto Giorgio Israel.

[Bes80] L.Besana. Il concetto e l'ufficio della scienza nella scuola. In *[Mic80]*, pp. 1167-1284, 1980.

[Bou48] N.Bourbaki. L'architecture des mathématique. In *[Lio48]*, pp 35-47, 1948.

[Bou63] N.Bourbaki. *Elementi di storia della matematica. Trad.it* Feltrinellim 1963.

[BS] A.Brigaglia e A.Scimone. Algebra e Teoria dei numeri. In *[DGN98]*, pp. 505-567.

[Cho61] G.Choquet. L'analyse et bourbaki. *L'Enseignement Mathématique*, II, 7:109-135, 1961.

[Cor96] L.Corry. *Modern algebra and the rise of mathematical structures.* Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 1996.

[DGN98] S.Di Sieno, A.Guerraggio e P.Nastasi, editors. *La Matematica Italiana dopo l'Unità*, Milano, 1998. Marcos y Marcos.

[Kli91] M.Kline. *Storia del pensiero matematico.* Edizione italiana a cura di A.Conte, 2 volumi, Einaudi, Torino, 1991.

[Lio48] F.Le Lionnais, editor. *Les grand courants de la pensée mathématique*, Paris, 1948. Cahiers du Sud.

[Lom68] L.Lombardo Radice. *Istituzioni di Algebra astratta.* Feltrinelli, Milano, quinta edizione, 1968.

[Lom70] L.Lombardo Radice. Un nuovo livello di astrazione: la teoria delle categorie. *Le Scienze*, 4:38-44, 1970.

[LS97] F.W.Lawvere e S.H.Schanuel. *Conceptual mathematics. A first intriduction to categories.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Mic80] G.Micheli, editor. *Storia d'Italia. Annali 3*, Torino, 1980. Einaudi.

[Spe97a] F.Speranza. Rivoluzioni in matematica: il caso cartesiano e il caso bourbakista. In *[Spe97b]*, 1997.

[Spe97b] F.Speranza. *Scritti di epistemologia della matematica.* Pitagora editrice, Bologna, 1997.

[Tog61] E.Togliatti. Relazione alla commissione scientifica dell'U.M.I. *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, III, 16:97-101, 1961.

[Wae30] B.L.Van der waerden. *Moderne Algebra, vol.I.* Springer, Berlin, 1930.

[Wae31] B.L.Van der Waerden. *Moderne Algebra, vol. II.* Springer, BErlin, 1931.

[ZP63] G.Zappae R.Permutti. *Gruppi, corpi, equazioni.* Feltrinelli, Milano, 1963.

COMUNICAZIONI

Apprendimento, risoluzione di problemi ed uso dei registri rappresentativi nella Scuola Superiore

Giorgio Tomaso Bagni*

Summary. Several studies showed that the role of semiotic representations is important in the learning of Mathematics: in this paper we analyse the behavior of High School pupils (aged 17-19 years) with reference to exercises in Trigonometry and in Analytic Geometry; an experimental research considered 196 pupils. As regard strategies and didactical implications, we conclude that many pupils try to solve a problem only in the sector explicitally considered: this is an obstacle to reach good performances and it is uneffective for the development of abilities to coordinate registers of representation.

Il ruolo dei registri rappresentativi è di primaria importanza nella Didattica della Matematica. Esso può essere collegato a problemi di "settorializzazione": talvolta, infatti, gli allievi sembrano orientare in modo esclusivo il proprio approccio, si collocano in un particolare settore della disciplina studiata ed appresa, ed esclusivamente in tale àmbito operano, evitando contaminazioni con altri settori della Matematica. La Geometria, ad esempio, è basata sulla rappresentazione visuale: la didattica della Geometria e la risoluzione di un problema si sviluppano infatti (esclusivamente?) in àmbito visuale, nel quale la presenza di immagini è fondamentale (Fischbein, 1993, Vinner, 1992 ed il capitolo 5 di: D'Amore, 1999; per il coordinamento dei diversi registri rappresentativi indichiamo: Duval, 1993; a proposito dei ruoli assunti dalle figure in àmbito geometrico si veda: Duval, 1994; un analogo riferimento all'Analisi matematica è in: Bagni, 1999).

Scopo di questa prima ricerca è di mettere in evidenza alcuni aspetti di una situazione che spesso si presenta nelle aule scolastiche; abbiamo isolato alcune domande:

Domanda 1. Il fatto che gli allievi siano "preparati" a risolvere esercizi in più àmbiti (separatamente), intesi come settori della stessa disciplina, implica buone performance in esercizi che coinvolgano più àmbiti?

Domanda 2. Nel caso in cui il coinvolgimento di più àmbiti si presentasse come un ostacolo, la presentazione dello stesso esercizio con la suddivisione della

*Nucleo di ricerca in didattica della matematica, Bologna

traccia in più punti, divisi per àmbiti, aiuta gli allievi a superare (o ad eludere) tale ostacolo?

Domanda 3. Il tempo a disposizione è elemento decisivo per ottenere buone performance nel caso di risoluzione di un esercizio che si articola in più àmbiti?

Abbiamo elaborato tre test, da somministrare a tre diversi gruppi di allievi:

Test 1. Abbiamo preparato tre schede, A, B, C nelle quali un esercizio analogo viene proposto rispettivamente negli àmbiti goniometrico (A), di geometria analitica (B) ed in entrambi questi àmbiti (C). Confrontando le percentuali di successo degli allievi intendiamo valutare se ad eventuali buone performance in ambito goniometrico ed analitico (separatamente considerati) corrispondono buone performance anche per quanto riguarda esercizi che coinvolgono entrambi tali àmbiti.

Test 2. Abbiamo suddiviso esplicitamente in due punti la traccia relativa alla scheda C in modo da evidenziare le due fasi della risoluzione (svolte in due àmbiti diversi).

Test 3. Abbiamo riproposto la scheda C raddoppiando il tempo a disposizione.

L'analisi sperimentale del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando quattro classi di IV Liceo scientifico (98 allievi di 17-18 anni) e quattro classi di V Liceo scientifico (97 allievi di 18-19 anni), a Treviso, per un totale di 195 allievi (che avevano seguito, fino al momento del test, un corso tradizionale di Matematica).

I test sono stati condotti con riferimento ad un numero piuttosto esiguo di allievi (relativi al solo Liceo Scientifico); dal punto di vista statistico, inoltre, non è stata effettuata una particolare campionatura: dunque i risultati dei test non possono essere considerati indicativi di un'ampia popolazione. Da tali risultati, comunque, emergono alcune tendenze abbastanza nette, che ci portano a rispondere alle domande sopra formulate:

Risposta 1. Il fatto che gli allievi siano "preparati" a risolvere esercizi in più àmbiti considerati separatamente, non implica buone performance, per quanto riguarda l'esercizio esaminato, quando la formulazione coinvolge più àmbiti.

Risposta 3. Il tempo a disposizione non appare elemento decisivo per ottenere buone performance nel caso di risoluzione di un esercizio che si svolge in più àmbiti.

Non pochi allievi, dunque, appaiono disorientati, stentano a prendere coscienza dell'opportunità (della necessità) di operare in àmbiti diversi e con diversi registri

rappresentativi. Ciò è confermato dal fatto che le percentuali di successo aumentano quando l'esercizio proposto in àmbito "misto" è scomposto nelle sue fasi risolutive:

Risposta 2. La presentazione dello stesso esercizio in forma "segmentata", ovvero con la suddivisione della traccia in più punti, aiuta gli allievi ad eludere (più che a superare) l'ostacolo costituito dalla sovrapposizione di più àmbiti.

Possiamo dunque affermare che il tipo di ostacolo riscontrato è didattico: l'àmbito risolutivo implicitamente o esplicitamente indicato dalla traccia evoca le tecniche da usare; ed in questa fase è plausibile l'azione di alcune clausole del contratto didattico: gli allievi operano soltanto secondo le modalità che ritengono suggerite dalla traccia loro assegnata (ci limitiamo infine ad osservare che anche la componente affettiva può assumere una non trascurabile importanza: pensiamo a quanto affermato, con riferimento ad un diverso livello scolastico, in: Poli & Zan, 1996, pp. 454-455).

Riferimenti bibliografici

- Bagni, G.T. (1999), Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 22B, 4, 353-372.
- D'Amore, B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica, Pitagora*, Bologna.
- Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée,*Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
- Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique,*Repres IREM*, 17, ottobre.
- Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts,*Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Poli, P. & Zan, R. (1996), Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione di problemi,*La Matematica e la sua Didattica*, 4, 440-466.
- Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in Mathematics, Harel, G. & Dubinsky, E., *The concept of Function*, MAA Notes, 25, 195-213.

Storia Fantastica de L'Algebra di Rafael Bombelli

Giovanni Barbi*

0. Un CD-ROM per la Didattica della Matematica

Questo lavoro nasce da alcune semplici considerazioni:

- le *nuove tecnologie* sono indispensabili alla matematica come ad ogni altra scienza, materia, disciplina, arte o mestiere;
- la struttura formale della matematica è imprescindibile a meno che non si voglia assumere per matematica qualche cosa di diverso da quanto è stato sino ad ora considerato "matematica";
- si apprende solo operando, facendo, calcolando, giocando;
- la conoscenza nasce certamente dall'esperienza ma deve evolversi verso forme astratte via via maggiormente formalizzate (solo questo rende la conoscenza-esperienza dell'individuo un patrimonio comunicabile e condivisibile).

Questo CD doveva dunque avere caratteristiche ben determinate: è parso innanzitutto necessario dare uno spessore concreto, umano ai vari personaggi, calare le "scoperte" matematiche nel tessuto sociale, rivolgersi cioè alla cosiddetta *storia materiale* più che a quella politica o militare.

Non è per moda che si è deciso di produrre il lavoro su un supporto informatico con le caratteristiche proprie di un *nuovo media*, addirittura di un *adventure game*. Al di là delle speculazioni teoriche oggi assai vivaci, oltre la volontà di raggiungere un pubblico che fosse il più vasto possibile (anche e soprattutto di "giovani"), pensiamo che la *comunicazione mediata dall'elaboratore* sia la più idonea a trattare grandi moli di dati e teorie complesse, mantenendo alto il livello di interesse del fruitore.

L'importanza culturale della *formalizzazione* è uno dei lasciti stabili e definitivi del Novecento; la struttura formale è certamente uno dei *nuclei fondanti* della matematica e questo è probabilmente vero anche per ogni altra arte, disciplina o scienza che aspiri ad uno status di "maturità": scienza non solo rigorosa ma anche realmente operativa, non velleitaria ma capace di risultati concreti.

Nella storia degli algebristi italiani del Cinquecento, nel passaggio dall'*algebra retorica* a quella *sincopata*, sino al primo apparire dell'*algebra astratta*, ci è parso

*IRRSAE Emilia Romagna

di poter identificare un primo fertile territorio su cui muoverci. Scegliere Rafael Bombelli come protagonista della nostra "storia" è poi stato facile.

1. Presentazione

Con *L'Algebra* di Rafael Bombelli si chiude quella che potremmo definire l'età dell'oro dell'algebra, l'epoca degli algebristi rinascimentali italiani.

Di Bombelli nulla sappiamo oltre quanto lui stesso ci dice nella prefazione alla sua opera. Risulta in ogni caso difficile comprendere come un "idraulico" (Bombelli viveva sostanzialmente occupandosi di opere di bonifica) possa aver raggiunto tali e tante competenze da superare anche un genio della portata di Gerolamo Cardano o un talento quale quello del Tartaglia.

Questa storia cerca di spiegare, in modo appunto "fantastico", la nascita de *L'Algebra* attraverso il racconto della vita e delle numerose vicissitudini del giovane Rafael.

I fatti storicamente provati e le avventure frutto dell'invenzione narrativa sono sempre accuratamente distinti. In questo ci vorremo richiamare al paradigma di Imre Lakatos delle "ricostruzioni razionali": racconta la storia della scienza nel modo più razionale possibile ma metti sempre la storia "vera" in nota a pie' di pagina.

2. L'oggetto

Si tratta sostanzialmente di un adventure-game che sfrutta la maggior parte degli espedienti retorici (ormai consolidati) di questo genere di "letteratura". Il gioco è accompagnato da un apparato didattico articolato almeno su tre livelli: il primo è un semplice controllo relativo all'ambientazione storica ed alle conoscenze biografiche, il secondo riguarda la comprensione dei problemi matematici che Rafael è via via costretto ad affrontare, il terzo richiede al lettore un vero e proprio impegno produttivo con tanto di problemi da risolvere (con carta e penna).

I vari livelli di gioco sono indipendenti ma naturalmente i punteggi finali sono assai diversi.

3. La storia

Rafael viene allontanato da Bologna per essere affidato a Gerolamo Cardano. Giovane amanuense incontrerà Ludovico Ferrari (il preferito del maestro), Jacopo Tonini e il Tartaglia. Durante un viaggio alla ricerca della formula per la soluzione delle equazioni cubiche (contenuta nel quaderno di Scipione Dal Ferro), a Bologna la compagnia si scioglie e a Rafael non resta che tornare a casa. È costretto ad occuparsi di aritmetica mercantile a causa delle notevoli difficoltà economiche in cui versano le sue proprietà: incontrerà Dioni Gori e sarà anche coinvolto nella fondazione di uno dei primi Banchi.

Durante i numerosi viaggi intrapresi (uno anche nell'anti-paradiso: luogo metafisico in cui si incontrano i matematici del presente e del passato) sarà testimone di alcuni fatti criminosi (dall'avvelenamento di Ludovico Ferrari a quello dell'intera famiglia Seroni), conoscerà il carcere a causa di una rissa da lui provocata dopo la disfida Ferrari - Tartaglia in S.Maria in Giardino a Milano.

Troverà alcuni protettori come il Vescovo di Melfi ma potrà tranquillamente ritirarsi al proprio lavoro (l'idraulico), solo dopo aver sfidato il Grande Inquisitore, aver definitivamente risolto le equazioni di terzo grado e risposto alla "terribile suina disfida".

Polinomi e liste

Giulio C. Barozzi*

Questa nota si inserisce una serie di articoli volti ad illustrare le possibilità offerte dalle calcolatrici grafico-simboliche; per contributi simili il lettore può consultare i riferimenti bibliografici (1), (4), (5), (6) e (7).

Come nelle note citate, viene utilizzato il linguaggio TI BASIC, implementato nelle calcolatrici TI 89 e TI 92.

L'argomento di trattato è quello dei polinomi e delle funzioni polinomiali ad essi associate. L'informazione relativa ad un polinomio è contenuta nella lista dei suoi coefficienti $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, con la convenzione di considerare equivalenti due liste se esse differiscono soltanto per uno o più zeri posti in coda. Questa convenzione è giustificata dal fatto che due liste equivalenti, nel senso appena definito, inducono la medesima funzione polinomiale.

Gli argomenti affrontati nel corso dell'esposizione sono:

- inversione di una lista
- estrazione della lista dei coefficienti di un polinomio assegnato
- addizione e moltiplicazione tra polinomi operando direttamente sulle liste dei coefficienti
- divisione tra polinomi (ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile)
- divisione tra polinomi (ordinati secondo le potenze crescenti della variabile).

Per una esposizione completa di tutti i programmi si può consultare il sito http://matematica/uni-bocconi.it oppure la home page dell'autore http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/

Bibliografia

(1) Barozzi G.C., Cappuccio S.: Le calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica, Pitagora Editrice (Bologna), 1996;

(2) Barozzi G.C., Matarasso S.: Analisi Matematica 1, Zanichelli (Bologna), 1986;

*Dipartimento di Matematica e CIRAM, Università di Bologna

(3) Childs L.N.: A Concrete Introduction to Higher Algebra, Springer (New York), 1995;

(4) Impedovo M.: I nuovi strumenti modificano l'insegnamento della matematica, Lettera matematica PRISTEM, 23, p. 41-48;

(5) Impedovo M.: Qual è la miglior funzione, Lettera matematica PRISTEM, 30, p. 52-54;

(6) Impedovo M.: Matematica: insegnamento e computer algebra, Springer (Milano), 1999;

(7) Waits B., Demana F.: Le calcolatrici simboliche, Lettera matematica PRISTEM, 33-34, p. 92-96;

CRONACA DI UN LABORATORIO DI GEOMETRIA

Comunicazione del nucleo di ricerca didattica di Cosenza: Margherita D'Aprile, Paola Armentano, Pasquale Cozza, Rossana D'Alessandro, Caterina Lazzaro, Geltrude Rossi, Anna Luisa Scarnati, Gianfranco Scarpino, Grazia Servi

Il nucleo di ricerca didattica di Cosenza, nato nel 1996, si è occupato principalmente di didattica della Geometria. Negli anni scolastici 1997/98 e 1998/99 il nucleo ha svolto un'indagine sulle conoscenze di Geometria dello spazio possedute dagli studenti del biennio della scuola superiore; i risultati, riportati e commentati in un articolo* in corso di stampa, hanno confermato le più pessimistiche previsioni sulla sostanziale limitatezza di tali conoscenze. La ricerca mostra però che, pur sapendo poco, gli studenti non dimenticano durante il biennio le nozioni di base sullo spazio e anzi migliorano alquanto nell'elaborazione dei concetti e dei ragionamenti matematici, anche se generalmente mancano d'intuizione spaziale e della capacità di leggere le raffigurazioni piane di figure tridimensionali. Ritenendo queste abilità indispensabili, e consapevoli del fatto che, sebbene i programmi del biennio della scuola superiore contengano argomenti di Geometria del piano e dello spazio, in realtà s'insegna solo Geometria piana (e a volte anche poca di questa), il nucleo ha deciso di sperimentare, in quattro classi di secondo Liceo scientifico, i cui insegnanti fanno parte del nucleo, una piccola innovazione nell'insegnamento della Geometria nel biennio: infatti, i componenti del nucleo hanno giudicato non realistico prospettare cambiamenti sostanziali nei piani di lavoro degli insegnanti e si sono limitati a proporre di affiancare all'usuale lavoro in classe un'attività complementare, non di routine, che stimolasse la partecipazione attiva degli studenti. Con il nome (un po' generico, scelto perché non intimorisse i ragazi) di *Laboratorio di Matematica* sono state quindi programmate delle sessioni periodiche di "problem solving", progettate in modo che ne potessero risultare consolidate le conoscenze precedenti - o se del caso introdotti i fatti di base - riguardanti la geometria dello spazio e principalmente fosse stimolata e coltivata negli studenti l'intuizione spaziale.

Al *Laboratorio di Matematica* vengono dedicate due ore, con cadenza circa

*M. D'Aprile, P. Cozza, R. D'Alessandro, C. Lazzaro, A L. Scarnati, G. Scarpino, G. Servi: *Un'indagine sulle conoscenze di Geometria dello spazio degli studenti negli anni iniziali delle Scuole Superiori*, in corso di stampa su "L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate".

mensile; gli studenti lavorano in gruppi, liberamente formati (inizialmente di 4-5 persone, poi ridotti a 3-4 per migliorarne il funzionamento), mentre l'insegnante si limita ad essere disponibile se chiamato a dirimere controversie; ogni gruppo presenta una relazione finale.

I problemi vengono scelti in modo che, almeno quelli iniziali, richiedano pochissime conoscenze di geometria dello spazio (quelle che sicuramente vengono acquisite nella scuola elementare), che sfruttino le proprietà fondamentali della geometria piana studiata nel primo anno (triangoli, somma degli angoli, parallelogrammi...) e che, nel seguito, consolidino la padronanza dei termini del vocabolario minimo necessario per parlare dello spazio (rette sghembe, diedri, angoloidi...) e conducano alla "scoperta" di alcun proprietà relative a piani paralleli, rette e piani paralleli, angoli tra rette e piani, rette piani perpendicolari, piani perpendicolari, simmetrie. Almeno nelle intenzioni dei promotori dell'iniziativa, i problemi dovrebbero essere tali da costringere ad utilizzare l'intuizione spaziale, familiarizzare con la lettura e la costruzione, anche approssimativa, di figure che rappresentano oggetti tridimensionali, e, gradualmente, far nascere il bisogno di assegnare nomi e classificare situazioni. Per la sua stessa natura, una simile attività persegue anche altri obiettivi, oltre a quelli appena esposti di rafforzamento o di costruzione di conoscenze di geometria dello spazio, perché educa gli studenti a lavorare in gruppo, a parlare e a discutere di matematica, a scrivere di matematica ed avvia alla produzione di dimostrazioni. Infatti, la soluzione di problemi, per quanto semplici richiede l'impiego di capacità deduttive, mentre la redazione delle risposte, per quanto stringate, impegna le capacità linguistiche ed espositive. Naturalmente, la difficoltà per gli autori dei problemi consiste nel riuscire a conciliare l'esigenza di interessare e incuriosire i ragazzi con la necessità di presentare quesiti semplici, che non disorientino né scoraggino e neppure annoino. Non sempre vi si riesce, e poiché in generale si ottengono proposte efficaci solo per successivi aggiustamenti, dopo tentativi ed errori, è fuor di dubbio che i materiali prodotti fino ad ora per il *Laboratorio di Matematica* siano suscettibili di miglioramenti.

Le schede contengono ampi spazi in cui ogni gruppo possa riportare i ragionamenti svolti; a volte si forniscono suggerimenti, anche per l'utilizzazione di modelli fisici e sempre vi sono delle domande finali di commento sul lavoro svolto e di autovalutazione. Dalle prime sessioni del laboratorio è emerso che i ragazzi hanno mostrato di gradire (molto più di quanto gli insegnanti stessi prevedessero) la possibilità di lavorare insieme confrontare idee, discutere; al punto che talvolta richiedono del tempo supplementare, per poter migliorare le relazioni finali; ma, nonostante che i docenti del gruppo presumessero di essere consci delle difficoltà di linguaggio connesse con l'insegnamento della Matematica, si sono verificate incomprensioni proprio su termimi il cui significato era ritenuto (dagli insegnanti) completamente condiviso.

Per esempio: è risultata molto diffusa l'identificazione di "piano" con "parallelogramma", motivata dalla consuetudine di rappresentare i piani, nelle illustrazioni dei libri di testo, con parallelogrammi: quindi tra i casi possibili di coppie di piani, vi è anche quello di due piani che abbiano in comune un "pezzo di piano". Diffusa anche l'identificazione di "sezione piana di un solido" con "ciascuna delle due parti in cui il solido rimane diviso da un piano che lo interseca". Alla domanda "Avete trovato difficoltà nel lavoro di oggi?", un gruppo risponde: "Immaginare un piano infinito" e un altro "Si, nel vedere dal giusto punto di vista".

Alla domanda: "Come giudicate questo laboratorio?" è frequente, dopo il primo incontro la risposta "divertente e interessante", ma anche, in una classe, "istruttivo e ci aiuta lavorare insieme con gli altri". E dopo il secondo incontro, nella stessa classe "Interessante nel complesso poiché ci spinge a un confronto, dove ognuno partecipa attivamente". E in un'altra classe: "Molto complicato. Ma ci aiuta a ragionare meglio." ancora: "Ci aiuta ad adoperare un linguaggio appropriato."

Alla fine dell'anno scolastico il nucleo intende riproporre il questionario sulle conoscenze di geometria dello spazio che è stato distribuito l'anno precedente nelle stesse classi, per controllare se in queste seconde si hanno risultati diversi da quelli ottenuti nelle seconde dell'anno scorso, nelle quali non era stato fatto nulla per tenere in vita le nozioni d geometria spaziale.

Modelli dinamici e nuclei fondanti dell'insegnamento matematico

A.M.Facenda, P.Fulgenzi, F.Masi, J.Nardi, F.Paternoster*

Il nostro gruppo ha presentato una mostra di materiali didattici: si tratta di oggetti semplici, costruiti con materiali "poveri" e di facile reperibilità. La maggior parte di essi possiede uno o più elementi mobili; la loro dinamicità consente di far costruire attivamente all'alunno concetti matematici e di far emergere, anche attraverso trasformazioni geometriche, varianti ed invarianti. Fondamentale, nel nostro quadro teorico di riferimento, è la teoria di Fischbein sul doppio aspetto (figurale e concettuale) degli "oggetti" geometrici: i nostri modelli si riferiscono all'aspetto figurale ma il loro uso contribuisce alla costruzione dell'aspetto concettuale. Possedendo, grazie alla loro dinamicità, una forte componente spazio-temporale, consentono di cogliere e rendere "concreti" oggetti, processi, relazioni; pertanto interagiscono con categorie mentali profonde e –permettendo di analizzare anche rapporti causa-effetto- sono propedeutici all'acquisizione del concetto di funzione. Rispetto al disegno, che pure media tra oggetto ed astrazione,i modelli arricchiscono la percezione e consentono una costruzione del sapere per passaggi successivi.

Modelli e linguaggi

È ormai accettato che l'uso contemporaneo di più registri di rappresentazione consente agli alunni una corretta concettualizzazione; i modelli dinamici sono un registro di rappresentazione (con caratteristiche in parte autonome rispetto al disegno) che sposta l'attenzione dal prodotto al processo, sollecita a intuire e descrivere trasformazioni e permanenze e consente di verificare "in concreto" le intuizioni. Inoltre l'uso di modelli può contribuire alla padronanza del linguaggio simbolico formale, perché gli alunni utilizzano le formule in contesti diversi e quindi in modo più consapevole; stimola la verbalizzazione e consente quindi al docente di controllare la formazione delle immagini mentali negli allievi.

Modelli, errori e misconcetti

Le attività con i modelli permettono di prevenire, grazie ad un uso precoce, la formazione di alcuni misconcetti molto diffusi. Inoltre, l'interazione con le immagini mentali già possedute mette in evidenza misconcetti e stereotipi già instauratisi e può consentire di superarli. L'alunno, diventando protagonista nella costruzione del proprio sapere, può anche valutare da sé le proprie prestazioni e individuare e correggere errori di interpretazione o di impostazione.

*Sezione Mathesis di Pesaro

Interazione alunno-modello

L'attività con i modelli aumenta la motivazione e l'interesse degli alunni, li coinvolge in discussioni anche vivaci e, nello stesso tempo, ne sollecita la progettualità; ogni alunno, infatti, dopo una prima fase di manipolazione ed osservazione casuale, elabora in genere un suo percorso di indagine, che segue fino alla fine. L'insegnante, analizzando i comportamenti degli allievi, può individuare i loro stili di lavoro, verificare l'uso integrato del disegno e del linguaggio, controllare l'evoluzione nell'uso di quest'ultimo.

Indicazioni sulla metodologia d'uso e sulle finalità

Perché l'attività con i modelli risulti produttiva è necessario rispettare alcune condizioni: utilizzare più registri di rappresentazione, presentare uno stesso concetto attraverso modelli diversi, avere come obiettivo la scoperta degli invarianti, non confondere mai le indicazioni ricavate dal modello con una dimostrazione. Infatti, argomentazione e dimostrazione sono una finalità e non sono rese superflue dall'intervento del dato percettivo.

È evidente che i materiali presentati, quindi, stimolano l'osservazione, l'analisi, il collegamento, l'intuizione; abituano a sottoporre le ipotesi ad un vaglio critico, invitano alla discussione e quindi arricchiscono il linguaggio. In più, realizzano un continuo problem posing e consentono al docente di graduare l'attività a seconda del livello scolare e delle competenze. Non dimentichiamo infine che l'alunno, riflettendo –per formulare ipotesi ed argomentare- sul proprio percorso di scoperta e strutturazione delle conoscenze fa metacognizione.

Lavoro dell'insegnante

Certamente una didattica attraverso modelli chiede all'insegnante uno sforzo di creatività ed un impegno nella organizzazione, preparazione e gestione del lavoro in classe: preparazione di schede, analisi di protocolli, gestione della discussione anche sul piano della correttezza scientifica..e così via. In compenso, è possibile conoscere con maggiore dettaglio gli stili di lavoro degli alunni e seguirne i progressi sul piano linguistico, dell'astrazione e della strutturazione concettuale.

Conclusione

Naturalmente il nostro lavoro sulla didattica attraverso i modelli dinamici continua, ed è ancora soggetto a revisioni e completamenti. In particolare, riteniamo che meritino un approfondimento le questioni seguenti:

- rapporto tra formazione dei concetti e padronanza dei registri di rappresentazione;
- permanenza di determinati errori e misconcetti, nonostante l'evidenza percettiva li smentisca;
- rapporto tra dati dell'osservazione e loro rappresentazione attraverso il disegno (dal dinamismo alla staticità).

Bibliografia

- Bartolini Bussi M.C., *Apprendere con la matematica attraverso la discussione: grafici nel piano cartesiano*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, n. 3, 1991
- Bartolini Bussi M.C., *La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, n. 5, 1989
- Bartolini Bussi M.C., Boni M., *Analisi dell'interazione verbale nella discussione in matematica: un approccio vygotskiano*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, n.3, 1995
- Borasi R., *Fare degli errori un trampolino di lancio per la ricerca*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, n.5, 1996.
- Cornoldi M.,*Matematica e metacognizione*, Erikson.
- Damiani A.M., Facenda A.M., Fulgenzi P., Masi F., Nardi J., Paternoster F., *Costruire immagini mentali attraverso i modelli: una esperienza didattica*, L'Educazione matematica, n.3, 1996.
- Duval R., *Les différentes fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, REPERES – IREM n.17 – 1994
- Duval R., *Interaction de niveaux de représentation dans la compréhension des textes*, Annales de didactique et des Sciences cognitives, vol.4, 1991.
- Facenda A.M., Manna M.C., Nardi J., Paternoster F., - NRD Parma, Sezione Mathesis di Pesaro, *Dallo studio di un "modello dinamico" alle definizioni: un percorso interattivo*, Atti del II Convegno Nazionale dei nuclei di ricerca per la scuola dell'obbligo, 1997.
- Fishbein E., *Modelli taciti e ragionamento matematico*, Matematica e scuola, 1992.
- Laborde C., *L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomenes didactiques*, Rechèrche en didactique des Mathematiques n.3 – 1988
- Mariotti M.A., *Le rappresentazioni grafiche e l'apprendimento della geometria*, Atti IX convegno di Castel S. Pietro, 1995
- Mariotti M.A., *Costruzioni in geometria*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate n. 3 – 1996
- Mariotti M.A., "Discutendo in classe la definizione di prisma", L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, n.5, 1995
- Mariotti M.A.,*Immagini e concetti geometrici*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, n.9, 1992.
- Mariotti, Nello, Marino, *L'immagine mentale per la formazione dei concetti geometrici*, L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate N.5 – 1987
- Mariotti M.A., *Il ragionamento geometrico: una dialettica fra l'aspetto figurale e concettuale*, PME 1992
- Masi G., *Componenti cognitive e metacognitive nella risoluzione dei problemi*, Insegnare la matematica ad allievi in difficoltà, 1997.
- Mesquita A.L., *Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie*, Educational studies in mathemathics n.20 – 1989
- Speranza F., *Dallo spazio alla geometria*, Atti del II Convegno Nazionale dei nuclei di ricerca per la scuola dell'obbligo, 1997.
- Speranza F., *Salviamo la Geometria*, in La matematica e la sua didattica.
- Tizzani P., *Quelques hypothèses pour interpréter les difficultés qui se présentent dans la représentation plane de situations spatiales et leurs implications pour ce qui est de l'enseignement*, Atti del 46° CIEAEM, Tolosa 1994.
- Vygotsky L., *Pensiero e linguaggio*, Giunti 1991
- Zan R., *Il ruolo dei comportamenti metacognitivi nella risoluzione dei problemi*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, n.1, 1995.

Laboratorio con le calcolatrici TI-92 e TI-89
Approccio al calcolo infinitesimale

Michele Impedovo

La *computer algebra*, disponibile ora su calcolatrice, mette a disposizione dell'allievo strumenti di calcolo, di visualizzazione e di programmazione che rendono l'apprendimento più efficace.

La pendenza di una funzione

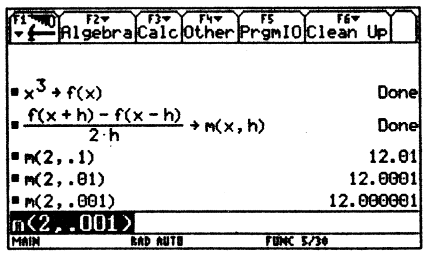
Nell'approccio ai concetti di limite, di derivata e di integrale la computer algebra può migliorare l'efficacia del nostro insegnamento.

Occupiamoci della pendenza di una funzione, per esempio $f : x \to x^3$ e $x_0 = 2$. Il primo approccio è sperimentale, e sfrutta il rapporto simmetrico degli incrementi

$$m(x,h) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

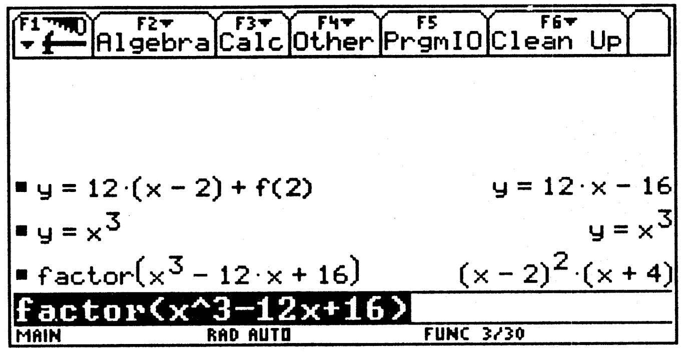
Definiamo dunque le funzioni $f(x)$ e $m(x,h)$ e calcoliamo $m(2,h)$ con incrementi h via via più piccoli.

Al tendere a zero di h la pendenza di f in 2 tende a 12 (si osservi che l'errore è proporzionale al quadrato di h). Lo studente fornisce in modo naturale una sensata congettura: la pendenza di f in 2 è 12. Tale congettura si può *dimostrare*: è sufficiente verificare che la retta di pendenza 12 passante per $(2, f(2))$ abbia in $x_0 = 2$ due intersezioni coincidenti con la curva.

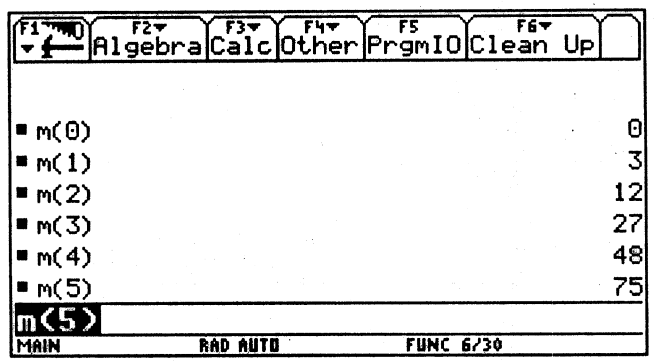


Senza lanciarsi in precoci generalizzazioni, si può ora guidare gli studenti alla scoperta e alla congettura: determinare la pendenza di $f : x \to x^3$ in 0, 1, 2, 3, 4,

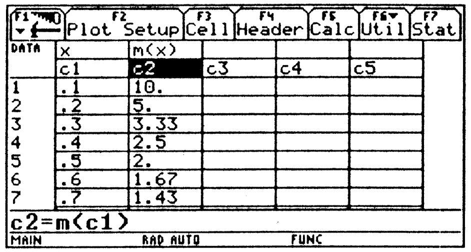
5. Quale sarà la pendenza in $x_0 = 6$? Quale legge si osserva?

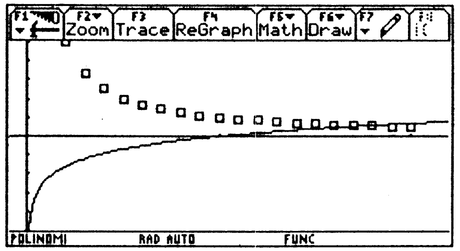


La definizione algebrica di retta tangente è inutilizzabile per le funzioni trascendenti, per le quali il concetto di *molteplicità* di uno zero non è recuperabile (se non sviluppando la funzione in serie di potenze).



Diventa necessario quindi ricorrere ad una nuova definizione di retta tangente, che coinvolge necessariamente il concetto di limite. È qui che il metodo di approssimazione svolge un ruolo fondamentale per avvicinare gli studenti alla definizione di limite, che verrà data solo più avanti. Per esempio, sia $f(x) := ln(x)$.



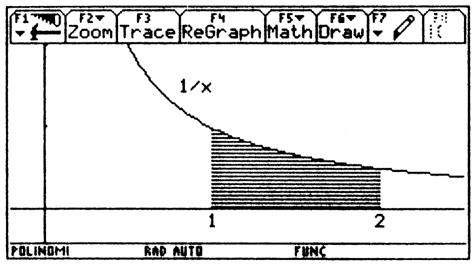


La tabella, forse più del grafico, dà una indicazione chiara per formulare l'ipotesi che la derivata di $ln(x)$ sia $1/x$. È un'ipotesi che può essere verificata con la precisione desiderata.

Un problema di area

Un modo di introdurre il tema degli integrali consiste nel proporre a sorpresa, senza alcun nesso con gli argomenti svolti fino a quel momento, il seguente lavoro di gruppo.

Osserva il grafico seguente, relativo alla funzione $x \to 1/x$: approssima al meglio l'area della regione ombreggiata.



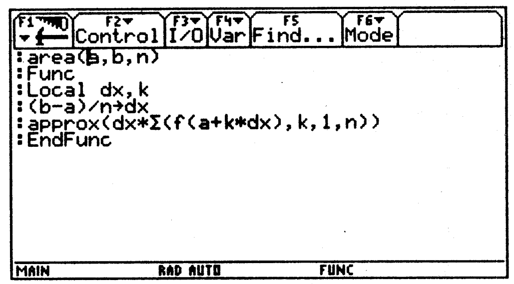
È interessante notare che molti gruppi si orientano spontaneamente verso il classico "metodo dei rettangoli": dividono l'intervallo $[1, 2]$ in 5 o 10 intervalli, e calcolano l'area dei rettangoli inscritti, o circoscritti; qualche gruppo usa addirittura i trapezi. Una breve discussione conduce a questa idea: per approssimare l'area richiesta si divide l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di ampiezza $\Delta x = (b - a)/n$, si

calcola il valore della funzione $f(x)$ nei punti di suddivisione

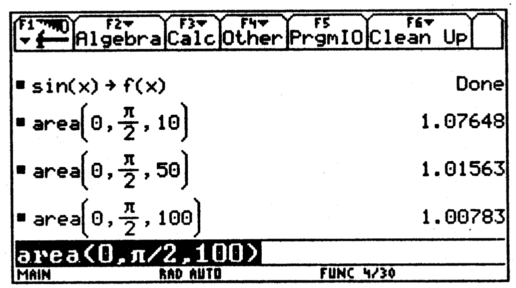
$$a + \Delta x, a + 2\Delta x, \cdots, a + n\Delta x = b,$$

si calcolano le aree dei rettangoli di base Δx e altezza $f(a + k\Delta x)$, e infine si sommano.

Si passa subito all'implementazione del relativo algoritmo. Il programma area(a,b,n) usa la funzione $f(x)$, prende in ingresso gli estremi a, b dell'intervallo e il numero n di intervalli.

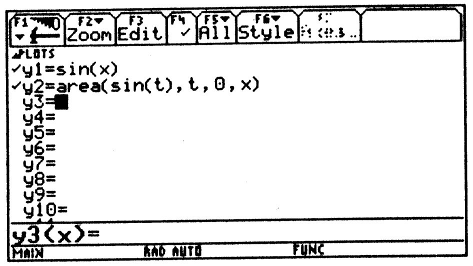


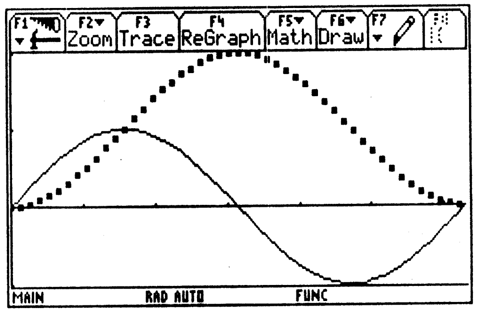
Ecco il programma area applicato a $\sin(x)$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$.



Ipotizziamo che al crescere di n l'area sottesa dalla sinusoide tra 0 e $\pi/2$ si avvicini a 1.

È possibile da qui iniziare un'attività di ricerca sperimentale.





Formulare congetture è per gli allievi un'attività molto stimolante e didatticamente importante, soprattutto per quelli più deboli, che sentono in qualche modo di poter padroneggiare la disciplina.

GEOMETRIA DELLO SPAZIO CON CABRI-GÉOMÈTRE E CABRI JAVA: ALCUNE POSSIBILITÀ DIDATTICHE IN CLASSE E NEL WEB

Luigi Tomasi*

L'immagine spaziale è "l'anima" della geometria,
anche se a volte ci capita di ignorare questo fatto.
E. Fischbein

1. L'insegnamento della geometria e i "sistemi di geometria dinamica"

Nel 1988, Francesco Speranza pubblicò un articolo[1] dal titolo significativo "Salviamo la geometria!" nel quale si illustravano le ragioni per non abbandonare l'insegnamento della geometria nella nostra scuola. Nello stesso anno a Budapest, all'ICME 6[2], è stato presentato da Jean-Marie Laborde (Università di Grenoble, Francia) il software *Cabri-géomètre*. L'accostamento può sembrare strano, ma in questa comunicazione si vuole sostenere che nell'ultimo decennio l'insegnamento della geometria ha ricevuto un contributo notevole dalla diffusione nella scuola di alcuni strumenti software di geometria dinamica ("Dynamic Geometry Systems"). Il più noto di questi software è *Cabri-géomètre*; altri software di geometria dinamica sono, per citare quelli più diffusi, *"The Geometer's Sketchpad"*, e da ultimo, particolarmente innovativo, *"Cinderella"* (1999).

È ormai opinione comune degli insegnanti e di chi si occupa di didattica della matematica che tali strumenti, se usati in modo opportuno, favoriscano l'apprendimento e possano migliorare la motivazione degli allievi per la geometria e in generale per la matematica. Occorre comunque approfondire il corretto inserimento nella didattica di tali strumenti, verificando in modo rigoroso quali sono i miglioramenti sul piano dell'apprendimento degli allievi. Certamente tali strumenti aiutano a visualizzare, a manipolare interattivamente e ad esplorare le diverse configurazioni relative ad una data figura; questo permette di osservare la figura, di scoprire e analizzare proprietà varianti ed invarianti. Questi aspetti possono evidentemente favorire l'apprendimento, rendendolo più profondo e ricco. Nello stesso tempo, però, con l'uso degli strumenti di geometria dinamica rischiano di andare perdute

*Liceo Scientifico "G. Galilei" Adria (Rovigo).
[1]F. Speranza, "Salviamo la geometria!", in La Matematica e la sua didattica, n. 2, 1988.
[2]ICME 6 - International Congress on Mathematical Education, Budapest 1988.

alcune delle competenze tradizionali perseguite dall'insegnamento della geometria, come ad esempio l'abilità nel rappresentare con "carta e matita" una data situazione geometrica.

Il software permette di sviluppare negli allievi alcuni aspetti fondamentali dell'insegnamento della geometria (l'intuizione, la possibilità di fare delle congetture, ...) in modo radicalmente diverso rispetto al modo di procedere tradizionale. Fino a non molti anni fa, si ricorreva, nel migliore dei casi, all'utilizzo di modelli fisici, ad esempio i solidi geometrici o ad alcune rare "macchine matematiche" esistenti nelle scuole; la maggior parte di tali modelli era di carattere statico. Il tipo di utilizzo nella scuola era dimostrativo; non sempre si potevano consegnare tali modelli alla sperimentazione degli allievi. Ora, la disponibilità di software di geometria come *Cabri-géomètre* accanto alla presenza di computer di sempre maggiore potenza e rapidità di calcolo, ha cambiato significativamente il modo in cui in una classe è possibile disegnare e operare con le figure geometriche: la figura tracciata sullo schermo di un computer, rispetto a quella su di un foglio, permette indubbiamente tutta una serie di esplorazioni e di manipolazioni che in qualche modo cambiano il modo di percepire e l'esperienza stessa dell'allievo nei confronti delle figure geometriche. Si pensi soltanto alla possibilità di rendere visibili e quasi "sperimentali" le proprietà geometriche o alla possibilità di generare i luoghi geometrici come se si avesse a disposizione una "macchina matematica" reale.

È indubbio che l'allievo deve sapere anche disegnare una figura senza l'aiuto di particolari strumenti informatici; il "micromondo" di geometria messo a disposizione degli allievi, come *Cabri-géomètre*, non deve ovviamente essere l'unico ambito di esperienza della geometria. Accanto a questo ci dovrà essere la presenza degli strumenti tradizionali. L'uso dello strumento software tuttavia permette di presentare molte situazioni concrete relative ad un'unica configurazione geometrica. Una tale ricchezza di "esperienze" sulla figura è impossibile con il solo uso della riga e del compasso, e rende particolarmente interessanti dal punto di vista didattico gli strumenti di geometria dinamica. Occorre tuttavia una riflessione ed uno studio del docente nell'uso di un sistema di "geometria dinamica" con gli strumenti tradizionali come sono il libro di testo, la riga ed il compasso,.. .

2. Cabri-géomètre e CabriJava nell'insegnamento della geometria dello spazio

Con *Cabri* una volta scelto un semplice metodo di rappresentazione nello spazio, ad esempio la "assonometria cavaliera", è possibile costruire le figure più

importanti della geometria dello spazio. Qual è il vantaggio di usare *Cabri*? Molto spesso ci si lamenta della mancanza di intuizione geometrica spaziale negli allievi e di errori anche molto vistosi che gli allievi fanno nell'analisi di semplici situazioni nello spazio. Certamente *Cabri* con l'aiuto dei metodi di rappresentazione di una figura nello spazio, assonometria e prospettiva, permette di rendere dinamico ed interattivo l'argomento, consentendo una rappresentazione particolarmente efficace di tutti i principali fatti della geometria dello spazio. In particolare si possono rappresentare prismi, piramidi e poliedri regolari, solidi di rotazione, studiandone in modo dinamico le principali proprietà; tra l'altro usando lo strumento *Luogo* di *Cabri* si possono generare i solidi di rotazione.

La grande diffusione del software didattico di geometria ha dato origine a molte ricerche didattiche e alla creazione di diversi siti in Internet nei quali è possibile reperire materiali molto interessanti per l'insegnamento della geometria e più in generale della matematica. La rete Internet si è rivelata, fin dagli inizi, un ottimo strumento per permettere la diffusione di materiali per la didattica. Sono state create diverse liste di discussione e nella rete numerosi siti si occupano di matematica, tra i quali si distinguono quelli riguardanti la geometria dinamica. Il diffondersi della rete ha posto la necessità di pubblicare in una pagina Web delle figure che riproducessero le stesse caratteristiche dinamiche delle figure create con software di geometria dinamica come *Cabri*. Per fare questo, presso l'I.M.A.G. di Grenoble, è nato il "Progetto CabriJava" con l'obiettivo di portare facilmente le figure di geometria dinamica nel Web. Il progetto è nato dall'esigenza degli utilizzatori di questo programma di pubblicare nel Web le figure create con Cabri, conservandone la dinamicità e le possibilità di manipolazione. Il "Progetto CabriJava" ha condotto alla scelta del linguaggio Java e alla costruzione di un "applet", ovvero di un programma che può essere eseguito in una pagina Web e permette di visualizzare e pubblicare in rete le figure costruite con *Cabri-géomètre*, mantenendo tutte le caratteristiche di dinamicità e la possibilità di manipolazione da parte dell'utente.

3. Alcuni esempi di figure di geometria dello spazio

Nella versione attuale, disponibile in rete, l'applet *CabriJava* permette di collocare nelle pagine Web delle figure attive nelle quali l'utente può a suo piacimento spostare gli oggetti geometrici conservando le proprietà definite nella figura iniziale.

Nel seguito si riportano alcune figure di geometria dello spazio che con l'uso di *Cabri-géomètre* e *CabriJava* possono essere presentate in modo dinamico ed interattivo nello studio della geometria dello spazio. Usando inoltre lo strumento "traccia" di *Cabri* associata con lo strumento "animazione" si potrà dare una visualizzazione dinamica dei solidi di rotazione di sicura efficacia didattica.

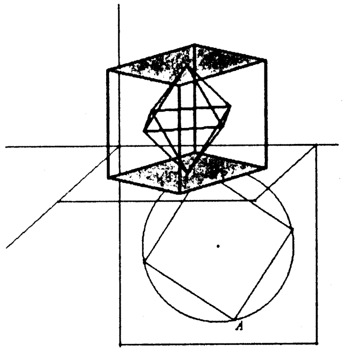


Figura 1. Cubo e ottaedro duale

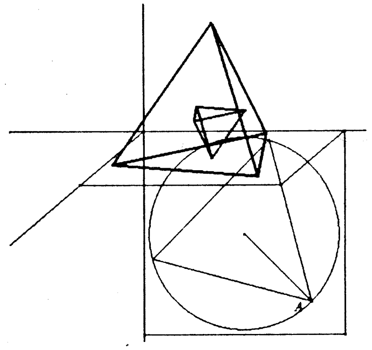


Figura 2. Tetraedro e tetraedro duale

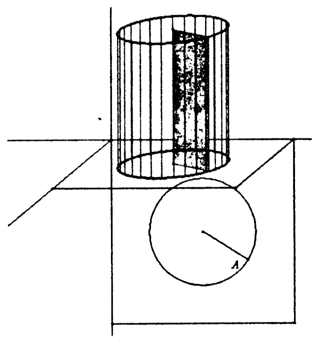


Figura 3. Generazione del cilindro

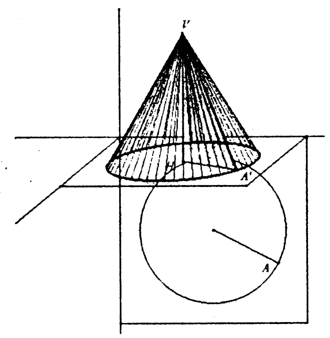


Figura 4. Generazione del cono

Un'altra situazione che si può presentare in modo dinamico è la generazione delle coniche, come sezioni del cono. Si disegna un cono, ottenuto dalla rotazione completa di una retta generatrice attorno ad un'altra retta incidente con la prima, e si seziona con un piano non passante per il vertice. Si vede che ci sono tre possibilità che danno origine ai tre tipi di coniche. Questa definizione può essere utile all'inizio per dare un inquadramento generale dell'argomento di studio. Si considera la traccia del piano sezione che si suppone perpendicolare al piano Oyz (nella figura precedente è la retta AB) e si esamina l'angolo formato dalla retta AB con l'asse del cono.

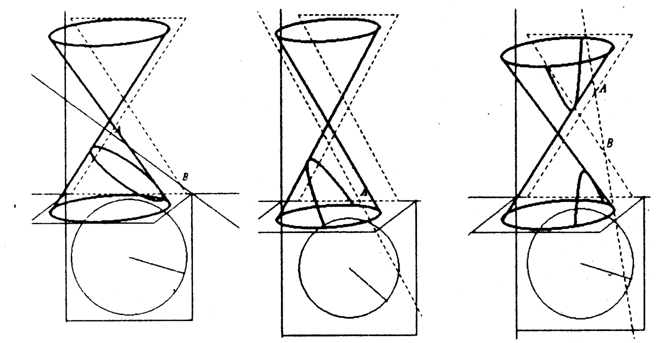


Figura 5. Generazione delle coniche

Se tale angolo è maggiore dell'angolo di apertura del cono, si ottiene un'ellisse; se l'angolo è uguale all'angolo di apertura del cono, ovvero la retta AB è parallela ad una generatrice del cono, si ottiene una parabola; se infine l'angolo tra AB e l'asse del cono è minore dell'angolo di apertura del cono si ottiene un'iperbole. Se il piano sezione passa per il vertice del cono le coniche sono degeneri

Consideriamo infine la seguente situazione nello spazio. Nel punto S è posta una sorgente di luce puntiforme (una lampadina). Sulla faccia opposta del cubo vi è una finestra dove è disegnata una circonferenza. L'ombra della circonferenza è un'ellisse. La sorgente di luce genera una trasformazione geometrica, una omologia proiettiva, tra i punti di un piano α (la faccia del cubo opposta ad S) e quelli di un piano β (il piano dove si crea l'ombra).

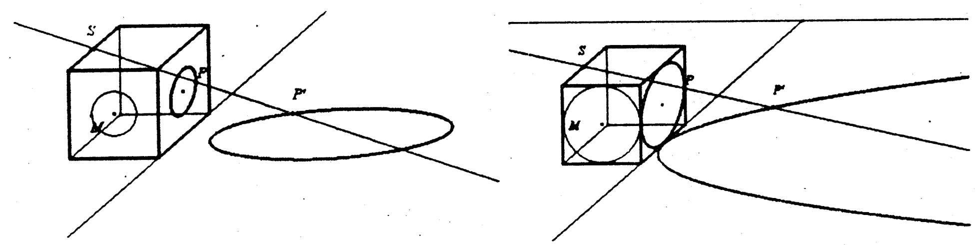


Figura 6. Coniche generate da una proiezione

Tutte le figure viste in precedenza possono essere presentate in modo dinamico, anche in una pagina Web con l'uso CabriJava. Si vedano le figure presenti nel seguente sito presso l'IMAG di Grenoble (sito ufficiale del "Progetto CabriJava"): http://www.cabri.net/cabrijava/index.html

4. Conclusioni

L'uso di *Cabri-géomètre* in classe e di *CabriJava* nel Web può permettere un approccio alla geometria dello spazio dinamico ed interattivo. Questi strumenti software possono essere integrati nell'insegnamento anche di questa parte della geometria, a volte trascurata nella scuola secondaria, perché forniscono un notevole vantaggio sul piano dell'apprendimento e dell'efficacia dell'insegnamento, permettendo di raggiungere l'obiettivo di migliorare l'intuizione geometrica e la capacità di visione nello spazio degli allievi.

Riferimenti bibliografici

[1] AA.VV., *L'insegnamento della geometria*, M.P.I. - U.M.I., Quaderni n. 19/1 e 19/2, Liceo Scientifico "A. Vallisneri", Lucca, 1995-96;

[2] S. Bernecoli, L. Tomasi, *I poliedri regolari: un tema di geometria dello spazio rivisitato con Cabri-géomètre*, Quaderno n. 12 di CabrIrrsae, Bologna 1997;

[3] P. Boieri (a cura di),*Fare geometria con Cabri*, Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", 1996;

[4] F. Speranza, A. Rossi Dell'Acqua, *Il linguaggio della matematica. Geometria nello spazio*, Zanichelli, Bologna 1982;

[5] F. Speranza, "Salviamo la geometria!", in *La Matematica e la sua didattica*, n. 2, 1988.

TAVOLE ROTONDE

Sintesi degli interventi della tavola rotonda: Fondamenti della matematica e insegnamento nella scuola secondaria superiore

coordinata da Bruno D'Amore

La tavola rotonda è stata costituita da 4 interventi di altrettanti docenti di Scuola Media Superiore, seguiti da commenti del coordinatore, da interventi del pubblico e da un nuovo "giro" di battute da parte dei relatori.

Si dà, qui di seguito, il sunto dei singoli inerventi, dato che commenti, domande e repliche hanno soprattutto avuto lo scopo di focalizzare meglio i temi trattati.

Sintesi dell'intervento di Domingo Paola (Liceo Issel, Finale Ligure, SV)

Ritengo che i suggerimenti più interessanti che un insegnante può trovare nello studio del dibattito relativo ai fondamenti della matematica riguardino la chiarificazione e la precisazione di concetti, quali quelli di *teoria*, di *dimostrazione*, di *definizione*, di *regola inferenziale*, di *assioma*, di *modello*, che compaiono nei programmi Brocca della scuola secondaria. In questo intervento mi limito ad accennare alle idee che la problematica fondazionale può offrire nell'insegnamento della dimostrazione.

Come insegnanti possiamo fare alcune considerazioni che derivano da una riflessione sulla pratica didattica e sulla problematica fondazionale relativa al concetto di dimostrazione:

(1) la nozione formale di dimostrazione costituisce un punto di arrivo nella didattica: non può che essere eventualmente accennata e trattata con studenti maturi, che abbiano molta esperienza e conoscenza matematica, che condividano con l'insegnante la razionalità dell'edificio matematico, che abbiano già un'idea di che cos'è una *teoria*.

(2) La nozione informale di dimostrazione viene caratterizzata dalla pratica ed è molto complessa, nel senso che quello di dimostrazione informale è un concetto che può assumere significati o, meglio, sensi differenti, sia quando venga considerato in diversi ambiti disciplinari, sia quando venga analizzato in base alle sue differenti funzioni (dimostrare per convincere, per scoprire, per illuminare, per giustificare, per evidenziare la relazione di conseguenza logica tra assiomi e teoremi di una teoria...), sia quando

venga adoperato in diversi contesti d'uso (esplorativo, di validazione, di sistemazione, di comunicazione)

(3) Quello di dimostrazione è un concetto importante, in quanto caratterizza l'attività matematica; allo stesso tempo è assai delicato: dimostrare è difficile e molti sono i problemi cognitivi legati all'attività dimostrativa.

Un suggerimento che viene dall'analisi della problematica fondazionale è che gli ostacoli legati all'attività dimostrativa sono quelli legati alla difficoltà di capire che cos'è una teoria; di capire che dimostrare vuol dire spiegare perché una proposizione vale in una certa teoria. D'altra parte, per capire e per far capire che cosa è una teoria, si deve avviare la riflessione non solo nella dimensione logica, ma anche in quelle epistemologica e cognitiva. In Italia si stanno conducendo varie ricerche e sperimentazioni coerenti con questa prospettiva e i risultati sono confortanti, nel senso che sembra che sia non solo possibile, ma anche opportuno avviare precocemente gli studenti a produrre congetture in vari ambiti, e a validarle mediante dimostrazioni. Queste ricerche suggeriscono che molti ostacoli legati all'attività dimostrativa dipendono dal modo in cui sono poste le richieste. In altri termini, sembra che porre agli studenti domande del tipo *dimostra che* possa addirittura inibire l'attività dimostrativa. Sembra invece che, se si costruiscono attività e ambienti di apprendimento che favoriscono l'esplorazione, a partire anche da approcci empirici, allora tutti gli studenti, anche quelli più deboli, riescono a produrre congetture e, spesso, riescono a utilizzare le osservazioni effettuate durante la fase esplorativa, nella successiva attività di validazione delle congetture. Ciò indica la possibilità di favorire una continuità cognitiva nel processo di acquisizione del concetto di dimostrazione, contro le forti discontinuità epistemologiche che lo caratterizzano.

Sintesi dell'intervento di Sergio Zoccante (Liceo scientifico Quadri, Vicenza)

L'ipotesi di lavoro è che l'insegnamento-apprendimento della Matematica sia una ricostruzione di parti della disciplina che avviene con il lavoro congiunto di insegnanti e allievi, in cui l'insegnante è, nello stesso tempo, architetto e direttore dei lavori, ma che, quando necessario, non disdegna di lavorare direttamente con i ragazzi. Io penso che la domanda "quali sono i *fondamenti* della Matematica nell'insegnamento" debba essere intesa nel senso di precisare che cosa è fondamentale per una costruzione della matematica nel lavoro con gli allievi. In altri termini: "quali sono le *fondamenta* su cui edificare la complessa architettura della Matematica?"

In questo contesto individuo alcuni nodi fondamentali: *l'architettura, la costruzione, il significato, le applicazioni.*

(1) *L'architettura* della disciplina, i suoi fondamenti, la sua struttura interna devono essere ben chiari all'insegnante: se questi conosce solo quello che andrà ad esporre, non saprà gestire le situazioni "nuove" che certamente nasceranno dal lavoro svolto con gli allievi. Ma anche gli allievi devono sapere a grandi linee che cosa stanno facendo, così come un operaio, un garzone di bottega conosce il progetto su cui si deve impegnare. Ci sono poi argomenti, concetti, strutture fondamentali, che tornano più volte in numerosi capitoli della Matematica, anche a livello scolastico: è importante, nella pratica didattica, sviluppare l'abitudine a riconoscere questi concetti fondamentali, per utilizzarli nelle argomentazioni e nelle soluzioni di problemi.

(2) *La costruzione.* Se vogliamo assicurarci una costruzione matematica ben fondata e stabile, dobbiamo costruirne le fondamenta sul concreto psicologico degli alunni. Ciò non vuol dire non poter partire da enti e concetti astratti, ma che gli enti e concetti su cui si dovrà lavorare devono essere stati recepiti e fatti propri dagli allievi. Inoltre, in alcune fasi dell'attività didattica, dobbiamo accettare di *sporcarci le mani*: di lavorare accontentandoci di una prima approssimazione: penso, per esempio, al lungo lavoro preliminare necessario all'introduzione dei numeri reali. La complessità dei concetti e la molteplicità degli aspetti da considerare richiedono che il terreno vada preparato con cura, analizzando i problemi teorici e pratici che ci portano alla necessità di superare modelli precedenti - in questo caso i razionali[1]. È bene poi tenere presente l'opportunità offerta dagli *affinamenti successivi*: spesso si sentono discorsi del tipo "se non posso farlo bene, non lo faccio per niente"; questo è un atteggiamento didatticamente errato e sostanzialmente massimalista. L'esperienza mostra che nessun argomento di una certa complessità viene recepito nella sua completezza al primo approccio, neppure da un adulto; si ricordi la metafora della costruzione di un edificio: prima si tira su la struttura in cemento, poi le pareti, infine si dà l'intonaco...

(3) *Il significato* dei concetti, degli argomenti affrontati è spesso trascurato

[1]Speranza F., *I fondamenti della Matematica per la sua didattica.* Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1996 (pagg. 44 e ss.)

da molti insegnanti, che concentrano l'attenzione sugli aspetti sintattico formali delle teorie matematiche. Questo atteggiamento è in parte dovuto a un fraintendimento del programma formalista e al pericoloso trasferimento, sul piano della didattica, di posizioni appartenenti a una certa filosofia della matematica e non sempre attente alla complessità della storia di una disciplina, di quella matematica in particolare[2]. Si veda al riguardo anche Courant-Robbins, *Che cos'è la matematica?* Boringhieri, pag. 30.

(4) *Le applicazioni.* "Professore, questo a che cosa serve?" Ecco la domanda cruciale a cui sarebbe bene saper rispondere, senza rifugiarsi in giochi di parole o in esercizi di autorità. Fino a qualche anno fa, i ragazzi avevano motivazioni (spesso esterne) allo studio di argomenti di carattere teorico: perché adesso diventa sempre più difficile? È probabile che gli alunni percepiscano che il proprio futuro non dipende più solo dalla scuola: le capacità richieste dal *mondo esterno* spesso non sono quelle che acquisiscono in classe. Quindi anche la Matematica, se si riduce ad un puro gioco senza rapporti con la realtà, risulta senza fascino. Viceversa, quando si riesce a mostrare che una particolare teoria permette di capire meglio certi aspetti del mondo, quando si riescono a mostrare esempi di applicazioni significative, non banali della matematica, allora gli studenti ritornano a essere partecipi e attivi. Io penso che non si tratti di pigrizia in assoluto: sono convinto che si tratti di qualcosa molto vicino a una sorta di "risparmio energetico" su argomenti che sentono come inutili e lontani dal mondo nel quale vivono.

Sintesi dell'intervento di Ercole Castagnola (Liceo scientifico Alberti, Marina di Minturno, LT)

Concordo con Domingo Paola nel considerare il concetto di dimostrazione di fondamentale importanza nell'insegnamento-apprendimento della matematica. È però bene spendere qualche parola per precisare l'ambito nel quale può risultare opportuno avviare gli studenti all'attività dimostrativa. La tradizione vuole che tale ambito sia quello della geometria euclidea piana; io ritengo, però, che le dimostrazioni geometriche siano in genere piuttosto complesse, spesso costituite da molti passi fra loro concatenati e quindi difficili da seguire per uno studente che

[2] Si veda F.Enriques, *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze* (1906), riportato anche in E.Castelnuovo, Didattica della matematica, La Nuova Italia Ed., pag.4.

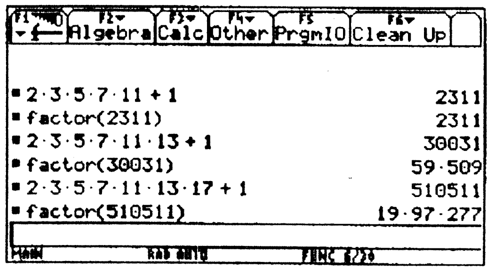
deve essere avviato gradualmente all'attività dimostrativa. Sono convinto che sia più opportuno partire dall'ambito aritmetico, ricco di problemi formulabili in modo chiaro, ma assolutamente non banali e che portano a dimostrazioni semplici, ma di una certa rilevanza matematica. Si pensi, per esempio, alle potenzialità offerte dallo studio delle proprietà della relazione di divisibilità nei numeri interi: le dimostrazioni collegate hanno anche il vantaggio di consentire di riprendere e approfondire concetti già accennati nella Scuola Media, favorendo così la realizzazione di un processo cognitivo che offre elementi di continuità fra i diversi livelli scolari.

A questo proposito, voglio citare un episodio verificatosi nel passato anno scolastico in una prima liceo scientifico. Durante un'attività di riflessione sui criteri di divisibilità, è stato posto il problema della mancanza, nei testi scolastici, del criterio di divisibilità per 7. Per aiutare gli studenti nella ricerca di una risposta al problema sollevato, ho posto loro il seguente quesito: "Quando un numero di due cifre (rappresentabile quindi con la scrittura $10a + b$) è divisibile per 7?"

Dopo un'intensa attività di esplorazione condotta spesso su casi particolari, una studentessa ha trovato il seguente criterio di divisibilità: "un numero del tipo $10a + b$ è divisibile per 7 se $2b - a$ è divisibile per 7". Gli aspetti interessanti sono tre:

(1) l'alunna è arrivata a formulare il criterio esaminando tutti i possibili casi di numeri di due cifre
(2) l'alunna ha considerato valido il criterio anche per 70 e 91, nonostante la differenza $2a - b$ sia, in tali casi, negativa e in quel periodo si stesse lavorando nell'insieme dei numeri naturali
(3) il criterio trovato differisce apparentemente da quello più "naturale" che afferma che un numero del tipo $10a + b$ è divisibile per 7 se $3a + b$ è divisibile per 7"

Quanto osservato al punto 3. precedente, ha fatto sorgere l'esigenza di dimostrare che se 7 divide $3a + b$, allora 7 divide $2b - a$. Mi sembra che l'attività che ora ho presentato abbia giocato un ruolo significativo nella creazione di una delle condizioni necessarie per ogni vero apprendimento: la nascita di un "bisogno intellettuale" (dell'attività dimostrativa, nello specifico). Questa sensazione è stata confermata quando, qualche tempo dopo, ho enunciato il teorema dell'infinità dei numeri primi: gli studenti hanno immediatamente richiesto una dimostrazione di tale enunciato. Tralascio di descrivere le successive attività svolte per soddisfare la richiesta degli studenti, limitandomi a citare un aspetto che mi sembra importante, anche per riflettere sul ruolo fondamentale che le nuove tecnologie possono avere nella didattica della matematica. È noto che Euclide, dopo aver supposto, per assurdo, che i numeri primi siano finiti, diciamo $p_1, \cdots, p_n$, invita a considerare il numero $p_1 \cdots p_n + 1$, che o è primo, o è prodotto di numeri primi di cui almeno uno diverso da ciascun elemento dell'insieme $\{p_1, \cdots, p_n\}$. Quasi sempre gli studenti fissano l'attenzione sul primo dei due casi, dimenticando che $p_1 \cdots p_n + 1$ potrebbe non essere primo, forse anche perché non è immediatamente individuabile, almeno senza un adeguato strumento di calcolo, il caso in cui $p_1 \cdots p_n + 1$ risulti non primo, ma prodotto di primi di cui almeno uno diverso da quelli da cui si è partiti. Mi sembra che questo sia un semplice, ma significativo esempio in cui l'uso di una calcolatrice che consenta di eseguire scomposizioni in fattori primi (si veda la figura allegata) possa essere particolarmente adeguato ad aiutare gli studenti non solo a calcolare, ma anche a capire e a costruire significato.



Sintesi dell'intervento di Fabio Minazzi (Liceo Scientifico Statale "G. Ferraris" di Varese

Nella scuola secondaria superiore italiana è ancor oggi presente una singolare dicotomia culturale caricaturale, in virtù della quale le discipline umanistiche sono contrapposte, *de facto*, a quelle scientifiche[3]. Questa contrapposizione tra le "due culture" diventa del tutto esplicita se si considera l'insegnamento medio-superiore della matematica e della filosofia. La matematica, come tutte le disciplinbe scientifiche, è infatti insegnata in modo rigorosamente destorificato e in modo prevalentemente algoritmico-calcolistico. In tal modo l'insegnamento della matematica

[3]Per un approfondimento di queste considerazioni e di quelle che seguono immediatamente nel testo sia lecito rinviare al mio volume *Socrate bevve la maieutica e morì. Quale futuro per la scuola italiana?*, Gruppo Editoriale Colonna, Milano 1997

subisce perlomeno un triplice e grave depotenziamento culturale:

a) viene completamente dimenticata la dimensione concettuale della matematica e a quest'ultima viene negata ogni autentica ed effettiva portata culturale;
b) la dimensione della specifica riflessione matematica è del tutto trascurata e la matematica viene ridotta ad una serie di algoritmi il cui senso e il cui significato non è mai spiegato criticamente;
c) la matematica non solo viene staccata dal contesto storico e dall'evoluzione storica della propria impostazione concettuale, ma viene insegnata in modo rigorosamente destorificato.

In questo contesto culturale e didattico (legato soprattutto alla *prassi didattica*) anche la filosofia, concepita esclusivamente quale disciplina eminentemente umanistica, non solo viene contrapposta, in modo altrettanto astratto, unilaterale e distorcente, a tutte le discipline scientifiche essendo insegnata in modo rigorosamente storico, ma viene anche abbinata strettamente all'insegnamento della storia, con la tacita convenzione che solo la filosofia costituisca veramente il luogo privilegiato della vera riflessione critico-spirituale. Inutile aggiungere come in questa contrapposizione dualistica (del tutto caricaturale e fuorviante) anche la filosofia finisca per pagare un prezzo culturale molto salato poiché nell'insegnamento medio perde gran parte del suo spessore teoretico e finisce per essere concepita come una discutibile appendice, più o meno significativa, dell'orizzonte umanistico.

Naturalmente questa singolare e distorcente contrapposizione tra l'insegnamento della matematica e quello della filosofia possiede una sua precisa radice storico-culturale e teorica che può essere rintracciata, in particolare, nella riflessione di Giovanni Gentile il quale, con la sua celebre riforma fascista del 1922-23, plasmò in modo così rilevante e profondo le strutture portanti della scuola secondaria superiore italiana che ancor oggi, nell'affacciarsi del nuovo millenio, le coordinate della scuola italiana, al di là di alcuni "abbellimenti" di facciata, sono ancora largamente "gentiliane".

Questa situazione appare particolarmente preoccupante e singolare non solo per i limiti culturali e teoretici evidenti di questa impostazione, ma anche perché questa concezione tacitamente e acriticamente presente nelle prassi scolastiche quotidiane, finisce per radicare, soprattutto nell'opinione pubblica media di tutta la nazione italiana, un pregiudizio - concernente la dicotomia caricaturale che si presume sussistere tra le discipline scientifiche e quelle umanistiche - che finisce poi per essere accolto dai più come un fatto del tutto evidente e scontato[4].

Proprio con lo scopo deliberato di reagire a questa distorsione culturale - che opera in modo "silente" entro le strutture della scuola coincidento spesso con la sua stessa organizzazione disciplinare quotidiana - nel Liceo scientifico statale di Varese si è cercato di percorrere una strada diversa, mettendo in feconda relazione l'insegnamento della filosofia con quello della matematica e, parallelamente, quello della storia con quello della fisica[5]. In tal modo è nato un interessante intreccio disciplinare e metodologico, in virtù del quale il docente di storia e filosofia e quello di matematica e fisica, hanno sviluppato un comune programma di studio finalizzato a mostrare i fecondi intrecci, sempre esistiti, tra la riflessione filosofica, da un lato, e la riflessione fisica e quella matematica, dall'altro. Questo progetto ha poi assunto come suo asse privilegiato un approccio storico-problematico, per mostrare ai discenti l'evoluzione continua e complessa di questo nesso che consente, infine, non solo di meglio intendere la genesi dei singoli problemi scientifico-filosofici considerati, ma aiuta anche a meglio intedere il preciso significato e il limite effettivo delle varie soluzioni che sono state via via formulate e delineate nel corso della storia della conoscenza umana.

Per questo motivo di fondo si è deciso di prendere le mosse da una riconsiderazione della geometria euclidea ponendola in relazione con i dibattiti della filosofia greca classica per poi affrontare un nodo concettuale come quello della genesi della scienza moderna nell'opera di Galileo e Newton. Questo progetto di studio, realizzatosi nel corso degli ultimi due anni (corrispondenti alle classi terze e quarte del liceo scientifico), dopo aver affrontato in modo specifico il problema dei fondamenti della matematica e dell'infinito, nel corso di quest'anno affronterà, infine, i problemi connessi con la teoria della relatività e delle geometrie non-euclidee, completando un percorso volto a far comprendere allo studente che i rapporti tra matematica e filosofia sono sempre stati continui e ininterrotti nel corso dei secoli. Il che non solo permette di recuperare pienamente tutta la dimensione del pensiero scientifico nella sua complessa evoluzione storica, ma consente anche di

[4]Per la discussione critica e analitica di questa dicotomia culturale caricaturale rimane sempre essenziale il riferimento alla monumentale *Storia del pensiero filoosfico e scientifico di Ludovico Geymonat* (Garzanti, Milano 1970-761, 7 voll.)

[5]Cfr. i contributi dello scrivente: *Cultura umanistica e cultura scientifica nella prassi didattica quotidiana*, "Agorà", II, 1998, pp. 165-170 e Id., *Epistemologia, scienza e filosofia nella cultura greca. Il progetto di autonomia della classe terza G: l'area storico-filosofico-scientifica*, "Agorà", III, 1999, pp. 289-296.

chiarire il senso, il significato e l'importanza della stessa conoscenza scientifica (e di quella matematica, in particolare) reinserendola, a pieno diritto, nell'ambito della cultura propriamente detta. Un risultato senza dubbio significativo - e di contro-tendenza, rispetto al senso comune nazionale italiano che relega spesso la scienza alla mera dell'operatività tecnico-strumentale - che permette, inoltre, di far comprendere l'autentica portata culturale anche del sapere tecnico (e delle prassi ad esso connesse). Il che rappresenta, nuovamente, un risultato davvero non trascurabile se è vero, come ricordava anche Giovanni Vailati, all'inizio del Novecento, che "lo scindere l'una dall'altra la coltura scientifica e quella estetica o letteraria, lungi dal favorire lo sviluppo di ambedue, tenda al loro comune degradamento, e compromette quell'armonico sviluppo delle facoltà mentali che deve essere il primo obbiettivo d'una educazione liberale veramente degna di questo nome"[6].

[6]Giovanni Vailati,*Scritti*, Johann Ambrosius-Successori B. Seeber, Leipzig-Firenze 1911, p. 297.

Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore

Lavoro svolto dagli alunni Baresi Francesca, Bazzana Valeria, Cavallari Giulia, Doninelli Alessandro, Mazzanti Luca, Pelizzari Federico, Savoldini Giovanni, Tognon Fabio, coordinati da Maffini Achille*

1. Composizione del gruppo di ricerca e finalità

Il gruppo di ricerca è costituito da studenti del liceo scientifico di Asola così suddivisi: 2 di seconda, 2 di terza, 2 di quarta e 2 di quinta coadiuvati da quattro insegnanti di matematica. Il lavoro di ricerca del gruppo si è posto come obiettivo quello di vedere non tanto cosa sanno gli studenti del concetto di funzione in termini tecnici, quanto quale idea hanno o si sono fatti di tale concetto, per certi aspetti a prescindere dalla prassi didattica.

2. Fasi di svolgimento e metodologia di lavoro

Per cercare di capire questo, si è innanzi tutto cercato di vedere se la propria conoscenza concorda con la propria idea; si è così discusso sul significato delle definizioni proposte e su situazioni che potessero essere ricondotte o no al concetto di funzione. Successivamente si sono analizzati 33 libri di testo delle superiori (17 del biennio e 16 del triennio) per vedere come veniva trattato il concetto di funzione. L'analisi di tali definizioni ha portato a notare che non tutti i libri o trattano il concetto allo stesso modo La maggior parte dei libri di testo richiede per le funzioni entrambe le proprietà (ovunque definita e funzionale). Successivamente si è fatto un confronto fra la propria definizione di funzione e quelle presenti sui libri di testo, soffermandosi soprattutto sulle dizioni tipo "tra A e B" e quelle del tipo "da A a B". Successivamente sono stati introdotti termini quali *visione statica* e *visione dinamica* per visualizzare il concetto di funzione rispetto alle due dizioni. È in ogni caso rilevante il numero di libri (5 al triennio e 9 al biennio) che cambiano la dizione statica con quella dinamica passando dal concetto di relazione a quello di funzione. Anche se non espressamente detto, sembra quindi che la funzione non sia solo una particolare relazione, ma abbia qualche altra valenza, che non viene però specificata. Un'ultima osservazione particolarmente significativa riguarda l'uso delle variabili: più della metà (e anche in questo caso sorprende soprattutto il dato

*Si ringraziano le professoresse, Agazzi Cristina, Marastoni Patrizia e Vellucci Katty per la collaborazione e il prezioso contributo fornito al lavoro.

del biennio) usa x e y per indicare le variabili, assegnando quindi a queste lettere un ruolo privilegiato. Un altro aspetto della discussione iniziale ha riguardato il modo con cui potevano essere date le funzioni ed i termini che sono usciti per rispondere a questa domanda sono stati: Legge, Relazione, Corrispondenza, Regola, Proprietà, Formula, Equazione. In particolare si è cercato di capire

(1) se e quali differenze ci fossero tra questi termini;
(2) se l'uso di questi termini presuppone sempre un "legge" (intesa genericamente come legame di un certo tipo).

Nel tentativo di rispondere alla prima domanda si sono esaminati espressioni, "scritture" o concetti che potessero rientrare in ciascuna categoria per vedere se, in opportuni contesti e rispetto ad opportuni insiemi, potessero dare origine a funzioni. In questa fase si è anche fatta una distinzione tra gli aspetti sintattici e gli aspetti semantici insiti nel concetto di funzione.

In prima battuta, di fronte alla domanda se una funzione richieda sempre una legge la risposta del gruppo è stata "sì" (a tale proposito è da osservare che circa la metà dei testi consultati utilizza esplicitamente termini quali "legge", "proprietà" o "criterio" per definire una funzione). Successivamente si sono analizzati grafici per mettere in discussione tale idea. Per quanto riguarda le formule, ci si è chiesti se il loro significato semantico (richiamato dal nome delle variabili coinvolte) poteva condizionarne il riconoscimento come funzioni. Sono state in particolare considerate le formule geometriche. A questo punto si è fatta una breve analisi storica per vedere come il concetto sia stato presentato e si sia evoluto nei secoli. In particolare ci si è riferiti alla definizione di Eulero (grosso modo, funzione come legge) e a quella insiemistica. I problemi emersi e le domande che ci si è posti sono serviti come base per la costruzione di un questionario il cui scopo era quello di vedere non quello che gli alunni sanno, quanto piuttosto l'idea che essi hanno del concetto, per certi aspetti al di là della prassi didattica, rispetto ai dubbi sorti nelle varie discussioni. Il questionario è stato successivamente somministrato a 262 alunni (107 del biennio e 155 del triennio) provenienti da classi di licei (classici, scientifici, socio-pedagocici) e istituti tecnici (industriali, commerciali, per geometri e istituto d'arte[1])

[1]Si ringraziano tutti gli insegnanti che hanno collaborato somministrando il questionario alle loro classi: Astori Elena, Bonifazi Patrizia, Cerusco Antonio, Damiani M.Livia, Delfrate M.Grazia, Ferrari Daniela, Genevini Angela, Cozzani M. Rosa, Rizzardelli Elena , Santi Lucia, Petrini Fulvia, Volpi Claudio, oltre alle già citate Agazzi Cristina, Marastoni

soluzioni di un'equazione e quali al concetto di funzione?

3) Le seguenti "scritture" possono indicare delle funzioni? (le "scritture" qui riportate erano inserite in una tabella con 4 colonne con SI, NO, NON SO e MOTIVA BREVEMENTE):

a) $1 = y$
b) $x^2 - 3x + 2 = 0$
c) $k = \dfrac{z^2+1}{2}$
d) $x = 1$
e) $x^2 + y^2 = 1$
f) $z = 1$
g) $x^2 + 3x - 5$
h) $y = \begin{cases} 2x+1 & \text{per } x > 0 \\ x & \text{per } x > 0 \end{cases}$

Scopi.

1) Se il nome delle variabili può rimandare al piano cartesiano (vedi a, d, e; riferimento semantico);
2) se il polinomio viene visto come funzione (g);
3) se una scrittura che rimanda esplicitamente ad un'equazione in una variabile può essere vista come funzione (b, più che a, d, f);
4) l'uso di variabili non canoniche (c, f).

Risultati. Le "scritture" a, d, ed f sono trattate al biennio allo stesso modo (percentuali di risposte positive che si aggirano sul 55%) con scarse motivazioni legate al piano cartesiano (1-3%); al contrario al triennio le risposte positive ad a sono in netta maggioranza (60% contro 36% di d e 37% di f), con un consistente aumento delle motivazioni legate al piano cartesiano. L'uso di variabili non canoniche in c non crea invece differenze tra biennio e triennio (63% al biennio e 70% al triennio i "sì", con qualche motivazione in più al biennio, motivazioni legate alla legge, 12%, o alle proprietà delle relazioni, 11%). L'incidenza del piano cartesiano al triennio si nota anche in e che il 58% dei ragazzi vede una funzione; circa il 10% fornisce motivazioni legate al piano cartesiano. Le motivazioni positive legate al piano cartesiano costituiscono la maggioranza al triennio, mentre al biennio questo ruolo è svolto dalle motivazioni legate alle proprietà delle relazioni. Tra le risposte negative, le più frequenti (con percentuali attorno al 10% sia al biennio che al triennio per a, b, d ed f) sono motivate con la mancanza di una variabile. Infine circa il 70% (senza significative differenze tra biennio e triennio) non considera il polinomio una funzione. È il caso di osservare come la tra le altre motivazioni legate al fatto che b e h non siano funzioni, le più frequenti sono "perché è un'equazione" (b) e "perché è un sistema" (h); in particolare la prima ha ottenuto circa un 7% complessivo, quasi tutto però concentrato al biennio.

4) Rispondi rispetto alle seguenti "scritture" (le domande, proposte in una tabella, erano: rappresenta una funzione? Variabile/i del dominio e dominio - se è una funzione- ; Motiva brevemente la tua risposta):

a) $f(x) = \sqrt{x}$
b) $S = \pi r^2$
c) $a^2 + b^2 = c^2$
d) $f(r) = \sqrt{(r+3)}$
e) $A = \dfrac{bh}{2}$
f) $A = \dfrac{bh}{4}(-2)$
g) $f(A,h) = \dfrac{2A}{h}$
h) $x = y^2$
i) $f(y) = 2\pi y$

Scopi. Vedere quanto il concetto di formula può condizionare quello di funzione sia in termini semantici (interpretazione delle formule nel contesto geometrico che le richiama e quindi ruolo delle variabili) che come regola in sé. In quest'ottica va intesa anche la valutazione che viene fatta del quesito (anche in modo implicito). Si vuole in sostanza vedere se la risposta: a) denota un'interpretazione geometrica, sia esplicita (tipo "è una funzione perché rappresenta l'area del cerchio"), sia implicita (ad esempio attraverso l'insieme preso come dominio). I punti che si riferiscono a questo aspetto sono b, e, f, g, i, i quali ricordano formule geometriche (dirette, inverse o "sbagliate" nelle variabili o nel suo significato); a questo proposito c è stato messo pensando al teorema di Pitagora; b) denota un'interpretazione analitica (h, che si contrappone, per la forma, a b); c) denota una visione insiemistica e quindi legata alle proprietà delle relazioni (ovunque definita, funzionale). A queste esigenze si aggiunge una esplicita condizione legata alla "scrittura" delle funzioni: spesso, anche nella prassi didattica, si passa indifferentemente da $y = \ldots$ a $f(x) =$

... (o viceversa) senza chiarire, anche a livello di testi, se e quale differenza c'è tra le due scritture. Nel quesito si vuole vedere se il diverso modo di indicare può influenzare la risposta.
Risultati. Le risposte legate a motivazioni geometriche non sono molte in positivo (tranne la b che al triennio totalizza un 17% a fronte di un 54% complessivo). Nel complesso l'interpretazione geometrica delle formule non sembra abbia condizionato molto, anche se è da notare che al biennio nella b la differenza tra i "sì" e i "no" non è così marcata (41% contro 39%) denotando una maggiore incertezza. Le motivazioni positive del triennio sono distribuite su motivazioni di carattere analitico oppure legate alle proprietà delle relazioni, mentre al biennio si concentrano soprattutto su quest'ultima. Parecchie motivazioni, soprattutto al triennio, sono deducibili dal dominio. Le risposte al quesito sembrano essere caratterizzate soprattutto dal diverso uso delle variabili o del modo di indicare le funzioni. Infatti ad e, f, g le percentuali di chi dice che sono funzioni sono molto diverse: 18%, 19%, 44% al triennio e 27%, 14% e 47% al biennio. L'unica motivazione plausibile sembra essere legata alla forma con cui le tre "scritture" sono presentate: $f(..) = ...$ sembra fare pensare più alla funzione che le altre. Il maggior numero di risposte positive (sia al triennio che al biennio) si ha proprio per quelle funzioni che sono presentate in questa forma. Non dovrebbe sorprendere che il quesito col maggior numero di risposte negative sia il c (sia al biennio che al triennio); forse sorprendono le risposte negative ad e e ad f (soprattutto al triennio, dove sono dell'ordine del 65%). Alcuni alunni hanno risposto che b, e, f e g non sono funzioni poiché mancano le variabili! In generale nei quesiti 3 e 4 si può notare una prevalenza degli aspetti semantici al triennio (con un ruolo forte giocato dal piano cartesiano), mentre al biennio prevalgono gli aspetti sintattici.

5) Relativamente alle seguenti tabelle, rispondi:

Tabella (A)	
n	p
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

Tabella (B)	
z	t
0,162	3,69
0,171	3,78
0,183	3,84
0,197	3,95
0,285	3,96
0,297	4,02

a) È una funzione? Perché?
b) Se sì qual è il suo dominio?
c) E il suo codominio?

Scopi. Vedere se una tabella viene vista come funzione e se la presenza o l'assenza di una legge esplicita può condizionare la risposta. Si comincia inoltre a porre il problema del dominio, nel senso che si vuole vedere se avviene un'estensione implicita del dominio ad intervalli, anche quando è dato da insiemi discreti. L'aspettativa è che avendo messo prima la tabella in cui compare un esplicito legame tra le variabili, questo possa condizionare la risposta sulla tabella successiva, pur avendo, dal punto di vista delle proprietà, le stesse caratteristiche.
Risultati. La prima tabella viene riconosciuta come una funzione sia dalla maggioranza dei ragazzi del triennio (81%) che del biennio (95%). Le percentuali cambiano per quanto riguarda le motivazioni: al biennio le motivazioni legate alle proprietà delle relazioni sono in maggioranza rispetto a chi motiva per la presenza di una legge (52% contro 22%), mentre al triennio le due percentuali si equivalgono (36% contro 33%). La seconda viene riconosciuta come funzione solo dal 50%

dei ragazzi del biennio e addirittura solo dal 28% dei ragazzi del triennio. Questa diminuzione delle percentuali è molto superiore rispetto a quella di coloro che avevano dato in precedenza motivazioni legate alla legge. Viene da pensare che, anche se non esplicitamente, l'idea di una legge possa condizionare il riconoscimento di una funzione (o il considerare una "cosa" come funzione). Questo vale soprattutto per il triennio (in cui risulta significativo pure il dato relativo a coloro che non rispondono per la B: il 45%), ma non è da trascurare neppure il dato del biennio. Per quanto riguarda il dominio ed il codominio, molti sia al biennio (circa 30%) che al triennio (circa 20%) utilizzino le variabili per indicare l'insieme; al triennio sono circa il 10% coloro che utilizzano intervalli (molti di più che al biennio, dove la percentuale si attesta sul 3%), manifestando una tendenza alla continuità. Sempre rispetto agli insiemi al triennio più che al biennio c'è la tendenza ad estenderli ad insiemi "più grandi" (N, P, a volte R), in ottica di generalizzazione. Ai punti b e c sia per la tabella A che per la B le percentuali del biennio siano praticamente identiche, mentre al triennio ci sono differenze anche significative relative ad A. Al quesito era collegato un test di "coerenza" per confrontare la risposta ad 1 con concetto di funzione emerso nei due contesti. La percentuale dei coerenti è attorno al 20% sia al triennio che al biennio, mentre aumenta al biennio quella dei non coerenti. La percentuale più alta al triennio (37%) è quella di coloro che, malgrado le motivazioni legate alle proprietà delle relazioni, di fatto si fanno condizionare dalla presenza di una legge nella prima tabella; anche al biennio, in ogni caso, la percentuale non è trascurabile (26%).

6) Guardando i seguenti grafici e tenendo presente la risposta data al quesito 1, stabilisci:

a) se sono grafici di funzioni (rispondi sì oppure no);
b) il dominio ;
c) se secondo te c'è una legge associata al grafico (sì oppure no).

I grafici, presi da due giornali, si riferiscono all'andamento del prezzo di un fondo azionario e del numero delle immatricolazioni delle auto in Italia. In quest'ultimo i dati (raccordati con segmenti) sono indicati con pallini vuoti.

Scopi. Indagare come può essere visto un grafico rispetto al concetto di funzione. All'interno del gruppo l'idea di legge associata al concetto di funzione è andata in crisi proprio di fronte all'analisi di grafici di dati empirici. Si è voluto vedere se:

a) la rappresentazione (con la distinzione cromatica fra punti e linee di raccordo) può indurre problemi, soprattutto sul dominio;
b) la rappresentazione con i pallini vuoti può indurre in errore sempre sul dominio (in quest'ottica si è volutamente tolta l'indicazione relativa all'origine dei dati riportati: immatricolazioni di auto in Italia);
c) si ripropone anche in questo contesto il problema del dominio se visto in modo continuo o discreto.

Risultati. Non ci sono grosse differenze nelle risposte relativamente ai due grafici, per cui non sembra avere influito molto né la forma diversa dei punti, né l'indicazione semantica sulla provenienza del grafico. Anche se molti non hanno risposto, generalmente come dominio viene indicato l'insieme dei vari elementi (anni o mesi), soprattutto al biennio. Al triennio aumenta il numero delle risposte non date (attorno al 50%) mentre la percentuale di coloro che indicano il dominio come intervallo è circa la metà delle risposte date. Questo, secondo Francesca, è frutto di una visione forse più dinamica, più complessiva: ogni punto non è visto a sé, ma come parte di un tutto (in questo caso un intervallo). Infine, coloro che non pensano che ci sia una legge sottesa la grafico sono la maggioranza, ma con percentuali significativamente diverse tra biennio (circa 60%) e triennio (circa 45%). Anche in questo caso (essendo richiesto esplicitamente se c'era una legge sottesa al grafico) si è effettuato un test di coerenza col quesito 1; prevalgono non definibili (cioè coloro che non associano necessariamente una legge al concetto di funzione oppure dicono che i due grafici non rappresentano funzioni), mentre i non coerenti sono in misura molto maggiore (rispetto ai coerenti) al biennio (circa 25% contro 7-9%) che al triennio (entrambe attorno al 20%).

7) Nelle figure sottostanti sono rappresentati i grafici degli andamenti di due azioni. Su quale avresti investito più volentieri? (i due grafici indicavano l'andamento della stessa azione, ma con scale diverse e con valori sull'asse delle ordinate indicati in modo diverso; il grafico A mostrava una crescita "più ripida")

Scopi. Vedere se la rappresentazione di una funzione può condizionarne la lettura (e quindi eventuali scelte).

Risultati. Come era atteso, la maggioranza ha risposto entrambi (o che i grafici sono uguali rispetto all'informazione richiesta), ma con percentuali non "schiaccianti" (73% al triennio e soprattutto 61% al biennio). In questo caso sembra evidente l'influenza dell'andamento del grafico rispetto ai valori delle variabili

8) Nei grafici (A) e (B) è evidenziato l'andamento di due azioni. Rispondi *(una risposta per ogni grafico):*

a) Rappresenta una funzione?
b) Se sì, qual è il dominio?
c) E il codominio?
d) In quale azione avresti investito più volentieri?

(i grafici, costruiti con Excel rappresentavano punti raccordati in A con una curva, in B con segmenti)
Scopi. Vedere se il modo con cui vengono raccordati i punti (con una curva anziché con dei segmenti) può cambiare sia il modo di vedere il grafico (e di associarlo al concetto di funzione) che il modo di vedere il dominio.
Risultati. Anche in questo caso si riscontrano risposte già viste in 6. Rispetto ai due grafici le risposte sono date con percentuali analoghe, per cui la linea di unione, anche quando è una curva, non è vista come parte della funzione. Questo è evidente soprattutto nel dominio e nel codominio, in cui la maggioranza, sia al biennio che al triennio, ha indicato l'insieme anziché l'intervallo, ma con percentuali nettamente diverse: circa il 50% al biennio contro il 30% del triennio (in cui tra l'altro le risposte non date sono dell'ordine del 50% contro il 33% del biennio). La differenza tra triennio e biennio si riscontra anche nella scelta del grafico: circa il 70% non fa differenza tra i due; tra i restanti preferiscono A il 12% dei ragazzi del triennio (il 5% che preferisce B); al biennio le percentuali sono uguali (10%).

9) Le equazioni $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2-4}$ *e* $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ *sono le equazioni di due funzioni (indica la risposta che ritieni corretta) i cui domini*

a) sono uguali;
b) sono diversi;
c) non si può rispondere;
d) non sono funzioni.

Scopi. a) Se il parlare esplicitamente di equazione può "disturbare" le questioni relative al concetto di funzione (se in sostanza è sentita in modo marcato la differenza tra equazione e funzione); b) se la mancata espressione del contesto semantico è notata dagli alunni e ne condiziona, come tale, le risposte.
Risultati. È il quesito in cui il termine "equazione" per indicare una funzione compare esplicitamente. Questo non sembra aver disturbato più di tanto i ragazzi (solo il 10% risponde d o non fornisce risposte). Le differenze significative si notano tra

biennio e triennio relativamente alle risposte a e b: nel biennio prevale a (49%), mentre nel triennio prevale b (67%). L'abitudine a lavorare in R ha sicuramente influenzato le risposte del triennio. Nelle risposte del biennio sembra prevalere l'abitudine al calcolo algebrico. Anche in questo caso quindi sembra ci sia una tendenza più marcata verso ambiti semantici da parte dei ragazzi del triennio rispetto ai compagni del biennio più "sintattici".

10) Le funzioni $y = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ *e* $y = \dfrac{1}{x-3}$ *definite in N (rispondi vero o falso)*

a) hanno lo stesso dominio;
b) sono uguali;
c) hanno lo stesso grafico;
d) non sono funzioni

Scopi. In questo quesito, come del resto nel precedente, si vuole vedere in quali ambiti si esprime il concetto di uguaglianza tra funzioni (se cioè a livello di dominio, di grafico o di espressione formale).
Risultati. Quello che si può osservare è che le risposte del biennio che ritengono a, b, c veri sono più "compatte" attorno al 55%, mentre nel triennio ci sono 14 punti percentuali di differenza tra b e c, quest'ultima la risposta con più "vero" (57%). A parte la maggioranza dei ragazzi del triennio che indica nel grafico l'elemento più caratterizzante di una funzione (di fatto) è da notare come la questione b sia la meno "gettonata" sia al biennio che al triennio (54% al biennio e 43% al triennio), probabilmente per la difficoltà ad esprimere un concetto di uguaglianza tra. Il 62% dei ragazzi del biennio che affermano che a è vera conferma la tendenza già evidenziata nel quesito precedente.

4. Conclusioni (dell'insegnante)

Nel lavoro che si è fatto e nel successivo questionario prodotto si è cercato di coinvolgere diversi temi e aspetti non necessariamente didattici legati al concetto di funzione. Al di là dei risultati conseguiti, ve ne sono di sicuramente importanti da ricondurre alle fasi del lavoro:

a) Discussioni preliminari: in queste fasi si è passati da una circospezione generale e naturale da parte dei ragazzi nei confronti di un argomento che fa parte della loro prassi didattica e che, come tale, tendevano a considerare come "da sapere" ad una fase in cui il rapporto è diventato paritario non solo tra di loro, ma anche tra loro e gli insegnanti che hanno partecipato al lavoro. Quando è risultato chiaro che nessuno aveva o poteva avere delle risposte, si è entrati nel vero lavoro di ricerca: cercare cose che prima non ci sono. Questo ha comportato, col passare del tempo, una maggiore sicurezza, non per quello che si sapeva, ma per le questioni che continuamente uscivano, rendendo chiaro come lo scopo non fosse dare delle risposte, ma porre soprattutto delle domande. I quesiti che sono stati infine scelti sono stati proposti e selezionati dai ragazzi in base all'idea che alla fine si sono fatti relativamente alle finalità del lavoro.

b) Stesura del questionario. La successiva stesura del questionario ha rispecchiato appieno questo spirito, per cui anche l'analisi delle risposte non è stata fatta andando a cercare la risposta giusta, quanto piuttosto nel cercare di capire cosa potesse significare quel tipo di risposta. Durante l'analisi dei risultati poi, com'è ovvio, ci si è resi conto di come certe questioni potessero essere scritte in modo più semplice (tipo il quesito 1) o come altre abbiano comportato risposte diverse da quelle previste. Un aspetto non trascurabile riguarda la parte relativa alla valutazione del questionario. Dopo aver concordato la griglia di valutazione e dopo averla testata su alcuni questionari, ci si è suddivisi il lavoro, lasciando ad una discussione in comune i casi più ambigui (legati soprattutto alla presenza di motivazioni). Ciò non toglie che il senso di alcune risposte sia legato all'interpretazione o meglio al concetto di funzione presente nel correttore. Questo aspetto risulta comunque in linea con il senso del lavoro: alla fine in effetti non è stata data una visione privilegiata di funzione, ma è prevalsa l'idea che il concetto si potesse prestare a diverse prospettive.

c) Questioni legate alla somministrazione del questionario: nel gruppo si è discusso anche sul modo di somministrare il questionario. A tale proposito sono emerse varie ipotesi: somministrarlo per gruppi; somministrarlo individualmente, ma a gruppi selezionati (dagli insegnanti in base alle motivazioni personali); somministrarlo a tutta la classe.

La prima ipotesi nasceva dall'esigenza di un confronto, lo stesso, per certi aspetti, che il gruppo ha fatto per arrivare a queste conclusioni. Si voleva in sostanza che i ragazzi usassero il questionario come strumento di riflessione. La seconda ipotesi nasceva dall'esigenza che il questionario "fosse preso sul serio". Alla fine, non senza discussione, ha prevalso la terza ipotesi. È inoltre corretto

riportare una critica rivolta da alcuni insegnanti di altre scuole al lavoro, secondo cui tale questionario era "tarato" su realtà liceali. È sicuramente da sottolineare l'importanza didattica del lavoro: la costruzione del questionario ha "costretto" i ragazzi a confrontarsi con questioni quali la conoscenza di un concetto al di là della definizione nota, la ricerca di significati sottesi (ponendosi quindi il problema se tali significati esistono o possono esistere), confrontarsi con compagni di altre classi (di maggiore o di minore età) e con gli insegnanti su un piano paritario, il problema della costruzione di uno strumento d'indagine e quello successivo dell'interpretazione e della valutazione. Tutto ciò ha comportato una maggiore responsabilizzazione ed un coinvolgimento diretto che si è consolidato con la convinzione di una crescita nella coscienza del lavoro.

Per quanto riguarda gli aspetti più strettamente legati al lavoro, sono opportune alcune considerazioni.

Anche nella prassi didattica ci si muove spesso su piani ambigui e non ben definiti: si introduce la funzione come relazione, per poi passare, soprattutto al triennio, ad un'idea di legge che si radica con il piano cartesiano. L'uso stesso di termini come equazione (riferita da alcuni autori alla funzione e non solo alla curva da essa individuata) trova la sua giustificazione nell'introduzione degli insiemi attraverso proprietà caratteristiche.

Le scritture più comunemente usare sono:

a) $f(x) = ...;$
b) $y = ...;$
c) $x \longrightarrow$ (più raro)

Rispetto al lavoro fatto, potremmo riferire la terza forma ad una visione dinamica del concetto di funzione, mentre la prima fa pensare alla funzione come "macchinetta" che, dato un valore di x, ne fornisce il risultato. Questa forma, utilizzata soprattutto nei problemi in cui si cercano legami o variazioni tra grandezze, non esprime esplicitamente una seconda variabile e quindi fa allontanare in un certo senso dall'idea di funzione come insieme di coppie ordinate, idea invece pesantemente presente in (b) in cui si passa ad una visione chiaramente statica: la funzione è data in atto (il suo grafico ne è la migliore espressione), laddove in (c) e in (a) è data in potenza.

Viene quindi da chiedersi: se il concetto di equazione porta con sé una visione statica di funzione, il passaggio, che spesso si fa e che viene fatto anche dai libri di testo dalla forma (a) alla forma (b) (e che fa scrivere poi cose del tipo "..... la funzione $f(x)$....." come nel testo della maturità scientifica del 1999) viene vissuto in modo indolore dai ragazzi? Il passaggio dalla funzione come "macchinetta" alla funzione come insieme di coppie (e quindi grafo, col ruolo decisivo svolto dal piano cartesiano, come si è visto anche nel questionario, soprattutto al triennio) è sufficientemente chiarito e chiaro, non tanto e non solo rispetto agli ambiti, quanto rispetto all'idea di quali richieste e quali esigenze siano sottese in una rispetto all'altra? Il piano cartesiano, col pesante ruolo svolto dalle variabili "canoniche" porta ad una idea di funzione o, soprattutto al triennio, all'idea di funzione? Le riflessioni che come insegnati dovremmo fare sono anche di altro tipo: il concetto di funzione è visto allo stesso modo da tutti i matematici (analisti, logici, geometri, statistici, ecc.)? La risposta è ovviamente negativa: per gli analisti ad esempio l'importanza della continuità (della derivabilità e in generale della legge) è diversa rispetto ad un logico, così come è diverso l'aspetto grafico per un geometra e un logico. Noi, come insegnanti, a quale modello pensiamo nel corso dell'attività didattica? E, soprattutto, gli alunni a quale idea, mediata da noi, giungono? L'indubbio salto da una visione sintattica ad una semantica nel passare dal biennio al triennio è voluto in modo cosciente (dagli insegnanti) o diventa una inconscia conseguenza della presentazione dei programmi? Credo che siano queste le domande a cui cercare di rispondere, al di là delle definizioni che possiamo scegliere di dare. Chi eventualmente volesse indicazioni più dettagliate sul lavoro e sui risultati o il testo del questionario può richiederlo all'indirizzo a.maffini@libero.it

FRANCESCO SPERANZA DIDATTA: VALORI E SCELTE CULTURALI•

Nicolina A. Malara*

F. Speranza può ritenersi a pieno titolo uno dei padri della didattica della matematica In Italia.

Il suo interesse per questa disciplina inizia sul finire degli anni sessanta, con l'avvento dello strutturalismo, di cui è convinto sostenitore. All'epoca, l'avvio della scuola media unica (1963) e l'unificazione dell'insegnamento matematico con quello delle altre scienze, i progetti di rinnovamento della secondaria superiore culminati con i cosiddetti "programmi di Frascati" (De Finetti 1967) pongono allora urgentemente il problema della formazione insegnanti. Speranza vede in questi l'elemento chiave per un rinnovamento reale dela scuola e si prodiga per la divulgazione delle nuove idee attraverso la costituzione nelle università di gruppi misti, insegnanti e universitari. L'ipotesi di fondo è che con una distribuzione ragionata di tali gruppi su tutto il territorio italiano si possa rigenerare la scuola dall'interno.

Negli anni '70 si occupa della scuola media, appena rifondata, partecipando alla commissione per la costituzione del nuovi programi (1979); le sue idee traspaiono nel loro impianto, centrato sulla progettualità dell'insegnante, mirato all'affinamento linguistico ed al ragionamento, alla matematizzazione ma come tramite verso il pensiero teorico, alle idee matematiche nella loro evoluzione storica.

In un lavoro degli anni '80 (Speranza 1980) espone le sue idee circa l'educazione matematica nell'arco preuniversitario. Tale lavoro può essere visto come un vero e proprio manifesto sulla sua visione dell'insegnamento matematico. In esso egli sostiene con argomentazioni puntuali e convincenti che la matematica:

a) è un diritto per tutti;
b) va insegnata in modo adeguato ma seriamente in ogni ordine scolastico;
c) deve essere per l'uomo;
d) ha le sue radici nell'esperienza;
e) deve avere un suo sviluppo autonomo ma collaborare con le altre discipline.

Riprenderà una riflessione su questi temi, di fatto suoi valori di fondo, nel lavoro

•Questo lavoro è sintesi di uno più ampio, in lingua inglese, pubblicato in Malara *et al.* *(2000)*.

*Università di Modena e Reggio Emilia

"La scuola una passione civile, un modo nuovo per costruire il sapere", titolo che bene esprime il suo impegno verso il sociale (Speranza 1995a). In esso richiama "la centralità della persona" nei processi educativi (sia che si tratti di formare insegnanti o studenti) e sottolinea la consapevolezza acquisita dai ricercatori verso gli aspetti psicologici dell'apprendimento. Rileva come sia cambiata l'idea stessa dell'insegnamento matematico, con lo spostamento di attenzione dall'insegnante (come depositario di un sapere da trasmettere) agli allievi (come attori di un sapere da costruire). Ripercorre i principali cambiamenti sociali ed i processi attivati per far "crescere la scuola", pur constatando la lentezza delle istituzioni. Entra nel vivo di svariate questioni, solitamente viste in contrapposizione; ad esempio sostiene la complementarietà delle presunte dicotomie "matematica di base e applicazioni", e "matematica per strutture e matematica per problemi", sottolineando come gli aspetti della pratica (applicazioni, problemi) siano indispensabili per dare corpo ai contenuti teorici e senso alla loro organizzazione. Sostiene con forza la componente "umanistica" della matematica, per i suoi intrecci con la psicologia, antropologia, filosofia, e ribadisce l'importanza del riconoscimento nella società della dimensione culturale della disciplina.

Nell'ultimo decennio della sua vita egli si batte per richiamare l'attenzione sull'importanza della Epistemologia della Matematica per la formazione disciplinare e per la ricerca didattica (si veda il contributo di C. Marchini qui e in Malara *et al.*, 2000).

I libri di testo e per la formazione insegnanti

Nel panorama italiano Francesco Speranza è l'unico studioso ad aver scritto libri di testo per ogni livello scolare, tutti molto apprezzati ma in genere non molto diffusi. I testi più fortunati sono quelli dedicati alla scuola secondaria superiore, si tratta di due progetti scritti in collaborazione con Alba Rossi Dell'Acqua: *Matematica* (1971-74) e Il linguaggio della Matematica, (1979-82).

Il primo progetto, realizzato sulla base dei programmi di Frascati, è profondamente innovativo rispetto ai testi allora presenti, il linguaggio degli insiemi fa da substrato all'intera trattazione, che è di tipo strutturalista, la geometria ha una impostazione assiomatica filo Hilbertiana. Una grossa novità è l'ampio uso di svariate rappresentazioni, utilizzate anche per veicolare concetti raffinati, quali quello di isomorfismo di strutture, e quello di ampliamento numerico. Tra gli esercizi ne figurano parecchi concepiti come approccio ad argomenti nuovi, cosa questa di rottura per l'epoca. I due volumi collaterali per la scuola magistrale presentano l'interessante novità di avere alcuni capitoli su risultati avanzati di ricerche didattiche per la scuola elementare.

Il secondo progetto si discosta dal precedente per alcune scelte di fondo. Innanzi tutto vi è una maggiore enfasi sugli aspetti linguistici e relazionali della matematica, cosa messa in luce anche dal titolo, vi è poi una revisione della trattazione della geometria: si rinuncia all'idea di una impostazione assiomatica unitaria e se ne attua una eclettica, che tiene conto di punti di vista diversi, si ridimensiona lo spazio dato agli spazi vettoriali a vantaggio delle trasformazioni geometriche e, cosa più interessante - non solo dal punto di vista metodologico- si affiancano trattazioni sintetiche e analitiche di uno stesso argomento, evidenziando il carattere di modello algebrico di queste ultime.

Accanto a questi va considerato il testo per la scuola media *La Matematica: parole, cose, numeri, figure* (1984). Il libro, molto bello anche dal punto di vista grafico, punta alla costruzione di una immagine colta della matematica; è raffinato nel linguaggio e approfondito nella trattazione, con ampi riferimenti, oltre che alla fisica, alla biologia, e in genere alle scienze, in campi più lontani, quali la storia dell'arte, la storia della scienza, la letteratura. Si caratterizza per la grossa attenzione data all'educazione logico-linguistica, al ragionamento per analogia, alla trattazione della geometria come sistema complesso.

Per la scuola elementare vanno segnalati:

a) l'interessantissimo progetto, *"Oggetto, Parola, Numero"* (1981), scritto assieme a Maria Luisa Altieri Biagi, che ha una doppia struttura: libro di formazione degli insegnanti e di lavoro creativo per gli allievi;
b) la parte matematica (svolta con C. Mazzoni e P.Vighi). del sussidiario *Imparare a Scuola*, da lui curato con F. Frabboni (1990).

Le due opere sono centrate metodologicamente su:

a) il cogliere relazioni in vari contesti ed il codificarle tramite rappresentazioni diverse;
b) il riflettere sulle varie situazioni rilevando le analogie e astraendone gli schemi soggiacenti; dando attenzione costante al linguaggio naturale, ed alla costruzione del linguaggio matematico.

La differenza tra i due è comunque enorme, il primo è un prodotto culturalmente raffinato ed esteticamente bello, il sussidiario, prodotto tipico della scuola di tutti, è circoscritto nel numero di pagine e povero rispetto al primo.

Altri Importanti testi sono *"Matematica per gli insegnanti di Matematica"* (1983) e *"Insegnare la Matematica nella Scuola Elementare"* (1986), - quest'ultimo scritto in collaborazione con D. Medici Caffarra e P. Quattrocchi - concepiti per consentire una acculturazione matematica di base ad insegnanti privi di una formazione specifica nella disciplina. Il primo dei due è in particolare pensato per la preparazione al concorso di abilitazione all'insegnamento nella scuola media, il secondo, uscito in concomitanza ai nuovi programmi della scuola elementare, ha la finalità di dare un'idea di cosa sia e studi la matematica, esaltando il significato della conoscenza matematica ed il confronto con le scienze sperimentali.

Vanno considerati anche i contributi dati alla divulgazione matematica attraverso l'*Enciclopedia delle Scienze* della De Agostini (1984), di cui cura l'impianto della parte matematica, l'*Enciclopedia della Scienza e della Tecnologia* (Speranza 1994c) e gli innumerevoli articoli scritti su riviste ad uso esclusivo degli insegnanti le loro conoscenze di base.

Uno sguardo su alcuni importanti articoli

Accanto agli articoli divulgativi vanno considerati gli articoli scritti in ambito accademico e pubblicati su riviste o atti di convegni. Per la loro numerosità ci limiteremo a considerarne solo alcuni sull'insegnamento della geometria, anche se ve ne sono di importanti in altri ambiti, come la linguistica e l'epistemologia, per essi rinviamo alla bibliografia completa delle sue opere (D'Amore & Pellegrino 1997).

Gli articoli su cui ci soffermiamo, importanti per la ricerca in didattica della mtematica, mettono pienamente in luce la complessità e modernità del suo pensiero.

Nel primo, *"La razionalizzazione della Geometria"*, Speranza prende in esame la questione dell'impoverimento dell'insegnamento della geometria[1] ; ne propone una rivalutazione sin dalla scuola elementare puntando alla costruzione di un sapere geometrico fondato sull'esperienza e sul "saper fare". Dà delle indicazioni culturali e didattiche su come costruire la geometria come scienza razionale, ponendo l'accento "sull'idea di costruire l'organizzazione della geometria, in contrapposizione alla tendenza di "darla come cosa già sistemata"". Richiama i mutamenti di concezione sull'origine delle conoscenze geometriche, sottolineando come molti matematici-filosofi tra otto e novecento hanno visto tale origine nell'esperienza ma hanno valorizzato l'azione della mente umana nella costruzione di teorie in interazione con l'esperienza. Ribadisce come nell'insegnamento sia importante:

a) giungere a trattazioni assiomatiche, per la loro valenza di sitèmazione logica e sistematica delle conoscenze;
b) evidenziare gli aspetti storico-critici propri dell'evoluzione della disciplina fino a far comprendere la portata culturale del programma di Erlangen.

Nel secondo articolo, dal titolo eloquente *"Salviamo la Geometria"*, riprende i temi precedenti da un punto di vista più didattico, evidenziando come la geometria risenta di molteplici tradizioni, precisamente:

a) *la tradizione artigianale-artistica*, del "saper fare" geometrico;
b) *la tradizione egizio-babilonese* (nata probabilmente per l'agrimensura, che porta al calcolo di aree e volumi);
c) *la tradizione critica sul sapere costituito* (La scuola Pitagorica e la scoperta degli incommensurabili, Zenone e di paradossi, Galileo e l'infinito, la storia della critica al postulato delle parallele con la conseguente rivoluzione nella concezione della geometria);
d) *la tradizione euclidea* che valorizza la sistemazione del sapere, e le recenti sistemazioni quali quelle di Peano, Pieri, Hilbert;
e) *la tradizione cartesiana*, che porta ad interpretare la geometria in termini algebrici (e anche a dare un apporto geometrico all'algebra);
f) *una tradizione astronomico-fisica*, che trae spunto dalle applicazioni alle scienze della natura, e vede la costruzione di modelli matematici di tipo geometrico (Eudosso, Apollonio-Tolomeo, Aristarco-Copernico, Keplero, fino alle cosmologie relativistiche).

Egli sostiene che queste tradizioni debbono concorrere all'educazione geometrica attraverso una programmazione articolata, sin dalla scuola elementare, per tutto il corso di studi preuniversitario; mentre solitamente sono accostate in modo acritico con conseguenti distorsioni didattiche e danni educativi. Espone poi un panorama di sviluppo della geometria mostrando quali delle diverse tradizioni intervengono e come riferirsi ad esse nell'insegnamento; riassume quanto esposto in una interessante tabella da cui si evidenziano le correlazioni tra i vari aspetti in riferimento agli stadi di sviluppo del pensiero.

Il terzo articolo *Controindicazioni al riduzionismo*, è un lavoro complesso, in cui denuncia il problema della degenerazione, da un punto di vista culturale e didat-

[1] Attribuisce questo decadimento anche al tipo di insegnamento universitario, che ne sacrifica la visione composita in nome di una eleganza formale

tico, della riduzione al modello algebrico delle attuali trattazioni della geometria. Egli non si dichiara contro il riduzionismo inteso come coordinamento di punti di vista diversi con cui guardare ad una stessa teoria ma contro l'abitudine dominante di guardare alla teoria come appendice di un suo modello. Analizza da un punto di vista epistemologico l'intrecciarsi dei percorsi che, a partire dall'introduzione del metodo delle coordinate, hanno portato alle attuali trattazioni algebriche degli spazi affini (e proiettivi) su un campo. Sottolinea poi i limiti di questa riduzione, che non consente, tra al'altro, di dominare la geometria affine nella sua generalità (sfuggono ad esempio i piani non desarguesiani).

Nel quarto articolo, *Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio*, esamina concezioni dello spazio, intese anche come filosofie implicite con cui si guarda ad esso. A questa trattazione premette un richiamo sul programma di Erlangen, per inquadrare le diverse geometrie in relazione ai gruppi fondamentali di trasformazioni associati. Sostiene che ciascuna geometria è connessa ad un significativo campo di esperienze (anche mentali) che conduce ad operare secondo il corrispondente gruppo ed in relazione al quale si può sviluppare un'intuizione

Sviluppa il tema per contrapposizioni, confrontando nella loro evoluzione storica i concetti di:

1. spazio non indipendente/spazio indipendente;
2. spazio assoluto/spazio relativo;
3. spazio omogeneo o non omogeneo - spazio isotropo o anisotropo;
4. spazio limitato/spazio illimitato;
5. spazio finito o infinito; spazio come insieme di punti o continuo irriducibile; spazio reale o forma della nostra sensibilità (oppure ...), rivedendo ciascuno di essi nel quadro del programma di Erlangen.

Sottolinea la forte contrapposizione tra le componenti dell'ultima coppia di concezioni e di come la scelta di una delle due influenzi, a volte determini, la scelta di una componente in relazione alle coppie precedentemente considerate. Pone il problema di una terza via tra le due concezioni, per il superamento della visione Kantiana con la nascita delle geometrie euclidee e si dichiara, in accordo con Enriques, sostenitore del *razionalismo sperimentale*. L' esposizione è intrecciata con un'ampia e documentata trattazione sulle concezioni dello spazio nell'arte, dove sulla base di diversi studi (Panowsky, Fracastel, etc) si mette in evidenza come nell'arte certi temi (l'idea e la rappresentazione dell'infinito, anticipazioni di geometria analitica, trasformazioni) si siano affrontati con notevole anticipo

rispetto alla matematica.

Altri importanti lavori, che completano il quadro dei suoi scritti di intreccio geometria-epistemologia-didattica sono quelli dedicati al programma di Erlangen (1992) e al significato culturale delle geometrie euclidee (1997). .

E per finire

Per questioni di spazio non possiamo soffermarci sui contributi dati da Speranza nell'ambito del seminario nazionale di ricerca in didattica della matematica, per questo rinviamo a Malara (2000). Ci rendiamo conto della povertà di questa sintesi rispetto alla vasta e impegnativa produzione del nostro autore ma accostandola al saggio di C. Marchini (2000) si riesce ad intavvedere, seppure frammentata, la figura di un matematico di grande cultura e sensibilità umana. Ci sentiamo infine di affermare che la comunità italiana gli deve molto, soprattutto per l'appassionato lavoro volto alla esplicitazione della dimensione culturale della matematica e per l'attenzione agli aspetti filosofici, umani e sociali della disciplina.

Riferimenti bibliografici

Lavori di F. Speranza citati nel testo

ALTIERI BIAGI, M. L., SPERANZA, F.: 1981, *Oggetto, Parola, Numero*, N. Milano, Bologna

FRABBONI, F., SPERANZA, F. (a cura di):1990, *Imparare a Scuola*, N. Milano, Bologna

SPERANZA, F.: 1980, L'educazione matematica nell'arco pre-universitario, in atti Convegno "Nuovi curricoli e metodologie dell'educazione matematica nell'arco degli studi universitari" (Cagliari) *L'Educazione Matematica*, maggio 1980, suppl. 1, 1-6.

SPERANZA, F.: 1983, *Matematica per gli insegnanti di Matematica*, Zanichelli, Bologna

SPERANZA, F.: 1984, *1. Che cos' è la Matematica; 2. Geometria, 3. Logica, 4. Strutture Matematiche*, in Enciclopedia delle Scienze, De Agostini, Milano, 5-22; 61-87; 22-37; 190-196.

SPERANZA, F. , MEDICI CAFFARRA, D. QUATTROCCHI, P.:1986, *Insegnare la Matematica nella Scuola Elementare*, Zanichelli, Bologna

SPERANZA, F.: 1988c, Salviamo la geometria!, *La Matematica e la sua Didattica*, anno II, n. 2, 6-13

SPERANZA, F.: 1989b, La razionalizzazione della Geometria, *Periodico di Matematica*, VI, 65, 29-46

SPERANZA, F.: 1990b, Controindicazioni al riduzionismo, *La Matematica e la sua Didattica*, III, 12-17

SPERANZA, F.: 1994d, Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio, *L'Educazione Matematica*, anno XV, serie IV, vol. 1, n. 2, 95-115

SPERANZA, F.: 1995, La "rivoluzione" di Felix Klein, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 18B, n.4, 328-345

SPERANZA, F.: 1995, La scuola: una passione civile, un modo nuovo per costruire il sapere, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 18A-19B, n.5, 520-531

SPERANZA, F.: 1997, *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora editrice, Bologna

ROSSI DELL'ACQUA, A., SPERANZA, F,: 1970-1974, *Matematica per le Scuole secondarie Superiori*, voll. 1-5, e, *Complementi di Matematica per gli Istituti Magistrali*, voll. I e II, Zanichelli, Bologna

ROSSI DELL'ACQUA, A., SPERANZA, F,: 1979-1982, *Il linguaggio della Matematica*, voll. 1-5, Zanichelli

Altri riferimenti bibliografici

BARRA M., FERRARI M., FURINGHETTI F., MALARA N.A., SPERANZA F. (a cura di): 1992, *Italian Research in Mathematics Education: Common Roots and Present Trend*, quaderno n. 12, collana FMI, progetto TID- CNR

DE FINETTI, B.: 1967, Le proposte della Matematica per i nuovi licei, *Periodico di Matematiche*, s. IV, XLV, 75-153

D'AMORE B. E PELLEGRINO, C. (eds), 1997, *Atti del Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza*, Pitagora Editrice, Bologna

MALARA N.A., FERRARI, PL., BAZZINI, L., CHIAPPINI, G.P. (a cura di): 2000, *Recent Italian Research in Mathematics Education*, Univ. Modena, Modena

MARCHINI, C.: 2000, The philosophy of Mathematics according to F. Speranza, in Malara et al. 2000, *Recent Italian Research in Mathematics Education*, Univ. Modena, Modena

Evoluzione del pensiero di Francesco Speranza, filosofo della matematica

Carlo Marchini*

SUNTO. Negli ultimi anni della sua vita F. Speranza si è dedicato a pieno tempo a studi di epistemologia della matematica. Egli (re)introduce questi temi all'interno della comunità matematica italiana, (ri)costruendo una trama di interessi e collaborazioni con gli ambienti più specificamente filosofici[1]. Ho cercato, avvalendomi principalmente di [23] e di alcuni manoscritti di S., di cogliere i momenti più significativi dello sviluppo del suo pensiero. In questo lavoro si rende conto solo parzialmente di quanto da me presentato nella tavola rotonda commemorativa. Un resoconto più completo si ottiene considerando anche [7]. Per l'intervento di Malara si rimanda a [6].

1. I manuali scolastici e il bourbakismo. A partire dal 1971 S. con A. Rossi Dell'Acqua inizia la pubblicazione dei primi manuali per la scuola superiore. A questi seguono numerosi altri, scritti anche con altri collaboratori, in modo da offrire testi per l'intero ciclo scolastico, dalle Elementari alle Superiori, questi ultimi differenziati per vari tipi di scuola, esempio unico nella pubblicistica matematica di qualità. In tali manuali la Matematica è vista come una teoria ipotetico-deduttiva in cui il linguaggio insiemistico svolge il ruolo di strumento unitario di presentazione[2].

*Indirizzo: Sezione di Sperimentazione Didattica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Strada D'Azeglio 85/A,43100 - PARMA - Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica. e-mail: marchini@prmat.math.unipr.it.

[1] L'Epistemologia della Matematica nasce e si sviluppa in Italia con gli studi sui fondamenti per opera di Peano e la sua scuola, Enriques, Vailati, ecc., e a Parma, Pieri e Beppo Levi. Le successive vicende politiche e culturali italiane hanno interrotto, in ambito matematico, tale tipodi studi che sono ripresi solo in tempi più recenti anche grazie all'opera di S.

[2] Un esempio: [29}, a pagg. 307-308, fornisce l'impostazione assiomatica del concetto di area, iniziando con le nozioni primitive di figura quadrabile o misurabile e di equiestensione e ponendo assiomi che trattano l'equiestensione come relazione di equivalenza, i suoi rapporti con la congruenza, con le operazioni insiemistiche e l'inclusione ed i poligoni. Il testo definisce l'area di una figura quadrabile $\mathcal{S}$ (si noti non la misura dell'area!) come la classe di equivalenza, rispetto alla relazione di equiestensione, della figura $\mathcal{S}$. È evidente l'impostazione assiomatica appoggiata al linguaggio insiemistico che fa aggiungere la richiesta che $\emptyset$ sia un insieme quadrabile, l'uso della relazione di inclusione per la suvvalenza e delle relazioni che introducono una struttura d'ordine avente per sostegno l'insiemedelle figure quadrabili.

È riconoscibile l'influenza della proposta bourbakista. I testi presentano un quadro unitario della Matematica conuna predominanza della Geometria. In un brano di [25][3] dice:

"A livello universitario l'impostazione strutturalista si è affermata quasi dappertutto, con un movimento di espansione successiva. [...] i giovani "generali di primanomina", intorno al '70, hanno portato i nuovi principi anche là dove Napoleone e i suoi non erano arrivati, fino in Sicilia e Sardegna."

Sapendo che a 35 anni (nel 1967) S. è vincitore di una Cattedra di Geometria presso l'Università di Messina, è facile vedere in questo passo un connotato autobiografico.

I libri scolastici di S. e la sua opera all'interno della Commissione per la riforma dei programmi per la Scuola Media (pubblicati nel 1979) hannocontribuito a diffondere in ampi strati di popolazione studentesca e tragli insegnanti questo approccio alla Matematica. Il risultato è che per gli studenti[4] (cfr. [25]).

"... grazie ancheall'abitudine di prendere le cose così come le trasmettono i professori,lo strutturalismo è per loro "trasparente", non so se se ne accorgono come un pesce non si accorge dell'acqua"."

Nel tempo modificherà l'adesione piena alla presentazione bourbakista, riconoscendone però sempre il valore[5]. In [9], sostiene che

"Corrispondenze e analogie strutturali, tema che, a sua volta, è la chiave di volta

[3] Non mi risulta che tale articolo sia stato pubblicato. Di questo manoscritto ci sono due versioni diverse; mi riferisco qui a quella più estesa, anche se la più ristretta presenta grafici disegnati a mano da Speranza, che mancano nella versione più estesa. Nel seguito le citazioni sono tratte lavoro nella versione estesa.

[4] Nel brano originale tale atteggiamento è riferito aimatematici italiani.

[5] Altro esempio: in [30], sempre a proposito dell'area scompaiono le figure quadrabili, ma ci si attiene ai poligoni convessi chiusi o l'unione di un numero finito di poligoni convessi chiusi. Si definisce la relazione di equiscomponibilità e si dimostra che le unioni di poligoni staccati equiscomposti sono equiscomposte, poi che l'equiscomponibilità è una relazione di equivalenza. Si dice che due poligoni equiscomponibili hanno la stessa area ed infine che l'area di un poligono è la classe di equivalenza del poligono rispetto alla relazione di equiscomponibilità. In questo caso non ci sono termini primitivi introdotti per lo scopo, non cisono assiomi espliciti, ma la trattazione segue da quella generale della Geometria

del pensiero matematico-strutturale. A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscano a inventare qualche analogia, anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte fra quelle inventate."

e in [8] afferma:

"A scanso di malintesi, preciso che *non condivido affatto le critiche allo strutturalismo bourbakista a livello di Matematica avanzata.*"

Il già citato [25] è dedicato ai rapporti tra lo strutturalismo in Matematica e quello che si è affermato nelle Scienze umane. Grazie a numerose citazioni mostra che "padri fondatori" dello strutturalismo, ad esempio de Saussure, Lévi-Strauss, hanno avuto attenzione per la Matematica, attenzione che è diminuita nelle elaborazioni dei loro epigoni. A proposito dell'insuccesso didattico avuto dalla proposta di Bourbaki in [25] afferma:

"Quelli che in Francia hanno impostato la presentazione della matematica direttamente sulle strutture - all'università e poi anche nelle scuole secondarie - si sono nettamente scostati dalla propria esperienza formativa. Questa può essere stata una delle cause del sostanziale insuccesso del bourbakismo nelle scuole secondarie, sfociato in una reazione "termidoriana", che ha portato a buttare con ignominia anche idee valide."

Una seconda ragione dell'insuccesso didattico del bourbakismo la si può vedere adombrata in un brano di [11]:

"Nel seguito, non contesterò la liceità di tracciare un programma riduzionista: interpretare una teoria entro un'altra è di regola un'importante acquisizione, che getta nuova luce sul sistema delle scienze. Mi batterò contro la pretesa di presentare la teoria **T** solamente come un'appendice alla teoria **R**: soprattutto quando si tratta di esporre nell'insegnamento la teoria **T**, e ancor di più quando la si espone agli insegnanti. Quella che contesto è dunque la prassi riduzionista. Da questo punto di vista, non tutti i riduzionismi vanno posti sullo stesso piano. Bisogna intanto vedere se visono effettive alternative a una esposizione riduzionista della teoria **T**; o meglio, alcune riduzioni sono profondamente radicate nel nostro sottofondo culturale, e, senza che ce ne accorgiamo, ci condizionano."

2. Filosofia della Matematica. È difficile separare nella produzione di S. la componente epistemologica da quella didattica. Per lui, come mostrano alcune

ricerche svolte in aula, la didattica è la "sorgente" di problemi che affronta dal punto di vista filosofico, ed è questa una sua caratteristica originale; spesso le esemplificazioni presentate fanno riferimento all'educazione matematica. Trova così un pregevole equilibrio tra la ricerca teoretica e l'esigenza "sociale" di fornire, al docente idee, strumenti e metodologie, inquadramento storico dei problemi attuali, come ad esempio in [28]. In [8] afferma:

"Penso che la mia testimonianza personale possa avere qualche interesse. Da quasi vent'annimi occupo di didattica della Matematica: prima per le Scuole Superiori, poi per le Medie, poi per le Elementari. Arrivato a questo livello mi sono accorto che la Matematica, nella sua prospettiva ordinaria, non era di per sé sufficiente per aiutare in alcune decisioni di fondo; che occorreva prima compiere alcune scelte di tipo epistemologico: se la parola non spaventa, filosofico."

In [12] riporta:

"Chi costruisce un progetto didattico si trova ben presto di fronte a grandi scelte: per esempio, quale taglio dare alla geometria nelle elementari o nelle medie; a quale tipo di logica dare la precedenza, quali interazioni con altri campi disciplinari sviluppare; ... Ci si accorge che i risultati interni alla matematica a un certo punto non sono più sufficienti per fare una scelta, che occorre una visione globale, epistemologica...
In altre parole, la filosofia della matematica è necessaria per costruire e per realizzare un programma didattico nella scuola dell'obbligo ... Nelle superiori, gli aspetti tecnici della matematica possono avere un maggior peso: ma sappiamo che i nuovi programmi hanno suscitato alcune discussioni, che si possono far risalire a importanti nodi epistemologici: l'interazione fra logica e altri settori, la costruzione della geometria, il ruolo della geometria non euclidea, il significato della probabilità. Anzi, a questo livello è auspicabile che una riflessione epistemologica diventi esplicita fin dal primo biennio ...."

Per il nostro l'opera di Enriques ha grande importanza in tutto lo sviluppo del suo pensiero. Una delle sue ultime opere è stata la cura degli atti di un convegno su Enriques (ne programmava un secondo). Oltre che ispiratore di molte sue idee, scorge nel livornese l'anticipatore di filoni di ricerca epistemologica che saranno poi ripresi o riscoperti in campo internazionale.

Una giustificazione alla ricerca epistemologica di S. la si può riscontrare nel tentativo di fornire un quadro di riferimento come "antidoto" ad un'insoddisfazione diffusa tra i matematici sulle finalità dei propri studi. In [12] dice

"A differenza della maggior parte degli ambiti *scientifici*, l'assunto che la scienza è (o dovrebbe essere) qualcosa di utile, per la matematica funziona poco o nulla ... La risposta *facciamo matematica pour l'honneur de l'esprit humain*, sostanzialmente giusta, lascia insoddisfatti se manca un quadro di riferimento."

La Filosofia della Matematica può far sparire questa insoddisfazione: in [12] individua tre ambiti: quello della *epistemologia genetica* per approfondire le origini della conoscenza matematica, avvalendosi anche della psicologia e quello più propriamente filosofico (ontologico) della natura degli enti matematici che si pone in connessione col *problema degli universali*. Il secondo ambito è quello della storia, soprattutto *le ricostruzioni razionali della storia*, propugnate da Lakatos (cfr. [14], [19], [20], [22], fino a[3]). Il terzo ambito è quello dei problemi fondazionali, che comprendono il problema dei fondamenti.

"Questi ambiti possono interagire fra loro. Una certa tendenza, da Frege a Popper, ha voluto dichiarare la non pertinenza della psicologia in problemi epistemologici (disinteressandosi quindi dell'ambito genetico). A parer mio, bisogna andare cauti con chiusure di questo tipo, che possono avere al più un valore personale. Una interazione fra i vari livelli mi sembra invece auspicabile..." (cfr. [12])

Gli apporti di maggior rilievo di S. in campo filosofico sono, a parere mio, quello di aver posto il problema della componente empirista della Matematica[6] e quello del ruolo delle rivoluzioni come paradigma esplicativo dei mutamenti in campo matematico. Egli sostiene la posizione empirista in [13], giustificandola con una lunga serie di esempi tratti dalla storia della Matematica; si veda anche [10] in connessione coi programmi scolastici. Il tema delle rivoluzioni, collocato nell'ambito di un'*epistemologia storica* e di una filosofia non assolutista (cfr. [15]), viene poi sviluppato in alcuni lavori: [17], [16],[18]. Nel 1992 sono apparsi contemporaneamente [17], [1] e [2] in cui si dibatte la possibilità di identificare rivoluzioni anche in Matematica. Ma già in [8] sosteneva la presenza di rivoluzioni in Matematica. Contro la posizione *continuista* di Enriques, S. si schiera tra i

[6] Il termine empirismo ha bisogno di ulteriori specificazioni. Anche il positivismo logico viene indicato come neo-empirismo, ma S. non si riconosce in questa accezione, alla luce di [26] in cui prende nettamente le distanze da tale scuola di pensiero. Tale manoscritto è una bozza incompleta.

rivoluzionaristi. Egli obietta che la validità della matematica greca è oggi molto cambiata, trasformandosi dalla scienza o conoscenza garantita alla ricerca di una validità relativa, ruolo attuale, dopo le crisi (o rivoluzioni) che egli enumera con esempi convincenti. Sostiene che le rivoluzioni in matematica sono mutamenti che hanno conseguenze importanti nella modifica dei modi di pensare, delle metodologie e perfino nell'individuazione di problemi interessanti. Assai significativo è poi quanto afferma in [16]:

"A parer mio anche per la matematica l'idea di *rivoluzione* può essere un utile strumento per un programma di ricerca filosofico-storiografico, che può mettere in evidenza le conseguenze che una fra esse può avere sul nostro modo di pensare. In tal caso gli aspetti di continuità possono illustrare meglio lo svolgersi del programma, per esempio quando si può riscontrare, in uno sviluppo *rivoluzionario*, qualche grande idea scientifica o filosofica, o per ricercarne gli antecedenti."

In tal modo egli fonde due strumenti epistemologici, quali quello delle rivoluzioni di [4] e la metodologia dei programmi scientifici di [5].

Nell'ultimo anno di vita S. aveva delineato un progetto scientifico che lo proiettava nell'ambito dell'Ermeneutica (cfr. [21], [24] e [27]), tema che contava di approfondire.

3. Conclusione. Quanto precede può essere visto semplicemente come un'antologia di brani tratti dalle opere di S. Il mio intervento, minimo, consiste nei criteri di scelta dei passi e nei collegamenti tra essi. Mi sembra però che accanto alla lettura diretta, le varie citazioni si prestin ad una "meta-lettura", grazie alle parole che ho sottolineato e che spesso si incontrano sui suoi testi. Rileggendole si ha una sorta di ritratto di S., delle sue opinioni profonde, dei suoi ricordi, delle sue convinzioni più radicate. Emergono così la "umiltà" con cui presenta sempre in tono sommesso le sue proposte più innovative, senza albagia, e la sua tensione cognitiva, molla che lo spinge a mettersi continuamente in gioco. Al contempo dai suoi lavori si può apprezzare la profonda cultura, mai esibita per farne sfoggio, ma interpretata come ambito che fornisce il quadro composito e ricco in cui sono maturate le sue posizioni.

Bibliografia.

[1] Ernest P.: 1992, "Are thererevolutions in Mathematics?" Philosophy of Mathematics Education Newsletter nn.4 - 5.

[2] Gillies D. (Ed.): 1992, Revolutions in Mathematics, Clarendon Press, Oxford.

[3] Grugnetti L., Speranza F.: 1999, "General reflections on the problem of history and didactic of mathematics: Some answers to the Discussion Document for the ICMI Study onthe role of the history of mathematics", Philosophy of Mathematics Education Journal, 11, 1999.

[4] Kuhn, T.: 1962, the structure of scientific revolution, Chicago University Press,Chicago.

[5] Lakatos I.: 1970, "Falsification and the methodology of of scientific research programmes", in Lakatos,I. Philosophical Papers, vol. 1, Cambridge U.P., 1978,8 - 111.

[6] Malara N.A.: 2000, "Francesco Speranza as a mathematics educator: value and cultural choices", su Malara N.A., Ferrari P.L., Bazzini L., Chiappini G. (Eds.) Recents Italian research in mathematics education - On the occasion of ICME9, Tokyo, August 2000, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica - Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e di Reggio Emilia, 66 - 82.

[7] Marchini C.: 2000, "The Philosophy oh Mathematics according to Francesco Speranza", su Malara N.A., Ferrari, P.L., Bazzini L., Chiappini G. (Eds.) Recents Italian research in mathematics education - On the occasion of ICME 9, Tokyo, August 2000, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica - Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e di Reggio Emilia, 83 - 93.

[8] Speranza F.: 1987, "A che cosa serve la filosofia della Matematica?", La Matematica e la sua didattica, 1987, a. 1, n. 1, 14 - 24, ripubblicato in [23], 1 -14.

[9] Speranza F.: 1988, "Salviamo la Geometria.", La Matematica e la sua didattica, 1988, 2, n. 2, 6 - 13, ripubblicato in [23], 15 - 24.

[10] Speranza F.: 1989, "La razionalizzazione della geometria." Periodico di Matematica, VI, 65, 29 - 46, ripubblicato in [23], 25 - 36.

[11] Speranza F.: 1990, "Controindicazioni al riduzionismo", La Matematica e la sua didattica, 1990, 4, f. 3, 12 - 17, ripubblicato in [23], 37 - 44.

[12] Speranza F.: 1990, "Il significato filosofico della Matematica e il suo insegnamento." Atti del convegno, Il pensiero matematico nella cultura e nella società italiana negli anni '90, Quaderni Pristem, n. 1, Documenti, 59 - 66, ripubblicato in [23], 45 - 50.

[13] Speranza F.: 1992, "Tendenze empiriste nella Matematica.", su Speranza, F. and Ferrari M. (eds.), Epistemologia della Matematica, Seminari 1989 - 1991, prog. TID- FAIM (n. 10), 77 - 88, ripubblicato in [23], 57 - 64.

[14] Speranza F.: 1992, "Il ruolo della storia nella comprensione dello sviluppo della scienza.", Cultura e scuola, v. 31, n. 123, 201 - 208, ripubblicato in [23], 79 - 86.

[15] Speranza F.: 1993, "Contributi alla costruzione d'una filosofia non assolutista della Matematica." Epistemologia, Vol. 16, 255 - 280, ripubblicato in [23], 87 - 102.

[16] Speranza F.: 1994, "Rivoluzioni in matematica: il caso cartesiano e il caso bourbakista." Atti del Convegno SILFS, Lucca, 1993, ETS, Pisa, 128 - 144, ripubblicato in [23],151 - 162.

[17] Speranza F.: 1994, "The influence of some mathematical revolution over didactical and philosophical paradigms." on Steiner H.G., BazziniL. (Eds): Proc. of the 2nd Italo-German Symposium on Didacticsof Mathematics, Osnabruck (1992), IDM der Universität Bielefeld, Materielle und Studien Band 39, 163 - 174.

[18] Speranza F.: 1994, "The Idea of Revolution as an Instrument for the Study of the Development of Mathematics and for its application to Education." on Ernest P. (Ed.): Constructing Mathematical Knowlegde: Epistemology and Mathematics Education, The Falmer Press, London, 241 - 247.

[19] Speranza F.: 1995, "Per il dibattito sulla storia.", Lettera Pristem, n. 18, 8 - 9, ripubblicato in [23], 179 - 180.

[20] Speranza F.: 1995, "The Significance of History and of Non-Absolutist Philosophies of Mathematics in Mathematics Education.", "Perspectives", The Media and Resources Center, Univ. of Exeter, School of Education, n. 53, 42 - 51.

[21] Speranza, F.: 1996, "Epistemologia, Storia, Didattica: un circolo virtuoso." manoscritto.

[22] Speranza F.: 1997, "Il significato della storia e delle filosofie non assolutiste nella didattica della Matematica.", Versione italiana estesa di [20], ripubblicata in [23], 171 - 178.

[23] Speranza F.: 1997, Scritti di Epistemologia della Matematica, Pitagora, Bologna. MR 99m:0008 (Otavio Bueno).

[24] Speranza F.: 1998, "Rivisitando Gaston Bachelard: la teoria degli ostacoli epistemologici e la filosofia della matematica", in Abrusci, V.M. & Cellucci, C. & Cordeschi, R. & Fano, V. (Eds.) Prospettive della Logica e della Filosofia della Scienza, Atti del Convegno Triennale della Società Italiana di Logica e Filosofia delle Scienze (Roma, 3-5 gennaio 1996), Edizioni ETS, Pisa, 1998, pp. 453-468.

[25] Speranza F.: 1998, "Strutturalismo o strutturalismi" manoscrittonon pubblicato, versione estesa.

[26] Speranza, F.: 1998 (marzo), "Attenti al neopositivismo logico!", manoscritto.

[27] Speranza, F.: 1998 (settembre), "Scienza ed Ermeneutica. Un caso esemplare: il Commento di Proclo al primo libro degli elementi di Euclide.", manoscritto.

[28] Speranza, F. and Medici, D. and Quattrocchi, P.: 1986,Insegnare la Matematica nella scuola elementare, Zanichelli, Bologna.

[29] Speranza F., Rossi Dell'Acqua A.: 1973, "Matematica" (vol. 4) Zanichelli, Bologna.

[30] Speranza F., Rossi Dell'Acqua A.: 1988, Il linguaggio della Matematica (2ª ed.) Zanichelli, Bologna.

GRUPPI DI LAVORO E LABORATORI

Limite e continuità: due facce della stessa medaglia. Proposte didattiche (dalle elementari alle superiori) per il superamento di alcune difficoltà di apprendimento

Silvia Dallanoce, Rossana Falcade,
Lucia Grugnetti, Fiorenza Molinari, Angela Rizza*

A Francesco Speranza con riconoscenza

La risposta dell'insegnamento tradizionale alla complessità degli argomenti connessi al concetto di limite e in generale dell'analisi appare insoddisfacente. L'introduzione del concetto di limite è quasi sempre confinata agli ultimi anni di scuola secondaria superiore. Sembra che a scuola si faccia di tutto per tenere sommerso il problema fino al momento di darne una interpretazione formale senza farlo precedere da una attività di familiarizzazione precoce a livello intuitivo. Crediamo invece che la matematica elementare sia piena di occasioni idonee per accostarsi gradualmente alle idee di infinito, infinitesimo, continuità.

Occorre quindi una collaborazione fra insegnanti dei vari livelli scolari ed è in questo senso che la nostra ricerca così come l'atelier in oggetto hanno coinvolto docenti dalla scuola elementare alla scuola secondaria superiore.'

L'atelier si è sviluppato intorno alla discussione sulla ricerca i cui obiettivi, erano, da un lato di riuscire a portare ad un livello esplicito le intuizioni primarie, e dall'altro di elaborare strategie per rinforzare tali intuizioni e costruirne di nuove che è possibile indicare come intuizioni secondarie [Fischbein, 1973].

Un aspetto centrale della ricerca è stato quello relativo alla formulazione di problemi e quesiti che fossero tutti proponibili ad allievi di età compresa tra i 10 e i 19 anni (nel caso di un quesito dai 6 ai 19 anni) al fine di verificare la presenza di tali intuizioni e la loro eventuale evoluzione all'evolvere dell'età. Sono stati coinvolti circa 300 allievi.

Precisiamo che il termine problema è stato inteso nel suo significato più ampio di situazione problematica e non ridotto all'applicazione di formule o tecniche particolari.

Tema comune ai vari problemi è stato quello della misura (lunghezze, aree, volumi), inteso nel suo significato più generale e non solo in riferimento a poligoni o poliedri particolari.

*Unità locale di ricerca didattica, Dipartimento di Matematica, Università di Parma

Esso infatti:

(1) offre la possibilità di passare gradualmente da tecniche operative a costruzioni teoriche via via più avanzate
(2) restituisce alla tematica dell'approssimazione la sua necessaria dignità e permette di cogliere appieno la nozione di numero reale
(3) favorisce il collegamento fra ambiti diversi sfruttando l'intuizione primaria della continuità
(4) permette di ripercorrere l'effettivo sviluppo storico del calcolo infinitesimale.

L'atelier è stato interattivo e i partecipanti hanno avuto modo di analizzare sia il materiale prodotto dal nostro gruppo, sia alcuni elaborati di allievi.

È stato così possibile constatare da un lato la presenza negli allievi di errate convinzioni, "teoremi impliciti", che si rafforzano al crescere dell'età[1] e dall'altro, sopratutto negli allievi più giovani, la capacità di mettere in atto strategie originali ed efficaci.

I numerosi partecipanti all'atelier hanno confermato la comune esigenza di rafforzare l'immaginario degli studenti e guidare le loro intuizioni in vista di un più proficuo e motivato studio dell'analisi.

Bibliografia essenziale

- Alberti N., Andriani M.F. & all.: 2000, "Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite", Riv. Mat. Univ. Parma (6) 3.
- Andriani M.F., Dallanoce S. & all.: 1999, "Autour du concept de limite", in F. Jaquet (ed.) Proceeding of CIEAEM 50, Neuchâtel 2-7 August 1998, 329-335.
- Centre de Recerche sur l'Enseignement des Mathématiques: 1995, "Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans", CREM, (La matematica dalla scuola materna alla maturità, versione italiana a cura di L. Grugnetti e V. Villani con traduzione e adattamento di S. Gregori, 1999).
- Dallanoce S., Grugnetti L. & all.: (in corso di pubblicazione) "A cognitive co-operation across different sectors of education", in Proceeding of CIEAEM 51, Chichester 21-26 July 1999.
- Fischbein E.: 1973 "Intuition, structure and heuristic methods in teaching

[1] Per i dettagli della ricerca si veda Alberti e all. (in bibliografia

Mathematics" in A.G.Howson (ed.) in "Developments in Mathematical Education", Cambridge University Press (Intuizione e struttura dei metodi euristici in matematica, in C. Sitia (ed.), Quaderno n.10, UMI, 1979).
- Grugnetti L., Rizza A. & all.: 1999, "Le concept de limite: quel rapport avec la langue naturelle?", in F. Jaquet (ed.) Proceeding of CIEAEM 50, Neuchâtel 2-7 August 1998, 313-318.
- Marchini C.: 1999, "Il problema dell'area", L'educazione Matematica, anno XX-Serie VI-Vol.1, 27-48.

Dimostrazione o verifica?

Daniela Medici, Maria Gabriella Rinaldi*

Osservando i comportamenti matematici di giovani allievi (8-13 anni) impegnati nei problemi proposti dalla gara matematica denominata Rally Matematico Transalpino, e soprattutto dalla analisi degli elaborati e delle valutazioni dei correttori ci è parso interessante occuparci di tale argomento.

Caratteristiche proprie del Rally sono:

- è tutta la classe che partecipa fornendo una sola soluzione per ogni problema proposto e gli allievi, lavorando in gruppetti, spesso devono discutere tra loro, convincere i compagni, argomentare per difendere le proprie posizioni, imparare ad ascoltare e a valutare il ragionamento degli altri;
- i problemi si propongono di mettere gli allievi in situazioni insolite, che possibilmente stimolino la curiosità e lo spirito di ricerca;
- è sempre richiesta una spiegazione esauriente di come si è arrivati al risultato;
- la valutazione tiene conto della presenza o meno di argomentazioni e della qualità del ragionamento esposto.

È proprio valutando le spiegazioni, più spesso argomentazioni, a volte vere e proprie dimostrazioni, che si è potuto notare una certa confusione tra dimostrare e verificare. Il Rally è un lavoro di équipe anche dal punto di vista della organizzazione, della preparazione dei problemi e della correzione e abbiamo potuto rilevare che, a volte, anche i correttori valutano come giustificazione ciò che invece è propriamente una verifica. Spesso è difficile, per gli allievi di tale età, esporre attraverso un ragionamento logicamente corretto il procedimento seguito e perciò tendono ad argomentare verificando che la soluzione soddisfi alle richieste del problema (ricordiamo che tutti i problemi presentati sono autovalidanti). È quindi opportuno mettere a fuoco la distinzione fra verifica del risultato e giustificazione del ragionamento seguito, non solo con gli studenti, ma anche con gli insegnanti.

Nel lavoro di gruppo interattivo che abbiamo proposto per la scuola dell'obbligo abbiamo dapprima analizzato alcuni protocolli di allievi dagli 8 ai 13/14 anni relativi ai problemi "Il rapimento di Jasmine", "La sfida" dell'edizione 2000 e al problema "Calcolatrice al contrario".

---

*Unità locale di ricerca didattica, Dipartimento di Matematica, Università di Parma

Abbiamo riconosciuto insieme agli insegnanti partecipanti, elaborati in cui la verifica è utilizzata dagli allievi in quanto tale ed elaborati in cui viene utilizzata come spiegazione del ragionamento seguito: in tali casi vuole quindi essere soprattutto un'argomentazione convincente. C'è inoltre da rilevare che generalmente, come abbiamo potuto riscontrare in molti protocolli, gli studenti non verificano i risultati, anche quando è richiesta esplicitamente una verifica.

Successivamente i partecipanti stessi hanno analizzato, sulla base degli argomenti precedenti, i protocolli relativi ai problemi "La famiglia", "Il mercante di seta" e "Il recinto della pecora".

Il confronto delle spiegazioni date dagli allievi ha assunto particolare interesse tenendo conto soprattutto delle varie fasce d'età.

A titolo d'esempio riportiamo il testo di un problema di cui sono stati analizzati i protocolli.

12. IL RAPIMENTO DI JASMINE (Cat. 6, 7, 8)

Il terribile Jafar ha rapito la principessa Jasmine e la tiene prigioniera in una delle tre celle del suo palazzo.

Aladin, accorso per liberare Jasmine, si trova di fronte alle porte delle tre celle, recanti ciascuna una indicazione delle quali sola una è vera.

Aladin sa di poter aprire una sola cella prima che arrivino le guardie

Quale porta dovrà aprire Aladin per trovare Jasmine? Spiegate il vostro ragionamento.

Bibliografia

- Rinaldi M.G., Vighi P.: *"Rally matematico internazionale: l'esperienza italiana"*, Cento anni di Matematica, Atti Convegno Cen-

tenario Mathesis, Roma, 20-23 ottobre 1995, 1996, 426-432.
- Grugnetti L., Medici D.: *"Rally Matematico Internazionale per la scuola elementare"*, Cento anni di Matematica, Atti Convegno Centenario Mathesis, Roma, 20-23 ottobre 1995, 1996, 404-407.
- Grugnetti L.,Iaderosa R.,Reggiani M. (a cura di): *'Argomentare e dimostrare nella scuola media"*, Atti del XV Convegno nazionale N.R.D.per la Scuola Media, Salice Terme, 1996.
- Marchini C.: *"Argomentazione e dimostrazione"*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 1987, vol.10, n.2, 121-140.
- Rinaldi M.G.: *"Un problema e la sua analisi didattica. Il cubo"*, L'Educazione Matematica, 3, 1997, 163-165.
- Medici D., Rinaldi M.G., Vighi P.: *"Problemi non standard di geometria"* in Gregori, Grugnetti (a cura di), Dallo spazio del bambino agli spazi della geometria, Atti del II internuclei Scuola dell'obbligo, Parma 1997, 33-38.
- Grugnetti L.,Jaquet F.,Rinaldi M.G.: "Sesto Rally, matematico transalpino e relativi aspetti didattici", Quaderno del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, N.181, 19.9.1998.
- Grugnetti L.,Jaquet F. (a cura di): *"Il Rally Matematico transalpino. Quali apporti per la didattica?"*, Atti delle giornate di studio di Brigue 1997-1998, Dipartimento di Matematica di Parma, Institut de Recherche et de Documentation Pedagogique di Neuchatel, 1999.

Logica a scuola: un percorso formativo e interdisciplinare

Lucia Anna D'Ambrosio, Carmen De Micco*

In primo luogo è stata brevemente esaminata la situazione dell'insegnamento della logica nell'attuale scuola media, ponendo l'accento sul dato di fatto che essa viene percepita da molti insegnanti come un argomento opzionale, senza il quale, tranquillamente, può essere svolto l'intero percorso scolastico di matematica.

Inoltre a scuola la matematica e lo sviluppo esplicito delle competenze linguistiche sono quasi sempre affrontate in modo separato.

In questo modo, nella migliore delle ipotesi, non si capisce come la logica interagisca con altre cruciali questioni dell'insegnamento della matematica, quali la formalizzazione del linguaggio e la costruzione del pensiero logico.

È bene infatti tener presente che la matematica è anche linguaggio; che il linguaggio matematico deve essere acquisito in modo graduale, e che la logica ha in quest'acquisizione un ruolo importante; essa può e deve pertanto configurarsi soprattutto come riflessione sul linguaggio, sul rapporto fra linguaggio naturale e linguaggio formale, sugli aspetti semantici e sintattici di un testo e come stimolo allo sviluppo delle capacità di argomentare e dimostrare, e di conseguenza non può esaurirsi in una fase circoscritta dell' attività didattica.

L'insegnamento della logica può essere individuato dunque come uno dei nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 e come nodo concettuale e formativo di importanza centrale in una scuola che voglia superare l'attuale organizzazione rigidamente disciplinare a favore di una organizzazione per temi, alla cui elaborazione possano concorrere i vari settori culturali, consentendo la collaborazione tra docenti provvisti di competenze diverse.

A partire delle riflessioni precedenti, si è passati poi ad illustrare il percorso didattico elaborato dal Nucleo, pensato per allievi della fascia di età compresa tra gli 11 ed i 13 anni. L'attività proposta si configura come un primo intervento da svolgersi preferibilmente nella prima classe dell'attuale scuola media e va intesa come uno stimolo sulla base del quale operare in tutto il corso di studi.

Il lavoro comprende un questionario iniziale (con funzione diagnostica), un

*Il gruppo di lavoro è stato coordinato da alcuni docenti facenti parte del Nucleo di Ricerca Didattica dell'Università degli Studi "Federico II" di Napoli, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, sezione Scuola Media: Aldo Casolaro, Lucia Anna D'Ambrosio, Giulio De Cunto, Giuseppe Del Vecchio, Carmen De Micco.

pacchetto di schede operative e un questionario finale (con funzione valutativa). Le schede sono utilizzabili in ordine progressivo, anche se ogni scheda è costruita come un'unità autonoma di lavoro.

In questo percorso, già sperimentato in una precedente versione, ci si limita a sviluppare attività relative al concetto di proposizione e ai connettivi "e", "o", "non", mentre altri argomenti di logica sono rinviati ad una fase successiva.

Le questioni più rivelanti e delicate che vengono affrontate sono le seguenti:

- il concetto di proposizione logica, intesa come frase della quale abbia senso dire se è vera o falsa, in riferimento ad un dato contesto;
- la definizione di proposizione composta, poiché, se per i nostri studenti appare naturalissimo esprimersi mediante proposizioni composte, molto meno naturale risulta accettare che una proposizione composta possa essere vista come un'unica proposizione;
- il divario tra i connettivi della logica e le corrispondenti particelle del linguaggio naturale, poiché la riduzione dal linguaggio naturale a quello artificiale, se consente di ottenere un significativo guadagno nella precisione, comporta però una fortissima perdita nelle sfumature di significato.
- il rapporto tra negazione e falsità, onde evitare che, negli studenti, si crei l'equivoco che una frase che contenga il "non" sia automaticamente falsa;
- il rapporto tra negazione e contrario, in cui viene sottolineato come il concetto di negazione e quello di contrario coincidono solo in alcuni casi;

Per quanto riguarda le scelte metodologiche poste alla base della proposta, esse possono essere enucleate in quattro punti fondamentali:

- l'utilizzo di un contesto artificiale, cioè di un racconto, che permette di rendere subito chiare e condivise da tutti le regole stabilite; ciò consente un controllo più efficace del significato dei termini linguistici in gioco, e aiuta a capire che il valore di verità di una frase è sempre relativo al contesto al quale viene riferita;
- il rispetto delle conoscenze preesistenti degli allievi: l'attività non si contrappone al patrimonio culturale in possesso dell'alunno, ma piuttosto stimola lo stesso ad affinare da solo le proprie capacità ed ampliare le proprie competenze linguistiche ed argomentative;
- i ruoli dell'insegnante e dell'alunno: il primo è il coordinatore delle attività e il secondo è il protagonista del processo di apprendimento;
- l'importanza data alla verbalizzazione scritta, sia delle osservazioni personali di ciascun alunno, sia delle conclusioni tratte dalle discussioni collettive in classe.

I docenti che hanno partecipato al lavoro del gruppo si sono mostrati interessati soprattutto alla struttura del percorso, realizzata, come si è già detto, attraverso schede operative che consentono all'insegnante di seguire gli studenti singolarmente e di individuare, quindi, i diversi livelli di competenze cognitive raggiunte e di difficoltà incontrate.

Altro punto cruciale oggetto di confronto all'interno del gruppo di lavoro è stata la chiara scelta metodologica di non fornire mai a priori agli studenti definizioni e regole, ma di farle scaturire come risultato delle attività individuali e collettive, insomma di utilizzare senza deroghe il metodo euristico. Questa scelta nasce dalla convinzione che in questo modo si favorisce il confronto tra gli studenti, per cui ciascuno, potendo esprimersi liberamente, contribuisce alla costruzione comune delle conoscenze nonché allo sviluppo di un comportamento il più possibile critico, autonomo e creativo.

Si ritiene di fare cosa utile riportando qui una biblografia di riferimento sia sulla logica in generale sia sulle problematiche relative al suo insegnamento.

Bibliografia

E. AGAZZI - La logica simbolica - La Scuola, Brescia, 1990.

F. ARZARELLO - Matematica e linguistica, idee per un loro sviluppo nelle scuole medie - Franco Angeli, Milano, 1987.

C. BERNARDI - La logica nella scuola secondaria - L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 16 (1993), 1041-1060.

C. BERNARDI - Problemi per la logica (ovvero la logica per problemi) - L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 17 (1994), 507-521

E. MENDELSON - Introduzione alla logica matematica - Boringhieri, Torino, 1972.

G. NAVARRA - Itinerari attraverso la logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative - L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 16 (1993), 731-756.

R. SMULLYAN - Qual è il titolo di questo libro? L'enigma di Dracula ed altri indovinelli logici - Zanichelli, Bologna, 1981.

R. SMULLYAN - Donna o tigre? - Zanichelli, Bologna, 1982.

R. TORTORA - Matematica, linguaggio e gioco: un'esperienza interdisciplinare - in Cento Anni di Matematica, atti del Convegno "Mathesis Centenario 1895 - 1995" - Palombi, Roma 1996, 417- 425.

R. TORTORA - Logica e linguaggio - IV corso di formazione MPI-UMI, 1997. Matteoni, Lucca.

R. TORTORA - V. VACCARO - Logica naturale e logica matematica: d'amore e d'accordo? - in Allievo, Insegnante, Sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica (a cura di B. Jannamorelli e A. Strizzi) - Qualevita, Sulmona, 1999, 152-156.

T. VARGA - Fondamenti di logica per insegnanti - Boringhieri, Torino, 1973.

P. VIGHI - Attività logiche: come, quando, perché - in Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive (a cura di B. D'Amore), Pitagora, Bologna, 1995, 69-75.

AA.VV. - Atti degli incontri di Logica Matematica, vol. 5: La Logica Matematica nella Didattica - Roma, 1988. - Dip. Di Matematica, Università di Siena.

AA.VV. - Introduzione alla Logica - Editori Riuniti, Roma, 1976.

DALLE FRAZIONI AI RAZIONALI NELLA LORO STRUTTURA: TRACCE DI UN PERSORSO DIDATTICO INNOVATIVO

Nicolina Malara - Loredana Gherpelli*

Il laboratorio ha avuto come oggetto la discussione sui punti salienti di un percorso, in via di sperimentazione nella scuola media, sull'intreccio frazioni-decimali-razionali, nato nell'ambito di ampio progetto di rinnovamento dell'insegnamento dell'algebra (Malara 1997). Tale percorso, che vede gli allievi partecipi della costruzione e successiva sistemazione delle conoscenze in gioco, prende spunto da alcune questioni dibattute all'interno del gruppo in relazione alle possibilità offerte alla didattica dei razionali dal lavoro sperimentale svolto in ambito algebrico, nell'ottica del raccordo con il biennio della scuola superiore[1].

A questo riguardo occorre considerare le divergenze, di tipo epistemologico, tra la moderna visione strutturale -che privilegia nella scuola media l'introduzione dei vari ambiti numerici, ed in particolare quello dei razionali- e la radicata tradizione di insegnamento, che propone lo studio delle frazioni da un punto di vista esclusivamente operativo senza neppure giungere alla conquista del concetto di numero razionale come classe di frazioni equivalenti, nonostante lo spazio dato alla proporzionalità. Inoltre l'approccio alle operazioni è finalizzato alla determinazione del loro risultato per particolari coppie di frazioni e non si giunge quasi mai alla esplicitazione e concettualizzazione delle relative leggi di corrispondenza in generale, né si chiarificano a sufficienza i legami tra razionali e decimali. Nella prassi infatti questi ultimi sono introdotti nella scuola elementare come "numeri" per esprimere misure di grandezze[2] e, seppure vengono successivamente rivisti come rappresentanti dei razionali, non si affrontano con gli allievi questioni di coerenza e compatibilità rispetto alle operazioni tra i due tipi di enti.

Quanto si è presentato nel laboratorio è l'evoluzione di un precedente studio in cui si è focalizzata l'attenzione sulle frazioni mirando da un lato alla generalizzazione (frazioni algebriche) e dall'altro all'osservazione degli aspetti strutturali nei

*GREM - Università di Modena e Reggio Emilia

[1]Circa il raccordo scuola elementare-media, citiamo il vasto lavoro di C. Bonotto e collaboratori (si veda, ad esempio, Bonotto 1995), per indicazioni su altri studi, anche a livello internazionale, si veda la bibliografia di Malara 1999.

[2]Un interessante e ampio saggio sulle problematiche della didattica dei decimali è di G. Brousseau (1981).

razionali (Malara, 1999). L'ipotesi di fondo è che in una didattica in cui si attui:

i) un avvio precoce al linguaggio algebrico;
ii) un confronto tra le proprietà delle operazioni di addizione e moltiplicazione nell'ambito dei naturali, anche in riferimento alle relazioni di maggioranza e divisibilità;
iii) una riflessione sulle conoscenze, in genere frammentarie e impecise, sui decimali e sul perché si dicano "numeri";

consenta - già a livello di scuola media- di affrontare questioni sulle frazioni da un punto di vista generale, in modo da raggiungere una maggiore flessibilità, incisività e trasparenza nei modelli concettuali degli allievi in riferimento all'oggetto numero razionale, all'ordinamento ed alle operazioni tra razionali in termini generali. La finalità è quella di creare una base concettuale per gli studi successivi e di dare un inquadramento strutturale a conoscenze di tipo numerico acquisite nella scuola elementare.

Il laboratorio ha riguardato essenzialmente l'illustrazione delle attività e dinamiche di classe nello sviluppo dei seguenti argomenti:

i) l'equivalenza di frazioni e la costruzione del numero razionale come classe di frazioni equivalenti;
ii) le definizioni generali di addizione e moltiplicazione di razionali, chiarendone le ragioni che ne stanno alla base (con la considerazione delle questioni di indipendenza dalle frazioni rappresentanti e di conservazione e coerenza con quanto gà noto per naturali e decimali);
iii) dell' esistenza per ogni razionale non nullo di opposto e reciproco e della loro analogia;
vi) del confronto di razionali in termini generali e della relativa struttura d'ordine, con particolare riferimento alla densità.

Per questioni di spazio non possiamo soffermarci in dettaglio sulle attività esemplificative sottoposte al vaglio e alla discussione dei partecipanti. Ci limitiamo a dire che hanno suscitato un notevole interesse, soprattutto in relazione agli atteggiamenti argomentazioni e produzioni degli allievi. Particolare attenzione ha suscitato un episodio circa la discussione di classe riguardante la definizione di divisione tra razionali. Lo richiamiamo per sommi capi. L'analogia con quanto prima realizzato per la moltiplicazione, induce un allievo, di fronte al problema di giustificare come possa definirsi $\frac{18}{5} : \frac{2}{7}$, a riformulare il quesito in termini di $\frac{126}{35} : \frac{10}{35}$ e a scrivere $\frac{126}{35} : \frac{10}{35} = \frac{12,6}{1} = \frac{126}{10}$ giustificando il ricorso ai decimali con il fatto che "si sta cercando una strada ma poi si torna ai naturali". Successive verifiche di altri allievi consolidano la legge indicata. Questo episodio porta l'insegnante a considerare per la prima volta la correttezza della legge $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ e a porsi il problema di giustificare prima a sé stessa e poi alla classe la non accettabilità di essa[3]. Un secondo episodio di classe, molto apprezzato durante il laboratorio per il tipo di tematiche affrontate, ha riguardato gli esiti della discussione sui quesiti:

(1) *Si può stabilire quanti e quali sono i numeri compresi:*
   a) fra due naturali,
   b) fra due razionali?;
(2) *Si può parlare, come per i naturali, di successivo di un numero razionale?*

finalizzati ad un confronto tra le relazioni di minoranza nei naturali e razionali ed alla distinzione tra ordinamento discreto e denso.

A conclusione del laboratorio gli insegnanti hanno espresso il loro disagio circa la povertà dei libri di testo su questi temi ed il loro apprezzamento circa la valenza culturale e didattica del lavoro realizzato anche in riferimento alla sua possibile riproducibilità.

Riferimenti Bibliografici

Bonotto, C.: 1995, Sull'integrazione delle strutture numeriche, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* 18A, n. 4, 311-338

Brousseau, G.: 1981, Problemes de didactique des decimaux,*Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2, n.3, 37-127

Malara, N.A.: 1997, Problemi nel passaggio Aritmetica-Algebra, in *La Matematica e la sua Didattica*, vol. 2, 176-186

Malara N.A.: 1999, Frazioni, frazioni algebriche e razionali: potenzialità e difficoltà di realizzazione di un percorso innovativo di intreccio tra aritmetica ed algebra, *Atti Internuclei Scuola dell'obbligo*, Vico Equense- NA, aprile, 1999

[3]Un interessante episodio circa le concezioni di insegnanti al riguardo è riportato in Tirosh 1997.

Malara, N.A.:2000, Il problema didattico dell'approccio ai razionali nella loro struttura,*Atti Conv. Naz. Castel San Pietro (BO)*, nov. 2000

Tirosh D.: 1997, Is it possible to enhance prospective teachers'knowledge of children conceptions? The case of division of fractions, proc. *First Mediterranean Conference in Mathematics*, 61-70.

La dimostrazione in geometria tra scuola media e biennio

Angela Pesci, Maria Reggiani*

Il processo dimostrativo in ambito geometrico può essere ritenuto un ambiente privilegiato al fine di raggiungere importanti obiettivi comuni alla scuola media inferiore e superiore, quali ad esempio lo sviluppo delle capacità di analisi e sintesi, l'organizzazione di un ragionamento in matematica e la maturazione di competenze linguistiche nella verbalizzazione di procedimenti e nella formulazione di concetti.

A partire da questa premessa si sono analizzate e discusse alcune attività didattiche svolte nella scuola media e e nel biennio superiore.

In riferimento alla scuola media si è presentata una esperienza condotta in seconda media con la mediazione di Cabri-Géomètre, un software didattico su cui esiste oggi un'ampia letteratura e con il quale si possono realizzare figure analoghe a quelle classiche ottenute con riga e compasso, cioè con il tracciamento di punti, rette, circonferenze, intersezioni fra rette, fra retta e circonferenza, fra circonferenze e combinazioni di tali operazioni.

I possibili movimenti, attraverso la cosiddetta "funzione di trascinamento", consentiti ad una figura costruita con Cabri danno luogo ad una classe di figure che sono percettivamente diverse ma tutte accomunate dai vincoli imposti dalla costruzione effettuata.

Una interessante possibilità offerta dall'utilizzo di Cabri-Géomètre riguarda la discussione sulle proprietà scelte per costruire (e quindi definire) figure: qualora si siano effettuate costruzioni non adeguate, ciò sarà messo in evidenza dal fatto che sul video, muovendo i vari elementi possibili, compaiono figure diverse da quelle che si vogliono costruire e in questo caso i controesempi ottenuti mettono in evidenza l'inadeguatezza o comunque l'insufficienza dei vincoli imposti. Quando invece si riesce a costruire una figura in modo che rimanga tale anche in seguito ai movimenti consentiti, significa che nella costruzione effettuata ci sono condizioni sufficienti per avere quella figura ed è quindi possibile esaminare in dettaglio i vincoli imposti per arrivare a formulare una definizione della figura stessa. Il confronto tra definizioni diverse di una stessa figura e la riflessione sulla possibilità di ottenere, a partire dalle proprietà geometriche citate esplicitamente nella definizione di una figura, le altre proprietà che della stessa figura già sono note, apre in modo naturale il

*Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

discorso sulla deduzione in geometria, coinvolgendo i ragazzi nella comprensione del processo dimostrativo in un modo particolarmente significativo.

A partire da queste premesse in questo gruppo di lavoro si è illustrata una esperienza didattica centrata sull'uso di Cabri, realizzata nello spirito appena descritto, svolta in una seconda classe di scuola media sulla costruzione del rettangolo.

Si sono esaminati alcuni protocolli dei ragazzi relativi alla costruzione richiesta, mettendo in rilievo le differenti tipologie di costruzioni eseguite e quindi i diversi insiemi di proprietà geometriche utilizzate: alcuni ragazzi hanno fatto riferimento a due relazioni di perpendicolarità e a una di parallelismo, altri hanno utilizzato due relazioni di parallelismo e una di perpendicolarità, altri ancora tre relazioni di perpendicolarità. Si sono anche esaminati stralci di discussione di classe in cui era evidente lo sforzo cognitivo degli alunni nel tentativo di discutere e chiarire il significato di "proprietà necessarie e sufficienti" per il rettangolo e più in generale per una qualsiasi figura. Si sono illustrate, infine, le tre definizioni di rettangolo che scaturivano dalle proprietà geometriche utilizzate nelle costruzioni dei ragazzi e che hanno costituito il momento finale della esperienza didattica effettuata.

Per quanto riguarda il biennio si è invece discussa una esperienza didattica svolta in una seconda liceo scientifico dove, nell'ambito di un insegnamento tradizionale, gli alunni avevano già avuto esperienza della dimostrazione in geometria, in quanto erano state proposte loro dimostrazioni svolte, dal libro di testo o dall'insegnante, da interpretare e semplici proprietà da dimostrare per esercizio. A partire dalla constatazione delle difficoltà degli alunni, supportata anche dai risultati di una prova di verifica, si è deciso di proporre un lavoro di uso di schematizzazioni grafiche atte a mettere in evidenza i passi del procedimento dimostrativo e le concatenazioni logiche fra di essi. La situazione rilevata nella classe all'inizio dell'unità di lavoro mostrava che molti alunni non sembravano dare alcun significato al procedimento dimostrativo, che spesso veniva formulato senza esplicitare ipotesi e tesi, sforzandosi di ripetere modelli già visti ma omettendo passaggi essenziali, inserendo termini privi di significato in quel contesto e trascurando la coerenza fra passaggi proposti e figura. Si è pertanto ritenuto opportuno utilizzare i grafici sia come schematizzazione di dimostrazioni proposte dal libro di testo, allo scopo di favorirne la comprensione, sia come strumento di lavoro per costruire i passi di dimostrazioni prodotte dagli alunni stessi. Si è voluta in questo modo promuovere negli alunni la comprensione del procedimento dimostrativo come concatenazione di passi, collegati dal punto di vista sintattico e semantico, dalle ipotesi alla tesi. Si ritiene anche

che l'uso di schematizzazioni possa aiutare i ragazzi a distinguere l'organizzazione deduttiva di una dimostrazione dalla produzione linguistica del suo testo. L'uso delle schematizzazioni grafiche, nell'unità didattica descritta, è stato proposto in modo abbastanza rigido proprio per costringere gli alunni all'analisi del processo, all'esplicitazione delle ipotesi, della tesi e delle proprietà utilizzate. Nel laboratorio si sono esaminati alcuni protocolli, relativi ad applicazioni dei criteri di congruenza dei triangoli, mettendo in luce sia l'evoluzione generale della classe che i percorsi individuali di alcuni alunni.

Riferimenti Bibliografici

Duval R. 1991, Structure du raisonnemente deductif et apprentissage de la demonstration, Educational Studies in Mathematics, 22, 233-261

Pesci A., in stampa, La necessità e sufficienza di proprietà per definire figure: la mediazione di Cabri, *III Internuclei Scuola dell'Obbligo*, Vico Equense, 1999

Joo C., in stampa, Alcuni aspetti di una esperienza didattica con Cabri in seconda media, *III Internuclei Scuola dell'Obbligo*, Vico Equense, 1999

Vismara S., 1999 La dimostrazione in geometria. Un'esperienza didattica in seconda liceo scientifico, *Tesi di laurea in Matematica*, Università di Pavia, a.a.1998/99

EDUCAZIONE ALLA VISIONE SPAZIALE: DALL'OSSERVAZIONE DELLA REALTÀ ALLA FORMAZIONE DELL'IMMAGINE MENTALE

Domenica Formica – Angela Lo Cicero – Carmela Milone – Anna Mirabella*

La geometria è una della colonne portanti della matematica, eppure il suo insegnamento non viene tenuto nella giusta considerazione, nonostante i programmi del 1979 della scuola media e quelli del 1987 della scuola elementare diano ampio spazio a questa disciplina.

Le motivazioni che conducono a trascurare questo insegnamento vanno ricercate negli ostacoli che presenta l'approccio didattico e nel fatto che viene spesso sottovalutato il suo valore formativo. Nella pratica didattica, di solito, si inizia lo studio della Geometria partendo dall'osservazione del reale, ma molto presto, seguendo l'itinerario proposto dai libri di testo, ci si allontana dalla realtà, introducendo enti geometrici fondamentali e analizzando figure geometriche piane. Si pretende così da alunni di prima media un livello di astrazione non adeguato alla loro età. I ragazzi pertanto acquisiscono una visione piuttosto riduttiva di questa disciplina, fatta solo di definizioni imparate a memoria e di formule da applicare in contesti stereotipati. Tale visione risulta anche confusa a causa delle discrepanze di ordine temporale e metodologico che di fatto esistono nell'approccio alla geometria da parte degli insegnanti di Matematica e di Educazione Tecnica.

Da studi recenti risulta che se in età scolare non è stata acquisita una corretta visione spaziale, è più difficile che ciò si realizzi in età matura.

Queste le motivazioni, pienamente condivise dai partecipanti al gruppo di lavoro, che hanno spinto l'Unità di Ricerca di Catania a progettare e a sperimentare un percorso didattico che, proponendosi come finalità l'acquisizione di una corretta visione spaziale, prevede un continuo passaggio dallo spazio al piano e viceversa dal piano allo spazio, perché se è vero che viviamo immersi in una realtà tridimensionale, è anche vero che le immagini di questo mondo tridimensionale sono bidimensionali. "È pertanto opportuno un collegamento sistematico tra le nozioni di Geometria spaziale e quelle di Geometria piana." (V. Villani)

L'itinerario conduce dall'osservazione e dalla manipolazione degli oggetti, attraverso un graduale processo di astrazione, alla costruzione dell'aspetto concettuale dei concetti geometrici. Infatti, è proprio dalla capacità di armonizzare queste due componenti figurale e concettuale che dipende lo sviluppo corretto del pensiero geometrico (E. Fishbein).

*Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica, Dipartimento di Matematica, Università di Catania

Un importante riferimento, per la costruzione di questo itinerario, è stata l'opera che Francesco Speranza ha svolto in questo campo, unitamente ad un lavoro di ricerca di esperienze effettuate in varie realtà scolastiche nazionali ed estere.

All'interno del gruppo di lavoro è stato illustrato il percorso didattico, finora sperimentato, nelle sue varie fasi:

- la classificazione, partendo dall'osservazione, di un insieme di oggetti di varia forma: i ragazzi vengono stimolati a individuare vari criteri di classificazione (per partizione) per giungere infine a classificare attraverso il numero delle dimensioni;
- il passaggio dal tridimensionale al bidimensionale attraverso: il disegno spontaneo di oggetti, il "ricalco" su lastra di plexiglas, la proiezione su uno schermo, la fotografia al fine di osservare, nel momento del confronto, quanto la conoscenza degli oggetti possa influire su ciò che si vede. Altri momenti significativi all'interno di questa fase sono stati i confronti fra la previsione delle varie proiezioni sullo schermo di un oggetto con la loro realizzazione e fra la previsione delle sezioni di oggetti con la loro osservazione diretta;
- il passaggio dal bidimensionale al tridimensionale attraverso una serie di attività di previsione proposte sotto forma di gioco: dalla osservazione di una proiezione di un oggetto alla individuazione delle forme possibili dello stesso, dall'osservazione delle varie proiezioni di un oggetto alla individuazione della sua forma;
- la scoperta di alcune proprietà dei solidi geometrici attraverso la costruzione libera dello sviluppo delle loro superfici;
- l'esplorazione dei grandi spazi attraverso attività svolte al di fuori della scuola, nelle vie cittadine, per percepire la prospettiva centrale e accidentale;
- l'acquisizione, attraverso un approccio empirico, di tecniche di disegno quali le proiezioni ortogonali di un solido su tre piani posti ortogonalmente fra loro. In queste ultime attività è stata significativa la collaborazione degli insegnanti di Educazione tecnica e di Educazione artistica per l'uso consapevole degli strumenti nelle costruzioni con riga e compasso, ma

soprattutto per lo sviluppo del pensiero geometrico arricchito dal contributo di ambiti disciplinari diversi.

Sono stati quindi presentati i risultati, di ordine cognitivo e metacognitivo, dell'esperienza condotta su quattro prime classi di alunni di diverso livello socio-culturale:

- miglioramento della capacità di osservazione e sviluppo dello spirito critico superando il condizionamento di "vedere ciò che si sa di dover vedere";
- consapevolezza della diversa rappresentazione di un oggetto osservato da diversi punti di vista;
- elasticità nel passaggio dall'oggetto tridimensionale alla sua rappresentazione piana e viceversa;
- avvio ad un graduale processo di astrazione conducendo i ragazzi a "vedere con la mente" per giungere alla costruzione delle immagini mentali;
- acquisizione dei primi elementi del disegno prospettico;
- scoperta delle relazioni esistenti fra gli elementi di una figura geometrica;
- miglioramento della capacità di interagire nel gruppo;
- acquisizione di una maggiore fiducia in se stessi, nella consapevolezza del fatto che possono esistere diversi procedimenti risolutivi di uno stesso problema e che anche l'errore può essere utilizzato come momento di apprendimento;
- consapevolezza della necessità di servirsi di termini specifici nel passaggio graduale dalla lingua naturale a un linguaggio via via più rigoroso dal punto di vista formale;
- sviluppo delle capacità argomentative e in qualche caso di quelle deduttive.

Durante la discussione che è seguita, i partecipanti al lavoro di gruppo hanno mostrato di condividere la scelta di un itinerario di geometria che partendo dall'esperienza diretta dei ragazzi crei questi continui collegamenti fra lo spazio e il piano. È anche emerso quanto sia sentita la mancata collaborazione di insegnanti di matematica, educazione tecnica ed educazione artistica: attività in compresenza dei docenti di queste discipline possono contribuire alla formazione di una visione unitaria della geometria. Alcuni docenti hanno riportato i risultati di isolate attività simili a quelle già illustrate nell'itinerario e sperimentate nelle loro classi e si sono trovati d'accordo nel constatare, indipendentemente dal livello socio-culturale di provenienza degli alunni, la presenza di alcuni stereotipi e difficoltà quali quelli inerenti la rappresentazione grafica degli oggetti, le relazioni di parallelismo e di perpendicolarità, lo sviluppo dei solidi, il passaggio dal livello manipolativo-esperenziale al livello astratto, l'interferenza fra linguaggio naturale e linguaggio specifico, l'utilizzo di un linguaggio sempre più formale.

Al termine dei lavori è stato precisato che l'itinerario proposto nelle prime classi non è da considerarsi concluso, infatti il N.R.D. sta progettando in continuità un percorso per le classi successive.

Bibliografia

N. Lanciano, *Geometria in città*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate "Quaderno di ricerca", 1998

M.A. Mariotti, V.Villani, *Il cubo*, IRRSAE Toscana

M.A. Mariotti, *Immagini e concetti in geometria*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol.15 N.9 settembre 1992

M.A. Mariotti, *Strategie di conteggio del numero delle facce, dei vertici, degli spigoli di un poliedro*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol.16 N.7 luglio 1993

M. Massironi, *Fenomenologia della percezione visiva*, Il Mulino, 1998

F. Speranza, *La Matematica*, Zanichelli, 1984

I LINGUAGGI E LE STRUTTURE DELL'ALGEBRA: UN POTENTE STRUMENTO PER LA DESCRIZIONE DELLA REALTÀ

Concetta De Petro - Dorotea Jacona - Domenica Margarone - Alfio Petrone*

Il lavoro di gruppo ha preso avvio da alcune riflessioni sull'insegnamento dell'algebra e si è articolato in una serie di proposte didattiche di cui è stato particolarmente curato l'approccio. Il filo conduttore dei lavori presentati è stato una ricerca di esperienze didattiche più accattivanti. Al gruppo di lavoro sono stati offerti spunti su cui riflettere, per promuovere una ricerca didattica finalizzata a prevenire e a curare l'inefficacia cognitiva e la disaffezione emotiva che lo studio della matematica in generale e dell'algebra in particolare sembrano produrre negli studenti.

L'inclinazione o l'avversione, la propensione o la prevenzione, la curiosità o la passività non sono atteggiamenti e manifestazioni "naturali" o "ereditari", bensì espressioni di processi di interazione insegnamento-apprendimento vissuti in esperienze scolastiche precedenti o attuali. Escogitare strategie che possano suscitare l'interesse e la curiosità dell'allievo, permetterebbe infatti di sfruttarne il coinvolgimento per una costruzione attiva del proprio sapere.

Le idee guida che hanno caratterizzato la nostra metodologia di lavoro si possono così sintetizzare:

a) la centralità delle problematiche reali per un processo di matematizzazione fondato su fatti concreti;
b) il potenziamento delle capacità d'osservazione, premessa indispensabile per un apprendimento significativo;
c) la valorizzazione dell'errore come indicatore dell'efficacia dell'azione didattica e di non avvenuta comprensione;
d) il recupero della dimensione storica della matematica.

Il mondo intorno a noi offre continuamente una moltitudine di spunti interessanti per fare esperienze, individuare relazioni, rilevare analogie, avanzare ipotesi e verificare proprietà e quindi rappresenta il miglior laboratorio per iniziare gli allievi al metodo matematico.

Convinti di ciò si è cercato di realizzare percorsi che valorizzassero inizialmente

*Nucleo di Ricerca e Sperimentazione Didattica, Dipartimento di Matematica, Università di Catania

l'algebra come modello descrittivo della realtà, per passare poi alla successiva fase di formalizzazione e d'astrazione.

In quest'ottica, sono stati sviluppati i seguenti argomenti:

- l'approccio alle formule;
- dall'aritmetica dell'orologio alle congruenze modulo n e ai criteri di divisibilità;
- i linguaggi, le equazioni e le loro rappresentazioni grafiche;
- operazioni, relazioni e strutture;
- i paradossi e l'infinito.

Si è focalizzata inizialmente l'attenzione sul rapporto segno, simbolo e significato e sulla necessità di seguire le dinamiche di pensiero che tale rapporto produce nell'allievo. Si è rilevato inoltre che errori riguardanti più direttamente l'aspetto relazionale e sintattico finiscono per riversarsi sulle dinamiche legate al problem-solving, invadendo la dimensione semantica, come un gioco di simboli lontano dal significato.

Si è insistito sull'importanza di non minimizzare il passaggio dall'aritmetica all'algebra e di condurre gradualmente gli studenti ad appropriarsi di un'impostazione più astratta e più generalizzante nella rivisitazione dell'aritmetica.

Si è discusso poi sull'opportunità di riprendere alla scuola superiore i criteri di divisibilità, che, trattati alla media inferiore, rimangono confinati nell'ambito dell'aritmetica. Riprendere l'argomento al superiore permette di arrivare ad una loro giustificazione di tipo teorico, utilizzando le "congruenze modulo n".

Il passaggio dalla fase di conoscenza intuitiva di una regola a quella di conoscenza formale può contribuire ad una maggiore motivazione allo studio della disciplina, una volta riconosciuta la maggior potenzialità del metodo deduttivo su quello intuitivo-euristico.

L'attività didattica operativa inserita in questo contesto, ha riguardato una serie di giochi matematici che, sfruttando i criteri di divisibilità, hanno permesso di riflettere ancora sull'importanza della generalizzazione. Trovare il "trucco" sul quale è basato il gioco può anche fornire l'occasione per l'elaborazione di semplici dimostrazioni.

I docenti presenti con i loro interventi e considerazioni hanno mostrato di condividere le premesse teoriche poste ed hanno convenuto che la valorizzazione dell'errore, lo studio della difficoltà e la ricostruzione del loro processo generativo possono dar vita ad una didattica algebrica più accattivante, più ricca di senso e più stabile.

Anche inquadrare storicamente alcuni fondamentali eventi matematici può avere molteplici vantaggi. La conoscenza dell'evoluzione di alcuni concetti nel tempo e la loro contestualizzazione aiuta infatti l'apprendimento e fa capire che la matematica, come le altre scienze, è frutto del pensiero dell'uomo e del tempo in cui vive ed è pertanto viva in continua evoluzione. Evidenziare la creatività del pensiero matematico, che riesce ad inventare nuove tecniche per superare ostacoli che la matematica in uso non sa affrontare, risulta un'attività utile a far scoprire l'aspetto dinamico della nostra disciplina e a sottolinearne l'importanza come strumento indispensabile per i vari settori del sapere.

In quest'ottica è stato presento, per esempio, lo zero come una delle più grandi scoperte nella storia dei numeri, che ha visto protagonisti matematici arabi, indiani, europei e ha rappresentato una rivoluzione sia per l'innovazione nella scrittura dei numeri, sia per la notevole semplificazione che ha apportato nei calcoli. Si è mostrato che anche i paradossi, quali quelli legati alla problematica dell'infinito, possono essere affrontati in chiave didattica per avviare l'allievo a comprendere come ciò che è in contrasto con il senso comune non sempre è assurdo.

Si è osservato inoltre che le equazioni, le relazioni di equivalenza e le relazioni d'ordine possono essere utilizzate come linguaggio descrittivo della realtà, introducendo un altro aspetto significativo della matematica.

Tutte le questioni sollevate hanno trovato rispondenza nelle esperienze didattiche dei colleghi presenti, che hanno partecipato attivamente alla discussione, dando vita ad un interessante e vivace dibattito che ha portato alla condivisione delle linee metodologiche proposte, volte a motivare maggiormente gli allievi allo studio della disciplina. La motivazione degli studenti si è infatti rivelata uno dei problemi più impegnativi che ogni docente deve affrontare nella propria attività, ma è anche un presupposto necessario per avviare un processo educativo che favorisca la costruzione di una seria cultura scientifica.

Bibliografia

N. A. Malara, *Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?*, in B. D'Amore (a cura di) L'apprendimento della matematica, Pitagora (BO), 1994

M. P. Negri, *Giovanni Vailati. La storia della scienza nei percorsi didattici*, Nuova Secondaria n 8, 98-99

M. Cipolla, *Nulla e zero, Esercitazioni matematiche*, vol. X fasc.I 1937

F. Enriques, *La Matematica nella Storia e nella Cultura*, Zanichelli, (BO), 1982

F. Speranza, *La Matematica: parole, cose, numeri, figure*, vol. 3, Zanichelli, (BO), 1984

F. Arzarello, L. Bazzini, G. Chiappini, *L'algebra come strumento di pensiero*, 1994, quaderno n. 6 TID-CNR

Dalla "Verità" alla "Coerenza" la "Rivoluzione" non-Euclidea

Coordinatori: P. Vighi, I. Aschieri*

Premessa

Dopo l'introduzione, sia nei programmi P.N.I. che in quelli Brocca, del tema "Geometrie non-euclidee", sono state avviate diverse sperimentazioni sull'argomento, che, privilegiando gli aspetti storici e culturali, avevano lo scopo di far conoscere agli allievi l'evoluzione del pensiero geometrico e di renderli consapevoli della relatività di termini primitivi e assiomi. I risultati delle ricerche hanno evidenziato soprattutto un cambiamento dell'immagine della geometria negli studenti: dal significato etimologico di "scienza della terra" ed i conseguenti aspetti pratici, alla geometria come scienza astratta e teorica. In molte scuole si è scelto di affrontare l'argomento con allievi di quarta e quinta superiore, privilegiando l'approccio storico-filosofico che, partendo dalla mancanza di evidenza (probabilmente per lo stesso Euclide) del V postulato e descrivendo i diversi tentativi di dimostrarne la verità o di sostituirlo con uno più evidente, conduce nell'Ottocento alla nascita delle cosiddette geometrie non euclidee ed al loro successivo studio e sviluppo. La presentazione di alcuni modelli, in particolare di quello di Poincaré per la geometria iperbolica e di quello "sferico" per la geometria ellittica, è risultata proponibile e ben compresa dalla maggior parte degli allievi. Tuttavia in queste sperimentazioni si è spesso scelto di evitare gli approfondimenti di carattere tecnico, perché ritenuti troppo complessi e non proponibili ad allievi di quella fascia d'età; in altre parole e per fare un esempio, alla fatidica ed inevitabile domanda "Ma ... siamo sicuri che nel piano di Poincaré, in cui le rette sono o diametri passanti per il centro del cerchio assoluto o archi di circonferenza ortogonali al suo bordo, sia verificato l'assioma in base al quale "per due punti passa una ed una sola retta"?", si è preferito spesso rispondere affermativamente, ma senza darne una dimostrazione. Questa scelta è stata dettata dall'opportunità di non appensantire la trattazione con dimostrazioni, che spesso non sono comprese dagli alunni. In particolare, in riferimento all'esempio precedente, occorrerebbe presentare una dimostrazione basata sul cosiddetto "teorema della secante e della tangente", che

*Unità Locale di Ricerca Didattica - Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma.

non è tra i più conosciuti, per cui si sceglie di evitarla. Eppure è stata proprio la possibilità di validare in ambito euclideo i modelli non euclidei che ha consentito di "legalizzare" le geometrie non euclidee ed è stato a partire da questa conquista che si è iniziato a lavorare sull'assiomatizzazione della geometria, che ha poi condotto al problema della coerenza.

Il lavoro di gruppo

Si è lavorato con un gruppo di circa 40 insegnanti, quasi tutti di scuola media superiore. L'attività proposta si è sviluppata in due fasi. Nella prima si è riflettuto e discusso sull'introduzione delle geometrie non euclidee in classe: dal loro inserimento nei programmi, alle opportunità offerte da una loro presentazione agli allievi, alle modalità di presentazione in classe. È stato, in particolare, esemplificato un percorso che, a partire da alcuni disegni dell'artista olandese M.C. Escher e da un'indagine storico-epistemologica dell'argomento possa condurre gli alunni alla sua comprensione e, di conseguenza, ad avere un'immagine diversa della matematica, come disciplina in continua evoluzione ed avente stretti legami con altre aree culturali. Nella seconda fase si è passati ad esaminare il tema alla luce delle possibilità offerte dalle nuove tecnologie, con particolare riferimento ai siti Internet sulle geometrie non euclidee ed al ricorso al software Cabri-Géomètre II. Si è innanzitutto osservato che il cosiddetto "Menu iperbolico" di Cabri-géomètre può essere molto utile per fare esplorazioni nell'ambiente della geometria iperbolica, anzi esso costituisce un potente strumento d'indagine in tal senso, ma dal punto di vista didattico il suo uso è consigliabile a persone che già conoscano ed abbiano compreso tale geometria. Si è sottolineata infatti l'importanza e la delicatezza del passaggio dalla geometria euclidea a quelle non euclidee, nel momento del suo inserimento nell'attività scolastica. Si è inoltre evidenziato come il software Cabri-Géomètre II, che è stato esplicitamente progettato per l'insegnamento della geometria euclidea, consenta di affrontare per piccoli passi le dimostrazioni di cui si è parlato in precedenza, conducendo l'allievo ad intuire e scoprire alcune proprietà di geometria iperbolica, che potranno essere dimostrate rigorosamente in un secondo tempo. Inoltre tale software consente di ragionare su oggetti euclidei considerati però come non-euclidei: h-rette, h-segmenti, h-triangoli ecc. Il lavoro è proseguito facendo lavorare gli insegnanti, divisi in gruppi, direttamente su computer, con modalità di lavoro guidato. In particolare, si sono analizzate le possibilità di creare alcune macro-costruzioni preparatorie (costruzione di una retta tangente ad una circonferenza in un suo punto qualunque, costruzione di una coppia di rette tangenti ad una circonferenza e condotte da un punto estero, ...) ed altre costruzioni definitive (segmento iperbolico di estremi assegnati, triangolo iperbolico di vertici assegnati, ...).

Bibliografia

Agazzi E., Palladino D., *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Editrice La Scuola, Brescia, 1998.

Borga M., Palladino D., *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, Editrice La Scuola, Brescia, 1997.

Dedò M., *Trasformazioni geometriche*, Decibel, Zanichelli, Bologna, 1996.

Margiotta G., *Cabri come strumento di esplorazione della geometria non euclidea*, CABRIRRSAE n.10, 1995.

Pacini P., Papi Pacini E., Piochi B., *Quale geometria? Un approccio alle geometrie non euclidee nella scuola superiore*, in "La geometria: da un glorioso passato ad un brillante futuro" (C. Marchini, F. Speranza, P. Vighi a cura di), Atti III Internuclei Scuole Secondarie Superiori Parma 1992, Università degli Studi di Parma, 1994, 31-38.

Speranza F., *La geometria non euclidea: come e perché*, ivi, 39-54.

Speranza F., *Il significato culturale e l'insegnamento della geometria non euclidea*, L'Educazione Matematica, ser. V, vol.2, n°1, 1997.

R. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Boringhieri, Torino, 1991.

Il laboratoria di Geometria nella scuola media superiore: uso di CABRI II

Grassi Grazia*

La presente proposta di un laboratorio di matematica per l'insegnamento della geometria nella scuola media superiore è rivolta agli studenti delle classi dalla prima alla quinta e si inserisce in un percorso curricolare che prevede un uso regolare del laboratorio di informatica per un'ora alla settimana; il software utilizzato è Cabri II, particolarmente efficace in quanto permette di simulare con facilità costruzioni con "riga e compasso" e consente, successivamente, di deformare le figure costruite per riconoscere proprietà e invarianze. Il percorso didattico che viene presentato, se attuato per intero, comporta un notevole cambiamento nelle scelte didattiche e metodologiche del docente. Esso prevede come momenti principali lo studio della dimostrazione in geometria, lo studio delle trasformazioni geometriche elementari nel piano (isometrie e similitudine) fino a giungere alla loro utilizzazione (omologia) per la rappresentazione di solidi in assonometria cavaliera. Inoltre, è fatto continuo riferimento al concetto di luogo geometrico per la costruzione di curve piane in forma cartesiana e polare.

Obiettivi generali

- Stimolare l'interesse degli studenti per lo studio della geometria sintetica e analitica
- Creare e costruire oggetti matematici per scoprire, verificare, dimostrare proprietà

Metodologia e strumenti:

- Lavoro per piccoli gruppi in laboratorio su schede guidate con il coordinamento del docente di matematica
- Discussione collettiva finale con sistematizzazione dei risultati, anche con uso di lucidi e lavagna luminosa

Fasi

- La geometria del biennio: la dimostrazione e la verifica di proprietà geometriche (Il percorso è trasversale a tutto l'insegnamento della geometrica

*ITIS "Majorana", Via Caselle 26, 40068 San Lazzaro di Savena BO

sintetica nel biennio)

A partire da situazioni problematiche quali, ad esempio, le seguenti:

(1) *"Gli assi dei lati di un quadrilatero qualsiasi non si incontrano, in generale, in uno stesso punto. In quale caso ciò accade? Cosa accade, invece, per quanto riguarda gli assi dei lati di un triangolo?"*

(2) *"Dato un quadrilatero qualsiasi ed un punto P fuori di esso , si costruisca il simmetrico di P rispetto ad uno dei vertici del quadrilatero e, successivamente, il simmetrico del punto ottenuto rispetto al vertice successivo e così via. In quale caso il simmetrico dell'ultimo punto coincide con il punto P iniziale? Di quali proprietà gode in tal caso il quadrilatero?"*

la dinamicità delle figure di Cabri consente allo studente di comprendere il significato delle proprietà geometriche, intese non come fatti usuali, ma come situazioni con carattere di straordinarietà. Lo studente, allorché esegue un'esplorazione dinamica della figura, trascinando i componenti della figura stessa per scoprire eventuali invarianti o proprietà ed osservando prodotto e processo di costruzione, è indotto a formulare congetture (ad esempio, nel secondo esercizio proposto, il punto iniziale ed il punto finale coincidono solo se il quadrilatero è un parallelogramma). Se la costruzione eseguita è corretta, cioè supera il test del trascinamento, lo studente è indotto a passare dal livello empirico e percettivo del mondo di Cabri al livello teorico della geometria, utilizzando le proprie conoscenze teoriche non per scoprire, ma per dare una giustificazione nell'ambito della geometria euclidea alle proprietà trovate.

- La geometria nel biennio: Le trasformazioni geometriche (isometrie e similitudine)

Il menu dei comandi di Cabri II fornisce, ad esempio, la possibilità di comporre simmetrie assiali (ad assi paralleli o incidenti), di eseguire rotazioni di dato centro e loro composizioni, di eseguire omotetie di dato centro e rapporto, ecc. A partire, quindi, dalla visualizzazione di trasformazioni "in atto", lo studente è condotto a verificare la presenza di invarianti ed è facilitato nel risolvere i conflitti cognitivi tra concetti appresi ed immagini mentali spontanee. Il piano cartesiano di Cabri II consente una prima trattazione analitica delle isometrie stesse dal punto di vista della geometria analitica.

- I luoghi geometrici: le coniche (per il triennio della scuola media superiore - III classe)

Obiettivi di questa fase del percorso sono suscitare negli studenti interesse per i luoghi geometrici e, nel contempo, condurre gli allievi ad acquisirne il concetto. Il concetto di luogo geometrico, tipico esempio di concetto figurale, risulta, in genere, astratto e di difficile comprensione sia per gli studenti del biennio, che affrontano il problema prevalentemente dal punto di vista della geometria sintetica, che per gli studenti del triennio che si trovano ad affrontare lo studio dei luoghi prevalentemente dal punto di vista della geometria analitica.

Viene affrontata inizialmente la costruzione di luoghi geometrici a partire da semplici esercizi di geometria sintetica fino ad arrivare ad applicazioni del metodo dei luoghi geometrici. La costruzione di curve storiche celebri anche per il loro aspetto grafico gradevole, quali la concoide o la cissoide, è propedeutica alla costruzione della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole quali luoghi geometrici secondo le definizioni utilizzate abitualmente in geometria analitica. L'uso del comando *Tabella* consente di verificare le proprietà connesse con la definizione delle coniche come luoghi geometrici.

- La rappresentazione grafica di funzioni (per il triennio della scuola media superiore- IV classe)

L'uso delle possibilità di visualizzazione offerte dal computer consente di rafforzare le abilità connesse con la lettura e l'interpretazione dei grafici che, se coltivate negli anni al crescere dell'educazione matematica degli allievi, consentono un approccio di tipo olistico e strutturale al concetto di funzione. A partire dalle coordinate di un punto della curva, costruito con il comando Calcolatrice, sono tracciate, come luoghi geometrici, curve del tipo $y = f(x)$, curve in forma parametrica, con particolare riferimento alle coniche in forma canonica, e curve in coordinate polari. Per ciascuna di esse vengono messe in evidenza eventuali simmetrie.

- La geometria nello spazio (per il triennio della scuola media superiore - V classe)

Le trasformazioni geometriche nello spazio vengono affrontate a partire dall'omologia da ribaltamento fino a giungere ad una classificazione delle affinità nello spazio basata sul fatto che il centro o l'asse di omologia siano propri o impropri. Come casi particolari, si ritrovano le simmetrie assiali e le omotetie. Le coniche vengono presentate come trasformate della circonferenza in una particolare omologia. I solidi (cubo, tetraedro ed ottaedro; cilindro circolare retto e sfera e loro intersezioni) sono rappresentati in assonometria cavaliera.

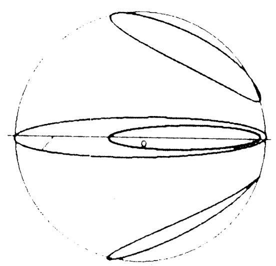


Fig.1: Curva intersezione tra una superficie cilindrica ed una superficie sferica. In figura è indicata anche la circonferenza intersezione tra la superficie cilindrica ed il piano equatoriale della sfera.

Bibliografia

AA. VV., Cabri Géomètre II - Guida per Macintosh e MS - DOS, Texas Instruments

D'Amore B.(1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora

Laboratorio: Il grafico di una funzione come interpretazione geometrica di scritture algebriche

Rosa Iaderosa*

Il laboratorio ha trattato problematiche didattiche e proposte di attività ad un livello scolare che si colloca tra scuola media (terzo anno) e biennio (primo anno). Con tali attività ci si propone di favorire una maggiore interiorizzazione nell'apprendimento del linguaggio algebrico attraverso l'interpretazione di relazioni letterali sul piano cartesiano in configurazioni di carattere geometrico. Si tratta di esaltare, attraverso la rappresentazione grafica, agli occhi degli allievi, delle caratteristiche del linguaggio algebrico che a livello simbolico appaiono poco rilevanti, sembrerebbero dettagli, (il segno di un coefficiente, il suo modulo maggiore o minore di 1, il tipo di operatore od operazione presenti nella forma funzionale), e che invece si traducono in caratteristiche geometriche ben più evidenti (linearità, pendenza di una retta, ecc.).

In questo segmento scolare, particolarmente delicato nella evoluzione del percorso formativo di avvio allo studio dell'Algebra, è infatti importante per l'allievo poter mantenere un legame con i significati, anche in attività che si spostano decisamente verso la conquista del pensiero astratto. Una mediazione didattica in questo ambito, che è sembrata efficace nelle esperienze fatte per favorire la concettualizzazione e il coordinamento tra i diversi registri di rappresentazione in gioco (simbolico, grafico, verbale, ecc.), è stata operata attraverso la visualizzazione rapida di grafici con l'aiuto del software Derive.

Nelle attività proposte ed analizzate nel corso del Laboratorio, l'allievo viene posto di fronte a forme algebriche di tipo funzionale che il computer velocemente "traduce", o meglio interpreta, in forme grafiche: tale "interpretazione", che implica ovviamente il passaggio ad un diverso sistema di descrizione verbale, di rappresentazione, di sistemazione formale (seppure inconsapevole), da parte dell'allievo, può forzare nella sua mente una conquista di significati e di rappresentazioni in ambito algebrico, nonché una riflessione su aspetti del calcolo letterale e sulle relazioni tra gli enti, di carattere decisamente metacognitivo.

Questioni didattiche legate all'attività di laboratorio proposta

L'approccio al concetto di funzione, a partire dalla scuola media inferiore, pone

*GREM Modena

il problema di operare scelte didattiche, e prima ancora culturali, riguardo al ruolo del grafico (Iaderosa, Malara, 1998). Non è infatti così immediata, nella mente dell'allievo, la concettualizzazione del grafico di una funzione matematica. Molto spesso egli impara a gestire solo sul piano operativo le trasformazioni algebriche legate alla rappresentazione della funzione in simboli, e la rappresentazione delle coppie ordinate ricavate osservando la procedura descritta dalla funzione, come particolari punti del piano. Tuttavia il problema didattico da affrontare, a questo livello scolare, è il seguente:

- quanto, nella sua comprensione, il linguaggio grafico si rispecchia come dovrebbe nel codice algebrico in cui è descritta la formula?

È infatti solo dalla effettiva coordinazione dei diversi registri rappresentativi che l'allievo raggiunge una reale concettualizzazione (Duval, 1992).

Non è trascurabile, in questo contesto, la modalità di approccio al linguaggio algebrico che viene proposta agli allievi nel corso del triennio della scuola media inferiore. Le attività relative al laboratorio sono inserite in un quadro più complessivo a riguardo, sono infatti un aspetto di un progetto nell'ambito del quale si conduce l'allievo alla conquista di una certa formalizzazione del calcolo letterale attraverso la riflessione sistematica su enti, proprietà, regole nelle quali egli già si muoveva in ambito artimetico, e attraverso il confronto sistematico sull'ampliamento dei significati, degli oggetti, e di simboli, delle relazioni nel mondo dell'Algebra.

Ovviamente, una scelta didattica di questo tipo, che prevede un insegnamento non formalizzato a priori anche sugli aspetti sintattici, impone la ricerca di strategie, modelli, metodologie che siano di supporto alla riconquista, da parte degli allievi, delle relazioni e delle proprietà dell'Aritmetica. Di qui l'importanza di fornire all'allievo anche schemi interpretativi dei simboli utilizzati in ambito algebrico, in modo da esaltare le differenze e il ruolo di certe caratteristiche legate al formalismo e al simbolismo, e anche di concretizzarle, utilizzando il mondo delle configurazioni geometriche.

I contenuti affrontati in questa chiave di lettura si possono sintetizzare nel modo seguente:

- trasformazione algebrica di funzioni lineari nelle tre forme possibili, le due esplicite e quella implicita;
- riconoscimento di alcune forme fondamentali di funzioni (da un punto di vista strutturale):

rapporto costante, somma costante, prodotto costante, e abbinamento di ciascuna di queste forme con un particolare grafico;

- analisi di ciascuna di queste classi di funzioni dal punto di vista algebrico: interpretazione in chiave geometrica di ciascun elemento della formula (per esempio il coefficiente numerico, il suo segno, ecc.).

Emergono questioni nodali relativamente alle questioni affrontate, in ambito didattico. In particolare, le più rilevanti, da mettere a fuoco ai fini della discussione, sono le seguenti:

- le attività di tipo sintattico legate alla capacità dell'allievo di rappresentare il grafico;
- l'equazione vista come situazione particolare di una situazione, più generale, di variabilità di tipo funzionale;
- il problema di dare un significato, e quindi una interpretazione, di punti notevoli per il grafico, quali i punti di intersezione con gli assi, o tra rette, ecc.
- la condizione di appartenenza di un punto al grafico;
- il riconoscimento, il più possibile consapevole, da parte dell'allievo, proprio attraverso le interpretazioni geometriche fornite, del ruolo del parametro rispetto alla variabile.

Per esigenze di spazio ci limitiamo a riportare solo una esemplificazione delle questioni analizzate durante il laboratorio attraverso schede-guida, nella speranza che possa essere significativa ai fini dell'inquadramento del percorso didattico descritto.

SCHEDA 6

Utilizzo di DERIVE per interpretare e confrontare rapidamente relazioni che rappresentano: somma - differenza- prodotto- rapporto costante (ruolo cruciale della costante e della variabile nella interpretazione grafica).

Osserva le scritture:

$x + y = 1$
$x - y = 1$
$x.y = 1$
$x/y = 1$

Dalla visualizzazione dei grafici, contrariamente a quanto si potrebbe ipotizzare considerando analoghe tra loro le forme moltiplicative rispetto a quelle additive,, i loro grafici sono tutti delle rette, tranne la terza che corrisponde ad una curva (iperbole). Nasce allora il problema: che cosa contraddistingue in ambito algebrico in maniera così particolare la forma moltiplicativa $x.y = 1$?

La risposta può apparire solo attraverso un confronto di queste relazioni nella forma esplicita:

$y = -x + 1$	$x = -y + 1$
$y = x + 1$	$x = y + 1$
$y = 1/x$	$x = 1/y$
$y = 1.x$	$x = 1.y$

Queste trasformazioni algebriche evidenziano che la terza forma è l'unica in cui una variabile non si ottiene dall'altra sommando algebricamente o moltiplicando per una costante. Ecco che in questo casa l'interpetazione geometrica esalta molto di più che la rappresentazione nel linguaggio algebrico (utilizzo di simboli letterali in entrambi i casi) il ruolo della variabile rispetto alla costante o, più in generale, al parametro.

Bibliografia

- Malara, N. A.: 1997, Problemi nel passaggio Aritmetica-Algebra Matem. e sua Didat., vol. 2, 176-186
- Malara, N., Iaderosa, R: 1999, Theory and Practice: a case of fruitful relationship for the Renewal of the Teaching and Learning of Algebra, in JAQUET F. (a cura di) ProcCIEAEM 50 -Relationship between Classroom Practice and Research in Mathematics Education, 38-54
- Iaderosa, R.: 1998 Analisi e valutazione delle difficoltà in un percorso di apprendimento nella scuola media finalizzato alla conquista del concetto di grafico di una funzione- in Atti del convegno II Internuclei Scuola dell'obbligo, Vico Equense (in corso di pubblicazione).

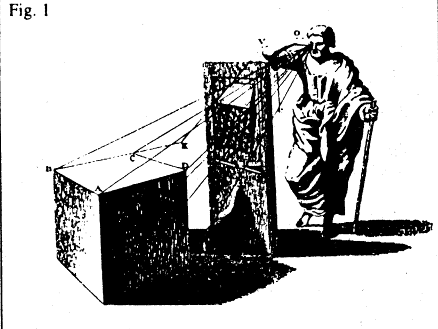
Rivisitazioni Geometriche: La Prospettiva senza "veli" ovvero Cabri, Monge e la Prospettiva*

Consolato Pellegrino**

Ricordando FRANCESCO SPERANZA
che, con il suo insegnamento, ha acceso in me lo spirito euristico che è dentro tutti.

Il principio "d'intersegazione della piramide visiva" (si veda ad es. la fig. 1 tratta da B. Taylor, *New Principles of Lynear Perspective*, 1719) e le nozioni base del metodo della doppia proiezione ortogonale di Monge (*cfr.* ad es. Chisini e Masotti Biggiogero 1955), come mostrato in Pellegrino et Alii 1999, sono sufficienti per dare un sistema di rappresentazione in prospettiva.

Fig. 1



Tale sistema è particolarmente versatile ed è quindi particolarmente utile per realizzare prospettive di figure che, grazie alla "dinamicità" di *Cabri* (software appositamente concepito per l'insegnamento della geometria: *cfr.* ad es. Pellegrino e Zagabrio 1996) danno la possibilità di passare agevolmente da prospettive d'angolo a prospettive centrali e viceversa (cfr. *fig.* 2) ed è quindi particolarmente adatto per:

– scoprire proprietà fondamentali e concetti caratteristici (quali *punto prin-*

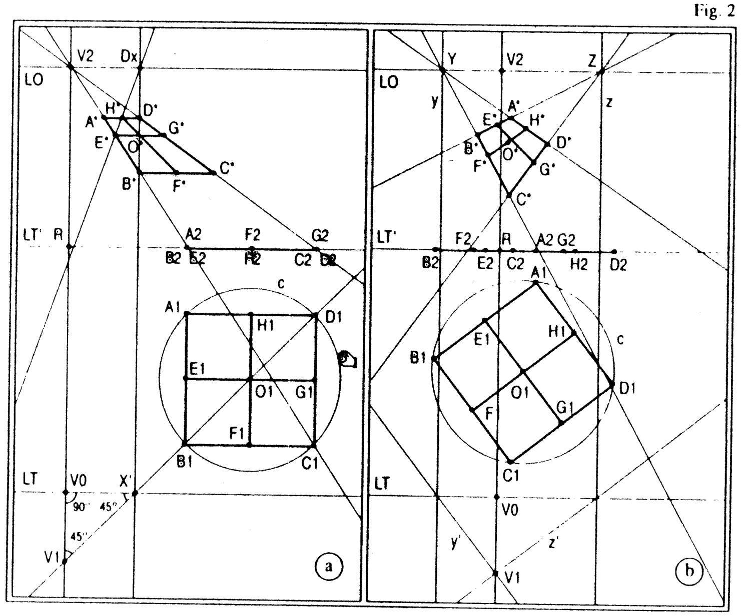
*Lavoro eseguito con il contributo economico del CNR
**Dip.Matematica - Univ., via Campi 213/B, 41100 Modena, e-mail pellegrino@unimo.it

cipale e *punto di distanza, punto di fuga* e *linea di orizzonte*) che stanno alla base della teoria e della pratica della *prospettiva* (ad esempio nella *fig.* 2a si vede che la rappresentazione prospettica di rette orizzontali perpendicolari al quadro o inclinate a 45° rispetto ad esso si incontrano rispettivamente nei punti V2,*punto principale*, e Dx, *punto di distanza*; mentre nella *fig.* 2b si vede che la rappresentazione prospettica di rette orizzontali, parallele tra loro ed inclinate rispetto al quadro, si incontrano in un punto, *punto di fuga*, che sta sulla parallela ad LT passante per V2, la *linea di orizzonte* LO);

prendere coscienza dei legami esistenti tra *fotografia* e *prospettiva*;

riconoscere errori che possono sfuggire anche a chi conosce qualche tecnica di rappresentazione in prospettiva (o sa utilizzare qualche pacchetto *CAD: Computer Aided Design*), ma non conosce i concetti e le proprietà che stanno alla base della prospettiva;

Fig. 2



accostarsi in modo "vivo" e diretto alla pratica della prospettiva illustrando due tra i più comuni sistemi di rappresentazione in prospettiva (il *metodo*

dei punti di fuga ed il *metodo dei punti di distanza*);
- comprendere l'origine dei concetti di *punto improprio* e di *retta impropria* che, insieme alle operazioni di *proiezione* e *sezione*, stanno alla base della *geometria proiettiva*;
- vedere le *sezioni coniche* come rappresentazioni prospettiche della circonferenza;
- accostarsi alla nozione di *omologia* ed alla sue proprietà attraverso i suoi legami con la rappresentazione prospettica;
- conoscere le idee base della *restituzione prospettica* che è l'operazione inversa della rappresentazione in prospettiva.

Riferimenti Bibliografici

CHISINI O. e MASOTTI BIGGIOGERO G., 1955, *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Ed. Tamburini, Milano, pp. 342

PELLEGRINO C. et ALII, 1999, *Il punto di vista della Geometria sulla Prospettiva - Per vedere al di là della siepe che da tanta parte dell'ultimo orizzonte il guardo esclude*, Pitagora Editrice, Bologna, pp. XIV+120

PELLEGRINO C. e ZAGABRIO M.G., 1996, *Invito alla Geometria con Cabri-géomètre (Spunti di lavoro per la Scuola Sec. Sup.)*, IPRASE del Trentino, Trento, pp. XV+123

UN VIDEO PER LA DIVULGAZIONE MATEMATICA•

Consolato Pellegrino* - Luciana Zuccheri**

La Conferenza generale dell'UNESCO

CONSIDERATA *l'importanza centrale della matematica e delle sue applicazioni nel mondo odierno nei riguardi della scienza, della tecnologia, delle comunicazioni, dell'economia e di numerosi altri campi;*

CONSAPEVOLE *che la matematica ha profonde radici in molte culture e che i più importanti pensatori per migliaia di anni hanno portato contributi significativi al suo sviluppo;*

CONSAPEVOLE *che il linguaggio e i valori della matematica sono universali ed in quanto tali ideali per incoraggiare e realizzare la cooperazione internazionale;*

SOTTOLINEANDO *il ruolo chiave dell'educazione matematica, in particolare al livello della scuola primaria e secondaria, sia per la comprensione dei concetti matematici di base sia per lo sviluppo del pensiero razionale;*

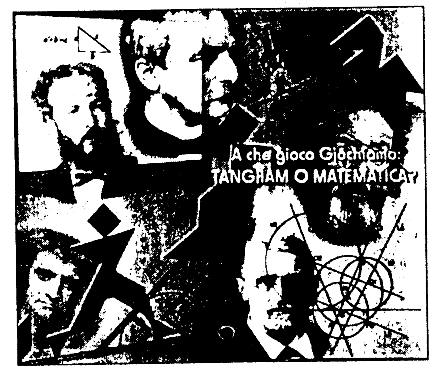
ACCOGLIE *favorevolmente l'iniziativa dell'International Mathematical Union (IMU), di dichiarare l'anno 2000 "Anno mondiale della matematica" e di organizzare nel suo contesto attività per promuovere la matematica in tutto il mondo e a tutti i livelli;*

DECIDE *di appoggiare l'iniziativa "2000: Anno mondiale della matematica".*

[Risoluzione adottata, all'unanimità, l'11 novembre 1997]

Da tempo il pensiero matematico ha raggiunto vette inimmaginabili per i non addetti ai lavori ed ha aperto strade che hanno costituito la via maestra per lo sviluppo culturale, scientifico e tecnologico della umana società. Eppure pochi se ne rendono conto: *ormai, a differenza di quanto accadeva solo qualche decennio fa, l'informatica consente a molti di ignorare anche la matematica che utilizzano.*

•Lavoro eseguito con il contributo del CNR
*Dip.Matematica - Univ.via Campi 213/B, 41100 Modena, e-mail pellegrino@unimot.it
**Dip.Sc.Matematiche - Univ., via Valerio 12, 34127 Trieste, e-mail zuccheri univ.trieste.it



E non finisce qui. Oggi l'immagine sociale della matematica, legata più all'insegnamento scolastico che ai progressi della ricerca, è sempre più negativa (*cfr.* ad es. Fiori e Pellegrino 1997): crescono e si radicano nell'immaginario collettivo pregiudizi e luoghi comuni. Le cause sono tante e non è facile contrastarle. Questa situazione è ormai così chiara ed evidente che la stessa comunità matematica internazionale, di solito poco attenta all'immagine che dà di sé e della disciplina di cui si occupa, ha cominciato a porsi il problema della divulgazione e della immagine della matematica, al punto che da qualche anno in vari paesi – quali Francia, Stati Uniti, Regno Unito ed Italia – sono stati organizzati convegni per dibattere la questione e cercare dei correttivi. Tra tutti ricordiamo l'"ICMI Study", svoltosi nel 1989 a Leeds (U.K.), i cui atti (*cfr.* Howson e Kahane 1990) costituiscono un interessante punto di riferimento su questo tema. Non è un caso quindi che l'IMU (International Mathematical Union) nella *Dichiarazione di Rio de Janeiro* (6 maggio 1992), nel proporre all'UNESCO di dichiarare il 2000 "Anno mondiale della matematica", accanto all'obiettivo di individuare le grandi sfide che si imporranno alla matematica nel XXI secolo, si è posto anche quello di promuovere una corretta immagine della matematica.

La questione non è da poco se consideriamo che anche grandi matematici quali J. Dieudonné (1987, p. 7) ritengono difficile parlare di matematica a chi non ha studi di scuola media superiore (ad indirizzo scientifico o tecnico). Consci di ciò, ci siamo sentiti in dovere di provare a dare il nostro contributo. Per questo, pur operando in sedi distanti, confidando nella disponibilità di Gianfranco Milani e Pietro Caenazzo (del Servizio *Televisivo Interdipartimentale dell'Università di Trieste*), abbiamo deciso di unire le nostre forze per realizzare un video che puntava non a spiegare i risultati della matematica di oggi (questo sì che è veramente difficile), ma a:

- esplicitare aspetti che da sempre ne caratterizzano lo sviluppo;
- minare i principali luoghi comuni sulla matematica.

Per fare in modo che il video potesse rivolgersi al grande pubblico la sceneggiatura originale, che utilizza un gioco come metafora, si basava su un dialogo tra un giovane (amante della matematica) ed un adulto (come ce ne sono tanti). La realizzazione in questa forma del video avrebbe però richiesto un tempo ed un impegno di molto superiore a quello che i suddetti tecnici potevano dedicargli. In conseguenza di ciò è stata realizzata solo una versione "non dialogica" del video che, pur non essendo adatta al grande pubblico, ha destato l'interesse di molti insegnanti, di tutti gli ordini scolari, che lo hanno voluto proporre ai loro allievi. Il video dal titolo *A che gioco giochiamo: Tangram o Matematica?* (versione inglese: *What are we playing: Tangram or Math?*), la cui "locandina" è riportata nella precedente figura, ha una durata di 30' ed è visibile con la tecnica dello streaming al sito web: http://www.univ.trieste.it/~nirtv/tanweb. Tale sito, realizzato in italiano e in inglese con la collaborazione dei tecnici del Servizio Televisivo Interdipartimentale dell'Università di Trieste, oltre a dare la possibilità di vedere le due versioni del video, contiene il testo del commento del video stesso, la bibliografia sull'argomento, alcune immagini nonché link sul tangram e sull'Anno Internazionale della Matematica.

Riferimenti Bibliografici

DIEUDONNÉ J., 1987, *Pour l'honner de l'esprit humain* (trad.ital. 1989, *L'arte dei numeri: matematica e matematici oggi*, Mondadori, Milano), pp. XIII+236

HOWSON A.G. e KAHANE J.-P. (eds), 1990, *The popularization of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. XI+210

PELLEGRINO C. e FIORI C., 1997, *Immagine della Matematica tra concezione e divulgazione*, La Matematica e la sua Didattica, n. 4, pp. 426-443

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Partecipanti

Abbà Concetta (MONTALDO DORA -TO), Accascina Giuseppe (ROMA), Affaticati Ida (VILLANOVA SULL'ARDA-PC), Agazzi Cristina (CASALROMANO-MN), Albertoni Antonella (CICOGNARA-MN), Aliquò Maria (ROMA), Amadasi Luciano (VARANO-AN), Ancona Rosa (CRISPIANO-TA), Andreini Mara (MILANO), Anichini Giuseppe (FIRENZE), Antonacci Elda (PISA), Anzola Mariateresa (VIADANA-MN), Arduini Barbara (FONTANELLATO-PR), Arezzo Domenico (GENOVA), Armanini Giulio (PONTREMOLI-MS), Armentano Paola (RENDE-CS), Aroldi Ave (VIADANA MN), Arpinati Anna Maria (BOLOGNA), Artoni Daniela (BORETTO-RE), Arzàrello Ferdinando (TORINO), Aschieri Igino (PARMA), Ascoli Bertoli Maria Teresa (ROMA), Azzali Evi (UDINE), Badini Luciana (PIACENZA), Bagni Giorgio (TREVISO), Bandioli Celestina, Barbi Giovanni (CARPI-MO), Baresi Francesca (CALVISANO-MN), Barozzi Giulio Cesare (BOLOGNA), Bartali Eddo (SIENA), Bartolini Maria (MODENA), Bassignani Paola (PONTE TARO-PR), Basso Milena (PIOMBINO DESE-PD), Batini Maria (ROMA), Bazza Patrizia (PADOVA), Bazzana Valeria (GAMBARA-BS), Bazzini Luciana (PAVIA), Bellingeri Lina, Bellini Anna (CASALMAGGIORE-CR), Beltrame Sylviane (POZZUOLO DEL FRIULI-UD), Benedetti Nella (ROMA), Benetti Paolo, Bergamaschi Francesco (FIDENZA-PR), Bergonzi Daniela (BRESSANA BOTTARONE-PV), Bernardi Claudio (ROMA), Bernardi Rita (MONTECCHIO EMILIA-RE), Bertazzoli Luisa (BRESCIA), Bertocchi Mirella (NOCETO-PR), Bertolini Luciano, Besso Milena (PIANUBINO DESE-PD), Betti Patrizia (PIACENZA), Bianchi Adriana, Bianchi Janetti Maria Pia (CERNUSCO SUL NAVIGLIO-MI), Bigliardi Giovanna, Biondini Silvio (PARMA), Bisso Claretta (GENOVA), Bizzarri Doriano (FIRENZE), Boatto Repola Adele (ANCONA), Bocchino Caterina (TORINO), Bonati Patrizia, Bonzini Giuseppe (GERENZANO-VA), Borga Marco (GENOVA), Bosio Tiziano (BRESCIA), Bottiroli Miria (GRAVELLANO-VB), Bozzini Gabriella (PIACENZA), Braga Maurizia (SALARARO), Bratina Giovanni (GORIZIA), Brigaglia Aldo (PALERMO), Brugnoli Silvia (PISA), Bulgarelli Emilia (TORINO), Campigli Annalisa (FIRENZE), Cancellotti Laura (PISA), Cannizzaro Francesca (SONDRIO), Capelli Laura (SANTA MARGHERITA-GE), Capobianco Renata (ROMA), Careddu Coridio (MODENA), Cariello Domenico (SALERNO), Casali Maurizio (BOLOGNA), Casolaro, Aldo (NAPOLI), Casolaro Ferdinando (GIUGLIANO-NA), Castagnola Ercole

(FORMIA-LT), Castello Corradina (PARMA), Castigliani Ornella (PARMA), Castriota Marco (ORISTANO), Cavalca Angela (CASALMAGGIORE-CR), Cavallari Giulia (REMEDELLO-MN), Ceriali Lidia CINISELLO (BALSAMO-MI), Chimetto Maria Angela (VICENZA), Chittolini Carla (VIADANA-MN), Christian Bruno, Ciampolillo Michele (PARMA), Ciarrapico Lucia (ROMA), Cicchese Lidia (PARMA), Cicchese Marcello (PARMA), Cichero Anna (GENOVA), Clerici Fiorella (LEGNANO-MI), Clerico Maria (ROMA), Colla Ermelinda (PALAZZOLO SULL'OGLIO-BS), Congestrì Maria, Conti Francesca (PERUGIA), Copelli Auretta, Copernici Luisa (CREMONA), Corradi Carla (SALSOMAGGIORE PR), Corradini Anna (GROSSETO), Cossu Mariarosa (PIACENZA), Cotoneschi Stefania (FIRENZE), Cristofani Luciana, Cucé Nicolina (LAVENZOVA), Cuozzo Mariella (FIRENZE), Dallanoce Silvia (PIACENZA), Damaggio Giovanna (MEZZOLOMBARDO-TN), D'Ambrosio Lucia Anna (BISCEGLIEBA), D'Amore Bruno (BOLOGNA), D'Aprile Margherita (SAN FILI-CS), Dapueto Carlo (GENOVA), De Cunto Giulio (BENEVENTO), De Maria Luisella (PIACENZA), De Micco Carmela (NAPOLI), De Petro Concetta (CATANIA), De Vita Mauro (ROMA), Del Vecchio Giuseppe (NAPOLI), Delindati Cinzia (PIACENZA), Della Seta Adriana (REGGIO EMILIA), Delledonne Lucia (FIDENZA (PR), Di Stasio Michelangelo (AMOROSI-BN), Doninelli Alessandro (VISANO-BS), Doretti Lucia (CASTELNUOVO B. -SI), Dorigotti Giancarlo (ROVERETO), Emmer Michele (ROMA), Evangelista Rosaria (PARMA), Facciotto Luigi (COGGIOLA), Faggiano Eleonora (MODUGNO-BA), Fait Maria (TRENTO), Falcade Rossana (PARMA), Farsi Maria Luisa (SIENA), Fasoli Anna Maria (VALEGGIO SUL MINCIO-VR), Favero Sabrina (PARMA), Fazio Rocco (ACQUAVIVA-SA), Feliciani Maria Silvia (SENIGALLIA-AN), Feltresi Marina (RUBANO-PD), Ferrara Giuseppe, Ferrari Giuseppe (PARMA), Ferrari Mario (PAVIA), Ferrario Ornella (LEGNANO-MI), Ferraro Giovanni, Ferrera Giuseppe (GENOVA), Ferreri Giuseppina, Ferri Franca, Ferrucci Marisa, Fiz Raffaella, Fogliani Anna (MILANO), Folloni Alda (POVIGLIO-RE), Forlizzi Marina (MILANO), Formica Domenica (CATANIA), Forni Piergiuseppe (SONDRIO), Franco Pasqualina (PARMA), Frini Franco, Fulgenzi Paola (FANO-PS), Gabellini Giorgio (CATTOLICA-RN), Gallino M. Gemma (TORINO), Galuzzi Massimo (MILANO), Gandolfi Antonio (PARMA), Garofani Rossella (MONTECCHIO EMILIA-RE), Gherpelli Loredana (MONTALE RANGONE-MO), Ghizzoni Anna (FIDENZA-PR), Giambò Antonino (MACERATA), Gilberti Mariagrazia (CREMONA), Gioffrè Mirella (BAGNARA CALABRA-RC), Giommi Elena, Giordano Bruno (ROMA), Giori Emma, Giuliani Elda (PAVIA), Gnani Giuliana (COPPARO-FE), Gorreri Loredana (PARMA), Gotelli Francesca (PARMA), Grassi Giuseppina, Grassi Grazia (S.LAZZARO DI SAVENA-BO), Greco Simonetta (GENOVA), Grignani Lauretta (CAVA MANARA-PV), Grugnetti Lucia (PARMA), Iaderosa Rosa (CESANO BOSCONE-MI), Iannece Donatella (NAPOLI), Impedovo Michele (ARCISATE-VA), Iorfida Vincenzo (LAMEZIA TERME-CZ), Jacona Dorotea (SALI BATTIERI-CT), Lanzillo Andrea (GIUGLIANO-NA), Lemut Enrica (GENOVA), Letizia Angiola (LECCE), Linati Paolo (VARESE), Linciano Antonio (TARANTO), Lo Cicero Angela (S.A. LI BATTIATI-CT), Locatello Silvano (MARTELLAGO-VE), Lolli Gabriele (TORINO), Lombardi Giuditta (ROMA), Lombardi Vanna Maria (ROMA), Lorenzi Anna (CUSANO-MI), Lorenzi Paolo (BOLZANO), Lorenzini Letizia (VILLAFRANCA-LO), Lupi Claudia (VIADANA-MN), Luppi Carla (PARMA), Macchion Carla (BOLZANO), Maffini Achille (RIVAROLO-RE), Magnanini Adriana (REGGIO EMILIA), Magro Anna Maria (PIACENZA), Malara A. Nicolina (MODENA), Maragno Dina (ROVIGO), Marastoni Patrizia (ACQUANEGRA-MN), Marchesin Fanca (ODERZOTV), Marchi Mario (MILANO), Marchini Carlo (VIADANA-MN), Margarone Domenica (CATANIA), Margotti Rita (LUGO-RA), Marino Giuseppe (RENDE-CS), Marone Silvia (MONTECONPATRI), Masciovecchio Simona (FIORENZUOLA D'ARDA-PC), Masi Franca (CATTOLICA-RN), Mazzant Luca (ASOLA-MN), Mazzanti Giuliano (COPPARO-FE), Mazzoni Claudia (PARMA), Medici Daniela (NOCETO-PR), Meloni Gianna (ZELARINO-VE), Mezzetti Giuliana, Militerno Alessandro (ASTI), Milone Carmela (CATANIA), Minazzi Fabio (VARESE), Molinari Fiorenza (PIACENZA), Monica Luigi (PARMA), Monteverdi Daniela (PARMA), Montruccoli Maria Alberta (PIACENZA), Morcone Alessandra (ROMA), Morelli Aldo (NAPOLI), Morini Marina (PARMA), Morisi Cecilia (FIDENZA-PR), Mosca Miranda (TORINO), Moscucci Manuela (SIENA), Motteran Margherita (PADOVA), Mozzi Adriano (BORETTO RE), Murciano M. Gabriella (ROMA), Mussini Daniela (MODENA), Nardi Ianna (PESARO), Noè Franca (MEDICINA-BO), Norelli Francesco (ROMA), Orelli Sara (NIBBIANO-PC) Orlandoni Aurelia (BOLOGNA), Orsi Rosanna (BRESCIA), Oss Armida (TIONE-TN), Paiella Matelda (PIACENZA), Palladino Dario (SAVONA), Panebarco Anna Maria (SALSOMAGGIORE-PR), Paola Domingo (ALASSIO-SV), Passamonti Elena, Paternoster Floriana (PESARO), Pellegrini Carla (POGGIBON-

SI-SI), Pellegrino Consolato (MODENA), Pellini Valeria (NOVELLARA-RE), Pellizari Federico (VISANO-BS), Pennisi Mario (CATANIA), Percario Zelinda (GROSSETO), Perroni Letizia (MOGLIANOMARCHE-MC), Pesci Angela (PAVIA), Petrelli Antonella (ATRI-TE), Petrone Alfio (CATANIA), Piccione Maria (FIRENZE), Piccoli Anna Maria (VIADANA-MN), Pipino Giuseppe (REGGIO CALABRIA), Piraino Michele (VIBO VALENTIA), Pirillo Giuseppe (PRATO), Pizzetti Federica, Pluchino Salvatore (CATANIA), Ponziani Bruna (CIVATECO), Prinzi Angela, Raccanelli Bianca Maria (MILANO), Raffaele Mauro (TERRACINA-LT), Ravanetti Ugo (PARMA), Reggiani Maria (VOGHERA-PV), Rinaldi Maria Gabriella (PARMA), Rizza Angela (PARMA), Rizzetto Silvestro (PORTOGRUARO-VE), Robutti Ornella (CHIERI-TO), Rognoni Daniela (PAVIA), Rosaia Bruno (LERICI-SP), Rossi Daniela (PONTEDELLOLIO-PC), Ruganti Riccardo (PISTOIA), Russo Lucio (ROMA), Sabatti Sofia, Salomone Lucia (SIENA), Sandri Simonetta (PARMA), Santarossa Renata (SORRENTO-NA), Savini Luigi (CARAVAGGIO-BG), Savoldini Giovanni (ASOLA-MN), Scalari Federica (PARMA), Scaramuzza Paolo (SORAGNA-PR), Scarnati Anna Luisa (COSENZA), Schepis Rita (PIACENZA), Schiavi Patrizia (PIACENZA), Scimmi Benedetto (TODI-PG), Scotti Maria Pia, Serafini Rita (PERUGIA), Servi Mario (PARMA), Simoni Serena (FIRENZE), Sinibaldi Fausta (ROMA), Sorresina Silvia (GROSSETO), Spilimbergo Francesca (ODERZO (TV), Spinetti Enrico (VILLAFRANCA L.-MS), Spocchi Elisabetta (PIACENZA), Staropoli Francesco (TROPEA-CZ), Superchi Romano (BORETTO-RE), Tagliabue Vanda (PAVIA), Tassi Maristella (PARMA), Tassone Vito (VIBO VALENTIA), Tedesco Nunzia (TREVIGLIO-BG), Terenghi Monica (MILANO), Tognon Fabio (CERESARA-MN), Tomasi Luigi (LAMA POLESINE-RO), Tomasini Agnese (PARMA), Torretta Gregorio (UDINE), Tortora Roberto (NAPOLI), Ulivi Susanna (FORTE DEI MARMI-LU), Vaccaro Virginia (NAPOLI), Valenti Maria Cristina (MILANO), Vellucci Katty (ASOLA-MN), Veronesi Carlo (RODIGO MN), Vetri Danila (SALSOMAGGIORE-PR), Vettori Franco (FIRENZE), Vezzani Alberto (PARMA), Vezzoli Alessandro (ERBA-CO), Vighi Paola (PARMA), Visalli Caterina (MODENA), Votto Paola, Zamboni Luisella (FIDENZA-PR), Zani Maria Luisa (PIACENZA), Zapparoli Carmelita N. (CARBONARA DI PO-MN), Zigiotti Maria Cristina (BRISIGHELLA-RA), Ziliani Chiara (CAORSO -PC), Zoccante Sergio (VICENZA), Zucchelli Francesco (PARMA).