ISSN 0393-0998

Novembre 1987
Supplemento al n. 11

Period. mensile
sped. in abb. post. gruppo III/70

Anno XIV

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UNDICESIMO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA: NUOVI PROGRAMMI: PROBLEMI DI ATTUAZIONE E FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

SALSOMAGGIORE T., 16-17-18 OTTOBRE 1986
A cura di M. A. Mariotti

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci e non è in vendita.

Fascicolo monografico stampato con un contributo finanziario del Ministero della Pubblica Istruzione (fondi 40%) e del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40138 Bologna (Italia)
Novembre 1987
Supplemento al n. 11

NOTA

Nei giorni 16, 17, 18 ottobre 1986, si è svolto a Salsomaggiore Terme l'11° Convegno sull'insegnamento della Matematica, il tema era "Nuovi Programmi: problemi di attuazione e formazione degli insegnanti".
In un momento in cui l'incidenza della matematica e delle sue applicazioni nella vita di ogni giorno va facendosi sempre più profonda, ha suscitato particolare interesse l'occasione di discutere le risposte che il mondo della scuola intende dare ai vari livelli nel quadro generale di trasformazione dei Programmi.
Il Convegno si è articolato in tre giornate (la prima dedicata alla Scuola Secondaria Superiore, la seconda alla Scuola dell'obbligo). Per ogni giornata erano previste relazioni generali ed interventi specifici sulle esperienze di sperimentazione nel campo dell'innovazione e della formazione degli insegnanti.
La partecipazione è stata numerosa da parte di insegnanti di ogni livello scolastico dimostrando l'interesse per il tema trattato e il valore dell'iniziativa che si pone come momento di incontro tra tutti coloro che operano nel campo della Didattica della Matematica.
Il problema della formazione era stato già al centro dell'attenzione in un precedente convegno, svoltosi a Frascati, presso la sede del CEDE a Villa Falconieri, nei giorni 30 settembre e 1 ottobre 1986. Il tema dell'incontro tra la CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica), rappresentanti degli IRRSAE e Ispettori Tecnici era: "Problemi e iniziative relativi all'insegnamento della matematica ai vari livelli scolastici: aggiornamento dei docenti e funzioni degli IRRSAE e del corpo degli Ispettori Tecnici".
Data la vicinanza dei temi trattati e l'interesse dei contributi ci è sembrato opportuno riprodurre in Appendice alcune delle relazioni tenute a Frascati.
Ci auguriamo che la pubblicazione di questi Atti possa contribuire alla discussione su quanto già previsto e in via di attuazione nel campo del rinnovamento, fornendo spunti e suggerimenti per affrontare alcuni dei problemi che ancora attendono una risposta.
Ci scusiamo con tutti i partecipanti per il ritardo con il quale esce questa pubblicazione: motivi tecnici indipendenti dalla nostra volontà hanno rallentato il lavoro di redazione.

Pisa, Ottobre 1987 M.A.Mariotti

GIOVEDI 16 OTTOBRE 1986

Vincenzo Vita

Ministero Pubblica Istruzione

Dopo oltre quarant'anni per le scuole secondarie superiori ad indirizzo umanistico e dopo oltre vent'anni per le scuole ad indirizzo tecnico, il Ministero della pubblica istruzione si é finalmente deciso ad avviare l'iter per la emanazione di nuovi programmi; sono state già presentate le proposte per il primo biennio e si spera che in tempi brevi possano essere formulate le proposte per il triennio successivo.

Gli ultimi programmi ministeriali risalgono infatti, per le scuole ad indirizzo umanistico, al 1944, emanati quindi in pieno periodo bellico, e, per le scuole ad indirizzo tecnico, al 1961.

Gli uni e gli altri si muovono però ancora nello spirito e nel solco di quella grandiosa riforma che volle il Cremona nel 1867 quando, sull'onda del progresso matematico nel campo delle geometrie descrittiva e proiettiva, chiese ed ottenne che nell'allora ginnasio-liceo venisse introdotto lo studio diretto degli Elementi di Euclide. Riforma che, dando in mano ai giovani un testo dove potessero "apprendere a ragionare, a dimostrare, a dedurre" (sono parole del Cremona), risollevò il tono dell'insegnamento matematico, non solo a livello secondario, ma anche nell'ambito universitario, e che produsse, in tempi relativamente brevi, quella scuola di geometria algebrica che per lunghi anni ha dato lustro e prestigio internazionale alla scuola matematica italiana.

Ma i successivi aggiustamenti di questo primo programma, miranti a ridurre l'impatto dei giovani con il testo euclideo e ad attenuare le difficoltà insite nel presentare senza la necessaria preliminare preparazione un sistema assolutamente deduttivo, ed ancor di più la prassi che gradualmente veniva consolidandosi, hanno deteriorato e vanificato le stesse indicazioni metodologiche suggerite dal Cremona. La geometria é diventata a poco a poco una sequenza di teoremi priva di una sua struttura logica e senza il corredo di valide esercitazioni, l'algebra da parte sua si é ridotta ad una raccolta di regole mnemoniche di calcolo, senza alcuna utilità formativa.

Deterioramento peraltro che si é accentuato ed aggravato nell'ultimo sessantennio, a seguito della riforma Gentile, per il clima filosofico che questa volle valorizzare e potenziare: il neo-idealismo con la sua visione riduttiva della conoscenza scientifica.

In quest'ultimo periodo infine la notevole e rapida evoluzione registrata dal pensiero matematico ha determinato una ancor più vasta e profonda divaricazione tra l'impostazione metodologica voluta dalla riforma Cremona, e dai successivi programmi che si sono mossi tutti, come ho detto, nella sua orbita, e l'impostazione che dovrebbe ispirare un moderno insegnamento matematico, divaricazione che ha reso i programmi vigenti assolutamente inadeguati a dare ai giovani di oggi quella cultura matematica che la società richiede.

Come é noto, il processo di rinnovamento dell'insegnamento matematico, anche a livello internazionale, ha avuto inizio nel 1959 quando nel Convegno internazionale di Royaumont il Dieudonné lanciò il suo famoso grido "abbasso Euclide" con il quale sintetizzava il progetto di modificare radicalmente i tradizionali contenuti dell'insegnamento secondario sostituendoli, nello spirito della scuola bourbakista di cui egli é uno dei maggiori rappresentanti, con quella che fu allora chiamata "matematica moderna". Grido che fu assunto come vessillo di battaglia da quanti vedevano nella enfatizzazione della deduzione euclidea le cause del deterioramento dell'insegnamento matematico.

Esauritasi, anche a seguito di sperimentazioni non sempre felici,la spinta rivoluzionaria di questa proposta ed abbandonati il pesante simbolismo e l'eccessiva formalizzazione che essa proponeva, il processo di rinnovamento é entrato nell'alveo di una naturale evoluzione, da un lato recuperando ed aggiornando il metodo geometrico, dall'altro esaltando la capacità che la matematica possiede di interpretare e prevedere i fatti della natura e della realtà in genere. Così, accanto ai sempre validi metodi deduttivi, si sono venuti affermando anche i metodi induttivi e si é quindi avvertita la necessità di includere nei curricula delle scuole secondarie elementi di probabilità e di statistica.

Di questa evoluzione e della conseguente nuova impostazione metodologica il più recente interprete é il programma di matematica per la scuola media del 1979.

Intanto, in questi ultimi anni, un'altra ondata rivoluzionaria ha investito l'insegnamento secondario di tutte le discipline e della matematica in particolare: l'avvento dell'informatica. Questa, oltre a produrre nella società i radicali mutamenti che ormai tutti avvertiamo, pone agli insegnanti nuovi e delicati problemi didattici e metodologici.

Non sappiamo con certezza quali potranno essere, in un futuro più o meno vicino, le molteplici applicazioni dell'informatica in campo didattico, né possiamo escludere del tutto che possano verificarsi ridimensionamenti e ripensamenti.

Oggi come oggi dobbiamo prendere atto della sua presenza per inserirla nel processo educativo e predisporre quindi una adeguata modifica dei contenuti tradizionali che dia posto a contenuti meglio rispondenti alle nuove esigenze ed alle più ampie possibilità che la nuova tecnologia offre. Ciò soprattutto se si vuole contrastare il pericolo, purtroppo molto incombente, che la spinta all'informatica, che oggi entusiasma i giovani, si traduca semplicemente nell'acquisto e nell'uso manuale dell'elaboratore, da parte del singolo o da parte delle scuole, senza il corredo degli strumenti culturali che sono alla base del suo funzionamento.

Certo, i due movimenti ai quali ho accennato spingono in due direzioni contrapposte; mentre infatti il primo, mirando a fornire ai giovani le abilità e gli strumenti necessari per matematizzare i problemi posti dalla realtà, si muove nel senso di una maggiore concretezza, lo studio dell'informatica, richiedendo una accentuata ed esigente formalizzazione ed una minuta analisi dello stesso linguaggio comune, si muove nel senso di una maggiore astrattezza.

Ma queste due spinte, che peraltro sono state sempre presenti nell'insegnamento matematico, anche se prodotte da altri fattori, nel processo formativo dei giovani s'intrecciano continuamente fra di loro con reciproco vantaggio, si arricchiscono e si completano a vicenda, raggiungendo assieme quell'obiettivo che l'insegnamento matematico persegue da sempre: lo sviluppo della capacità logica, la scoperta delle leggi della natura, lo studio dei fenomeni sociali, la ricerca della verità.

E' proprio per soddisfare le nuove esigenze imposte dall'avvento dell'informatica, ed in particolare per rispondere ad una richiesta avanzata dai coordinatori del piano nazionale per l'informatica, che il Ministero della pubblica istruzione ha voluto costituire appositi comitati con l'incarico di provvedere all'"aggiornamento" dei vigenti programmi di matematica e di fisica; aggiornamento richiesto, non nel quadro di un ammodernamento generale degli orari e dei programmi

delle diverse discipline che s'insegnano nei nostri istituti secondari superiori, ma solo "in vista dell'introduzione dell'informatica nei piani di studio", come si legge nei due decreti ministeriali istitutivi, rispettivamente per l'aggiornamento dei programmi di matematica e di fisica.

Nel predisporre il proprio lavoro, il comitato per l'aggiornamento dei programmi di matematica, considerando da una parte i risultati della ricerca didattica condotta in questi ultimi anni che ha spostato la sua attenzione dai "contenuti" ai "metodi", e dall'altra la necessità che la profonda evoluzione del pensiero matematico registrata in quest'ultimo periodo incida opportunamente sull'insegnamento secondario, ha deciso preliminarmente di non procedere ad un puro e semplice "aggiornamento" dei programmi in vigore, troppo superati per costituire un punto di partenza, ma di studiare e proporre una formulazione assolutamente nuova.

Peraltro, poiché nessuna specifica indicazione accompagnava il decreto istitutivo, lo stesso comitato si é trovato a dovere inizialmente affrontare e risolvere una serie di problemi connessi con l'approntamento di un nuovo programma:

a) l'inserimento o meno di contenuti informatici in un programma di matematica;

b) l'unicità o meno di questo programma nei diversi tipi di scuola dell'attuale ordinamento o in un auspicabile nuovo ordinamento;

c) il mantenimento o meno dell'attuale monte ore assegnato all'insegnamento della matematica nei vari istituti.

Il primo problema ha imposto di considerare da una parte la profonda ripercussione che lo studio dell'informatica può avere all'interno dello stesso insegnamento tradizionale, dall'altra l'incidenza che la matematica esercita sui fondamenti della stessa informatica. Per queste considerazioni il comitato ha ritenuto di non poter rinunziare ad inserire in un programma di matematica, almeno a livello di biennio, i principi matematici sui quali l'informatica poggia, per non correre tra l'altro il rischio, con la delega ad altri di elaborare un programma specifico per l'informatica, che questi principi potessero essere minimizzati o sottovalutati; così li ha introdotti collocandoli, in modo naturale, accanto ai primi elementi di logica, senza escludere, beninteso, un "laboratorio di informatica" con taglio decisamente operativo.

La preparazione manuale e tecnica che la società di oggi impone a ciscuno di noi può essere in tal modo completata con una chiara presa di coscienza dei processi di formalizzazione insiti nella stessa cultura tradizionale e che lo studio dell'informatica provvede a mettere in luce.

Il secondo problemá, la formulazione di uno o più programmi, é collegato con quello dell'ordinamento scolastico. Il comitato, prendendo atto dell'ormai definitivo accantonamento da parte del Parlamento del progetto di riforma globale della scuola secondaria superiore ed ancora in assenza di un progetto di riordinamento, anche parziale, dei nostri istituti, ha considerato come ordinamento scolastico di riferimento quello attualmente in vigore.

Pur tuttavia non ha voluto restare insensibile all'esigenza ormai consolidata di considerare il biennio della scuola secondaria superiore come periodo unitario nel processo di formazione culturale dei giovani ed ha quindi studiato la possibilità di unificare i programmi da proporre.

Ma procedere alla formulazione di un unico programma per tutti i bienni sarebbe significato o attestarlo ad un livello minimo, insufficiente per alcune attività o curricula per i quali é necessaria una forte preliminare preparazione matematica, o, all'altro estremo, attestarlo ad un livello che avrebbe potuto essere eccedente rispetto alle finalità di determinati istituti, o ancora ad un livello intermedio, insufficiente per gli uni ed eccedente per gli altri. La soluzione più rispondente alle necessità dei diversi istituti richiede invece che la differenziazione nella preparazione dei giovani inizi sin dal primo anno del biennio.

Di fronte a queste due esigenze contrastanti, l'opportunità di unificare i programmi e la necessità di differenziarli, il comitato ha ritenuto di poter trovare una soluzione intermedia formulando due programmi, un programma "forte", o programma A, per quegli istituti per i quali la matematica é disciplina caratterizzante o per gli specifici obiettivi scientifici dell'istituto (liceo scientifico) o perché gli obiettivi di una preparazione tecnica richiedono preventivamente un'ampia preparazione matematica di base per le successive applicazioni (istituti tecnici agrario, aeronautico, nautico, industriale, per geometri), ed un programma "debole", o programma B, per quegli istituti (licei classico, linguistico, artistico, istituto magistrale, istituti tecnici commerciale, femminile, per periti aziendali, per il turismo) nei quali la matematica, pur essendo componente essenziale nella formazione e maturazione culturale dei giovani, non può disporre, nell'economia generale delle varie discipline, di un orario adeguato.

L'esame dei due programmi porta a constatare che essi sono assolutamente equivalenti nel richiedere profondità di trattazione degli argomenti proposti e che differiscono soltanto per alcuni degli ultimi argomenti del programma forte che, eliminati nel programma debole, potranno essere destinati al triennio successivo.

Al comitato é sembrata inaccettabile e didatticamente inattuabile la proposta di formulare un programma da destinare ad un'eventuale area comune del biennio ed un programma da destinare ad una o più aree di indirizzo. Data la natura strettamente sequenziale della nostra disciplina non é possibile individuare un campo di studi per l'area di indirizzo da svolgere in contemporanea con quello dell'area comune; ciò senza voler considerare la più volte denunziata incongruenza delle classi cosiddette eterogenee, dove sono costretti a convivere alunni che ricevono nel corso dell'anno scolastico una diversa preparazione matematica.

Peraltro, l'ordinamento scolastico vigente, nel quale, come ho detto, il comitato ha operato, non prevede una tale suddivisione.

Comunque i due programmi hanno una parte in comune, il programma B, che potrebbe essere assunto come programma dell'area comune, mentre la differenza A-B tra i contenuti dei due programmi potrebbe essere assunta come programma dell'area di indirizzo, purché, in quest'ultimo caso, la classe sia omogenea, almeno per quanto riguarda lo studio della matematica.

Le due proposte formulate non investono la scuola magistrale, l'istituto d'arte ed i diversi istituti professionali; in alcune di queste scuole l'insegnamento matematico non é previsto, in altre é congiunto con quello di altre discipline, quali la fisica e la contabilità, per la scuola magistrale esistono soltanto programmi d'esame; solo nell'istituto professionale per l'industria e l'artigianato l'insegnamento della matematica é autonomo. In ogni caso il comitato ha ritenuto di dover soprassedere alla formulazione dei relativi programmi, sia per la insufficiente competenza nelle discipline aggiunte e sia, soprattutto, perché sembra che queste scuole in un immediato futuro saranno oggetto di un riordinamento e di una ristrutturazione, anche in vista del prolungamento a sedici anni dell'istruzione scolastica obbligatoria.

Del resto queste stesse scuole non sono state investite dal piano nazionale per l'informatica, le cui esigenze sono state all'origine della richiesta di aggiornamento.

Ma se é stato possibile assumere come ordinamento scolastico di riferimento quello vigente, lo stesso non é stato possibile fare per quanto riguarda l'orario. Anche se il decreto istitutivo lasciava intendere che si dovesse operare nell'ambito dell'orario attualmente in vigore, il comitato ha ritenuto di dover proporre un proprio orario, perché il numero di ore assegnate all'insegnamento della matematica in alcuni istituti, quale ad esempio il liceo classico, é così ridotto da essere assolutamente insufficiente a dare ai giovani una preparazione matematica di base, anche minima. Il mantenersi entro le strettoie dell'orario vigente sarebbe equivalso ad una vanificazione in partenza della proposta di aggiornamento. Peraltro la proposta di unificare i programmi portava automaticamente a proporre anche l'unificazione dell'orario.

Il comitato ha ritenuto inoltre che l'inserimento nel programma degli elementi di informatica e soprattutto del laboratorio di informatica, che richiede una operatività manuale, non dovesse nuocere allo sviluppo della parte strettamente matematica e che pertanto ad esso dovessero essere assegnate ore aggiuntive.

Sulla base di queste considerazioni é stata avanzata la proposta di assegnare al nostro insegnamento un orario di dodici ore settimanali complessive nelle due classi del biennio degli istituti per i quali é previsto il programma forte e di otto ore settimanali complessive nelle due classi del biennio degli istituti per i quali é previsto il programma debole, delle quali ore tre e due rispettivamente destinate al laboratorio di informatica.

Così operando il comitato si é mantenuto, per quanto riguarda specificatamente la matematica, molto vicino al carico orario settimanale previsto dal vigente regolamento, scostandosi al massimo di due ore nel biennio e solo per quelle scuole che in atto hanno un insufficiente carico orario. Ciò allo scopo soprattutto di non correre il rischio di vedere respinti i due progetti a causa di una richiesta eccessiva che avrebbe sconvolto l'equilibrio nell'orario delle varie discipline.

Il prof. Prodi illustrerà i criteri che il comitato ha seguito nel formulare i due programmi e le indicazioni metodologiche che sono state suggerite; da parte mia desidero soltanto aggiungere, e mi sia consentito, un breve commento ai cenni di storia della matematica che vi sono contenuti.

Dalla semplice lettura del programma si rileva che non si tratta di fornire ai giovani una conoscenza, anche se per sommi capi, dell'evolversi della matematica e della sua correlazione con il progresso scientifico o sociale, obiettivo a mio parere irrealizzabile sia per la giovane età dei discenti e sia per la limitatezza delle cognizioni da loro acquisite e in campo matematico e in quello della storia civile; si tratta invece di presentare, come é detto nel programma, "qualche argomento nella sua evoluzione storica, facendo vedere come lo sviluppo della matematica sia stato determinato dalla necessità di risolvere i problemi, anche teorici, che man mano venivano prospettati". Ed a tale scopo é indicato come esempio la scoperta dell'incommensurabilità.

Con questo suggerimento si é sperato di dare una soluzione accettabile al gravissimo problema di come insegnare la storia della matematica a livello secondario superiore e soprattutto di come renderne lo studio proficuo ed utile all'apprendimento della stessa disciplina; si é ritenuto infatti che presentando ai giovani le difficoltà che l'umanità ha dovuto affrontare e superare per enucleare un determinato concetto o per chiarire una determinata idea, difficoltà in genere assimilabili a quelle che essi incontrano nel loro processo di apprendimento, l'argomento prescelto viene reso più accessibile e più suggestivo e gli stessi giovani possono essere anche portati a gustare il senso ed il significato della ricerca storica.

I due programmi sono stati sottoposti al parere del Consiglio Nazionale della pubblica istruzione il quale ha espresso su di essi un giudizio largamente positivo, avendoli trovati "coerenti con la necessità di una nuova impostazione metodologica, sicuramente non perseguibile con il semplice aggiornamento dei programmi attuali" ed "in sintonia con le più recenti ricerche sulla didattica della matematica".

Purtroppo essi non sono stati formalmente emanati per il corrente anno scolastico 1986-87; soltanto ne sono state informate le scuole impegnate nel piano nazionale per l'informatica perché i singoli docenti li seguissero, compatibilmente con l'orario vigente che non é stato modificato.

Sono stati invece inseriti in un progetto globale di riordinamento del biennio che il Ministro ha presentato in questi giorni al Consiglio Nazionale della pubblica istruzione per il previsto parere.

Auguriamoci che questo progetto abbia un iter meno tormentato del progetto di riforma dell'ordinamento scolastico e che i nostri due programmi possano essere finalmente emanati ed attuati ed auguriamoci anche che essi siano accompagnati in tempi brevi da nuovi programmi per i trienni, che dovranno essere necessariamente differenziati e graduati in relazione agli obiettivi specifici dei singoli istituti o dei singoli indirizzi.

Auguriamoci ancora che l'attuazione di questi nuovi programmi, del biennio e del triennio, sia accompagnata, come ha auspicato anche lo stesso Consiglio Nazionale, da un vasto e capillare aggiornamento di tutti gli insegnanti interessati, non solo sugli argomenti connessi con l'informatica, ma anche sulle nuove tematiche meglio rispondenti al loro sviluppo ed al conseguimento degli obiettivi indicati.

E che la scuola secondaria superiore, e l'insegnamento matematico in particolare, possano, rinnovandosi radicalmente, risollevarsi dal basso livello in cui attualmente si trovano.

G. Prodi

Dipartimento di Matematica - Pisa

I nuovi programmi del biennio fra l'utopia e realtà

1 - UN PO' DI STORIA. La straordinaria longevità degli attuali programmi di matematica delle nostre scuole secondarie superiori - programmi che, nel settore liceale risalgono sostanzialmente alla riforma Gentile - meriterebbe certamente uno studio approfondito sia dal punto di vista scolastico che da quello sociale e politico.

Ai fini di questa esposizione basterà ricordare i tentativi, purtroppo vani, di rinnovamento che si sono succeduti a partire dagli "anni sessanta": dai "programmi di Gardone" ai "programmi di Camaiore", ancora molto influenzati da una visione bourbakista della matematica, fino ai "programmi di Frascati" del 1966-67. Mi sia permesso soffermarmi un attimo su questi ultimi, non solo per ricordare persone di eccezionale rilievo che vi lasciarono una profonda impronta, come U. Morin e B. de Finetti, ma anche per osservare che se quei programmi, così sostanziosi e saggi, fossero stati adottati, ci saremmo trovati (forse senza rendercene conto!) all'avanguardia ....

La fase successiva (intervento dell'U.M.I. e del C.N.R. con i "nuclei di ricerca didattica" a partire dal 1975, "Syllabus" di matematica della C.I.I.M. nel 1980, attività per la preparazione dei "formatori", ecc.) è stata tutta rivolta ad un ricupero volontaristico, a livello di piccoli gruppi, delle possibilità di rinnovamento istituzionalmente bloccate. Tuttavia, queste iniziative, se hanno servito e servono tuttora a formare e a tener viva una élite di insegnanti, non sono in grado di influire a livello macroscopico:nella Scuola Secondaria Superiore non si dà quel fenomeno di diffusione "a macchia d'olio" delle innovazioni didattiche che è tipico della Scuola Elementare. La conservazione è resa più ferrea dalla formula dell'esame di maturità, che gioca il ruolo di "dispositivo di stabilizzazione". La stessa sperimentazione, malgrado sia ampiamente diffusa nella S.S.S., non pare abbia dato contributi di rilievo all'innovazione didattica nel campo della matematica; se mai, occorre dare atto delle innovazioni, a volte avventate e spericolate, ma tuttavia vivaci, che si sono avute nel settore della istruzione tecnica.

Ed ecco, con l'inizio degli "anni ottanta" la grossa novità: l'entrata in campo dell'informatica, attraverso la diffusione di elaboratori di elevate prestazioni a basso costo. Il potere carismatico dell'informatica consente persino al Ministero della P.I. e ad altri enti di assumere iniziative, che si muovono in senso trasversale rispetto alla riforma della S.S.S. e che non sono istituzionalmente vincolate all'incerto destino di quest'ultima. Il "Piano Nazionale per l'Informatica", comunque lo si voglia giudicare, ha avuto una rapidità di attuazione del tutto ignota alla Scuola Italiana. Proprio in seno al Comitato Tecnico per il P.N.I., nella primavera del 1985, è maturata la convinzione che non si poteva introdurre in modo sensato l'informatica senza una profonda riforma dei programmi di matematica e di fisica. Il Ministro della P.I. raccoglieva immediatamente la proposta: veniva così nominato un comitato presieduto dall'Isp. Vita e composto dai professori Ciarrapico, Fasano, C.Mammana, Maracchia, Olimpo, Favan, Pescarini, Prodi. Questo comitato ha concluso i suoi lavori nel gennaio scorso (il testo è stato pubblicato sul Notiziario dell'U.M.I. del febbraio). Il Consiglio Nazionale della P.I. ha già espresso parere nettamente favorevole.

2 - IL NODO CULTURALE. E' stata solo una mossa opportunistica, da parte dei matematici, quella di saltare sul carro trionfante dell'informatica? Non escludo una componente di comprensibile opportunismo, così come non si possono negare fortissime ragioni di carattere pratico che, nella scuola pre-universitaria, legano l'informatica alla matematica, ragioni su cui sarà opportuno ritornare a conclusione di questa esposizione.

Ma, a mio parere, vi sono profonde ragioni di carattere culturale che legano l'informatica ai capitoli più tradizionali della matematica: vorrei usare l'immagine, forse un po' retorica ma espressiva, di rami che escono da uno stesso tronco. Queste ragioni di carattere culturale sono, a mio parere, chiaramente presentate nella premessa ai nuovi programmi, dove si afferma che l'orientamento della matematica di oggi (almeno nella consapevolezza che ne abbiamo!) è soprattutto verso queste due direzioni:

- verso la "matematizzazione della realtà"
- verso una più accentuata ed esigente formalizzazione.

Per capire l'impianto culturale dei nuovi programmi occorre, a mio parere, riuscire a vedere come queste due spinte, anzichè essere in contraddizione, si compongono e si rafforzino a vicenda.

Tenterò di dare qualche pezza d'appoggio, pur rendendomi conto che il discorso meriterebbe un ben maggiore approfondimento e dovrebbe dar luogo ad una ben più ampia discussione. Comincerò dalla seconda componente, anche se, nell'ambiente della didattica, è stata soprattutto la prima ad essere avvertita: infatti, è dall'inizio degli "anni settanta" che, anche in reazione agli eccessi della "matematica moderna", si sottolinea l'esigenza di puntare sulla "matematizzazione della realtà", sull'insegnamento per problemi, ecc....

La componente formale è essenziale per la matematica,ma solo con l'avvento della logica moderna (con Frege, Peano, Russell, Hilbert,...) ne siamo divenuti consapevoli. Oggi ci rendiamo chiaramente conto che

- ogni pensiero matematico - qualunque sia la sua genesi - può essere espresso solo componendo parole scritte in un alfabeto fissato, con regole non ambigue
- ogni parola ha un contenuto di informazione che può essere misurato
- l'informazione può essere trasformata: un calcolatore trasforma un messaggio d'ingresso (dati + programma) in un messaggio di uscita (risultato).

Il punto di vista formale è dunque estremamente generale e fecondo: a livello espressivo permette di studiare assieme il linguaggio algebrico, il linguaggio logico, i linguaggi di programmazione... ; a livello operativo può unificare il calcolo matematico, la generazione dei teoremi di un sistema formale a partire dagli assiomi ecc......

Mi sembra un paradosso storico di grande interesse il fatto che l'esplosione della formalizzazione e delle sue applicazioni sia avvenuta a partire dagli "anni trenta", proprio in concomitanza con la scoperta delle limitazioni interne dei sistemi formali: l'itinerario dai famosi teoremi di Gödel alla macchina di Turing è molto breve!

I teoremi di indecidibilità ci dicono, in fondo, che la parte più interessante della matematica non si può ridurre all'applicazione meccanica di metodi generali; il problema ritorna ad essere protagonista, più che la teoria.Nello stesso tempo, anche se con consapevolezza solo parziale, è cambiata l'immagine della matematica come scienza: non più un processo che emana esclusivamente dall'interno, e con garanzie interne, ma un sistema aperto all'esterno. Si acquista coscienza che l'apertura verso la "realtà" non è un aspetto accessorio o utilitaristico, ma è essenziale per lo sviluppo della matematica.

Dunque, se non faccio illazioni troppo avventate, mi pare si possa affermare che fra le due componenti del "fare matematica", cioè l'attività di matematizzazione e quella di formalizzazione, ci siano, anche nella loro genesi storica, legami molto stretti.

Tuttavia rimane un problema di carattere didattico, su cui i nuovi programmi giocano la loro credibilità: come mai si punta così decisamente sulla componente formale, mentre sappiamo (anche dagli studi di psicologia cognitiva) che la via dell'astrazione è così lenta e difficile? Indubbiamente, la decisione di cominciare fin dal primo biennio con elementi di logica può apparire poco saggia, specialmente a chi ha ancora un vivo ricordo delle delusioni lasciate dai tentativi di approccio alle strutture matematiche operati dalla "matematica moderna".

Risponderei che non si deve confondere "astratto" con "formale": sarà proprio l'attività sul calcolatore, specialmente se collegata con la risoluzione dei problemi, a rendere tangibili i processi formali. Quindi l'attività sul calcolatore non dovrà essere considerata marginale, ma essenziale per la realizzazione di questi programmi.

Occorrerà, nella realizzazione dei nuovi programmi, agire con saggezza, evitando da un lato le generalizzazioni troppo spinte (e prive di esempi concreti) ma rifuggendo anche dal culto del banale (non vorrei che le "tavole di verità" finissero per sostituire le "patate di Eulero-Venn", inducendo negli allievi un eguale sensazione di preziosismi inutili).

3 - UNO SGUARDO AL TESTO : ELEMENTI DI LOGICA E DI INFORMATICA. E' ormai chiaro da quanto detto sopra che nei nuovi programmi la logica ha il ruolo di cerniera fra la matematica e l'informatica. Come è accaduto sul piano storico, la logica si presta particolarmente a rendere consapevoli i processi di formalizzazione, con le fondamentali distinzioni fra sintassi e semantica, fra il linguaggio interno e il meta-linguaggio. Come si dice chiaramente nelle avvertenze, si dovrà tener presente il ruolo insopprimibile del linguaggio naturale, su cui i vari linguaggi artificiali vengono costruiti. Del resto, per un insegnamento efficace della matematica, il problemma dello "sfondo" è sempre importantissimo, se non si vuole che l'insegnamento generi dogmatismo e chiusure mentali. Ad esempio, l'introduzione delle funzioni calcolabili deve essere accompagnata dalla consapevolezza (che potrà essere resa esplicita nel triennio) che esistono funzioni non calcolabili (ed anzi, in un certo senso, sono la stragrande maggioranza). Tutto questo è molto importante anche ai fini di ottenere che l'informatica non travalichi i confini della scienza e della tecnologia, per trasformarsi in una ideologia ....

Non ho purtroppo competenza per commentare dall'interno la parte strettamente informatica dei programmi (linguaggi, tecniche di programmazione, automi, ecc....). Sottolineerò soltanto il ruolo del Laboratorio di Informatica, per l'avvio al pieno possesso dello strumento. Mi pare opportuno invece dedicare qualche riflessione all'influenza che l'informatica dovrà avere sull'insegnamento della matematica. Distinguerò alcuni settori:

a] Mutamenti di prospettiva indotti in settori tradizionali. Il calcolo letterale è un tipico esempio di argomento trattato formalmente: nei testi tradizionali un polinomio, una frazione algebrica sono "espressioni". Sarà naturale adottare questa presentazione, ma con maggiore consapevolezza: un polinomio potrà essere visto come un particolare programma di calcolo, che potrà divenire una formula nell'ambito di un preciso linguaggio.

Anche l'aritmetica potrà essere "rivisitata": i legami fra il principio di induzione e le funzioni ricorsive (e gli algoritmi) sono ben noti.

b] Mutamenti indotti dall'impiego strumentale del calcolatore. Questo è il punto che ha minor bisogno di illustrazioni, perchè vi è già un ampio materiale disponibile. In questo campo interessanti esperienze erano state compiute già con la diffusione dei calcolatori tascabili. Penso che l'insegnante di matematica non particolarmente versato per l'informatica dovrebbe trovare qui un facile varco: non ci vuole molto a costruire un piccolo programma per l'algoritmo di Euclide o per la risoluzione delle equazioni col metodo della bisezione.

Nello stesso tempo, vorrei insistere sulle grandi risorse pedagogiche insite nell'impiego del calcolatore. Mi riferisco alla possibilità di ricuperare per la matematica quei giovani che hanno un'intelligenza prevalentemente pratica e che arrivano a capire un concetto o un teorema solo quando questi vengono illustrati da esempi concreti.

Il testo dei programmi, con espressione indubbiamente efficace, prevede che la costruzione degli algoritmi prenda, nell'insegnamento della matematica, il posto che per secoli è stato tenuto dai problemi risolubili con "riga e compasso".

c] L'impiego della simulazione. Non c'è dubbio che l'uso del calcolatore ha reso la matematica un po' più vicina alle scienze sperimentali. In certi campi in cui è difficile, o è troppo complicato, costruire una teoria adeguata, risulta possibile costruire un modello da sottoporre poi a simulazione. Nelle scienze applicate questa via è ormai abituale, ma nella didattica pare che non la sappiamo ancora utilizzare adeguatamente. Occorre progredire in questa direzione perchè è molto importante abituare gli allievi a fare congetture; inoltre, si può trovare nella simulazione la via per aggirare certi procedimenti che esigono calcoli troppo complessi.

d] Infine c'è l'utilizzazione del calcolatore per "girare" un software già fatto. Questo impiego è più che ragionevole quando si tratta di valersi di mezzi sussidiari estranei al problema che si studia (ad es. quando ci si vale della grafica), ma potrebbe diventare pericoloso se (come pare di cogliere nelle affermazioni di certi "esperti") diventasse totalizzante. E' evidente il rischio che l'informatica sia occasione, anzichè di sviluppo, di appiattimento intellettuale e di dipendenza culturale.

4 - GLI ALTRI TEMI. Il testo dei nuovi programmi è articolato in grandi temi", così come quello della Scuola Media, entrato in vigore nel 1979,e quello successivo, della Scuola Elementare; questa formulazione ha lo scopo evidente di sottolineare le basi concettuali, lasciando ampia libertà all'insegnante per quanto riguarda la programmazione didattica. Il nostro testo comprende cinque temi; del primo (elementi di logica e di informatica) abbiamo parlato abbastanza a lungo.Seguono tre temi di carattere più tradizionale (2 - La geometria del piano e dello spazio, 3 - gli insiemi numerici e il calcolo, 4 - relazioni e funzioni).Si tratta gli argomenti per cui esistono varie proposte di innovazione già da tempo formulate ma ancora scarsamente recepite dalla prassi corrente. Ad esempio, potrà essere motivo di sorpresa per molti insegnanti il fatto che l'itinerario della geometria approdi rapidamente al piano cartesiano; ma la sorpresa non è molto motivata se si riflette che il riferimento cartesiano fa già parte del programma della Scuola Media!

Lo spirito della presentazione della geometria è chiarito dal commento: la geometria non deve essere intesa come una rassegna di tipo botanico (alla vecchia maniera) delle figure più notevoli, ma come lo studio dello spazio (o di uno spazio). Il concatenarsi dei teoremi non deve essere erratico, come è in larga parte dello insegnamento tradizionale, ma deve convergere ad una meta (che sarà appunto la descrizione del piano cartesiano). Quanto alla metodologia, il testo non poteva che essere liberale, date le diverse opinioni in campo: c'è infatti chi ritiene possibili, per allievi di questa età, solo deduzioni "locali" e chi, invece, ritiene possibile, e quindi realizzabile, una presentazione assiomatica completa. Vorrei cogliere l'occasione per auspicare perlomeno un aumento di chiarezza nella disputa: ad esempio, quando si parla di presentazione assiomatica si possono intendere cose molto diverse: si va da un assetto del tutto astratto ad una descrizione di proprietà intuitive (in altre parole, può essere ancora utile quella importante distinzione tra "formale" ed "astratto" di cui parlavamo prima!).

Comunque, quanto sia liberale il testo su questo punto appare chiaramente dal fatto che consente di valersi ancora della teoria delle grandezze: teoria che, come è svolta nei libri tradizionali di geometria, porta solo ad una duplicazione di nomenclatura dando al ragazzo la sensazione di piena inutilità.

Il terzo e il quarto tema non portano novità di contenuti, ma sensibili novità sul piano metodologico. Ad esempio, gli elementi di logica appresi dovranno favorire una presentazione delle equazioni e disequazioni assai più chiara e generale di quella consueta. Nello stesso tempo il testo, sia per la stringatezza con cui è formulato sia per quanto detto nei commenti, prevede energiche potature su certi temi e su certe attività collaterali, che spesso sono sviluppate a scapito di quelle più centrali.

A proposito di questi punti più tradizionali dei programmi, si può osservare che l'insegnante medio prova tanto disagio ad introdurre novità quanto ne prova ad abbandonare alcuni vecchi amici divenuti inutili, come certi calcoli algebrici o trigonometrici, l'uso delle tavole logaritmiche e trigonometriche ecc....

Il quinto tema è di enorme importanza: le avvertenze ci dicono, con enfasi non sproporzionata, che la probabilità è uno "strumento fondamentale della nostra conoscenza". Tuttavia dobbiamo ammettere che queste materie non sono in generale molto coltivate: anche nella Scuola Media, dove sono state introdotte con i recenti programmi, stentano a decollare. Inoltre, in questi ultimi anni, lo strapotere dell'informatica le ha messe un po' in ombra. Attualmente, gli insegnanti che hanno fatto uno sforzo per conseguire una prima alfabetizzazione informatica, difficilmente trovano tempo ed energie per queste materie che sono altrettanto nuove, e che forse sono più ostiche, o, almeno, riverberano nell'atteggiamento dei docenti quella situazione di incertezza che costituisce il loro oggetto.

Dal punto di vista didattico, la statistica si trova in condizioni ancora peggiori della probabilità: non sono molti gli studi per aprire vie percorribili.

5 - PROBLEMI DI ATTUAZIONE. La premessa ai programmi, fin dalle prime righe, mette in evidenza che, dato il lungo periodo di stasi, e data la forte evoluzione

compiuta dal pensiero matematico, i nuovi programmi non potrebbero in alcun modo porsi in una linea di continuità e di sviluppo rispetto ai precedenti: il che è come dire che il passaggio ai nuovi programmi non potrà essere un'operazione indolore; si renderà necessaria un'ampia attività di aggiornamento, per un ragionevole numero di anni. Inoltre, dovranno verificarsi precise condizioni ambientali ed organizzative. Anzitutto, l'orario. Il comitato ha presentato i programmi in due varianti: la A (forte) e la B (ordinaria). Si deve rilevare che il Comitato ha respinto nettamente il tipo di scansione che è stato suggerito dai vari progetti di riforma, che ha continuato ad essere adottato malgrado i risultati fallimentari ottenuti: alludo alla ripartizione fra un' "area comune" ed un' "area di opzione". Il programma "forte" è pensato per le scuole di tipo scientifico e tecnico (con il postulato implicito, del tutto ragionevole, che per questi tipi di scuole il programma possa essere unico). Più incerti sono, nell'attuale quadro istituzionale, i destinatari della versione B: questa incertezza si traduce ovviamente in una minor sicurezza e precisione nella formulazione del testo. La versione B è stata ottenuta dalla A togliendo semplicemente alcuni temi per rinviarli, generalmente, al triennio. infatti, anche se, per esplicito mandato, i programmi riguardavano soltanto il biennio, il Comitato ha condotto i suoi lavori in una prospettiva comprendente tutto il quinquennio.

Penso che il Comitato abbia agito correttamente: infatti non si può procedere diversamente se non si vuole che il biennio si riduca ad un'appendice ripetitiva della Scuola Media.

Il Comitato ha indicato in 12 complessive (per il biennio) le ore necessarie per la versione A e in 8 quelle necessarie per la versione B. Si tratta di richieste veramente minime, e non formulate per "alzare il prezzo". Basta riflettere infatti che l'informatica, la probabilità e la statistica vengono ad aggiungersi ai temi tradizionali (sia pure convenientemente "potati") e che il Laboratorio di Informatica richiede certamente un tempo notevole. Sulla soluzione che verrà adottata per l'orario si potrà misurare la effettiva volontà politica del Ministero e del Parlamento. Naturalmente, l'adozione "a regime" di questi programmi richiederà una ricomposizione delle cattedre: occorrerà separare la matematica dalla fisica (sempre tenendo presente che nella matematica sono incluse anche l'informatica, la probabilità e la statistica). La separazione della matematica dalla fisica è un provvedimento ripetutamente ma vanamente chiesto sia dai matematici che dai fisici, fin

dal tempo in cui, con la riforma Gentile, i due insegnamenti furono abbinati.

Una richiesta di fondamentale importanza è poi quella di un tecnico per il laboratorio di informatica, così come vi è il tecnico per la fisica o la chimica. Non si può pretendere che un laureato in matematica provveda alla manutenzione degli apparecchi, ed anche a certe manualità che esigono la conoscenza del funzionamento interno dei dispositivi.

Infine, vi è il problema del collegamento con la Scuola Media. Il Comitato ha dichiarato che il programma tracciato "non è realizzabile se quello della Scuola Media non è stato sviluppato con sufficiente completezza e profondità". Qualcuno ha visto in queste parole il pericolo di un alibi per gli insegnanti della S.S.S., dal momento che, come si è rilevato, l'attuazione del programma della S.M. procede ancora a rilento. Preferiamo vedervi un invito al Ministero affinchè, con mezzi, incentivi e controlli opportuni, operi affinchè tutti i programmi vengano attuati con serietà ed impegno.

Note bibliografiche minime.

Per le basi dell'informatica consiglierei il libretto:

TRAKHTENBROT "Algoritmi e macchine calcolatrici automatiche" - Progresso Tecnico Editoriale - Milano.

Fa parte di una collana scritta apposta per i giovani nell'Unione Sovietica. E' un libro un po' vecchio (forse esaurito!), ma molto chiaro e profondo.

Per la probabilità e la statistica vorrei segnalare il libro di PICCINATO e PINTACUDA "Probabilità e statistica", che è stato preparato per le sperimentazioni dei Nuclei di Ricerca Didattica di Pavia, Pisa, Trieste. E' un testo per gli insegnanti; può essere ottenuto rivolgendosi ai predetti N.R.D.

Claudio Bernardi

Dipartimento di Matematica - Siena

La logica matematica: metodo e contenuti

1. Alcuni mesi fa, invitato ad una riunione informale per discutere i programmi di una Scuola media superiore "sperimentale", mi sono ritrovato a proporre non tanto un'introduzione diretta di nuovi concetti logici e di teoria degli insiemi, quanto, più semplicemente, di dedicare più tempo alla geometria.

In effetti, a livello didattico, la geometria presenta stretti legami con la logica: basta pensare che lo studio della geometria abitua lo studente a ragionare in modo rigoroso, ad esprimersi in modo corretto e, ancora, alla necessità di tradurre idee intuitive in concetti formali. Del resto, anche da un punto di vista storico vi sono state numerose connessioni fra geometria e logica: la fortuna dell'opera di Euclide è probabilmente dovuta più all'impostazione generale che non a risultati specifici; e, molti secoli dopo, la nascita delle geometrie non euclidee ha portato a un chiarimento del concetto di teoria assiomatica.

2. Ma che cosa si intende con il termine "logica"? Nella storia la parola logica ha assunto significati molto diversi; nel linguaggio corrente usiamo l'aggettivo logico con riferimento ad un ragionamento razionale, ma, in questo senso, lo si può applicare a tutta la matematica.

Per chiarire la situzione, cominciamo con l'osservare che una dimostrazione matematica si sviluppa, in modo più o meno esplicito, mediante "regole di deduzione", cioè, come dicevano gli Stoici, regole formali che permettono di passare da certe premesse a opportune conclusioni. Parlando di regole *formali*, intendiamo dire che tali regole non dipendono dal contenuto specifico delle frasi sulle quali operano, ma, appunto, dalla loro forma (si pensi a un sillogismo). Si tratta, in definitiva, come era già chiaro ad Aristotele e agli Stoici, di regole *linguistiche*. Possiamo allora concludere che la logica non va vista genericamente come scienza del ragionamento o del pensiero, quanto come scienza delle regole del linguaggio che riconosciamo come valide.

Si chiariscono così anche i rapporti fra matematica e logica: se ogni ramo della matematica si esprime attraverso un linguaggio, in logica il linguaggio stesso diventa oggetto di studio; in questo senso, la logica è necessaria per

impostare correttamente un qualunque discorso matematico. Naturalmente, nella pratica didattica la situazione è diversa, perché è preferibile presentare la logica non come primo capitolo, ma come scienza a posteriori: una volta che lo studente abbia acquisito una certa familiarità con i ragionamenti matematici, allora è opportuno farlo riflettere per rendere espliciti certi passaggi che lo studente ha già incontrato in varie situazioni.

Raggiungere la consapevolezza del proprio modo di ragionare è importante sotto almeno due aspetti: in primo luogo perché, in generale, è ovviamente preferibile capire quello che si fa piuttosto che applicare meccanicamente certe regole; e in secondo luogo perché alcune semplici riflessioni logiche metteranno lo studente in grado di affrontare, in seguito, situazioni più complesse.

3. Una volta sottolineati gli stretti legami fra logica e linguaggio, occorre subito distinguere fra liguaggio *naturale* - cioè il linguaggio che usiamo normalmente nella vita di tutti i giorni - e linguaggio *artificiale* - può trattarsi di un linguaggio di programmazione, ovvero di un linguaggio formalizzato per uso matematico -

Dal punto di vista logico, il linguaggio naturale è inutilmente complesso da un lato e ambiguo dall'altro. Si pensi alla presenza di sinonimi, cioè di parole distinte che hanno lo stesso significato; la situazione è anche peggiore se consideriamo un bisenso, cioé un'unica parola che può assumere significati diversi.

Le ambiguità di un linguaggio naturale sono fonte di apparenti contraddizioni. Vediamo tre esempi in proposito.

(A) *Gli Evangelisti sono quattro.*

Matteo e Luca sono Evangelisti.

Matteo e Luca sono quattro.

Si noti che la *forma* del ragionamento è corretta (si tratta del più classico dei sillogismi); ciò nonostante, le premesse sono giuste, ma la conclusione è sbagliata.

(B) 1000 *ha quattro cifre.*

$1000 = 10^3$.

10^3 *ha quattro cifre.*

Anche questa volta la conclusione è sbagliata, perché per scrivere 10^3 bastano tre cifre.

(C) *Ogni rettangolo ha quattro angoli retti.*
Il triangolo ABC è rettangolo.
Il triangolo ABC ha quattro angoli retti.

L'errore commesso in quest'ultimo caso è, forse, quello più facile da individuare: siamo in presenza di un bisenso, perché la parola "rettangolo" è usata, nelle due premesse, con due significati diversi. Due sole osservazioni in proposito. In primo luogo, a riprova delle connessioni fra logica e linguaggio, si noti che il ragionamento (C) non è in generale traducibile in un altro linguaggio naturale. In secondo luogo, vale la pena di aggiungere che, se nella pratica i bisensi sono raramente fonte di equivoci (dal contesto è facile capire a quale significato si allude), in un linguaggio di programmazione un bisenso avrebbe conseguenze disastrose.

Nel caso (A) l'errore è dovuto la fatto che il numero "quattro" si riferisce all'insieme degli Evangelisti, e non a ciascuno di loro. In effetti, il linguaggio naturale enuncia nello stesso modo proprietà di un insieme ("i numeri a,b,c... sono concordi") e proprietà di cui godono i singoli elementi di quell'insieme ("i numeri a,b,c... sono positivi").

Infine, nel ragionamento (B) la scrittura $1000 = 10^3$ va intesa, come al solito, nel senso che i due simboli scritti a sinistra e a destra del segno "=" rappresentano lo stesso numero. D'altra parte, la proprietà espressa nella prima frase (avere quattro cifre) si riferisce non al numero, ma al particolare simbolo usato per denotarlo. Ed è chiaro che le proprietà di un numero rimangono inalterate variando il simbolo che lo rappresenta, mentre le proprietà di un simbolo dipendono dal simbolo stesso. Aggiungiamo che il ragionamento (B) può risultare utile per chiarire la distinzione fra *sintassi* (studio dei simboli) e *semantica* (interpretazione dei simboli), distinzione utile anche in un contesto informatico.

4. L'introduzione di simboli in un ambito matematico-logico risponde proprio all'esigenza di chiarire e semplificare il linguaggio naturale. Abbiamo così simboli algebrici (= , + , < ,...) e simboli specificamente logici ($\wedge$, $\rightarrow$, $\exists$,...): l'introduzione di tali simboli costituisce il primo passo verso la costruzione di un linguaggio artificiale. Occorre tuttavia evitare che lo studente abbia l'impressione che la logica sia, essenzialmente, una forma di stenografia: nel nostro caso il punto cruciale non è la brevità del simbolo, ma l'individuazione delle

parole chiave che poi, per comodità, vengono sostituite da un simbolo. Un riflesso didattico di quest'ultima osservazione è il seguente: si possono senz'altro introdurre i simboli per connettivi e quantificatori, ma la cosa più importante è educare ad un uso corretto anche nel linguaggio naturale dei connettivi e quantificatori.

Le parole chiave da un punto di vista logico si ritrovano tanto nel linguaggio matematico, quanto nel linguaggio corrente. Saranno quindi utili esempi ed esercizi tratti dalla vita comune, ma in proposito è necessaria una certa cautela: la formalizzazione viene fatta in vista delle applicazioni matematiche e non si può pretendere che, nei discorsi di tutti i giorni, le cose risultino altrettanto chiare e convincenti. Vediamo, attraverso alcuni esempi, come fuori dal contesto matematico i connettivi acquistino talvolta significati diversi.

Congiunzione. *Sono andato alla stazione e ho preso il treno.* Se in questa frase applichiamo la proprietà commutativa della congiunzione (secondo cui $p \wedge q$ è equivalente a $q \wedge p$), otteniamo "ho preso il treno e sono andato alla stazione", frase che è di dubbio significato e, comunque, diversa da quella iniziale. La cosa dipende dal valore temporale (o addirittura causale) che si attribuisce alla congiunzione nel linguaggio corrente.

Disgiunzione. Le ambiguità nell'uso di questo connettivo sono ben note e non è il caso di insistere oltre. Notiamo solo che la (brutta) scrittura "e/o" equivale alla disgiunzione comunemente usata in logica.

Negazione. Anche senza soffermarsi sulle frasi in cui compare una doppia negazione, l'uso del "non" è talvolta ambiguo, ad esempio in presenza dei cosiddetti verbi servili. Così nella frase *non voglio andare* l'avverbio "non" si riferisce al secondo verbo: non si intende esprimere la mancanza di volontà di andare, quanto, piuttosto, la volontà di non andare. Anzi, per negare frasi del tipo "voglio andare", "devi fare", si preferisce in genere modificare il verbo ("non ho voglia di andare", "non è necessario che tu faccia").

Implicazione. *Se non piove vengo a trovarti.* Più che un'implicazione, questa frase esprime un'equivalenza (o equivalenza logica, o coimplicazione): l'amico al quale l'abbiamo detta ci aspetta se e solo se non piove. Nel linguaggio corrente, in effetti, l'equivalenza è raramente usata in modo esplicito; e così, a livello didattico, lo studente è portato facilmente a confondere implicazione ed equivalenza (si pensi alle difficoltà che si incontrano nella risoluzione di equazioni irrazionali, quando si trasforma un'equazione in una non equivalente).

5. Vediamo ora alcuni esempi di uso ambiguo dei quantificatori, questa volta facendo riferimento proprio al linguaggio matematico (non formalizzato).

Un poligono è sempre equiscomponibile con un quadrato. Basta un po' di riflessione per convincersi che il primo articolo "un" esprime un quantificatore universale, mentre il secondo corrisponde a un quantificatore esistenziale (per ogni poligono esiste un quadrato ...).

Scelto un ε *positivo e arbitrario.* In questa frase si presenta come attributo di ε anche il modo in cui avviene la scelta. La dizione è molto comune e forse tollerabile, ma può far pensare che, come esistono numeri positivi e numeri non positivi, così esistano numeri arbitrari e numeri non arbitrari.

6. Dagli esempi precedenti possiamo trarre la seguente conclusione: il linguaggio corrente non è sempre adatto all'uso matematico. Al contrario, è ben noto come l'abitudine alla correttezza di espressione che si acquisisce nello studio della matematica possa migliorare la proprietà di linguaggio di uno studente.

Come abbiamo già visto, per superare le ambiguità del linguaggio naturale si introducono i linguaggi artificiali: linguaggi formalizzati in logica e linguaggi di programmazione in informatica. Le due situazioni presentano analogie sul piano didattico: anche una limitata esperienza di programmazione rende uno studente consapevole dell'importanza di un'impostazione chiara e della correttezza dei dettagli.

Personalmente, non ritengo tuttavia che la logica nella Scuole media superiore vada vista esclusivamente in funzione dei computer. A livello sia didattico sia teorico, l'informatica potrà offrire preziosi spunti e problemi interessanti alla logica, come nei secoli passati è avvenuto fra fisica e analisi; ma penso vada rivendicato il valore autonomo della matematica pura. Senza affrontare il delicato problema dei rapporti fra matematica pura e matematica applicata - che richiederebbe una lunga digressione - mi limito a un solo esempio: l'impatto culturale che la Grecia antica ha avuto sul mondo moderno è proprio dovuto ai pensatori "astratti", da Socrate (presentato come perdigiorno nelle commedie di Aristofane), ad Aristotele (l'inventore della logica), a Euclide...

7. Come impostare l'insegnamento della logica? I nuovi programmi per il biennio raccomandano esplicitamente che la logica rappresenti "una riflessione che si sviluppa man mano che matura l'esperienza matematica dell'allievo". Esaminiamo

brevemente, a titolo di esempio, alcune situazioni, frequenti nello studio della matematica, che si prestano a una riflessione logica.

Definizioni. Una definizione consiste nell'attribuire un nome (nuovo) agli oggetti che soddisfano a una determinata proprietà. Dopo di che, ogni volta che entrano in gioco oggetti con quella proprietà, potremo indicarli, più brevemente, ricorrendo alla nuova parola introdotta. Da questo punto di vista, una definizione non è altro che un'*abbreviazione* che non fornisce alcuna informazione sugli oggetti di cui si parla. (In altre parole: non è colto chi conosce molte definizioni.)

Naturalmente, l'uso di opportune definizioni è essenziale per rendere chiaro il discorso. Può anzi essere un utile esercizio partire da un enunciato familiare (ad esempio: il teorema di Pitagora) e sostituire via via ad alcuni termini le rispettive definizioni: dopo pochi passaggi si otterrà un enunciato corretto, ma decisamente più difficile da capire.

Una sola raccomandazione didattica: in una definizione si eviti di ricorrere a concetti particolari non necessari. Ad esempio, per distinguere fra poligoni concavi e convessi, è inutile far riferimento al prolungamento dei lati, quando si ottiene una definizione applicabile ad ogni figura considerando i segmenti che hanno per estremi due punti della figura stessa.

8. L'enunciato di un *teorema* è spesso sotto forma di implicazione (questo, tuttavia, non accade sempre: l'enunciato della geometria dello spazio "esistono coppie di rette sghembe" non contiene alcuna ipotesi specifica). Limitandoci agli enunciati del tipo $p \to q$, va osservato che questi si possono leggere anche in ciascuno dei due modi seguenti: "p è condizione sufficiente per q" e "q è condizione necessaria per p". Come è ben noto, l'implicazione $p \to q$ non equivale all'inversa $q \to p$, ma alla contronominale $\neg q \to \neg p$. E, in effetti, capita spesso di dimostrare, invece di un'implicazione, la sua contronominale: si tratta di una tipica forma del ragionamento per assurdo.

I teoremi sono spesso presentati con altri nomi: molto frequenti sono i *lemmi* e i *corollari*, ma si parla anche di *criteri* (si tratta in genere di condizioni sufficienti: si pensi ai criteri di convergenza per le serie), di *regole* (si usa questo termine quando l'enunciato fornisce indicazioni su come svolgere certi calcoli - ad esempio, regola di Ruffini, regola di De L'Hospital), di *principi* (parola, quest'ultima, che si riferisce anche ad alcuni assiomi).

9. Vediamo, infine, alcune osservazioni didattiche su due settori specifici della logica che sono strettamente legati ai problemi linguistici esaminati in precedenza: il calcolo delle proposizioni e il calcolo dei predicati.

Parlando di proposizione, è bene sottolineare la differenza fra "falso" (es.: $2+2=5$) e "privo di senso" (es.: $2=+<$). Non si dimentichi poi che una frase è una proposizione non se "siamo in grado" di stabilire se è vera o falsa, ma se "è sensato" dire che la frase è vera o falsa: ad esempio, "la miliardesima cifra decimale di π è uguale a 4" è una proposizione.

Forse, non è il caso di dedicare troppo tempo alle tavole di verità: se da un lato si realizza il sogno di Leibniz di ridurre il ragionamento a un calcolo, si corre il rischio di privilegiare l'aspetto algoritmico anche nello studio della logica.

Inoltre, è opportuno mostrare come, in molti casi, vi siano metodi più rapidi per stabilire se una certa formula proposizionale è o no una tautologia.

Se poi entrano in gioco anche quantificatori (calcolo dei predicati), allora non sono applicabili strumenti quali le tavole di verità. E siccome non è ragionevole pensare a una impostazione assiomatica del calcolo dei predicati in una Scuola media superiore, ci si deve limitare a riflessioni a posteriori: si tratta, cioè, di riconoscere e di rendere esplicite certe leggi logiche, basandosi su esempi e sul buon senso piuttosto che su ragionamenti rigorosi. Ad esempio, si potrà chiedere se sono equivalenti e no le seguenti coppie di formule:

$\forall x [P(x) \wedge Q(x)]$ e $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$

$\exists x [P(x) \wedge Q(x)]$ e $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$

e le analoghe con la disgiunzione $\vee$ al posto della congiunzione; oppure se è lecito lo scambio dei quantificatori:

$\forall x\, \exists y \ldots$ e $\exists y\, \forall x \ldots$

(un tipico esempio compare nella definizione di gruppo: per ogni elemento x esiste un opposto; esiste un elemento neutro, nel senso che per ogni x ecc.).

Talvolta, sarà opportuno sottolineare il ruolo fondamentale dei quantificatori in alcune dimostrazioni. Ad esempio, la dimostrazione dell'esistenza del circocentro di un triangolo si articola nel modo seguente: detto ABC il triangolo,

ogni punto dell'asse di AB ha ugual distanza da A e da B;

ogni punto dell'asse di BC ha ugual distanza da B e da C;

esiste un punto comune all'asse di AB e all'asse di BC;

per cui si può concludere che

esiste un punto che ha ugual distanza da A, B e C.

10. Ancora sui quantificatori, si ricordi che questi agiscono sempre su variabili. Si potrebbero anzi conciderare come quantificatori anche altre scritture, come $\{x / \ldots\}$, che a partire da una frase aperta permettono di costruire un oggetto sensato - in quest'ultimo caso un insieme, nel caso usuale una proposizione.

E' una fatto generale che il nome della variabile non influisca sul risultato; in questo senso è ad esempio opportuno non limitarsi a considerare equazioni nella variabile x. Talvolta, tuttavia, il simbolismo può risultare d'aiuto in situazioni più complicate. Ad esempio, da un punto di vista strettamente logico, non vi è alcuna differenza fra "x" ed "x_0", ma è fuori di dubbio che a seconda del contesto è preferibile usare l'uno o l'altro simbolo.

Un esempio anche più chiaro è il seguente. Le due scritture $y=mx$ ed $y=xz$ sono di per sé equivalenti: in entrambi i casi abbiamo l'uguaglianza fra una variabile e il prodotto di altre due. Tuttavia, in termini di geometria analitica è del tutto naturale pensare nel primo caso al fascio di rette di centro l'origine e nel secondo a una quadrica nello spazio. Più precisamente, le due situazioni corrispondono a due insiemi diversi:

$\{(x;y;z) \ / \ y=xz\}$ nel secondo caso,

$\{\{(x;y) \ / \ y=mx\} \ / \ m \in R\}$ nel primo caso.

La scelta della lettera m serve proprio ad indicare implicitamente un diverso livello di quantificazione.

11. In conclusione, ritengo che l'insegnamento della logica consista, non esclusivamente ma in primo luogo, nel prestare attenzione a certi fatti, in particolare linguistici. E come un buon giocatore di poker applica, sia pure inconsapevolmente, le regole del calcolo delle probabilità, così io credo che un buon insegnante di matematica abbia sempre, forse inconsapevolmente, insegnato elementi di logica.

Elisa Gallo (Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino),
Maria Rosa Bertotto, Maria Luisa Stanchina, Claudia Testa.

Il metodo dell'esplicitazione e lo strumento dell'attività per rinnovare l'insegnamento della Matematica.

Premessa

Riferiremo qui di una ricerca del nucleo C. N. R., che lavora a Torino "sull'apprendimento ed insegnamento della Matematica nel biennio della scuola secondaria superiore", diretto dalla Professoressa Elisa Gallo.

Con questa ed altre ricerche svolte il gruppo ha costruito i fondamenti teorici su cui basarsi per elaborare un progetto per l'innovazione dell'insegnamento della Matematica, sperimentati nel biennio dell'I.P.S.I.A. "Plana" e dell'I.T.I.S. "Grassi" di Torino.

La ricerca svolta ha alla base una concezione dell'insegnamento della Matematica così sintetizzabile:

educare alla Matematica è più complesso che insegnare contenuti matematici: si tratta infatti di far nascere il bisogno ed il piacere di studiare questioni matematiche, di far imparare metodi e procedimenti di pensiero tipici della disciplina, di far crescere le conoscenze matematiche in accordo con lo sviluppo cognitivo dell'allievo e coerenti al loro interno.

Gli obiettivi

In primo luogo si sono fissati gli obiettivi generali, che mettono in luce le esigenze didattiche del gruppo di lavoro, esigenze che sono una sintesi di quelle di ciascun componente ottenuta con una analisi approfondita e con ampie discussioni. Essi sono:

1. recuperare concretamente le conoscenze acquisite dagli alunni nella scuola media inferiore, attraverso un approfondimento effettivo di intuizioni e tecniche per arrivare alla costruzione dei concetti;
2. costruire la disciplina con particolare attenzione ai procedimenti logici che la caratterizzano;
3. motivare la costruzione della matematica dal suo interno, utilizzando nei momenti chiave la dialettica
   strumento matematico $\longleftrightarrow$ concetto matematico;
4. stimolare nell'allievo l'attitudine ad una ricerca autonoma, come metodo di costruzione delle proprie conoscenze;
5. costruire in modo graduale la lingua matematica a livello retorico ed a livello formale.

I metodi

Le scelte inerenti i metodi sono strettamente legate agli obiettivi che ci siamo prefissati.

Un punto fermo della metodologia da noi scelta è l'esigenza di rendere esplicite le procedure seguite nella costruzione della conoscenza, evidenziando con gli studenti:

A. il momento dell'introduzione dei concetti, e le operazioni di astrazione e generalizzazione messe in moto per tale introduzione (obiettivo 1);

B. i processi di ragionamento tipici della disciplina nel momento in cui si fanno operare, sottolineando, in particolare, l'analogia, l'induzione, la deduzione, il congetturare, la tecnica del contro esempio (obiettivo 2);

C. quali sono le conoscenze presupposte o prerequisiti, utili a livello di strumento per fare altro, sottolineando il momento successivo in cui essi diventano oggetto di studio e di conoscenza (obiettivo 3);

D. quali sono le caratteristiche di una situazione di ricerca matematica, portando l'allievo ad utilizzare la sua operatività, ad imparare a porsi domande ed a dare risposte corrette e coerenti con le questioni aperte su cui lavora (obiettivo 4);

E. il confronto tra più linguaggi, che esprimono in parallelo uno stesso fatto matematico, per raggiungere una costruzione ragionata della lingua matematica (si utilizza la lingua materna ma con differenziazioni di significato sui termini comuni), sia a livello retorico che a livello formale (obiettivo 5).

Gli strumenti

Tre sono i tipi di strumenti che riteniamo utili per la metodologia scelta.

I fogli dei prerequisiti sui quali si lavora con gli studenti: in essi vengono elencate tutte le conoscenze presupposte negli studenti in un certo momento della costruzione, pensate quindi come strumenti utili per lavorare.

I fogli degli obiettivi che avevamo, pagina finale di ogni unità del progetto: in essi vengono elencati gli obiettivi particolari di ogni unità.

I fogli delle attività, strumento principale del progetto, alle quali intendiamo qui dedicare una particolare attenzione.

Le attività sono situazioni problematiche sulle quali l'alunno è chiamato a lavorare in prima persona, costruendo anche egli una parte del materiale. Durante una attività l'alunno compie una ricerca individuale, più o meno guidata, ponendosi delle domande, facendo delle congetture, provandole o confutandole. Nello svolgimento di una attività viene quindi creato un momento di ricerca nel quale vengono rispettate le intuizioni, i suggerimenti, le conoscenze, i metodi di lavoro di ogni alunno per valorizzare così la fase di scoperta di ciascuno.

Nel nostro progetto le attività prendono in generale spunto da questioni interne alla matematica: si motiva cioè la costruzione della disciplina facendo nascere l'esigenza di una sua sistemazione coerente e rigorosa; ad ogni attività, cioè ad ogni parte di ricerca individuale, segue una sistemazione rigorosa, che costituisce un vero testo di studio (non si tratta cioè qui dell'insegnamento per problemi che non sempre mira a dare coerenza alle costruzioni).

All'interno del nostro progetto le attività svolgono fondamentalmente tre ruoli:

attività di tipo A: hanno la funzione di fare emergere dalla ricerca personale dell'alunno un concetto fondamentale (per esempio: variabile, relazione tra insiemi, funzione, ...);

attività di tipo B: hanno la funzione di evidenziare e fare applicare un procedimento tipico della disciplina (per esempio: l'analogia, l'induzione, la generalizzazione, la tecnica del controesempio, ...);

attività di tipo C: hanno la funzione di fare compiere all'alunno una ricerca completamente aperta, nella quale è egli stesso a formulare domande, a scegliere una sua pista di lavoro, a giungere a delle conclusioni, (tecnica delle situazioni matematiche).

Presentiamo ora, a titolo di esempio, alcune attività per ciascuno dei tipi indicati, illustrando anche alcuni aspetti della dinamica del loro utilizzo in classe; tali attività sono state proposte agli alunni di prima di un I.P.S.I.A. e di un I.T.I.S. di Torino dalle insegnanti Maria Luisa Stanchina, Claudia Testa e Maria Rosa Bertotto.

Attività di tipo A

Sono tre attività (A1, A2, A3) volte a far emergere in concetto di variabile. Precisiamo innanzitutto, che il concetto di variabile a cui ci si riferisce è quello di variabile logica, cioè nome, lettera, per indicare un qualunque elemento di un dato insieme, nel nostro caso dell'insieme numerico $\mathbb{N}$.

Le attività A1, A2, A3, sono state proposte agli alunni senza avere precedentemente sensibilizzato il concetto di variabile.

ATTIVITA' A 1 - Molte scritture per un numero.

In alcuni esercizi abbiamo sfruttato il fatto che un numero naturale può essere scritto in molti modi diversi.

Esempio

$16 = 2^4 = 4^2 = 15 + 1 = 2 \times 8 = 25 - 9 = \dots$

$25 = 5^2 = 2 \times 12 + 1 = 24 + 1 = 16 + 9 = \dots$

Ciascuna delle scritture di uno stesso numero può essere utilizzata per mettere in evidenza una sua proprietà.

Esempio

$25 = 5^2$	evidenzia che 25 è il quadrato di un naturale
$25 = 2 \times 12 + 1$	evidenzia che 25 è un numero dispari
$25 = 24 + 1$	evidenzia che 25 è il successivo di 24
$25 = 16 + 9$	evidenzia che 25 è la somma di due quadrati

Prova a rispondere alle seguenti questioni:

1. Leggi le proprietà del numero 16 evidenziate dalle diverse scritture proposte sopra.
2. Trova altre scritture per il numero 36 e leggi le proprietà evidenziate da esse.
3. Scrivi in altro modo

il numero 27	per evidenziare che è un multiplo di 3
il numero 2	per evidenziare che è la differenza di due numeri dispari
il numero $3 \times 15 \times 5$	per evidenziare che è il prodotto di due quadrati
il numero $5 \times (3 + 2)$	per evidenziare che è la somma di due multipli di 5.

Lo scopo di tale attività è quello di abituare gli alunni a riconoscere e leggere le proprietà di un numero evidenziate da una sua particolare scrittura e, viceversa, a scrivere un dato numero in modo da evidenziarne la proprietà, o le proprietà, più "convenienti" in una data situazione.

Dopo aver letto insieme le parti esplicative si lasciano lavorare gli alunni per alcuni minuti e si mette poi in comune il lavoro svolto. I ragazzi contribuiscono alla discussione con grande ricchezza di idee, individuano molte scritture per uno stesso numero e, tra esse, evidenziano le più significative, ma dimostrano una notevole difficoltà nel comunicare verbalmente tali proprietà.

Quale rilancio della attività l'insegnante può suggerire di individuare le proprietà vere per un qualsiasi numero naturale, o per tutti gli elementi di particolari sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ (per esempio: essere multiplo di 1, essere successivo o precedente di un numero naturale, essere pari, ...).

ATTIVITA' A 2 - Pensa un numero.

	soluzione concordata
- Pensa un numero - Somma ad esso 5 - Moltiplica il numero ottenuto per 2 - Togli il doppio del numero che hai pensato Hai calcolato che cosa viene?	
- Pensa un numero - Moltiplicalo per 2 - Aggiungi 6 - Dividi il numero ottenuto per 2 - Togli il numero che hai pensato Hai calcolato che cosa viene?	

ATTIVITA' A 2 (segue)

- Pensa un numero
- Somma ad esso 4
- Moltiplica il numero ottenuto per 3
- Togli 12
- Dividi il numero ottenuto per 3

Hai calcolato che cosa viene?

Lo scopo di tale attività è quello di far nascere l'esigenza della generalizzazione mediante l'uso delle variabili.

Si chiede ad ogni alunno di eseguire il primo "gioco" scegliendo un particolare numero; a meno di errori di calcolo, tutti ottengono 10, pur non essendo partiti dallo stesso numero. Si chiede agli alunni di eseguire ancora una prova. A questo punto emergono dagli alunni stessi due domande, utili entrambe come rilancio della attività:

- si ottiene 10 per un qualsiasi numero naturale?
- perchè si ottiene proprio 10?

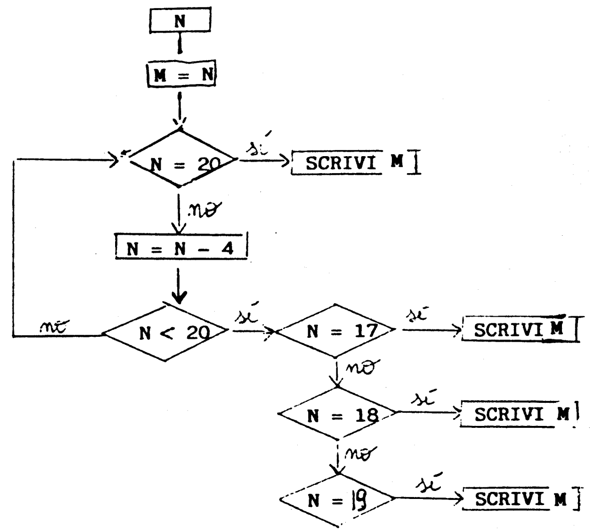
Nel tentativo di rispondere a tali domande gli alunni constatano di persona il limite del lavorare direttamente sui numeri facendo molte prove, e sentono l'esigenza di trovare un modo che permetta di dare risposte valide per un qualsiasi numero. La ricerca subisce un momento di stasi finchè qualcuno propone: "Potremmo usare una lettera al posto dei numeri!". Il "salto" verso la generalizzazione è stato compiuto. A questo punto è sufficiente, per rispondere alle domande precedentemente individuate, ricordare alcune proprietà delle operazioni in $\mathbb{N}$.

Al termine di questa fase l'insegnante può ripercorrere l'iter degli alunni, svolgendo alcune prime considerazioni sul concetto di variabile ed assegnando, come lavoro per casa, l'analisi degli altri due "giochi" proposti nell'attività e la creazione di "giochi" analoghi.

ATTIVITA' A 3 - Macchina per " setacciare" i numeri maggiori o uguali a 20.

ISTRUZIONI

RISULTATI



A = { .... }

B = { .... }

C = { .... }

D = { .... }

Esempi:
se introduci 28, essendo 28 ≠ 20, si costruisce 24 = 28 - 4, poi 20 = 24 - 4; allora 28 esce in A;
se introduci 37, essendo 37 ≠ 20, si costruisce 33 = 37 - 4, poi 29 = 33 - 4 ... , 17 = 21 - 4; allora 37 esce in B.

La macchina setaccia tutti i numeri maggiori o uguali a 20, facendoli comparire in almeno uno degli insiemi A, B, C? D? Perchè?
Un numero può comparire in più di uno di tali insiemi?

Gli elementi di A hanno una proprietà comune? Quale?
Come scriveresti gli elementi di A per evidenziare la loro proprietà comune?
Qual è la proprietà caratteristica dell'insieme A?
E quella di B?
E quella di C?
E quella di D?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Lo scopo della attività è quello di mettere a frutto le abilità sensibilizzate nelle due precedenti: quella di trovare la scrittura più "conveniente" per evidenziare le proprietà di alcuni numeri naturali e quella di generalizzare tali proprietà mediante l'uso delle variabili.

La comprensione del "meccanismo" della macchina risulta piuttosto difficoltosa, anche perchè nel suo "schema di funzionamento" si usano le variabili nel senso di "nomi delle caselle di memoria" (particolare spiegazione necessitano infatti espressioni quali M = N e, soprattutto N = N - 4). Le difficoltà incontrate dagli alunni spiegano la nostra scelta di inserire nell'attività una traccia di lavoro piuttosto dettagliata. Il primo blocco di domande ha lo scopo di guidare alla comprensione del meccanismo della macchina. Il secondo blocco ha come scopo quello di indurre a generalizzare.

Una volta compreso il "meccanismo di funzionamento" gli alunni individuano facilmente gli elementi degli insiemi

$A=\{20,24,28,\dots\}$ $B=\{21,25,29,\dots\}$ $C=\{22,26,30,\dots\}$ $D=\{23,27,31,\dots\}$

ma incontrano alcuni ostacoli nel trovare una proprietà caratteristica di ciascuno di essi.

Tra le proprietà ritenute caratteristiche individuate, alcune non sono tali, per esempio

per A e C "essere insiemi di numeri pari", per B e D "di numeri dispari", oppure

per A, B, C, D "avere elementi che vanno di 4 in 4".

Altre, invece, sono corrette ma non "convenienti" perchè di non facile scrittura simbolica, per esempio

per C "essere un insieme di multipli di 2 ma non di 4".

Dopo aver escluso, attraverso una discussione comune, le proprietà che non caratterizzano gli insiemi A, B, C, D (molte di queste vengono riconosciute come "non corrette" dagli alunni stessi, mediante l'uso inconscio della tecnica del controesempio), l'insegnante rilancia l'attività per esempio proponendo agli alunni di scegliere le proprietà caratteristiche "più economiche", cioè quelle che si trasferiscono con pochi cambiamenti da un insieme all'altro. Una volta

individuate tali proprietà non è difficile scriverle in modo generale e simbolico con l'uso delle variabili e si ottiene che

gli elementi di	A	sono del tipo	4k
"	B	"	4k + 1
"	C	"	4k + 2
"	D	"	4k + 3

Ulteriore rilancio consiste nell'individuare qual è l'insieme in cui k varia.

All'attività segue una fase di inquadramento e di approfondimento del concetto di variabile e generalizzazione e di analisi dell'uso delle variabili in matematica (per ragionare sui numeri, per il calcolo letterale, ...).

Attività di tipo B

ATTIVITA'B

Per analogia a quanto fatto nel caso $(a + b)^2$

(lavorare per analogia significa passare da una situazione completamente conosciuta ad una nuova, trasferendo la procedura di studio e vedendo ciò che si conserva, ciò che si muta e come si muta)

lavora sui tre casi seguenti

$$(a + b + c)^2$$
$$(a + b)^3$$
$$(a + b)^4$$

Hai sempre modelli geometrici per le formule che riesci a stabilire?
Se si, descrivili.

Lo scopo di questa attività è quello di mettere in atto il procedimento dell'analogia.

Prima di proporre l'attività si è ricavata per via algebrica e geometrica la formula di $(a + b)^2$.

La maggior parte degli alunni lavora in un primo tempo per via algebrica. Alcuni intendono analogia in quanto analogia di procedimento, per esempio calcolano $(a + b)^2$ come $(a + b)(a + b)(a + b)$ o come $(a + b)^2(a + b)$, giungendo così, a meno di errori di calcolo, al risultato corretto. Altri intendono analogia in quanto analogia di risultato; questa interpretazione li porta a scrivere la formula corretta per $(a + b + c)^2$, ma li induce anche a scrivere

$(a + b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$ e

$(a + b)^4 = a^4 + 4ab + b^4$

Un rilancio possibile in questo caso consiste nell'indurre gli alunni a verificare o confutare la loro congettura con esempi numerici, facendoli riflettere sul ruolo delle variabili naturali a e b (lettere che stanno al posto di un qualsiasi numero naturale).

Interessante è poi la trasposizione per analogia della costruzione geometrica di $(a + b)^2$ in quella di $(a + b)^3$; un gruppo di alunni giunge, dopo alcuni tentativi per trovare un modello geometrico piano, a scrivere il seguente schema

$(a + b)^2$	$(a + b)^3$
piano	spazio
quadrato	cubo
rettangolo	parallelepipedo
area	volume

giungendo così ad un modello adatto. Lo stesso gruppo di alunni si rende conto della impossibilità di trovare, nella geometria elementare, un modello per rappresentare $(a + b)^4$.

L'attività è seguita da una discussione in classe sul procedimento dell'analogia, dopo la quale si propone agli alunni di ricercare, nel materiale precedentemente utilizzato, esempi di tale procedimento (per es: attività A2 - costruzione di altri "giochi"; attività A3 - proprietà caratteristica di C e D, una volta trovate quelle di A e B)

Attività di tipo C

ATTIVITA'C

I matematici chiamano triangolo di Tartaglia il seguente triangolo di numeri:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

....

Studialo e scoprine...

Questa attività si avvicina alla idea di "situazione di attività matematica", è cioè una attività che "... non permette a priori di sapere in quale direzione ci si deve spostare nè le nozioni ed i comportamenti da seguire, che permette di essere affrontata secondo più piani di attacco, da ciascuno dei quali si possono generare delle ricerche".

Essa può essere pertanto proposta in classe secondo le tre fasi tipiche della "situazione matematica": lancio, rilancio, bilancio.

Il lancio consiste nel leggere l'enunciato della attività e nel raccogliere e scrivere alla lavagna le domande immediate degli alunni, che sono molte e che si strutturano intorno a questi tre filoni:

- come si completa il triangolo? è finito?
- quali regolarità presenta?
- a che cosa serve?

A questo punto ogni alunno può iniziare la sua fase di ricerca personale scegliendo il filone che più lo interessa.

La quasi totalità della classe sceglie, in questo caso, il il filone relativo alla costruzione del triangolo, formula le sue congetture, le verifica o le confuta. In questa fase l'insegnante, che deve padroneggiare completamente la situazione dal punto di vista matematico, gira tra gli alunni, rilanciando con opportune osservazioni le ricerche di coloro che sono in un momento di stasi.

Alla fase di ricerca personale segue il bilancio, si mettono in comune i risultati, che in questo caso sono i diversi metodi per costruire il triangolo di Tartaglia (per riche orizzontali, per righe oblique, ...). Alcune di tali procedure sono corrette, altre vengono confutate nel corso della discussione.

L'insegnante propone poi, quale rilancio della ricerca di affrontare gli altri due filoni individuati e cioè la ricerca delle regolarità e della utilità del triangolo per ricavare lo sviluppo di $(a + b)^n$ (va ricordato che questa attività segue la costruzione delle potenze di binomi $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$).

Conclusioni

Per concludere vogliamo proporre alcune riflessioni, frutto sia della nostra esperienza individuale in classe, sia, soprattutto del confronto all'interno del gruppo di ricerca.

Durante lo svolgimento delle attività l'intero gruppo classe è coinvolto; ogni alunno può lavorare con le proprie conoscenze, mettendole in moto e/o entrando in conflitto con esse. Ciò consente di compiere un recupero attivo delle conoscenze precedenti; un recupero cioè in cui gli alunni non ritrovino le conoscenze come essi le avevano apprese, ma siano stimolati a riapprenderle superando gli eventuali ostacli posti da esse e ad approfondirle. E' facile capire quanto un processo di questo tipo sia utile, soprattutto durande la prima superiore classe in cui il livello di conoscenze di base degli alunni è alquanto disomogeneo.

Le attività poi portano gli alunni verso obiettivi di tipo

"sociale" quali, ad esempio

- sapersi inserire e gestire nel gruppo-classe,
- saper comunicare,
- saper rispettare le opinioni altrui,
- saper perseverare negli sforzi,
- saper organizzare il proprio tempo ed il proprio lavoro.

La pratica delle attività dà all'insegnante in classe un ruolo diverso, più discreto e più incisivo allo stesso tempo: egli segue più da vicino gli alunni, sostenendo la ricerca personale di ciascuno con osservazioni e domande pertinenti, rilanciando la ricerca quando questa è in una fase di stasi, osservando da vicino il metodo di lavoro, i progressi e gli ostacoli incontrati da ogni alunno. Libero dagli schemi tradizionali l'insegnante riceve dalle attività un grande numero di stimoli per la ricerca e l'approfondimento personali (necessari per condurre ed inventare attività).

Ancora una considerazione su una delle preoccupazioni principali di ogni insegnante: la gestione del monte ore di lezione, che pare essere sempre troppo basso, rispetto alle esigenze. La pratica delle attività richiede sicuramente un impiego di tempo maggiore, di quando non ne richieda la "lezione tradizionale"; la nostra esperienza ci fa dire, però, che il tempo dedicato ad una attività non è "tempo perso" ma tempo di arricchimento sia per gli alunni che per l'insegnante.

Bibliografia

(1) Groupe mathématique du S.R.P.
"Sur les pistes de la mathématique en division moyenne"
Departement de l'instruction publique, Ginevra, marzo 1983

(2) J. Brun

"Le basi teoriche della psicologia del funzionamento cognitivo nelle situazioni matematiche"

Conferenza tenuta presso l'Università di Torino, aprile 1983

(3) G. Charrière

"La concezione delle situazioni matematiche"

Conferenza tenuta presso l'Università di Torino, aprile 1983

(4) Nucleo di Ricerca Didattica C.N.R. - direttore E. Gallo

"Aspetti pedagogici e psicologici delle situazioni di attività matematica e loro utilizzo nell'analisi di una sperimentazione di 'ricerca aperta' sugli spirolateri".

Ricerche di Didattica della Matematica - quaderno n. 3, 1985

(5) C. Testa

"Nombres er variables"

Atti Convegno CIEAEM 1986

(6) E. Gallo

"Legami tra la ricerca e l'innovazione di contenuti e di metodi"

Atti Convegno "Perchè insegnamo Matematica? ..." - IRRSAE Piemonte, 3/4 ottobre 1986

Fulvia Furinghetti

Dipartimento di Matematica - Genova

IPOTESI PER UNA BIBLIOTECA DI AREA MATEMATICA

1. Descrizione del progetto

Il progetto di cui riferiamo in questa nota ha l'obiettivo di integrare nel corso di matematica della scuola secondaria superiore un'attività di lettura guidata e ragionata di testi a soggetto matematico o, più in generale collegabili alla formazione scientifica, in particolare all'insegnamento della fisica che attualmente è quasi sempre curato dall'insegnante di matematica.

Ovviamente questo tipo di attività non concerne i libri di testo o affini, anche se proprio da essi si potrebbe cominciare un avvio degli studenti alla lettura, dal momento che usualmente l'impiego del libro di testo si limita alla parte contenente gli esercizi.

La fase preliminare del progetto è consistita nel fare un quadro dell'esistente nel tipo di letteratura che ci interessa e che dovrebbe avere queste caratteristiche: soggetto, come si è detto, matematico o al più scientifico, lingua italiana, possibilmente reperibilità in commercio (in seconda istanza, nelle biblioteche di tipo universitario per eventuali fotocopiature) approccio tale da permettere una lettura quanto più possibile autonoma da parte degli studenti, cura ed attendibilità nel contenuto scientifico.

Questa fase si è rivelata molto impegnativa e, per certi versi, scoraggiante,ma fornisce risultanze significative e ricche di spunti di riflessione, per cui ci pare utile analizzarla brevemente qui di seguito.

Le nostre fonti per la reperibilità fisica dei testi sono state: prima di tutto la biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, poi i cataloghi dei principali editori ed infine alcune biblioteche di Istituti di scuola secondaria superiore.

Un commento su queste fonti è utile in primo luogo a giustificare in anticipo le eventuali dimenticanze ed omissioni e poi per prefigurare alcuni punti rilevanti di ciò che diremo nel n.2.

Nella nostra biblioteca dipartimentale il settore che poteva interessarci risul ta ben seguito solo fino agli anni '60.

Nelle biblioteche scolastiche da noi visitate esiste nell'area scientifica solo qualcuna delle seguenti categorie: libri di testo usuali, libri comprati acriticamente in blocco da un catalogo editoriale, titoli sparsi e casuali. Abbiamo anche trovato qualche storia della tecnologia (piuttosto vecchia) che potrebbe essere una buona lettura per studenti, ma esula dai nostri obiettivi di lavoro e qualche manuale per l'uso del personal computer.

Per quello che riguarda gli editori va detto che la fascia culturale che sta fra la divulgazione e il manuale scolastico o il testo specialistico ha una buona tradizione nella cultura anglosassone, ma non è molto vivace e aggiornata in Italia, anche solo a livello di traduzione. Già questo fatto è un primo riflesso dell'atteggiamento verso la cultura scientifica di cui diremo nel n. 2. Sta di fatto che molti testi sono stati stampati troppi anni fa e rischiano di essere esauriti.

Invero va detto che appunto questa fascia particolare è in sè oggettivamente difficoltosa da coprire e sono pochi gli autori veramente soddisfacenti, specialmente dopo gli anni '60 (v. quanto detto precedentemente per la nostra biblioteca dipartimentale) in cui si è fortemente accentuato il tipo di ricerca specialistica e settoriale.

Una volta reperiti, seppure con le riserve sopraddette, i titoli, alcuni insegnanti (10) afferenti al gruppo di ricerca sull'educazione matematica hanno elaborato schede informative contenenti indicazioni su:

- argomento del libro,
- fascia d'età,
- indirizzo di studi,
- prerequisiti,
- conoscenze e abilità indotte dalla lettura,
- valenze pedagogiche,
- connessione con altre discipline (anche non scientifiche) dei curricula.

Come si vede le schede non sono (e non era del resto nelle nostre intenzioni) delle vere e proprie recensioni, anche se qua e là si coglie il giudizio entusiasta o perplesso dell'estensore delle schede e pur tenendo conto del fatto che già l'inclusione di un titolo è di per sè un giudizio positivo sul libro.

Gli insegnanti che hanno collaborato al progetto insegnano matematica o matematica e fisica in differenti tipi di scuola (licei, o istituti tecnici) e ciò ci è

sembrato importante per fornire le informazioni da angolazioni che tengano conto di utenze che sono, come è noto, molto differenti.

Le schede sono raccolte in un volume e sono divise nelle seguenti sezioni:

I *Storia della matematica. Idee generali sulla matematica.*

II *Matematica dilettevole e curiosa. Divulgazione.*

III *Matematica, arte, natura, attività umane.*

IV *Matematica, scienze, cultura, società.*

V *Fisica.*

VI *Matematica, strumenti di calcolo, informatica.*

VII *I numeri.*

All'inizio del volume c'è un inquadramento generale del lavoro, ed inoltre all'inizio di ogni sezione c'è una presentazione della sezione stessa con le osservazioni didattiche e gli spunti di utilizzo in classe che ci sono sembrati più rilevanti per quello che riguarda il tema trattato nella sezione.

Questa organizzazione è funzionale alla struttura del lavoro che deve essere *aperto*, intendendo con ciò che i titoli ed i commenti sono da interpretarsi come archetipi, poichè per sua natura esso non può e non deve essere esaustivo, ma si presta a sostituzioni, aggiornamenti, integrazioni (v. anche n. 3). Il volume è destinato alla lettura da parte di insegnanti di matematica o, eventualmente, di area scientifica e dovrebbe costituire, come si è detto un punto di partenza per elaborare itinerari di lettura integrati nel corso di matematica, sulla base delle indicazioni fornite dalle schede. In realtà ci piacerebbe pensare che su di esso meditano anche gli insegnanti di altre discipline (per storia e filosofia ciò è quasi fisiologico) per trarre conclusioni riguardanti la disciplina da loro insegnata nel contesto globale dei curricula.

Concludiamo con qualche breve considerazione sulle varie sezioni.

Le sezioni I, IV, V sono le più ricche di titoli, sia perchè sugli argomenti trattati c'è una più lunga e consolidata tradizione, sia soprattutto perchè esse sono più rispondenti alla formazione culturale degli insegnanti che hanno preparato le schede. Inoltre i temi trattati permettono, pur mantenendo rigore e attendibilità scientifica, approcci più generali e meno pesantemente tecnici.

Per ragioni opposte è stato difficile comporre la sezione VI, poichè gli insegnanti sono per ora meno preparati e sensibilizzati su questi argomenti e d'altro canto l'editoria offre un gran numero di manuali d'uso dei calcolatori, ma pochi libri su idee generali e trame concettuali. Quanto al tema della sezione, se si esce dalle considerazioni qualitative che ormai quasi sono appannaggio dei media, si devono necessariamente illustrare i concetti dal punto di vista tecnico il che rende un po' tanto impegnativa la lettura. Questa sezione ha per gli studenti anche un valore strettamente informativo, perchè è finalizzata a dare delle idee su una materia praticamente sconosciuta nelle sue radici culturali.

Nella sezione II bastano i pochi libri citati per dare un quadro della situazione, poichè essi sono in genere antologici e riprendono giochi ed indovinelli ben noti. Per questo si è rinunciato ad esaminare alcuni classici testi, anche di autori italiani, che sarebbero stati interessanti come testimonianza di un gusto e una moda che ha avuto peso anche in Italia fino alla fine dell'Ottocento, e che ora è quasi esclusivo appannaggio del mondo anglosassone. Testimonianza di questo orientamento è il fatto che con una certa fatica si sono trovati insegnanti volontari che si occupassero di questa parte.

Per le sezioni III e VII ci è stato difficile trovare titoli per la specificità dell'argomento, ma non si è voluto includere queste sezioni nelle sezioni più generali I o IV, come poteva essere fatto, per focalizzare l'attenzione degli insegnanti su argomenti di rilevanza ed attualità didattica, collegabili agli argomenti svolti in classe, ma su cui non sempre esistono idee chiare.

Va detto infine che non sono citati, o sono citati solo a livello di segnalazione alla fine di ogni sezione, quei classici testi utili soprattutto per la consultazione che si dà per scontato dovrebbero essere presenti fisicamente in ogni seria biblioteca di matematica.

2. Motivazioni e finalità

La motivazione più immediata e ovvia di questa elaborazione delle schede è quella di mettere l'insegnante di matematica in grado di rispondere con competenza all'eventuale domanda di un alunno: "Che cosa posso leggere per farmi delle idee su ...?"

Come si è sopra accennato, la biblioteca scolastica (e qui usiamo il termine non nel senso figurato di insieme di conoscenze, ma nel senso fisico di un insieme di libri) non aiuta in genere in questa circostanza, essendo fortemente sbilanciata nel settore umanistico.

La causa di questo fatto sta nelle politiche editoriali, negli orientamenti culturali, nel problema connesso con la divulgazione della scienza (su questo punto si vedano alcune note su N.U.M.I. 1985 ed il Convegno COASSI, Firenze 1-3 novembre 1984), ma è anche un problema di formazione degli insegnanti delle superiori. Infatti manca spesso negli insegnanti una *riflessione sugli approcci e la gestione dei contenuti insegnati.*

Su questo punto noi pensiamo sia bene fissare l'attenzione al momento dell'introduzione dei nuovi programmi: ci sembra infatti che una corretta attuazione di questi nuovi programmi debba avere questa riflessione come premessa, avendo spesso constatato che la tradizione e l'abitudine possono metabolizzare qualunque cambiamento di contenuti senza cambiare la sostanza dell'insegnamento (v. a suo tempo la teoria degli insiemi ed ora , in certi casi, l'informatica).

E se è vero che la riflessione sugli approcci dovrebbe concernere l'attuazione dei nuovi programmi in qualunque materia, va notato che essa è particolarmente pertinente la matematica, per la natura di questa disciplina. Raramente l'insegnamento superiore ne mette in risalto le radici culturali, le applicazioni e gli influssi al di fuori del suo ambito cosicchè si può ben dire che proprio nelle superiori e particolarmente nei licei, si delinea la dicotomia tra le "due culture" che caratterizzerà poi la cultura adulta.

Ecco dunque delinearsi dalle precedenti osservazioni la finalità del progetto di cui la raccolta di schede descritta nel n. 1 è una premessa.

Usando le parole scritte nell'introduzione di uno dei libri esaminati, la nostra finalità è da individuarsi nell'"aspirazione tesa a creare una nuova mentalità umanistica nella cultura ad ogni livello" (L.Hogben, *La matematica*, Sansoni Firenze, 1962). Questa mentalità "umanistica" si ottiene appunto dall'integrazione delle due culture e già a livello di scuola secondaria, usando metodi come la lettura di vari testi e una certa flessibilità, caratteristici di altre discipline, per esempio lo studio della letteratura.

In effetti questa abitudine alla lettura ed alla consultazione alternativa che gli studenti italiani acquisiscono in certe discipline, è particolarmente utile per la matematica non solo da un punto di vista culturale, ma anche da quello professionale. E' ormai riconosciuto, infatti, che non è possibile dare agli studenti tutte le conoscenze matematiche di cui potranno avere bisogno, sembra quindi giusto porre tra le finalità dell'insegnamento secondario, specialmente a livello di triennio, la capacità di cercare le giuste fonti bibliografiche e sfruttarle senza aiuti esterni. Questa abilità si rivelerà utile sia per chi prosegue gli studi, sia per chi entrerà nel mondo del lavoro.

3. Schemi di utilizzo in classe

L'analisi delle motivazioni del lavoro prospetta già chiaramente gli utlizzi in classe.

Cominciamo dal più ovvio, ma non sempre così banale nell'attuazione che è quello della formazione degli insegnanti.

Ci sembra che ogni insegnante dovrebbe elaborarsi una ideale biblioteca di questo tipo, e si ritiene che queste schede potrebbero essere il nucleo di questo ideale schedario personale.

Questo lavoro inciderebbe non solo sulle conoscenze di base, ma anche sulla professionalità dell'insegnante, poichè esso induce capacità di inquadramento e di interazione attiva nel quadro generale delle discipline previste dai programmi, di cui si è detto al n. 2.

In realtà noi abbiamo elaborato questo progetto pensando (forse con eccesso di ottimismo) di dare come scontata questa fase di sensibilizzazione degli insegnanti e di incidere direttamente nella classe. Perciò consideriamo l'obiettivo della formazione degli insegnanti un obiettivo di minima, poichè come si è detto all'inizio l'obiettivo del lavoro è in primo luogo quello di operare direttamente a livello degli alunni, avviandoli attraverso le letture a questo approccio umanistico della matematica.

Sulla base delle indicazioni degli insegnanti, e della loro esperienza in classe, delineiamo i principali utilizzi.

A priori un'attività di approfondimento integrativa e opzionale come si prospetta quella in esame può sembrare elitaria sia nei riguardi del tipo di scuola (più che altro sembra pensata per i licei) sia del tipo di alunni all'interno della classe (i più dotati e seri). In realtà vedremo più oltre che con un uso meditato e mirato del materiale si può operare con buoni risultati anche in situazioni più problematiche.

In aggiunta a quanto detto nel n. 1 discutiamo brevemente alcuni caratteri pedagogici delle varie sezioni.

Le sezioni I, IV, V e VII sono state pensate per rispondere all'esigenza, specialmente del triennio, di collegare la matematica alle altre manifestazioni del

pensiero e della civiltà (soprattutto legami con storia, filosofia, tecnologia e scienza). Esse danno una visione più generale di questa disciplina e quindi hanno anche una funzione professionalizzante e di orientamento per l'università. I testi sono stati scelti in modo che un normale studente di liceo sia in grado di leggerli da solo, tutt'al più aiutato da un insegnante su qualche passaggio tecnico (matematico e filosofico).

Nell'ottica professionalizzante e di orientamento, oltrechè di informazione, è pensata la sezione VI, che è un po' più impegnativa perchè introduce alcuni concetti nuovi per uno studente di superiore che non segua l'indirizzo informatico.

Un po' più complesso e articolato è l'uso delle schede in corsi in cui l'insegnamento della matematica presenti dei problemi. In questo caso è preferibile fare delle letture in comune con la partecipazione di tutta la classe, con una guida attenta da parte dell'insegnante ed un controllo della capacità di riflessione sui temi trattati. In questo modo le letture hanno funzione di vero e proprio supporto al corso o di punto di partenza per lo sviluppo degli argomenti del corso in maniera motivata.

Per questo uso i libri organizzati in capitoli chiusi che si prestano ad una lettura parziale per argomenti (matematica e geografia, matematica e arte, matematica e tecnologia, ...) sono particolarmente adatti.

Le sezioni II, III, VII offrono molti buoni spunti di lettura negli istituti tecnici e nei professionali, poichè collegano la matematica alle materie professionalizzanti o caratterizzanti l'indirizzo.

La conclusione di alcuni insegnanti che hanno lavorato alle schede è che in certi casi la lettura guidata di testi opportunamente scelti potrebbe sostituire lo studio del libro di testo. Si potrebbe cioè prendere come filo conduttore il capitolo di un libro, o tutto un libro se possibile, ed integrare gli eventuali passaggi tecnici con spiegazioni e notazioni attinti dai libri di testo.

Questa conclusione può ben esemplificarsi nel corso di fisica che si tiene solo nel biennio di certi istituti industriali. Perchè non sostituire in un corso del genere alle poche aride nozioni tecniche una buona lettura sulle idee generali della fisica scritta da un autore d'eccezione (Eistein, Segré, ...)?

Bibliografia

Per chi voglia comporre una propria ipotesi di biblioteca segnaliamo: G.Giorel lo-F.Lerda-L.Pepe-C.Sitia (a cura di), "Formazione permanente degli insegnanti di Matematica: progetto per una biblioteca distrettuale". Bibliografia e schede. *Notiziario N.U.M.I.*, VI, supplemento al n.7, luglio 1979 (edizioni dell'Unione Matematica Italiana).

In genere sono ricche di informazioni le bibliografie degli articoli pubblicati su riviste di Educazione e Didattica della Matematica o su libri curati per la formazione e l'aggiornamento degli insegnanti.

Io stessa nei miei due contributi nei libri da me curati (*Il ruolo della geometria nella cultura e nella scuola*, Tilgher, Genova,1983 e *Il problema dei fondamenti della matematica*, E.C.I.G., Genova,1986) ho cercato di citare libri che possano fornire spunti didattici.

Due bibliografie che da sole rappresentano una stimolante lettura sono quelle di:

- P.J.Davis-R.Hersh, *The mathematical experience*, Birkhauser,Boston,1981, edito anche in italiano, *L'esperienza matematica, da Talete al computer*, Edizioni di Comunità, Milano 1985, bibliografia molto ricca, senza commenti.
- I.Kleiner, "Famous problems in Mathematics: an outline of a course", *For the learning of Mathematics*,6,I, 1986, pp.31-38 (ogni citazione bibliografica è accompagnata da un utile commento).

Offrono una panoramica aggiornata delle novità librarie in genere, e quindi del settore particolare che ci interessa, le riviste specializzate, per esempio l'inserto "Tutto libri" della Stampa.

Ci è stata anche molto utile la consultazione di:

- Bollettino Bibliografico - Pubblicato nell'ambito del Contratto C.N.R.- Università Cattolica di Milano, n.86-02-60-901, su *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Centro Ricerche Didattiche U.Morin.

Utili informazioni per ricerche bibliografiche si possono avere da: M.Guerrini, *Come si fa una ricerca bibliografica*, Riforma della scuola, anno 31, n.5, 1986,pp. 70-72.

Maria Teresa Ascoli Bartoli*- Marta Menghini**

Gruppo C.N.R. Scuola Secondaria Superiore di Roma (responsabile L.Cannizzaro)

LOGICA NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE: UN CONTRIBUTO ALLA DISCUSSIONE

1. L'elaborazione di un'iter su 'Logica e Linguaggio' (M.Menghini)

Nell'ambito delle attività del Nucleo di ricerca didattica di Roma si stanno riesaminando le valenze matematiche, culturali e linguistiche della logica, unitamente alla possibilità e modalità di una loro traduzione in iter e materiali didattici per biennio ed eventualmente triennio.

Questo rientra in quello che già da diversi anni è l'obbiettivo principale del Nucleo: l'individuazione di elementi di innovazione curricolare considerati ormai necessari, l'elaborazione di strategie e materiali tali da consentirne l'attuazione e la diffusione (intesa come prova di una possibile generalizzazione) nella prassi scolastica attuale.

In questa fase alle classi sperimentali nelle quali l'ipotesi di curricolo è nata vengono affiancate classi normali di differenti tipologie di scuola secondaria superiore. Il materiale messo a punto negli ultimi quattro anni è parte integrante del testo di L.Lombardo Radice e L.Mancini Proia "Il Metodo Matematico", ma è stato formulato in modo da poter essere utilizzato indipendentemente dal testo.

Fino ad oggi sono state sperimentate in più classi schede di lavoro su "Logica e Linguaggio", che illustrerò più avanti, e - in alcune classi- materiale su le Algebre di Boole. Quest'ultimo porta anche ad ampliare negli studenti il campo semantico del termine "algebra" in parallelo con l'ampliamento del termine "geometria" operato nelle stesse classi con una prima introduzione alla geometria su la superficie di una sfera. Vengono così approfonditi vari aspetti della logica, quali ad esempio i collegamenti con i circuiti che sono invece stati solo accennati nelle altre classi, sperimentali e non (cfr. cap.5 del Metodo Matematico). La sperimentazione in classe relativa a questi punti sarà illustrata più ampiamente da M.T.Ascoli. Mi limiterò qui a riferire qualche osservazione che ci è stata indotta da questa seconda sperimentazione: gli alunni operano molto bene con le regole dell'algebra di Boole, senza confusione con le regole del calcolo letterale classico, mentre ricadono negli errori - vecchi e nuovi- quando tornano a questo.

Può anche esser vero che a+a=a sia più facile di a+a=2a, ma è difficile attribuire solo a questa proprietà il "successo" dell'algebra di Boole. In realtà questa ultima colpisce in quanto novità, e al momento giusto. L'alunno ci mette attenzione, la sua riflessione è stimolata. Mentre il calcolo letterale, introdotto spesso quando gli alunni non sono in grado di capirlo, viene portato avanti per abitudine, con superficialità (da parte dei ragazzi) e gli errori permangono allora anche nell'età in cui i ragazzi sarebbero invece in grado di comprenderne più a fondo i concetti; o ritornano, dopo che per un po' siamo riusciti a concentrare la loro attenzione sulla prorpietà distributiva.

Torniamo ora alla prima parte della sperimentazione con le schede su "Logica e Linguaggio". Le abilità che in una prima fase ci interessava estrarre riguardavano: la capacità di comprensione di un testo a base matematica, la comprensione delle implicazioni logiche, in particolare l'individuazione della contronominale come equivalente ad una proposizione, l'uso di forma negativa, congiunzioni e disgiunzioni, quantificatori, relazioni di equivalenza e d'ordine. Illustro brevemente le sette schede finora messe a punto e sperimentate:

Scheda 1: Comprensione della lettura. E' stato scelto un brano sulla storia dei numeri naturali tratto da T.Danzig (Il numero linguaggio della scienza, La Nuova Italia, Firenze 1965) ed opportunamente adattato. Lo studente deve rispondere ad alcuni quesiti scegliendo tra 4 possibili risposte; uno di comprensione generale del testo, due di esplicitazione dei termini 'ciascuno' e 'rispettivamente', uno di esplicitazione del significato della espressione "..è un problema insoluto".

Scheda 2: verte sull'uso semplice e simultaneo delle particelle logiche; è articolata in nove quesiti nei quali l'alunno deve riconoscere l'equivalenza di un'espressione assegnata ad una tra quattro espressioni proposte. Esempio:

4) La seguente proposizione

<u>Se piove allora mi bagno</u>

equivale ad una sola delle seguenti affermazioni. Quale?

A. Se non piove non mi bagno

B. Se non mi bagno allora non piove

C. Se mi bagno allora piove

D. Se piove cerco di non bagnarmi

Scheda 3: riflessione sull'uso di termini quali 'al minimo', 'non più','non minore', etc. Lo studente deve scegliere in dieci frasi formulate con l'uso di tali espressioni un'altra espressione equivalente scelta tra sette a sua disposizione.

Scheda 4: codifica e decodifica di espressioni simboliche sempre coinvolgenti l'uso della negazione. Un totale di quindici esercizi su espressioni del tipo ' $x \geq 3$ ' si scrive 'x non è minore di tre' etc.

Scheda 5: Proprietà di relazioni e loro classificazione. Sono elencate dodici relazioni con il rispettivo insieme di definizione; è fatta richiesta di riempire una tabella a doppia entrata 'relazioni/ loro proprietà e denominazione'.

Scheda 6: verte sulla trascrizione in liunguaggio simbolico di affermazioni (contenenti quantificatori e negazioni) relative ad elementi di insiemi.

Scheda 7: verte sull'uso di implicazione semplice e doppia ed è articolata in tre esercizi del tipo di quelli della scheda 2 ed un esercizio di scrittura (guidata) di tre espressioni equivalenti ad una data.

Con la scheda 7 gli alunni si abituano a ritrovare la forma'se..allora' nelle altre espressioni di un teorema quali 'condizione necessaria..','tutti i .... verificano..',etc. Nelle attuali ipotesi di lavoro intendiamo estendere queste abilità abituando l'alunno a ritrovare l'ipotesi e la tesi in tutte le varie formulazioni di teoremi che può incontrare, passando quindi a ritrovare le "regole"per la dimostrazione di un teorema: non si può adoperare la tesi, non si può negare l'ipotesi..etc., e imparando quindi a leggere e decodificare in linguaggio naturale il testo e la dimostrazione di un teorema.

Gli ulteriori orientamenti per il lavoro di quest'anno sono: la sperimentazione su scala più ampia del materiale sulle algebre di Boole, nonché delle nuove schede su 'Logica e Linguaggio'; messa a punto di materiali per le classi sul problema della verità degli enunciati; individuazione di proposte didattiche per ulteriori riflessioni da proporre agli studenti del triennio.

2. Alcune considerazioni informali su un'esperienza dell'insegnamento dell'Algebra di Boole nelle classi del biennio (M.T.Ascoli)

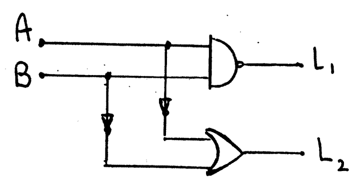
L'esperienza dura ormai da dieci anni e da sei anni l'ambiente è un ginnasio tradizionale in cui i giovani sono ricchi di curiosità intellettuale e in generale sempre disposti ad approfondire e ampliare le proprie conoscenze al di là de i limiti dei programmi. Si comincia verso la metà della quarta ginnasiale, quando i ragazzi si sono abbastanza bene impadroniti delle proprietà delle operazioni in N,Z,Q,R e sono in grado di applicarle con una certa disinvoltura al calcolo letterale. Si prendono allora in considerazione le operazioni sugli insiemi (visti sempre come sottoinsiemi di un insieme universo): complementare di un insieme, intersezione e unione di due o più insiemi; e si richiamano le loro proprietà. Si passa poi al calcolo delle proposizioni, partendo da un approccio intuitivo, si definiscono le operazioni di negazione, congiunzione, disgiunzione e se ne analizzano le proprietà. A questo punto è importante, ma anche facile, far osservare ai giovani l'identità di struttura tra le due algebre e abituarli a passare indifferentemente da un linguaggio in termini di proposizioni ad uno in termini di insiemi e viceversa, secondo la convenienza. Nella verifica delle proprietà si usano indifferentemente tavole di verità, diagrammi di Eulero-Venn, schemi di circuiti elettrici con interruttori. Tra l'altro, da tre anni a questa parte, raccogliendo il suggerimento di un'unità didattica del progetto I.R.I.S., adoperiamo in classe una piastra forata su cui è inserita una stazione base dotata di piccoli interruttori e led e sulla quale si possono comporre gli integrati corrispondenti a forme Booleane assegnate.

Così i giovani hanno tre modelli cui far riferimento:

- la forma booleana da trsformare in un'altra più semplice applicando le proprietà (eventualmente l'identità può essere verificata col confronto delle tavole di verità;
- la rappresentazione grafica mediante i diagrammi di Eulero-Venn;
- la rappresentazione mediante i circuiti elettrici o per lo meno i loro schemi.

Riportiamo qui di seguito, come esempio, la verifica delle leggi di De Morgan.

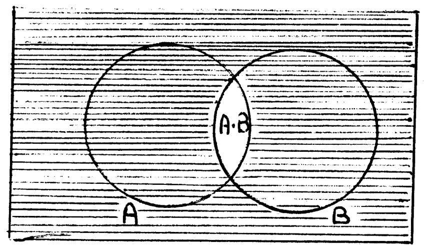
$\overline{A.B}=\bar{A}+\bar{B}$

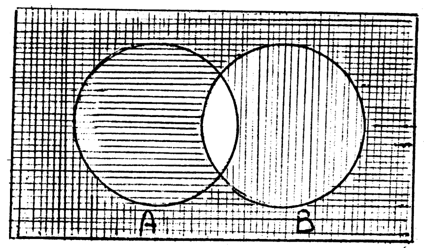


I led L_1 e L_2 si accendono o si spengono contemporaneamente.

A	B	$\overline{A\cdot B}$	$\bar{A}+\bar{B}$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

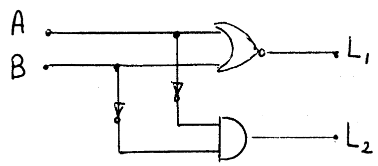
La terza e la quarta colonna sono uguali.





La parte tratteggiata in orizzontale nella prima figura coincide con la parte comunque tratteggiata nella seconda.

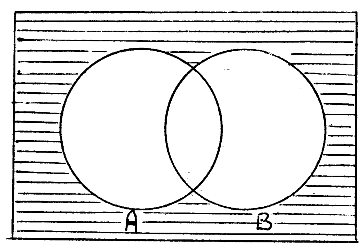
$\overline{A+B}=\bar{A}.\bar{B}$

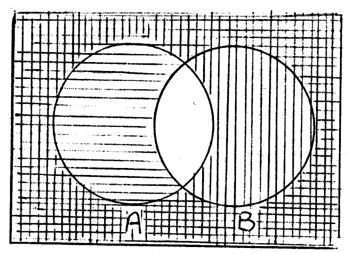


I led L_1 e L_2 si accendono o si spengono contemporaneamente.

A	B	$\overline{A+B}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

La terza e la quarta colonna sono uguali.





La parte tratteggiata in orizzontale nella prima figura coincide con la parte tratteggiata in entrambe le direzioni nella seconda.

Mi sembra che questo approccio all'algebra di Boole abbia due aspetti positivi, oltre a quello di presentare un'algebra diversa, in quanto abitua i giovani a riconoscere un'identità di struttura e a scegliere a seconda dei casi il modello più conveniente.

La costruzione dei circuiti non è affatto essenziale per lo svolgimento di questo programma, ma io vedo con piacere i miei 'ginnasiali' trafficare con oggetti materiali e prenderci gusto; inoltre tutto questo può servire a dare un'idea di quello che c'è nell'unità aritmetico-logica di un computer e dà un'ulteriore motivazione per il calcolo delle espressioni booleane, che viene visto anche come un mezzo che ci permette di sostituire ad un circuito complicato uno molto più semplice.

Il calcolo viene eseguito dagli allievi con molta disinvoltura e con maggiore facilità che l'analogo in Q o o in R, ma questo penso sia soprattutto dovuto al fatto che l'idempotenza e la legge di assorbimento evitano molte occasioni di errore. Qui di seguito è riportato un esempio che prende spunto da un semplice rompicapo del tipo di quelli proposti da Martin Gardner nei diversi suoi libri. Può essere utilizzato anche come punto di partenza per introdurre il calcolo delle proposizioni e dà l'occasione per rappresentare simpbolicamente i dati del problema.

I tre compagni di classe Alberto, biana e Carlo mangiano sempre insieme alla mensa della scuola. Alla fine del pasto si può chiedere in più una fetta di torta. Si sa che:

1) Se Alberto chiede il dolce, anche Bianca lo chiede

2) Bianca e Carlo non chiedono mai contemporaneamente il dolce, ma ad ogni pasto c'è uno dei due che lo chiede

3) Alberto o Carlo o anche tutti e due chiedono sempre il dolce

4) Se Carlo chiede il dolce, anche Alberto lo chiede.

Chi chiede il dolce e chi no?

Indicando con A la proposizione "Alberto chiede il dolce", e con $\bar{A}$ la sua negazione e così di seguito per B e C, avremo:

la proposizione 1) afferma che

$A \Rightarrow B$ è vera, cioè è vera $\bar{A}+B$ è quindi falsa $A.\bar{B}$;

la 2) afferma che

$B\bar{C}+\bar{B}C$ è vera è quindi falsa $B.C+\bar{B}.\bar{C}$;

la 3) afferma che

$A+C$ è vera è quindi falsa $\bar{A}.\bar{C}$;

la 4) afferma che

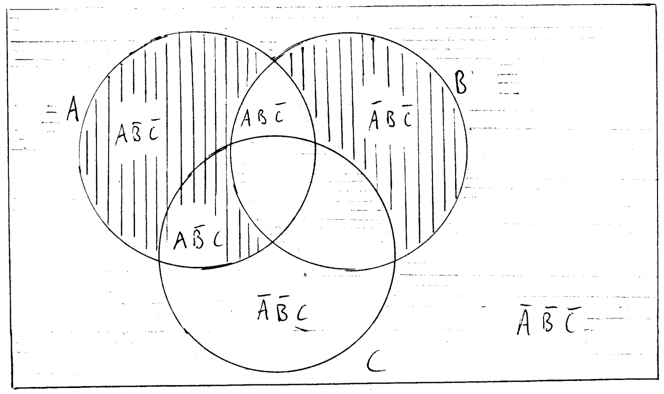
$C \rightarrow A$ è vera, cioè è vera $\bar{C}+A$ è quindi falsa $\bar{A}.C$.

Ha quindi valore di verità la funzione

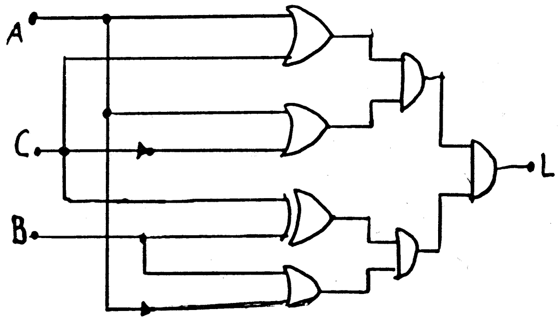
$(\bar{A}+B).(B.\bar{C}+\bar{B}.C).(A+C).(A+\bar{C})=(\bar{A}.B.C+\bar{A}.\bar{B}.C+B.\bar{C}).(A+A.\bar{C}+AC)=(\bar{A}.B.\bar{C}+\bar{A}.\bar{B}.C+B.\bar{C}).A=$
$=A.B.\bar{C}$.

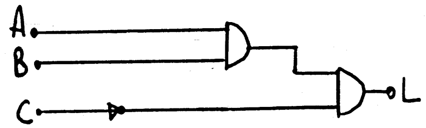
Si conclude che Alberto e Bianca chiedono sempre il dolce, Carlo mai.

Se ci riferiamo alla rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn e tratteggismo le regioni corrispondenti a proposizioni false, otteniamo la seguente figura, in cui l'unica regione non tratteggiata è appunto quella che corrisponde a A.B.C.



Il calcolo ora fatto ci permette inoltre di affermare che i due circuiti qui disegnati sono equivalenti:





Vorrei aggiungere che, più di una volta, arrivati in prima liceo i ragazzi hanno per conto proprio riesumato i diagrammi di Eulero-Venn, trovandoli convenienti per rappresentare le diverse figure del sillogismo di Aristotele. Di conseguenza hanno chiesto di riprendere il calcolo delle proposizioni, offrendo quindi all'insegnante l'occasione per approfondire il calcolo dei predicati, che alcuni di loro hanno poi usato con apprezzabile disinvoltura in varie occasioni.

* Insegnante ricercatore-sperimentatore

** Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma "La Sapienza".

FORMAZIONE DELL'INSEGNANTE DI MATEMATICA ALLA LUCE DEL PIANO NAZIONALE PER L'INFORMATICA

Giancarlo Chiusano - N.R.D. - Torino

L'avvio del Piano Nazionale per l'Informatica costituisce, a nostro avviso, almeno nelle intenzioni, un avvenimento profondamente innovatore dal punto di vista della politica scolastica. Infatti, probabilmente per la prima volta, il Ministero della Pubblica Istruzione si è assunto in proprio il compito di realizzare, in un arco di quattro o cinque anni, un aggiornamento in massa degli insegnanti di matematica e fisica (e, forse, in un secondo tempo, di tutti gli insegnanti) del biennio della scuola secondaria superiore.

La gestione di tale piano, caratterizzata da un encomiabile impiego di risorse e di energie, ci deve indurre a serrate riflessioni sulla potenzialità di tale avvenimento. Anche se la formulazione dei nuovi programmi di matematica, da parte di una apposita Commissione, riveste un aspetto di primaria importanza preferiamo svolgere anzitutto alcune considerazioni sull'aspetto formazione docenti, che ci pare essere quello più innovativo. Esaminiamo dunque preliminarmente quanto successo nel corso dell'anno scolastico 1985-86.

Nel periodo Novembre '85 - Gennaio '86 circa 200 tra quegli insegnanti di informativa, di matematica e di fisica che, in precedenza, avevano (o ... non avevano) presentato domanda, frequentano (a Como, a Bologna, a Urbino, a Bari) corsi per formatori, aventi lo scopo di preparare futuri docenti di corsi rivolti alla introduzione di elementi di informatica nell'ambito dell'insegnamento della matematica e della fisica nel biennio della media superiore.

Più precisamente. Presso quattro centri nazionali (CILEA, Milano; CINECA, Bologna; CSATA, Bari; SOGESTA, Urbino) i futuri formatori frequentano un corso della durata di quattro settimane (non continuative) finalizzate a:

- riflettere sui contenuti e sui metodi dell'informatica;
- esaminare le nuove prospettive che si aprono in campo educativo per effetto degli sviluppi sia dell'hardware sia del software;
- definire una metodologia didattica finalizzata all'insegnamento dell'informatica e all'uso del computer;
- elaborare un progetto di corso per la formazione dei docenti.

In particolare, presso il centro CILEA (per il quale abbiamo notizie dirette) l'avvio del corso ha fatto registrare una discordanza tra quanto progettato tra tale centro e le aspettative dei corsisti. Questo fatto ha avuto per conseguenza una accentuazione della fase di progettazione dei corsi per docenti, gestita direttamente dai futuri formatori. Ne è testimonianza il materiale didattico da loro prodotto che consiste in oltre venti unità didattiche, volte alla formazione del personale docente, aventi per tema i seguenti argomenti:

- problemi e analisi top-down; sottopogrammi; procedure ricorsive.
- struttura logico funzionale dell'elaboratore; sistemi operativi.
- Algoritmi ed esecutore; linguaggio di progetto; codifica in linguaggio Pascal; strutture dati
- Pacchetti applicativi: fogli elettronici, data-base; analisi di software didattico.
- Logica e algebra di Boole; realizzazione di una rete combinatoria.
- Automi; grammatiche generative e riconoscitori.
- Analisi disciplinare di: matematica, fisica e informatica.
- Progettazione, formazione e sistema scolastico.

Nel periodo Marzo - Maggio '86 si realizza una prima tornata dei suddetti corsi, che coinvolge oltre mille insegnanti di matematica e fisica, principalmente del biennio. Tali insegnanti, e questo ci pare uno dei fatti più rilevanti, dovrebbero sperimentare nelle proprie classi, durante l'anno scolastico 86-87, alcune unità didattiche da essi stessi prodotti. Dunque l'aggiornamento viene inteso anche come modifica della professionalità docente, in quanto si chiede all'insegnante non solo di non vivere passivamente le lezioni del corso, ma anche di saper spendere in classe, a livello di progettazione di un curriculo didattico, quanto appreso.

Esaminando più in dettaglio i corsi per docenti di matematica e fisica del biennio (facendo riferimento, in particolare, a quelli tenuti dai formatori facenti capo al CILEA) si può annotare che:

detti corsi sono stati articolati in tre settimane non continuative;

nelle prime due settimane e nei primi giorni della terza i corsisti, lavorando con le unità didattiche di cui si è detto in precedenza, hanno affrontato la fase di alfabetizzazione informatica.

La metodologia adottata è stata quella del problem-solving. Pertanto i lavori si sono articolari secondo la sequenza: proposta di lavoro; lavoro di gruppo; intergruppo; sistematizzazione.

Nella parte rimanente della terza settimana è stata avviata la fase di progettazione consistente nella:

- individuazione (con riferimento ai nuovi programmi) di un progetto globale per l'insegnamento: matematica/informatica e fisica/informatica;
- individuazione, all'interno del progetto, di un percorso didattico;
- progetto di alcune unità didattiche da sperimentare in classe.

Nella prima metà del mese di ottobre '86 vi è stata una quarta settimana di corso finalizzata alla messa a punto sia del progetto globale sia delle unità didattiche messe in cantiere nella terza settimana.

Sempre per quanto riguarda i formatori facenti capo al CILEA, va ricordato che il collaudo del materiale di loro produzione ha suscitato la viva esigenza di una meditata revisione. Per tale lavoro è stato chiesto il concorso del comitato tecnico scientifico, di nomina ministeriale, costituito allo scopo di fornire assistenza e consulenza tecnica (ognuno dei quattro centri nazionali, già nella fase di avvio dei corsi per i formatori, è stato affiancato da uno di tali comitati). Il fatto che detto comitato si sia riunito pressochè al completo un'unica volta dopo quasi un anno dalla sua costituzione (e che quindi non abbia potuto dare precise risposte alla richiesta di collaborazione) è uno degli elementi rivelatori della incertezza in cui si colloca (a tutt'oggi) la prosecuzione del Piano. Parallelamente alle difficoltà di natura istituzionale, pare opportuno segnalare, in questa sede, i problemi riguardanti i rapporti matematica/informatica.

La messa in atto delle intenzioni del Piano Nazionale ha sollevato (e probabilmente continuerà a sollevare, notevoli problemi. L'insegnamento della matematica, infatti, continua a svolgersi su binari molto tradizionali. Se è pur vero che la nascita dei Nuclei di Ricerca Didattica, promossa dall'U.M.I., risale ormai ad una decina di anni fa, rimane il fatto che la mancata riforma della scuola media superiore ha spento molti entusiasmi. In questo clima di stati l'informatica ha fatto il proprio ingresso con effetto dirompente. L'attenzione si è spostata dunque, in un modo piuttosto selvaggio, su tale disciplina e i problemi, oggetto di annosi dibattiti, relativi alle scelte riguardanti il rinnovamento dell'insegnamento della matematica, sembrano scavalcati d'un sol balzo.

Le ripercussioni di quanto detto si riscontrano in modo abbastanza evidente nelle varie fasi che hanno caratterizzato l'avvio del Piano per l'Informatica. Piuttosto scarsa è stata, durante i corsi per formatori, l'intenzione di ricorrere alle competenze di matematici per integrare l'insegnamento dell'informatica in quello della matematica. Sintetizzando: finchè i nuovi programmi di matematica non sono stati approvati dal Consiglio Nazionale della P.I., si è avuta la sensazione che, mentre l'ambiente degli informatici, col supporto del Ministero, riusciva a compiere concreti a rapidi passi verso la sua meta, l'ambiente dei matematici non solo non riusciva a inserirsi nell'iniziativa, ma stentava a coglierne i connotati.

Nella fase di attuazione dei corsi tenuti dai formatori i nodi sono venuti al pettine, quando si è trattato di passare alla progettazione di unità didattiche mirate all'introduzione di elementi di informatica nell'ambito dei nuovi programmi di matematica, ormai approvati. Principalmente le difficoltà sono sorte nel dover affrontare i due seguenti problemi: quale tipo di sperimentazione adottare; come gestire i nuovi programmi. Caduta la possibilità di adottare una sperimentazione strutturale, in quanto il Ministero non ha ritenuto opportuno riaprire i termini di presentazione delle domande, si è dovuto ripiegare sulla sperimentazione metodologica. Pertanto i docenti-corsisti si sono trovati nella condizione di dover presentare, al proprio collegio docenti, una richiesta di sperimentazione metodologica, pur sapendo che, nei fatti, si trattava di un grosso rinnovamento di contenuti. Viene, insomma, ancora una volta in luce come sia discutibile continuare a chiedere che insegnanti, su basi volontarie, affrontino una sperimentazione nel contesto di una struttura scolastica che risulta ostile ad ogni forma di rinnovamento.

La sperimentazione è, sostanzialmente, una sperimentazione dei nuovi programmi. Su questi, poche osservazioni: in analogia ai programmi della scuola media del '79, di cui sono la logica continuazione e di cui prevedono una trattazione approfondita, questi non si presentano sotto forma di "ricette", bensì inducono gli insegnanti ad un confronto con i loro colleghi sia per stabilire quali argomenti svolgere al primo o al secondo anno, sia per trovare gli intrecci più opportuni tra i cinque grandi temi in cui sono stati suddivisi i contenuti. Secondo noi non è casuale il maggior rilievo dato ai temi 1 (Elementi di logica e informatica) e 2 (la geometria) rispetto a quelli 3 (gli insiemi numerici e il calcolo) 4 (relazioni e funzioni) 5 (elementi di probabilità e statistica): il fatto è da collegarsi o alla novità degli argomenti (logica e informatica) o a una varietà di punti di vista non ancora del tutto fusi e armoni-zati (geometria). A proposito di quest'ultima non nascondiamo il timore che, di fronte a una proposta tematica ampia, con indicazioni metodologiche ora vaghe, ora riduttive, la geometria venga sempre più emarginata dalla realtà concreta dell'operare in classe.

Ci preme infine rilevare che, se è pur vero che i docenti dei nuclei di ricerca didattica da più di 10 anni si cimentano nella sperimentazione degli argomenti dei nuovi programmi, esiste una massa passiva di insegnanti che non hanno seguito tale lavoro, in continua evoluzione; per questi non è assolutamente sufficiente, mentre è certo necessario, l'aggiornamento in informatica cui si è pensato con il piano per l'informatica.

Pare dunque necessario un massiccio intervento capillare, al fine di evitare un semplice passaggio dalla "moda" dell'insiemistica alla "moda" dell'informatica, ben più pericolosa.

Giuliano Spirito
Laboratorio di didattica delle Scienze - Roma

Nuovi programmi di matematica e PNI

Il mio intervento è essenzialmente incentrato sull'analisi del "versante informatico" dei nuovi programmi di matematica; ciò comporta la necessità di fare cenno anche ad alcuni problemi posti dal Piano Nazionale per l'Informatica (PNI). A partire da alcuni fatti positivi acquisiti, l'attenzione sarà focalizzata su vizi d'origine, ambiguità non sciolte, problemi rimasti aperti, limiti di praticabilità.

Fatti positivi acquisiti.

L'avvio del PNI e la connessa formulazione dei nuovi programmi di matematica per il biennio hanno dato luogo ad una vivace battaglia culturale sul significato e le modalità che doveva assumere l'introduzione di elementi di informatica nella secondaria superiore.

In questa battaglia è stato possibile segnare dei punti positivi per la concomitante azione della commissione chiamata a stendere i nuovi programmi di matematica e del gruppo di formatori più avvertiti coinvolti nel PNI.

I nodi sciolti in modo corretto sono, a mio avviso, più d'uno. In primo luogo è stato possibile sconfiggere una visione prettamente strumentale dell'informatica (se fosse prevalsa questa ottica, l'informatica nella scuola sarebbe diventata "tout court" il computer nella scuola, e, per di più, il computer nella scuola avrebbe assunto il mero significato di nuova tecnologia didattica, sarebbe stato ridotto ad una sorta di scatola nera considerata a prescindere dalla sua storia e dalla sua giustificazione sul piano scientifico e tecnologico, da utilizzare come strumento di "modernità", come elemento di spettacolarizzazione dell'attività del docente, come accattivante intermezzo ludico nel lavoro degli allievi). Lo scioglimento di questo primo nodo in una direzione corretta ha costituito una pre-condizione per ulteriori scelte di segno positivo sia nell'attività di aggiornamento dei docenti nell'ambito del PNI, sia nella formulazione dei nuovi programmi. Intendo riferirmi alla valorizzazione di tutti quegli elementi di informatica di meno rapida obsolescenza e di più rilevante risalto culturale; di qui la ricerca degli "invarianti" sottesi ai molteplici e cangianti aspetti dello sviluppo dell'informatica; e la sottolineatura delle sue valenze logiche e linguistiche; e, ancora, l'enfatizzazione del ripensamento metodologico che il sapere informatico induce.

E' stato così possibile delineare un quadro di riferimento di grande dignità teorica, uno scenario, per così dire, credibile per un'operazione culturale e didattica di ampio respiro.

E' però forse più utile, in questa fase e avendo già incamerato i risultati positivi ricordati, sviluppare una riflessione sugli elementi di difficoltà, di intrinseca debolezza, di problematicità che questa ambiziosa operazione innovativa si trova difronte.

Vizi d'origine.

Infatti i nuovi programmi nascono segnati da un duplice vizio d'origine:

- da una parte nascono al difuori di un organico discorso di riforma del biennio della scuola secondaria superiore;
- dall'altra nascono come conseguenza dell'irruzione dell'informatica all'interno della disciplina matematica; e quindi come portato esogeno di un progetto di innovazione (il PNI) che li travalica.

Ciò comporta, accanto ad un giudizio complessivamente positivo su di essi che mi sembra largamente diffuso e condivisibile, alcuni limiti di praticabilità effettiva e alcune ambiguità non risolte.

Limiti di praticabilità.

a) i nuovi programmi richiederebbero un quadro orario adeguato; ben altro, evidentemente, che non gli aggiustamenti proposti dal ministro, e tutt'altra cosa rispetto agli éscamotages tipo moltiplicazione delle lezioni attraverso le cosidette "ore" di 50 minuti, ultima incredibile trovata di un'amministrazione che procede per improvvisazioni al di fuori di un disegno organico di riforma;

b) la presenza nei nuovi programmi di una molteplicita di stimoli anche non strettamente disciplinari (o, comunque, attinenti a territori di frontiera tra discipline diverse) sembrerebbe imporre momenti forti di reciproca sensibilizzazione e di coordinamento tra

vari docenti, per consentire la piena espressione delle sue potenzialità;

c) l'introduzione di attività di laboratorio accanto a momenti più tradizionali dell'insegnamento della matematica dovrebbe sollecitare una modifica di tutto lo stile di lavoro del docente, in direzione di una continuità e di un'integrazione organica delle varie modalità in un quadro generale di lezione interattiva e partecipata; il rischio, altrimenti, è quello della pura giustapposizione di un segmento "operativo" e "di verifica" alle pur sempre preponderanti sessioni "versative-teoriche" o "esercitative-ripetitive";

d) nella misura in cui i nuovi programmi appaiono profondamente innovativi essi richiederebbero un intervento in profondità sia sul versante della formazione degli insegnanti, sia su quello dell'aggiornamento (anche se l'uso di questo termine appare riduttivo, giacchè di una vera e propria riconversione si dovrebbe trattare); invece, mentre al momento non si prevede di intervenire in alcun modo sulla formazione, l'intervento aggiornativo è prodotto di risulta, conseguenza obliqua e collaterale dello sforzo sul terreno dell'introduzione di contenuti e tecnologie informatiche, prevista come obiettivo centrale dal PNI.

Quest'ultimo limite appare evidente anche senza entrare nel merito dei difetti di progettazione e di quelli, ancor più gravi, di gestione del PNI medesimo, difetti peraltro più volte sottolineati, finora invano, dalle organizzazioni sindacali, dalle associazioni di categoria, da porzioni significative del mondo universitario, dalla parte più attenta e sensibile della stampa, dai più avvertiti tra gli stessi formatori chiamati dal MPI ad attuarlo.

Ambiguità irrisolte.

L'introduzione contestuale di nuovi programmi di matematica e di elementi di informatica all'interno di essi espone ad un duplice rischio:

- il rischio di una lettura tutta matematica dell'introduzione dell'informatica;
- il rischio di una lettura tutta informatica dell'innovazione in matematica.

Questo rischio è stato segnalato, su uno dei due versanti, dalla relazione del prof. Bernardi (guai a leggere la logica come puro strumento dell'informatica), ma esiste, ed è corposo, in ambedue i sensi.

Vi è, vi deve essere, infatti, uno specifico dell'innovazione matematica, sia sul terreno dei contenuti (introduzione di elementi di logica, della matematica dell'incerto, ecc.), sia sul terreno delle sensibilità da suscitare (fondamentale, ad esempio, è una rinnovata attenzione agli strumenti linguistici), sia dal punto di vista delle abilità da sviluppare (che dovrebbero trovare una sintesi nella capacità di muoversi su un grafo che divenga, di volta in volta, più ampio e interconnesso e i cui nodi vengano esplorati con crescente profondità e rigore). E' possibile, per questa via, rompere la rigida sequenzialità del tradizionale percorso all'interno del sapere matematico; il procedimento a spirale, per approssimazioni successive, nel momento in cui sconta la parzialità di alcune risposte, consente di assumere fino in fondo la complessità dell'universo delle matematiche e le sue interrelazioni con le realtà circostanti.

D'altra parte, vi è, vi deve essere, uno specifico dell'informatica, in quanto vi sono punti chiave del sapere informatico, della stessa filosofia che ne costituisce il substrato, che non sono riconducibili ad un ampliamento dell'orizzonte matematico (anche laddove tale ampliamento, come è giusto, non coincida con la semplice aggiunta di qualche contenuto, ma preveda anche il ripensamento di contenuti storicamente affermati). Infatti l'informatica è, ad esempio, capacità di interazione con un esecutore altro da noi (con tutte le problematiche connesse con un punto di vista di questo tipo, quali l'assunzione del problema del tempo e dell'effettività, la valorizzazione dell'operatività, pur intesa nell'accezione più alta, la rivalutazione, perfino, di aspetti calcolistici che la matematica moderna, a ragione, ha escluso dal suo ambito di interesse o, quantomeno, ha confinato in suoi territori periferici); l'informatica è, forse principalmente, intelligenza, controllo e dominio della complessità di operazioni effettive, di prestazioni concrete, e quindi è anche contaminazione con la realtà, laddove tanta parte della matematica ha e deve conservare, per dirla con Thomas Mann, il carattere di "gioco in regioni senza polvere".

Se il rapporto tra matematica e informatica è, tutto sommato, assimilabile, almeno in parte, al rapporto tra matematica e fisica (certo, con la differenza non inessenziale che mentre la fisica è scienza che ha ormai propri statuti consolidati, non altrettanto può dirsi per l'informatica), sarà bene evitare il duplice rischio di leggere l'una in funzione dell'altra o viceversa.

Un problema di metodo.

Il PNI, l'introduzione di elementi di informatica, la sperimentazione dei nuovi programmi sono processi complessi che esigono l'approntamento di strumenti rigorosi di controllo e di verifica; tali strumenti appaiono oggi carenti se non inesistenti. Ciò rischia di pregiudicare tutta l'operazione per limiti di improvvisazione e di inadeguatezza; a meno di non pensare che si tratti, più semplicemente, di una deliberata scelta di (far finta di) cambiare qualcosa perchè tutto resti, nella sostanza, immutato.

VENERDI' 17 OTTOBRE 1986

Paolo Boero
Dipartimento di Matematica - Genova

Problemi didattici di attuazione dei nuovi programmi per la scuola elementare

1. Premessa

L'entrata in vigore di nuovi programmi in un certo ordine di scuole comporta problemi di vario genere: problemi di tipo professionale (riguardanti, ad esempio, una diversa articolazione della professione docente; nel nostro caso, la presenza di più insegnanti per la stessa classe di secondo ciclo); problemi di preparazione e di orientamento culturale degli insegnanti (in relazione alle innovazioni contenutistiche e metodologiche introdotte); problemi di tipo organizzativo (organizzazione del tempo-scuola); problemi di tipo didattico (riguardanti il rapporto tra allievo, insegnante e sapere previsto dai nuovi programmi).

In questa relazione tratterò solo i problemi di tipo didattico, non perchè li consideri i più importanti ai fini della riuscita dei nuovi programmi, ma perchè si tratta delle questioni su cui ho maggiori esperienze e competenze e perchè non mancano riferimenti bibliografici aggiornati e approfonditi sugli altri problemi. Naturalmente, non sarà possibile fare a meno di considerare questioni inerenti la preparazione professionale e culturale degli insegnanti o le ipotesi di suddivisione dei contenuti tra i diversi insegnanti di una stessa classe in relazione a specifici problemi didattici, però si tratterà solo di accenni funzionali al discorso didattico.

I punti di riferimento per la redazione di questa relazione sono stati per me:

- l'attività di innovazione curriculare per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare da me coordinata a partire dal 1977 (per quanto riguarda le attività di aggiornamento) e dal 1980 (per quanto riguarda la sperimentazione nelle classi); *farò dei cenni a queste esperienze di progettazione e sperimentazione innovativa con diversi esempi evidenziati con il carattere corsivo;*
- l'attività di aggiornamento condotta per conto di Circoli didattici, Provveditorati e IRRSAE in relazione al testo dei nuovi programmi, che mi ha consentito un contatto assai esteso con i maestri (soprattutto della Liguria e del basso Piemonte)

Nell'esposizione seguirò l'ordine degli argomenti affrontati nel testo dei nuovi programmi, cercando di evidenziare i problemi di comprensione e di interpretazione e i problemi di attuazione che ho riscontrato nel lavoro con i maestri e nelle attività di aggiornamento.

2. L'approccio al testo dei nuovi programmi di matematica

Di solito nella lettura dei nuovi programmi con i maestri la parte generale, di "premessa", interessa più al relatore (soprattutto se non insegnante elementare) che ai maestri; questi vogliono arrivare presto ai contenuti, alle cose da fare in classe. Un tale atteggiamento l'avevo riscontrato anche per quanto riguarda i programmi del 1979 per la scuola media; nel caso dei programmi per la scuola elementare, devo dire che non è del tutto ingiustificato (visti i riferimenti di non facile interpretazione alla storia della didattica della matematica degli ultimi decenni contenuti nella premessa). La necessità di raggiungere, nella Commissione che ha redatto i programmi, un compromesso che non suonasse critica verso le posizioni sostenute ancora in tempi recenti da alcuni dei Commissari per quanto riguarda la cosidetta "matematica moderna" ha probabilmente suggerito la formulazione di un testo chiaro soprattutto per gli addetti ai lavori (della ricerca didattica e dell'innovazione curriculare). Meglio sarebbe stato (per la chiarezza del testo per i maestri) identificare con il nome di "insiemistica" la "acquisizione diretta di concetti e strutture matematiche" (o almeno citare l'insiemistica come una delle più diffuse realizzazioni di tale indirizzo). Più opportuno ancora sarebbe stato citare le esperienze straniere (soprattutto quella della Francia) che hanno dimostrato che "non è possibile giungere alla astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione,......"; e le evoluzioni che in vari Paesi hanno subito i programmi di matematica della scuola di base negli ultimi venti anni (fino all'esplicita dichiarazione, contenuta nelle note ministeriali che accompagnano i nuovi programmi per la scuola <u>media</u> francese entrati in vigore nell'autunno 1986, che notazioni e concetti di intersezione, unione, contenenza tra insiemi sono "hors programme"), proprio per effetto della "vasta esperienza compiuta...".

Una maggiore chiarezza e ampiezza di riferimenti non sarebbe stata inutile (per quanto riguarda la sperimentazione e il declino della "matematica moderna") in relazione ad alcune scelte che vengono compiute sui contenuti più importanti dei nuovi programmi e in relazione alla realtà dell'innovazione didattica nella scuola elementare italiana. In effetti, i maestri non riescono a collegare facilmente i termini troppo generali della premessa con alcune delle indicazioni successive; ad esempio, con l'indicazione che "la simbolizzazione formale di operazioni logico-insiemistiche non è necessaria,in via preliminare,per l'introduzione degli interi naturali e delle operazioni aritmetiche "e, soprattutto con le indicazioni iniziali sull'aritmetica: "Lo sviluppo del concetto di numero naturale va stimolato valorizzando le preceden= ti esperienze degli alunni nel contare e nel riconoscere simboli numerici....", "...l'idea di numero naturale è complessa e richiede un approccio che si avvale di diversi punti di vista (ordinalità,cardinalità,misura,ecc.)".Anche il valore cultu= rale e formativo della geometria e (all'interno dell'insegnamento geometrico) il grosso rilievo dato all'attività di geometrizzazione rischia di non essere compreso nella sua portata se non si fa riferimento a "mode" che tendevano nei due decenni scorsi a ridimensionare drasticamente tutto quello che era ragionamento su figure e riferimento (in termini metrici) alle situazioni piane e spaziali.

L'opportunità di riferimenti più chiari alle "mode" ispirate dall'indirizzo della cosidetta "matematica moderna"mi sembra evidente anche in relazione alle caratte= ristiche che sono state assunte in Italia dal rinnovamento della didattica della ma= tematica nella scuola elementare ispirato alla "matematica moderna".A partire dagli anni '60 vi furono infatti corsi di aggiornamento ministeriali "residenziali" per stimolare la diffusione di tali innovazioni;mancarono però (allora come in seguito) verifiche sistematiche sui risultati raggiunti,sull'impatto nei diversi ambienti, sulle pratiche didattiche e sull'adeguamento dei libri di testo ai nuovi indirizzi.

Paradossalmente,pur senza alcuna sanzione ufficiale a livello di programmi,nel primo ciclo della scuola elementare (decisivo per l'approccio al numero ed alle ope= razioni aritmetiche) si è finito in molte classi per fare più "insiemistica" di quella che in altri Paesi era prevista dai programmi ispirati alla"matematica moder= na " .....Naturalmente il fenomeno non è stato uniforme ed ha riguardato soprattut= to alcune zone del nostro Paese più collegate alle novità editoriali e alla presenza di Associazioni professionali (penso ad esempio al Movimento di Cooperazione Educa= tiva) che hanno "sposato" l'insiemistica da oltre quindici anni.

La realtà in cui ci troviamo oggi è che in Italia si continua a lavorare su ipotesi didattiche collegate con l'insiemistica mentre in altri Paesi esse sono state da tempo abbandonate anche nei programmi ufficiali;che continuano a circolare libri di testo di pessima qualità tecnica (...per sua natura,l'approccio all'aritmetica per via in= siemistica esige maggiore rigore e precisione di altri approcci !);che vengono rici=

clati come"libri di testo ispirati ai nuovi programmi" testi per il primo ciclo nei quali l'unico approccio al numero,all'addizione,alla sottrazione e alla moltipli= cazione è quello di tipo "cardinale"; che nello stesso senso sono orientate le atti= vità di formazione e di aggiornamento promosse da alcuni IRRSAE ....Non si tratta (dal mio punto di vista) di seguire nuove "mode" più aggiornate di quella dell'insie= mistica,ma di consentire ai maestri di accedere alle informazioni e alle verifiche relative alla situazione di altri Paesi (visto che in Italia,come già osservato,ve= rifiche non sono state fatte...) e di rendersi conto dei grossi limiti che sono stati riscontrati negli approcci unilaterali di tipo "cardinale" all'aritmetica e nella sottovalutazione della "geometria delle figure e delle misure" .In relazione a queste necessità di sprovincializzazione e di superamento di indirizzi didattici poco pro= duttivi per gli allievi ritengo che i nuovi programmi avrebbero potuto essere più chiari (anche a costo di scontentare qualche membro della Commissione e qualche staff redazionale di Riviste o di libri di testo....).Tornerò sulla questione in se= guito,con riferimento ai "problemi",all'aritmetica e alla "logica" .

2.I problemi

Nei corsi di aggiornamento mi viene spesso chiesto perchè il primo tema elencato nei programmi sia proprio quello dei "problemi" (e non quello della "logica",che nella mentalità corrente presso i maestri più impegnati è vista come fondamento del= la matematica e del suo insegnamento).Una risposta al quesito è esplicitamente con= tenuta nel testo dei programmi,laddove si dice che "il pensiero matematico è caratte= rizzato dall'attività di risoluzione di problemi" e che "Di conseguenza le nozioni matematiche di base vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete,.....".Il maestro "impegnato" non ne ricava di solito granchè; in effetti occorre rendersi conto dei limiti derivanti dalla sua preparazione di base e dai condizionamenti subiti attraverso le attività di aggiornamento prevalenti negli ul= timi due decenni (per quanto riguarda la didattica della matematica).All'Istituto Magistrale la matematica veniva (e viene tuttora) considerata come esercizio for= male e addestramento alla precisione e al rigore,il riferimento alle "applicazioni" concerneva aspetti pratici immediati,la risoluzione dei problemi (di geometria o di aritmetica) veniva condotta secondo schemi da apprendere in modo ben graduato, senza cioè alcun vero aspetto problematico.....Seguendo l'attività di studio di alcuni maestri impegnati nelle attività di "formazione dei formatori in matematica" promosse dal C.I.D.M. di Pisa,mi sono imbattuto in libri di testo(che erano ampiamente adottati all'Istituto Magistrale una ventina di anni fa) nei quali si indicava come titolo di merito del testo il fatto che "...nelle dimostrazioni nessun passaggio è stato omesso;ogni operazione è ampiamente giustificata in margine, con la esplicita citazione delle proprietà e dei teoremi applicati di volta in volta" Naturalmente,negli stessi testi erano frequenti richiami a pratiche didattiche sui problemi finalizzate a eliminare aspetti problematici"scomodi" per i bambini: " Se si vogliono proporre problemi la cui soluzione rappresenti oggetti non frazionabili...i dati devono essere scelti in modo che la soluzione sia un numero intero, per non giungere a conclusioni inverosimili.Ad esempio,con i seguenti dati:"Quanti operai occorrono per fare un lavoro in 12 giorni,se 14 operai lo fanno in 21 giorni?" si avrebbe:......Per fare l'assegnato lavoro in 12 giorni, occorrerebbero 24 operai e mezzo ! ".E' ovvio che un maestro formato secondo indirizzi del genere ha difficoltà a capire il significato e le principali indicazioni del tema "problemi" dei nuovi programmi,in cui l'accento viene messo sulla padronanza critica delle situazioni problematiche,sulla ricerca dei dati,sull'interpretazione critica delle soluzioni, sull'invenzione delle strategie risolutive.....L'aggiornamento prevalente in questi anni nella scuola elementare per quel che riguarda la matematica non ha migliorato certo (in tema di "problemi") l'atteggiamento del maestro :si è sollecitata in lui l'attenzione ai meccanismi formali del ragionamento matematico (...quante ore dedicate ad esercizi sulle tavole di verità,le implicazioni,ecc.),si è suggerito-per quanto riguarda i problemi aritmetici- il modello della visualizzazione con i diagrammi di Venn come toccasana per mettere i bambini in condizioni di risolvere i problemi di "addizione","sottrazione" e "moltiplicazione",si è trascurata la riflessione sulle reali difficoltà che i bambini incontrano nella risoluzione dei problemi meno scontati....La situazione quindi non è affatto favorevole per quanto riguarda la disponibilità dei maestri a investire energie e attenzione sui "problemi".

Esistono tuttavia (in base a molte esperienze di aggiornamento fatte in questo ambito,ed anche al lavoro condotto con i maestri afferenti al gruppo da me coordinato) alcune possibilità di "aggancio" dei maestri su questa tematica che non dovrebbero essere trascurate.

Un primo riferimento che stimola gli insegnanti riguarda il calolatore.Ripeto spesso che il calcolo di una operazione aritmetica standard è alla portata di una calcolatrice di quelle che vengono regalate nei supermercati;e che l'esecuzione di una procedura risolutiva standard per problemi aritmetici di una certa classe (variando di volta i dati numerici) è alla portata di un calcolatore programmabile tascabile di costo inferiore alle 100000 lire .....mentre nessun calcolatore (o "supercalcolatore" da 25 miliardi di costo) è ancora in grado di analizzare il seguente testo fino a produrre la soluzione del problema : "Il signor Cosimo ritrova la sua auto,che era stata rubata dai ladri;i ladri hanno portato via tutte le ruote (compresa quella di scorta).Qual'è la spesa che deve sostenere il signor Cosimo per poter riutilizzare l'auto,sapendo che ogni cerchione costa 90000 lire ed ogni pneumatico 105000 lire ? ".Considerazioni di questo tipo possono essere utili per i maestri per mettere a fuoco le difficoltà che i bambini incontrano nella risoluzione dei problemi: i problemi più significativi sono quelli in cui alcuni dati non sono esplicitati e vanno ricavati dal contesto e dall'esperienza che abbiamo della realtà (nel problema citato,il fatto che le ruote di un'auto sono quattro,e che inoltre occorre la ruota di scorta...),i problemi in cui il testo non suggerisce direttamente le operazioni da compiere con i dati,ecc. Con un pò di esempi è possibile sollecitare i maestri a mettere in discussione alcune abitudini didattiche dannose (se si mira a costruire nei bambini capacità di risoluzione autonoma dei problemi), come quella di fare risolvere molti problemi tutti dello stesso tipo,o quella di guidare-con domande intermedie- la risoluzione di problemi complessi,o quella di evidenziare con tabelle i dati disponibili,i dati mancanti ed i valori da trovare (quest'ultima abitudine rischia di allontanare i bambini dalla situazione problematica e di indurli a cercare a caso le operazioni da effettuare sui dati).

Un secondo riferimento proponibile per la riflessione dei maestri sulla questione dei problemi concerne attività a livello adulto su problemi di aritmetica (di tipo teorico).Il vantaggio dei problemi teorici nell'ambito dell'aritmetica è che non è affatto evidente quale sia la loro soluzione;si può cominciare con questioni di divisibilità ("è vero oppure no che sommando due numeri dispari consecutivi si trova sempre un multiplo di 4 ? " ecc.) per arrivare a problemi ancora insoluti ("è vero oppure no che ogni numero pari si può scrivere come somma di due opportuni numeri primi ?") .Ho registrato spesso notevoli difficoltà da parte dei maestri ad affrontare i problemi più semplici (soprattutto per il fatto che non si chiede di "dimostrare una proprietà",ma preliminarmente di "stabilire se essa è vera oppure no",attività questa di cui i maestri non hanno alcuna esperienza!) Alla fine di un paio di sedute di lavoro su problemi di aritmetica,la "congettura di Goldbach" crea un altro piccolo trauma ai maestri,che si erano ormai abituati all'idea che almeno il loro "aggiornatore" sapeva tutto sulle proprietà proposte al= la loro attenzione ......Attività su questioni teoriche di aritmetica mi sembrano utili per convincere i maestri dell'importanza del "risolvere problemi" nella costru= zione stessa della matematica,superando lo stereotipo diffuso di una matematica come conoscenza sistemata,da studiare e ripetere,come pure lo stereotipo (spesso presente proprio tra i maestri più impegnati e"aggiornati") che la matematica si riduca ad attività logico-formali con sostanziale indifferenza per i contenuti su cui esse si esercitano.

Nelle discussioni sulla gestione in classe dei problemi (in particolare dei proble= mi aritmetici) è frequente ascoltare dai maestri l'affermazione che "....però certi bambini sono proprio limitati e non ce la fanno a risolvere problemi da soli,senza seguire dei modelli proposti dal maestro ......".Di solito,ci si riferisce non ad uno o due bambini per classe,ma sovente a un quarto,un terzo della classe.....In effetti risolvere problemi non è facile,e ancora più difficile è insegnare ai bambini a risol= vere problemi.Nella scuola italiana sono diffuse alcune cattive abitudini che a mio parere vanificano molti degli sforzi che i maestri in buona fede fanno per costruire nei loro allievi autonomia nella risoluzione dei problemi.Oltre a quelle già citate in precedenza,vorrei qui ricordare :

- il ritardo con il quale vengono proposti (rispetto ad altri Paesi) i problemi a più operazioni e i problemi di divisione,in singolare contrasto con l'anticipazione delle tecniche di calcolo scritto della sottrazione e soprattutto della divisione(ad esem= pio,la tecnica di calcolo scritto della divisione non viene proposta ai bambini dello URSS e della Francia prima dei 10 anni)
- l'abitudine (ancora diffusa su alcuni libri di testo) a raggruppare i problemi in comparti (problemi di addizione -problemi di sottrazione - problemi di addizione e sottrazione...),con il risultato di non impegnare adeguatamente il bambini nella ricerca dell'operazione adatta per risolvere il problema proposto
- l'abitudine a suggerire (nel testo del problema) le operazioni da compiere:"quanto costa in tutto......" suggerisce che si debba eseguire una addizione;"quanto resta.." suggerisce che si debba eseguire una sottrazione; e così via

Non ci si può lamentare del fatto che un terzo della classe non acquisisca autonomia nella risoluzione dei problemi,se i bambini ricevono in certi momenti sollecitazioni ad aderire a comportamenti standard (....rappresentare con insiemi la situazione pro= blematica ....cercare nelle parole i suggerimenti per indovinare le operazioni... preoccuparsi della correttezza e della rapidità di esecuzione dei calcoli più che del procedimento risolutivo....) che creano un atteggiamento sbagliato verso la ri= soluzione dei problemi.Mi sembra quindi molto utile,nelle attività di aggiornamento sul "problema dei problemi",analizzare con cura gli errori didattici più diffusi, anche a costo di urtare la suscettibilità di qualche maestro presente;può essere opportuno - riprendendo l'argomento dei calcolatori - fare osservare ai maestri che se si ipotizza che un terzo della classe non riesca ad acquisire reale autonomia nella risoluzione dei problemi,si ipotizza in realtà che un terzo della popolazione abbia soltanto le capacità operative di un computer programmabile tascabile del costo di 100000 lire e non sia in grado di costruire gli algoritmi per utilizzar= lo nella risoluzione di problemi nuovi !

Accanto allo sforzo di messa in evidenza di comportamenti didattici controproducen= ti,è opportuno proporre ai maestri esempi "in positivo"sulla gestione dei problemi in classe.Un aspetto molto importante per la costruzione della capacità di risolve= re autonomamente problemi è quello linguistico;rinviando alla relazione di Enrica Ferrero ed Ezio Scali l'analisi dei diversi linguaggi che possono utilmente interve= nire nella costruzione e nell'esplicitazione delle strategie risolutive,mi limiterò qui ad osservare che in base all'esperienza condotta negli ultimi due anni nel grup= po da me coordinato sembra essenziale uno stretto coordinamento tra la costruzione di capacità di produzione di testi scritti e la costruzione di strategie risolutive di problemi matematici(in particolare in II e III elementare).Se i bambini sono abituati a produrre testi scritti inerenti attività ed esperienze logicamente strut= turate,è più facile per loro utilizzare il linguaggio verbale come "strumento del pensiero" nella produzione delle strategie risolutive dei problemi.

Un altro aspetto che mi sembra utile sottolineare (in base al lavoro nelle nostre classi) è quello che riguarda il raccordo che sarebbe bene stabilire (nella pratica didattica) tra strategie risolutive dei problemi aritmetici e tecniche di calcolo scritto delle operazioni aritmetiche (in particolare per quel che riguarda la sot= trazione e la divisione).La rivalutazione delle tecniche di calcolo scritto propo= sta nei nuovi programmi non riguarda tanto la capacità di eseguire rapidamente e correttamente calcoli aritmetici complicati,quanto la padronanza dell'aspetto algo= ritmico.In tal senso occorrerebbe individuare,tra quelle diffuse nei diversi Paesi, le tecniche più adatte ad essere introdotte e gestite in modo consapevole dagli allievi.Per la sottrazione,abbiamo verificato che la tecnica "standard" può costi=

tuire l'approdo procedurale naturale di strategie messe in opera dai bambini nella risoluzione di problemi "di sottrazione" (naturalmente, l'insegnante deve via via valorizzare e socializzare quei ragionamenti che possono essere generalizzati ad altri casi numerici). Per la divisione invece la tecnica ordinaria appare estranea alle strategie messe in opera dai bambini per risolvere problemi "di divisione" (essa risulta inoltre pressochè incomprensibile per gli allievi quando il divisore ha più di una cifra). Abbiamo verificato che molto più naturale (e pienamente comprensibile agli allievi) risulta l'approdo di strategie risolutive di problemi "di divisione" alla tecnica di calcolo scritto detta "alla canadese", che tra l'altro presenta la stessa difficoltà qualunque sia il numero delle cifre del divisore (si tratta della tecnica in base alla quale si svuota progressivamente il dividendo delle ....centinaia di volte, poi delle decine di volte, poi delle volte....che il divisore sta nel dividendo e nei successivi resti così ottenuti).
Naturalmente, seguire queste indicazioni concernenti l'approdo graduale alle tecniche di calcolo scritto come sbocco procedurale universale di ragionamenti messi in opera nella risoluzione dei problemi richiede che vengano anticipati i tempi in cui si affrontano problemi di sottrazione e di divisione, e posticipati i tempi in cui si introducono le tecniche di calcolo scritto (...il che comporta l'avvicinamento alla situazione di altri Paesi che tengono in gran conto l'insegnamento matematico, come la Francia e l'URSS).

A proposito dei problemi, ho lasciato per ultima la questione più importante per la risoluzione dei problemi aritmetici, che riguarda la padronanza dei significati delle operazioni aritmetiche. La ricerca degli ultimi 12-15 anni ha sottolineato con sempre maggiore chiarezza che ogni operazione aritmetica ha una molteplicità di significati non riconducibili l'uno all'altro e almeno in parte non gerarchizzabili; ad esempio, un bambino può essere in grado di risolvere problemi "di divisione" in cui si tratta di distribuire una certa quantità di oggetti tra un certo numero di persone (poniamo, 19 oggetti tra 4 persone....) e non essere in grado di risolvere problemi " di divisione" in cui ci si chiede (ad esempio) "quante auto lunghe 4 metri si possono sistemare, una accostata all'altra, lungo una parete di garage di 19 metri" (e viceversa) .La questione della padronanza dei significati delle operazioni aritmetiche rinvia da un lato al tema dell'aritmetica (e quindi la approfondiremo tra poco), dall'altro alla sottolineatura dei limiti dell'approccio "insiemistico" alle operazioni aritmetiche (che privilegia certi significati a scapito di altri).

3.L'aritmetica

Le indicazioni iniziali sul tema "aritmetica" sono (nei nuovi programmi) molto sintetiche e incisive; purtroppo (come già osservato al punto 2) la mancata contestualizzazione di esse nel dibattito sull'approccio al numero ed alle operazioni aritmetiche ne limitá l'efficacia "didascalica" per i maestri e consente il persistere di pratiche didattiche in contrasto con lo spirito dei nuovi programmi.

Supponiamo comunque di metterci dal punto di vista del maestro che voglia attuare i nuovi programmi per quanto riguarda l'aritmetica, ed esaminiamo le difficoltà a cui va incontro. La "pluralità di punti di vista (ordinalità, cardinalità, misura...)" a cui si fa riferimento nei programmi non costituisce elemento di grossa difficoltà (in quanto è possibile con semplici esempi chiarire di che cosa si tratta); piuttosto, può essere utile fare notare ai maestri che dal punto di vista percettivo i diversi significati del numero hanno una evidenza diversa: un insieme di oggetti si può dominare con lo sguardo, ma la "cardinalità" è percepibile a colpo d'occhio solo per insiemi costituiti da pochissimi oggetti....E' inoltre assai difficile confrontare la numerosità di due aggregati di oggetti sparpagliati su un tavolo (...un mucchio di palline bianche e un mucchio di palline nere costituiti entrambi da una cinquantina di palline - ad esempio, 48 e 53). Per quanto riguarda l'aspetto ordinale, esso è presente nella realtà che ci circonda sotto varie forme: numeri dei portoni lungo le strade (da un lato i pari, dall'altro i dispari), data sul calendario a fogli giornalieri mobili, data sul calendario a fogli mensili, numero di targa delle auto di una data città,.... Per ciascuna di queste situazioni la padronanza percettiva è diversa, e diverse sono le difficoltà inerenti il confronto e le strategie per attuarlo. Per quanto riguarda l'aspetto "misura", esso è riferito a grandezze che possono essere molto diverse e diversamente dominabili a livello percettivo; non è la stessa cosa associare un numero alla misurazione della lunghezza del banco con un metro da falegname o confrontare due lunghezze comparando direttamente gli oggetti, o pensare ad una durata (di un viaggio, o di un tuono....) o ad un volume.....Vi sono poi altri aspetti del numero che risultano importanti dal punto di vista didattico, soprattutto nel I ciclo della scuola elementare: mi riferisco all'aspetto "enumerativo" (presente nella "conta per contare" dei bambini piccoli) e all'aspetto "valore"(<u>una</u> moneta, <u>uno</u> spazio tra due tacche,....assumono convenzionalmente, di solito, valore di <u>due</u> ,o <u>cinque</u> ,o <u>dieci</u> monete o spazi tra tacche ...rispetto ad altre unità di misura).

Di fronte a esempi e considerazioni di questo tipo i maestri manifestano sorpresa e preoccupazione:l'idea che il numero tre fosse riducibile (dal punto di vista didattico) alla considerazione di tanti insiemi equipotenti di tre oggetti aveva(ed ha)successo anche perchè riduce molto la complessità dell'approccio al numero;nel momento in cui i programmi richiamano invece l'attenzione sulla "complessità dell'idea di numero" è naturale che anche il compito professionale dei maestri diventi più impegnativo....Una domanda che mi è stata spesso rivolta nei corsi di aggiornamento riguarda l'opportunità o meno di presentare i diversi significati del numero con momenti di lavoro specifico (e in quale ordine ?) : qualche settimana di lavoro sull'aspetto ordinale (via via variando le situazioni in modo da evidenziare i diversi significati che esso assume in relazione alle esperienze reali di ordinamento), qualche settimana sull'aspetto"misura " (con riferimento a varie grandezze da misurare) ,ecc. .I programmi danno indicazioni chiare in proposito:il processo di acquisizione del concetto di numero "avviene durante l'intero corso della scuola elementare e oltre ",non si tratta quindi nei primi mesi di scuola di sottoporre al bambino tutti i significati del numero,ma di organizzare un curriculum quinquennale in cui siano presenti molti aspetti e di tener conto del fatto che ogni bambino può pervenire prima a"concettualizzare " certi aspetti e poi altri,con itinerari personali che possono differire da bambino a bambino anche in presenza di uno stesso itinerario scolastico.....

Sulla base delle esperienze condotte nelle nostre classi a partire dal 1980 posso aggiungere ulteriori considerazioni e suggerimenti "in positivo",per quanto riguarda la gestione didattica della complessità della concettualizzazione del numero. Anzitutto,abbiamo verificato che è utile presentare ai bambini situazioni problematiche e fare svolgere attività nelle quali più aspetti e più significati del numero sono compresenti.Consideriamo ad esempio la facile attività che consiste,per ogni mese della classe I,nella registrazione giornaliera delle presenze e delle assenze e dello stato del cielo sul cartellone del "calendario",e poi-alla fine di ogni mese-nella costruzione degli "istogrammi a crocette" riassuntivi del mese per quanto riguarda le assenze dei bambini e lo stato del cielo.In questa attività sono presenti l'aspetto "ordinale" del numero (sequenza dei giorni del calendario...),l'aspetto "cardinale" (conta delle crocette delle assenze,o dei giorni di sole...),l'aspetto "misura" (costruzione e lettura delle colonne degli "istogrammi",e soprattutto comparazioni: "ci sono stati più giorni di sole o di pioggia ? ").

In secondo luogo abbiamo constatato che la scelta di poche attività (o"centri di

interesse") ben calibrati e sfruttati a fondo (con una programmazione didattica accurata) consente agli insegnanti di svolgere a fondo il "programma sui numeri" in modo lineare,non confuso,non affrettato.In base alle nostre esperienze,ci pare che il filone del "tempo" (che si avvia in I con le attività sul calendario sopra citate,e prosegue in II con attività e problemi sulle durate,sulla giornata,sugli orologi...e poi in III e IV con attività sulla linea del tempo collegate alla storia) e il filone "economico" (che comincia in I con attività di formazione di prezzi collegate ad acquisti veri o simulati,e prosegue in II,III e IV con calcoli e confronti economici relativi ai costi di produzione ed ai percorsi delle merci) offrano delle formidabili occasioni di concettualizzazione dei vari aspetti e dei vari significati del numero, con riferimenti continui ad esperienze che il bambino fa o può fare fuori della scuola. In ciò anche la storia della formazione dei concetti matematici nell'antichità ci conforta,nella misura in cui sottolinea il rilievo assunto dalle problematiche di padronanza del tempo (collegate con la costruzione dei calendari) e di tipo economico nella ideazione delle prime formalizzazioni e delle prime procedure aritmetiche.

Direttamente connesso con il problema dei significati del numero è il problema dei significati delle operazioni aritmetiche.Come ho già osservato in precedenza,la riduzione della complessità dei significati al solo significato "cardinale"(e alla sua rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn e con i"prodotti cartesiani") aveva (ed ha) un indubbio successo tra i maestri perchè dà l'illusione di un apprendimento esteso ed efficace....purtroppo si tratta di un apprendimento limitato,che non si estende automaticamente ad altri significati delle operazioni:nelle classi di I media è facile trovare bambini che sanno calcolare"quante caramelle Maria aveva,se ne ha date 6 ad ognuno dei suoi 4 bambini ", ma non sanno calcolare la durata complessiva di 4 viaggi di un convoglio della metropolitana,ciascuno della durata di un'ora e 6 minuti... In definitiva,i maestri che seguono in modo pedissequo l'impostazione insiemistica (ce ne sono molti,in alcune zone del nostro Paese) propongono-con successo-problemi risolubili con la rappresentazione insiemistica del numero e delle operazioni e hanno l'impressione che i bambini se la cavino con sicurezza (perchè sanno risolvere correttamente i problemi di verifica dello stesso tipo loro proposti),senza preoccuparsi di quello che accade quando la rappresentazione insiemistica non è possibile o non è naturale ....Anche a proposito dei significati delle operazioni occorre quindi anzitutto convincere i maestri dell'intrinseca e irriducibile complessità dell'obiettivo di apprendimento:non è la stessa cosa proporre di lavorare (nei problemi di addizione e sottrazione) con valori monetari,o con quantità di oggetti,o con misure di lun= ghezza ....Non è la stessa cosa (nei problemi di divisione) proporre situazioni pro= blematiche in cui si tratta di stabilire quante volte una "lunghezza" è contenuta in una "lunghezza" maggiore,o quante volte un "prezzo" è contenuto in un importo di denaro a disposizione,o quanto tocca ad ogni bambino pagare se si vuole suddi= videre equamente tra tutti i bambini una spesa sostenuta dalla classe,o quanti km ha percorso(in media)una automobile ogni ora se il viaggio è durato 3 ore e sono stati percorsi 315 km .....

Anche a proposito dei significati delle operazioni,il lavoro condotto in questi anni nelle nostre classi mi consente di essere abbastanza ottimista per quel che riguarda la praticabilità dell'obiettivo della padronanza (entro la fine della scuola elementare) dei principali significati delle operazioni aritmetiche da par= te della maggior parte dei bambini.Le attività sul "tempo" e sul filone "economi= co",le attività (di misura,confronto di misure,costruzione di grafici...) sul fenomeno delle ombre,i problemi inerenti la valutazione approssimativa e il calcolo delle misure delle estensioni geografiche rappresentate in scala con il metodo della triangolazione offrono molteplici occasioni di concettualizzazione dei diversi si= gnificati delle operazioni aritmetiche che senza forzature sono necessarie per rispon= dere ai quesiti che "naturalmente" si pongono nel procedere delle indagini.

Non mi sembra quindi necessario programmare una sequenza artificiosa e accuratamen= te calibrata (per difficoltà e gradualità di complessità) di problemi da fare via via risolvere,quanto piuttosto avere presenti alcuni temi di lavoro ben assortiti e sfruttare tutte le occasioni che essi presentano al fine di proporre situazioni proble= matiche varie e impegnative.In proposito vorrei segnalare che nelle ricerche di psi= cologia dell'apprendimento della matematica più recenti assume sempre maggior rilievo la constatazione che la motivazione del bambino a venire a capo di una certa situazio= ne problematica,la sua padronanza del contesto in cui si colloca il problema proposto, il collegamento con esperienze extrascolastiche del bambino sono fattori decisivi di successo nella concettualizzazione dei significati che intervengono nella risoluzione dei problemi aritmetici.Anche nelle nostre classi abbiamo notato spesso che,con sor= presa degli insegnanti ,certi problemi difficili e non preparati da apposite attività propedeutiche su problemi più facili possono risultare più facili da risolvere e soprat= tutto più produttivi (per le concettualizzazioni che si realizzano) se i bambini si coinvolgono a fondo nella risoluzione,rispetto a problemi facili ma poco attraenti.

Un altro punto nodale dei nuovi programmi di matematica per quanto concerne l'aritme= tica riguarda l'indicazione che "La formazione delle abilità di calcolo va fondata su modelli concreti e strettamente collegata a situazioni problematiche".Si tratta di una indicazione innovativa rispetto alle pratiche didattiche correnti,che sepa= rano il "mondo dei numeri" (su cui si esercitano le tecniche di calcolo scritto e le memorizzazioni delle tabelline) dal "mondo dei problemi " (nel quale si appren= de a costruire - o più spesso ad adattare - procedimenti risolutivi).Purtroppo si tratta di una indicazione non accompagnata da precisazioni od esemplificazioni uti= lizzabili dai maestri in termini operativi;e mancano inoltre suggerimenti precisi per quel che riguarda la collocazione temporale dell'obiettivo di "eseguire per iscritto le quattro operazioni aritmetiche con i numeri naturali e decimali,compren= dendo il significato dei procedimenti di calcolo",genericamente assegnato al II ciclo.Ritengo che la ricerca didattica italiana debba sforzarsi nei prossimi anni di colmare questo vuoto di indicazioni con proposte praticabili su vasta scala e attente a rispettare lo spirito delle indicazioni programmatiche (sia per quel che riguarda il collegamento tra "mondo dei problemi" e "tecniche di calcolo",che per quel che riguarda la "comprensione dei procedimenti di calcolo").Questo aspetto (per me assai qualificante e innovativo) dei nuovi programmi si collega infatti in modo funzionale con le indicazioni programmatiche sull'alfabetizzazione informatica (laddove si parla di "costruzione e analisi di algoritmi ") e soprattutto con le e= sigenze di formazione matematica connesse alla diffusione dei calcolatori,in quanto nel lavoro con il calcolatore è necessario sia collegare lo sbocco procedurale dello algoritmo e del programma alla situazione problematica che ha generato la necessità di elaborare l'algoritmo,sia comprendere e tenere sotto controllo l'algoritmo.

Per quanto concerne il gruppo da me coordinato,rinvio a quanto detto sui "proble= mi" per quel che riguarda la praticabilità degli obiettivi ora richiamati e suggeri= menti-derivanti dalla sperimentazione nelle nostre classi- per quel che riguarda possibili modi di realizzare il collegamento consapevole tra "tecniche di calcolo sui numeri" e "procedure risolutive di problemi".

4.La geometria

Già ho detto della significativa rivalutazione che i nuovi programmi propongono della geometria e dell'accento particolare posto sulla geometrizzazione e sulla mi= sura.Questo tipo di indicazioni trova abbastanza spiazzati sia i maestri che inse= gnano matematica in modo "tradizionale",sia i seguaci degli indirizzi di "matemati= ca moderna"(che si meravigliano molto del fatto che nei programmi non compare mai esplicitamente la parola "topologia" e si insiste molto invece su lunghezze,aree, volumi,ecc.).Apparentemente sembra che i programmi diano ragione a chi ha continuato (in questi anni di messa in discussione dell'insegnamento tradizionale della geometria) a insegnare geometria come la si insegnava trenta anni fa;basta però riflettere sulle indicazioni riguardanti la geometrizzazione,sul rilievo dei sistemi di coordinate,sui riferimenti alle trasformazioni geometriche,sulla terminologia utilizzata per parlare di contenuti e nozioni tradizionali (...."riconoscere" ,"denominare" e "disegnare" le principali figure piane...."usare correttamente espressioni come: retta verticale,orizzontale,rette parallele,incidenti,perpendicolari....")per capire che lo spirito dei nuovi programmi è ben diverso dallo spirito che anima l'insegnamento tradizionale della geometria ! In effetti,laddove ci si preoccupava di "definire" gli enti e le figure geometriche e di "studiarne" le proprietà,le formule per il calcolo di aree,perimetri e volumi,ecc.,nei nuovi programmi l'accento è posto su attività di riconoscimento,di costruzione geometrica,di concettualizzazione di area,perimetro e volume.E poi ci sono i contenuti nuovi,messi sullo stesso piano di quelli tradizionali:coordinate,trasformazioni geometriche....,tutto ciò a rimarcare ancora di più il carattere che deve assumere l'insegnamento della geometria come costruzione di concetti (e di termini ed espressioni linguistiche) necessari per la padronanza dello spazio sia in termini "statici" che in termini " dinamici".

Anche nel caso della geometria (come nel caso dei problemi) può essere utile,presentando i nuovi programmi ai maestri,fare riferimento alle esigenze poste dalla diffusione dei calcolatori.Ormai le immagini dei robot che saldano,avvitano,montano pezzi sono abbastanza diffuse e consuete alla TV da consentire di discutere con i maestri sul profondo cambiamento inerente la padronanza dello spazio che le nuove tecnologie stanno realizzando nei posti di lavoro:al movimento diretto delle mani, controllato dall'occhio e collegato all'esperienza,si sostituisce il movimento di un"arto"meccanico guidato da un programma che traduce in istruzioni comprensibili dalla macchina l'esplicitazione di quelli che un tempo erano movimenti e posizioni frutto di imitazione e adattamento all'ambiente.....I sistemi di coordinate,le giaciture di rette,le trasformazioni geometriche non costituiscono più un lusso intellettuale o elementi propedeutici a professioni elitarie (geometri,ingegneri...), ma diventano conoscenze,modi di parlare delle cose che succedono nello spazio,concetti chiave per lo svolgimento di professioni operarie e tecniche di basso livello nella gerarchia sociale;e la scuola elementare ha in tal senso una grossa responsabilità,se è vero che la padronanza della spazialità è molto difficile da recupe-

rare oltre i 12-13 anni.

Un altro elemento di riflessione che mi sembra stimolante per i maestri è costituito dall'analisi della qualità dell'apprendimento geometrico realizzato attraverso l'insegnamento tradizionale.I bambini imparavano a recitare definizioni,a fissare l'attenzione su proprietà delle figure geometriche piane evocate attraverso posizioni particolari di tali figure,a ricordare e applicare formule per il calcolo di aree, perimetri e volumi....però questo "sapere"non si traduceva in concettualizzazioni capaci di riconoscere figure geometriche nella realtà che ci circonda,di individuare se una data proprietà vale in generale oppure soltanto per la figura esaminata,di distinguere l'area di una figura dal suo perimetro,ecc..I maestri sono abbastanza d'accordo sul fatto che le cose che contano sono queste ultime e che l'insegnamento tradizionale non le costruiva...però anche nel caso della geometria (come nel caso dei problemi) il riferimento ai bambini "più limitati" viene addotto come giustificazione di un insegnamento basato più sulla memorizzazione che sul ragionamento,più sulle figure geometriche standard disegnate sulla carta che sulle figure geometriche da riconoscere nella realtà...Ho l'impressione che dietro a questa giustificazione operi più la difficoltà dell'adulto (non adeguatamente formato a scuola) a "vedere" e "ragionare" in termini geometrici,che una reale difficoltà degli allievi;a ciò si aggiunga il fatto che un insegnamento basato sullo studio e sulla ripetizione (da parte degli allievi) e riguardante le figure disegnate sulla carta è meno impegnativo,pone meno problemi (disciplinari anzitutto),consente delle verifiche immediate e rassicuranti (ha imparato- non ha imparato) rispetto ad un insegnamento basato sul confronto tra le rappresentazioni mentali dei bambini,sulla esplorazione dell'ambiente scolastico ed extrascolastico,sulle attività di tipo operativo....

Un problema interessante che si pone spesso discutendo di queste cose con i maestri è il seguente:perchè i bambini fraintendono così spesso quello che loro si insegna in campo geometrico (più in campo geometrico che,poniamo,in campo aritmetico) ?Si tratta di un problema reale;basta richiamare alcuni esempi:

- la definizione tradizionalmente più diffusa sui libri di testo della scuola elementare per quanto riguarda l'angolo è quella di "porzione di piano compresa tra due semirette aventi l'origine in comune...".A parte alcune precisazioni (angolo interno,angolo esterno...) si tratta di una definizione accettabile dal punto di vista matematico;moltissimi bambini (pur imparando a recitarla correttamente) la frain=

tendono,nel senso che identificano l'angolo con la porzione di piano compresa tra i lati disegnati,cioè identificano l'angolo con il triangolo individuato dai due segmenti concorrenti nel"vertice".

- altezza del triangolo:se disegnamo un triangolo in posizione "non normale"(come dicono i bambini),cioè con la"base"non parallela ad uno dei lati del foglio,i bambini tracciano l'altezza uscente dal vertice opposto a tale "base"seguendo la verticale del foglio. (e non preoccupandosi della perpendicolarità alla "base")
- "se cresce il perimetro,cresce l'area" ;
- "per raddoppiare l'area di un quadrato basta raddoppiare il lato"

Mi sembra (in base a varie esperienze di aggiornamento condotte sui problemi di apprendimento della geometria) utile andare con i maestri alla ricerca dei motivi di questi "errori" così diffusi e tenaci:si tratta di ostacoli linguistici,di errori didattici degli insegnanti,di difficoltà percettive....Ad esempio,nel caso della definizione tradizionale di angolo è comprensibile che di fronte alla complessità della definizione il bambino perda di vista il carattere saliente delle "semirette" e finisca per identificarle con i segmenti che le rappresentano sul foglio;nel caso dell'altezza del triangolo posto in posizione non "normale"invece entrano in gioco sia ostacoli linguistici (collegati alla confusione esistente nella terminologia comune tra "verticale" e "perpendicolare") che cattive abitudini degli insegnanti e dei libri di testo (quando presentano i triangoli in posizione prevalentemente "normale"),che abitudini contratte dai bambini nelle costruzioni geometriche (per tracciare la retta perpendicolare a una retta disegnata sul foglio in posizione "normale" -cioè parallelamente ad uno dei lati del foglio-basta appoggiare il bordo della squadra lungo il bordo del foglio ...).Per quanto riguarda le relazioni tra perimetro e area,alle difficoltà percettive (a cogliere la misura dell'estensione in relazione alla misura del contorno) si sommano errori didattici (è evidente che un insegnamento delle aree e dei perimetri basato su formule non costruisce concetti e non crea antidoti a confusioni tra "misura dell'estensione" e "misura della lunghezza del contorno").

Anche nel caso della geometria occorre (nelle attività di aggiornamento) affiancare alla critica dei comportamenti professionali negativi degli insegnanti e all'analisi delle difficoltà di apprendimento degli allievi indicazioni "in positivo"utili per sollecitare nei maestri la voglia di innovare il loro insegnamento.Purtroppo nel caso della geometria dei nuovi programmi mancano riferimenti estesi ad una ricerca

didattica consolidata a livello internazionale e relativa alla fascia di età 6-10 anni(in particolare per quanto riguarda i sistemi di coordinate e le trasformazioni geometriche,come pure per certi aspetti della misura delle grandezze geometriche);ed anche le ricerche sui processi di apprendimento riguardano aspetti molto particolari e per giunta con indicazioni spesso contraddittorie (per lungo tempo sono state dominanti le ricerche ispirate alla scuola di Piaget e fondate sull'analisi dei livelli di apprendimento prescindendo dai condizionamenti scolastici e socioculturali subiti;indicazioni diverse si ottengono intervenendo intenzionalmente sui bambini per un periodo lungo e studiando le acquisizioni concettuali così raggiunte).Rintengo assai importante il contributo che potranno dare i gruppi di ricerca didattica nel proporre ai maestri itinerari di lavoro sulla geometria dei nuovi programmi realistici ed efficaci .

Per quanto riguarda il gruppo da me coordinato,disponiamo attualmente di alcuni segmenti di lavoro che consideriamo validi (per qualità ed estensione dei risultati di apprendimento raggiunti) in relazione ad una parte soltanto degli obiettivi indicati nei nuovi programmi. In particolare,in base alla nostra esperienza ci pare proponibile l'individuazione di alcuni temi di lavoro a forte contenuto geometrico,capaci di offrire ai bambini in un tempo abbastanza ridotto occasioni di concettualizzazione su una vasta area di concetti.Mi riferisco:

- *all'attività sui "percorsi" in II elementare (corrispondente ad una delle indicazioni operative del testo della Commissione Ministeriale):si possono agevolmente proporre questioni di pre-misura e misura di lunghezza,riconoscimento e denominazione di figure geometriche,analisi dei rapporti tra situazione spaziale e rappresentazione piana da punti di vista diversi,ecc.*
- *all'attività sulle "ombre" in III e IV elementare:i contenuti che "naturalmente" intervengono nell'analisi del fenomeno delle ombre riguardano le misure di lunghezza,i sistemi di coordinate nel piano (in particolare,il sistema polare per localizzare le successive posizioni dell'estremità dell'ombra di un bastone esposto ai raggi del sole) e gli angoli e la loro misura,i grafici,la perpendicolarità, la verticalità e il parallelismo,il concetto di direzione ....*
- *alle attività sui grafici (collegati all'analisi di fenomeni naturali e sociali): i grafici appaiono uno straordinario punto di incontro di abilità e contenuti matematici (non solo geometrici !) diversi,dai sistemi di coordinate alle frazioni (quando si lavora sulla carta quadrettata),alle misure di lunghezza ed ai*

numeri decimali (quando si lavora su carta millimetrata),alle riduzioni in scala (per i segmenti).Forse sarebbe stato opportuno che nei testo dei nuovi programmi venisse di più enfatizzato l'argomento dei grafici (che tra l'altro presenta anche una forte valenza conoscitiva ed interdisciplinare).

- *alle attività sulle estensioni geografiche in V (in particolare per quel che riguarda il confronto tra zone geografiche rappresentate su cartine con scale diverse): i bambini devono ricoprire con triangoli le zone indicate,risalire alle misure"vere",effettuare costruzioni di altezze,lavorare con numeri "grossi",misurare lunghezze con il righello,ecc.*
- *alle attività su percorsi e movimenti su una pianta di un ambiente o sulla rappresentazione in assonometria di un ambiente: all'aspetto qualitativo (relativo al linguaggio delle trasformazioni geometriche:rotazioni e traslazioni) si affianca l'aspetto quantitativo (di quanto "avanza" il carrello? Di quanto deve"salire" la piattaforma mobile ? Di quanto deve"ruotare " il braccio della gru ?),collegato alla lettura delle misure sui disegni ed alla ricostruzione delle misure"vere" in base alle informazioni sulla scala con cui sono rappresentati alcuni dettagli.*

Su altri punti dei nuovi programmi (in particolare per quel che riguarda le simmetrie, le proprietà delle figure geometriche,ecc.) siamo ancora alla ricerca di soluzioni didattiche valide.

5.La logica

Come già accennato in precedenza,ha creato un certo stupore tra i maestri più "impegnati" la collocazione (come quarto tema),lo spazio dedicato,e soprattutto il contenuto del testo dei nuovi programmi relativo alla logica.L'abitudine a parlare di "formazione logico-matematica",le opinioni di alcuni psicopedagogisti che vanno per la maggiore in Italia,la pressione esercitata dalle riviste e dai libri per i maestri,molte attività di aggiornamento hanno creato in questo campo una aspettativa che non trova riscontro nel testo dei nuovi programmi.Mi pare opportuno qui richiamare le ragioni che a mio avviso giustificano le scelte della Commissione Ministeriale che ha redatto i nuovi programmi:la "logica"va anzitutto distinta dalla "logica matematica"(che è un settore specialistico della matematica al pari di tanti altri:algebra,analisi, topologia,analisi numerica,ecc.);e costituisce un aggregato di discipline o settori disciplinari diversi tra loro,che si occupano di problematiche diverse (dalle questioni inerenti i fondamenti della matematica,alle questioni concernenti i fondamenti logici del linguaggio).Negli ultimi due decenni invece si è formata tra i maestri l'idea che "logica","fondamenti logici della matematica","teoria degli insiemi","logica matematica" fossero entità sostanzialmente analoghe e dovessero essere poste alla base della formazione dei maestri e della formazione degli allievi.

Il testo dei nuovi programmi sottolinea due momenti della"logica"(intesa come aggregato di discipline diverse): quello inerente gli aspetti logici del linguaggio naturale (cruciale per l'educazione logica del bambino,per la quale si sottolinea che "deve essere argomento di riflessione e di cura continua dell'insegnante...più che oggetto di un insegnamento esplicito e formalizzato"e si precisa che "soprattutto nei primi anni di scuola,il linguaggio naturale ha ricchezza espressiva e potenzialità logica adeguata alle necessità di apprendimento");e quello inerente alcuni linguaggi e alcune attività di forte valenza logica (classificazioni...diagrammi di Eulero-Venn,grafi,ecc.).Il testo dei nuovi programmi libera quindi i maestri dal vincolo (imposto da molti libri di testo e da tanti "aggiornatori") di iniziare il curriculum matematico della scuola elementare con settimane o mesi di lavoro sugli "insiemi",sulle "relazioni",sulle "inclusioni " .....come argomenti <u>preliminari</u> (in particolare) all'apprendimento dell'aritmetica e comunque <u>necessari</u> all'educazione matematica e scientifica.Simbolizzazione e linguaggio degli insiemi (e dei grafi...) potranno essere introdotti nel corso del quinquennio in relazione alle effettive necessità poste dallo <u>sviluppo</u> degli apprendimenti nelle varie discipline.

Di grande interesse didattico e formativo considero il forte richiamo alla "sufficienza " del linguaggio naturale ai fini dell'apprendimento matematico e scientifico e insieme alla"necessità" di curare "in situazione" gli aspetti logici del linguaggio naturale;mi sembra si possa individuare in questo richiamo un esplicito riferimento a quanto è scritto nei programmi di educazione linguistica a proposito del linguaggio naturale come "strumento del pensiero".Negli stessi programmi nei quali viene sottolineata questa importante funzione del linguaggio naturale è giusto e coerente che l'insegnamento della matematica debba tener conto da un lato del significativo potenziamento degli obiettivi logici e cognitivi dell'educazione linguistica,dall'altro della necessità di concorrere a tali obiettivi per quanto di specifico consentono le attività matematiche.

Vorrei infine sottolineare la presenza(a fianco del linguaggio dei diagrammi di Eulero-Venn) del linguaggio dei grafi.Tale presenza "alla pari" mi sembra corrisponda non solo alle esigenze poste dallo sviluppo di particolari strumenti di vi=

sualizzazione nelle attività connesse con la programmazione dei calcolatori(diagrammi di flusso...),esigenze peraltro contestate da alcuni specialisti in campo informatico,quanto piuttosto (e,direi,soprattutto) alle potenzialità dei grafi nel rappresentare,secondare,favorire lo sviluppo di particolari forme di ragionamento matematico (cfr.in proposito la relazione di E.Ferrero ed E.Scali,sull'uso del linguaggio dei grafi nella costruzione delle strategie risolutive dei problemi aritmetici nella scuola elementare).Il linguaggio dei diagrammi di Eulero-Venn appare di utilità limitata alla rappresentazione di situazioni "statiche", mentre il linguaggio dei grafi è adatto per rappresentare (e accompagnare) processi dinamici,nella realtà e nel pensiero.

Per quanto riguarda le nostre esperienze di progettazione didattica nel campo della "logica",vorrei segnalare alcuni spunti di lavoro che si sono rivelati assai produttivi:

- *uso dei grafi per rappresentare processi produttivi sequenziali,e attività di riflessione linguistica ("analisi logica") connesse per quel che riguarda la individuazione dei "soggetti" che compiono (o subiscono) le azioni e dei "verbi" che esprimono tali azioni (dalla II alla V elementare)*
- *uso dei grafi per costruire strategie risolutive di problemi aritmetici (dalla II alla IV elementare)*
- *riflessione linguistica su "connettivi" di particolare rilievo logico (ad esempio il "mentre" ,nell'analisi di processi produttivi, in II e III; o l' "invece" nei confronti storici,a partire dalla III)*
- *uso dei diagrammi di Eulero-Venn per attività di classificazione (a partire dal I ciclo) : tipi di macchine,poi anche esseri viventi in relazione a loro particolari caratteristiche,ecc.*

6.La probabilità,la statistica,l'informatica

In questa parte dei nuovi programmi sono raccolti contenuti nuovi non solo rispetto ai programmi di trenta anni fa,ma anche rispetto alle attività condotte nella maggior parte delle classi di scuola elementare.

Giustamente(a mio avviso) le indicazioni relative a questi contenuti sono limitate a "segnalazioni di importanza" e "suggerimenti",con obiettivi non molto ambiziosi e impegnativi.Occorreranno molti anni prima che si consolidi una adeguata tradizione didattica e soprattutto prima che si chiarisca cosa è realistico ed utile proporre

di svolgere in tutte le classi (le esperienze straniere al riguardo non sono necessariamente esportabili nel nostro Paese,e d'altra parte i Paesi che da più tempo lavorano a livello didattico su questi argomenti si muovono spesso su linee opposte).

In relazione al testo dei nuovi programmi ed alle reazioni degli insegnanti a proposito di "probabilità,statistica,informatica",mi sembra urgente (nelle attività di aggiornamento) la messa a fuoco di alcune questioni da cui può dipendere lo sviluppo della didattica di questi nuovi contenuti.Un primo chiarimento mi sembra necessario per quel che riguarda le motivazioni della statistica e soprattutto della probabilità.La stragrande maggioranza dei maestri (ma anche la stragrande maggioranza degli insegnanti di scuola media....) ignora che la statistica e la probabilità costituiscono attualmente due settori tra i più rilevanti numericamente e importanti (per le connessioni con le altre discipline scientifiche e le applicazioni economiche e tecnologiche) della matematica mondiale.L'immagine della matematica che hanno gli insegnanti della scuola dell'obbligo si riduce in genere all'aritmetica e alla geometria,di recente è avvenuta la scoperta dell'esistenza dell'algebra,sullo sfondo resta una cosa abbastanza indeterminata che i matematici chiamano "analisi"....in questo panorama distorto dall'identificazione di quello che è la matematica con i capitoli tradizionali della matematica insegnata nella scuola dell'obbligo è naturale che non ci sia posto per la statistica e per la probabilità !Un secondo chiarimento riguarda il valore culturale e formativo della probabilità e della statistica.Nelle attività di aggiornamento svolte su questi settori della matematica ho riscontrato un forte interesse (da parte dei maestri) per alcuni aspetti della storia delle origini del calcolo delle probabilità e della statistica.Al di là degli aspetti di "presa"più facile (connessi alle notizie sui primi problemi di calcolo delle probabilità affrontati,riguardanti i giochi d'azzardo),mi sembra opportuno che i maestri riflettano sul fatto che nel XVII secolo il "calcolo delle probabilità" rappresentò per molti pensatori illustri (Pascal,Spinoza,Huyghens) il tentativo di sottoporre a indagine razionale il "caso",individuandone le "leggi";costituì cioè parte non secondaria dello sforzo di razionalizzazione dell'esperienza naturale ed umana che diede origine all'illuminismo.Anche la statistica (inizialmente in Paesi diversi e da parte di pensatori distinti da quelli che si occuparono di calcolo delle probabilità) contribuì a questo sforzo di "razionalizzazione",soprattutto nel campo della pianificazione delle risorse,della previsione demografica,ecc.:l'analisi quantitativa accurata dell'evoluzione dei fenomeni economici e demografici venne assunta come base per fare "piani" sul futuro.Chiarimenti storici del genere sono utili per mettere in risalto l'importanza che in un Paese come l'Italia può avere una buona educazione statistico-probabilistica nella scuola dell'obbligo(a partire dalla scuola elementare):le puntate (e gli isterismi) inerenti i numeri in ritardo nel gioco del lotto,l'acquisto di massicce quantità di biglietti della lotteria da parte delle persone che visitano Roma presso i "botteghini" della Capitale, l'uso delle visualizzazioni statistico-descrittive per generare impressioni di comodo tra i lettori dei giornali e gli spettatori TV sono episodi e fenomeni che evidenziano la particolare urgenza di un intervento della scuola.

Fatte queste premesse,non è facile dare indicazioni operative univoche su programmi di aggiornamento e di studio per maestri e su attività da compiere in classe. Mi sembra che per i maestri sia necessaria una conoscenza non molto vasta ma approfondita su alcuni aspetti della probabilità e della statistica e soprattutto sulle connessioni tra "informazione statistica" (relativa al passato) e "previsione in termini di probabilità" (riferita al futuro).Non mi convincono alcune proposte di aggiornamento basate da un lato sul calcolo delle probabilità come "calcolo del rapporto tra numero dei casi favorevoli e numero dei casi possibili in condizioni di equiprobabilità dei casi possibili",e dall'altro sulla statistica descrittiva (istogrammi,media,valori modali,quartili,mediana...).Il calcolo delle probabilità più significativo in relazione agli obiettivi formativi di base mi sembra infatti debba essere quello che si fonda su "frequenze" (relative a comportamenti sperimentati) assunte come "probabilità" per le previsioni,e sull'analisi della rappresentatività del campione assunto per ricavare le "frequenze".Sarebbe utile condurre alcune esperienze di aggiornamento basate sull'analisi delle estrazioni da un'urna di composizione incognita (con rimpiazzo dopo ogni estrazione),per creare nei maestri in primo luogo la sensibilità per il fatto che solo al di là di un numero elevato di estrazioni (dipendente anche dalla frequenza dell'evento che si sta studiando!) è possibile ritenere "probabile" che una certa frequenza riscontrata corrisponda abbastanza bene alla probabilità a priori calcolata conoscendo la composizione dell'urna.Per quanto riguarda le attività da compiere in classe,mi sembrano facilmente praticabili attività inerenti la statistica descrittiva,più problematiche (in assenza di una adeguata preparazione dei maestri) attività sulla probabilità e sulle connessioni tra probabilità e statistica.

Per quanto riguarda il gruppo da me coordinato,abbiamo verificato la notevole utilità di attività sugli istogrammi e sui grafici (sia - come già rilevato ai punti precedenti- al fine di costruire concetti aritmetici e geometrici,sia per finalità specifiche di educazione critica alla lettura di questi strumenti di visualizzazione sempre più diffusi).I bambini possono raggiungere una discreta consapevolezza del fatto che l'istogramma può fornire impressioni visive e mettere in evidenza aspetti molto diversi in relazione alle scelte operate per quanto riguarda le"classi"in cui sono stati suddivisi i dati,del fatto che la scelta delle unità di misura sugli assi (e soprattutto dell'origine per l'asse delle ordinate) può influenzare pesantemente l'aspetto del grafico (accentuando o appianando pendenze...),ecc.
Più problematico è risultato nella nostra esperienza il lavoro sul concetto di "valor medio" e le attività sui "confronti percentuali".Per i bambini non è facile valutare la rappresentatività di un "valor medio" che non coincide con nessuno dei dati mediati, o ragionare sul 13% di un totale di 171 persone .....

Per quanto riguarda l'informatica,la situazione si presenta molto diversa da quanto visto per la probabilità e per la statistica:i maestri ormai sono convinti tutti della notevole importanza assunta dai calcolatori nella vita di tutti i giorni e della necessità di tenerne in qualche modo conto (per "difesa",o per "adeguamento",o per "utilizzazione") nel lavoro scolastico.Piuttosto,le difficoltà riguardano altri aspetti :

- tendenza acritica al rifiuto,alla difesa del bambino dal calcolatore (e soprattutto dalla calcolatriche,che condurrebbe ad un sottosviluppo di capacità importanti della mente,particolarmente in ambito aritmetico)
- tendenza altrettanto acritica all'uso indiscriminato di calcolatrici e calcolatori (peraltro molto minoritaria !)
- preoccupazione per l'apprendimento della programmazione e dei linguaggi di programmazione come nodo della formazione informatica dei maestri
- mitizzazione (da parte di alcuni maestri) delle possibilità dei calcolatori come ausilio nel processo di apprendimento .....

Queste tendenze e queste preoccupazioni a mio parere eludono tutte (in misura maggiore o minore) i "veri" problemi posti dalla diffusione dei calcolatori per quanto riguarda la preparazione dei maestri e la formazione dei bambini, che a mio parere sono:

- revisione del curriculum matematico e linguistico al fine di adeguarlo alle esigenze formative poste dalla rivoluzione informatica (consapevolezza delle procedure risolutive dei problemi,sviluppo del calcolo mentale approssimato e del controllo degli ordini di grandezza,padronanza del periodo ipotetico e,più in generale, consapevolezza del significato dei connettivi e capacità di esplicitazione verbale di situazioni e processi complessi,ecc.)

- uso critico delle calcolatrici con il duplice obiettivo di imparare a "razionalizzare" il funzionamento di un dispositivo elettronico (programmato dal costruttore) e di acquisire padronanza degli aspetti logici del calcolo aritmetico(sintassi dei segni delle operazioni e delle parentesi,ecc.)
- consapevolezza (a livello insegnante) dei problemi che attualmente possono essere risolti con l'aiuto determinante del calcolatore e dei problemi che invece restano (e resteranno ancora a lungo) prerogativa dell'uomo (cfr.il punto sui "problemi") Per raggiungere questa consapevolezza è bene che i maestri facciano anche alcune esperienze di programmazione (dal problema all'algoritmo,alla stesura del programma),però il peso di questa attività non dovrebbe essere preponderante nell'aggiornamento (e non mi pare proprio il caso di andare tanto per il sottile per quel che riguarda la scelta della macchina e del linguaggio di programmazione !).

Nelle esperienze di aggiornamento condotte nel gruppo da me coordinato sui temi informatici abbiamo ottenuto risultati che consideriamo buoni (in termini di consapevolezza raggiunta e di "ritorni" sui nodi cruciali della programmazione didattica citati sopra) attraverso momenti di lavoro approfondito a livello adulto sulle calcolatrici (...confronti tra macchine con prestazioni aritmetiche diverse,uso critico delle memorie,analisi delle proprietà delle operazioni aritmetiche che cessano di valere con i "numeri del calcolatore" ....) , attraverso l'analisi di processi produttivi automatizzati ed attraverso limitate esperienze di approccio alla programmazione (con piccoli computer tascabili,in un rapporto 1:2 tra numero delle macchine e numero dei maestri).E' possibile che nei prossimi anni tali esperienze di aggiornamento vengano estese con l'uso di macchine e di linguaggi diversi (in modo da cogliere gli aspetti "invarianti" dell'approccio alla risoluzione dei problemi con il calcolatore e da esaminare le analogie e le differenze tra linguaggi di programmazione di tipo più o meno"evoluto").Per quanto riguarda il lavoro in classe,abbiamo puntato per ora soprattutto sullo sviluppo di competenze sintattiche adeguate all'analisi di processi complessi e sul lavoro con le calcolatrici (nel senso indicato all'inizio di questa pagina).

7. Conclusioni

Al termine della rassegna condotta,tema per tema,su vari problemi di attuazione

dei nuovi programmi ritengo legittima la domanda: "in che misura questi programmi sono attuabili ?".A mio parere i programmi sono attuabili (le nostre esperienze di lavoro in oltre 120 classi con maestri non tutti motivati allo stesso modo e preparati allo stesso modo sono positive !);ma è probabile che essi per molti anni non siano attuati su alcuni dei punti più significativi perchè i maestri non sono disponibili a rinunciare alle loro abitudini ed ai loro modi di vedere e soprattutto perchè l'editoria scolastica,gli "aggiornatori",il dibattito pedagogico e didattico nel nostro Paese non sembrano (nel settore della matematica) maturi per recepire le indicazioni più qualificanti del testo dei nuovi programmi.Riferendomi in particolare ai libri di didattica che dovrebbero mettere i maestri al corrente delle linee di ricerca e dei risultati che motivano le scelte operate dalla Commissione ministeriale, vorrei segnalare il fatto che finora è stato pubblicato un solo libro ("Numero e operazioni nella scuola di base",editore Zanichelli) veramente aggiornato,con contributi di alcuni dei maggiori ricercatori viventi;per il resto,vanno per la maggiore commenti e chiose a testi scritti da Piaget all'inizio degli anni '40 e tradotti in italiano oltre venti anni dopo ....Per quanto riguarda i problemi e le teorie generali sull'apprendimento,la situazione non è migliore:a parte un testo di Olson, "Linguaggi,media e processi educativi",edito dalla Loescher nel 1979 e rapidamente esaurito,e a parte l'ultimo capitolo di "Concetti e conoscenza",edito sempre dalla Loescher,i materiali di documentazione sull'evoluzione delle teorie dell'apprendimento sono fermi a pubblicazioni che si riferiscono allo stato delle ricerche di venti-trenta anni fa.

Una funzione importante potrà essere svolta (per quanto riguarda la didattica della matematica) dai gruppi di ricerca didattica operanti presso diverse università italiane e collegati alla scuola elementare,sia per quanto riguarda l'elaborazione di proposte realistiche di attuazione dei nuovi programmi (come ho avuto più volte modo di indicare nei punti precedenti),sia per quanto riguarda la sprovincializzazione e l'aggiornamento del dibattito sui problemi di insegnamento-apprendimento della matematica alla luce della ricerca internazionale attuale.

M. Gattullo

Dipartimento di Scienze dell'educazione - Bologna

SOCIALIZZARE GLI OBIETTIVI, DELL'APPRENDIMENTO E GLI STRUMENTI DELLA MISURAZIONE E DELLA VALUTAZIONE

Ringrazio prima di tutto i colleghi matematici per la richiesta di intervenire a questo Convegno.

Il contenuto di questo intervento non riguarderà problemi e suggerimenti educativi generali; né riguarderà l'oggetto, i metodi e le tecniche dei controlli (cioè delle misurazioni e delle valutazioni in matematica): su tali questioni occorrono evidentemente competenze, sia disciplinari sia di didattica disciplinare, che non posseggo. L'intervento riguarderà invece riflessioni di carattere generale intorno ai problemi dei controlli, cioè della misurazione e della valutazione, e conterrà suggerimenti intorno all'assunzione di comportamenti e atteggiamenti corretti, sia da parte degli insegnanti sia da parte del sistema scolastico. Comportamenti e atteggiamenti corretti richiedono l'esigenza di introdurre in modo attento, consapevole anche dei limiti ai quali si va incontro, di procedure e di tecniche di "matematizzazione" nel controllo degli apprendimenti.

1. Confronti tra alcuni controlli

Nella tabella 1 è mostrato, attraverso il loro smontaggio, il funzionamento di tre controlli scolastici e di un controllo non scolastico. Generalizzando dalle informazioni della tabella, si può osservare che

(a) i controlli scolastici richiedono lo svolgimento di operazioni in sequenza. Essi non hanno luogo "tutti in una volta", come di solito si crede quando li si pratica con disattenzione, o quando si parla di essi come di "valutazioni" e basta;

(b) le sequenze sono identiche da un controllo all'altro, se si prescinde da differenziazioni contingenti, legate alle caratteristiche specifiche di questo o di quel controllo. L'identità delle operazioni in sequenza indica che esse corrispondono a identiche funzioni;

(c) pure i controlli non scolastici richiedono lo svolgimento di operazioni in sequenza, e anche in essi le operazioni corrispondono a funzioni determinate;

(d) tanto per il fatto di articolarsi in operazioni successive, quanto per le fun-

zioni che le operazioni compiono, c'è una sostanziale affinità tra controlli scolastici e non scolastici. Quando si controlla, in sostanza, si fanno sempre "le stesse cose", si abbia a che fare con apprendimenti o con oggetti di altra natura.

Tabella 1 : Smontaggio del funzionamento di alcuni controlli

Dettato	Interrogazione	Osservazione del comportamento sociale	Controllo della temperatura corporea
1. Si stabilisce di quali difficoltà ortografiche controllare la padronanza	1. Si stabilisce su quale parte del programma interrogare gli alunni	1. Si stabilisce quali comportamenti osservare (p. es. quelli aggressivi durante il gioco)	1. Si decide di controllare la temperatura corporea perchè l'esperienza e la ricerca dicono che è importante
2.1 Si sceglie un testo da dettare ...	2.1 Si formulano le domande ...	2.1 Si osservano i comportamenti degli alunni ...	2.1 Si utilizzano termometri adatti ...
2.2 ... e lo si detta secondo una procedura determinata(velocità, tono,inflessioni,posto, uso di tecnologie,etc.)	2.2 ...usando un dato tono di voce,una data attenzione,interrogando dal posto o dalla cattedra, uno o più alunni insieme,etc.)	2.2 ...scegliendo il posto, la durata e le altre modalità dell'osservazione	2.2 ...seguendo convenzioni stabilite(durata del contatto col corpo, luogo del corpo, etc.)
2.3 Si raccolgono i testi scritti dagli alunni	2.3 Si ricordano le risposte degli alunni	2.3 Si ricordano(annotandoli, ritenendoli a mente,etc.) i comportamenti osservati	2.3 Si ricordano o si annotano (con appunti,grafici) le temperature trovate
2.4 Si correggono i testi, contando gli errori	2.4 Si correggono le risposte(con interventi palesi o in modo tacito)	2.4 Si contano le frequenze dei diversi comportamenti, o li si prende in considerazione globalmente	2.4 Si legge l'andamento dei risultati
3.1 Si giudica se ciascun alunno ha raggiunto risultati soddisfacenti o no	3.1 Si giudica se gli alunni interrogati hanno risposto in modo soddisfacente o no	3.1 Si giudica se gli alunni osservati sono aggressivi o no	3.1 Si giudica se i risultati indicano la presenza di stati patologici o non
3.2 Si esprime(e se del caso si comunica) il giudizio	3.2 Si esprime(e se del caso si comunica) il giudizio	3.2 Si esprime(e se del caso si comunica) il giudizio	3.2 Si esprime il giudizio utilizzando (se del caso) linguaggi differenti a seconda degli interlocutori

2. La formalizzazione delle operazioni

La sostanziale affinità delle operazioni compiute nello svolgimento dei controlli consente di denominarle in modo generale, tenendo conto delle funzioni generali, alle quali esse corrispondono. Questa formalizzazione è presentata nella tabella 2. Le denominazioni qui utilizzate non hanno, com'è ovvio, alcuna pretesa di riferirsi, in quanto tali, anche alle operazioni compiute nei controlli non scolastici.

Tabella 2 : Operazioni del controllo scolastico e loro funzioni

Operazioni	Funzioni
1. Determinazione dell'oggetto del controllo	E' necessaria per stabilire quel che si deve misurare
2. Misurazione, che richiede	Serve per fornire dati di fatto, informazioni, notizie, sotto forma numerica (quantitativa), alla valutazione
2.1 stimoli	Si usano se occorre "costringere" a manifestarsi quel che si vuole misurare
oppure osservazione	Si usa se quel che si vuole misurare si manifesta spontaneamente
2.2 somministrazione degli stimoli oppure conduzione dell'osservazione	Usando stimoli oppure osservando si seguono modalità e procedure determinate
2.3 registrazione	Serve per ricordare le risposte agli stimoli o quanto fu osservato
2.4 lettura	Serve per interpretare (per es., identificando quel ch'è giusto o quel ch'è sbagliato) ciò che è stato registrato, in modo analitico e/o complessivo
3. Valutazione, che richiede	Serve per giudicare se gli obiettivi proposti sono stati raggiunti
3.1 l'uso di un dato criterio	Consente di compiere i confronti opportuni per stabilire se l'obiettivo è stato raggiunto
3.2 l'uso di un dato linguaggio	Serve per esprimere e comunicare il giudizio

3. Si possono "misurare" i risultati degli apprendimenti?

Nel paragrafo precedente ho volutamente utilizzato, senza giustificarne l'uso, il termine "misurazione". Questa giustificazione deve essere data, soprattutto per rispondere a dubbi e perplessità, riassumibili nell'asserzione che i risultati dell'apprendimento hanno una natura complessa, e qualitativamente differente, rispetto ai fatti misurabili della vita quotidiana e delle scienze della natura che sono tali perchè quantificabili. una conferma evidente di atteggiamenti di questo genere si ha anche in molti di coloro che si occupano professionalmente dei problemi del controllo scolastico, con la resistenza a parlare di misurazione, e con la sostituzione a tale termine di altri, con significato non sempre chiaro, quali "verifica", "valutazione", "accertamento".

La giustificazione può cominciare dalla definizione generale di quel che si fa quando si misura. Essa può esser data nel modo seguente: si usano i numeri (ordinali o cardinali, a seconda dei casi) per descrivere le cose (oggetti o loro caratteristiche), individuando una corrispondenza biunivoca tra la cosa descritta e il numero utilizzato per descriverla, Se questa definizione può essere accettata, si può ritenere (seguendo S.S. Stevens, On the Theory of Scales of Measurement, "Science",1946-103) che si possa misurare in quattro modi:

(a) usando i numeri come se fossero nomi: per esempio, come si fa coi numeri sulle maglie dei giocatori di gare sportive;

(b) usando i numeri per far graduatorie, individuando perciò presenze quantitativamente differenziabili di una data caratteristica: per esempio come si fa quando si misurano le intensità dei terremoti a partire dai loro effetti (scala Mercalli);

(c) usando i numeri per individuare quanto siano distanti fra loro le posizioni di una graduatoria: per esempio, come si fa quando si misurano le temperature con scale del tipo Celsius, Réamur, Fahrenheit;

(d) usando i numeri per far rapporti tra le differenze quantitative individuate tra le posizioni di una graduatoria: per esempio, come si fa quando si fanno misure di peso, capacità, lunghezza, o si misurano le temperature con la scala Kelvin.

Misurare nel modo (b) è possibile se le caratteristiche misurate sono quantificabili per l'aspetto misurato; nel modo (c) se si hanno a disposizione unità di misura uguali e costanti; nel modo (d) se si dispone di uno zero assoluto.

A quali modi di misurare possono essere ricondotti quelli dell'apprendimento scola-

stico? Si possono fare misurazioni del tipo (d) in molti casi in educazione fisica, quando si abbia a che fare con prestazioni in cui l'oggetto sia costituito da grandezze spaziali e temporali. Di fatto, mai nell'apprendimento intellettuale si hanno a disposizione situazióni del tipo (d), e, a stretto rigore, nemmeno del tipo (c), le quali consentono di utilizzare unità di misura uguali e costanti. Si può tuttavia individuare, fra le prove normalmente utilizzate nella scuola, una sorta di graduatoria in funzione di una caratteristica importante, identificabile nella strutturazione più o meno accentuata. La strutturazione riguarda il rapporto instaurabile tra stimolo e risposta: il massimo di strutturazione si ha quando la fenomenologia delle risposte possibili può essere identificata in modo semplice (pochi casi, accordo generalizzato sulla loro identificazione); il minimo di strutturazione si ha quando la fenomenologia delle risposte possibili presenta gradi elevati di complessità (molti casi, difficoltà di accordo sulla loro identificazione).
Una graduatoria tra prove, in funzione del criterio della strutturazione, potrebbe essere tentata, senza la pretesa di comprendere ogni tipo di prova (ogni prova,del resto, può presentare varianti rilevanti nel modo della conduzione), nel modo seguente:

(a) test di profitto;
(b) dettati ortografici;
(c) traduzioni, problemi, esercizi, saggi brevi;
(d) temi del tipo riassunto, descrizione, a traccia prefissata;
(e) temi liberi;
(f) interrogazioni.

La graduatoria in funzione del criterio della strutturazione consente di asserire che quanto più la prova è strutturata tanto più è "facile", nella pratica, utilizzare per essa punteggi che somigliano a unità di misura uguali e costanti. In linea di principio, però, né i punti, né gli errori, né le risposte esatte, né altri tipi di "unità" sono veramente unità di misura: anche all'interno di una medesima prova queste (apparenti) unità hanno per oggetto apprendimenti diversi l'uno dall'altro, e presentano difficoltà diverse. Conviene tuttavia, a fini pratici, <u>trattarli come se</u> fossero unità di misura uguali e costanti, allo scopo di compiere le operazioni aritmetiche e statistiche che l'attribuzione di tale carattere consente: per esempio,il calcolo della media aritmetica, e l'utilizzazione dello scarto quadratico medio (σ) per misurare le distanze dalla media (punti z). Questo trattamento consente anche di

commettere errori in quantità meno rilevante: ci si può riferire, a titolo d'esempio, ai miglioramenti introdotti nella misura delle prestazioni ginnastiche e sportive non strutturate (esercizi agli attrezzi, corpo libero, tuffi e simili) mediante procedimenti che, in ultima analisi, prevedono l'uso di "quasi unità di misura".

4. <u>Prima si misura, poi si valuta</u>

La valutazione è un'operazione qualitativamente diversa dalla misurazione:la segue, con la funzione di giudicare se i risultati da essa forniti sono accettabili o no. Le misure forniscono informazioni intorno al raggiungimento di un dato obiettivo; con la valutazione si tratta di valutare se l'obiettivo è stato raggiunto in modo soddisfacente (accettabile, sufficiente) o no. Per valutare ci si serve prima di tutto di un criterio: si confrontano, cioè, i risultati ottenuti con parametri esterni, i quali consentano di formulare il giudizio. Nella scuola, i criteri di fatto utilizzati sono diversi: il criterio può essere stabilito <u>in astratto</u> (ogni errore blu un voto in meno rispetto al massimo prestabilito; occorre rispondere bene, per avere la sufficienza, almeno a k/n esercizi, o problemi, o domande), o sulla base dell'<u>andamento delle prestazioni</u> del gruppo (più o meno largo), al quale lo scolaro appartiene, o sulla base dei <u>confronti compiuti con lo stesso scolaro</u> (il progresso rispetto a prestazioni precedenti, le attese rispetto alle sue capacità, le attese rispetto ai condizionamenti sociali e culturali ai quali è sottoposto).
Il risultato del giudizio dev'essere poi espresso e comunicato. In Italia, a seconda del livello scolastico, hanno cittadinanza tutti i sistemi finora escogitati di espressione: quello che utilizza i codici del linguaggio comune (coi giudizi liberi delle schede di valutazione) e quelli che utilizzano codici prefissati, dagli aggettivi (esami si scuola media inferiore) alle lettere (scheda sperimentale della scuola media) ai numeri (scuola secondaria superiore, università, concorsi e abilitazioni nella scuola), con un numero variabile di voci (4 oppure 5 oppure n 10 + 1 oppure n 10 + 2).

5. <u>Quale lo stato dei controlli scolastici</u>?

Anche per rispondere a questa domanda pare opportuno procedere per via comparativa.

5.1. <u>I controlli al di fuori della scuola</u>. Nella ricerca scientifica, nelle attività produttive e anche nei rapporti sociali di ogni giorno le operazioni dei controlli sono condotte secondo procedure e tecniche largamente concordate:

(a) la determinazione dell'oggetto del controllo è, di solito, fuori discussione,nel senso che c'è accordo generalizzato, quando si controlla e quando si utilizzano i risultati, su ciò che si misura (natura e caratteristiche);

(b) le operazioni della misura sono di solito compiute con strumenti e procedure il più possibile unificate. Se in luoghi diversi sono utilizzate unità di misura differenti è facile tradurre le misure espresse con unità di un dato linguaggio nelle unità di un altro. Sono dati suggerimenti e indicazioni per evitare di commettere errori. Sono prestabiliti i limiti, entro cui considerare tollerabili gli errori commessi;

(c) le operazioni della valutazione sono condotte utilizzando solo un criterio, quello del riferimento dei risultati di una data misura alla "popolazione delle misure" alla quale la misura compiuta appartiene. L'uso di questo criterio consente spesso di saltare numerosi passaggi, quando si valuta, cioè di ottenere "subito" il giudizio sulla misura ottenuta: per esempio, quando si misura la temperatura corporea dell'uomo della società industriale (38° Celsius = febbre). Il salto fa quasi sempre perdere di vista il fatto che la misurazione precede ed ha funzioni diverse dalla valutazione: di ciò ci si può rendere conto quando qualcosa cambi, o nelle misure (95° Fahrenheit = febbre?) o nei sistemi di riferimento (38° Celsius = febbre per un cane?), e il "qualcosa che cambia" introduca elementi coi quali non si abbia familiarità.

5.2. I controlli nella scuola. Il funzionamento dei controlli scolastici presenta differenze marcate rispetto a quello descritto, per i controlli non scolastici, in 5.1 :

(a) in Italia, dove esistono programmi nazionali, che indicano in modo prescrittivo obiettivi da raggiungere, la descrizione degli obiettivi è compiuta solo in termini generali. L'interpretazione e la traduzione delle indicazioni generali in obiettivi specifici (in termini di comportamento) viene affidata ai singoli insegnanti. Non essendoci procedure concordate per interpretare e tradurre, di fatto ciascun insegnante fissa in modo soggettivo tutti i propri obiettivi, che corrispondono poi all'oggetto dei controlli che egli compie. Nella massima parte delle prove, poi, l'oggetto del controllo cambia, addirittura, da alunno ad alunno: per esempio, nelle prove orali, quando variano gli argomenti e le domande;

(b) c'è disaccordo nell'uso degli strumenti e delle procedure della misurazione. Il disaccordo provoca errori. Gli errori coinvolgono gli stimoli (che sono spesso tecnicamente mal fatti, non essendo seguite procedure corrette nella loro formulazione; disomogenei da uno scolaro all'altro; non rappresentativi degli obiettivi da misurare), le tecniche della somministrazione degli stimoli (le quali non sono mai concordate, tranne quella, di comodo, dei tempi rigidi fissati per via amministrativa nelle prove scritte), la registrazione (chi è in grado di ricordare in modo accurato le risposte date da uno scolaro nel corso di un'interrogazione o a un esame orale?), la lettura (si danno pesi differenziati a uno stesso comportamento, esatto o errato che sia; si dà spesso un peso determinante a comportamenti che nulla hanno a che fare con gli obiettivi da misurare);

(c) c'è disaccordo sui criteri della valutazione: il modo, in cui si intende e si pratica la libertà didattica, coinvolge anche la scelta dei criteri, perfino la loro commistione. Di conseguenza, misure, che potrebbero esser giudicate sufficienti con un dato criterio, sono giudicate non sufficienti con l'uso di un altro. C'è disaccordo sul linguaggio da utilizzare per esprimere i giudizi: una delle ragioni di questo fatto sta nell'eccessiva quantità delle voci a disposizione, addirittura nel numero non definito di esse (coi giudizi liberi delle schede). Non è chiara né diffusa la consapevolezza della distinzione tra misurazione e valutazione.

La docimologia, come disciplina che si occupa, nell'ambito delle scienze dell'educazione, dei problemi del controllo scolastico, è nata con ricerche riguardanti gli errori compiuti nel compimento dei controlli scolastici. Questi errori riguardano prima di tutto la precisione (esattezza, attendibilità) dei risultati quantitativi ai quali si perviene misurando e valutando. Ma la riflessione in quest'ambito rivela che la precisione dei controlli è condizione necessaria ma non sufficiente della accettabilità sociale dei loro risultati. Occorre anche che essi abbiano validità: cioè che gli obiettivi educativi che si perseguono a scuola e l'oggetto delle misure che a tali obiettivi si rifà siano accettati e condivisi. Anche per questo aspetto i controlli scolastici non differiscono (nonostante le apparenze ingannatrici) dai controlli non scolastici: per esempio, quando si giudica dell'opportunità, dell'utilità, della correttezza, ecc. di certi controlli in diagnosi e in terapia medica.

6. Che fare?

Gli inconvenienti descritti possono essere almeno in parte superati intervenendo opportunamente in ciascuna delle fasi del controllo scolastico.

6.1. Interventi sugli obiettivi da realizzare (sull'oggetto del controllo da compiere). Occorre innescare un processo di socializzazione degli obiettivi (e dell'oggetto dei controlli), che è suggerito in modo schematico nella figura 1. Alla pratica corrente, per cui tutti gli obiettivi (tutti gli oggetti del controllo) sono stabiliti dai singoli insegnanti, dovrebbe sostituirsi una pratica, in cui intervenisse una sorta di divisione del lavoro: la determinazione degli obiettivi dovrebbe essere in parte (limitatamente a "grandi" scadenze della scolarizzazione e a "grandi" obiettivi) demandata ad agenzie nazionali (costituite da personale esperto: insegnanti e ricercatori); altri obiettivi potrebbero esser demandati a livelli territorialmente meno estesi (regioni, con competenze affidate agli Irrsae; gruppi di scuole collegate a livello distrettuale; classi parallele delle singole scuole); altri obiettivi ancora potrebbero essere demandati ai singoli insegnanti. Si dovrebbe favorire una grande circolazione delle informazioni intorno agli obiettivi - per mettere in comune obiettivi dei singoli e dei gruppi, e per diffondere tra i singoli e i gruppi gli obiettivi definiti dalle agenzie - dal basso verso l'alto e viceversa.

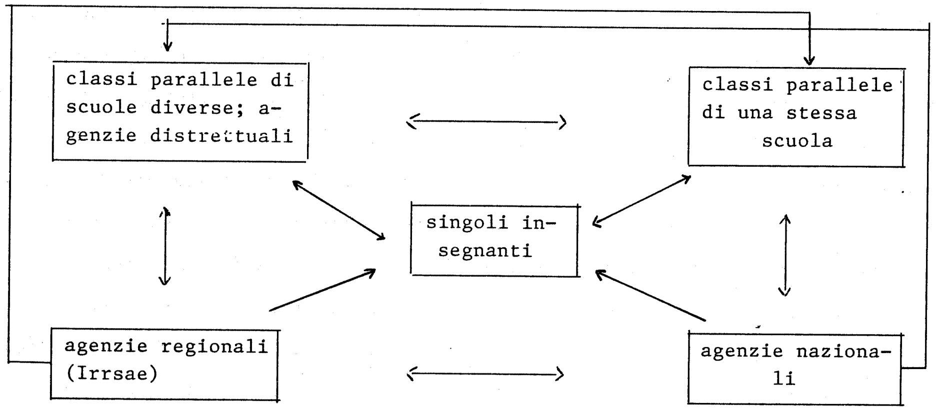


Figura 1 Schema di un possibile processo di circolazione di obiettivi dell'apprendimento e di strumenti di misura del loro raggiungimento

7.2. Interventi sulla misurazione. Lo schema della figura 1 è valido anche per indicare livelli e forme di circolazione degli strumenti di misura. E' del resto evidente che la determinazione socializzata degli obiettivi senza un uso socializzato dei corrispondenti strumenti di misura rimarrebbe un fatto soltanto velleitario.

7.3. Interventi sulle procedure della valutazione. Gli interventi "socializzanti" descritti in 7.1 e in 7.2 dovrebbero suggerire anche forme di accordo sulle procedure della valutazione.

(a) Per quanto riguarda i criteri da utilizzare, le argomentazioni partono da un in-

sieme di ipotesi riguardanti misure, mediante strumenti nazionali, di obiettivi definiti nazionalmente. Le ipotesi sono:

- rilevazioni compiute su un campione nazionalmente rappresentativo di scolari;
- rilevazioni compiute con uno strumento ben costruito.

Le ipotesi sembrano ovvie e scontate. La rappresentatività del campione va tuttavia precisata oltre che in termini sociologici (in funzione delle zone geografiche, della residenza [città e campagna, periferie e centri cittadini], del sesso, dell'estrazione sociale e culturale), anche in termini scolastici (curricoli favorevoli o sfavorevoli, insegnanti più o meno abili, attitudini più o meno marcate per un determinato apprendimento, combinazioni di questi fattori tra loro), e dovrebbe escludere dal computo (non dalla scuola!) i soggetti che statisticamente non fanno parte della popolazione "normale" (il che comporta evidentemente decisioni politiche da prendere). Il buon funzionamento dello strumento, oltre che in funzione di caratteristiche generali (precisione e validità) e specifiche (quesiti tutti positivamente discriminanti), va precisato in funzione di una ulteriore caratteristica specifica, che è la rilevante rappresentatività dei diversi possibili gradi di difficoltà. Con le precisazioni riportate, si può ragionevolmente supporre che i risultati di misure, su obiettivi nazionalmente stabiliti, si distribuiranno secondo un andamento ravvicinato a quello della curva normale delle frequenze. Si immagini ora di suddividere l'area delimitata dalla curva nelle tre porzioni indicate nella figura 2, e si immagini di dover valutare, su base nazionale, non importa se in funzione diagnostica (le "basi" per avviare un nuovo ciclo di apprendimenti ci sono in misura sufficiente o no?) o in funzione selettiva (promuovere o bocciare? assegnare o non assegnare un titolo di studio?) i risultati della misurazione. La valutazione non potrà certo discriminare

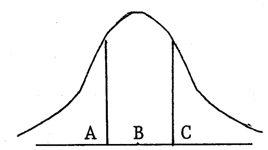


Figura 2 . In quale zona (A,B,C) collocare la discriminazione tra sufficienza e insufficienza?

all'interno della zona C (si dichiarerebbe il fallimento dell'azione formativa; si farebbero pagare ingiustamente agli scolari le insufficienze delle risorse scolastiche, gli errori nella fissazione degli obiettivi educativi, ecc.), né all'interno della zona B (in modo attenuato ci si scontrerebbe con gli inconvenienti della fissazione del punto discriminante nella zona C; si massimizzerebbero le conseguenze negative di eventuali errori di misura), ma dovrà perciò discriminare nella zona A, a partire dai confini con la zona B all'indietro. Si vedono in modo evidente le conseguenze positive, nella pratica didattica, di un approccio come quello descritto: il criterio utilizzato per valutare potrebbe essere soltanto quello del riferimento delle singole misure al loro andamento generale; la fissazione del punto di sufficienza, pur conservando un carattere arbitrario, sarebbe compiuta in comune.

(b) In relazione al linguaggio da utilizzare per esprimere i giudizi sono evidentemente da auspicare interventi di tipo amministrativo. Non si vedono comunque ragioni per il mantenimento dell'attuale assurdo sistema che vede sia la convivenza di ben quattro diversi linguaggi, sia la moltiplicazione esagerata delle voci. Un solo linguaggio (quello delle lettere) e poche voci (in quantità dispari, per esempio 5, tre delle quali per indicare gradi diversi di sufficienza, due per indicare gradi diversi di insufficienza) sarebbero le soluzioni più ragionevoli.

8. Procedure e tecniche di insegnamento

La socializzazione di procedure e tecniche di misurazione e di valutazione, a partire dalla socializzazione degli obiettivi, difficilmente potrebbe aver luogo senza una contestuale socializzazione di tecniche e procedure di insegnamento. Lo schema indicato nella figura 1 potrebbe essere esteso anche a queste ultime. La socializzazione dovrebbe portare a commisurare in modo più adeguato obiettivi e tempi necessari per il loro raggiungimento, e perciò a rivedere gli obiettivi, probabilmente sovradimensionati, spesso, rispetto alle risorse complessivamente disponibili (sia da parte degli allievi, sia da parte della scuola).

9. Le ricadute

Procedure socializzate di determinazione degli obiettivi (= oggetto dei controlli),di misurazione e di valutazione comporterebbero numerose ricadute positive nei confronti del funzionamento della scuola. Esse sono in notevole misura riconducibili ai comportamenti meno disomogenei, se non contraddittori degli insegnanti. Ma sono anche identificabili nel funzionamento meno irrazionale del sistema scolastico complessivamente considerato. Si può fare riferimento, a questo proposito, soprattutto alla possibilità di dare risposte meno inadeguate a domande come le seguenti:

- gli obiettivi proposti dai programmi scolastici in quale misura sono effettivamente raggiungibili?

- con quali procedure amministrative è opportuno stabilire elementi di continuità tra i programmi di gradi scolastici diversi?

In particolare, informazioni sistematiche sul raggiungimento degli obiettivi proposti potrebbero contribuire

- a rendere fisiologici (perchè continui) e non patologici (perchè traumatici) i cambiamenti dei programmi. La loro revisione dovrebbe essere, al contrario di quanto oggi accade in Italia, in stretta interazione con i risultati accertati della attività formativa. Dovrebbero perdere il carattere, che essi oggi hanno, di eccezionalità connotata soprattutto in chiave politica, per assumere quello della normalità soprattutto tecnica;
- a fornire informazioni indispensabili intorno a talune scelte di politica scolastica, che oggi sono difficilmente praticabili con razionalità: per esempio, una data concentrazione di risorse per il raggiungimento di taluni obiettivi,nel caso in cui il giudizio sul loro raggiungimento fosse giudicato come insoddisfacente.

Enrica Ferrero,Ezio Scali
Circolo Didattico di Piossasco (TO)

Aspetti linguistici della risoluzione dei problemi aritmetici nella scuola elementare

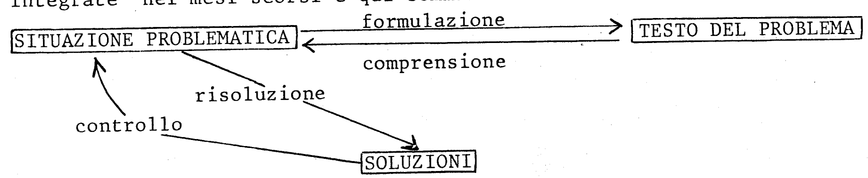
1.Introduzione

La comunicazione si collega a due punti qualificanti dei nuovi programmi per la scuola elementare:il rilievo dato ai "problemi" nel programma di matematica e l'indicazione del linguaggio verbale come "strumento del pensiero"nel programma di educazione linguistica.La comunicazione trae origine dalle riflessioni sul "problema dei problemi aritmetici" maturate nei gruppi di classi parallele dei circoli didattici di Piossasco,Chiavari e Voltri in rapporto con le esperienze di lavoro in classe.

Il contesto cui fa rifeimento la comunicazione è quello di una pratica didattica, centrata sulla riflessione sulla realtà,che mira a produrre momenti di"razionalizzazione" dei fenomeni analizzati nei filoni verticali in cui è articolata la programmazione quinquennale (economico,storico,tecnologico,scientifico).Tali filoni offrono molteplici occasioni di esperienza e di ragionamento e richiedono frequenti intrecci tra abilità linguistiche ed abilità matematiche.

Le motivazioni che inducono ad occuparsi a fondo dei problemi aritmetici nella scuola elementare sono di natura diversa:in primo luogo l'urgenza didattica,connessa all'insuccesso di molti bambini di fronte al problema aritmetico di tipo "scolastico ",con la formazione conseguente di atteggiamenti che rendono evidenti le difficoltà incontrate (blocco,o combinazione casuale di numeri...); in secondo luogo,esigenze di formazione culturale inerenti le competenze necessarie per poter accedere e partecipare alla realtà di lavoro e di vita che si viene delineando con la diffusione delle tecnologie elettroniche.In effetti queste richiedono che siano sviluppati soprattutto i processi mentali che intervengono nella risoluzione dei problemi piuttosto che le abilità tecniche di calcolo rapido ed esatto.Infine,le sollecitazioni,già ricordate,che provengono dai nuovi programmi,in cui si può individuare un rapporto tra il linguaggio verbale inteso come "strumento del pensiero" "perchè sollecita ed agevola lo sviluppo dei processi mentali che organizzano in varie forme i dati dell'esperienza" e le nozioni matematiche di base "che "vanno fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete ...che diano la possibilita di accertare quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza il bambino ". Questo rapporto costituisce un terreno di ricerca interessante,di cui vanno approfondite le possibilità sul versante didattico.

Nel corso della comunicazione faremo riferimento al modello degli elementi costitutivi e delle attività inerenti i problemi aritmetici nella scuola elementare proposto da Boero in un articolo pubblicato su "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate" nei mesi scorsi e qui sommariamente richiamato:



Per "testo del problema" si intendono i segni linguistici (verbali e non verbali) che possono essere interpretati come "informazioni" e "domande".Per "situazione problematica" si intendono quegli aspetti del mondo reale e dell'esperienza culturale implicati dal testo del problema (quando il testo già esiste) o esprimibili attraverso un testo.Le"soluzioni" comprendono l'insieme delle soluzioni che possono considerarsi accettabili per il problema .
Nel modello sono individuate anche le relazioni dinamiche che intercorrono tra i tre elementi (formulazione,comprensione,controllo,risoluzione).

La comunicazione riguarda il passaggio dalla situazione problematica alle soluzioni (cioè la "risoluzione" del problema).Nelle nostre classi (dalla II alla IV) si sono sperimentati vari tipi di interventi al fine di aumentare l'autonomia dei bambini nella ricerca delle strategie risolutive.Gli interventi si realizzano attraverso l'uso e l'intreccio di linguaggi di tipo diverso;non è semplice fare un bilancio delle esperienze condotte in proposito,sia per la varietà dei comportamenti osservati nei bambini che per la varietà dei problemi assegnati in classe e delle gestioni di essi da parte degli insegnanti.In questa comunicazione si è preferito, per comodità di esposizione,operare una schematizzazione secondo i vari tipi di linguaggio impiegati,avvertendo tuttavia (come verrà meglio precisato in seguito)che più linguaggi possono intervenire nella risoluzione dello stesso problema.

La redazione della comunicazione,elaborata insieme,è stata curata da E.Scali per i primi tre punti e da E.Ferrero per i successivi due punti.

2.Il linguaggio manipolativo

Il lavoro svolto nelle classi ci induce a ritenere la manipolazione indispensabile nella fase iniziale delle attività di risoluzione dei problemi,in cui occorre che i bambini acquisiscano la padronanza delle situazioni problematiche in termini concreti (tutti i bambini usano le monete,il righello,ecc.nei problemi di "economia", di"misura ",ecc.);e ciò finchè non si sia formato un"serbatoio" di esperienze a cui fare riferimento in assenza degli oggetti reali.Per alcuni bambini però la necessità di operare concretamente può prolungarsi ben oltre il tempo medio richiesto dal resto della classe.

Riteniamo necessario operare delle distinzioni tra possibili utilizzazioni del momento manipolativo.Ne abbiamo riscontrato l'utilità quando il bambino opera con gli oggetti reali a cui si riferisce il problema (...il bambino compone i prezzi con le monete,usa il righello per i problemi in cui intervengono le misure di lunghezza,usa il calendario per problemi di durata,ecc.).Quando invece la manipolazione si avvale di oggetti fittizi,sostitutivi di quelli reali per convenzione interna,essa può diventare inutile o addirittura essere elemento di complicazione durante il processo risolutivo.Ad esempio,usare le palline per contare le monete oppure i centimetri può comportare la perdita della consapevolezza della convenzione (la pallina vale 100 lire ...ma una determinata situazione problematica può comportare legittimamente l'uso di una "pallina" anche per le 500 lire !),o la perdita della consapevolezza della simulazione attuata,la perdita-in definitiva-del contatto con la situazione problematica.

Nella nostra programmazione,dopo aver operato attraverso la manipolazione "realistica",al bambino viene richiesta una verbalizzazione mirata a fargli assumere consapevolezza di ciò che ha fatto e permettere la socializzazione delle strategie risolutive.

3.Il linguaggio iconico

Ci sembra che anche il linguaggio iconico possa presentare aspetti positivi e negativi in relazione alle motivazioni che conducono al suo utilizzo.Nel problema(inizio III): "Quanti pezzi lunghi 15 cm possiamo ricavare da una fettuccia lunga 1 m ?" una bambina (Vilma) procede usando la notazione algebrica:"15+15=30 ;30+15=45;45+15=60; 60+15=75;75+15=90;90+15 no ".Vilma verbalizza poi la sua strategia risolutiva e,in ultimo,disegna la fettuccia riportando 6 pezzi uguali e un pezzettino più piccolo, che rappresenta ciò che avanza.Paolo usa invece lo spago lungo un metro a disposizione dei bambini,con forbici e righello ritaglia dei pezzi da 15 cm (...linguaggio manipolativo).Verbalizza poi il suo procedimento e lo accompagna con il disegno della fettuccia,dove sono riportati 6 pezzi uguali e il pezzettino che avanza.Entrambi i bambini hanno adottato il disegno come rappresentazione finale di una strategia mentale (Vilma) o di una manipolazione(Paolo).In questi casi il disegno pare uno strumento utile per visualizzare la situazione problematica e controllare la risoluzione, quando però è chiara la strategia per risolvere il problema.

Giorgio,un altro bambino della classe,inizia invece dal disegno della fettuccia, si disorienta e si perde con i problemi di riduzione in scala,che non sa ancora padroneggiare.Nel disegno suddivide la fettuccia casualmente;in seguito solo procedendo anche lui con forbici e righello (e con l'aiuto dell'insegnante)riesce a venire a capo del problema.

L'ipotesi è che il linguaggio iconico sia uno strumento utile e produttivo quando è la rappresentazione di una manipolazione effettuata o effettuabile,quando è collegato ad un serbatoio di esperienze precedenti a cui fare riferimento(...disegno delle monete...).Quando invece il riferimento alla manipolazione è assente o il disegno riguarda aspetti fittizi,sostitutivi di quelli reali,può essere inutile o rappresentare un elemento di complicazione.

Il disegno sembra però poter assolvere anche altre funzioni oltre a quelle sopra considerate.In particolare,riteniamo che possa essere necessario come rappresentazione schematica di realtà o fenomeni di difficile riproducibilità fisica.In questo caso può essere un supporto alla rappresentazione mentale della situazione problematica e aiutare il bambino nell'individuazione delle operazioni aritmetiche da compiere.Ad esempio,nel problema dell'eco (in cui si chiede di stabilire la distanza da cui proviene l'eco sapendo il tempo trascorso tra l'emissione del suono e l'ascolto dell'eco) lo schemino grafico riportato a fianco suggerisce di dividere per due la distanza ottenuta moltiplicando il tempo trascorso per la velocità del suono.

4.Il linguaggio algebrico

Più articolato ancora è il discorso sul linguaggio algebrico.Come linguaggio di risoluzione dei problemi,esso assolve ad un duplice compito:stenografa i processi mentali seguiti durante la risoluzione e fissa i significati delle operazioni.Esaminiamo più dettagliatamente la questione con riferimento alle attività didattiche svolte nelle nostre classi.Nel problema "Pago con 2000 lire una rivista che costa 1400 lire. Quale è il resto ? " un bambino (di seconda) procede ragionando per completamento: dalle 1400 lire risale alle 2000 lire ;la formalizzazione della strategia seguita corrispondente al suo modo di ragionare è : 1400+600=2000.Un altro bambino invece ragiona "vedendo" le 1400 lire come parte delle 2000 lire e il resto è rappresentato dal confronto tra i due valori;la formalizzazione da lui scelta è : 2000-1400=600

L'uso della notazione algebrica in II elementare è accompagnato da attività verbali e/o manipolative;nei due esempi riportati le formalizzazioni rispondono ai modi di pensare la situazione problematica e alle strategie risolutive adottate.Il linguaggio algebrico trascrive un processo mentale già avvenuto e fissa progressivamente anche il significato delle operazioni.L'acquisizione graduale dei significati avviene "in situazione" (attraverso la manipolazione,in una fase iniziale) e viene espressa in linguaggio verbale.Il ricorrere di "operazioni" dello stesso tipo ("mettere insieme",...) conduce via via alla formalizzazione algebrica adeguata (il segno + ...) L'acquisizione dei significati delle operazioni non avviene quindi nelle nostre classi a partire da definizioni,ma da un lavoro,necessariamente lungo,in cui i bambini,prima di giungere alla notazione algebrica come rappresentazione più agevole per riferirsi ad una operazione di cui si conosce il significato,si esercitano a ricercare strategie personali.

Questo nostro approccio al linguaggio algebrico consente di evidenziarne i possibili limiti e pericoli in relazione al suo utilizzo.Una sua introduzione troppo precoce (quando i significati non sono ancora costruiti) o la sua assolutizzazione come linguaggio di risoluzione possono generare in molti bambini atteggiamenti dannosi (combinazione a caso di numeri,pur di scrivere un'operazione) derivanti dal tipo di "contratto didattico" che si instaura tra insegnante e alunni,nel quale l'operazione rappresentata in forma algebrica assume valore taumaturgico.L'indicazione che emerge dal lavoro condotto nelle nostre classi è l'utilità di un intreccio funzionale del linguaggio algebrico con il linguaggio verbale,ove quest'ultimo esplicita e/o anticipa il processo risolutivo (cfr. punto 6).

5.Il linguaggio dei grafi

Anche i grafi,come la notazione algebrica,vengono utilizzati nelle nostre classi allo scopo di stenografare processi mentali di risoluzione.Dalla pratica didattica degli ultimi due anni,ispirata al principio di ricorrere alle sole formalizzazioni corrispondenti al ragionamento attivato,è emerso che sin dal primo ciclo il linguaggio dei grafi si rivela proficuo strumento del processo risolutivo.Va premesso che le classi in cui si è fatto uso dei grafi per la risoluzione dei problemi aritmetici utilizzano il linguaggio dei grafi anche in altri ambiti didattici,in particolare per la ricostruzione sintetica di processi studiati(economici,tecnologici,...).Al termine di una esperienza di studio(analisi e ricostruzione verbale orale e scritta) di processi tecnologici ed economici riscontrabili nella realtà (esempio:percorsi di

merci non soggette a lavorazioni,produzione di un bene di consumo,fasi della lavorazione di un campo di grano),ci si trova nella necessità di "mettere ordine" in maniera sintetica nei contenuti dell'esperienza vissuta,di pervenire alla memorizzazione dei passaggi individuati,di affidare le conoscenze prodotte a forme di visualizzazione di agevole ed efficace consultazione successiva.Il linguaggio dei grafi,in quanto linguaggio sintetico,essenziale,sequenziale,sembra adeguatamente rispondere agli scopi individuati.Vengono così prodotti grafi inerenti ad esempio il viaggio dell'arancia, il prezzo via via assunto dall'arancia ad ogni passaggio,le lavorazioni del campo di grano....Le classi che acquistano familiarità con i grafi per la ricostruzione di processi esaminati agevolmente trasferiscono(su suggerimento dell'insegnante)l'uso di tale linguaggio nella risoluzione dei problemi aritmetici.

Nel primo ciclo si è notato che,tra i bambini familiarizzati all'uso dei grafi in contesti diversi da quello dei problemi aritmetici,un'alta percentuale usa i grafi per la risoluzione di quei problemi in cui il testo sollecita la rappresentazione della situazione problematica in termini di completamento additivo.Si tratta di problemi concernenti ad esempio situazioni di resto monetario,confronto e differenza di valori monetari e misure,calcolo di durate.Si consideri ad esempio il seguente testo di problema: "Mario aveva 900 lire;riceve dei soldi in regalo dalla nonna.Ora ha 1400 lire.Quanti soldi ha ricevuto Mario in dono ? ".La situazione problematica è rappresentabile in questi termini:

$$\square \xrightarrow{\quad ? \quad} \square$$

sono noti lo stato iniziale e lo stato finale;è sconosciuto l'operatore che realizza il passaggio dall'uno all'altro.Quando la situazione problematica è immediatamente rappresentabile secondo questo schema ed i valori numerici sono tali da rendere il calcolo per completamento additivo la strategia di conto più "economica"e più veloce, un'alta percentuale di bambini ragiona per completamento additivo e rappresenta il suo ragionamento con un grafo.In questi casi la formalizzazione <u>stenografa</u> adeguatamente la <u>strategia di ragionamento</u> e viene a <u>coincidere con l'immediata rappresentazione</u> della situazione problematica.

Presentiamo in proposito alcuni esempi attinti dagli elaborati dei bambini; dato il testo : "Paghi con 2000 lire un quaderno che costa 1400 lire;quanto ricevi di resto ? " , Stefano risolve: "Io tengo a mente 1400 e conto avanti fino a 2000 e dico: 1500,1600,1700,1800,1900,2000 e scopro che la negoziante mi dà 600 lire di resto:

$$1400 \xrightarrow{+100} 1500 \xrightarrow{+100} 1600 \xrightarrow{+100} 1700 \xrightarrow{+100} 1800 \xrightarrow{+100} 1900 \xrightarrow{+100} 2000$$

$$600$$

Il bambino,attraverso il grafo,rappresenta la sua strategia di calcolo.

Simona,invece,scrive:

$$" \quad 1400 \xrightarrow{+600} 2000 \quad " \; :$$

la bambina attraverso il grafo rappresenta la situazione problematica ed esprime il ragionamento fatto per risolvere il problema (per completamento).

Maria scrive : "Conto per 100 da 1400 a 2000 ",poi però costruisce il seguente grafo :

$$\underbrace{1400 \xrightarrow{+400} 1800 \xrightarrow{+200} 2000}_{600}$$

Con il grafo la bambina esprime la strategia di calcolo effettivamente seguita,non del tutto corrispondente alla dichiarazione iniziale.

Come già detto a proposito della notazione algebrica si rileva che anche nell'uso dei grafi è presente il rischio di perdere informazioni inerenti la situazione problematica;il bambino può smarrire la consapevolezza sia del significato dei numeri utilizzati,sia del significato del risultato prodotto.Tuttavia nella nostra esperienza si va notando che per alcuni bambini il grafo diventa il linguaggio privilegiato nella risoluzione anche di problemi il cui testo non è rappresentabile immediatamente in termini di completamento additivo.Ad esempio dato il testo:

"Anna aveva nel borsellino 1950 lire;ne ha spese 1450 per una confezione di merendine.Quanti soldi ha ancora Anna ? ", alcuni bambini usano la notazione algebrica sintetica : 1950-1450 =500 ,altri utilizzano il grafo per esprimere da un canto la loro personale rappresentazione della situazione problematica tradotta in termini di confronto-differenza di valori,e contemporaneamente le modalità di calcolo:

$$1450 \xrightarrow{+500} 1950 \quad ; \quad \text{oppure} \quad : \quad 1950 \xrightarrow{-500} 1450$$

Altri ancora attraverso il grafo esprimono il ragionamento corrispondente alla più immediata rappresentazione della situazione problematica:

$$1950 \xrightarrow{-1450} 500$$

Gli esempi sopracitati e le considerazioni fatte ci inducono in definitiva a proporre i grafi come proficui strumenti nella risoluzione dei problemi,anche se (come già detto) occorre vigilare sul rischio che tale linguaggio distolga l'attenzione dalla situazione problematica.Il grafo di flusso infatti:

- rappresentando adeguatamente e sinteticamente la situazione problematica può agevolare,stimolare,indurre strategie di ragionamento
- individuata una strategia di ragionamento,è efficace a tradurre il dinamismo e la

sequenzialità (la processualità) del percorso risolutivo
- agevola,con le molteplici modalità di calcolo che consente,l'individuazione del valore numerico incognito della grandezza considerata
- consente di mantenere il"contatto"con il <u>valore</u> delle cifre implicate (cfr.il primo esempio)

6.Il linguaggio verbale

Negli esempi fino ad ora trattati si è visto come i linguaggi esaminati compaiono spesso abbinati al linguaggio verbale:sovente i bambini usano le parole (o principalmente le parole) per esprimere il procedimento risolutivo adottato.Ciò avviene soprattutto nelle classi in cui ,in un ampio contesto di verbalizzazione delle razionalizzazioni raggiunte su temi in genere non matematici,anche il significato delle operazioni viene acquisito attraverso ripetute esplicitazioni verbali delle esperienze effettuate sotto la guida dell'insegnante,e dove anche all'interno dell'attività di calcolo orale viene chiesto al bambino di esprimere a parole il processo mentale seguito.In tali classi sovente l'insegnante sollecita i bambini affinchè, mentre pensano,scrivano il pensiero che vanno costruendo.

Abbiamo notato che da alcuni bambini,in particolare per certi tipi di problemi,è difficile ottenere spontaneamente delle verbalizzazioni;per altri,invece,soprattutto nei problemi più complessi,la capacità di <u>risolvere</u> sembra coincidere con la capacità di <u>verbalizzare</u> il ragionamento mentre avviene.

Sulla base delle esperienze fino ad ora condotte ci sembra possibile operare una prima classificazione delle modalità attraverso le quali avviene l'utilizzo del linguaggio verbale nella risoluzione dei problemi.Come è rilevabile da alcuni degli esempi precedentemente esaminati,il linguaggio verbale da molti bambini viene usato per "<u>rendere conto</u>" del ragionamento effettuato e/o della strategia di calcolo utilizzata;a risultato ottenuto il bambino ricostruisce,verbalmente,il processo mentale seguito.In altri casi invece il linguaggio verbale viene utilizzato con funzione <u>dichiarativa</u> circa il ragionamento che si intende compiere e/o la strategia di calcolo che si intende adottare;precedentemente o contemporaneamente all'effettuazione del calcolo,alcuni bambini esplicitano verbalmente i passaggi del processo mentale da attuare per la risoluzione del problema.

Indipendentemente dal venire usato come rendiconto o dichiarazione,il linguaggio verbale assolve,a nostro avviso,più profondamente ed estesamente di altri linguaggi, alcune funzioni fondamentali per l'attività di risoluzione dei problemi.Infatti:

a) come già detto in precedenza,il linguaggio verbale consente di fissare i signi=ficati delle operazioni aritmetiche via via affrontate:attraverso il linguaggio verbale il bambino,assumendone consapevolezza,esplicita i contenuti delle azioni materialmente compiute o rappresentate mentalmente al fine di risolvere il proble=ma;in un secondo tempo,verificata la padronanza dei significati così raggiunti, tali azioni o mentalmente o materialmente compiute,ma espresse verbalmente,verran=no tradotte nei segni delle operazioni aritmetiche.

b) il linguaggio verbale consente ai bambini di comunicare ai compagni le diverse mo=dalità di rappresentazione della situazione problematica e di risoluzione del pro=blema;in altri termini consente di confrontare,criticare,selezionare,tra le varie strategie di ragionamento adottate in classe,le più corrette ed efficaci.Inoltre sollecita(nel bambino apparentemente incapace a pensare) l'adozione consapevole e via via più autonoma di un personale percorso risolutivo.

c) attraverso la ricostruzione della strategia di ragionamento o di calcolo effettua=ta,consente al bambino,che in un primo tempo può essersi mosso per intuizione o tentativi,di assumere consapevolezza dell'intero processo risolutivo.

d) mediante la revisione dei passaggi effettuati,permette al bambino di controllare la correttezza e l'efficacia delle scelte compiute

e) fornisce al maestro l'occasione per appurare il grado di consapevolezza raggiunto dal bambino;oppure,nei casi in cui il bambino non dimostri alcuna padronanza del ragionamento o esprima incapacità di risoluzione,permette all'insegnante di solle=citare e mediare attraverso le parole un processo di pensiero.

Nonostante l'importanza e l'efficacia dell'uso del linguaggio verbale nella riso=luzione dei problemi,allo stato attuale delle riflessioni e delle esperienze non ri=teniamo ancora sufficientemente motivato proporre l'uso del linguaggio verbale come linguaggio privilegiato per la risoluzione dei problemi aritmetici.Ai fini di un percorso di ricerca pensiamo tuttavia utile aggiungere alcune ulteriori considera=zioni derivanti dalla pratica didattica ed inerenti il linguaggio verbale assunto nella modalità di dichiarazione del processo risolutivo.Gli esempi che seguono e le riflessioni ad essi collegate ci indurranno in termini di ipotesi a pensare il lin=guaggio verbale dichiarativo così strutturalmente intrecciato al processo di pensiero da assumere anche la funzione di stimolo e guida per l'attivazione delle strategie di ragionamento.

Si prenda in considerazione l'esempio che segue,tratto dagli elaborati di fine seconda di una classe abituata a verbalizzare ogni esperienza effettuata.

Dato il testo del problema: "Ho comprato due etti di prosciutto a 1600 lire l'etto e 3 etti di formaggio a 1200 lire l'etto;quanto ho speso in tutto ? ",un bambino così risolve: "ho comprato due etti di prosciutto,ogni etto costa 1600 lire,quindi ho speso in tutto per il prosciutto 1600+1600.Per il formaggio invece ne ho comprati tre etti;ogni etto costa 1200 lire,quindi ho speso 1200+1200+1200 che posso scrivere anche 1200x3 perchè sono 1200 lire per tre volte.E allora posso sapere quanto spen=do in tutto : 1600+1600+1200 + 1200+1200 ...."

Fino ad ora nel suo testo il bambino ha ricostruito verbalmente i termini della situa=zione problematica ed ha individuato le singole operazioni necessarie per comporre la strategia risolutiva;esprimendo,anche attraverso l'uso dei connettivi (quindi,in=vece),le relazioni intercorrenti tra i singoli elementi della situazione problematica, ha utilizzato una prosa non solo descrittiva,ma anche espositiva.

Nella seconda parte del suo testo il bambino individua opportune strategie di calcolo: "Prendo le mille in ogni prezzo e fanno in tutto 5000;restano ancora 600 e 600 che fanno 1200,e 200+200+200 che fanno altre 600,ed allora in tutto 1800.Le sommo alle 5000 e fanno 6800."

Proponiamo ora un altro esempio tratto da una classe III:esso concerne una situazio=ne problematica collegata ad una attività di misurazione realmente effettuata dalla classe. "Si deve rappresentare su un foglio di quaderno la pianta della palestra che abbiamo misurato e che è lunga 34 passi e larga 20 passi.Fare il disegno in modo che risulti bene al centro del foglio".Un bambino così risolve:

"Conto i quadretti del foglio,sono un pò più di 46 per lungo e un pò più di 31 per largo.Allora va bene prendere 23 come metà per lungo e 15 come metà per largo.Poi faccio diventare un passo uguale a un quadretto e divido a metà i 34 passi,cioè 34 quadretti,e ho 17 quadretti di lungo e così 10 quadretti di largo;e faccio una cro=ce,17 quadretti per il lungo e 10 quadretti per il largo,con il centro del foglio che ho trovato prima.Poi faccio la palestra...." (segue il disegno).

Si noti come le dichiarazioni della strategia di ragionamento si intreccino al calco=lo;il bambino fa uso di una prosa narrativa-descrittiva;omette l'esplicitazione delle relazioni intercorrenti tra la realtà osservata e la conseguente rappresenta=zione grafica:una siffatta esposizione fornirebbe elementi di argomentazione delle scelte effettuate.

L'analisi del linguaggio verbale in ambito aritmetico induce a riflettere sul li=vello di padronanza e competenza linguistica necessario a chi intenda utilizzare il linguaggio verbale per la soluzione dei problemi,inoltre apre l'interrogativo su quali contenuti ed attraverso quali modi ed itinerari didattici una siffatta padronanza linguistica possa venir sviluppata.E' intuibile,pertanto,come la ricerca sulla didattica della risoluzione dei problemi debba a nostro avviso intrecciarsi con la didattica del testo nell'ambito dell'educazione linguistica e come i progressi delle ricerche didattiche relative ad ognuno dei due ambiti possano risultare di reciproca fecondità.

Nei due esempi presentati si può notare come il ragionamento intrapreso dai bambini considerati si snodi attraverso il linguaggio verbale:supportati e ritmati dalla parola che organizza gli elementi della situazione problematica,i bambini attivano gradualmente un processo mentale risolutivo.Sulla base di queste ed altre analoghe rilevazioni ci sembra possibile avanzare l'ipotesi,tutta da verificare,che il linguaggio verbale non solo sia un mezzo efficace di espressione dell'avvenuto processo risolutivo,bensì possa costituirsi come uno strumento di guida,orientamento,organizzazione della strategia di ragionamento;in altri termini possa costituirsi come supporto per l'individuazione dei vari passaggi della risoluzione,funga cioè da strumento di razionalizzazione.In questa ipotesi il linguaggio verbale non solo esprime un ragionamento o una strategia di calcolo,ma agevola,stimola,forse consente o addirittura produce il processo di risoluzione del problema aritmetico.

Anche nell'uso del linguaggio verbale possono tuttavia verificarsi situazioni di perdita di contatto con la realtà degli elementi della situazione problematica.Ciò avviene generalmente per difetti espositivi:il bambino si limita a narrare i passaggi intrapresi senza articolare la sua esposizione e nella ricostruzione delle relazioni tra gli elementi della situazione problematica e nella specificazione delle motivazioni che lo hanno indotto ad operare determinate scelte di ragionamento e di calcolo.Si prenda in considerazione l'esempio che segue:dato il già menzionato problema del formaggio e del prosciutto,una bambina,appartenente ad una classe diversa da quella considerata precedentemente,risolve in questo modo:
"Io conto 600 più 600 e fa 1200,e poi conto 1000 più 1000 e fa 2000.E poi conto 1200 più 2000 e fa *3200*.Poi devo ancora contare i tre etti di formaggio e conto 200 più 200 fa 400 e poi ancora 200 e fa 600.Poi conto 1000 più 1000 più 1000 e fa 3000 poi conto i 600 di prima e fa 3600,e poi conto tutto insieme,cioè 3600 più 3600 e fa 6800." Per trovare il *3200* è stato necessario l'aiuto dell'insegnante: nella selva di valori,privi di precisazione circa ciò a cui si riferiscono,la bambina,abbandonata a se stessa,si sarebbe smarrita.

A proposito dell'esempio ora fatto ci sembra però utile proporre alcune ulteriori riflessioni:con il linguaggio verbale la bambina esprime e realizza la strategia di calcolo;rifiuta la notazione algebrica sintetica (addizione in colonna) che peraltro conosce come tecnica;non utilizza la forse più conveniente notazione algebrica "per passaggi" che tradurrebbe fedelmente la strategia risolutiva impiegata:

600+600=1200

1000 +1000=2000

2000 +1200=3200

200+200=400

400+200=600

1000 + 1000 +1000=3000

3000 +600=3600

3600 +3200=6800

Va notato che tale forma risolutiva,con le opportuna specificazioni di significato dei valori 3200,3600 e 6800,è stata utilizzata in classe solo da due bambini che figurano nel gruppo degli allievi di più alto livello di apprendimento.La bambina considerata invece appartiene al livello medio;probabilmente non riesce a produrre e gestire la notazione algebrica "per passaggi" e ricorre pertanto all'esposizione orale.Se questa analisi contiene alcuni elementi di verità ci è possibile quindi ipotizzare che, concordemente con la più generale ipotesi prima avanzata,il linguaggio verbale possa rappresentare a volte uno strumento per l'attivazione di una strategia di calcolo che altrimenti rimarrebbe bloccata.

Riferimenti bibliografici

1.AA.VV. ,"Numeri e operazioni nella scuola di base ", Zanichelli - 1985

2.BOERO,P.,"Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare",L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE,1986

3.NESHER,P.,"Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems", in "ADDITION AND SUBTRACTION:A COGNITIVE PERSPECTIVE",Lawrence Erlbaum, 1982

4.VYGOTSKIJ,L.S., "Pensiero e linguaggio", Giunti-Barbera,1966

Francesco Speranza

In questi mesi l'interesse è rivolto principalmente alla Scuola Elementare e alle Scuole Superiori, per ovvi motivi di attualità. Come abbiamo già osservato altre volte, i problemi della scuola Elementare, essendo meno legati ad aspetti 'tecnici' della Matematica, hanno implicazioni epistemologiche particolarmente importanti. Noi ci siamo interessati soprattutto di Geometria (ma anche di Probabilità e Statistica, di regolarità numeriche,...): la Geometria sembra un argomento vecchio: ma proprio per il fatto che era presente nell'insegnamento tradizionale, in modo spesso insoddisfacente, si pongono problemi delicati. C'è il rischio che molti insegnanti focalizzino la loro attenzione su argomenti "nuovi": invece è necessario un profondo rinnovamento perchè il modo tradizionale di trattarla è una riduzione acritica di quella che potrebbe al più essere una (insoddisfacente) trattazione a livello secondario (fra l'altro, questa impostazione è in contrasto anche con i vecchi programmi!). Invece nella Geometria, scienza che si sviluppa dall'esperienza al pensiero astratto, è necessaria una riflessione sulle sue opportunità didattiche.

I bambini infatti, nelle Elementari, debbono costruire il "pensiero delle operazioni concrete", e quindi debbono essere impegnati in attività concrete, ma rilevanti sul piano matematico: la terminologia geometrica, la precisione di linguaggio debbono essere un punto d'arrivo, una conquista (come dicono i nuovi programmi). Anzi, i primi passi debbono avvenire proprio attraverso azioni fisiche: l'origine della Geometria è nella Fisica (Enriques): le sue radici sono nell'esperienza, che viene a confrontarsi via via con il pensiero razionale.

Questi principi sono stati alla base delle nostre proposte per la formazione degli insegnanti, e in particolare dei formatori. Nel seminario di Salsomaggiore del corso per formatori (aprile 1986) proprio la Geometria ha portato alla luce alcuni problemi di fondo. Noi riteniamo che occorre evitare di ridurre la formazione geometrica degli insegnanti (e dei formatori) a una trattazione assiomatica: essa è uno dei modi di presentare la Geometria, e non è certo quello più corrispondente alle necessità della Scuola Elementare: essa è forzatamente lontana dall'esperienza concreta, e per la sua autosufficienza rischia di non dare una dimensione critica alle conoscenze degli insegnanti, e quindi di avallare un insegnamento nozionistico (e contrario allo spirito dei nuovi programmi). Occorre invece dare un panorama dello sviluppo della Geometria da conoscenza empirica a sistema razionale: in esso, come stadio finale, si inserisce anche un saggio di trattazione assiomatica, accompagnato da una riflessione sulla funzione dei singoli assiomi, e da una esplorazione su sistemi alternativi.

Bisogna inoltre tenere conto, a nostro parere, anche dell'impostazione gruppale di Felix Klein (programma di Erlangen), potente strumento di unificazione della Geometria, e fondamentale per una comprensione articolata. Con gli insegnanti si può parlare di gruppi (anzi, questa occasione è una delle più motivanti che si presentano); con i bambini, la pluralità delle geometrie si riflette in un approccio diversificato da varie situazioni di partenza, nello studio delle trasformazioni e nella ricerca di ciò che cambia e ciò che resta invariante per date trasformazioni.

E' auspicabile che nei prossimi tempi si intensifichi il dibattito intorno al modo di "fare Geometria" nella Scuola Elementare: un'occasione sarà rappresentata dall'incontro dedicato alla Scuola Elementare nel 1987, che sarà appunto dedicato alla Geometria. Questo dibattito potrà avere interessanti risvolti anche sul piano più strettamente epistemologico.

La Scuola Media è oggi un caso un po' speciale: e qui vorrei fare alcune osservazioni di carattere generale. Nell'ambito dei nuclei, si stanno sviluppando da tempo ricerche su vari argomenti, secondo linee diverse: si può dire che abbiamo dimostrato praticamente - nella lettera e nello spirito - che i nuovi programmi sono applicabili alla realtà della Scuola italiana: si osservi che ai nostri nuclei afferiscono molti insegnanti non laureati in Matematica, che portano un prezioso contributo. Invece, la situazione media della scuola è molto insoddisfacente: i nuovi programmi (ma anche quelli del '62) sono largamente disattesi. Eppure, in molti ambienti si ritiene che la Scuola Media abbia viste soddisfatte tutte le sue esigenze: invece, se l'introduzione dei nuovi programmi è accompagnata, nella Scuola Elementare, da un piano d'aggiornamento, perchè non si fa altrettanto per la Scuola Media? I nostri nuclei sono ben sperimentati, e in essi operano molti potenziali formatori, che hanno già esperienza di aggiornamento. Sarebbe interessante promuovere iniziative su larga scala anche nella Scuola Media. Potremmo chiamare a collaborare gruppi analoghi che operano in altre discipline, e associazioni professionali.

Nelle Superiori, le novità più rilevanti riguardano la presenza della Logica e dell'Informatica nei nuovi programmi, in modo piuttosto impegnativo. Siamo sempre stati favorevoli a una presenza significativa della Logica nella scuola: ma ora ci chiediamo che cosa si farà nel triennio. Siamo favorevoli alla introduzione dell'Informatica:ma, in una scuola come la nostra, che finora l'ha sempre ostentatamente ignorata, essa appare ora in modo troppo massiccio. Del resto, con il piano nazionale per l'Informatica si è appunto tentato di impiantare un modello avanzato su un terreno assolutamente impreparato a riceverlo: temiamo inoltre che una notevole percentuale degli specialisti che si interessano ai problemi didattici dell'Informatica non abbia ancora ben individuato il quadro di riferimento (compresa la scuola) in cui si deve operare. Sarebbe stato necessario sviluppare un lavoro di riflessione culturale, tenere un contatto con la realtà scolastica,che per il resto della Matematica erano stati sempre presenti, e che comunque coltiviamo da anni. Sarebbe stato preferibile creare prima le condizioni per un'operazione così delicata, con un lavoro quale si sta da tempo svolgendo nei nuclei.

Stiamo appunto muovendoci in questo senso: cerchiamo di elaborare con pazienza una linea didattica, studiare le condizioni di applicabilità dei modelli proposti; in poche parole, occorre evitare che le innovazioni si riducano a puro tecnicismo, o addirittura che nella scuola ci si limiti ad applicare meccanicamente programmi preparati da altri. Ho l'impressione che invece sia proprio questa la linea più efficace nel campo delle applicazioni commerciali dei calcolatori: se vogliamo che la loro presenza sia positiva, dobbiamo elaborare un approccio nuovo, che ne studi attentamente, e senza fretta,le opportunità che essi offrono - e siamo convinti che ve ne sono - sul piano formativo.

Elda Guala, Stefania Chiri, Marina De Gribaldi, Massima Pastorino, Anna Maria Rossi, Ornella Odero
Dipartimento di Matematica - Genova

Strumenti per la valutazione di curricula innovativi e per l'analisi dell'apprendimento realizzato attraverso essi

1. Premessa

Uno dei problemi più importanti che si pongono durante la sperimentazione di curricula innovativi per l'insegnamento della matematica è quello degli strumenti per valutare i risultati raggiunti, per analizzare i processi di apprendimento sollecitati dai materiali e dagli itinerari didattici seguiti in classe, per raccogliere informazioni sulle difficoltà incontrate dagli insegnanti e dagli allievi durante il lavoro in classe.

Gli strumenti possibili non sono tutti ugualmente affidabili, efficienti (a parità di costo), praticabili; inoltre in relazione alla varietà degli obiettivi sopra citati accade che difficilmente uno stesso strumento possa risultare efficace per tutti gli scopi.

La presente comunicazione si propone di illustrare per sommi capi le esperienze condotte in questo campo a partire dal 1976 dal nostro gruppo e da un sottogruppo specifico ("gruppo verifica"), con alcune indicazioni sulle conclusioni che a nostro parere possono essere tratte da esse per quanto riguarda l'affidabilità, l'efficienza,la praticabilità e il costo degli strumenti finora collaudati.

Sono allegati a questa comunicazione (e distribuiti ai presenti alla comunicazione) esemplari di alcuni dei materiali di valutazione/analisi dell'apprendimento a cui si fa riferimento nel testo.

2. Obiettivi della valutazione dei curricula innovativi

Ci sembra opportuno soffermarci brevemente sull'utilizzazione delle informazioni raccolte mediante gli strumenti di valutazione dei risultati di apprendimento e di analisi dei processi di apprendimento, realizzati attraverso i nostri curricula innovativi per l'insegnamento della matematica nella scuola media e nella scuola elementare; in effetti uno strumento di "valutazione" o di "analisi" non è in genere valido in sè ma in relazione alla natura delle informazioni che può fornire, e quindi alla natura delle informazioni che è utile raccogliere per gli scopi che ogni gruppo di ricerca si pone.

Nel nostro caso, l'interesse del gruppo verte sui seguenti punti:

- modificare e completare gli itinerari didattici ed i materiali di supporto ad essi
- identificare le difficoltà di apprendimento degli allievi
- valutare sia i risultati di apprendimento di fine anno e di fine ciclo sugli obiettivi disciplinari più importanti che i risultati parziali conseguiti su particolari contenuti o abilità nel corso del lavoro; e ciò sia per i singoli allievi che per il complesso di ognuna delle classi che sperimentano i curricula
- analizzare i processi di apprendimento degli allievi in relazione alle particolari sollecitazioni a cui sono sottoposti all'interno del lavoro curriculare
- raccogliere dati sulle difficoltà incontrate dagli insegnanti-sperimentatori
- raccogliere suggerimenti (puntuali e generali) degli insegnanti su modifiche da apportare ai materiali ed alle proposte didattiche

3. Descrizione ed analisi degli strumenti sperimentati

3.1. Materiali scritti da ogni allievo

- schede di lavoro guidato: le utilizziamo sia per raccogliere informazioni dettagliate sulle difficoltà incontrate momento per momento da ogni allievo che per valutare la persistenza degli apprendimenti realizzati in precedenza. Esse sono fondamentalmente di due tipi: schede che forniscono informazioni e danno istruzioni all'allievo, e poi verificano l'assimilazione delle informazioni e la capacità di adeguarsi alle istruzioni impartite attraverso appositi quesiti; e schede che propongono questioni aperte e sollecitano l'emergere di modi di pensare, di strategie "spontanee", ecc. (con l'obiettivo di focalizzare l'attenzione su particolari argomenti e di fornire elementi per successive discussioni, verifiche e approfondimenti in classe).

Caratteristica comune delle schede di lavoro guidato è che esse sono utilizzate anche come strumenti di analisi e valutazione dell'apprendimento, ma la loro finalizzazione principale è la sollecitazione individualizzata del processo di apprendimento.

Si tratta di uno strumento che fornisce molte informazioni (soprattutto per quel che riguarda le schede di tipo più "aperto"), e che tuttavia presenta costi assai elevati di gestione: per vari anni abbiamo raccolto tutte le schede compilate dai bambini di 4 classi rappresentative del gruppo di oltre 30 che ogni anno sperimentano il progetto della scuola media per ognuna delle tre classi, e un numero ridotto di schede -da 8 a 12- compilate nel corso dell'anno da tutte le altre classi. Abbiamo finora analizzato e tabulato i dati relativi ad un numero assai ridotto di bambini, la quantità di tempo necessaria è notevole e inoltre le informazioni sono spesso ambigue, risentono delle dinamiche di classe, sono poco adatte per un riscontro puntuale con gli interrogativi che ci si pone sull'efficacia di un dato itinerario didattico. Lo strumento inoltre non è proponibile per i bambini più piccoli.

- schede valutative sull'unità didattica compilate dai bambini al termine di essa: si tratta di uno strumento di valutazione dei risultati di apprendimento introdotto di recente, consistente in una serie di domande sulle difficoltà incontrate, sui modi utilizzati per superarle, sui contenuti ritenuti più importanti tra quelli affrontati....*Lo strumento appare efficiente in quanto in poco "spazio" (e quindi con un "tempo" limitato di spoglio delle risposte) fornisce informazioni attendibili sul lavoro svolto dal bambino e sulla qualità dei principali risultati di apprendimento raggiunti (la descrizione delle difficoltà incontrate e dei contenuti appresi è significativa per accertare cosa il bambino ha ritenuto di dover imparare e di avere studiato). Naturalmente anche questo strumento ha dei limiti intrinseci: non può essere proposto con i bambini più piccoli; non serve ad accertare gli apprendimenti inerenti contenuti ed abilità non esplicitate; risente (per le unità didattiche più lunghe) delle attività svolte più di recente; non fornisce informazioni dettagliate. In relazione alla revisione delle proposte didattiche può tuttavia essere prezioso per grosse rettifiche inerenti il peso dei vari argomenti all'interno di una unità didattica, la linea culturale complessiva dell'unità didattica, ecc.*

Anche se si tratta di uno strumento principalmente finalizzato alla verifica dell'apprendimento, non è trascurabile la sua utilità come occasione di revisione (da parte del bambino) del lavoro svolto, e quindi come strumento di apprendimento.

- prove di verifica periodiche: sono schede sommative di abilità e conoscenze, più o meno inserite nel normale iter didattico previsto dal progetto, che sono utilizzate sia dagli insegnanti (per accertare i livelli di apprendimento raggiunti dagli allievi su particolari argomenti) che dal gruppo (per avere un quadro dei risultati raggiunti nelle diverse classi). Esse sono attualmente raccolte per tutte le classi, insieme ad una griglia di valutazione dei risultati, compilata dall'insegnante (di cui verrà trattato in 3.2.).

Lo strumento richiede tempi molto lunghi per l'interpretazione e la tabulazione dei risultati e inoltre risente di alcuni inconvenienti quali ad esempio: emotività degli allievi; focalizzazione dell'attenzione su prestazioni particolari, talvolta isolate da un contesto culturale che dia loro significato; scarsità di informazioni sui processi mentali a monte delle risposte fornite e sulle interazioni insegnante/allievo

- Questionari di sintesi sull'unità didattica, compilati dai ragazzi per loro ipotetici colleghi: anche questo è uno strumento introdotto di recente e ancora soggetto a miglioramenti nella gestione. *Lo strumento appare utile per valutare la padronanza raggiunta dal bambino nell'esplicitazione dei contenuti oggetto delle sue domande e (indirettamente) fornisce informazioni sulle priorità da lui presunte tra i contenuti. Come per le schede valutative sopra descritte tuttavia possono presentarsi distorsioni inerenti il prevalere degli argomenti oggetto di trattazione più recente e gli argomenti più minuziosamente esplicitati dall'insegnante.*
- relazioni individuali sull'unità didattica:
  si tratta di relazioni sui contenuti di tipo "tematico" presenti nell'unità didattica, che vengono svolte dai ragazzi alla fine dell'unità stessa.
  Fra tutti gli strumenti di verifica presentati, è quello che risulta più problematico sia per i ragazzi (per i quali spesso si intrecciano difficoltà di tipo linguistico con difficoltà di tipo psicologico e concettuale) che per l'insegnante e il gruppo verifica (in quanto la lettura di tutte le ralazioni richiede tempi lunghi e l'interpretazione dei risultati di apprendimento presenta notevoli difficoltà).

Nel complesso, tuttavia gli strumenti ora descritti appaiono adeguati allo scopo di raccogliere informazioni di tipo "statico" su momenti intermedi e finali del lavoro sulle diverse unità didattiche, con costi tuttavia elevati per alcuni di essi; poco adeguati invece sono per quanto riguarda l'analisi delle "dinamiche" (personali e interpersonali) di apprendimento.

3.2. Materiali scritti dagli insegnanti

- relazioni libere su argomenti scelti dagli insegnanti: *utili per raccogliere informazioni e suggerimenti di modifiche degli itinerari didattici, sono tuttavia di difficile interpretazione e possono risentire di situazioni ed episodi particolari avvenuti in classe; occorre anche aggiungere che non sembrano particolarmente gradite agli insegnanti*

- relazioni guidate: ogni insegnante compila un "libro di bordo" relativo ad una unità didattica, comprendente una serie di valutazioni complessive (secondo richieste esplicite standardizzate) sull'unità didattica e commenti e suggerimenti su tutte le schede, le letture, i materiali di lavoro in cui si articola l'unità didattica stessa.
  Si tratta dello strumento principale finora utilizzato per le modifiche puntuali e complessive da apportare alle unità didattiche; esso presenta tuttavia alcuni difetti che lo rendono poco adatto per revisioni più fini o più profonde di unità didattiche già abbastanza efficienti: inevitabile soggettività delle valutazioni, mancanza di riscontro puntuale con i reali comportamenti degli allievi, ecc. Per questi motivi recentemente si è deciso di affiancare al "libro di bordo" dell'insegnante il questionario valutativo da parte degli allievi (per le unità didattiche della scuola media) di cui si è accennato in 3.2.
- relazioni guidate su particolari allievi o particolari difficoltà di apprendimento:
  utili per avviare un confronto su problemi di "recupero" di allievi in difficoltà, risentono delle difficoltà dell'insegnante di analizzare con distacco il "caso" in questione
- griglie di analisi delle prove di sintesi sull'unità didattica:
  si tratta di tabulati forniti agli insegnanti indicanti l'elenco delle abilità e/o conoscenze che la prova di sintesi sull'unità didattica prevede. L'insegnante deve completarle per ogni alunno in corrispondenza delle varie voci e riportare al gruppo verifica il quadro complessivo della sua classe, circa le abilità o carenze esaminate, insieme ad una scheda di presentazione delle modalità di svolgimento del lavoro in classe.
  E' uno strumento introdotto di recente, al fine di snellire il lavoro di elaborazione dei risultati da parte del gruppo verifica, utile anche per l'insegnante nelle valutazioni analitiche che periodicamente deve fornire per ogni ragazzo -
  E' in corso da parte del gruppo verifica una valutazione dell'affidabilità e della praticabilità di tali griglie.
- relazioni sull'apprendimento tematico dei ragazzi:
  si tratta di brevi resoconti dell'insegnante sui livelli di comprensione dei te-

mi affrontati da parte dei ragazzi

Lo strumento non è ancora ben definito; probabilmente accorrerà in futuro precisare meglio il tipo di relazione richiesta, con domande guidate e con indicazioni più specifiche, in modo analogo a quanto già fatto per le griglie di analisi sopra descritte.

Nel complesso, le difficoltà incontrate con questi strumenti rinviano alle carenze di "cultura dell'osservazione" dell'apprendimento che sono assai diffuse anche tra gli insegnanti più motivati, impegnati e culturalmente preparati.

3.3. Registrazioni magnetofoniche

Abbiamo svolto alcune esperienze di registrazioni in classe (con registratore pale se o nascosto agli allievi); l'obiettivo era quello di "registrare" alcune dinamiche individuali e interpersonali. *Il bilancio è solo parzialmente positivo (e corrisponde a riflessioni critiche che in altri gruppi si estendono anche alle videoregistrazioni): al di là dell'analisi di "casi" difficili, lo strumento presenta costi elevati (di trascrizione) e difficoltà tecniche (per seguire le interazioni) e inoltre interferisce sui comportamenti "abituali" dell'insegnante (che si sente "osservato").*

3.4. Riunioni periodiche di tutti gli insegnanti,

Per valutare l'andamento del lavoro in classe attraverso un confronto diretto delle proprie esperienze.

Più che di uno strumento di verifica "documentabile", si tratta di un metodo di lavoro, caratteristico del gruppo di Genova, attraverso il quale, dal 1976 ad oggi, si continuano a trarre informazioni "preziose" circa una valutazione complessiva e puntuale sull'efficacia delle proposte didattiche e sulla gestione del lavoro in classe. E' ovviamente inevitabile la componente soggettiva dell'insegnante, che in tal caso risulta però maggiormente evidenziata e controllata dal confronto e dalla discussione collettiva.

Va osservato che per i primi anni (1976-79) questo è stato praticamente l'unico metodo di valutazione adottato; dal 1979 si è evidenziata sempre più la necessità di un lavoro di verifica attraverso strumenti più puntuali e sistematici, del tipo di quelli indicati in 3.1. e 3.2., la cui valutazione è tuttora oggetto di studio e di ricerca.

MISURARE PER CONOSCERE - scheda N. 16 - S C H E D A D I V E R I F I C A -

COGNOME E NOME ______________ CLASSE __________

(Nella scheda per i ragazzi è stampata una cartina di una zona di Roma, in scala 1 : 11.000, che qui viene omessa per ragioni di spazio).

1) Descrivi a parole il percorso tratteggiato sulla cartina per andare da Castel S. Angelo a Piazza del Popolo, indicando i nomi delle strade, i cambiamenti di direzione e tutto ciò che ti sembra utile per dare indicazioni ad un turista.
2) Quanto è lungo il percorso segnato: - sulla cartina? - nella realtà?
3) Per andare da Castel S.Angelo a Piazza del Popolo si possono seguire anche altri percorsi, ad esempio il seguente:
   "si parte da Castel S.Angelo, si attraversa il ponte sul Tevere che sta di fronte, si costeggia la riva sinistra del fiume fino al Mausoleo di Augusto, si prosegue per via di RIPETTA fino a Piazza del Popolo".
   Disegna sulla cartina l'itinerario sopra descritto.
4) Di quanto il percorso che hai disegnato è più breve del precedente, nella realtà? (Indica il procedimento e i calcoli effettuati)
5) Con il righello è stata misurata sulla cartina la lunghezza della Basilica di S.Pietro, che risulta cm. 1,932.
   Controlla la correttezza della misura effettuata e scrivi le tue considerazioni
6) Dalla cartina si può ricavare quanto è alta la Basilica di S.Pietro? Perchè?

QUESTIONARIO

DELL'UNITA' DIDATTICA ______________

Per le domande 1,2,4 indicare così le risposte scelte: ☒

1) Nell'imparare gli argomenti dell'unità didattica ti è servito di più:

☐ compilare le schede
☐ ascoltare le spiegazioni dell'insegnante
☐ rileggere per conto tuo schede e letture
☐ discutere in classe
☐ ....

2) Come hai trovato le letture di questa unità didattica:

☐ facili ☐ difficili ☐ interessanti ☐ lunghe

3) Quali difficoltà hai incontrato e quali errori hai fatto più frequentemente nello svolgimento di questa unità didattica?

4) Secondo te, ti sembra di aver acquisito gli argomenti dell'unità didattica in modo:

☐ soddisfacente ☐ sufficiente ☐ scarso

5) Prova a descrivere ad un amico di un'altra classe della tua scuola il contenuto, le tue impressioni e considerazioni sull'unità didattica che hai appena studiato (se vuoi, puoi provare ad inventarti un dialogo o riportare un dialogo effettivamente avvenuto con un tuo compagno).

ANNO SCOLASTICO 1985/86

VERIFICA DEL PROGETTO "UOMO-NATURA;UOMO-SOCIETA';UOMO-PRODUZIONE"

Gli insegnanti che lavorano con i materiali del Progetto sono tenuti a compilare per almeno una unità didattica il libro di bordo che consiste in una descrizione dettagliata dell'andamento della sperimentazione in classe.

A CHE SERVE IL LIBRO DI BORDO?

- *Per la riprogrammazione dell'unità didattica (effettuata solitamente a fine anno dai gruppi di programmazione*
- *Per raccogliere informazioni*
  - *a) sulla gestione delle schede*
  - *b) sull'eventuale lavoro al di fuori delle schede*
  - *c) sui processi di apprendimento (Nuovi programmi-parte III, 3)*

Le migliori indicazioni emergenti serviranno per la messa a punto di guide didattiche per gli insegnanti, nell'ottica di un accrescimento della loro professionalità e di un miglioramento della gestione dei materiali del Progetto.

COME E' FATTO IL LIBRO DI BORDO:

Il libro di bordo è costituito da:

A) un breve profilo della classe (n. alunni, n. ripetenti, n. di ragazzi con gravi lacune sulle abilità di base, n. di ragazzi che completano rapidamente e bene le schede, eventuali portatori di handicap, situazione disciplinare, etc)

B) una valutazione complessiva, guidata da domande specifiche, sull'unità didattica e sulle attività svolte al di fuori della scheda.

C) una copia di ciascuna scheda dell'unità didattica con indicazioni sulle modalità di esecuzione (a casa, a scuola, da soli, insieme, velocemente, lentamente, ...). Sono molto utili tutte le critiche e i suggerimenti circa i materiali presentati. Ad esempio, una lettura può risultare troppo lunga, di difficile comprensione, scritta in un linguaggio inadatto, poco stimolante (ma anche viceversa). Oppure, nelle schede contenenti domande, queste ultime possono risultare troppe, scollegate, incomplete, noiose, difficili (ma anche viceversa). Analogamente è utile riferire sulle difficoltà incontrate dai ragazzi, sia su quelle dovute a carenze dei materiali, sia su quelle dovute ad altri motivi.

Si consiglia di riportare eventuali annotazioni sui processi di apprendimento sulle singole schede che vengono allegate al libro di bordo.

PER LA FRESCHEZZA E L'OMOGENEITA' DELLE INFORMAZIONI E' INDISPENSABILE CHE QUESTA PARTE VENGA COMPILATA DI VOLTA IN VOLTA (CON LA OVVIA ECCEZIONE DELLE UNITA' DIDATTICHE CHE SONO GIA' INIZIATE).

D) un questionario da far compilare in modo anonimo a tutti i ragazzi e da restituire insieme al libro di bordo

LIBRO DI BORDO CONCERNENTE L'UNITA' DIDATTICA ____________________

INSEGNANTE ____________ SCUOLA ____________ CLASSE ____________

ANNO SCOLASTICO ____________________

A) PROFILO DELLA CLASSE

B) VALUTAZIONE COMPLESSIVA DELL'UNITA' DIDATTICA E DESCRIZIONE DELL'ATTIVITA' SVOLTA

è stata utile la guida per gli insegnanti allegata alle schede dell'unità didattica?

Sono state rilevate delle carenze?

- quali variazioni sono state apportate alle indicazioni suggerite?
- quali obiettivi di apprendimento (di tipo tematico, di tipo disciplinare, di recupero di abilità di base, ecc.) sono stati raggiunti?
- in che misura sono stati raggiunti? (per quasi tutti gli allievi, solo per alcuni, in modo disomogeneo....è sufficiente fornire valutazioni qualitative e soggettive)

- indica quali sono state le maggiori difficoltà incontrate e gli errori più frequenti commessi dai ragazzi?
- in base a quali eventuali ipotesi si possono spiegare le difficoltà e gli errori osservati (ad es. carenze di base, difficoltà linguistiche, difficoltà dell'argomento, disinteresse, etc.)
- Quale ruolo hanno avuto le schede nel guidare l'apprendimento? (ad esempio: hanno costituito tappe per attività svolte essenzialmente al di fuori di esse; oppure sono state usate come strumento principale di apprendimento, con esercizi di consolidamento a lato; oppure hanno suggerito all'insegnante tipi di esercizi e/o letture da ricercare sul libro di testo o su altri libri, e via dicendo)
- Sono state utili e adeguate agli scopi le eventuali schede e attività di verifica indicate?

  Se non ne sono state previste, sarebbe utile prevederne? (fornire se possibile indicazioni)
- La collocazione dell'unità didattica nel piano di lavoro annuale è opportuna o si propongono delle variazioni?
- Che tipo di lavoro è stato svolto oltre a quello con le schede? (fare riferimento ai testi usati, esercizi assegnati, attività manipolative svolte, spiegazioni gite, cartelloni....)

C) EVENTUALI ALTRE OSSERVAZIONI

CLASSE ____________ SCUOLA ____________

INSEGNANTE ____________

GRIGLIA DI ANALISI DELL'U.D. "MISURARE PER CONOSCERE"- SCHEDA DI VERIFICA N.16

L'insegnante compili il seguente tabulato, ponendo delle crocette per ogni alunno in corrispondenza delle varie voci e riporti nelle due colonne finali i valori assoluti e percentuali relativi alla sua classe, per ogni abilità o carenza indicata nella prima colonna.

Se l'insegnante nella correzione riscontra dei ragionamenti particolari di tipo non standard, effettuati da qualche alunno, che ritiene possono essere significativi da segnalare per la verifica, è pregato di riportarli sul retro della presente griglia, insieme ad eventuali altre osservazioni (es. uso dei C.T., uso di espressioni risolutive, ecc.).

Il seguente tabulato va restituito al gruppo verifica, insieme alla solita scheda di identificazione e a tutte le schede dei ragazzi.

ABILITA' E CARENZE ESAMINATE	1	2...30		VALORI ASSOL.	PERC.LE
1) ABILITA' DI MISURA:					
- non usa correttamente il righello					
- non indica l'unità di misura in modo appropriato					
- non usa il righello in modo critico (domanda 5)					
- altro:					
2) USO DELLA SCALA DI RIDUZIONE:					
- non moltiplica per la scala					
- sbaglia le equivalenze					
- sbaglia le moltiplicazioni					
- altro:					
3) ABILITA' DI CALCOLO:					
- non esegue correttamente la somma di segmenti					
- non esegue correttamente la differenza di percorsi					
- sbaglia l'uso della virgola					
- sbaglia l'uso degli zeri					
- non controlla la sensatezza dei risultati					
- presenta i calcoli in modo disordinato					
- non presenta i calcoli					
- altro:					
4) ORIENTAMENTO SULLA CARTINA:					
- non descrive in modo corretto il percorso già tracciato (domanda 1) perchè: a) non si orienta					
b) ha difficoltà di tipo linguistico					
- non disegna correttamente il percorso descritto					
- non mette in relazione la bidimensionalità della cartina con la tridimensionalità della realtà (domanda 6)					

Rossolini Anna Laura

Scuola elementare "Cinzio Benincasa" - Ancona

TEATRO E GIOCO PER AVVIARE AL PENSIERO ALEATORIO

Un'esperienza scolastica su videocassetta.

Premessa. Il filmato (durata 20' - contenuto riportato più avanti quasi integralmente) presenta una esperienza scolastica sulla probabilità realizzata in una quarta classe di tempo pieno alla fine dello scorso anno. Le motivazioni che hanno condotto alla scelta dell'argomento e del mezzo tecnico di registrazione sono varie. Tenterò di riassumerle.

Ad una prima analisi dei Nuovi Programmi, avevo considerato l'introduzione del calcolo della probabilità come un ulteriore aggravio al carico non lieve delle numerose prescrizioni del settore; alla preoccupazione si aggiungeva una certa perplessità conoscendo la complessità e le sottigliezze relative al concetto di evento "casuale".

In effetti, la teoria della probabilità non rappresenta soltanto una serie di calcoli ma anche un modo di pensare specifico che esprime un orientamento ben preciso dell'intelletto, diverso da quello ispirato agli schemi dell'insegnamento scolastico che sviluppa generalmente una tendenza deterministica nell'esplorazione e nell'interpretazione dei fenomeni. Inoltre, abituata a tradurre in didattica concreta ogni dettato ministeriale, consideravo le difficoltà operative della realizzazione di tale nuova proposta: se per qualsiasi ramo della matematica bisogna predisporre almeno a livello elementare un terreno intuitivo favorevole, nel programmare un itinerario di probabilità si sarebbero dovuti tener presenti anche i due aspetti del dilemma tra teoria e necessità. Infatti teoricamente (Piaget) gli alunni nell'età delle operazioni concrete non sarebbero in grado di disporre di strumenti intellettuali adeguati per la comprensione dei concetti essenziali per la probabilità (capacità combinatorie, uso di rapporti, confronti di rapporti ...); in realtà, secondo i risultati di alcune recenti ricerche sperimentali (Fischbein), si evidenzia chiaramente la necessità di accostare precocemente gli alunni al pensiero probabilistico, prima cioé che l'organizzazione mentale assuma una caratteristica di marcato determinismo soffocando le intuizioni spontanee che spesso i bambini hanno di fronte a situazioni di incertezza.

Dall'approfondimento dell'argomento, di per sé stimolante perché problematico, é nato il desiderio di una sperimentazione con possibilità di verifica immediata, cogliendo l'opportunità offertami da una classe con caratteristiche particolari e da un collaudato sistema scolastico che beneficia di frequenti proficui momenti di interdisciplinarietà e socializzazione.

Per la metodologia, ho tenuto conto sia delle indicazioni fornite dalle ricerche relative alla probabilità nella scuola elementare, sia di talune valide consuetudini scolastiche:

- lezioni pratiche (aggancio di ogni esperienza ad una situazione concreta)
- lezioni con carattere di gioco e di avventura secondo la didattica adottata per le attività scientifiche (previsione, esperienza e verifica, necessità e caso, certezza e probabilità ... con tabelle, registrazione e confronto di dati etc.)

Obiettivi proposti:

1) offrire una ulteriore opportunità di "crescita" ad una classe con livello di preparazione e capacità abbastanza soddisfacente ed avviata da sempre ad un apprendimento moderno della matematica
2) valutare quali intuizioni probabilistiche possedessero gli alunni
3) scoprire quali difficoltà di apprendimento emergessero, dal momento che teoricamente a questa età non potrebbero essere in grado di sviluppare capacità combinatorie e usare i rapporti e i confronti di rapporti necessari per i procedimenti probabilistici
4) verificare come gli alunni, con una breve istruzione adeguata, sapessero destreggiarsi in esperizne di probabilità, dimostrando di sapersi costruire i meccanismi mentali necessari alla comprensione attiva della proporzionalità che é di capitale importanza per l'insegnamento della probabilità.

Si precisa che l'animazione teatrale con cui si apre il filmato é stata curata da un piccolo gruppo di alunne che ha ricavato il testo da un breve aneddoto tratto da un libro. L'incarico della preparazione é stato assegnato come gioco per casa da svolgere con segretezza e con promessa di adeguata sceneggiatura e di socializzazione ai propri compagni, a quelli della quarta parallela ed ai più grandi di quinta con i quali poi si sarebbe iniziato un capitolo del tutto nuovo della matematica.

I risultati dell'animazione e dei cinque momenti successivi possono percepirsi dalle reazioni e dalle risposte degli alunni ripresi in diretta da un genitore capace di annullarsi nell'atmosfera vivace dell'ambiente scolastico. Non c'é stata alcuna manipolazione successiva né modificazione delle riprese.

Nel complesso l'esperienza può ritenersi valida perché ha favorito il coinvolgimento totale degli alunni attivandone tutte le possibili energie. Sul piano della risposta intellettiva, si nota una capacità di approfondimento e di intervento sempre più sfumata negli alunni di media levatura via via che si procede verso situazioni complesse, mentre sempre più vivace, interessata e stimolante si fa la presenza dei più dotati. Significativa é l'esclamazione conclusiva di un alunno capace di cogliere interessanti relazioni su una tabella di combinazioni: "Che fenomeno questa matematica!".

In sintesi il contenuto del filmato, con le sequenze più significative:

CHE PROBABILITA' C'E' ?

Scena I^ - Teatrino della scuola - Spettatori alunni classi IV^ e V^.
Ambiente: Interno orientale.
Personaggi: Presentatore-Califfo-Ministro.

Animazione con mimica, musica e dialoghi di questo aneddoto: Un califfo, famoso per la sua cattiveria e slealtà, aveva ingiustamente accusato di tradimento un suo ministro. Inutile ogni tentativo di discolpa. Per dimostrare una inconsueta magnanimità, il califfo vanta di offrire una possibilità di salvezza dalla pena di morte che spetta ai traditori: in un sacchetto dice di aver messo due palline, se estrarrà la rossa, il ministro sarà graziato. Il ministro, conoscendo bene il califfo, intuisce il sicuro imbroglio. Disperatamente cerca una rapida favorevole situazione. Estrae una pallina e fulmineamente la infila in bocca, inghiottendola. Poi, trionfante, chiede di vedere di che colore é la pallina rimasta. Per non mostrare l'inganno (nel sacchetto il ministro aveva intuito esserci due palline nere), il califfo concede la grazia.

Scena II^ - La maestra guida il pubblico a fantasticare ancora sull'episodio. Fa delle domande e invita a rispondere su dei foglietti precedentemente distribuiti

con soluzioni di matematica (numeri, operazioni, frazioni, percentuali a seconda delle capacità).

Si riportano tre delle 8 domande:

1) Se il califfo fosse stato leale e le palline fossero state davvero una rossa e una nera, che probabilità aveva il ministro di salvarsi? (risposte immediate. Partecipazione emotiva notevole. 1/2 - 0,5 - 1/2 - Una su due - 50% - Nessun errore, nessuna incertezza).

....

5) E se il califfo fosse stato meno cattivo e avesse messo nel sacchetto tre palline, due nere e una rossa? (qualche incertezza, comprensibile nella percentuale, per il resto ancora buone intuizioni).

....

8) E se il califfo fosse stato quasi buono e avesse usato una pallina nera e 9 rosse? (Si nota in qualche alunno la difficoltà di dominare l'insieme, deviato forse dall'intensità emotiva: due risposte 1/9 poi quasi subito modificate correttamente).

Scena III^ : Lungo il corridoio, dal teatrino all'aula, viene espresso il desiderio di continuare il "gioco". Sorprende la richiesta di Michele che vuole il sacchetto con le due palline per controllare con i compagni quante volte viene la salvezza con un numero grande di prove.
Anche gli altri desiderano fare l'esperimento.
Essendo disponibile lo stesso materiale per vari gruppi, la maestra invita a rendere più "intelligente" e gustoso il gioco, suggerendo ad accordarsi sul numero delle prove e a formulare ipotesi da confrontare poi con i risultati. Chi decide per 20 estrazioni, chi per 50, chi per 100 .....
Viene concesso subito del tempo, non volendo interrompere la carica di interesse.
Un gruppo di alunni con la maestra prepara la tabella per la registrazione dei risultati e delle ipotesi di probabilità.
Nelle tre classi, il coinvolgimento é totale. Dopo la compilazione della tabella, di fronte ai risultati espressi in frazione, si hanno le prime interessanti riflessioni:
- Oh, guarda che stranezza! La frequenza é vicina alla probabilità!
- Allora la fortuna non c'entra più come in un solo sorteggio!

- Facciamo altri esperimenti .... ? E' gustoso!
La maestra promette di continuare il giorno seguente.

Scena IV^ : In classe il giorno seguente, con i soli alunni di una quarta, dopo la ricreazione, la maestra ipotizza il gioco a mosca cieca. Dopo aver scoperto il numero dei nati in Ancona, chiede che probabilità avrebbe se, bendandosi, cercasse di toccare uno non anconetano, o uno di Ancona.
Si immaginano altre situazioni di gioco e si comincia ad intuire che prima che un fatto accada si può stabilire come può essere: probabile e facile, certo, probabile ma difficile, impossibile.
Viene fatto un elenco ed accanto ad ogni attributo viene messa la frazione di probabilità e la percentuale (non ancora insegnata ufficialmente ma di sufficiente conoscenza; si usano anche i segni di minoranza e di maggioranza solitamente usati).
I ragazzi credono ancora di giocare e si fermano volentieri davanti alla tabella inventando altre situazioni con vari tipi di probabilità.

Scena V^ . Un gioco più complicato.
Si mostrano due monete, una da 200 (oro) e una da 100 (argento). Si chiede in quanti modi possono comparire dopo un lancio contemporaneo. La risposta é precisa e dimostra un valido insegnamento fatto in seconda elementare da altra collega sulle combinazioni del prodotto cartesiano.
Dopo la rappresentazione con un grafico che usa gli insiemi, si illustra il perché del nome speciale dato a questa operazione particolare (SPAZIO DEGLI EVENTI) indicando anche la tabella riassuntiva con le combinazioni ordinate.

Scena VI^ . Alla lavagna viene scritto un problema gioco da fare liberamente, nel tempo non scolastico.
"Lancia 64 volte le due monete (da 100 e da 200) e registra quante volte avviene l'evento TESTA-TESTA. Prima stabilisci, però, la frazione di probabilità".
Michele, come sempre, non perde tempo, tanto é interessato alle scoperte matematiche e dichiara che lo farà all'ora del gioco. Anzi, cerca qualcuno che voglia farlo con lui.
La maestra gli chiede se sa che probabilità avrà: la risposta é immediata, precisa, completa. Eccola, integrale senza modifiche:
- Certo, su 4 lanci é 1/4, su 64, aspetti.... divido per 4 ... la metà é 32, la metà é 16. Ecco 1/16. Potrebbe venire 16 volte ....
(Come Michele, di alunni ce ne vorrebbero di più, perciò, data la rarità, la risposta nella sua immediatezza non può ritenersi troppo significativa, soltanto indicativa nel suo insieme di vari aspetti della didattica e del relativo apprendimento).

Scena VII^ . Il giorno seguente viene esposto il cartellone con i risultati dei lanci. Si riporta un commento conclusivo di due alunni con buona maturità globale:
"Con tanti lanci, il caso non esiste più".
Allora anche la probabilità ha delle regole!

Scena VIII^ . Con due dadi portati da Marco, si arriva a scoprire una ... faccia nuova della matematica.
Imprevedibilmente (questo aspetto si pensava di rimandarlo al prossimo anno) Marco porta a scuola due dadi e chiede:
- Maestra, che probabilità c'é di fare 12 punti in una volta? Devo sempre tirare tante volte e 12 viene sempre di rado ....
(Anche Marco ha un suo aspetto di rarità non solo per le naturali doti intellettive, ma anche per una maturità complessiva notevole con disposizione spiccata alla matematica e alle scienze in genere. La maestra scopre nell'intelligente domanda, la difficoltà di percepire l'insieme delle combinazioni o comunque di arrivare con autonomia alla strategia per costruirne l'insieme che darebbe la chiave della risposta. Si ricordano i richiami teorici del Piaget. Nonostante una logica e una maturità superiori decisamente alla propria età cronologica, Marco rivela il grado di possibilità della fascia scolare elementare e mi aiuta a capire anche i limiti di un itinerario proponibile ad altri alunni). Ritornando alla domanda di Marco, le indicazioni pedagogiche di solito suggerirebbero di rimandare la risposta o di predisporre per essa adeguato favorevole terreno di apprendimento. Le circostanze, l'interesse suscitato dalla domanda, l'attesa di Marco e della classe - colpita da un evento più volte incontrato ma forse trascurato o neppure considerato degno di riflessione nonostante l'incidenza che ha nel gioco dei dadi da tutti spesso usati - mi hanno spinta ad accelerare i tempi, favorendo la conquista pressoché immediata

dell'alunno.

- Ora ti aiuto: facciamo una tabella: in orizzontale mettiamo le facce del dado celeste ......

- Ho capito, ho capito tutto! Allora le combinazioni sono 36! Ma quanti sono i 12? E' lì il punto !!!!

Mentre la classe rimane incuriosita, non seguendo il ragionamento di Marco né le sue intuizioni, ognuno cerca di dettarmi le combinazioni con successione ordinata per completare la tabella.

A tabella finita:

- Allora quante volte compare la somma 12?
- Una volta sola, é vero! Perché non ci ho pensato prima!!! E' solo 6+6 ....
- Che probabilità c'é allora di fare 12 punti?
- Ora capisco perché 12 viene così di rado!!!!

(Marco si estrania un attimo in un incomprensibile lavoro mentale. Degli altri alunni, alcuni si sono allontanati più o meno colpiti dalla scoperta, altri rimangono ad osservare le combinazioni.

La scoperta di Michele fatta con grido e gesto di entusiasmo richiama tutti e li guida ad altre interessanti osservazioni:

- Anche la somma 2 appare una volta come 12!
- Oh guarda i risultati in questa linea di traverso!
- Hai ragione, é vero, ma guarda ... é strano! Se vai di traverso, da destra in basso verso alto a sinistra o al contrario ... da qualunque punto, trovi sempre la stessa somma!!
- Che gusto, dai! Cerchiamo ancora tra i numeri della tabella!

....

- CHE FENOMENO QUESTA MATEMATICA!

La registrazione dell'esperienza scolastica si chiude con questa esclamazione.

Nel valutarla a posteriori, essa mi é parsa abbastanza significativa ed interessante sia dal punto di vista didattico sia da quello dell'apprendimento. Forse meritava conservarla come documento di una realtà scolastica.

Per completarla, ho voluto aggiungere un mio personale commento espresso in una lettera, successivamente ripresa e letta nella videocassetta.

Ne riporto il testo conclusivo:

.... così, attraverso la drammatizzazione e il gioco, ho cominciato concretamente a costruire il "pensiero aleatorio" raccomandato dai Nuovi Programmi.

Ho cercato di condurre gli alunni ad accettare situazioni di incertezza; a capire che non é sempre possibile rispondere "si" o "no", "vero" o "falso"; a scoprire che lo studio del calcolo delle probabilità é una logica a più valori.

Non é cosa facile ma ... possibile!

Ogni esperienza é comunque nata dal desiderio di favorire la formazione di un atteggiamento positivo verso la matematica che intendo non solo come valido strumento di conoscenza e di interpretazione critica della realtà ma anche come affascinante attività del pensiero umano.

Contributo del Nucleo di Pavia

La sperimentazione dei nuovi programmi di matematica

1 - La sezione elementare del Nucleo di Ricerca Didattica di Pavia si è costituita ufficialmente nell'aprile del 1985.

Attualmente (ottobre 1986) ci sono due gruppi di sperimentatori: 45 per la prima elementare e 23 per la seconda per un totale di quasi 1000 bambini.

2 - La sperimentazione dei nuovi programmi di matematica che il Nucleo sta conducendo comporta, oltre alle riunioni quindicinali per ciascun gruppo,

* lo studio, a livello adulto, di concetti matematici (per ora concetti di aritmetica, geometria e logica),
* lo studio di questioni di psicologia cognitiva (le immagini mentali);
* la determinazione degli obiettivi disciplinari per i singoli anni;
* la stesura delle programmazioni fini nel quadro dei filoni tematici;
* l'elaborazione di materiale didattico adeguato;
* la sua sperimentazione in classe;
* i resoconti orali e scritti (quadrimestrali e annuali);
* la revisione critica del materiale prodotto.

3 - Al momento attuale sembra ben delineato un Progetto di educazione matematica per il primo ciclo.

Le idee "guida" del progetto sono le seguenti:

3.1 Punto di partenza è l'affermazione della relazione Fassino secondo cui i nuovi programmi devono "aiutare lo scolaro a conseguire gli strumenti fondamentali del sapere (in particolare la lingua e la matematica) e a conoscere i principali aspetti dell'ambiente (naturale e sociale) in cui si dovrà muovere, rapportare ed esprimere".

E' l'obiettivo generale della scuola elementare ed i nuovi programmi delle singole discipline lo riprendono e lo sviluppano con contenuti specifici. Per la matematica sarà sufficiente ricordare che "essa tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le

abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa".

3.2 Per "produrre queste capacità e formare queste abilità", riprendendo e sviluppando idee contenute già in un precedente progetto, abbiamo individuato tre filoni tematici per il primo ciclo.

3.2.1 Il filone "Ambiente"

In prima esso si concretizza nello studio della classe, cioè dell'ambiente di cui durante il tempo scolastico, il bambino ha più immediata esperienza.

La classe è intesa come

* Comunità di persone fra le quali bisogna "favorire la formazione di un costume di reciproca comprensione e di rispetto", promuovere "un clima sociale positivo ... organizzando forme di lavoro in gruppo e di aiuto reciproco e favorendo l'iniziativa, l'autodecisione, la responsabilità personale ed autonoma degli alunni".
* Spazio attrezzato per una specifica attività. Di qui lo studio degli oggetti della classe con i risvolti linguistici, matematici e scientifici facilmente immaginabili.

  Basti pensare, per la matematica, all'attività del contare, alla costruzione ed al confronto di istogrammi, all'addizione, all'attività geometrica legata agli oggetti ed ai cammini.

In seconda lo studio si allarga alla scuola ed alla casa. La riflessione su strumenti tecnologicamente avanzati (frigorifero, televisione, etc.) e le "interviste" alle persone più anziane della famiglia (genitori e nonni) costituiscono l'avvio ad una presa di coscienza di due caratteristiche fondamentali dell' "ambiente" contemporaneo: lo sviluppo tecnologico e la rapidità dei cambiamenti.

3.2.2 Il filone "Tempo"

Il fenomeno "tempo" è presente nei contenuti dei nuovi programmi di varie discipline: lingua, matematica, scienze, storia.

Il fluire del tempo, nelle sue varie scansioni (giornaliera, settimanale, mensile, stagionale, annuale) è presente, in qualche modo, alla coscienza del bambino che inizia la scuola elementare. Ad esso infatti sono legate tante situazioni di cui il bambino ha esperienza diretta.

Con questo filone si incomincia a fornire al bambino gli strumenti per "l'ac quisizione delle coordinate temporali" in modo che sappia "orientarsi nel tempo e misurarlo", per la costruzione di una "cronologia, intesa quale strumento convenzionale indispensabile per ordinare e memorizzare gli eventi del passato" e per lo "studio degli uomini e delle società umane nel tempo e nello spazio, nel passato e nel presente" in "tutte le loro diverse dimensioni: quella civile, culturale, economica, sociale, politica, religiosa".

Nel nostro progetto si incomincia con lo studio del "calendario degli adulti" per finire con la costruzione del "calendario di classe" che diventa "diario di vita" con l'annotazione di presenze e assenze, tempo meteorologico, temperature, compleanni, fatti importanti per la classe, stagioni e loro rapporto con la vita umana lavorativa, scolastica, sportiva, etc..

L'attività aritmetica legata al "calendario" è quanto mai varia e interessante. Basti pensare alla linea dei numeri, al contare in senso progressivo e regressivo, alla scrittura dei numeri in base dieci ed in base sette, ai problemi di addizione e sottrazione, agli istogrammi ed al loro confronto, ai grafici delle temperature, al numero come misura, all'utilizzazione contemporanea di due unità di misura: 2 settimane e 3 giorni; 3 ore e 20 minuti; etc..

Nella nostra esperienza questo filone è stato il più approfondito e, se così si può dire, il più "goduto" da insegnanti e bambini.

3.2.3 Il filone "Economia"

La parola può sembrare altisonante e, forse, fa scattare istintivamente un atteggiamento di rifiuto. E' bene, si pensa, che i bambini di oggi continuino a cullarsi con la favola di Cappuccetto Rosso. Avranno più avanti il tempo per imbattersi nei problemi economici. Eppure il tema economico è una costante dei programmi di matematica della scuola elementare italiana.

Già nel programma D (classe quinta) del 1860 è previsto il "Modo di tenere i libri dell'azienda domestica"; in quelli del 1888 si richiede la "Applicazione ai conti di interesse e società"; in quelli del 1905 sono previste "Nozioni pratiche di rapporti e proporzioni semplici (interesse, sconto aggio, tara, senseria)". Infine nei programmi del 1955, ancora in vigore, è scritto "Occorre soprattutto concretezza e aderenza alla realtà quotidiana ricorrendo anche ai casi più comuni della contabilità familiare e commerciale".

Va anche ricordato che, storicamente, lo sviluppo dell'economia ha "indotto" un notevole sviluppo nella matematica ed una maggior diffusione della cultura

matematica.

Ancora oggi, inoltre, le abilità numeriche di molte persone vengono esercitate, esclusivamente o prevalentemente, nelle attività economiche.

Il tema economico è menzionato nei nuovi programmi di varie discipline: matematica, scienze, storia, geografia.

Con questo filone tematico si incomincia a fornire ai bambini alcuni strumenti per la conoscenza del sistema monetario, l'analisi di dati economici, la misura di aspetti della realtà economica e la comprensione del sistema economico.

L'attività matematica legata a questo filone è notevole. Basti ricordare: seriazione, classificazione, numero come misura, addizione, sottrazione, raddoppiamenti, dimezzamenti, etc..

3.3 Lo studio di questi filoni tematici richiede una pluralità di strumenti: linguistici, matematici, scientifici, storici, geografici, religiosi. Per questi ultimi basti pensare al significato della Domenica, del Natale, della Pasqua, dei santi del calendario, etc..

Il nostro progetto si occupa solo degli strumenti matematici, è un progetto di educazione matematica.

E' stata una decisione sofferta ma necessaria. I motivi sono stati essenzialmente due:

- la vastità e la complessità dei nuovi programmi di scienze che richiedono, per proporre qualcosa di sensato, di fattibile e di essenziale, una pluralità di competenze culturali e didattiche;
- la mancanza, nel nostro nucleo, di tali competenze.

Ad ogni modo se il nostro non è un progetto "globale" è, però, un progetto "aperto" nel senso che suggerisce spunti per l'utilizzazione di tutti gli altri strumenti.

3.4 Lo sviluppo dei concetti matematici, che si cerca di far nascere in contesti problematici e significativi, segue anche un cammino "interno" con la scoperta, per esempio, dei numeri pari e dispari, dei numeri primi, delle coppie di numeri amici, con la "lettura" delle tabelline per trarne utili informazioni, per avviare i bambini a "gustare" la matematica in se stessa e non solo utilizzarla come strumento.

E' un contributo che la matematica può dare a sviluppare il gusto estetico e la dimensione contemplativa.

E, anche, un ripercorrere, la storia della matematica che, nata per esigenze pratiche, si è poi sviluppata mediante riflessioni "interne".

3.5 Nel costruire il materiale didattico abbiamo sempre presente la sua "esportabilità", cioè vogliamo che sia gestibile da un qualunque insegnante di una qualunque scuola. Per questo il Nucleo cerca di svolgere la sua attività in condizioni il più possibile normali:

* gli sperimentatori non vengono scelti, ma si accetta chiunque faccia domanda;
* essi provengono da diversi Circoli didattici (15) e da scuole di ogni tipo: città (centro e periferia), grosse borgate, paesini sperduti;
* non hanno alcun tipo di esenzione dagli altri doveri come docenti, ma solo il permesso dei loro Direttori;
* la maggior parte degli sperimentatori non ha precedenti esperienze di sperimentazioni organizzate;
* gli universitari non partecipano direttamente alla attività in classe;
* i filoni tematici costituiscono un quadro di riferimento, propongono linee generali all'interno delle quali gli insegnanti si possono muovere con grande libertà.

4 - Riflessioni sull'aggiornamento.

Sta per partire il piano nazionale di aggiornamento. In base alla nostra esperienza ci sembra che debbano essere tenuti presenti i seguenti elementi.

4.1 E' necessario garantire agli insegnanti impegnati in mille cose scolastiche, burocratiche, familiari, etc., un congruo tempo per seguire corsi e studiare con serietà. Altrimenti il piano di aggiornamento non raggiungerà i suoi obiettivi.

Si impone, quindi, una qualche forma di esonero dalla attività didattica.

4.2 E' necessario aumentare le risorse umane, cioè le persone preparate e disponibili ad un continuativo impegno per la formazione professionale degli insegnanti elementari. E' necessario, quindi, coinvolgere maggiormente professori universitari, laureati in matematica, e docenti elementari. Non ci si può improvvisare aggiornatori degli insegnanti elementari.

Il compito di aumentare queste risorse umane può essere specifico dei Nuclei. E', però, necessario che gli *Irrsae*, cui è demandato il compito di attuare il piano nazionale, appoggino e favoriscano questo impegno evitando un assegnamento "selvaggio" dei corsi di aggiornamento a sindacati, associazioni ed enti vari non qualificati.

4.3 E' necessario preparare e diffondere materiale di studio e didattico, adeguato, serio e accessibile.

E' un compito non facile, ma indilazionabile. Una strada potrebbe essere quella di pubblicare il materiale del "Progetto Strategico" presso qualche editore che può garantirne la diffusione a livello nazionale.

Importante, è anche la diffusione di riviste qualificate rivolte agli insegnanti elementari. Per la stragrande maggioranza dei maestri, esse rappresentano l'unica lettura di "cose matematiche".

4.4 Sembra che l'aggiornamento del piano nazionale sarà organizzato a livello di Circolo. Stante la scarsità di risorse umane ora disponibili, riteniamo che tale scelta sia sbagliata. Le conseguenze sono facilmente prevedibili: molti Circoli o rinunceranno all'aggiornamento in Matematica oppure saranno costretti ad affidarlo a chiunque si dichiari disponibile.

Riteniamo che l'organizzazione debba essere almeno a livello di Distretto.

Maria Marinozzi
IRRSAE Marche

COSTRUZIONE DI UN TEST DI PROFITTO IN MATEMATICA PER LA V^ ELEMENTARE - IDEAZIONE E VALIDAZIONE SPERIMENTALE INIZIALE -

Il test é nato principalmente dall'esigenza di possedere uno strumento attendibile e valido atto a valutare in modo oggettivo, dunque diversamente da tante prove reperibili in commercio, i risultati raggiunti dagli alunni nel confronto con standard di gruppi più vasti. Tale tipo di rilevazione infatti costituisce una condizione di necessità, non solo in situazioni strettamente sperimentali, ma anche didattiche in cui si voglia avere un feed-back piuttosto immediato e inerente al processo di insegnamento-apprendimento per operare "aggiustamenti" didattici o inserire elementi di recupero.

Il test si situa nell'ottica di una sempre maggiore individualizzazione dell'insegnamento e quindi di una procedura didattica non indifferenziata che permetta una valutazione non semplicemente sommativa, ma capace di entrare nel discorso pedagogico-formativo.

In questo contesto i risultati raggiunti si confrontano con un progetto e dunque con una lista stabile di criteri o obiettivi, in cui il significato di ogni criterio é concretamente chiarito, sia teoricamente che in riferimento alle condotte da cui si può rilevare se l'obiettivo in esame é o no stato conseguito. Così il giudizio diventa un profilo articolato con un rigore d'espressione simile a quello dei giudizi psicometrici.

I "giudizi" elaborati possono essere trattati in modo statistico ed entrare in una anche più ampia attività di ricerca poiché é proprio l'oggettività delle rilevazioni a fondare la ricerca scolastica e a rendere possibile la ricomposizione del legame tra teoria e prassi.

Un test come questo introduce implicitamente una modalità di lavoro scientifica con l'uso di strumenti più adeguati, quali il computer, tale da far superare il tradizionale isolamento degli insegnanti e dare ad essi non semplicemente la possibilità di formulare delle ipotesi, ma soprattutto di verificarle.

Il test si é perciò ben inserito in una programmazione di circolo; una programmazione educativa infatti può avere un senso solo quando si verifica, producendo il cosiddetto effetto di "fall-out", attraverso il lavoro che consideri gli apporti del team degli educatori impegnati nel processo educativo, perché proprio nel lavoro di questo team può ritrovare la propria validazione. In altre parole gli insegnanti hanno sentito la necessità di uscire dal proprio isolamento e l'impossibilità o per lo meno la difficoltà di operare singolarmente in modo scientifico nella esplicitazione, realizzazione e verifica di procedure didattiche e soprattutto nella definizione di una programmazione suscettibile di verifica e quindi di valutazione.

Questi insegnanti non avendo mai, né per proprio conto né tanto meno collettivamente, elaborato delle prove di verifica oggettive, avendo sempre proceduto, sicuramente con molta buona volontà ma comunque in modo intuitivo a valutare i propri allievi, avevano necessità di somministrare alla loro scolaresca all'inizio della V^, una prova consuntiva o sommativa per rilevare di quali punti o aspetti, in relazione agli obiettivi prefissati, i loro allievi avevano o no acquisito la padronanza. Ciò era necessario per operare in modo individualizzato durante l'anno ed usufruire da parte dell'insegnante di una effettiva opportunità di confronto, possibile solo dopo aver messo gli scolari delle varie classi dinanzi alle stesse prove, allo stesso linguaggio e solo dopo aver garantito ad essi una valutazione oggettiva, perché definita in partenza.

Quindi il test si pone come <u>valutazione d'ingresso</u>, ma anche come <u>valutazione finale</u> che interviene a compimento di una attività di formazione durata per ben quattro anni consecutivi; valutazione diagnostica quindi, poiché si riferisce al possesso da parte dell'allievo di capacità strumentali e operative oltre che di conoscenze necessarie per inserirsi in una determinata procedura di apprendimento.

Il test, caratterizzato in questo senso era condizione necessaria per la elaborazione di <u>successive prove formative</u>, che intervenissero durante i processi di apprendimento e permettessero di attivare tempestivamente interventi compensativi più opportuni.

La prova in esame tiene conto delle istanze pedagogico-didattiche relative alla valutazione scolastica ed ai suoi strumenti, nonché delle esigenze metodologiche comunemente formulate per i test cognitivi.

Dopo aver passato in rassegna i test di profitto in matematica pubblicati in Italia, con gli insegnanti interessati, sono stati definiti e discussi obiettivi generali e specifici che riguardano sia lo sviluppo dell'intelligenza convergente che di quella divergente.

Nel formularli si é tenuto conto del modello tassonomico del Bloom e si sono presi in considerazione vari livelli di complessità, la loro determinazione inoltre, che si esplicita nelle unità di contenuto, fa riferimento a precise performances che dovrebbero o potrebbero essere raggiunte intorno ai dieci anni, stando alle indicazioni di psicologi cognitivisti quali il Piaget o il Butcher.

	OBIETTIVI GENERALI	
	SVILUPPO DELL'INTELLIGENZA CONVERGENTE	SVILUPPO DELL'INTELLIGENZA DIVERGENTE
UNITA' DI CONTENUTO	**IL NUMERO** - CARDINALITA' ED ORDINALITA' NUMERICA **LE 4 OPERAZIONI:** - TECNICA E SIGNIFICATO - CALCOLO - PROPRIETA' - PROBLEMI **FRAZIONI:** - CONCETTO ED ESEMPLIFICAZIONI - PROBLEMI **SISTEMA METRICO DECIMALE** - USO CORRETTO DEI CAMPIONI DI MISURA - CONOSCENZA DEI RAPPORTI ED APPLICAZIONI **PESO LORDO,NETTO,TARA GUADAGNO,SPESA,RICAVO** - MATEMATIZZARE,RICONOSCERE SITUAZIONI - APPLICARE PROCEDIMENTI NOTI **USO DEI GRAFICI** - VISUALIZZARE PROCEDIMENTI	- ANALIZZARE E SINTETIZZARE - SIMBOLIZZARE - FORMULARE PROBLEMI IN TERMINI MATEMATICI - INDIVIDUARE LE POSSIBILI INTERAZIONI TRA FENOMENI - SVILUPPO DELLA CREATIVITA' SCIENTIFICA: FORMULAZIONE DI ALTRA IPOTESI E RISOLUZIONI - SOLUZIONI CON PROCEDIMENTI ALTERNATIVI (GRAFICI, DIAGRAMMI, ESPRESSIONI)

OBIETTIVI SPECIALI					
INTELLIGENZA CONVERGENTE					INTELLIGENZA DIVERGENTE
NUMERO ITEM 1÷17	**LE 4 OPERAZIONI** ITEM 18÷33	**FRAZIONI** ITEM 1 (34%) ÷30 (63%)	**S.M.D.** ITEM 31(64%) ÷ 40(73%)	PESO LORDO, NETTO,TARA	ITEM 48(81%) ÷ 53(86%)
(SUBTEST) SCRITTURA E COMPOSIZIONE	(SUBTEST) CALCOLO	**CONCETTO DI FRAZIONE ED ESEMPLIFICAZIONI:** FRAZIONI COMPLEMENTARI	(SUBTEST) USO CORRETTO DEI CAMPIONI	GUADAGNO SPESA RICAVO	COMPOSIZIONE DI SOMME(ALTERNATE ADDITIONS)
VALORE DI POSIZIONE DELLE CIFRE NEI NUMERI INTERI	PROPRIETA'	FRAZIONI EQUIVALENTI FRAZIONI PROPRIE,IMPROPRIE,APPARENTI FRAZIONI DECIMALI	CONOSCENZA DEI RAPPORTI:APPLICAZIONE NELLE EQUIVALENZE	ITEM 41(74%) ÷ 47(80%)	OPERABILITA' CON NUMERI DATI(NUMBER RULES)
VALORE DI POSIZIONE DELLE CIFRE NEI NUMERI DECIMALI (DAI MILIONI AI MILLESIMI)	OPERAZIONI E CALCOLI SISTEMA MONETARIO	TRASFORMAZIONE DI UNA FRAZIONE IN NUMERO DECIMALE E VICEVERSA CALCOLO DELLA FRAZIONE DI UN NUMERO	VALORE DI POSIZIONE DELLE CIFRE NELLE MISURE(LUNGHEZZA, PESO,CAPACITA')	TABELLE PROBLEMI	PROBLEMI DI COSTRUZIONE COSTRUZIONE DI PROBLEMI DA ESPRESSIONI DATE
USO CORRETTO DEI SIMBOLI ARITMETICI NEL CONFRONTO DI QUANTITA' NUMERICHE	PROBLEMI	TRADUZIONE DEL CALCOLO DI FRAZIONI IN RIFERIMENTO AL SISTEMA METRICO DECIMALE RICONOSCERE ED ESEGUIRE I PROCEDIMENTI CHE DALLA PARTE FRAZIONATA CONDUCONO ALL'INTERO PROBLEMI	CONOSCENZA DEI RAPPORTI DELLE MISURE DI SUPERFICIE E AGRARIE: APPLICAZIONE NELLE EQUIVALENZE VALORE DI POSIZIONE DELLE MISURE DI SUPERFICIE E AGRARIE		FRASI APERTE RAPPRESENTAZIONI ALTERNATIVE

Il campione é costituito da 150 alunni tutti iscritti nel 1983-84 alla classe V^ per un totale di nove classi di cui due a tempo pieno in prevalenza del V^ Circolo di Ancona. Approntata la chiave di correzione e stabiliti i criteri per l'assegnazione dei punteggi é stata formulata una serie di ipotesi relative al pensiero convergente, divergente ed a loro interazioni funzionali, comunque in linea generale si vogliono individuare sequenzialità nel raggiungimento degli obiettivi.

Per favorire una interpretazione dei risultati più interessante ed utile, in fase di elaborazione dei dati si é distinto un primo gruppo di prove più semplici relative all'intelligenza convergente da un secondo blocco di prove più complesse o relative al pensiero divergente.

I due gruppi di punteggi sono stati elaborati separatamente.

Per le prove parallele ovviamente é stato seguito lo stesso procedimento calcolando per ogni item la media e la varianza su tutto il campione. Tramite l'analisi fattoriale si sono potute interpretare le relazioni empiriche tra l'elevato numero di variabili che sono 86.

Ricavata la matrice dei coefficienti di correlazione per ogni gruppo di item, successivamente sono stati estratti 4 fattori, seguendo le indicazioni del Calonghi, così come emergono da una sua indagine del '67 sulle conoscenze aritmetiche secondo cui il profitto in matematica dipende principalmente da un fattore generale dell'intelligenza e da una maggiore o minore capacità di rappresentare creativamente i numeri e di ristrutturare in forma originale in nuovi schemi i dati dei problemi; tale fattore potremmo individuarlo come intelligenza divergente.

Le stesse statistiche sono state usate relativamente a due classi A e D per verificare il "peso" di ogni subtest rispetto ad un criterio esterno costituito dal test psicologico delle Matrici Progressive. Per ciò che riguarda la sequenzialità degli apprendimenti non si sono usati procedimenti statistici, infatti, non essendo omogenei i risultati ottenuti all'interno del campione, si é preferito esaminare una serie di casi "congruenti e non con l'ipotesi" per trarre da tale analisi possibili interpretazioni. Tutti gli items del primo blocco di prove sono saturi quasi esclusivamente e con i punteggi più elevati nel primo fattore che é sopratutto relativo alla padronanza dei calcoli, ma che riguarda anche una competenza numerica in senso più ampio relativa alla scrittura, al valore posizionale delle cifre e alla conoscenza dei simboli numerici. Con pesi di gran lunga minori si delineano altri due fattori: verbale e di intelligenza generale. Si può dunque affermare che

gli items esaminati verificano il livello di competenza raggiunto dai ragazzi nei prerequisiti necessari per affrontare i contenuti più complessi e richiedenti una maggiore astrazione, organicità ed anche creatività delle prove successive.

Anche il secondo blocco di prove é soprattutto saturo nel primo fattore, si delinea poi, ma a distanza, un fattore verbale, inteso come esatta interpretazione della consegna. E' interessante osservare come questo secondo fattore non é affatto significativo negli items del pensiero divergente che sono tutti fortemente saturi nel primo, ciò sembra indicare che se non c'é una padronanza numerica di fondo non é possibile affrontare compiti di una certa complessità.

Il terzo fattore, presumibilmente in relazione alla creatività o pensiero divergente, é emerso soprattutto nelle forme parallele dopo una minima esperienza precedentemente realizzata dai ragazzi e soprattutto in relazione agli items riguardanti: "problemi di costruzione", "costruzione di problemi da espressioni date" e "rappresentazioni alternative".

Dunque emerge chiaramente dal test che perché scatti la creatività ci vuole innanzitutto un'ottima competenza numerica di base, ma anche si può chiaramente trarre la considerazione di come siano importanti il tipo e la qualità delle sollecitazioni proposte dagli insegnanti che possono o meno favorire l'evolversi negli alunni della divergenza del pensiero. Per validare il test con un criterio esterno sono state somministrate a due classi del campione le Matrici Progressive.

Visto che il fattore principale é il primo sono stati cumulati i punteggi di tre diversi gruppi di items per porre le sommatorie ottenute in correlazione tra loro e con il punteggio delle Matrici Progressive. Ciò ha permesso di ottenere quattro variabili: la prima corrispondente ai prerequisiti, la seconda relativa ad items del pensiero convergente ma più complessi dei precedenti, la terza riguardante le prove del pensiero divergente e la quarta data dai punteggi delle Matrici Progressive.

- CLASSI "A" E "D" -			1^SOMMONISTRAZIONE		PARALLELA	
			$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
VARIABILI	ITEM 1÷33 (MAX=175)	INTELLIGENZA CONVERGENTE (PREREQUISITI)	158.69	10.67	158.8	10.82
	ITEM 34÷80 (MAX=287)	INTELLIGENZA CONVERGENTE	256.31	20.79	253.31	22.80
	ITEM 81÷86	INTELLIGENZA DIVERGENTE	56.71	19.19	56.4	19.51
	M.P. (MAX=60)	MATRICI PROGRESSIVE	46.83	5.33	46.83	5.33

-CLASSI "A" E "D"-		1^ SOMMINISTRAZIONE				PARALLELA			
		F_1	F_2	F_3	F_4	F_1	F_2	F_3	F_4
		E_1=2.89	E_2=.62	E_3=.35	E_4=.14	E_1=3.03	E_2=.61	E_3=.29	E_4=.06
VARIABILI	ITEM 1÷33 INTELLIGENZA CONVERGENTE (PREREQUISITI)	.85	.45	.07	.24	.88	.44	.04	.16
	ITEM 34÷80 INTELLIGENZA CONVERGENTE	.89	.21	-.36	-.20	.94	.20	.22	-.17
	ITEM 81÷86 INTELLIGENZA DIVERGENTE	.88	-.13	.44	-.15	.88	-.13	-.44	-.04
	M.P. MATRICI PROGRESSIVE	.78	-.59	-.16	.15	.77	-.60	.20	.07

Osservando la matrice di correlazione si evidenziano correlazioni elevate tra le quattro variabili. L'effetto dell'insegnamento si fa pesantemente sentire su tutte le variabili, ma ha ad ogni modo reso possibile la padronanza di una serie di performances che attestano la conquista più o meno sicura del pensiero operatorio concreto.

La cosa più interessante da osservare nella 3^ tabella dei fattori emergenti riguarda gli items del pensiero divergente le cui saturazioni sono per la maggior parte, tolto che per il il 1^ fattore, di segno contrario a tutti gli altri gruppi di prove comprese le M.P.; ciò indica con chiarezza che tali items valutano realmente qualcosa di diverso dagli altri e che dunque sono effettivamente correlativi alla divergenza del pensiero.

Osservando i risultati del test si é anche cercato di individuare, nel reggiungimento degli obiettivi, alcune sequenzialità.

In linea generale la 1^ ipotesi, secondo cui l'uso sicuro delle quattro operazioni presuppone l'acquisizione del concetto di numero, non é confermata dai risultati, probabilmente ciò dipende dalla innumerevole quantità di esercitazioni nei calcoli che vengono proposti ai ragazzi fino in V^ elementare, mentre gli insegnanti tendono a considerare più implicita l'acquisizione del concetto di numero.

La 2^ ipotesi indenteva verificare se la padronanza dei concetti relativi al S.M.D. presupponesse il riconoscimento delle frazioni e la capacità di operare con esse: tale ipotesi pare essere confermata su tutto il campione, per lo meno in linea di tendenza generale.

La 3^ ipotesi non traeva conferma, in effetti il comportamento del nostro campione ha dimostrato che la costruzione di problemi da espressioni non é sempre, come ipotizzato, compito più difficile rispetto all'elaborazione di problemi da affermazioni numeriche.

Perché per un certo numero di ragazzi é più facile formulare situazioni problematiche avendo a disposizione una struttura precostituita che organizzare operazioni in un insieme unitario logicamente connesso.

Circa la 4^ ipotesi, le rappresentazioni alternative sono da collocare sicuramente al termine della sequenza relativa a situazioni problematiche gradualmente più difficili, essendo risultate impossibili da realizzare per chi non si sapeva adeguatamente destreggiare nei problemi. Questo discorso però é risultato valido solo per i ragazzi che non erano mai stati sollecitati a rappresentare in modi alternativi la stessa situazione; ciò é avvenuto per quasi tutto il nostro campione, fa eccezione solo la classe A dove é stata stimolata la divergenza del pensiero.

In questa situazione i punteggi ottenuti nei vari items sembrano significare che là dove esiste un insegnamento adeguato torna ad essere più difficile costruire problemi che non rappresentarli in modi alternativi, poiché tali modalità non costituiscono altro che la visualizzazione e l'applicazione alle più diverse situazioni di procedimenti già ampiamente sperimentati, come i vari tipi di grafici e diagrammi.

BIBLIOGRAFIA

1) De Bartolomeis: "Valutazione e orientamento", Torino, Loescher.
2) L. Calonghi:"Valutare-risultati decimologici e indicazioni per la scheda", I.G. De Agostini, 1983.
3) Vertecchi: "Valutazione formativa", Loescher.
4) Gattullo: "Didattica e docimologia - misurazione e valutazione nella scuola", Armando Editore.
5) Visalberghi: "Misurazioni e valutazioni nel processo educativo", Edizioni di Comunità, 1955.
6) J. Piaget: "La psicologia dell'intelligenza", Giunti Barbera, Firenze, 1952.
7) Butcher: "L'intelligenza umana", Armando Editore, 1974.
8) L. Calonghi: "Indagine sulle conoscenze aritmetiche", in Orientamenti Pedagogici, Marzo-Aprile 1967, Maggio-Giugno 1967.

Franco Giannessi
Dipartimento di Matematica - Pisa

SU ALCUNI RECENTI SVILUPPI, TEORICI ED APPLICATIVI, DELL'OTTIMIZZAZIONE

1. Lo studio di problemi di massimo o minimo libero o vincolato per funzioni di n variabili o per funzionali, notoriamente uno dei temi più vecchi della matematica, ha subito negli ultimi 40 anni un rapido sviluppo senza precedenti, parallelamente a quello dei mezzi per il calcolo automatico. Infatti i modelli di ottimizzazione(*) sono divenuti sempre più un punto di riferimento per le applicazioni della matematica. Ciò è avvenuto non solo per l'ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$, per la quale è stato coniato il termine programmazione matematica(**) a causa delle numerose applicazioni in campo industriale, e dove talvolta il ricorso a questi modelli è risultato addirittura eccessivo, ma anche per problemi di tipo funzionale, come ad es.quelli di controllo ottimale.

All'inizio degli anni '40 la teoria si presentava già molto sviluppata, sia in campo funzionale con i notevoli progressi del Calcolo delle Variazioni, sia per problemi di estremo in $\mathbb{R}^n$. Fondamentali idee, come ad es. quelle di Eulero sulla Teoria dei Grafi (1936), della quale a ragione è considerato il fondatore, e sulle condizioni necessarie nel Calcolo delle Variazioni (1744), quelle di Lagrange sulla teoria dei moltiplicatori (1762), ed altri successivi importanti contributi,come ad es. quelli di Hahn e Banach sulla separazione di insiemi (1900), quello di Pareto sull'estremo vettoriale (1906), quelli di Minkowski sulla convessità (1911), avevano già influenzato gran parte della teoria e delineato il suo attuale assetto. Negli anni '30 nuovi progressi vennero soprattutto come conseguenza del fervore di idee esistente nel Calcolo delle Variazioni; ma vi furono anche idee indipendenti; basti citare quelle di Witney sui matroidi (1935),che stanno influenzando pesantemente la moderna combinatoria; e quelle di von Neumann sulla teoria dei giochi e sulla teoria della dualità (1928, 1947).
Tra le moltissime e fertili idee che nascono, vale la pena di ricordare quelle di

(*) L'uso del termine ottimo per indicare genericamente un massimo od un minimo è stato introdotto da W. Pareto all'inizio di questo secolo.
(**) Introdotto da R. Dorfman all'inizio degli anni '50.

Courant sulla penalizzazione (1943), quelle di G.B. Dantzig col metodo del simplesso (1947), e quelle di Bellman sulla Programmazione Dinamica (1957).

Attualmente, per quanto riguarda la didattica universitaria o post-universitaria, l'ottimizzazione si presenta distribuita in varie discipline ed è contenuta come parte in alcune che ne fanno uso; alcuni argomenti stanno entrando anche nell'insegnamento secondario. Sul versante applicativo è uno dei temi di molti centri di ricerca, uffici, studi e laboratori industriali. Dal punto di vista della ricerca e delle applicazioni tra i settori in più rapido sviluppo vi sono certamente: ottimizzazione combinatoria; sistemi si complementarità, disequazioni variazionali e loro applicazioni ad es. all'ingegneria strutturale ed ai problemi di equilibrio; ottimizzazione non differenziabile e non convessa; studio di sistemi (reti elettriche, di trasporto) di grandi dimensioni. In quest'ultimo argomento, che possiamo solo menzionare, hanno assunto grande importanza i metodi di scomposizione volti a trovare la soluzione di un grosso sistema, risolvendo più sistemi di piccole dimensioni; poichè questi sottoinsiemi sono spesso tra loro indipendenti, si può impostare per essi un calcolo parallelo; dal punto di vista matematico queste cose erano già chiare 30-40 anni fa; i recentissimi mezzi per il calcolo parallelo rappresentano un modo elegante di mettere in pratica le precedenti idee.

2. L'ottimizzazione combinatoria consiste nello studio degli estremi e dei punti di estremo di una funzione definita in uno spazio discreto. Problemi di questo tipo sono tra i più vecchi della matematica; apparsi molto spesso sotto forma di gioco, si sono sviluppati lentamente nell'ambito dell'Algebra e della Teoria dei Numeri, avvalendosi in particolare dell'Analisi Indeterminata. Lo sviluppo è stato relativamente modesto, soprattutto perchè l'attenzione principale negli ultimi tre secoli è stata attirata dall'Analisi Infinitesimale, tanto che alcune questioni di natura combinatoria sono state formulate in modo da poter essere trattate con metodi infinitesimali. Naturalmente in tal modo le difficoltà, fatte uscire dalla porta (cioè in sede di formulazione), rientravano più tardi dalla finestra (cioè in sede di calcolo). Questo avveniva (e purtroppo continua a succedere) una teoria della complessità computazionale, indispensabile almeno in campo combinatorio. Nonostante ciò molte idee fondamentali furono ugualmente gettate, come ad es. quelle ricordate di Eulero e di Witney.

Lo sviluppo dei mezzi di calcolo ed il loro impiego nei campi più disparati sono certamente i responsabili della rapida crescita dell'ottimizzazione combinatoria.

A partire dagli anni '50 c'è una vera e propria corsa a formulare problemi di estremo vincolato in uno spazio discreto. Problemi si pongono nel campo della produzione industriale per l'ottimo sfruttamento delle risorse; le industrie chimiche e quelle dell'acciaio sono tra le prime ad avvantaggiarsi dei metodi di ottimizzazione. L'organizzazione dei mezzi di trasporto, di quelli di comunicazione, del lavoro umano e meccanico risultano una fonte inesauribile di problemi. Il mondo informatico è un'altra fonte di problemi: ad es. la costruzione di sistemi informatici; di banche di dati, la progettazione di reti di calcolatori, la codifica e decodifica delle informazioni e la loro trasmissione, la costruzione di memorie conducono in modo naturale a formulazioni matematiche in uno spazio discreto. Accanto a nuove applicazioni della matematica, come le precedenti, settori tradizionali della matematica applicata, come ad es. l'ingegneria delle strutture ed in particolare il comportamento elasto-plastico delle strutture, vengono affrontati in termini nuovi.

Come in tutte le esaltazioni, la fonte dell'entusiasmo è spesso anche fonte di delusione. La pressante necessità (spesso dovuta a soli fattori commerciali) di dare una risposta ai problemi ha portato, in molti casi, a costruire un programma di calcolo senza avere come base un modello matematico ottenendo quindi un mero programma di gestione input-output; naturalmente questo ha prodotto larga insoddisfazione e creato in certi casi diffidenza verso i modelli matematici, e quindi difficoltà nei rapporti tra istituti di ricerca ed enti che di questa ricerca dovrebbero avvantaggiarsi. Non a caso il progetto di ricerca su "Software di base ed applicazioni" recentemente avviato dal CNR contiene una parte non trascurabile dedicata all'ottimizzazione combinatoria.

Un aspetto importante dell'ottimizzazione combinatoria, finora trascurato, è il suo valore formativo. Considero molto importante il segnale di allarme lanciato nello scorso convegno da Scimemi circa l'assenza dell'aritmetica e, più in generale, della matematica "discreta". La matematica del "discreto" può rappresentare un elemento culturale nuovo capace di dare una "dimensione" in più. A questo proposito si pensi che in questo settore della matematica il concetto stesso di risoluzione di un problema non è più quello classico di una "scatola chiusa" alla quale si danno dei dati per ottenere una risposta (la soluzione).

L'esigenza sempre più pressante di risolvere problemi di natura combinatoria (spesso esistenti anche in problematiche di natura apparentemente non combinatoria) e di trattare numericamente sistemi di grandi dimensioni (come quelli che si incontrano ad es. nel campo delle reti elettriche, delle reti di trasmissione di dati, dei fluidodotti, dei problemi di approssimazione, degli elementi finiti, della programmazione dei trasporti, ecc.), e le difficoltà che si incontrano anche disponendo di calcolatori molto veloci stanno modificando, nel campo dell'ottimizzazione (ma anche altrove), la stessa idea che avevamo di risoluzione di un problema. Tanto per fissare le idee, supponiamo che il problema dato contenga, tra le altre, n incognite binarie, ciascuna delle quali può quindi assumere solo i valori 0 ed 1. Allora il problema può scomporsi in al più 2^n sottoproblemi, fissando in parte (o tutte) le incognite binarie. In altre parole resta definito un albero binario, il cui n-simo livello ha 2^n nodi, al cui generico livello corrisponde un sottoproblema, ed il cui generico arco corrisponde a fissare, in un sottoproblema, un'ulteriore incognita binaria. Un metodo risolutivo praticamente significativo deve evitare di visitare tutti i nodi del livello n-simo (e risolvere i relativi sottoproblemi). Essendo in un generico nodo il metodo risolutivo deve "prendere alcune decisioni": tentare di risolvere il corrispondente sottoproblema con uno o più dei metodi disponibili (in caso di successo si evita di visitare il sottoalbero originato da quel nodo), oppure passare ai nodi di livello superiore (il che si deve fare anche se il tentativo non ha successo; nel qual caso si è perso tempo prezioso). I tentativi per trovare dei criteri rigorosi e generali per prendere tali decisioni ad ogni nodo sono sistematicamente naufragati. Con tali criteri un metodo risolutivo funzionerebbe a scatola chiusa, cioè in senso classico. La convinzione che un tale approccio non abbia senso pratico è ormai diffusa, e l'orientamento è di considerare il metodo risolutivo come un processo interattivo ad apprendimento. Ritornando all'esempio, si suppone che ad ogni nodo sia associato un insieme di alternative possibili sulle quali è assegnata una distribuzione di probabilità; questa si aggiorna (apprendimento) in base all'esperienza fatta su altri nodi dello stesso albero, su quella fatta per risolvere altri problemi dello stesso tipo, ed in base alle indicazioni che possono venire dalle conoscenze che il risolutore ha del particolare problema (interazione). Da notare che, anche non considerando l'interazione, se si esegue un tale metodo 2 volte sugli stessi dati iniziali, non si fanno necessariamente le stesse operazioni, nemmeno in termini probabilistici, poichè le distribuzioni di probabilità possono essere mutate alla seconda esecuzione.

Nell'ottimizzazione combinatoria, a dispetto del gran numero di problemi che attendono una risposta, non c'è ancora una teoria sistematica soddisfacente, e quindi nemmeno un insieme di metodi risolutivi efficienti. Questo, che naturalmente accade da un punto di vista generale, non significa che non vi siano interessanti sviluppi teorici e metodi risolutivi efficienti per più ampie classi di problemi. Alcuni di questi saranno qui descritti, sia pure molto brevemente.

Una classe di problemi di ottimizzazione combinatoria molto studiata è la seguente:

(1) $\min\ [f(x) = \langle c,x\rangle]\quad,\ x \in R:=\{x\in \mathbb{Z}^n_+ : Ax \geq b\}$

ove A è una matrice di ordine $m\times n$, b un m-vettore colonna, c un n-vettore e $\langle\ ,\ \rangle$ denota prodotto scalare; per le applicazioni non è restrittivo supporre che A, B e c siano aritmetici, grazie ad un recente risultato sull'approssimazione del problema (1) avente dati reali mediante problemi ancora del tipo (1), ma con dati razionali. Il problema (1) viene spesso indicato col termine "lineare" a variabili intere, anche se non è affatto lineare, per ricordare che il suo rilassamento ottenuto sostituendo $\mathbb{Z}^n_+$ con $\mathbb{R}^n_+$ è lineare. Ed è proprio questo rilassamento che ha suggerito una delle prime e più fruttuose idee per indagare su (1): quella di iperpiano secante.

Diciamo $P:=\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \geq b\}$ il poliedro che si ottiene effettuando il rilassamento anzidetto, ed indichiamo con conv R l'involucro convesso (che risulta un poliedro) di R. E' immediato osservare che (1) è equivalente a

(2) $\min f(x)\quad,\quad x \in \text{conv}\ R\ ,$

mentre l'estremo di

(3) $\min f(x)\quad,\quad x \in P\ ,$

è solo un confine inferiore di quello di (1) o (2). Se

(4) $P \setminus \text{conv}\ R = \emptyset\quad ,$

allora ovviamente (1) può essere sostituito con (3), per la cui risoluzione esistono metodi efficienti da quasi 40 anni; addirittura recentemente è stato dimostrato che (3) può essere risolto con metodi aventi complessità computazionale polinomiale.

Una prima naturale questione è quella di caratterizzare problemi (1) per i quali la (4) risulti soddisfatta. Ciò è stato fatto, sfruttando le proprietà delle matrici aritmetiche unimodulari, per alcune classi particolari di problemi, quali ad es. quello che esprime il cammino più breve in un grafo, quello che esprime il massimo flusso su una rete, alcuni problemi di assegnazione e di trasporto. In questa direzione vi sono ancora questioni aperte.

Quando la (4) non è verificata,(3) può ancora essere equivalente a (2),ma ciò é difficilmente caratterizzabile (a priori), anche per particolari classi di problemi. Allora l'approccio più naturale è risultato innanzitutto quello di risolvere (3); sia $\bar{x}$ un punto di minimo per (3). Se risulta $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$, allora ovviamente $\bar{x}$ è un punto di minimo anche per (2). In caso contrario si cerca di ridurre $P \setminus \text{conv } R$ nel senso che ora preciseremo. Un iperpiano S° di $\mathbb{R}^n$ è detto <u>secante</u>, se conv R (e quindi R) è contenuto in uno dei semispazi, diciamolo S^+, individuati da S° e se $\bar{x}$ è contenuto nell'interno dell'altro semispazio. Una volta trovato S° il problema

$$(5) \qquad \min f(x) \quad , \quad x \in P \cap S^+ \quad ,$$

è ancora equivalente a (2), ma la sua regione ammissibile è strettamente contenuta in quella di (3) e, soprattutto, non contiene $\bar{x}$, il che, in generale, fa in modo che il minimo di (5) sia maggiore di quello di (3). Ripetendo quanto descritto,si costruisce una successione non decrescente (in generale crescente) di minimi (ed una di punti di minimo), ciascuno dei quali è un confine inferiore per quello di (2). Una prima naturale questione è quella di sapere quando il limite di tale successione è proprio il minimo di (2). Poichè, non solo non si possono risolvere infiniti problemi come (3), ma nemmeno un numero troppo elevato, un'altra questione consiste nel sapere quando la convergenza è finita. Preliminare a tali questioni è quella di saper costruire un iperpiano secante. Una proposta ingegnosa fu fatta nel 1958 da R. Gomory: un iperpiano secante è costruito, sfruttando semplici proprietà della parte intera e della parte frazionaria di un numero; è denominato per questo <u>metodo dalle forme intere</u>.

Gli iperpiani così costruiti hanno dimostrato di possedere proprietà molto importanti; la più significativa è che, muniti della somma vettoriale modulo 1,hanno la struttura di gruppo finito commutativo, che diciamo G. Ciò ha consentito di rispondere ad entrambe le questioni anzidette, nel senso che la convergenza è finita e che il massimo dei minimi dei problemi (3), (5), ... è proprio il minimo di (2).

Questi brillanti risultati hanno permesso di approfondire l'analisi. E' immediato osservare che l'efficienza di un metodo risolutivo basato sugli iperpiani secanti dipende fortemente da ciò che un iperpiano taglia, cioè dall'insieme $P \setminus P \cap S^+$. Il taglio più forte si ha quando $S° \cap P$ è una faccia di dimensione massima di conv R. Poichè ogni elemento dell'anzidetto gruppo G corrisponde ad un iperpiano secante , era naturale chiedersi se, tra gli altri elementi di G, ce ne fosse uno corrispondente ad una faccia di dimensione massima di conv R. Purtroppo tale speranza andò presto delusa. Fortunatamente fu presto chiaro che a base della costruzione del gruppo G vi era la parte frazionaria di un numero, e che questa era una particolare funzione subadditiva.

La questione precedente di caratterizzare le facce, in particolare quella di dimensione massima, del poliedro conv R ha trovato piena risposta circa dieci anni fa nell'ambito degli iperpiani secanti costruiti mediante una funzione subadditiva non negativa (e non più soltanto la parte frazionaria). Questo, che costituisce uno dei risultati più significativi ed eleganti dell'ottimizzazione, è dovuto a R.Gomory e ad altri ricercatori, tra i quali principalmente E.L.Johnson. Tale collegamento tra ottimizzazione combinatoria e teoria dei gruppi ha aperto un'interessante via di ricerca ancora quasi tutta da percorrere; anche l'impiego di tali risultati per produrre metodi risolutivi efficienti è appena all'inizio.

Un altro progresso significativo, verificatosi anche questo negli ultimi 10-15 anni, ma del tutto indipendente da quello sopra descritto, è rappresentato dallo sviluppo della teoria dei matroidi. La sua formulazione risale al 1935 ed è stata data da Witney con lo scopo di generalizzare l'idea di matrice e questioni connesse. Questa forma astratta di matrice è rimasta praticamente inutilizzata per circa 30 anni, fin quando è stata realizzata la sua grande potenzialità per l'ottimizzazione combinatoria. Analizziamo ora brevemente tale definizione.

Siano dati un insieme finito E ed un sottoinsieme $\mathcal{I}$ dell'insieme delle parti di E, tali che:

a) $\emptyset \in \mathcal{I}$;

b) $\forall I \in \mathcal{I}, \quad e \in I \Rightarrow e \in \mathcal{I}$;

c) $\left.\begin{cases} I, J \in \mathcal{I} \\ |I| = |J| + 1 \end{cases}\right. \Rightarrow \exists\, e \in I \setminus J \quad \text{tale che } J + \{e\} \in \mathcal{I}$.

La coppia $M = (E, \mathcal{I})$ è detta <u>matroide</u>. Si noti che gli elementi di E possono essere oggetti qualsiasi. Gli insiemi di $\mathcal{I}$ sono detti insiemi <u>indipendenti</u>; un insieme indipendente I massimale è detto <u>base</u>, e la sua cardinalità <u>rango</u>; un insieme dipendente (cioè non indipendente) è detto <u>circuito</u>.

Un caso particolare è quello in cui E è l'insieme delle colonne di una data matrice A ed $\mathcal{I}$ è l'insieme delle colonne di tutte le collezioni di colonne linearmente indipendenti di A. In tal caso M è detto matroide matrico. Si comincia ad apprezzare la portata delle a), b), c) interpretandole in questo caso: b) significa che una colonna e, facente parte di colonne linearmente indipendenti, non può essere zero; c) significa che, se J ed I sono insiemi di m e rispettivamente m + 1 colonne linearmente indipendenti, allora esiste una colonna dell'insieme I (ma non di J) che forma con quelle di J, colonne linearmente indipendenti.

Un'ulteriore particolarizzazione è quella in cui A, ad elementi 0 e 1 nel campo degli interi modulo 2, è la matrice di incidenza nodi-archi di un grafo G. Gli elementi di E sono archi di G, quelli di $\mathcal{I}$ sono insiemi di archi privi di cicli, cioè alberi o foreste. In tal caso M è detto matroide grafico di G.

L'importanza del concetto di matroide sta nel fatto che esso ha permesso di dare un'impostazione unitaria a molti problemi di ottimizzazione combinatoria, che apparentemente non sembrava avere nulla in comune. Ad es. un problema che si può porre in termini di matroidi è quello che, dato un matroide $M = (E,\mathcal{I})$ ed un peso $w_i \geq 0$ associato ad ogni elemento $e_i \in E$, consiste nel trovare un insieme indipendente (cioè $I \in \mathcal{I}$) di peso totale massimo. Molti problemi di ordinamento (ad es. in lavori industriali), di scelta ottimale di oggetti, posti prima di tale teoria, sono stati inquadrati nel precedente schema generale con i vantaggi facilmente immaginabili.

Un altro problema generale che ci si può porre è quello che, dati i matroidi $M_i = (E,\mathcal{I}_i)$, $i = 1,2,3$, con lo stesso insieme pesato E, consiste nel trovare un insieme indipendente $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3$ di peso massimo. Tale problema, che viene detto dell'intersezione ottimale di matroidi, contiene, come casi particolari, problemi vecchi e ben noti come ad es. quello dell'accoppiamento bipartito in un grafo e del flusso massimo su una rete (per i quali basta considerare l'intersezione di 2 soli matroidi) e quello cosiddetto del commesso viaggiatore (che generalizza un celebre problema di Hamilton sui grafi).

Col concetto di matroide ha fatto notevoli progressi la teoria della dualità in uno spazio discreto. Ad es. è stato possibile generalizzare un recente, ma ormai famoso, teorema di dualità tra flusso su una rete a capacità di una sua sezione (dovuto a Ford e Fulkerson): per ogni coppia di matroidi M_1 ed M_2, la massima cardinalità di un'intersezione uguaglia il rango minimo di una copertura di E (una copertura è definita come una coppia di insiemi E_1 ed E_2, tali che $E_1 \cup E_2 = E$; il suo rango come la somma di quelli di E_1 e di E_2).

Molti ancora sarebbero gli sviluppi interessanti da ricordare; per quanto riguarda poi i metodi risolutivi vi è stato un vero e proprio fiorire di proposte, molte delle quali ingegnose. Non potendo andare in dettagli, mi limito a ricordare il metodo di separazione e valutazione progressiva che, nonostante la sua semplicità, consente spesso di risolvere problemi con qualche migliaio di incognite; i vari metodi per cercare una copertura (od una partizione, oppure una inclusione) di minimo peso, che trova tante applicazioni. Saltando agli ultimi risultati, non si può fare a meno di menzionare due metodi proposti per risolvere in tempo polinomiale un problema di programmazione lineare (PL): quello detto degli ellissoidi proposto da L.G.Khachiyan nel 1979 e quello detto del punto interno proposto da N.Karmarkar nel 1984. In realtà questi metodi servono a trovare una soluzione di un sistema di disuguaglianze strette algebriche lineari - e quindi, tramite il teorema di dualità per un problema di programmazione lineare (PL) - una soluzione anche di un PL. Quello di Khachiyan è stato quindi il primo metodo a risolvere un sistema in tempo polinomiale; tale risultato è notevolissimo, soprattutto se si pensa al gran numero di ricercatori che si sono occupati dell'argomento almeno nei 40 anni precedenti. L'interesse a risolvere sempre più efficientemente un PL proviene innanzitutto dal fatto che molti problemi conducono ad un PL, poi al fatto che un PL è adottato per approssimare un problema non lineare, ed infine dal fatto che, soprattutto in ottimizzazione combinatoria, molti metodi prevedono di risolvere alcuni PL.

3. Per i problemi di minimo vincolato unilaterali differenziabili è ben noto da molto tempo che, sotto opportune ipotesi di regolarità, la funzione (o il vettore delle funzioni) vincolare calcolata in un punto di minimo è ortogonale al moltiplicatore (di Lagrange) associato a tale punto. In tempi recenti tale proprietà è stata dimostrata per classi più generali di problemi. In altre parole, lo studio delle condizioni necessarie del 1° ordine per problemi di minimo vincolato unilaterali (cioè la ricerca di punti stazionari) ha condotto a studiare sistemi nei quali apparivano relazioni di ortogonalità, dette anche di complementarità a causa di un certo significato che acquistano nei metodi risolutivi. Tali sistemi, che hanno assunto negli ultimi 20 anni un'importanza crescente, sono stati chiamati appunto sistemi di complementarità (CS). Nella sua forma più semplice, cioè quella lineare, un sistema di complementarità si scrive così: trovare $z \in \mathbb{R}^n$, tale che

(6) $\quad z \geq 0 \quad ; \quad Mz - q \geq 0 \quad ; \quad \langle z, Mz-q \rangle = 0 \quad ;$

ove M è una matrice quadrata di ordine n e q è un n-vettore.

La condizione del 1° ordine (di tipo lagrangiano, nota come condizione di Karush e di Kuhn-Tucker) per il problema, che consiste nella ricerca del minimo di una forma quadratica (in n variabili) astratta a vincoli lineari, può notoriamente mettersi nella forma (6), cioè i punti stazionari per un tale problema sono soluzioni di un sistema del tipo (6). Se la quadrica è strettamente convessa allora c'è unicità per le soluzioni di (6); se è convessa, M gode di particolari proprietà che facilitano la risoluzione di (6); se non è convessa, la risoluzione efficiente di (6) è una questione ancora aperta; in tal caso sussiste una proprietà insospettata: i valori della quadrica corrispondenti alle soluzioni di (6), cioè ai punti stazionari, sono complanari. Se il problema dato non è quadratico, per studiarne i punti stazionari si giunge ancora ad un sistema come (6), ove naturalmente Mz-q sarà rimpiazzata da una funzione non lineare. In generale un sistema di complementarità si pone in uno spazio di Hilbert:

(7) $\qquad u \in K \quad ; \quad F(u) \in K^* \quad ; \quad (F(u),u) = 0 \quad ;$

dove V^* è il duale di V, K è un cono convesso chiuso di V, K^* il polare di K, ed $F:V \to V^*$.

La ricerca dei punti stazionari, da sola, giustifica il crescente interesse verso i sistemi di complementarità. Infatti, a partire dagli anni '50, si sviluppa una vera e propria teoria; esistenza ed unicità sono le prime cose studiate, e contemporaneamente vengono proposti, a partire dal caso lineare (6), vari metodi risolutivi. Tra i numerosi risultati, molti dei quali pregevoli, vale la pena ricordarne uno recente dovuto a O.L.Mangasarian (1976), che porge una condizione sufficiente affinchè (6) sia equivalente ad un opportuno PL, i cui dati sono facilmente determinati a partire da M e q. Questo implica che un problema quadratico risulta equivalente ad uno lineare, facilmente costruibile con i dati del primo (l'esistenza di un PL equivalente è ovvia ; la determinazione di un PL equivalente è tutt'altro che ovvia).

Parallelamente, ma indipendentemente, è stato posto e studiato un altro problema matematico: determinare una soluzione della disequazione variazionale (VI):

(8) $\qquad u \in K \quad ; \quad a(u,v-u) \geq (f,v-u) \quad , \quad \forall v \in K \quad ,$

dove $a(\cdot,\cdot)$ è una forma bilineare in $V \times V$, ed $f \in V^*$. Le motivazioni allo studio di (7) e di (8) sono analoghe, con la differenza che (7) si è posto essenzialmente per problemi a dimensione finita, mentre (8) è stata originata da problemi a dimensione infinita.

Lo studio di (7) e quello di (8) si sono sviluppati in modo quasi completamente disgiunto, ed anche oggi i collegamenti sono quasi del tutto da scoprire.Per certo si sa che, in condizioni molto generali, (7) ed (8) sono equivalenti. Poichè le proprietà stabilite per (7) e quelle stabilite per (8) sono presumibilmente diverse, un collegamento sistematico dovrebbe portare ad un arricchimento di conoscenze per entrambi i modelli.

Originati da questioni di stazionarietà, sia un CS che un VI, hanno trovato applicazioni come modelli di problemi concreti. Entrambi, indipendentemente, sono risultati la naturale formulazione di problemi di equilibrio (ad es. di una struttura meccanica, di un sistema economico, del flusso su una rete). Quindi problemi,che non sono di ottimizzazione, sono stati formulati come CS o VI; ricordando però l'origine di (7) ed (8) come studio di posizioni di stazionarietà, è venuto naturale chiedersi se esistesse un problema di estremo vincolato, una cui condizione necessaria fosse proprio il CS o la VI; ciò ha condotto all'interessante questione dell'integrazione di un CS o di una VI. Il fatto che un CS ed una VI abbiano trovato applicazione come modelli di situazione di equilibrio non è poi tanto sorprendente, dato che tali situazioni si apparentano con quelle di stazionarietà. Sorprendenti sono invece le applicazioni che dei CS sono state fatte recentemente nel campo dell'ingegneria delle strutture, in particolare per identificare il comportamento elasto-plastico di strutture complesse. Questi studi sono stati condotti negli ultimi 10-15 anni ad opera di G.Maier del Politecnico di Milano e dei suoi collaboratori.

Pur non potendo andare in dettagli è utile vedere anche se brevemente, il ruolo che può giocare un CS come modello di problemi concreti. L'esempio che ora consideriamo è dovuto a G.Maier. Supponiamo di dover costruire un oleodotto sottomarino, che colleghi due punti A e B di due coste prospicienti lo stesso mare. La tubazione (modellata per elementi finiti) può appoggiarsi sul fondo del mare oppure essere sospesa. Per motivi tecnici la curvatura deve stare entro dati limiti e, nelle parti sospese, deve aversi equilibrio meccanico; per rispettare tali vincoli si può essere costretti, in alcuni punti, a scavare il fondo del mare ed, in altri, a costruire dei supporti. Ad ogni nodo i della spezzata si associano alcune variabili; tra queste vi sono le distanze z_i dell'oleodotto dal fondo del mare modificato (la modifica può essere nulla) e la reazione esercitata da tale fondo sulla tubazione. E' evidente che, in condizioni di equilibrio, deve essere $z_i w_i = 0$. E' facile quindi immaginare come il sistema dei vincoli che esprimono un oleodotto in equilibrio possa risultare del tipo (6) o (7). Se poi, come accade in realtà, tra tutti gli oleodotti fisicamente possibili se ne cerca uno di minimo costo, allora si ha un problema di complementarità, cioè un problema di estremo vincolato, ove i vincoli sono espressi da un sistema come (6) oppure (7).

Un'altra classe di problemi di ingegneria delle strutture formulata come problema di complementarità è quella ove compare un materiale avente un comportamen- elasto-plastico, ad es. un traliccio, una volta metallica reticolare, una massa rocciosa ove si scava una galleria; si vogliono appunto identificare parametri caratterizzanti tale comportamento, ad es. col minimo errore. Il fatto che un materiale si trova o in regime di elasticità oppure in regime di plasticità, ma non in entrambi, è stato formulato da Maier mediante due grandezze ortogonali, ottenendo quindi un CS.

4. Un altro settore dell'ottimizzazione dove si sono registrati notevoli progressi è quello dei problemi non differenziabili. Problemi con funzioni non differenziabili esistevano da tempo. Ad es. uno dei più noti è quello di Chebyshev per approssimare una funzione f continua su un compatto X, mediante una combinazione lineare di funzioni $g_1,\dots,g_m$ dello stesso tipo; si tratta di trovare i combinatori $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ in modo da minimizzare la funzione non differenziabile:

$$\max_{x\in X} \; f(x)-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x) \quad . \tag{9}$$

In tale problema la funzione da minimizzare è non differenziabile. Il problema precedente rientra nella classe più ampia di problemi nei quali la funzione da minimizzare è definita come il massimo di una collezione di funzioni; anche se queste sono differenziabili, il massimo non lo è necessariamente. Problemi di questo tipo sono emersi nella tecnica, nella progettazione industriale, nell'economia, nei controlli, nella statistica.

Un'altra fonte di problemi differenziabili è l'uso crescente dei cosiddetti metodi di penalizzazione (esatta), entrati recentemente anche nell'ottimizzazione a dimensione infinita. Con tali metodi si aggiunge alla funzione da minimizzare originaria soggetta a vincoli un termine, detto appunto penalizzazione, e definito tramite le funzioni vincolari in modo che il minimo della risultante funzione uguagli quello della funzione data. Si ha il vantaggio di risolvere un problema libero, anzichè vincolato; lo svantaggio è dato dal fatto che spesso la funzione penalizzata

non è differenziabile, anche se tutte le funzioni date lo sono.

Sullo stimolo di queste situazioni ove apparivano punti di discontinuità, a partire dai primi anni '60 si è andata sviluppando un'analisi non differenziabile. I primi concetti che richiedevano una generalizzazione erano naturalmente quelli di derivata direzionale, gradiente, differenziale, di punto stazionario; lo scopo era quello di scrivere condizioni necessarie del 1° ordine e di ordine superiore, condizioni sufficienti affinchè un punto fosse di minimo. Lavoro pionieristico è stato svolto da J.Moreau, R.T.Rockafellar, F.H.Clarke, e, in particolare per le derivate direzionali, da Danskin e Dem'ianov. Per quanto riguarda le condizioni necessarie un risultato notevole è costituito dal principio del massimo stabilito da Pontryagin dal quale è possibile dedurre, come casi particolari, sia il teorema di Lagrange sui massimi e minimi in $\mathbb{R}^n$, sia il teorema di Eulero per il Calcolo delle Variazioni. In questo campo le ricerche sono solo agli inizi, anche se, per ampie classi di funzioni, esistono già risultati di notevole portata. Vale la pena di ricordare il contributo di Clarke alla generalizzazione del concetto di derivata direzionale, in quanto è quello che finora ha influenzato di più lo sviluppo dell'ottimizzazione non differenziabile. Dato uno spazio di Banach X ed una funzione $f\colon X\to\mathbb{R}$ localmente lipschitziana, la sua derivata direzionale generalizzata in x e nella direzione d è definita da Clarke nel modo seguente:

$$f^\circ(x;d):=\limsup_{\substack{h\to 0\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda}\,[f(x+h+\lambda d)-f(x+h)].$$

Questa funzione gode di molte ed interessanti proprietà, ad es. è convessa; questa proprietà ha consentito di definire il sottogradiente, e quindi il sottodifferenziale (generalizzati), utilizzando semplicemente la nozione di sottodifferenziale per le funzioni convesse. Se f è convessa oppure C^1, allora f° coincide rispettivamente con l'ordinaria derivata direzionale.

Mediante la precedente nozione, è stato possibile generalizzare molti dei concetti e delle proprietà del caso differenziabile; in particolare la condizione del 1° ordine di tipo lagrangiano.

Quando le funzioni non sono lipschitziane, o addirittura sono discontinue, le questioni anzidette sono ancora del tutto aperte. Da notare che, col caso discontinuo, ci si collega con le analoghe questioni, anch'esse tuttora aperte, dell'ottimizzazione combinatoria.

Infine accenno alla crescente influenza che il concetto di multifunzione ha su vari campi dell'ottimizzazione. Ad es. nella teoria della perturbazione per studiare le proprietà dei punti di minimo e del minimo del problema

$$\min f(x), \quad x \in F(\varepsilon) := \{ x \in X : g(x) \geq \varepsilon \} ,$$

dove $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}^m$, é dove ε è considerato un parametro, è utile introdurre la multifunzione $F: X \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $F(x)$ essendo appunto la regione ammissibile precedente. Un'altra applicazione si ha ai problemi del tipo geodetica, cioè problemi nei quali vi sono vincoli ad.es. del tipo seguente:

$$g(t,x(t)) \geq 0 \quad , \quad \forall t \in [a,b] \quad ,$$

ove l'incognita $x(t) \in C^k[a,b]$. In tal caso una multifunzione può introdursi, ponendo

$$F(x) := \{y : \exists t \in [a,b] \text{ per cui } y=g(t,x(t))\} .$$

In tal modo si esprime in forma assai generale la teoria dei moltiplicatori di Lagrange.

Una multifunzione $F: X \to 2^Y$ è detta ventaglio, se è omogenea, cioè tale che

$$0 \in F(0) \quad ; \quad F(\lambda x) = \lambda F(x) \quad , \quad \forall \lambda > 0 \quad , \quad \forall x \in X ,$$

se ogni $F(x)$ è convesso, e se inoltre risulta (la sopralineatura indica chiusura):

$$F(x+y) \subseteq \overline{F(x)+F(y)} \quad , \quad \forall x,y \in X .$$

Questa particolare classe di multifunzioni si è rivelata molto utile in vari settori dell'ottimizzazione, come ad es. nello studio di condizioni necessarie.

BIBLIOGRAFIA

(1) Le riviste: "Mathematical Programming" della North-Holland; "Journal of Optimization Theory and Applications" della Pergamon Press; "Discrete Mathematics" e "Discrete Applied Mathematics"della North-Holland; "SIAM Jou. on Applied Mathematics".

(2) A.Bachem, M.Grötschel, B.Korte (eds.): "Mathematical Programming. The state of the art". Springer-Verlag, 1983.

(3) C.Baiocchi e Capelo: "Disequazioni Variazionali". Quaderni UMI.

(4) F.H.Clarke: "Optimization and non-smooth analysis". Wiley, 1984.

(5) M.Z.Cohn, G.Maier (eds.): "Engineering plasticity by Mathematical Programming". Pergamon Press, 1979.

(6) R.Conti: "Problemi di controllo e di controllo ottimale", UTET, 1974.

(7) R.Conti et al. (eds.): "Optimization and related fields". Springer-Verlag, 1986.

(8) R.W.Cottle et al. (eds.): "Variational inequalities and complementarity problems". Wiley, 1980.

(9) A.Y.Dubovitskii and A.A.Milyutin: "The extremum problem in the presence of constraints". Doklady Akademii Nauk SSSR, Vol.149, pp.759-762.

(10) R.E.Gomory: "Some polyhedra related to Combinatorial problems". Linear Algebra and its Applications, Vol.2, 1969, pp.451-558.

(11) N.Kamarkar: "A new polinomial time algorithm for linear programming". Proc. of the 16th Annual ACM Symp. on the theory of Computing, 1984, pp.302-311.

(12) L.G.Khachiyan: "A polynomial algorithm for linear programming". Soviet Math. Doklady, 20, 1979, pp.191-194.

(13) N.Z.Shor: "Minimization Methods for non-differentiable functions". Springer-Verlag, 1985.

(14) A.D.Ioffe: "Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable mappings". Transactions Am. Math. Soc., Vol.266, B.1, 1981, pp.1-56.

Milvio Capovani

Dipartimento di Informatica - Pisa

Matematica numerica e calcolatori[1]

La matematica interviene, in modi diversi, in molti settori della scienza e della tecnica. Risultati matematici, anche se astratti, possono essere utilizzati per la risoluzione di problemi che si incontrano in natura. D'altra parte complessi problemi naturali stimolano l'invenzione di nuove idee matematiche. In questo rapporto fra matematica e natura si inserisce in modo determinante il calcolatore.

Lo sviluppo delle conoscenze tecnico-scientifiche dipende in gran parte dalla capacità di esplorare complessi problemi con metodologie matematiche. Durante questo secolo modelli e metodi matematici avanzati sono stati sempre più diffusamente usati in molti settori della scienza e della tecnica come per esempio in medicina, biologia, economia, scienze sociali, meteorologia, astrofisica, elaborazione di segnali, ecc.

Queste aree, che generalmente hanno in comune la necessità di risolvere problemi complessi, come ad esempio il calcolo approssimato della soluzione di sistemi di equazioni differenziali presentano la caratteristica comune che, quando il fenomeno esaminato diventa più complesso, o il modello per descrivere questo è più raffinato, e quindi più aderente al problema reale, la complessità di calcolo, con tutti gli inconvenienti connessi, aumenta drasticamente.

Queste applicazioni della matematica conducono in alcuni casi a problemi che, nella loro formulazione completa, non possono essere risolti con formule esatte (ad esempio la soluzione non è esprimibile esplicitamente in termini di funzioni o di operazioni elementari, come nel calcolo degli zeri di un polinomio di grado maggiore o uguale a 5). In altri casi l'espressione esplicita della soluzione non ne permette un agevole calcolo effettivo. In tali situazioni occorre individuare adeguati metodi computazionali per approssimare numericamente la soluzione. Quindi un problema,

---

(1)- Parte di questo articolo è anche contenuta nel libro "Introduzione alla Matematica Computazionale" di R.Bevilacqua, D.Bini, M.Capovani, O.Menchi, pubblicato dalla Zanichelli.

che nella formulazione originale non è risolubile analiticamente, o la cui soluzione analitica non è di agevole calcolo, può essere trattato numericamente.

L'introduzione dei calcolatori, con i quali è possibile effettuare molte operazioni in poco tempo, ha imposto e accentuato lo sviluppo della *analisi e sintesi di metodi computazionali per lo studio e la risoluzione di problemi matematici*, parte centrale della *Matematica Numerica*. Una delle principali caratteristiche degli attuali calcolatori è quella della rapidità di elaborazione: in pochi giorni in un calcolatore può essere sviluppata una mole di calcoli confrontabile con quella effettuata dall'origine dell'umanità fino all'avvento di queste macchine. Ciò ha reso possibile affrontare e risolvere problemi sempre più complessi e di grandi dimensioni aprendo nuovi settori di indagine quale quello della individuazione della *complessità intrinseca* di un problema o della analisi della *stabilità numerica* di un metodo computazionale o dell'analisi del *condizionamento* del problema stesso. Lo sviluppo conseguente che ha avuto la matematica numerica, oltre che portare ad un interesse maggiore per l'analisi di metodi computazionali noti, ha consentito di individuare e mettere a punto nuovi metodi computazionali per trattare numericamente, in modo efficiente, diversi problemi matematici.

Occorre però sottolineare che, senza una profonda conoscenza delle metodologie matematiche, l'uso dei calcolatori per affrontare e risolvere problemi tecnico-scientifici può presentare grosse difficoltà. Utilizzando il calcolatore nella risoluzione di problemi, incertezze ed errori sono generalmente sempre presenti perchè introdotti a vari livelli: nella formulazione del modello matematico che descrive il fenomeno esaminato, nell'associato modello numerico, nella individuazione dei metodi per risolvere il problema numerico, nella implementazione degli algoritmi e infine nella realizzazione e sviluppo del relativo software. Infatti la descrizione matematica di un fenomeno, anche per la sua complessità, non sempre può essere esatta, cioè completamente aderente al fenomeno stesso, così come può non essere, in generale, perfetto l'associato modello numerico. Quindi già in questa fase sono presenti incertezze e sono introdotti errori. Inoltre anche la costruzione del metodo di risoluzione presenta, in generale, grosse difficoltà. Questo dipende anche dal fatto che nel calcolatore i dati sono rappresentati in modo approssimato ed ogni operazione aritmetica produce in generale errori, in quanto i calcolatori operano con un'aritmetica finita.

Infine l'implementazione, con la realizzazione del relativo software, degli algoritmi che scaturiscono dai metodi per trattare il modello numerico associato al mo dello matematico, può presentare varie difficoltà generate dal tipo di linguaggio usato, dalle architetture dei sistemi di calcolo e dai sistemi operativi e dal tipo di utilizzatori. Inoltre gli algoritmi utilizzati devono essere tali da poter essere eseguiti in tempi accettabili, cioè a basso costo di esecuzione. Generalmente per misurare il costo di esecuzione di un programma che implementa un algoritmo si tiene conto del tempo richiesto per risolvere il problema o dello spazio di memoria necessario per tale esecuzione.

Con l'avvento dei, così detti, supercalcolatori alcuni dei problemi sopra accennati stanno diventando sempre più importanti e di più complessa risoluzione e tale risoluzione può essere ottenuta solo con una maggiore utilizzazione delle più avanzate metodologie offerte dalla matematica. L'analisi e la sintesi di algoritmi numerici, e la loro implementazione, con la realizzazione del relativo software avranno sempre più consistenti sviluppi.

E' opportuno rilevare infine che se da una parte la matematica è stata determinante per lo sviluppo dei calcolatori, dall'altra l'ampia utilizzazione di questi ha generato una profonda influenza in alcuni settori di questa disciplina, imponendo anche nuovi e approfonditi studi nel complesso e delicato campo della matematica costruttiva. Per lo sviluppo delle conoscenze in questo campo il contributo della matematica numerica sarà determinante. l'individuazione di metodi efficienti per risolvere problemi può portare vantaggi molto più consistenti di quelli indotti dagli sviluppi della tecnologia dei calcolatori, come quelli che consentono una maggiore velocità di elaborazione e una maggiore disponibilità di memoria.

Sorgenti di errore e stabilità numerica

Il calcolatore, essendo una macchina *finita*, deve operare con numeri rappresentati in base con un numero *finito* di cifre; ad esempio non può trattare numeri reali come π o $\sqrt{2}$, che hanno una rappresentazione in base con infinite cifre, se non commettendo un errore. Lo stesso problema si presenta anche non numeri razionali la cui rappresentazione in base ha uno sviluppo periodico, come ad esempio, in base 10, $1/3=0.333...$ Anche in questo caso il numero può essere trattato solo troncando lo sviluppo e quindi commettendo un errore.

La presenza degli errori dovuti alla rappresentazione con un numero finito di cifre è un fatto acquisito quando si opera con certi calcolatori tascabili che impiegano una aritmetica decimale; così che non ci si meraviglia più di fronte a risultati quali

$$(1/3)\times 3 = 0.99999999 \quad .$$

Il controllo degli errori introdotti dall'uso di una rappresentazione numerica con un numero finito di cifre è molto importante al fine di determinare la attendibilità del risultato ottenuto col calcolatore.

Nella maggior parte dei calcolatori la rappresentazione interna dei numeri viene fatta in base 2 o in base 16; mentre nei dispositivi di uscita (schermo, stampante ecc.), i numeri vengono di solito mostrati nella loro rappresentazione in base 10.

Poichè l'insieme dei numeri rappresentabili sul calcolatore è un insieme finito non tutti i numeri sono rappresentabili in modo esatto e, in particolare, non potranno essere rappresentati numeri arbitrariamente grandi o arbitrariamente piccoli. A causa di questa limitazione talvolta l'elaborazione può essere interrotta perchè si è verificata una situazione di *overflow*, con generazione di risultati intermedi di modulo troppo elevato, o di *underflow*, con generazione di risultati intermedi di modulo troppo piccolo.

E' evidente come l'uso di una aritmetica finita, per il numero finito di cifre utilizzabile, introduce errori anche nell'esecuzione delle operazioni aritmetiche e per poter valutare la attendibilità del risultato occorre quindi poter controllare la propagazione di tali errori.

I seguenti esempi mostrano come la propagazione degli errori dovuta alla rappresentazione finita e all'uso di una aritmetica finita possa alterare il risultato al di là di ogni ragionevole previsione.

In tutti questi esempi si è utilizzato un calcolatore (Commodore 64) con una rappresentazione interna in base 2 con 32 cifre, corrispondenti a circa 9 cifre decimali.

ESEMPIO 1. La seguente identità è ovvia in aritmetica esatta

$$(1 + 0.0000001) - 1 = 0.0000001 \ .$$

Se le operazioni a primo membro sono eseguite col calcolatore si ottiene invece il valore

$$1.00117177 \times 10^{-7} \ . \qquad \square$$

ESEMPIO 2. Siano ε un numero reale positivo e $a=(1+\varepsilon)$ e si calcoli mediante il calcolatore la quantità $b=a^2-1$. Il valore di b è in effetti dato da $2\varepsilon + \varepsilon^2$. Scegliendo $\varepsilon = 10^{-7}$, il valore di b dovrebbe essere

$$b = 2\varepsilon + \varepsilon^2 = 2.0000001 \times 10^{-7} \ ,$$

mentre il risultato fornito dal calcolatore è

$$1.49477273 \times 10^{-7} \quad .$$ □

ESEMPIO 3. Siano p un numero reale non nullo e $b=(p^2+1)/p$. Le soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione di secondo grado

$$x^2-bx+1=0 \quad ,$$

possono essere calcolate con la formula

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4}}{2} \quad .$$

I risultati x_1' e x_2' effettivamente ottenuti col calcolatore mediante tale formula sono riportati nella tabella seguente, a confronto con i valori p e 1/p che sono lo soluzioni esatte dell'equazione.

b	p	1/p	x_1'	x_2'
1000.001	1000	0.001	1000	$9.99689103 \times 10^{-4}$
10000.0001	10000	0.0001	10000	$9.72747803 \times 10^{-5}$
50000.00002	50000	0.00002	50000	$7.62939453 \times 10^{-6}$

Si osservi che, mentre la soluzione calcolata x_1' non è affetta da errore, la seconda soluzione contiene un errore che cresce al crescere di p. Per p=50000 nessuna cifra del risultato x_2' fornito dal calcolatore è corretta. Calcolando invece la soluzione x_2 mediante la formula $x_2 = 1/x_1$, infatti il prodotto delle radici è 1, il calcolatore avrebbe fornito il risultato corretto nei tre casi esaminati. □

ESEMPIO 4. Si supponga di voler utilizzare il calcolatore per avere delle indicazioni sul valore del limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad , \quad f(x) = x(\sqrt{x^2+1} - x) \quad , \tag{1}$$

calcolando il valore di f(x) per valori "grandi" di x.

Si osservi che la funzione f(x) data in (1) può essere così riscritta

$$f(x) = x/(\sqrt{x^2+1} + x) \tag{2}$$

E' quindi possibile calcolare f(x) con due formule diverse, la (1) e la (2). Nella tabella che segue sono riportati i valori r_1 e r_2 forniti dal calcolatore calcolando f(x) rispettivamente mediante le formule (1) e (2).

x	r_1	r_2
10^4	0.534057617	0.49999999
10^6	976.5625	0.5
10^8	9375000	0.5

Le informazioni ottenute sono ovviamente discordanti: secondo i risultati r_1, ottenuti con la formula in (1), si potrebbe dedurre che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad ,$$

secondo i risultati r_2, ottenuti applicando (2), si potrebbe dedurre che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1/2 \quad .$$

ESEMPIO 5. Dato lo sviluppo in serie di e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{3}$$

si calcolino quante più cifre è possibile di e^{-13}. Si possono utilizzare due formule:

$$e^{-13} = 1 - 13 + \frac{13^2}{2!} - \frac{13^3}{3!} + \frac{13^4}{4!} \ldots \tag{4}$$

ottenuta dalla (3) con x = -13, e

$$e^{-13} = 1/e^{13} = 1/(1 + 13 + \frac{13^2}{2!} + \frac{13^3}{3!} + \frac{13^4}{4!} + ..) , \tag{5}$$

nella tabella che segue sono riportati i risultati r_1, rispettivamente r_2, forniti dal calcolatore sommando n termini della formula (4) e della formula (5).

n	r_1	r_2
30	2.93783393	$2.26036459 \times 10^{-6}$
40	$9.37448635 \times 10^{-5}$	$2.26032941 \times 10^{-6}$
50	$-1.32982788 \times 10^{-5}$	$2.26032941 \times 10^{-6}$
58	$-1.32986125 \times 10^{-5}$	$2.26032941 \times 10^{-6}$
59	$-1.32986125 \times 10^{-5}$	$2.26032941 \times 10^{-6}$
60	$-1.32986125 \times 10^{-5}$	$2.26032941 \times 10^{-6}$

Il risultato ottenuto col primo metodo si stabilizza attorno alla 58-esima iterazione sul valore $-1.32986125 \times 10^{-5}$, mentre il risultato ottenuto col secondo metodo si stabilizza, attorno alla 40-esima iterazione sul valore $2.26032941 \times \times 10^{-6}$. Poichè e^{-13} è un numero positivo, il metodo che si basa sulla (4) fornisce un risultato completamente inattendibile. Invece il valore ottenuto col secondo metodo risulta avere 9 cifre decimali corrette. □

ESEMPIO 6. Se f(x) è una funzione derivabile allora vale

$$\lim_{h\to 0} (f(x+h)-f(x))/h = f'(x) \; ,$$

ed è quindi possibile approssimare il valore di f(x) col rapporto incrementale

$$(f(x+h)-f(x))/h \tag{6}$$

per valori "piccoli" di h. Supponendo $f(x)=x^2$, e quindi $f'(x)=2x$, se si approssima $f'(x)$ per $x=1$, utilizzando la (6), per $h=10^{-p}$, $p=1,2,\ldots,8$, si ottengono i valori

p	
1	2.1
2	2.00999999
3	2.0010001
4	2.00009905
5	2.00001523
6	1.99954957
7	1.49942935
8	1.49011612

Si osservi che per $p > 5$ i valori ottenuti si discostano dal valore della derivata che è 2.

Se inoltre f(x) è derivabile 3 volte con continuità allora dallo sviluppo in serie di Taylor di f(x) si ha

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+(h^2/2)f''(x)+(h^3/6)f'''(\xi), \quad x < \xi < x+h \; ,$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+(h^2/2)f''(x)-(h^3/6)f'''(\eta), \quad x-h < \eta < x \; ,$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ha

$$f(x)=(f(x+h)-f(x-h))/(2h)-(h^2/12)(f'''(\xi)+f'''(\eta)).$$

Si ottiene quindi una formula per approssimare $f'(x)$ a meno di un errore che tende a zero col quadrato di h.

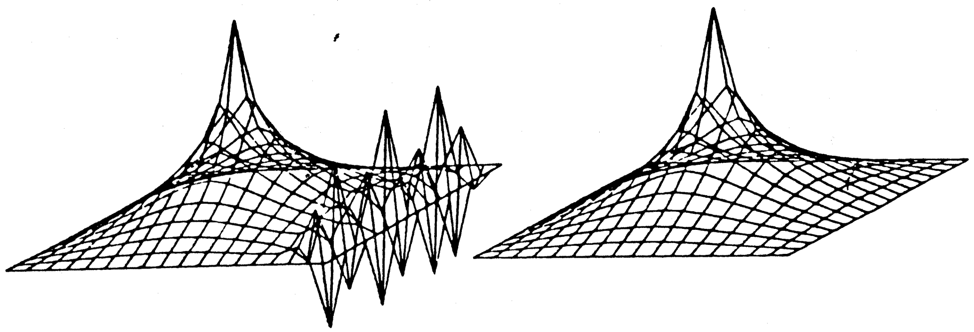
Se $f(x)=x^2$, poichè $f''(x)=2$, la formula precedente permette di calcolare esattamente $f'(x)$ per qualunque valore di $h \neq 0$, vale infatti $f'(x) = 2x = ((x+h)^2 - - (x-h)^2)/(2h)$.

Si riportano i valori effettivamente ottenuti calcolando tale espressione per $x=1$ e $h=10^{-p}$, $p=1,2,\ldots,8$.

p	
1	1.99999999
2	2.00000002
3	1.99999984
4	2.00000065
5	1.99977785
6	1.74913112
7	1.74559318
8	1.66346581

□

ESEMPIO 7. Si voglia determinare la deformazione di una membrana elastica vincolata al bordo di un quadrato e soggetta a forze trasversali. Tale problema è matematicamente descritto da una equazione differenziale alle derivate parziali (equazione di Poisson) la cui soluzione può essere approssimata attraverso la risoluzione di un sistema di equazioni lineari. Esistono vari metodi per risolvere tale sistema con basso costo computazionale. I grafici seguenti mostrano le soluzioni, nel caso in cui sia applicata una forza concentrata al centro del quadrato e il sistema, costituito da 256 equazioni con 256 incognite, venga risolto rispettivamente col metodo di "marching" e col metodo "analisi di Fourier".



Mentre nel secondo caso la membrana risulta deformata in misura maggiore nel centro del quadrato, nel primo caso sono presenti deformazioni anche in prossimità di un lato del quadrato. Ciò è dovuto al fatto che il metodo di "marching" è numericamente instabile, infatti si può dimostrare che l'errore numerico generato cresce esponenzialmente col numero delle incognite del sistema, e si accumula maggiormente sulle ultime incognite calcolate che sono quelle che determinano lo spostamento dei punti vicini ad un lato del quadrato.

Il fenomeno della cancellazione numerica(1) sta alla base della maggior parte dei fenomeni di instabilità numerica illustrati dagli esempi precedenti. In particolare, per quanto riguarda il problema del calcolo delle radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, mediante la formula

$$x_1=(-b+\sqrt{b^2-4ac})/(2a), \quad x_2=(-b-\sqrt{b^2-4ac})/(2a) .$$

(vedi esempio 3), si può presentare cancellazione nel calcolo di x_1 se $\sqrt{b^2-4ac} \sim b$, o nel calcolo di x_2 se $\sqrt{b^2-4ac} \sim -b$. Nel primo caso, calcolato x_2, è conveniente calcolare x_2 mediante la formula $x_2=c/(ax_1)$.

(1)- L'amplificazione dell'errore generato dalla addizione di numeri, in valore assoluto confrontabili, di segno discorde (dalla sottrazione di numeri, in valore assoluto confrontabili, di segno concorde) corrisponde nella rappresentazione di base, ad effettuare una sottrazione di numeri dello stesso segno con molte cifre significative uguali che si cancellano a due a due.

Nell'esempio 4, nel calcolo della funzione

$$f(x) = x(\sqrt{x^2+1} -x)$$

si presenta cancellazione se x assume valori "grandi" per i quali $x^2+1\sim x$, e l'errore di cancellazione viene poi ulteriormente amplificato nella moltiplicazione per x. Usando invece la formula (2) non si presenta cancellazione, quindi la formula (2) è numericamente più stabile.

Nell'esempio 5, utilizzando la serie a segni alterni (4), si ha cancellazione.

Nell'esempio 6 del calcolo della derivata di $f(x)=x^2$ nel punto $x=1$, mediante il rapporto incrementale $(f(x+h)-f(x))/h$, si ha cancellazione per valori piccoli di h. L'errore generato dalla rappresentazione in base con un numero finito di cifre e dalla aritmetica in virgola mobile ha dunque un andamento opposto all'errore analitico che tende a zero con h.

Da questi esempi risulta che l'errore, generato dalla rappresentazione in base con un numero finito di cifre e dall'uso di una aritmetica finita, può essere così elevato da togliere ogni validità ai risultati calcolati ed è quindi importante riuscire a controllarne e valutarne la propagazione. Si è visto anche che, utilizzando un procedimento di calcolo diverso, è possibile contenere ragionevolmente tali errori. Esistono quindi, per uno stesso problema, procedimenti di calcolo (*algoritmi*) che possono essere affetti in misura diversa dagli errori. In questi esempi elementari è stato facile distinguere gli algoritmi *numericamente instabili*, ossia quelli per cui si presenta una elevata propagazione dell'errore, da quelli *numericamente stabili* essendo note, fra l'altro, proprietà della soluzione. In generale nei problemi concreti ciò non è ovviamente facile ed è quindi molto importante essere in grado di stabilire a priori se un dato algoritmo è numericamente stabile o instabile.

Negli esempi precedenti si è visto che per uno stesso problema esistono procedimenti di risoluzione che producono un maggiore o minore errore algoritmico. Esistono cioè algoritmi più stabili e algoritmi meno stabili.

Esistono però problemi tali che, qualunque algoritmo venga utilizzato per risolverli, l'errore che viene indotto nel risultato è elevato e talvolta tale da renderlo privo di significato. L'instabilità, in questi casi, sembra essere una particolarità intrinseca di questi problemi non dipendente dagli algoritmi utilizzati. Questi problemi sono detti *mal condizionati*. Nei problemi mal condizionati piccole variazioni nei dati inducono grosse variazioni nei risultati. In questi casi già la inevitabile perturbazione dei dati, dovuta alla rappresentazione finita in base, genera errori elevati nei risultati indipendentemente dagli algoritmi utilizzati.

Un modo di misurare il condizionamento di un problema consiste nel valutare il quoziente r/d dove r è la variazione percentuale del risultato se il dato ha subito una variazione percentuale d.

Si consideri ad esempio il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 1001x + 1000y = 2001 \end{cases} \qquad (7)$$

che ha la soluzione x = 1, y = 1. Si alteri il coefficiente della x, nella prima equazione, del 1%, ossia si consideri il nuovo sistema perturbato

$$\begin{cases} (1+1/100)x + y = 2 \\ 1001x + 1000y = 2001 \end{cases}$$

che ha soluzione x = -1/9, y = 1901/900. La soluzione di questo presenta, rispetto alla soluzione del sistema non perturbato, una variazione maggiore del 110% sia nella x che nella y. Il condizionamento del problema (7) è dunque maggiore di 110. Un eventuale errore presente nei dati di questo problema verrebbe amplificato più di 110 volte.

La natura del mal condizionamento del problema precedente può essere evidenziata mediante l'interpretazione geometrica delle rette tracciate con linea continua. La soluzione del sistema è data dalle coordinate della intersezione di queste. Le due rette formano tra loro un angolo molto piccolo e perturbando la prima equazione, pur alterandosi di poco la posizione della prima retta, ottenendo la retta tratteggiata nella figura 2, cambia molto la posizione del punto intersezione e quindi le coordinate di questo che sono le soluzioni del sistema perturbato.

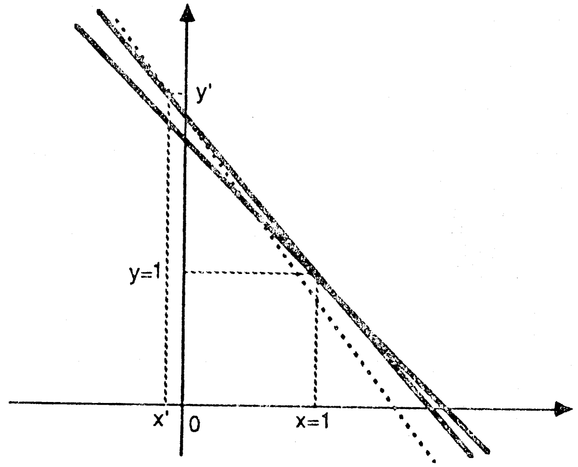


Fig.2 - Interpretazione geometrica del mal condizionamento di un sistema lineare

Il quoziente r/d, dove r è la variazione relativa nel risultato causata dalla variazione relativa d del dato di un problema P, è detto *numero di condizionamento* di P. Ad esempio, indicato con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, se il problema consiste nel calcolare il valore che una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ assume in un punto $x \neq 0$ tale che $f(x) \neq 0$, allora perturbando il dato in x+h si ha una variazione relativa d=h/x che induce la variazione relativa nel risultato r=(f(x+h)-f(x))/f(x). Il numero di condizionamento del problema, relativo al punto x e alla perturbazione h è dato da

$$\frac{|(f(x+h)-f(x))/f(x)|}{|h/x|}$$

Se la funzione f(x) è derivabile, passando al limite per $h\to 0$ si ha la quantità

$$C(f,x) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|} ,$$

che non dipende dall'incremento h della variazione del dato.

Si osservi che, se C(f,x) < 1 allora la variazione relativa nel risultato è inferiore alla variazione relativa nel dato. Cioè il problema è poco sensibile agli errori di rappresentazione del dato. Viceversa se $C(f,x) > 1$ allora piccole perturbazioni nel dato si ritrovano amplificate nel risultato. La quantità $C(f,x)$ è anche detta *fattore di amplificazione* della funzione f relativa al punto x.

Risorse di calcolo e complessità

Utilizzando un numero maggiore di cifre nella rappresentazione in base si può ridurre l'errore di rappresentazione e l'errore dovuto all'uso di una aritmetica finita. Si presentano però due inconvenienti: per memorizzare un numero occorre una maggior quantità di memoria con conseguente riduzione delle dimensioni massime dei problemi trattabili; inoltre il tempo necessario per eseguire una moltiplicazione fra due numeri aumenterebbe in modo quadratico all'aumentare del numero delle cifre con conseguente notevole aumento del tempo di elaborazione.

Sul calcolatore una moltiplicazione viene normalmente eseguita con un metodo analogo a quello usato nel calcolo "con carta e penna" di un prodotto di due numeri di n cifre decimali che richiede n^2 moltiplicazioni di numeri di una cifra. Quindi raddoppiando il numero di cifre risulta quadruplicato il tempo richiesto per ogni moltiplicazione: se ad esempio un personal computer esegue 200 moltiplicazioni al secondo, raddoppiando il numero di cifre eseguirà solamente 50 moltiplicazione al secondo.

L'uso di un numero maggiore di cifre per contenere la propagazione degli errori comporta quindi un impiego maggiore delle risorse "quantità di memoria" e "tempo di elaborazione". Nel caso dell'esempio 7, dove l'errore numerico cresce esponenzialmente con la dimensione del problema, l'aumento del numero di cifre non fornisce alcun concreto vantaggio nella riduzione dell'errore. Esistono comunque molti casi in cui questo approccio consente un contenimento dell'errore. E' per questo che su gran parte dei calcolatori è data la possibilità di utilizzare la "precisione semplice", in cui la rappresentazione in base è fatta con un numero standard di cifre, e la "precisione doppia" in cui la rappresentazione in base avviene con un numero all'incirca doppio di cifre.

Per questo è fondamentale una accorta scelta del metodo di risoluzione che consenta una migliore utilizzazione delle risorse tempo di elaborazione e quantità di memoria permettendo così di trattare anche problemi di elevate dimensioni.

Si consideri ad esempio il problema della risoluzione di un sistema d n equazioni lineari in n incognite

$$Ax = b \ ,$$

dove A è una matrice $n \times n$ non singolare di elementi $a_{i,j}$, $x=(x_i)$ è il vettore delle incognite e $b=(b_i)$ è il vettore dei termini noti. In componenti si ha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \ .$$

Un metodo di risoluzione consiste nell'applicare la regola di Cramer mediante la quale le soluzioni vengono espresse come quozienti di determinanti di matrici $n \times n$

$$x_j = \det(A_j)/\det(A) \ , \quad j=1,2,\ldots,n \ ,$$

dove A_j è la matrice ottenuta dalla matrice A sostituendo la j-esima colonna col vettore b. Tali determinanti possono essere calcolati utilizzando la regola di Laplace attraverso lo sviluppo per righe

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}) \ ,$$

dove $A_{1,j}$ è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A eliminando la prima riga e la j-esima colonna. In tal modo un determinante di una matrice $n \times n$ viene espresso come combinazione lineare di n determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$. Se C_n denota il numero di moltiplicazioni richieste per il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ con la regola di Laplace, si ha allora la relazione

$$C_n = nC_{n-1} + n \geq nC_{n-1} \ ,$$

$$C_2 = 2 \ ,$$

da cui $C_n \geq n \times (n-1) \times \ldots \times 2 = n!$. Quindi risolvere un sistema di n equazioni ed n incognite col metodo di Cramer costa almeno $(n+1)!$ moltiplicazioni.

Se il sistema viene risolto col metodo di sostituzione (metodo di eliminazione di Gauss) allora si può verificare che il numero di moltiplicazioni richieste è $n^3/3 + n^2 - n/3$.

Se per semplicità il tempo di elaborazione impiegato viene stimato moltiplicando il tempo richiesto da una singola moltiplicazione per il numero totale di moltiplicazioni, nell'ipotesi che una moltiplicazione venga eseguita in 10^{-6} secondi, per la risoluzione di un sistema di n equazioni ed n incognite con i due metodi in esame si avrebbero i seguenti tempi

n	metodo di Cramer		metodo di eliminazione
12	103	minuti	$7.1\ 10^{-4}$ secondi
13	24	ore	$8.9\ 10^{-4}$ secondi
14	15	giorni	$1.1\ 10^{-3}$ secondi
20	1620083	anni	$3.1\ 10^{-3}$ secondi
30	$2.6\ 10^{20}$	anni	$9.9\ 10^{-3}$ secondi
40	$1.1\ 10^{36}$	anni	$2.3\ 10^{-2}$ secondi
50	$4.9\ 10^{52}$	anni	$4.4\ 10^{-2}$ secondi

Il problema della risoluzione di un sistema di equazioni lineari con il metodo di Cramer risulta quindi intrattabile già per valori piccoli di n. La possibilità di risolvere sistemi di grosse dimensioni, come sono quelli che derivano da problemi concreti, non dipende solo dalla disponibilità di calcolatori potenti (anche con tali calcolatori il metodo di Cramer richiederebbe migliaia di anni di tempo di elaborazione), ma soprattutto dall'uso di metodi computazionalmente efficienti. E' quindi con lo sviluppo del *software*, oltre che con lo sviluppo del *hardware*, che è possibile trattare problemi di sempre più grosse dimensioni.

Il metodo di Gauss permette di ridurre il costo computazionale del problema da $(n+1)!$ a circa $n^3/3$ moltiplicazioni. E' naturale chiedersi se tale metodo è ottimo ossia se non esistano algoritmi che richiedono un numero inferiore di moltiplicazioni. Tale tipo di problema fa parte di una classe più ampia, oggetto di studio del settore della *Complessità Computazionale*, che ha avuto recentemente consistenti sviluppi. Nel caso della risoluzione di un sistema di n equazioni lineari in n incognite sono stati recentemente individuati metodi che richiedono kn^{ϑ} operazioni aritmetiche, dove k è una costante positiva e $\vartheta > 3$ (il più piccolo valore noto di ϑ è $\theta=2.38..$). Tali metodi si basano sul fatto che il costo computazionale della risoluzione di un sistema di n equazioni lineari in n incognite è asintoticamente uguale al costo computazionale del calcolo del prodotto di due matrici $n \times n$ e per tale problema esistono algoritmi che richiedono un numero basso di operazioni aritmetiche. Nell'esempio seguente viene descritto l'algoritmo di Strassen per moltiplicare matrici $n \times n$ con n^{ϑ} moltiplicazioni, $\vartheta = \log_2 7 = 2.806\ldots$

ESEMPIO 8. (Algoritmo di Strassen). Siano $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})$, $C=(c_{i,j})$, matrici $n \times n$ tali che $C=AB$, ossia

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r} b_{r,j}\ , \quad i,j=1,\ldots,n\ . \tag{8}$$

Se gli n^2 elementi $c_{i,j}$ vengono calcolati applicando direttamente la formula (8) allora occorrono n^3 moltiplicazioni ed $n^3 - n^2$ addizioni. E' possibile però calcolare gli n^2 elementi $c_{i,j}$ con n^{ϑ} moltiplicazioni, $\vartheta=\log_2 7$, mediante l'algoritmo di Strassen di seguito descritto.

Se $n=2$ gli elementi $c_{i,j}$ dati da

$$c_{1,1} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}\ ,$$
$$c_{1,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2}\ ,$$
$$c_{2,1} = a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1}\ ,$$
$$c_{2,2} = a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}\ ,$$

possono essere calcolati con 7 moltiplicazioni e 18 addizioni mediante le relazioni

$$\begin{aligned}
s_1 &= (a_{1,1}+a_{2,2})(b_{1,1}+b_{1,2})\ ,\\
s_2 &= (a_{2,1}+a_{2,2})b_{1,1}\ ,\\
s_3 &= a_{1,1}(b_{1,2}-b_{2,2})\ ,\\
s_4 &= a_{2,2}(b_{2,1}-b_{1,1})\ ,\\
s_5 &= (a_{1,1}+a_{1,2})b_{2,2}\ ,\\
s_6 &= (a_{2,1}-a_{1,1})(b_{1,1}+b_{1,2})\ ,\\
s_7 &= (a_{1,2}-a_{2,2})(b_{2,1}+b_{2,2})\ ;\\
c_{1,1} &= s_1+s_4-s_5+s_7\ ,\\
c_{2,2} &= s_1-s_2+s_3+s_6\ ,\\
c_{1,2} &= s_3+s_5\ ,\\
c_{2,1} &= s_2+s_4\ .
\end{aligned} \tag{9}$$

Poichè nelle relazioni (9) non viene utilizzata la proprietà commutativa della moltiplicazione è possibile applicare tali formule anche nel caso in cui gli elementi $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$, vengano sostituiti con matrici $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$.

Si supponga che n sia potenza di 2, ossia $n=2^k$, con k intero positivo e si partizionino le matrici A, B e C in quattro sottomatrici quadrate di dimensione $n/2$.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix}$$

Poichè vale

$$C_{1,1} = A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} ,$$

$$C_{1,2} = A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} ,$$

$$C_{2,1} = A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} ,$$

$$C_{2,2} = A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} ,$$

è possibile calcolare la matrice prodotto C, mediante le relazioni (9), con 7 moltiplicazioni di matrici di dimensione n/2.

Le moltiplicazioni di matrici di dimensione n/2 possono essere effettuate mediante lo stesso metodo, ossia partizionando ciascuna matrice di dimensione n/2 in quattro sottomatrici di dimensione n/4 e calcolando per ciascuna moltiplicazione 7 prodotti di matrici di dimensione n/4. Si può procedere in questo modo finchè si ottengono matrici di dimensione 1. Se C_n denota il numero di moltiplicazioni impiegate dal metodo descritto per moltiplicare matrici di dimensione n, vale la relazione

$$C_n = 7C_{n/2} ,$$

da cui, essendo $n=2^k$ e $C_1=1$, segue $C_n = 7C_{n/2} = 7^2C_{n/4} = \ldots = 7^kC_1 = n^{\vartheta}$, $\vartheta = \log_2 7$. Il metodo può essere applicato anche nel caso in cui n non è potenza di 2, bordando le matrici con elementi nulli in modo da ottenere matrici di dimensione 2^k dove k è il minimo intero maggiore o uguale a $\log_2 7$. Procedendo in modo analogo è possibile dimostrare che il numero delle operazioni aritmetiche richieste (addizioni incluse) è minore di $4.7\, n^{\vartheta}$. □

ESEMPIO 9. (Calcolo del valore di un polinomio). Si consideri il polinomio di grado n

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Il calcolo di p(x), per un valore assegnato di x, può essere effettuato mediante il seguente algoritmo

$$\begin{aligned} p_o &= a_o \\ y_1 &= x \\ p_i &= a_i y_i + p_{i-1} \\ y_{i+1} &= y_i x \\ p(x) &= p_n \end{aligned} \qquad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} i=1,\ldots,n$$

che richiede 2n-1 moltiplicazioni ed n addizioni. Poichè il polinomio p(x) può anche essere scritto nel modo seguente

$$p(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_o ,$$

si può ottenere un altro algoritmo per il calcolo di p(x), detto *algoritmo di Ruffini-Hörner:*

$$p_o = a_n$$

$$p_i = p_{i-1}x + a_{n-i} , \quad i=1,\ldots,n ,$$

$$p(x) = p_n$$

che impiega n moltiplicazioni ed n addizioni, cioè il numero di moltiplicazioni è dimezzato rispetto al metodo precedente. Il metodo di Ruffini-Horner è ottimale nel caso in cui il polinomio venga individuato mediante i suoi coefficienti.

ESEMPIO 10. (Prodotto di numeri complessi). Si considerino i numeri complessi $x=x_1 + ix_2$, $y=y_1 + iy_2$, $z=z_1 + iz_2$, dove x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, sono numeri reali e i è l'unità immaginaria, cioè $i^2=-1$. Se z=xy allora

$$z_1 = x_1y_1 - x_2y_2 ,$$

$$z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 .$$

I valori di z_1 e di z_2 possono essere calcolati con 4 moltiplicazioni e due addizioni di numeri reali. E' però possibile ridurre a 3 il numero delle moltiplicazioni, a scapito del numero delle addizioni, col seguente algoritmo

$$s_1 = (x_1 + x_2)(y_1 - y_2) ,$$

$$s_2 = x_1y_2 ,$$

$$s_3 = x_2y_1 ,$$

$$z_1 = s_1 + s_2 - s_3 , \quad z_2 = s_2 + s_3 .$$

Commento bibliografico

Molti sono i libri nei quali sono esposti, in modo sistematico, i fondamenti della Matematica Numerica. Fra questi, sono da citare, quelli di Isaacson, Keller (1967), Dahequist, Björck (1974), Forsythe, Malcom, Moler (1977), Atkinson (1978), Stoer, Bulirsch (1979), Rice (1983).

Specificatamente, per quanto riguarda lo studio della rappresentazione in base dei numeri e l'aritmetica finita, con i conseguenti errori indotti, particolarmente importanti sono le trattazioni di Wilkinson (1963), Knuth (1969), Sterbenz (1974).

Una presentazione dei più importanti risultati nel campo della complessità numerica è fatta da Borodin, Munro (1975), Kronsjö (1979), Bini, Capovani, Lotti, Romani (1981).

Il problema dei rapporti tra matematica e calcolatori è stato trattato anche da Capriz (1968), Traub (1972), Truesdell (1981), Solomon (1984).

Bibliografia

K.E.Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis. John Wiley & Sons, New York, 1978.

D.Bini, M.Capovani, G.Lotti, F.Romani, Complessità Numerica. Boringhieri, 1981.

A.Borodin, I.Munro, The Computational Complexity of Algebraic and Numerical Problems. Elsevier Publ. Co., 1975.

G.Capriz, La Matematica e i Calcolatori Elettronici. Accademia dei Lincei, Quaderno 110, 1968.

G.Dahlquist, A.Björck, Numerical Methods. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall 1974.

G.E.Forsythe, M.A.Malcom, C.B.Moler, Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

E.Isaacson, H.B.Keller, Analysis of Numerical Methods. New York, Wiley, 1966.

D.E. Knuth, The Art of Computer Programming. Vol.2, Seminumerical-Algorithms,Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969.

L.I. Kronsjö, Algorithms, their Complexity and Efficiency. John Wiley & Sons, New York, 1979.

J.R. Rice, Numerical Methods, Software and Analysis. McGraw-Hill Book Company,1983.

L. Solomon, Weierstrass e I.B.M., Bull. A.P.M.E.P. n.343, 1984.

P. Sterbenz, Floating-Point Computation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs,New Jersey, 1974.

J. Stoer,R.Bulirsch,Introduction to Numerical Analysis.Springer-Verlag,New York,1979.

J.F. Traub, Numerical Mathematics and Computer Science, Communications ACM,Vol.5, 1972.

C.A. Truesdell, Il Calcolatore: Rovina della Scienza e Minaccia per il Genere Umano, in La Nuova Ragione, Ed. Mulino, 1981.

J. Wilkinson, Rounding Errors in Algebraic Processes. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

APPENDICE

Come già indicato nella nota introduttiva, riproduciamo qui di seguito alcune delle relazioni tenute a Frascati durante un incontro tra la CIIM, rappresentanti degli IRRSAE e Ispettori Tecnici sul tema "Problemi e iniziative relativi all'insegnamento della matematica ai vari livelli scolastici: aggiornamento dei docenti e funzioni degli IRRSAE e del corpo degli Ispettori Tecnici".

Lucia Ciarrapico

Ministero Pubblica Istruzione

L'anno di formazione degli insegnanti di scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella scuola media.

La legge 270/82 che innova la disciplina dei concorsi ordinari per l'accesso nei ruoli del personale docente, per la prima volta prescrive come periodo di prova un anno di formazione. Infatti l'art.1, comma 2, della suddetta legge così recita: "Coloro i quali superano il concorso sono nominati in ruolo e sono ammessi ad un anno di formazione". E successivamente l'art.2 aggiunge: "Durante tale anno, per i docenti di nuova nomina, il Ministero della pubblica istruzione assicura, promuovendo opportune intese a carattere nazionale con gli Istituti regionali di ricerca, sperimentazione e aggiornamento educativi e tramite i provveditorati agli studi, la realizzazione di specifiche iniziative di formazione".

Al termine dell'anno di formazione i docenti discutono con il comitato per la valutazione del servizio - previsto dal D.P.R. n.417/74 - una relazione sulle esperienze e sulle attività svolte. Sulla base di essa e degli altri elementi forniti dal capo d'istituto, il comitato esprime il parere ai fini della conferma in ruolo.

Nella mia relazione mi soffermerò essenzialmente sull'anno di formazione dei docenti di scuola media di cui ho diretta conoscenza; ciò nonostante, molte delle considerazioni sono trasferibili alla scuola secondaria di secondo grado. Aggiungo altresì, che gli anni di formazione svolti finora sono due, ma nella scuola media il primo di essi è stato più significativo; mi riferisco all'anno 1984/85, nel quale, espletati i concorsi ordinari dopo un considerevole numero di anni, è entrato in ruolo un alto numero di docenti di scuola media.

In ottemperanza alla legge citata fu emanata il 31.7.84 una circolare ministeriale, n.235 dell'Ufficio Studi e Programmazione, che riguardava i docenti di nuova nomina nella scuola media; analoga circolare fu emanata per i docenti di scuola secondaria superiore il 31.1.85. Le direttive date nei due documenti sono sostanzialmente identiche. In essi viene detto che i docenti, vincitori di concorso, hanno l'obbligo durante l'anno di formazione, oltre che di prestare servizio nelle attività istituzionali (l'insegnamento, la partecipazione ai collegi docenti, ai consigli di classe, etc.), di partecipare a specifiche iniziative di formazione. Queste sono finalizzate ad affinare le capacità professionali, sia nelle specifiche materie d'insegnamento, sia nella dimensione partecipativa della vita scolastica.

L'attività di formazione è prevista a due livelli, e cioè:

A) attraverso 10 incontri a carattere seminariale, per un totale di 30 ore e con una partecipazione di non più di 50 docenti, da attuare con adeguata scansione nell'anno scolastico e fuori dall'orario d'insegnamento. Per la scuola secondaria superiore gli incontri possono svolgersi in forma residenziale e con formula intensiva, nel caso di un numero esiguo per provincia o distribuito in maniera diffusa; tale possibilità è stata estesa successivamente agli altri ordini di studio;

B) l'altro aspetto riguarda le attività da realizzare all'interno della scuola, sotto la guida del preside o di un docente di comprovata capacità. I docenti sono invitati ad affrontare ed approfondire i vari problemi che l'esperienza di lavoro pone loro con riferimento agli aspetti metodologico-didattici, nel quadro delle attività previste per i consigli di classe.

Sono inoltre elencate, a titolo esemplificativo, una serie di tematiche da affrontare negli incontri seminariali. Si tratta di temi di carattere generale, come, ad esempio, per la scuola media: "La programmazione curriculare, il problema della valutazione, l'inserimento degli alunni portatori di handicaps" e nella scuola secondaria superiore: "Le linee della riforma della secondaria, la disciplina giuridica della sperimentazione e dell'aggiornamento, il raccordo tra scuola e mondo del lavoro o tra scuola e sbocchi universitari" e altri. In entrambe le disposizioni miniteriali compare il tema: "Didattica delle singole discipline".

Successivamente, in data 6.3.86, è stata emanata un'ulteriore circolare minsteriale con valore permanente e riguardante tutti gli ordini di scuole: materna, elementare, secondaria di primo e secondo grado. Tale documento risulta migliore rispetto ai precedenti. Tra i vari emendamenti si possono citare:

- il numero massimo di docenti per corso abbassato da 50 a 40;
- la volontà di superare lo scollamento tra le attività del livello A (incontri seminariali) e quelle del livello B (attività all'interno della scuola). Nella circolare dell'86 si legge, infatti: "Le attività seminariali si collegheranno strettamente con l'attività del neodocente nella scuola al fine di legare la formazione alla pratica didattica. Si suggeriscono a tal fine i seguenti obiettivi...." e seguono alcune indicazioni in proposito;

- la nomina - in sostituzione del preside - di uno o più "tutors", a seconda del numero dei docenti in prova; il tutor deve essere un docente esperto nominato dal capo d'istituto su proposta del collegio dei docenti ed ha il compito di fare da guida al neodocente nell'esplicazione dei suoi compiti didattici; gli ispettori hanno, a loro volta, funzione di consulenza e di assistenza in queste attività.

Lodevole è anche la maggiore chiarezza nella definizione delle attribuzioni agli organismi chiamati in causa a realizzare l'anno di formazione: gli IRRSAE, i provveditorati, i sovrintendenti scolastici regionali, gli ispettori tecnici periferici, le università.

Gli IRRSAE hanno una funzione tecnica: ad essi spetta il compito di elaborare il modello del corso seminariale: tematiche da trattare, modalità, scansione degli incontri. Devono inoltre, dopo gli opportuni incontri con le università territoriali, fornire indicazioni dei nomi dei relatori nei seminari.

I provveditorati hanno un compito meramente organizzativo ed amministrativo:
- dispongono le nomine dei docenti nei seminari;
- stabiliscono il numero dei corsi da attivare nella provincia, il numero di partecipanti a ciascun corso e l'eventuale accorpamento delle varie classi di concorso, le sedi idonee per ubicazione, locali, attrezzature didattiche, nelle quali attivare i corsi.

I sovrintendenti regionali intervengono, con un'azione di coordinamento, qualora il numero dei corsisti a livello provinciale, appartenenti alle varie classi di concorso, sia troppo esiguo o distribuito in maniera disomogenea nel territorio.

Gli ispettori contribuiscono con un'azione di assistenza ai tutors per quanto riguarda le attività all'interno della scuola. A livello di provveditorato hanno funzione di consulenza e di coordinamento. Ovviamente possono essere essi stessi docenti nei corsi. Non sono invece chiamati in causa nel momento più qualificante, e cioè a fianco dell'IRRSAE nella fase progettuale dei corsi. Di fatto, però, laddove esiste un buon rapporto tra l'IRRSAE e il corpo ispettivo, la collaborazione vi è stata anche in questa fase promozionale. Ciò è avvenuto nel Lazio, per la scuola media, ma certamente la realtà è molto diversa da regione a regione.

Passando ad un discorso sul merito, si deve sottolineare la giustezza teorica dell'anno di formazione. Esso ha una particolare rilevanza in quanto si presenta come anello di congiunzione tra la formazione universitaria, rivolta agli aspetti contenutistici delle discipline che il docente insegnerà, e la formazione permanente

in servizio. Può rappresentare, se ben realizzato, un momento sostanziale di arricchimento culturale per i docenti e, di conseguenza, giocare un ruolo vitale nel determinare la qualità dell'educazione. I due livelli di attività indicati nelle circolari (gli incontri seminariali e l'azione nella scuola) hanno lo scopo, infatti, di affinare, per chi ha già esperienza d'insegnamento come supplente, o di costruire ex novo per chi non ha mai insegnato, quella professionalità necessaria per un insegnamento efficace. Il primo livello è più teorico: in esso si esaminano e si approfondiscono, sotto la guida di esperti e attraverso lo scambio delle reciproche esperienze, le teorie di natura pedagogico-didattica. L'altro, più concreto, consiste in un'assistenza da parte del tutor durante l'attuazione pratica delle teorie. Teoria ed operativizzazione di essa: è importante, infatti, che il docente conosca le teorie relative alle problematiche proprie della scuola; è più importante, e anche più difficile, che le sappia tradurre in concreta pratica didattica.

Cosa si è fatto nei primi due anni di attuazione? Quali vantaggi ne hanno tratto i docenti, in particolare quelli di matematica? Quali problemi si sono evidenziati? Certamente la risposta che darò è parziale perchè frutto di esperienza acquisita nell'ambito territoriale in cui opero, il Lazio e l'Umbria, e si riferisce ai soli docenti di scuola media. Ma il numero dei partecipanti ai corsi di formazione, soprattutto nell'a.s. 84/85, è stato abbastanza alto da rappresentare un campione statisticamente significativo. Sono stati immessi in ruolo, in tale anno, circa 2000 docenti nella provincia di Roma, di cui 355 di scienze matematiche. Nelle rimanenti province del Lazio e nell'Umbria i numeri sono molto meno significativi, ad esempio 53 a Viterbo, 75 a Terni, e così via. Nell'85/86 la formazione ha riguardato una coda di docenti, dell'ordine del 15% rispetto all'anno precedente: nel Lazio sono stati 345 e nell'Umbria appena 32.

E veniamo alle attività promosse. Sono stati svolti degli incontri, a livello provinciale, con i presidi delle scuole di servizio dei neovincitori, promossi dagli ispettori e coordinati dai medesimi, al fine di chiarire il nuovo e delicato compito cui i presidi - ma con la più recente normativa i docenti tutors - sono chiamati nell'anno di formazione. Durante gli incontri si è sottolineata, perciò, la responsabilità di chi è preposto a svolgere questa funzione, che consiste nel seguire l'azione didattica del docente in formazione, stimolandola e sostenendola con suggerimenti, consigli, assistenza concreta. Se questa opera di assistenza è fatta in termini di solidale collaborazione con tutti i docenti del consiglio di classe, l'anno di formazione può costituire un'occasione di crescita professionale per l'intero consiglio e per la scuola nel suo complesso.

I corsi seminariali si sono svolti con scadenza bisettimanale sia nel Lazio che nell'Umbria, con inizio nel mese di gennaio e termine al massimo, laddove sono iniziati più tardi, nella prima decade di maggio. I corsi attivati per provincia sono stati pochi, da 1 a 4 al massimo, ad eccezione della provincia di Roma nella quale ne sono stati promossi ben 42 con, ovviamente, grossi problemi organizzativi e nel reperimento degli esperti.

Le tematiche trattate hanno investito in parte problemi propri delle scienze dell'educazione, in parte la didattica della specifica area disciplinare. Il rapporto è stato quasi ovunque di 7/10 o 6/10 incontri dedicati ai temi generali e i rimanenti a quelli disciplinari. I docenti hanno partecipato collettivamente agli incontri sui temi generali, si sono poi divisi in gruppi per aree disciplinari. Per quanto riguarda la metodologia seguita negli incontri, generalmente alla lezione frontale introduttiva è seguito un dibattito o un lavoro di gruppo. In ogni caso, quasi ovunque, è stata lasciata agli esperti la libertà di gestire l'orario degli incontri secondo le proprie abitudini e preferenze.

Venendo alla parte disciplinare dedicata alle scienze matematiche, etc., i temi svolti sono stati scelti tra i seguenti:

- decodifica dei programmi per la parte attinente alle discipline interessate;
- didattica della matematica e delle scienze sperimentali; costruzione di unità didattiche mono o pluridisciplinari;
- uso di mezzi e strumenti idonei all'insegnamento della matematica e delle scienze sperimentali;
- uso del laboratorio;
- la prova di matematica nella licenza media;
- criteri e strumenti per l'osservazione dei processi di apprendimento e valutazione della performance degli allievi nelle specifiche discipline.

Per quanto riguarda la proficuità dell'anno di formazione ed eventuali correzioni e miglioramenti, è risultata utile l'analisi effettuata sull'esito di un questionario di uscita, proposto ai corsisti della regione Lazio al termine della prima esperienza. Il questionario, volutamente, non è stato proposto nell'ultimo incontro seminariale, ma inviato qualche mese dopo, in modo da avere delle risposte serene, obiettive, meditate e, soprattutto, personali. E' da tener presente, infatti, che i corsi di formazione sono stati accolti con notevole insofferenza, poichè, più o meno contemporaneamente, erano immessi in ruolo numerosi altri docenti, che a norma di alcuni articoli della legge 270/82, non avevano dovuto sostenere prove concorsuali e non erano tenuti a partecipare alle attività di formazione.

I punti emergenti dalle risposte dei neodocenti di scienze matematiche della provincia di Roma sono i seguenti:

1) Il numero dei laureati in matematica immessi in ruolo nell'84 nella scuola media (38%) è alto rispetto alla situazione esistente nella quale appena il 20% proviene da studi matematici. Ma il risultato è ingannevole perchè in quel momento non erano terminati i concorsi nelle scuole secondarie superiori. E' probabile,quindi, che molti dei suddetti docenti abbiano superato altri concorsi e abbiano optato per altri ordini di scuole.

2) Nella scelta dei temi indicati dai corsisti va considerato che la stragrande maggioranza di essi (95%) ha alle spalle esperienze d'insegnamento e, di essi, circa la metà nello stesso ordine di studi e nelle stesse materie.

Ciò ha portato che sono stati considerati molto utili i seguenti temi:

- Psicologia del preadolescente
- Programmazione e costruzione di unità didattiche
- Inserimento degli alunni handicappati
- Didattica delle discipline insegnate,
  tema quest'ultimo al quale si chiede, quasi all'unanimità, di dedicare tempo maggiore.

Sono stati considerati poco utili, perchè oggetto di preparazione concorsuale o di vita scolastica, i seguenti temi:

- Lettura critica dei programmi del '79
- Gli organi collegiali
- Diritti e doveri degli insegnanti.

A mio avviso le indicazioni date dai docenti andrebbero seguite negli anni futuri, in considerazione del fatto che le percentuali degli insegnanti che hanno già operato nella scuola - dati i meccanismi legislativi vigenti - non tenderà a diminuire.

3) La durata delle 30 ore per le attività seminariali e la scansione degli incontri nel corso dell'anno scolastico si sono rivelate conformi sia agli obiettivi da realizzare che alle necessità formative dei corsisti ed ai loro tempi disponibili.

4) Per quanto riguarda le metodologie da adottare negli incontri le indicazioni sono di "parlare poco" e "fare molto".

5) Il numero di 50 docenti per corso è risultato eccessivo alla prima esperienza, ma, come si è detto, vi è già stato un correttivo con l'abbassamento del numero massimo a 40. Si ritiene che il numero di 30 possa essere il più adeguato.

6) I corsisti osservano che i collegamenti tra le attività seminariali e quelle tutoriali sono stati perlopiù disattesi. D'altra parte solo la successiva circolare del gennaio '86 fa riferimento ad essi. Tali collegamenti andrebbero attivati in una direzione tale per cui i corsisti possano verificare nella scuola ciò che apprendono nei seminari. Anche per la figura del tutor - nuova nella scuola italiana - è ancora tutto da costruire: il problema va studiato dal punto di vista istituzionale e sotto il profilo pedagogico-didattico.

7) Nella domanda n.15 non si chiedeva tanto un giudizio sul corso seguito, quanto sulla validità dell'anno di formazione, ma, leggendo le successive osservazioni, si è portati a pensare che ciò non sempre sia stato compreso.

In conclusione, l'esperienza dell'anno di formazione può considerarsi in linea di massima positiva sia in relazione alla prospettiva di una migliore qualificazione del personale docente, sia in relazione con quanto si è finora realizzato, sebbene sia suscettibile di correttivi e miglioramenti.

Anno di formazione per gli insegnanti vincitori di concorso

QUESTIONARIO

Gentile insegnante,

come lei sa, è la prima volta nel nostro Paese che si dà vita all'anno di formazione dei docenti. Pertanto risulta necessario acquisire dati ed informazioni ai fini di rendere migliore un servizio che nei prossimi anni dovrà entrare a regime.

La risposta puntuale alle domande del presente questionario sarà di indubbia utilità ai suoi colleghi che, nel prossimo futuro, entreranno in ruolo.

Il questionario è anonimo, perciò non deve firmarlo.

Grazie per la collaborazione.

1. Seminario n° .... Sede del seminario ....
....

2. Sesso .... Età .... dell'insegnante
3. Laurea in ....
4. Materia/e di insegnamento ....
5. Sede di servizio ....
6. Residenza abituale (se è Roma indicare il quartiere)...................
....
7. Da quale anno scolastico insegna ....
8. Ha sempre insegnato le stesse materie per le quali ha vinto il concorso?

   ☐ Si ☐ No

   Se "No" quali altre materie ha insegnato?

   ....
9. Ha sempre insegnato nello stesso ordine di scuola per cui ha vinto il concorso?

   ☐ Si ☐ No

   Se "No", in quale ordine di scuola ha insegnato?

   ....
10. Le indichiamo una serie di temi scelti tra quelli trattati nei corsi del Lazio. Esprima l'utilità di essi ai fini della formazione professionale.

	molto utile	utile	poco utile
a) Aspetti fondamentali della psicologia del preadolescente e apprendimento scolastico.	☐	☐	☐
b) Programmazione educativa e didattica.	☐	☐	☐
c) Lettura critica dei programmi di scuola media.	☐	☐	☐
d) Inserimento degli alunni handicappati.	☐	☐	☐
e) Procedure per la costruzione di unità didattiche.	☐	☐	☐
f) Sussidi didattici e audiovisivi.	☐	☐	☐
g) La scuola media a tempo prolungato; possibilità di integrazione e di sostegno.	☐	☐	☐
h) Orientamento scolastico.	☐	☐	☐
i) Gli esami di licenza media.	☐	☐	☐
l) Gli organi collegiali.	☐	☐	☐
m) Diritti e doveri degli insegnanti.	☐	☐	☐
n) Didattica delle singole discipline.	☐	☐	☐

11. Esprima il suo parere sulla proficuità di un corso seminariale per docenti in anno di formazione in ordine ai seguenti punti:

a) - numero delle ore

☐ trenta ☐ più ☐ meno

b) - periodo e cadenza degli incontri

☐ con adeguata scansione durante l'intero anno scolastico.

☐ con formula intensiva.

Nel secondo caso, in quale periodo dell'anno scolastico?

☐ ottobre-novembre ☐ gennaio-febbraio ☐ marzo-aprile

c) - numero dei partecipanti

☐ 50 ☐ più ☐ meno

12. Quale formula preferisce nello svolgimento degli incontri?

☐ relazione dell'esperto e dibattito

☐ relazione dell'esperto e lavoro di gruppo

Quanto tempo dedicherebbe alla relazione?

☐ 30 minuti ☐ 60 minuti ☐ 90 minuti

13. Il numero degli incontri dedicati alla didattica della/e disciplina/e da lei insegnata/e le è apparso adeguato?

☐ Si ☐ No

se "No", avrebbe preferito un numero

☐ maggiore ☐ minore

14. Ha trovato un collegamento tra il momento seminariale e gli "approfondimenti" all'interno della scuola?

☐ Si ☐ No ☐ In parte

15. Gli obiettivi dell'anno di formazione sono essenzialmente due:

a) promuovere un miglioramento delle capacità professionali;

b) permettere un più facile inserimento nella realtà scolastica.

Ritiene che con iniziative seminariali del tipo praticato si possa raggiungere l'obiettivo "a"?

☐ Si ☐ No ☐ In parte

l'obiettivo "b"?

☐ Si ☐ No ☐ In parte

16. Altre proposte:

....

Risultati del questionario sull'anno di formazione nella scuola media. Docenti di scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali.

Provincia di Roma

2a.	Sesso:	F: 89%	M: 11%
2b.	Età:	25/30 anni: 20%	30/40 anni: 80%
3.	Laurea:	Chimica	2%
		Fisica	2%
		Matematica	38%
		Scienze biologiche	48%
		Scienze geologiche	1%
		Scienze naturali	9%

7. In servizio anteriormente all'immissione in ruolo: 95%

In servizio dall'immissione in ruolo: 5%

8. Si: 45%

No: 55%

9. Si: 45%

No: 55%

10.	molto utile	utile	poco utile
a.	41%	50%	9%
b.	36%	47%	17%
c.	19%	37%	44%
d.	45%	43%	12%
e.	51%	33%	16%
f.	34%	43%	23%
g.	18%	59%	23%
h.	25%	56%	19%
i.	13%	47%	40%
l.	6%	43%	51%
m.	16%	46%	38%
n.	68%	24%	8%

11a.	trenta: 59%	più: 29%	meno: 12%
b.	A: 67%	B : 33%	a: 84% b: 16% c: //
c.	50: 8%	più: 0%	meno: 92%
12a.	A: 33%	B: 67%	
b.	30 m': 45%	60 m':49%	90 m': 6%
13.	Si: 18%	No: 82%	99% 1%
14.	Si: 5%	No: 51%	in parte: 44%
15a.	Si: 18%	No: 28%	in parte: 54%
b.	Si: 18%	No: 36%	in parte: 46%

Rita De Castro

Computer, didattica e aggiornamento, iniziative dell'IRRSAE Friuli-Venezia Giulia

A distanza di cinque anni, da quando cioè l'IRRSAE Friuli-Venezia Giulia, veniva ad iniziare le sue prime esperienze nel settore dell'utilizzo dei computers nella scuola, non è facile ripercorrere il cammino compiuto.

C'è stata un'evoluzione sostanziale, che solo ora, a distanza nel tempo, rivela tutta la sua importanza e fa sì che le successive tappe diventino significative di una maturazione e di una consapevolezza di come il problema informatica-computer vada affrontato.

Degli inizi possiamo solo ricordare l'apparire sulla scena, o meglio nelle mani di un buon numero di studenti, di calcolatrici tascabili più o meno sofisticate e dotate di tante funzioni algebriche e trascendenti, di personal o home-computers usati per programmi-gioco, e tante tante discussioni e polemiche tra gli insegnanti divisi in denigratori e fautori di questa novità tecnologica.

I primi ad accorgersi che non si poteva rimanere inerti di fronte a questa realtà quotidiana, che veniva a coinvolgere ogni aspetto della nostra vita sociale, aldilà di tutti gli studi e le pubblicazioni e lo stato avanzato di sperimentazioni condotte all'estero, sono stati gli insegnanti di materie scientifiche e particolarmente i docenti di matematica delle scuole medie e superiori.

Non esistevano, al di fuori dell'ambiente universitario o di qualche istituto superiore ad indirizzo specifico, nè attrezzatura, nè una adeguata preparazione per affrontare il problema in tutta la sua complessità.

La spinta iniziale è venuta da un bisogno di innovazione didattica, dal desiderio di rendere gli studenti sempre più attivi e partecipi del processo di apprendimento e dalle sollecitazioni dei Programmi del '79 ad avvalersi di un metodo scientifico rigorosamente razionale, tuttavia la riflessione pedagogico-didattica è certamente seguita all'esperienza.

Il computer, prima che come elaboratore di dati che gestisce l'informazione o mezzo per l'istruzione programmata, magari per il recupero di alunni svantaggiati,è stato considerato uno strumento di calcolo e quindi da valorizzare in un programma di matematica o al limite di discipline scientifiche.
Non è il caso di esprimere un giudizio su questo tipo di approccio, nè di riaprire

tutte le dispute sull'informatica e sul computer, perchè la tesi enunciata fa parte della storia.

C'è stata, e questo è l'aspetto più altamente positivo, da parte di un gruppo di insegnanti della nostra Regione, una disponibilità totale ad affrontare un cambiamento, ma innanzitutto a ricercarne le modalità partendo dall'esistente, mentre è mancata nella prima fase dell'intervento dell'IRRSAE un piano articolato e proiettato nel futuro, anche per la carenza di personale comandato che potesse assumersi un preciso compito organizzativo.

Gli insegnanti della scuola media hanno iniziato a lavorare in classe e, invece di rimproverare gli alunni che usavano la calcolatrice tascabile, ne hanno fatto oggetto di studio, di confronto, di utilizzo intelligente. Siamo in possesso di diverse relazioni su esperienze condotte in singole scuole, che possono apparire banali per la loro semplicità, ma che in realtà danno un'indicazione del lento e graduale percorso compiuto.

L'uso della calcolatrice risponde molto bene ai suggerimenti metodologici dei nuovi programmi della scuola media in quanto rende l'alunno operativo e gli permette, sotto la guida dell'insegnante di ritrovare concetti e formule matematiche in maniera diversa e più intuitiva.

Già l'uso corretto della tastiera, il riconoscimento delle funzioni e la lettura del visore, come l'utilizzo della memoria e il confronto tra le varie "macchinette" in possesso degli alunni, con le diverse notazioni, consente di ricavare alcuni concetti relativi agli insiemi numerici, alla scrittura decimale, all'ordine di grandezza, alle approssimazioni successive. Se poi si adopera la calcolatrice tascabile programmabile è necessario passare all'analisi algoritmica dei problemi.

L'alunno è chiamato a programmare la successione ordinata e finita delle operazioni da compiere per raggiungere ad un risultato definitivo. Questo esercizio visualizzato con i diagrammi di flusso, porta a migliorare la capacità di pensiero logico-deduttivo. La scomposizione di un problema in sotto-problemi (top-down o decomposizione gerarchica) abitua la mente ad affrontare situazioni sempre più complesse in un procedimento continuo di analisi-sintesi.

La necessità di predisporre delle procedure con dei passaggi precisi e obbligati, conduce a smitizzare lo strumento, a comprenderne i limiti e a ricondurlo a livello d'uomo.

L'alunno diventa consapevole che è lui a programmare e che la macchina agisce e reagisce secondo le istruzioni che egli stesso è in grado di darle, ma che nel medesimo tempo è pronta a segnalare il pur minimo errore.

In sintesi i temi affrontati con la calcolatrice tascabile a livello di scuola media sono stati pressochè i tradizionali inseriti comunemente nei programmi:la divisione tra numeri naturali con q ed r usando la traslazione del sottraendo, l'algoritmo di Euclide, la scomposizione in fattori primi, la rappresentazione decimale di una frazione (con periodo e antiperiodo, il cambio di base, le classi di resti modulo p,....)

Il valore di queste esperienze sta soprattutto nel fatto che venivano studiate e preparate direttamente dagli insegnanti.

In quei primi anni c'è stato un proliferare di Gruppi locali regionali che sorgevano spontaneamente, con a capo un docente avente funzione di collegamento con l'IRRSAE. L'Istituto da parte sua periodicamente riuniva questi capigruppo che relazionavano sui lavori svolti e si scambiavano informazioni e fotocopie del materiale prodotto. Molti suggerimenti e proposte giungevano, specie per le sperimentazioni nella scuola media superiore, da coloro che sono stati i primi animatori di questa attività, i docenti della facoltà di Matematica dell'Università di Trieste,presso la quale opera pure da anni un Gruppo di ricerca matematica del C.N.R.

Si è instaurata quindi un'ampia collaborazione tra l'IRRSAE e l'Università attraverso un lavoro di ricerca insieme e con la presenza costante e qualificata dei professori e ricercatori universitari (tra i quali il prof. G. Torelli, membro del Direttivo IRRSAE, il prof. A. Bellen, la dott.ssa L. Zuccheri) sia negli incontri di studio che nel Comitato Tecnico Scientifico che nel frattempo si era costituito. In realtà in quel momento molto veniva lasciato alla creatività dei singoli,ma proprio questo fattore è stato incisivo per gli sviluppi futuri. Forse un programma predeterminato avrebbe costretto a seguire degli orientamenti non ancora sperimentati e sottoposti a verifica, quindi troppo vincolati.

Gli argomenti del programma di matematica della scuola media superiore (biennio e triennio del liceo scientifico) che sono stati tradotti in programmi, anche semplicemente per una calcolatrice tascabile programmabile, sono i più disparati e vanno dalle frazioni continue, alla determinazione degli zeri di una funzione continua, al concetto di limite, al comportamento di una popolazione x_n, al problema della soluzione di un'equazione di 2°.

I primi risultati positivi constatati nelle classi sono stati quelli relativi ad una maggior consapevolezza del calcolo, eseguito con il calcolatore, essenzialmente finito e della matematica quale scienza degli infiniti. Si pone qui tutta la problematica della rappresentazione dei numeri reali in virgola mobile (floating point) costituita dal prodotto di una parte esponenziale per una mantissa formata da un numero finito di cifre dopo la virgola ottenuta arrotondando o troncando la t-esima cifra dopo la virgola, e degli errori assoluti che si commettono. I problemi mal condizionati sono stati oggetto di un'attento studio e di un approfondimento nei gruppi di lavoro per la rilevanza nell'utilizzo del computer.

L'attività dell'IRRSAE di questo primo periodo, difficilmente può essere considerata come aggiornamento vero e proprio, è stata piuttosto un momento in cui si sono affrontati con entusiasmo tutti gli aspetti dell'innovazione che via via l'esperienza diretta metteva in luce. Si procedeva su due linee parallele, l'una di studio personale, di consultazione, di reciproco scambio di bibliografie, di stesura di qualche piccolo e semplice programma (usando per il personal computer generalmente il Basic); l'altra di incontri per gruppi dove si privilegiava l'informazione e la prima conoscenza del computer, scoprendone le potenzialità e i limiti, dove si parlava di hardware e di software, di RAM e di ROM, di memorie, di linguaggi, di traduttori e di interpreti, di cicli e di subroutines...

Alla fine dell'anno scolastico ci si ritrovava per un convegno conclusivo dove le produzioni dei gruppi, anche senza un preciso ordine logico, venivano illustrate, esposte e discusse con i convenuti. Il lavoro si protraeva spesso oltre l'orario di programma, sintomo certo di un largo interesse.

AGGIORNAMENTO

Ad iniziare dall'anno scolastico 1984/85, anche grazie alla nomina dei docenti comandati presso l'IRRSAE, si avvia un progetto d'aggiornamento più sistematico,che rientra nel piano regionale dell'Istituto.

Il Comitato Tecnico Scientifico assume la funzione di organo di programmazione e, avvalendosi dell'esperienza degli anni precedenti, elabora un cirriculo che si sviluppa in precisi obiettivi, metodologie, contenuti e modalità di verifica. Aumenta notevolmente il numero di insegnanti che aderisce al corso (siamo attorno agli ottocento) e l'interesse si allarga sempre più anche presso i docenti di discipline linguistiche e umanistiche.

Questa multiforme presenza crea delle difficoltà per la scelta del percorso informativo da seguire nella prima fase di alfabetizzazione. Si lavora ancora, come in

precedenza, per gruppi locali, ma più organicamente strutturati, anche se si registra una notevole disparità di preparazione e di prerequisiti tra i partecipanti.

Tra gli stessi relatori-esperti dei gruppi si delineano due correnti anche se non ben differenziate. C'è chi privilegia l'approccio informatico senza il computer (specie se questo manca nella scuola) e inizia dando delle nozioni di base su argomenti di logica formale, sul sistema binario, sui connettivi logici,sui diagrammi di flusso; tuttavia l'attesa dei corsisti è in generale protesa a superare l' "effetto tastiera", a conoscere i primi comandi, a vincere l'ansia di fronte agli alunni che spesso maneggiano lo strumento con maggior disinvoltura dell'insegnante.

Si giunge così alla formulazione di un programma di massima, steso dal prof. F. Petrossi e concordato dalla maggioranza dei relatori, che integra le due posizioni e sembra rispondere adeguatamente ai bisogni immediati dei docenti.

Gli obiettivi generali sono quelli di:

- saper effettuare le operazioni necessarie a rendere operativo un personal computer e caricare un programma già scritto;
- saper tradurre in diagramma di flusso o in schema a blocchi le sequenze di operazioni necessarie per realizzare semplici procedure aritmetiche, grafiche e di trattamento di informazioni alfanumeriche;
- saper prevedere, visto un programma di limitate dimensioni, il comportamento del computer;
- saper utilizzare programmi già predisposti di utilità generale;
- valutare le prospettive d'impiego del computer nella scuola, per le varie materie specifiche;
- comprendere la struttura generale, sia logica che tecnologica, dei personal computers;
- conoscere l'uso delle principali periferiche di un computer;
- apprendere gli elementi fondamentali del linguaggio BASIC;
- conoscere alcune caratteristiche principali del linguaggio LOGO e valutare le sue potenzialità didattiche.

Accanto a questi corsi, che vengono denominati di tipo "A", continuano a lavorare gruppi di ricercatori che, usando sempre il linguaggio Basic, producono del software didattico per le diverse discipline scientifiche e lo sperimentano in classe con gli studenti. Talvolta si attua addirittura una produzione in cooperazione tra professori e studenti con l'apporto delle nozioni disciplinari da parte dei primi e la stesura dei listati da parte dei secondi. Gli argomenti in questi casi vanno dalla statistica e probabilità, alle trasformazioni affini, alle curve piane in coordinate ortogonali e polari, alla topografia alle simulazioni nel campo della fisica, della chimica e della nautica.

In questa fase si comincia ad uscire dai temi strettamente scientifici e si sperimenta il computer nel settore delle lingue straniere, nell'analisi semantica della poesia e nel recupero degli alunni insufficienti mentali. Sono proprio i docenti che provengono dall'area umanistica o non strettamente scientifica che studiano i vari utilizzi dell'istruzione programmata, dei linguaggi autore, della simulazione, del drill and practice, del tutorial. (Vedi Atti Convegno Lignano, 1985)

DIDATTICA

L'ultimo convegno, tenutosi a Grado (GO) nel maggio scorso, raccogliendo docenti che avevano ormai superato la fase di studio e di "meraviglia scientifica" di fronte alle potenzialità dell'hardware, ha posto maggiormente in luce, in tutta la sua urgenza il discorso dell'utilizzo didattico del computer nella scuola.

Si parla oggi di "nuova cultura", perchè l'uso delle tecnologie informatiche richiede una capacità diversa di lettura e di soluzione dei problemi, l'apprendimento di nuovi linguaggi con tutte le loro strutture semantiche e morfologiche e con i linguaggi l'acquisizione di sistemi e formalismi di scrittura, la padronanza di altri elementi concettuali e operativi.

Da queste rapide considerazioni è emersa l'esigenza di rimodellare il piano di aggiornamento, ampliandolo e tramutandolo in un progetto di formazione in servizio, che tenesse conto anche delle proposte e delle caratteristiche sostanziali del Piano Nazionale d'Informatica (collegamento con i docenti del corso Nazionale operante in Regione).

Il programma per l'anno che sta iniziando si presenta quanto mai articolato, ma sempre tuttavia finalizzato ad una precisa ricerca di sperimentazione didattica. I Gruppi locali, formati dai docenti che hanno già superato la fase di alfabetizzazione, saranno orientati all'approfondimento di un tema ben definito studiato in alcuni incontri intensivi e poi sperimentato a livello di classe. Seguiranno momenti comuni di verifica sulla validità didattica dell'esperienza. Si studieranno i possibili impieghi dei pacchetti applicativi (word-processor, foglio elettronico, DATA-BASE, applicazioni grafiche) nei piani di studio delle diverse discipline della scuola media e superiore; si analizzerà criticamente, attraverso schede e questionari, il

software didattico sul mercato, ricercandone le positive possibilità di utilizzo didattico, si affronterà, con gli alunni, l'informatica povera, come premessa e fase preparatoria all'uso del computer, si uscirà dal linguaggio BASIC per procedere ad un confronto con altri linguaggi del tipo PASCAL, LOGO, PROLOG.

Solo i docenti che non si fermano al primo passo di conoscenza della tastiera del personal computer, ma che con tenacia e spesso anche con fatica, entrano in questa nuova dimensione di pensiero, potranno portare nella scuola un benefico contributo educativo. La scuola non cambierà se il computer rimarrà, alla stregua di un qualsiasi altro sussidio audiovisivo, un semplice mezzo per integrare la lezione. C'è sempre il pericolo che ci si stanchi del "nuovo giocattolo" per ritornare all'antico e lasciare tutto come prima. Questo appare oggi tanto più rischioso, quanto più gli alunni delle nuove generazioni stanno acquistando una mentalità informatica al di fuori dell'ambiente scolastico, approfondendo ancora una volta, e maggiormente, il divario tra scuola e società.

Gli insegnanti, anche in veste di educatori, sono chiamati ad adeguarsi alle rinnovate esigenze dei temi in maniera razionale, preparando gli studenti a gestire un sistema di conoscenze più ampio, più articolato e flessibile, più aperto a maggiori scambi di informazioni e comunicazioni.

Gioacchino Speciale

L'insegnamento della matematica nelle sperimentazioni "spontanee" dell'area romana

1. L'area sperimentale romana presa in considerazione comprende quattro licei dove sono attivate altrettante maxisperimentazioni, un quinto liceo dove è presente una minisperimentazione, un ITI sede di un'altra minisperimentazione. Questo è il campo delle sperimentazioni "spontanee" in cui sia coinvolta la matematica. C'è poi il grappolo delle sperimentazioni "assistite": sono 25 e, come è noto, sono tutte dell'area tecnica. E' ancora troppo presto per tentare di trarre delle conclusioni da queste ultime dato che, salvo qualcuna, non sono ancora giunte a fine ciclo. Qui si evita di riferirne; ci si limita ad osservare che solo nell'area romana esse sono già cinque volte più numerose delle "spontanee", sono cioè proliferate ancor prima di essere passate al vaglio di una seria verifica. Chi ha curato questa rapida sintesi è dell'avviso che proprio le sperimentazioni "spontanee" - principalmente perchè più annose e sofferte - offrano ora il maggiore interesse di studio.

2. Conviene richiamare subito alcuni caratteri delle "maxi".

* Intanto l'anno di nascita. Per tutte è da collocare intorno al 1973; esse nascono cioè anche prima del varo del DPR 419/74, anticipano cioè il provvedimento che ha dato il via alle sperimentazioni d'istituto. Le sperimentazioni sono pertanto annose, hanno avuto il tempo di crescere, cambiare anche più volte, sedimentare, in fondo assestarsi.
* Le sperimentazioni sono multiindirizzo ed è noto che il liceo di domani avrà al suo interno più canali. Si prova a vedere cosa succede quando a scuola si tengono sotto lo stesso tetto giovani impegnati in linee di formazione diverse.
* I licei coinvolti sono: LG Virgilio, LG Mamiani, il XXIV liceo sperimentale (che è nato come sezione staccata del LG Visconti), LS Peano, cioè scuole prestigiose, due del centro città dove convergono giovani provenienti da certi ambienti socio- culturali. Un docente così si esprime a questo proposito:"sa, sono ragazzi che generalmente trovano a casa biblioteche ben fornite e che a volte possono mettere in imbarazzo un insegnante".Altre due scuole sono site in zone più decentrate, ma operanti all'interno di aree socio-culturali di buon livello.
* Sono poche le scuole coinvolte, eppure sono sensibilmente scollegate; l'una conosce poco e male cosa fa l'altra ed in qualche caso all'interno dello stesso istituto

gli insegnanti impegnati nelle sperimentazioni ignorano cosa succede nella parte complementare della scuola; accade anche che si regolino in modo abbastanza autonomo gli stessi colleghi di cordata.

Qualche altro dettaglio:

- Il Virgilio (centro storico) ha quattro indirizzi: il classico, lo scientifico, il moderno (alias linguistico), l'informatico (gli ultimi due i più richiesti). Vi sono interessati grosso modo un terzo degli allievi su mille.
- il Mamiani (centrocittà, Prati) di indirizzi ne ha tre: il classico, lo scientifico, il linguistico. Qui il più richiesto è l'indirizzo scientifico. Sono interessati alla sperimentazione poco più di 150 allievi su un migliaio.
- il Peano (area sud della città) ha due soli indirizzi, lo scientifico ed il linguistico; vi sono impegnati circa 400 allievi su 1.400.
- il XXIV liceo sperimentale (area a cavallo tra l'Appia e la Tuscolana, fuori S. Giovanni) ha tre indirizzi: il classico, lo scientifico ed il linguistico con netta prevalenza di studenti in quest'ultimo. Gli allievi sono oltre 500. Non ha al suo interno sezioni non sperimentali.

Va notato il fatto che in nessuno dei quattro si è riusciti ad istituire un indirizzo psicopedagogico e che anche quello classico non trova molte richieste. E' un segno questo che chi si dirige verso i licei non lo fa certo per dedicarsi a studi magistrali.

3. E' il caso di segnalare che in due altri istituti romani - LG Tasso e ITI Lagrange - sono da qualche anno condotte due minisperimentazioni spontanee che interessano la matematica, In uno un'insegnante prova a servirsi de "Il metodo matematico" il libro di Lombardo Radice/Proia, come testo per svolgere un programma innovativo;nel secondo due docenti - uno di matematica, l'altro di fisica - conducono in comune un esperimento tendente a rendere familiari ai loro allievi l'uso delle calcolatrici tascabili programmabili (HP).

La prima di queste "mini", condotta in piena solitudine ma con buon impegno, è ora (1986/7) al suo quarto anno. E' indice di un fatto: che quando un docente ha veramente voglia di introdurre una carta nuova nel suo lavoro d'ogni giorno, nella sostanza non trova ostacoli insormontabili. Volendolo, riesce a fare un esperimento.

A conoscenza di chi scrive, ci sono altri docenti a Roma che riescono a fare la stessa cosa, senza nemmeno preoccuparsi di invocare l'approvazione del collegio docenti (art. 2 DPR 419). In tal caso niente cambia, salvo il fatto che di solito di una simile fatica nessuno sa niente tranne il diretto interessato. Il risultato che ne viene è che nessuno riesce più a dare un'immagine completa dei tentativi di aggiornamento che vengono fatti nelle scuole. La mini richiamata avverte in ogni caso che nell'area romana i pochi tentativi innovativi del settore si richiamano generalmente al testo sopra ricordato.

4. Il quadro orario delle "maxi" è stato condensato in due tabelle. Nella prima se ne da un'immagine di sintesi, indicandone, ai vari livelli, le ore complessive d'insegnamento per settimana (h/s) e quelle dell' "area comune". Nella seconda si da un maggior dettaglio in termini h/s dell'insegnamento scientifico ed in parentesi si indica con le stesse unità il tempo previsto per l'insegnamento della matematica.

La tab. 1 rende immediatamente percepibili due cose: * sin dal primo anno nelle sezioni sperimentali si ha una forte dilatazione dell'impegno orario a scuola; * si registra ancora una forte impronta unitaria dalla quale si stenta per ora ad uscire. Al XXIV liceo sperimentale, p.e., all'ultimo anno di corso l'area comune copre ancora il 60% del tempo globale.

La dilatazione oraria consente di riequilibrare il peso delle varie aree culturali. Quella scientifica risulta ora presente come in tab.2, una tabella di non facile lettura, ma che permette con un po' di buona volontà di darsi un'idea d'assieme di come si sia operato nei vari casi.

Al Mamiani per esempio in area comune nel biennio sono state assegnate agli insegnanti scientifici 7h/s/27, dunque il 26% delle ore disponibili; al XXIV 10/36, una percentuale analoga; abbastanza di più al LS Penao (39%) ed al LG Virgilio (37%). Il che indica che da una parte sono stati potenziati notevolmente gli insegnamenti scientifici, da qualche altra meno; si è in ogni caso lontani dagli squilibri dei cirrucoli ancora oggi vigenti.

Le indicazioni circa le ore settimanali dedicate all'insegnamento matematico sono state date, come è stato detto, in parentesi; grosso modo la tab.2 avverte che al Mamiani non si è stati particolarmente generosi contrariamente a quanto avviene al Peano; gli altri due casi si trovano a metà strada. Al triennio per gli indirizzi non scientifici ci si è regolati pressochè allo stesso modo nei quattro istituti, ma al XXIV s'è dato più spazio agli insegnamenti scientifici sperimentali.

In sintesi è al Peano che si concedono più ore all'insegnamento scientifico nel suo complesso ed alla matematica in particolare. Visto il tipo d'istituto è ragionevole che sia così ma viene sottolineato all'ispettore che un tale risultato é costato

tab.1 - La struttura oraria dei corsi. La prima cifra indica il numero di ore per settimana assegnate all'area comune, la seconda il numero complessivo di ore di lezioni.

	biennio	III-IV anno	V anno
LG Virgilio	30/36 h/S	21/34 h/s	14/34 h/s
LG Mamiani	27/35 h/s	22-17/35 h/s	12/35 h/s
LS Peano	28/34 h/s	20/34 h/s	16/36 h/s
XXIV L. sper.	36/36 h/s	22/36 h/s	22/36 h/s

tab.2 - La distribuzione in ore/settimanali degli insegnamenti scientifici nei quattro licei secondo gli anni di corso e gli indirizzi:in parente le ore di matematica.

	LG Mamiani	LS Peano	XXIV L.Sp	LG Virgilio
biennio				
area comune	7(3)	11(5)	10(4)	11(4)
indir. non scient.		-	-	-
indir. scientifico	4(2)	3 o 6(3)	-	3(-)
triennio				
area comune: I - II anno	4(2)	7(3)	3 o 2(3 o 2)	4(2)
III anno	-	3(3)	2(2)	2(2)
indir. non scientifici				
I - II anno	2 o 0(-)	-	4 o 5(0 o 1)	2 o 0(-)
III anno	2(2)	-	4(1)	2 o 0(-)
indir. scientifici				
I - II anno	10(3)	10(3)	11 o 12(2)	10(2)
III anno	15(6)	14(3)	12(3)	13(4)

molta fatica. Si trova altresì che al XXIV la distribuzione oraria è meno articolata; ciò dipende dal fatto che quel liceo è nato all'insegna della formula "unitaria" ed è stato poco modificato nel prosieguo, differentemente da quanto è avvenuto negli altri istituti.

Si può dire che nelle sperimentazioni considerate la presenza della matematica si ritrova in ogni caso lungo l'intero corso degli indirizzi non scientifici, fermo restando il fatto che per gli indirizzi scientifici di ore settimanali questo insegnamento ne viene a disporre di almeno quattro per anno.

5. Particolarmente significativo si rivela l'insieme delle indicazioni offerte dalla scelta dei libri di testo. Come è noto, il mercato librario da un po' di anni in materia di matematica ha imparato ad offrire testi innovativi, anche di produzione estera.Chi nelle scuole ha provato ad introdurre qualche modifica nel suo lavoro ha trovato qualcosa su cui appoggiarsi, pur se ciò non può certo bastare per aggiornare in profondità l'insegnamento. Gli istituti esaminati hanno in questo senso operato in maniera differente.

Il Virgilio, per esempio, è rimasto nel tempo fedele al già citato "metodo matematico" di Lombardo Radice/Proia e se ne può capire il perchè. Nella prima parte degli anni settanta è stato proprio in quell'istituto che il "metodo" è stato messo a punto e sperimentato da uno degli autori che lì insegnava ed è comprensibile che una simile linea vi abbia nel tempo messo radici. Quello richiamato è ancora considerato il testo chiave, anche se in un corso è invece adoperato il testo recentemente curato da Maraschini e Palma, entrambi docenti dell'istituto. Pur se per approfondimenti vari il gruppo sperimentale si serve talvolta di testi d'appoggio, i testi d'elezione sono i due sopradetti.

Sono testi che riflettono idee, temi di lavoro e metodi messi a punto in un'area culturale che ruota attorno all'istituto matematico dell'università di Roma. Ancora adesso il laboratorio didattico di quella università è un centro attivo d'iniziativa e di riflessione e costituisce un po' il punto di riferimento per chi nella regione s'interessa all'innovazione dell'insegnamento matematico.

Su una linea leggermente diversa si muove il Peano. Qui nei primi tre anni si fa largo ricorso al testo di Maraschini-Palma ed anche, parallelamente, a testi come "il mondo dei numeri" di Oliverio, i due volumi del Munem tradotti da Zanichelli, "Intuire e dedurre" di Belli. Per il quinto anno di corso si utilizza una versione aggiornata dello Zwirner.

La scelta del Maraschini è intervenuta negli ultimi tempi dopo aver preso atto - così si afferma - che il testo di Lombardo Radice/ Proia soffre di due vizi: * è ritenuto da parecchi studenti "difficile" quanto al linguaggio utilizzato; * é piuttosto poveramente corredato da esempi. Ma bisogna considerare che al Peano prevale un orientamento sostanzialmente diverso rispetto al Virgilio: conviene - vi si sostiene - essere maggiormente attenti alle nuove pubblicazioni di qualità offerte dagli editori e provare ad inserirle nelle attività sperimentali. In questo senso l'istituto è più aggiornato e più aperto verso l'esterno.

6. Per gli atri due istituti va fatto un discorso diverso. Il Mamiani ha da tempo un solo corso completo sperimentale, pertanto la sua esperienza in materia sperimentale è relativamente di minor peso. Qui negli anni si è oscillato fra l'uso del "metodo" e del testo di Ferrauto. L'oscillazione è dipesa dal succedersi dei docenti del ramo. Ancora nel 1985/86 il testo in uso era il Ferrauto, cioè uno molto diffuso, ma anche molto tradizionale; per l'anno in corso si è tornati al LR/Mancini perchè la coppia dei docenti di matematica che nel frattempo è stata acquisita dal gruppo sperimentale sta provando a recuperare un orientamento innovativo. Accanto al testo richiamato si pensa di servirsi del nuovo testo di trigonometria della Castelnuovo e di un altro del Munem.

Quanto al XXIV liceo sperimentale va subito precisato che ogni docente adotta un testo di sua scelta; contrariamente a quanto succede negli altri tre istituti,qui si preferisce appoggiarsi a testi graditi ai singoli docenti. Il più adottato il Ferrauto; uno di essi utilizza parte del "metodo" e la trigonometria di Putto, un altro il Maracchia.

Il quadro che ne risulta è abbastanza leggibile. Da una parte, in linea con la connotazione di area sperimentale degli istituti qui richiamati, si scelgono testi che propongono non solo programmi, ma anche metodi didattici innovativi rispetto a quelli più consueti. Dall'altra si fa poco in questo senso e si oscilla fra la tentazione di misurarsi con testi di più moderno impianto e testi meglio padroneggiati perchè meglio conosciuti, pur se più tradizionali.

Una cosa che può sorprendere è la seguente: Il XXIV liceo è nato come istituto sperimentale di paragone. Vi si dovrebbe insistere in maggiore misura su temi di punta e maggiormente innovativi. Ed invece questo, almeno per la matematica, non vi viene fatto; sembra ignorata l'informatica. Probabilmente questo caso è da considerare una versione piuttosto anzianotta della sperimentazione.

7. Quanto ai temi nuovi introdotti nel "metodo" nei programmi di matematica sono da ricordare: * una geometria "fondata" sulle simmetrie, e, più in generale, sulle trasformazioni; * una più attenta definizione dei numeri e delle proprietà delle operazioni sui numeri; * i numeri complessi; * elementi di logica delle proposizioni; * elementi di programmazione lineare; * elementi della teoria dei gruppi; * elementi di probabilità e statistica; * il problema dell'infinito; * il richiamo di momenti storici significativi dello sviluppo della matematica.

Soprattutto c'è una diversa articolazione dei programmi ai vari livelli e, certamente, un loro ispessimento ed un maggior grado di complessità e di astrazione. Lo spazio concesso alla geometria euclidea viene sensibilmente ridotto; così è forse anche per l'analisi. Indubbiamente in un simile testo si fa ogni sforzo per presentare in un'ottica fondamentalmente diversa dalla tradizionale lo studio della matematica, un'ottica più critica, più moderna, culturalmente più avvertita.

Nel testo di Maraschini-Palma un certo numero di queste proposte vengono riprese, ma ad un livello più "facile", di minore complessità; si bada inoltre ad offrire una gamma più nutrita di esempi; si prova ad organizzare in modo didatticamente più efficace l'intero corso. Lo scopo che gli autori si ripromettono è di offrire un testo meno "traumatico" rispetto al primo per ridurre le diffidenze dei docenti e le difficoltà di approccio dello studente.

Giova ricordare che una parte dei temi introdotti nei due testi citati sono stati ripresi nei cinque punti dei "nuovi programmi" per il biennio ed è il secondo libro ad apparire più vicino a simili indicazioni. In verità non sembra che nei vari gruppi sperimentali sia stata fatta ancora una valutazione approfondita dei "nuovi programmi" - qualcuno non li conosce ancora - e sia stata considerata l'opportunità di modificare qualcosa nelle loro attività in conseguenza di quel varo.

Se poi si tiene conto che si dispone solo di un calcolatore (un Apple II) al liceo Mamiani, nessuno al XXIV, quattro al Peano (anche qui Apple), si può capire come il punto su "logica e informatica" sia ancora tutto da sviluppare.

8. E' il caso di riportare un insieme di osservazioni e di punti di vista raccolti fra gli sperimentatori su questioni specifiche.

a/ La compresenza in un istituto di più indirizzi si rivela di notevole interesse per tre motivi essenzialmente: * perchè si è in grado di mettere a confronto le abilità ed i metodi di più docenti operanti in "area comune" e negli insegnamenti di indirizzo; * perchè riesce più facile decidere dove e quando certi temi disciplinari è bene che vengano inseriti; * perchè gli studenti delle varie filiere finiscono per sollecitarsi a vicenda e così si arricchisce il loro livello conoscitivo di base.

b/ Il lavoro sperimentale permette di assicurare all'allievo una conoscenza scientifica di base intanto più ampia, ma soprattutto più meditata, meno superficiale; gli consente di andare oltre le semplici regole di calcolo. E' l'insegnamento del biennio che si rivela in questo senso critico.

c/ La reazione studentesca è in genere sorprendentemente positiva. I giovani si adattano presto al maggior carico di lavoro ed ai più frequenti incontri con i docenti. Qualcuno a fine corso ha anche concluso di aver perso il suo tempo, ma la maggioranza la pensa diversamente. Non è raro il caso di giovani che tornano in un secondo momento in istituto per mettere al corrente gli ex docenti dei percorsi universitari fatti e per riflettere con essi su presente e passato. La consuetudine a stare a lungo insieme rinsalda rapporti di fiducia ed esalta il ruolo del maestro.

d/ Al docente viene richiesto un diverso grado di partecipazione al lavoro scolastico. Ciò presenta un nodo critico: maggiore partecipazione significa anche più fatica, più tempo da spendere e non tutti i docenti possono permetterselo. A volte gli impegni extra scuola sono altrettanto incombenti e si finisce dopo qualche tempo per gettare la spugna. Se il gruppo che prosegue nella sperimentazione si rinsalda e si affina, gli altri alla prima occasione finiscono per trarsi fuori anche per l'assenza di un incentivo finanziario, di un qualche premio che ripaghi dei sacrifici sostenuti.

e/ All'interno dei gruppi sperimentali s'è creata la buona abitudine di incontrarsi con una certa frequenza per la discussione e la messa a punto di temi di lavoro che qualche volta vengono sviluppati in parallelo. In un istituto da un docente di lettere s'è fatto leggere agli allievi pagine del testo di matematica perchè egli chiarisse loro il significato del linguaggio in esso adottato.

Gli incontri fra docenti possono essere anche settimanali, sono più frequenti all'inizio d'anno e sono in genere abbastanza graditi; in qualche istituto a discutere sul taglio dei programmi e sugli obiettivi della sperimentazione sono stati coinvolti anche i genitori. Un elemento piuttosto importante di queste sperimentazioni sta proprio in questo: nella saldatura, intorno al lavoro educativi sperimentale, di gruppi di docenti che imparano in tal modo a riflettere in comune su un lavoro che fondamentalmente ha caratteri (e magari .. vizi) di artigianalità e di individualità.

f/ Difficoltà si incontrano nei rapporti con la parte non sperimentale degli istituti e con gli organismi amministrativi ufficiali. Ci sono poi sperimentazioni che in più momenti sono andate in crisi solo per il fatto che il gioco degli incarichi ha fatto sì che a gente non del tutto adatta fosse stata data l'incombenza di inserirsi nelle attività sperimentali.

g/ Nell'area sperimentale, accanto alle tradizionali, sono state introdotte nuove tecniche di valutazione: * si è fatto ricorso a diverse forme di test per seguire l'iter dell'apprendimento matematico; * sono state elaborate schede per illustrare gli interessi di studio di ogni allievo; * si è utilizzata la sequenza americana A-E per la valutazione dei diversi livelli di profitto individuale.

h/ Certamente una larga parte dei materiali didattici elaborati e, ovviamente, dell'esperienza acquisita è trasferibile nella prassi dei normali studi. Questa è la convinzione degli sperimentatori. Si verifica però che, benchè le richieste da parte degli allievi di iscriversi alle classi sperimentali siano sempre in esubero rispetto all'offerta di opportunità, le iniziative sperimentali non proliferino ed anzi rimangano circoscritte.

La spiegazione che si dà di un tal fatto é la seguente: * in istituto i contrasti fra il gruppo sperimentale e la parte non sperimentale sono in genere acuti ed ognuno tende a difendere il suo spazio; * il docente sperimentale non è un animale facile da modellare. Ma, a volte, scambi di informazione, di materiali didattici, di suggerimenti sono bene accetti con vantaggio generale.

i/ Un grosso difetto, in questo senso, è costituito dalla insufficiente elaborazione di documenti di sintesi per cui, per esempio, per chi ha provato a riassumere le esperienze condotte in un così lungo lasso di tempo la sorpresa è stata notevole.Non ne erano disponibili. Le sperimentazioni di cui si parla sono nate, cresciute, sono state più volte modificate; i docenti sono cambiati nel frattempo magari più volte, ma di una simile lunga storia quasi non si riesce più a recuperare le tracce.

9. In sintesi della sperimentazione "spontanea" dell'area romana si può dire che è riuscita a sopravvivere tra mille difficoltà e disattenzioni. Se non s'è spenta per strada, ciò deve essere dovuto al fatto che le ragioni che ne giustificavano la presenza - il rinnovo dell'insegnamento nei programmi, nelle metodologie - erano (e sono) valide. Non s'è avuta la proliferazione per tanti versi opportuna; ancora oggi vi sono interessati poco più di un migliaio degli oltre 50.000 studenti liceali della provincia ed in qualche istituto l'innovazione proposta nel settore matematico probabilmente ha funzionato a corrente alternata.

L'esperienza comunque è servita perchè: * ha abituato docenti e studenti a lavorare a scuola per almeno 34-36 h/s; * ha permesso di ispessire i programmi e di rinnovarli almeno in parte; * ha indotto gruppi di docenti a riflettere e ad operare congiuntamente: li ha abituati a seguire, valutare proposte provenienti dall'esterno. La qualità e l'impegno culturale di tali gruppi sono stati in più di un caso apprezzabili.

Il limite di una simile esperienza va visto nel fatto che tentativi di questo genere nell'area considerata sono stati veramente pochi e quelli impegnativi ancora meno. E' però vero che nuclei preparati all'innovazione, operanti all'interno delle scuole, sono necessari per un serio rinnovo di quest'ultima. Ergo, è opportuno che essi vengano in qualche modo protetti nell'intento di rendere disponibile - a livello nazionale - un circuito d'istituti di riferimento per una prova su piccola scala di "nuovi programmi", novità metodologiche, nuove linee curricolari, nuovi testi e così via.

Ma perchè un simile obiettivo sia concretamente raggiungibile occorrono più cose: * consolidare dopo uno screening i gruppi docenti, tenerli aggiornati e pagarli meglio; * collegare gli istituti in circuito; * attrezzare convenientemente gli istituti; * definire su scala nazionale un piccolo numero di programmi di lavoro su cui si possono far lavorare i docenti; * istituzionalizzare in qualche modo il rapporto università-scuole.

Sono tutte cose possibili e che non richiedono grosse somme, ma solo la volontà di avviare concretamente e con serietà il rinnovo dell'insegnamento, oltrechè qualche buona idea. Per gli ispettori significa qualcosa di più: un maggior coinvolgimento nelle sperimentazioni e, tanto per cominciare, un impegno serio a riassumere collegialmente i risultati su base regionale per procedere in un secondo tempo a confronti più generali in vista di una sintesi. E' noto che mancano ancora analisi d'un certo respiro delle esperienze maturate in seguito al varo del DPR 419, pur contandosi a centinaia le sperimentazioni "spontanee" attive.

R. Bolletta
Centro Europeo dell'Educazione

Stato di attuazione dei programmi della scuola media: come accertarlo?

A partire dall'autunno del 1984 ha preso avvio presso il CEDE (Centro Europeo della Educazione) di Frascati una indagine denominata VAMIO (Verifica Abilità Matematiche Istruzione dell'Obbligo). Il contesto problematico da cui è nata la proposta di ricerca è da un lato la discussione sempre aperta sull'uso del testing oggettivo nella verifica del rendimento matematico e dall'altro l'interesse mio e del CEDE di indagare sullo stato di attuazione dei programmi di matematica introdotti nel 1979 e che forse troppo facilmente si considerano come consolidati e largamente accettati. L'indagine non è conclusa ma ho ritenuto opportuno presentarla in questo convegno in cui risulta centrale il problema dell'innovazione dei programmi e del controllo della loro attuazione. Pur non potendo illustrare dei risultati definitivi ho cercato di evidenziare, nel poco tempo che avrò a disposizione, qualche spunto di riflessione concernente il tema del convegno.

STRUTTURA DELLA RICERCA

L'obiettivo operativo principale della ricerca VAMIO è quello di approntare e standardizzare un test a risposte chiuse da somministrare a studenti che escono dalla scuola media o che si iscrivono alla scuola secondaria superiore. Tale test potrà servire in futuro agli insegnanti di matematica dei due livelli scolastici da un lato per saggiare i risultati ottenuti alla fine del ciclo dell'obbligo, dall'altro per individuare eventuali carenze o lacune della preparazione su cui intervenire con una azione di recupero all'inizio del ciclo superiore.

Vi sono altri obiettivi secondari che la ricerca ha cercato di perseguire:

- raccogliere dati sul rendimento di un campione rappresentativo di studenti di terza media;
- raccogliere informazioni sullo stato di attuazione dei programmi di scuola media .

Per arrivare a tale traguardo abbiamo realizzato finora quattro fasi di lavoro:

A) indagine con questionario postale sul curricolo matematico realmente svolto nella scuola media,

B) analisi delle opportunità di apprendimento dichiarata dai docenti rispetto a un insieme di quesiti a risposta chiusa,

C) somministrazione di prova di un primo insieme di questiti su una ridotta popolazione di studenti,

D) somministrazione del test su un campione rappresentativo di studenti di terza media alla fine dell'a.s. 1985/86.

La fase A è stata svolta alla fine dell'anno scolastico 1984/85; la partecipazione delle scuole e dei singoli insegnanti, appartenenti ad un campione rappresentativo a livello nazionale, è stata notevolmente superiore alle nostre aspettative e l'analisi preliminare dei questionari sembra promettere dati interessanti ed attendibili. I 1300 questionari raccolti sono stati memorizzati ed è stata condotta una prima elaborazione per ricavare dati utili alla selezione dei quesiti.

Le fasi B e C sono state realizzate quasi contemporaneamente nel settembre-ottobre 1985: è stata approntata una collezione abbastanza vasta di quesiti e la si è sottoposta alla valutazione di ogni insegnante che aveva già partecipato alla fase A. Con apposita scheda è stato chiesto come sarebbero riusciti a rispondere gli allievi di terza media a ciascun quesito. Tale valutazione è un indice della facilità o difficoltà presunte del questito ma è anche un ulteriore indicatore del curricolo realmente svolto ovvero di quale grado di opportunità hanno avuto gli allievi di apprendere quel determinato contenuto saggiato dal quesito.

Nella fase C la collezione dei questiti è stata suddivisa in 4 parti costituenti 4 test distinti somministrati nei primi giorni dell'anno scolastico 1985-86 in 20 prime classi di 10 licei e istituti tecnici di Roma e di Grosseto. Sulla base dei dati raccolti in questa fase è stato possibile effettuare la selezione finale dei quesiti, in alcuni casi modificarne la forma ed integrarli con altri nuovi.

Nella fase D il test, articolato in due parti, è stato somministrato alla fine dell'anno scolastico 1985/86 su un campione di studenti frequentanti 200 classi estratte in altrettante scuole medie statali italiane a loro volta casualmente estratte. I dati raccolti in questa fase permetteranno di avere una conoscenza più aggiornata dello stato della preparazione complessiva in matematica degli studenti che escono dalla scuola media e allo stesso tempo di standardizzare i punteggi del test su una popolazione rappresentativa.

Questa struttura della ricerca, in cui si costruisce uno strumento di misura dei rendimenti non sulla base di un curricolo teorico o ufficiale ma sulla base del curricolo realmente svolto così come viene interpretato, attuato e dichiarato dagli stessi insegnanti, si rifà direttamente agli schemi di lavoro dello IEA (Internationl Association of Educational Achievement) alle cui ricerche il CEDE collabora fin dalla propria istituzione. Lo schema a cui mi sono rifatto tende sostanzialmente ad incrociare tre tipi di informazioni: l'enfasi che ciascun insegnante riserva ad ogni parte del programma, cioè a quanto tempo dichiara di dedicare ad ogni argomento del programma, l'opportunità di apprendimento che gli allievi hanno avuto di apprendere le conoscenze necessarie a rispondere correttamente ad un determinato quesito e i risultati ottenuti dagli allievi in un test oggettivo. Il tutto viene realizzato mediante questionari scritti inviati e raccolti per posta: si tratta di tecniche volutamente poco costose, di facile e semplice gestione che permettono con risorse limitate di interessare popolazioni di rispondenti abbastanza vaste.

Come si può intuire l'intreccio delle variabili rilevate nell'indagine è piuttosto complesso e l'analisi dei dati, la cui registrazione non è ancora terminata, richiederà alcuni mesi di lavoro. Un primo rapporto è previsto per la fine di marzo del 1987 ed un secondo entro il settembre dello stesso anno.

I dati che sono presentati in allegato alla relazione si riferiscono alla prima fase dell'indagine e cioè alla somministrazione del questionario sul curricolo realmente svolto nella scuola media. Il questionario utilizzato per la somministrazione consiste fondamentalmente in un elenco di 157 argomenti che descrivono il programma ministeriale di matematica. Per ogni argomento si chiedeva di indicare con una scala a cinque valori l'ammontare del tempo ad esso dedicato lungo l'arco dei tre anni. Mediante altre due scale si chiedeva all'insegnante di indicare come veniva distribuito l'argomento lungo l'arco dei tre anni e se l'argomento stesso risultava più o meno difficile per i ragazzi.

Nello stesso questionario venivano rilevate molte altre variabili che vanno da quelle che si riferiscono ai caratteri anagrafici agli atteggiamenti didattici, dalla carriera al libro di testo in uso.

Una prima riflessione sulla distribuzione dell'enfasi e del numero di coloro che dicono di non svolgere affatto un dato argomento permette di formulare le sequenti ipotesi:

- gli insegnanti sembrano avere risposto in modo abbastanza attendibile fornendo una immagine del programma realmente svolto assai vicina a quello che è ragionevole supporre in base alle conoscenze che tutti noi abbiamo sullo stato di fatto;
- esiste una parte del programma su cui la maggior parte degli insegnanti sembra concordare mentre le parti più nuove sembrano costituire una zona per così dire 'opzionale' in cui esiste una notevole variabilità degli atteggiamenti;
- sembra emergere la tendenza a liquidare con pochi cenni molti degli argomenti innovativi riservando una trattazione più sistematica agli argomenti più consolidati nella pratica didattica.

Come ho già detto per arrivare a qualche conclusione più significativa occorre rielaborare questi stessi dati individuando all'interno del campione intervistato dei cluster che, possibilmente, individuino delle tipologie didattiche o delle tendenze interpretative dei programmi, occorre tener conto dei dati sulle opportunità di apprendimento ed infine occorre analizzare i rendimenti effettivi degli studenti testati.

In ogni caso i numerosi commenti liberi presenti alla fine dei questionari hanno insistito in modo quasi unanime sulla impossibilità a realizzare compiutamente dei programmi che appaiono troppo estesi e troppo ricchi di suggestioni difficilmente traducibili in classe.

Per maggiori informazioni sulla ricerca e sui risultati scrivere a:

CENTRO EUROPEO DELL'EDUCAZIONE
INDAGINE VAMIO
Villa Falconieri
00044 FRASCATI

Completare la seguente tabella riportando per ogni argomento 3 numeri aventi il seguente significato:

COLONNA I

importanza dell'argomento considerando principalmente il tempo dedicato al suo svolgimento.

scala:
- 0 = l'argomento non viene svolto
- 1 = brevi cenni indispensabili durante una o più lezioni
- 2 = trattazione sommaria, ma organica
- 3 = trattazione organica nel corso di 5-8 lezioni, anche in anni diversi
- 4 = trattazione sistematica e ripetuta nel tempo
- 5 = particolare insistenza ripetuta in varie occasioni per un totale almeno di 20-30 lezioni nei tre anni

COLONNA II

in quale anno viene normalmente svolto.

codici:
- 0 = mai
- 1 = solo nel primo anno
- 2 = solo nel secondo anno
- 3 = solo nel terzo anno
- 4 = nel primo e nel secondo anno
- 5 = nel secondo e terzo anno
- 6 = nel primo e nel terzo anno
- 7 = in tutti e tre gli anni

COLONNA III

grado di difficoltà dell'argomento per gli studenti

scala:
- 1 = molto facile
- 2 =
- 3 = situazioni intermedie
- 4 =
- 5 = particolarmente difficile

NOTA BENE! gli argomenti qui riportati sono una parte di quelli presenti nel questionario

		I	II	III
GEO	GEOMETRIA PRIMA RAPPRESENTAZIONE DEL MONDO FISICO [A]			
01	Studio delle figure del piano a partire da modelli naturali	[ ]	[ ]	[ ]
02	Costruzione del triangolo con materiale	[ ]	[ ]	[ ]
03	Disegno di figure geometriche piane	[ ]	[ ]	[ ]
04	Nomenclatura relativa ai poligoni	[ ]	[ ]	[ ]
05	Rappresentazione di Venn dell'insieme dei poligoni	[ ]	[ ]	[ ]
06	Calcolo di perimetri ed aree di quadrilateri	[ ]	[ ]	[ ]
07	Simmetrie nel quadrato	[ ]	[ ]	[ ]
08	Simmetrie nei quadrilateri	[ ]	[ ]	[ ]
09	Assi di simmetria nei triangoli	[ ]	[ ]	[ ]
10	Figure equivalenti	[ ]	[ ]	[ ]
11	Convessità e concavità dei poligoni	[ ]	[ ]	[ ]
12	Studio di poligoni regolari	[ ]	[ ]	[ ]
13	Il teorema di Pitagora	[ ]	[ ]	[ ]
14	Applicazioni del teorema di Pitagora alla soluzione di problemi geometrici	[ ]	[ ]	[ ]
15	Uso di riga squadra e compasso nelle costruzioni geometriche	[ ]	[ ]	[ ]
16	Il problema del calcolo del pi greco	[ ]	[ ]	[ ]
17	Problema della quadratura del cerchio	[ ]	[ ]	[ ]
18	Poligoni iscritti e circoscritti a una circonferenza	[ ]	[ ]	[ ]
19	Tangenza tra circonferenza e rette	[ ]	[ ]	[ ]
20	Angoli alla circonferenza e angoli al centro	[ ]	[ ]	[ ]
21	Posizioni reciproche di rette nello spazio	[ ]	[ ]	[ ]
22	Diedri	[ ]	[ ]	[ ]
23	Angoloidi	[ ]	[ ]	[ ]
24	Studio delle figure solide a partire da modelli naturali	[ ]	[ ]	[ ]
25	Poliedri regolari	[ ]	[ ]	[ ]
26	Assi di simmetria in poliedri regolari	[ ]	[ ]	[ ]

27 Relazione di Eulero tra gli elementi di
un poliedro .... [ ][ ][ ]
28 Cubo .... [ ][ ][ ]
29 Sezioni piane del cubo .... [ ][ ][ ]
30 Parallelepipedo .... [ ][ ][ ]
31 Prisma .... [ ][ ][ ]
32 Piramide .... [ ][ ][ ]
33 Cilindro .... [ ][ ][ ]
34 Cono .... [ ][ ][ ]
35 Sfera .... [ ][ ][ ]
36 Sezioni piane del cono e del cilindro .... [ ][ ][ ]
37 Solidi composti .... [ ][ ][ ]

NUM INSIEMI NUMERICI [B]

01 Insieme dei numeri naturali .... [ ][ ][ ]
02 Sistemi di numerazione antichi .... [ ][ ][ ]
03 Sistema metrico decimale .... [ ][ ][ ]
04 Aritmetica dei pari e dei dispari .... [ ][ ][ ]
05 Operazioni con numeri relativi .... [ ][ ][ ]
06 Confronto di numeri relativi .... [ ][ ][ ]
07 Rappresentazione grafica di numeri relativi .... [ ][ ][ ]
08 Frazione come operatore .... [ ][ ][ ]
09 Frazioni equivalenti .... [ ][ ][ ]
10 Concetto di rapporto .... [ ][ ][ ]
11 Percentuali .... [ ][ ][ ]
12 Espressioni con numeri razionali .... [ ][ ][ ]
13 Proporzioni .... [ ][ ][ ]
14 Calcolo di un termine incognito in una
proporzione .... [ ][ ][ ]
15 Applicazione di proporzioni alla soluzione
di problemi .... [ ][ ][ ]
16 Rappresentazione dei razionali sulla retta
orientata .... [ ][ ][ ]
17 Scrittura decimale dei numeri razionali .... [ ][ ][ ]

18 Decimali limitati e decimali periodici .... [ ][ ][ ]
19 Sistema di numerazione in base 2 .... [ ][ ][ ]
20 Sistemi di numerazione in base diversa da 10 .... [ ][ ][ ]
21 Ordine di grandezza .... [ ][ ][ ]
22 Operazioni numeriche dirette e inverse .... [ ][ ][ ]
23 Proprietà delle operazioni numeriche .... [ ][ ][ ]
24 Elevamento a potenza .... [ ][ ][ ]
25 Regola per l'estrazione di radice quadrata .... [ ][ ][ ]
26 Metodi per il calcolo approssimato della
radice quadrata .... [ ][ ][ ]
27 Multipli e divisori comuni a più numeri .... [ ][ ][ ]
28 Scomposizione di fattori primi .... [ ][ ][ ]
29 Regole per il calcolo del MCD e mcm .... [ ][ ][ ]
30 Esercizi di calcolo esatto e approssimato .... [ ][ ][ ]
31 Approssimazioni successive come avvio
ai numeri reali .... [ ][ ][ ]
32 Uso ragionato di tavole numeriche .... [ ][ ][ ]
33 Uso di calcolatori tascabili .... [ ][ ][ ]

PRO MATEMATICA DEL CERTO E MATEMATICA DEL PROBABILE [C]

01 Affermazioni di tipo vero falso e
affermazioni di tipo probabilistico .... [ ][ ][ ]
02 Connettivi logici .... [ ][ ][ ]
03 Circuiti elettrici .... [ ][ ][ ]
04 Operazioni logiche e operazioni tra insiemi .... [ ][ ][ ]
05 Rilevamenti statistici .... [ ][ ][ ]
06 Areogrammi .... [ ][ ][ ]
07 Ideogrammi .... [ ][ ][ ]
08 Istogrammi .... [ ][ ][ ]
09 Cartogrammi .... [ ][ ][ ]
10 Frequenza assoluta .... [ ][ ][ ]
11 Frequenza relativa .... [ ][ ][ ]
12 Percentuali .... [ ][ ][ ]
13 Media aritmetica semplice .... [ ][ ][ ]

14 Rilevazione statistica .... [ ] [ ] [ ]
15 Fasi di una indagine statistica .... [ ] [ ] [ ]
16 Variabili discrete e continue .... [ ] [ ] [ ]
17 Serie e seriazioni .... [ ] [ ] [ ]
18 Vari tipi di tabelle .... [ ] [ ] [ ]
19 Moda .... [ ] [ ] [ ]
20 Mediana .... [ ] [ ] [ ]
21 Media aritmetica ponderata .... [ ] [ ] [ ]
22 Leggi sperimentali e interpolazione .... [ ] [ ] [ ]
23 Campionamento .... [ ] [ ] [ ]
24 Statistica e probabilità .... [ ] [ ] [ ]
25 Media geometrica semplice .... [ ] [ ] [ ]
26 Proprietà della media aritmetica .... [ ] [ ] [ ]
27 Dispersione .... [ ] [ ] [ ]
28 Numeri indice .... [ ] [ ] [ ]
29 Curva di Gauss .... [ ] [ ] [ ]
30 Estrapolazione .... [ ] [ ] [ ]
31 Rappresentazioni grafiche in coordinate polari .... [ ] [ ] [ ]
32 Proprietà della mediana .... [ ] [ ] [ ]
33 Correlazione .... [ ] [ ] [ ]
34 Tavole di numeri casuali .... [ ] [ ] [ ]
35 Struttura di popolazioni per età .... [ ] [ ] [ ]
36 Accrescimento di popolazioni .... [ ] [ ] [ ]
37 Caratteristiche dei censimenti .... [ ] [ ] [ ]
38 Frequenze .... [ ] [ ] [ ]

COO IL METODO DELLE COORDINATE [E]

01 Metodo delle coordinate in situazioni concrete .... [ ] [ ] [ ]
02 Lettura di carte topografiche e geografiche .... [ ] [ ] [ ]
03 Coordinate di un punto sulla retta .... [ ] [ ] [ ]
04 Coordinate di un punto sul piano .... [ ] [ ] [ ]
05 Rappresentazioni di poligoni sul piano quadrettato .... [ ] [ ] [ ]
06 Rappresentazione sul piano cartesiano di semplici leggi matematiche ricavate da fenomeni reali .... [ ] [ ] [ ]

07 Rappresentazione grafica della crescita esponenziale .... [ ] [ ] [ ]
08 Rappresentazione cartesiana della proporzionalità diretta ...... [ ] [ ] [ ]
09 Rappresentazione cartesiana della proporzionalità inversa ...... [ ] [ ] [ ]
10 Rappresentazione cartesiana della dipendenza quadratica .... [ ] [ ] [ ]
11 Equazioni di rette per l'origine .... [ ] [ ] [ ]
12 Equazioni di rette parallele agli assi .... [ ] [ ] [ ]
13 Equazioni di rette generiche .... [ ] [ ] [ ]
14 Condizione di perpendicolarità tra due rette .... [ ] [ ] [ ]
15 Rappresentazione grafica di disequazioni .... [ ] [ ] [ ]
16 Applicazioni a problemi di programmazione lineare .... [ ] [ ] [ ]
17 Studio analitico delle coniche .... [ ] [ ] [ ]

TRA TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE [F]

01 Misure di angoli .... [ ] [ ] [ ]
02 Uso del goniometro .... [ ] [ ] [ ]
03 Costruzione geom. di una bisettrice di un angolo .... [ ] [ ] [ ]
04 Somma degli angoli interni e esterni di un triangolo .... [ ] [ ] [ ]
05 Movimenti rigidi del piano .... [ ] [ ] [ ]
06 Traslazioni .... [ ] [ ] [ ]
07 Rotazioni .... [ ] [ ] [ ]
08 Simmetrie .... [ ] [ ] [ ]
09 Insieme delle isometrie e operazioni di composizione .... [ ] [ ] [ ]
10 Omotetie .... [ ] [ ] [ ]
11 Similitudini piane .... [ ] [ ] [ ]
12 Proprietà di figure simili .... [ ] [ ] [ ]
13 Rapporto tra le aree di figure simili .... [ ] [ ] [ ]
14 Riduzioni in scala .... [ ] [ ] [ ]

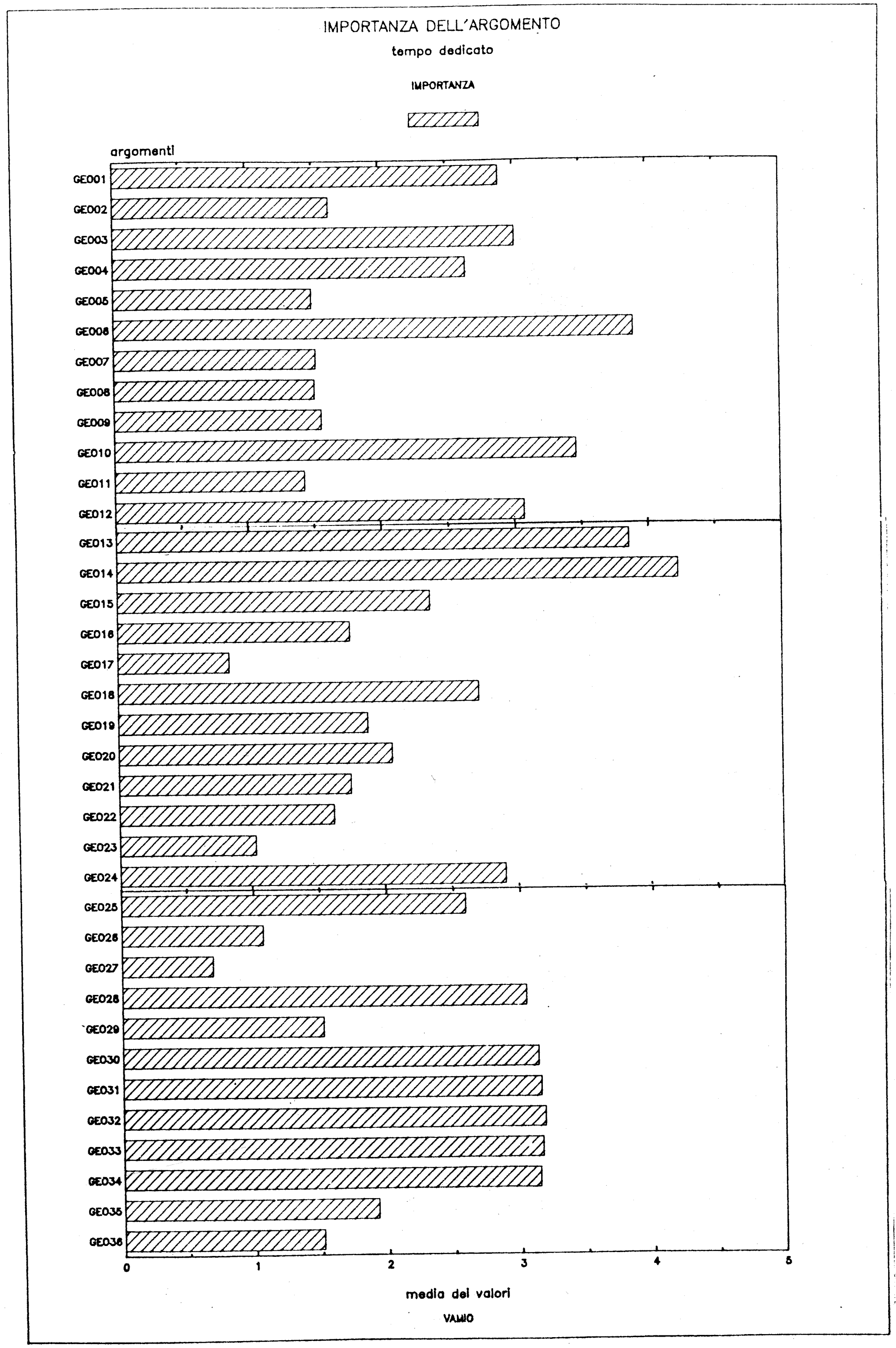
15 Osservazione di ombre sul piano .... [ ] [ ] [ ]

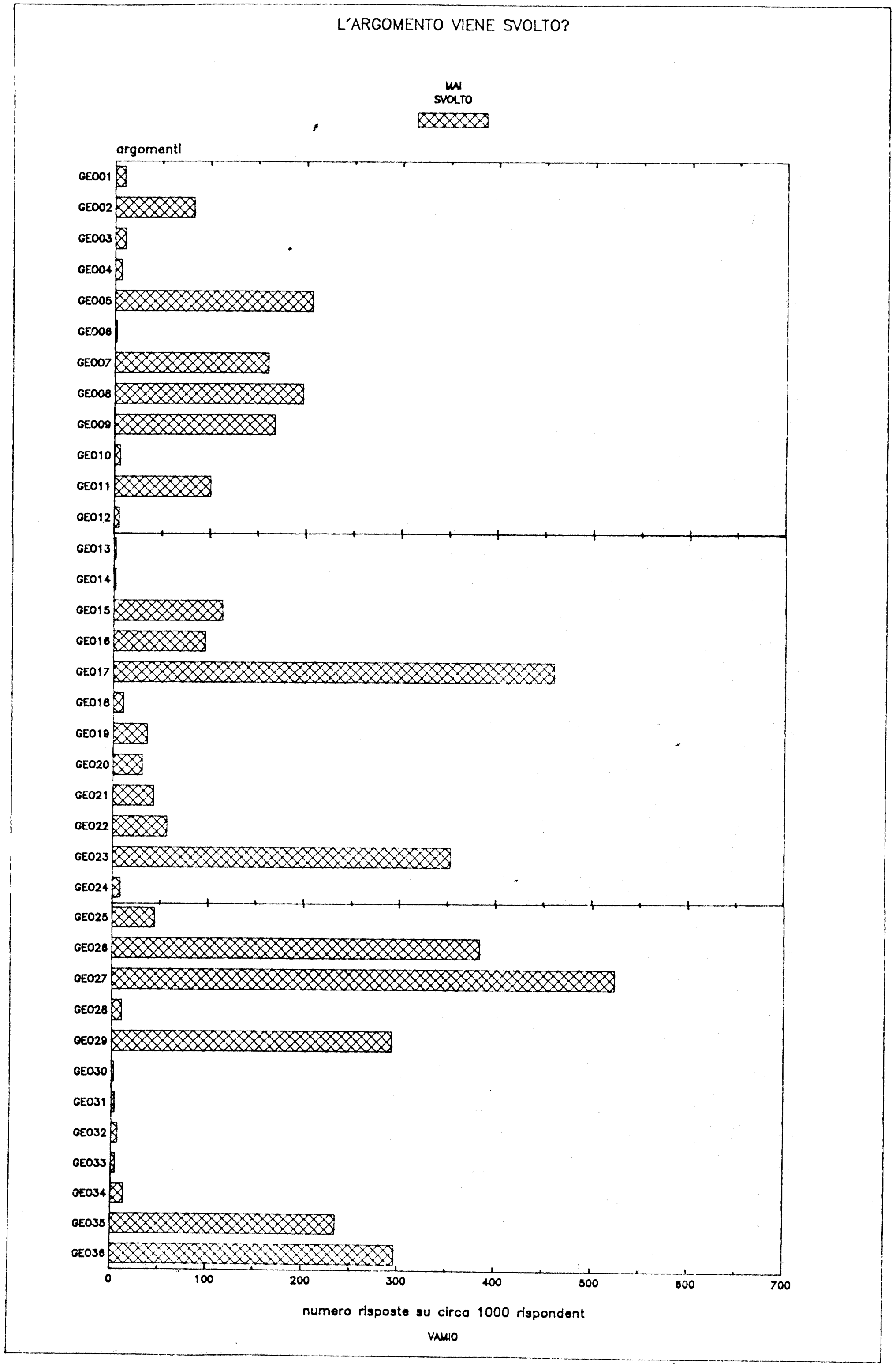
16 Proprietà delle trasformazioni affini .... [ ] [ ] [ ]

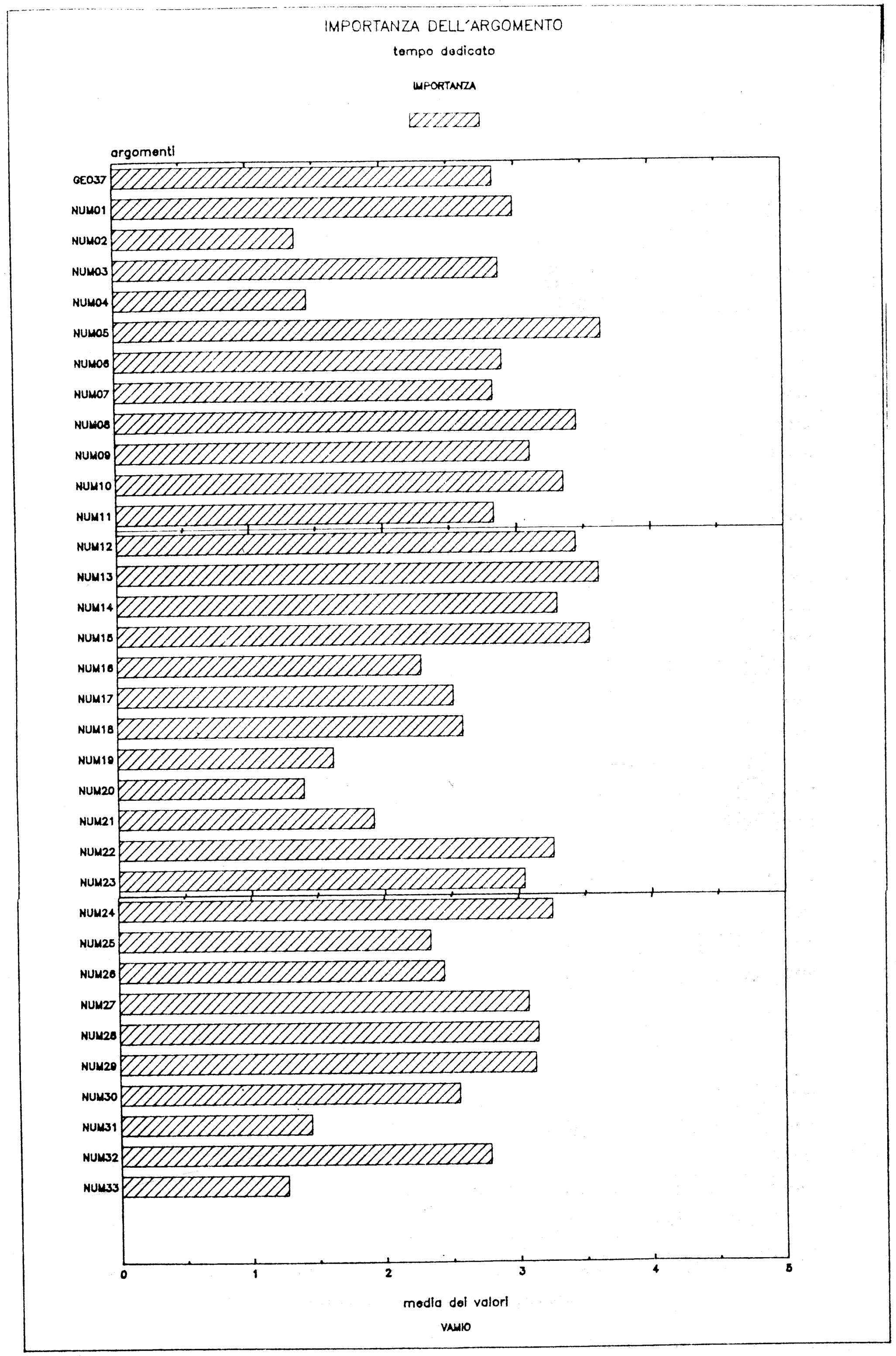
17 Equazioni dell'affinità .... [ ] [ ] [ ]

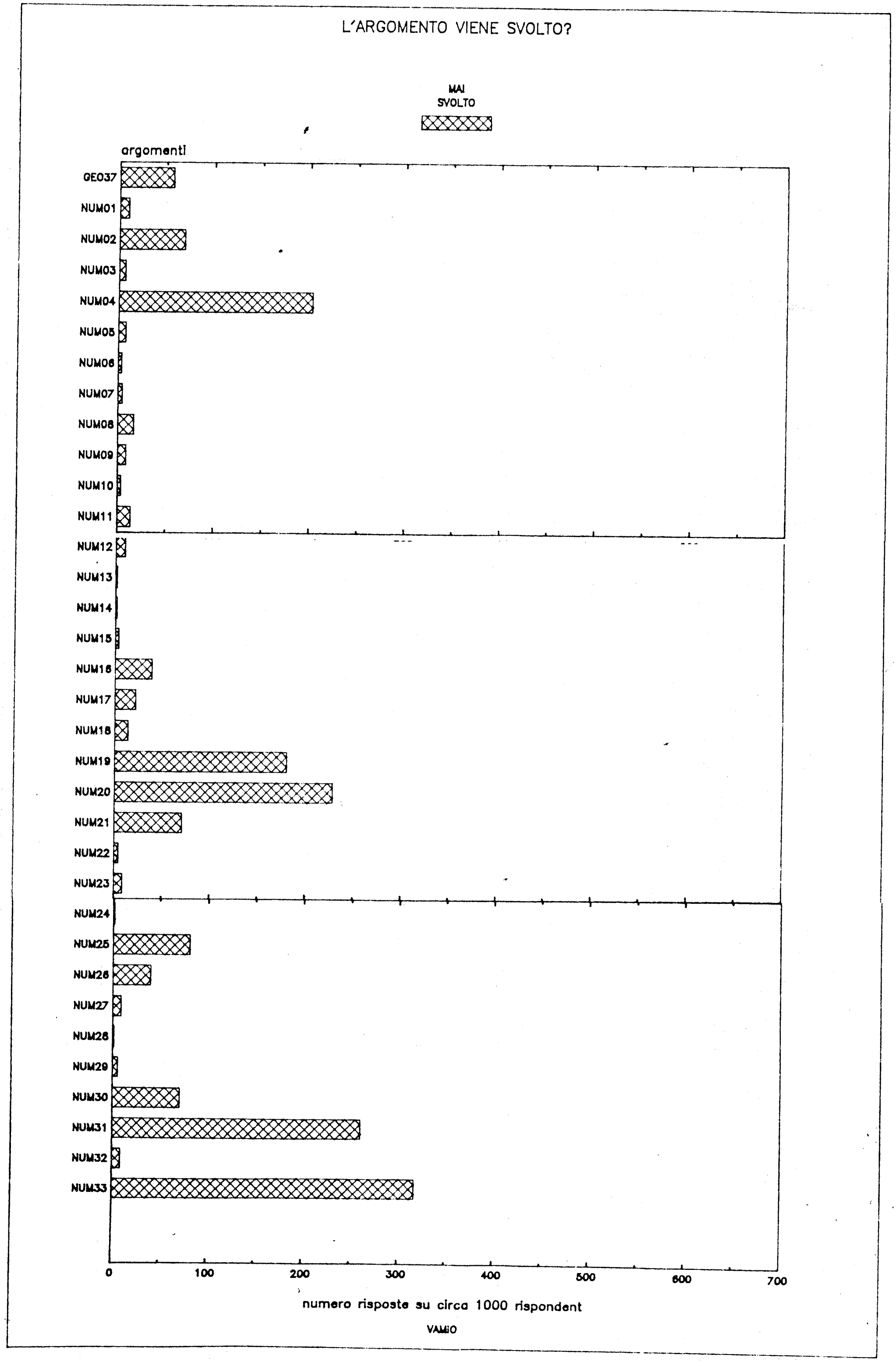
18 Equazioni della similitudine .... [ ] [ ] [ ]

19 Equazioni delle simmetrie rispetto agli
assi cartesiani o all'origine .... [ ] [ ] [ ]

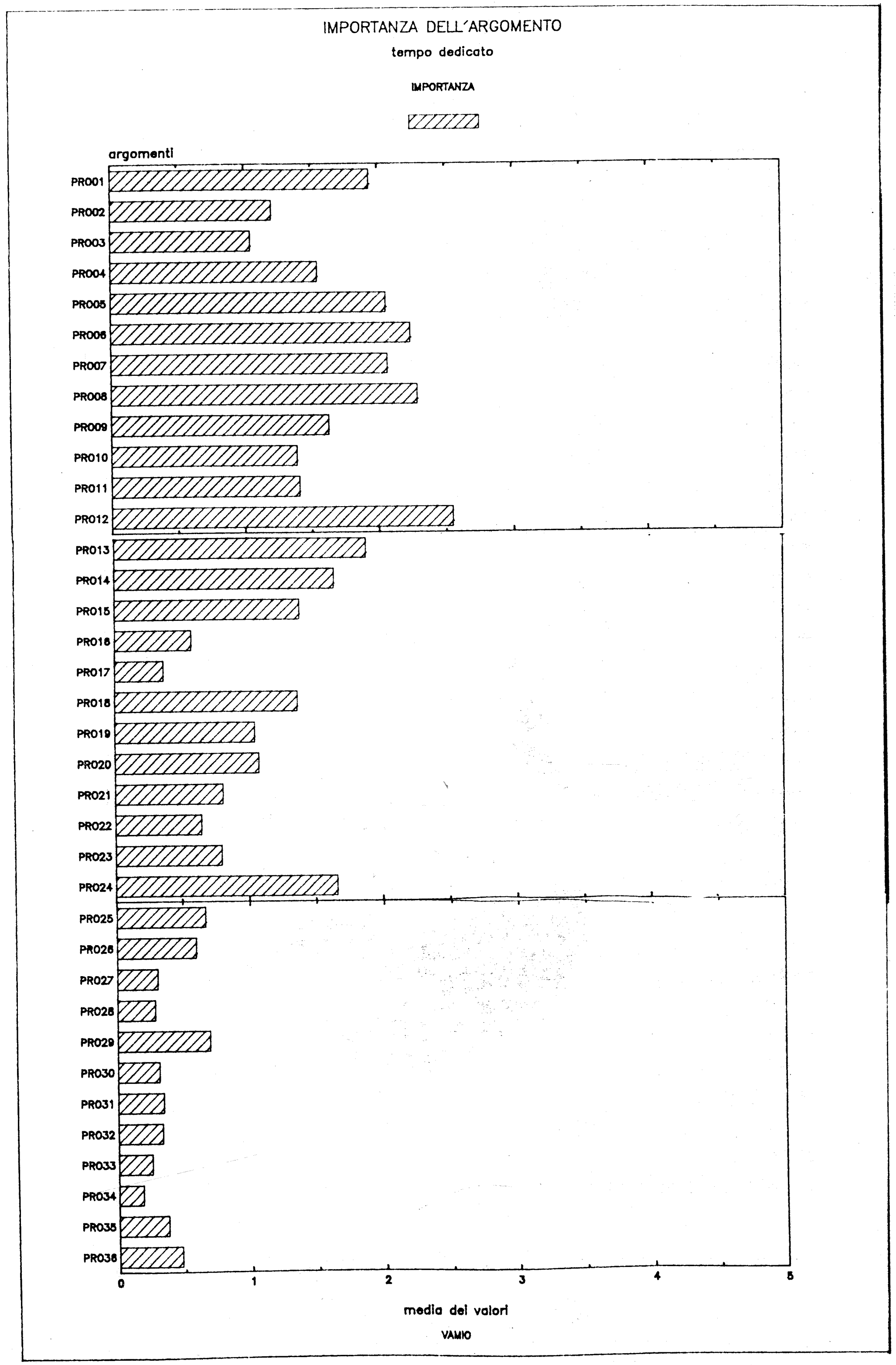



L'ARGOMENTO VIENE SVOLTO?
MAI SVOLTO
argomenti
GE001
GE002
GE003
GE004
GE005
GE006
GE007
GE008
GE009
GE010
GE011
GE012
GE013
GE014
GE015
GE016
GE017
GE018
GE019
GE020
GE021
GE022
GE023
GE024
GE025
GE026
GE027
GE028
GE029
GE030
GE031
GE032
GE033
GE034
GE035
GE036
0
100
200
300
400
500
600
700
numero risposte su circa 1000 rispondent
VAMIO

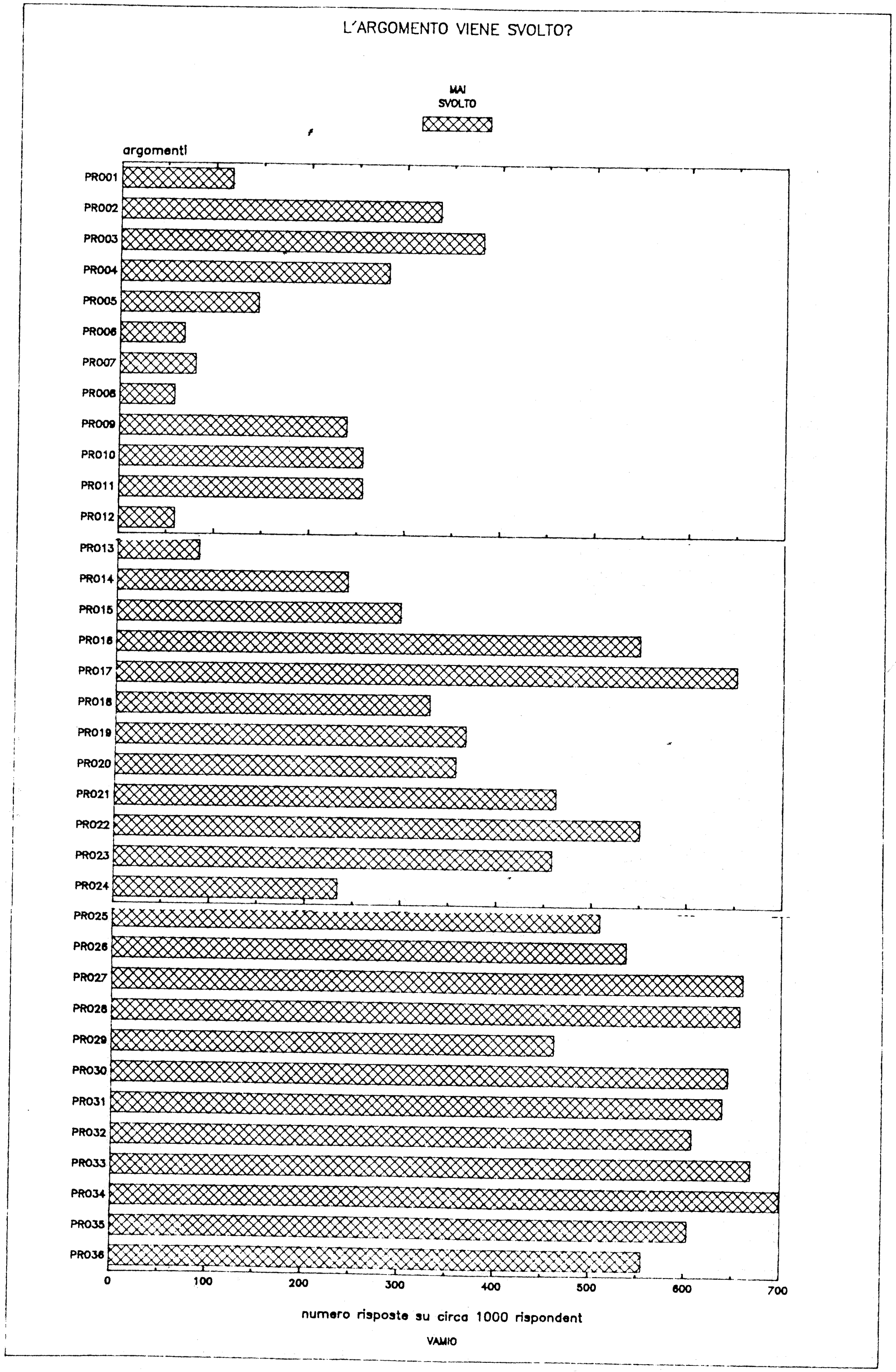

IMPORTANZA DELL'ARGOMENTO
tempo dedicato
IMPORTANZA
argomenti
GE037
NUM01
NUM02
NUM03
NUM04
NUM05
NUM06
NUM07
NUM08
NUM09
NUM10
NUM11
NUM12
NUM13
NUM14
NUM15
NUM16
NUM17
NUM18
NUM19
NUM20
NUM21
NUM22
NUM23
NUM24
NUM25
NUM26
NUM27
NUM28
NUM29
NUM30
NUM31
NUM32
NUM33
0
1
2
3
4
5
media dei valori
VAMIO



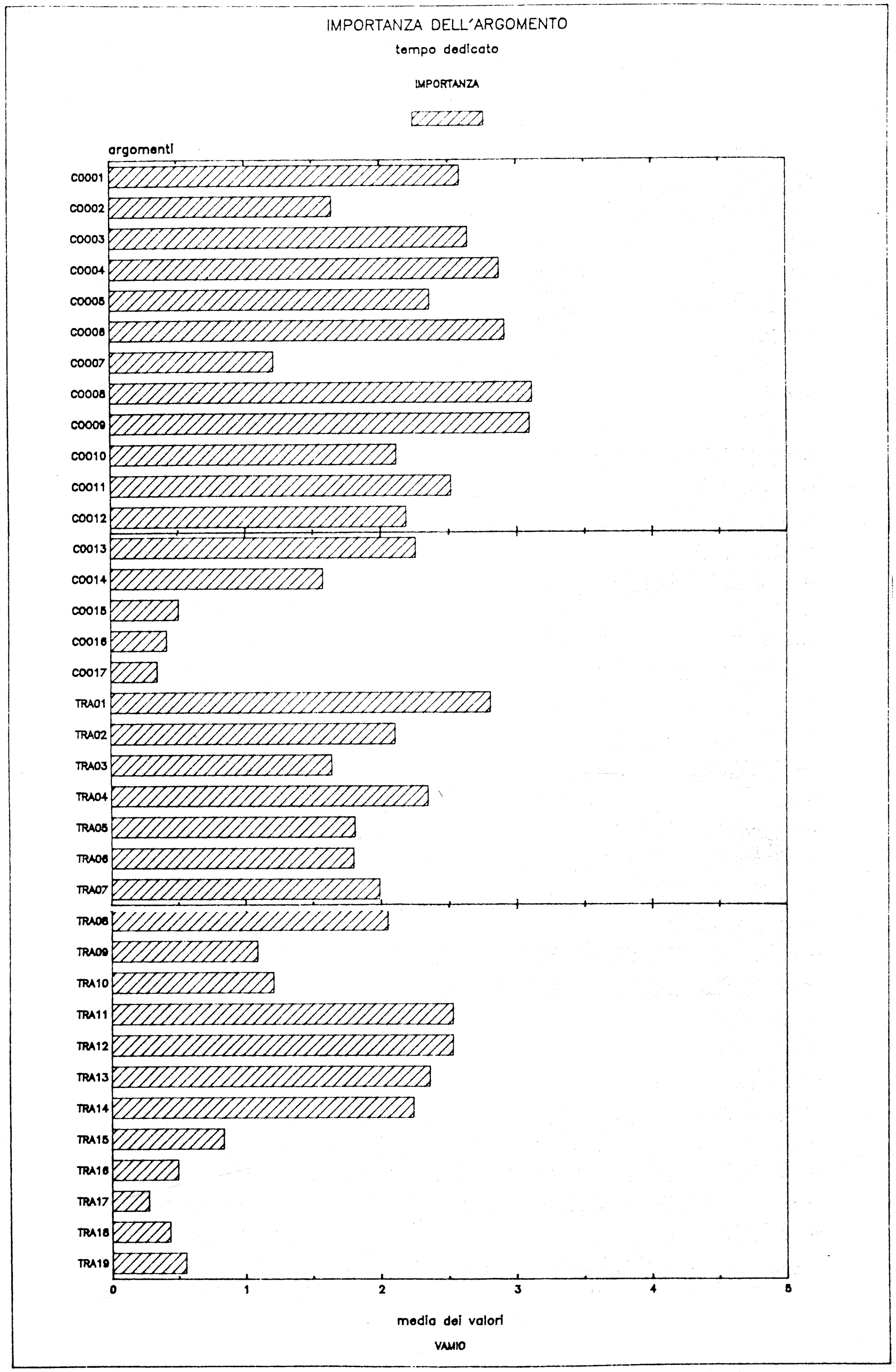
L'ARGOMENTO VIENE SVOLTO?
MAI SVOLTO
argomenti
GEO37
NUM01
NUM02
NUM03
NUM04
NUM05
NUM06
NUM07
NUM08
NUM09
NUM10
NUM11
NUM12
NUM13
NUM14
NUM15
NUM16
NUM17
NUM18
NUM19
NUM20
NUM21
NUM22
NUM23
NUM24
NUM25
NUM26
NUM27
NUM28
NUM29
NUM30
NUM31
NUM32
NUM33
0
100
200
300
400
500
600
700
numero risposte su circa 1000 rispondent
VAMIO



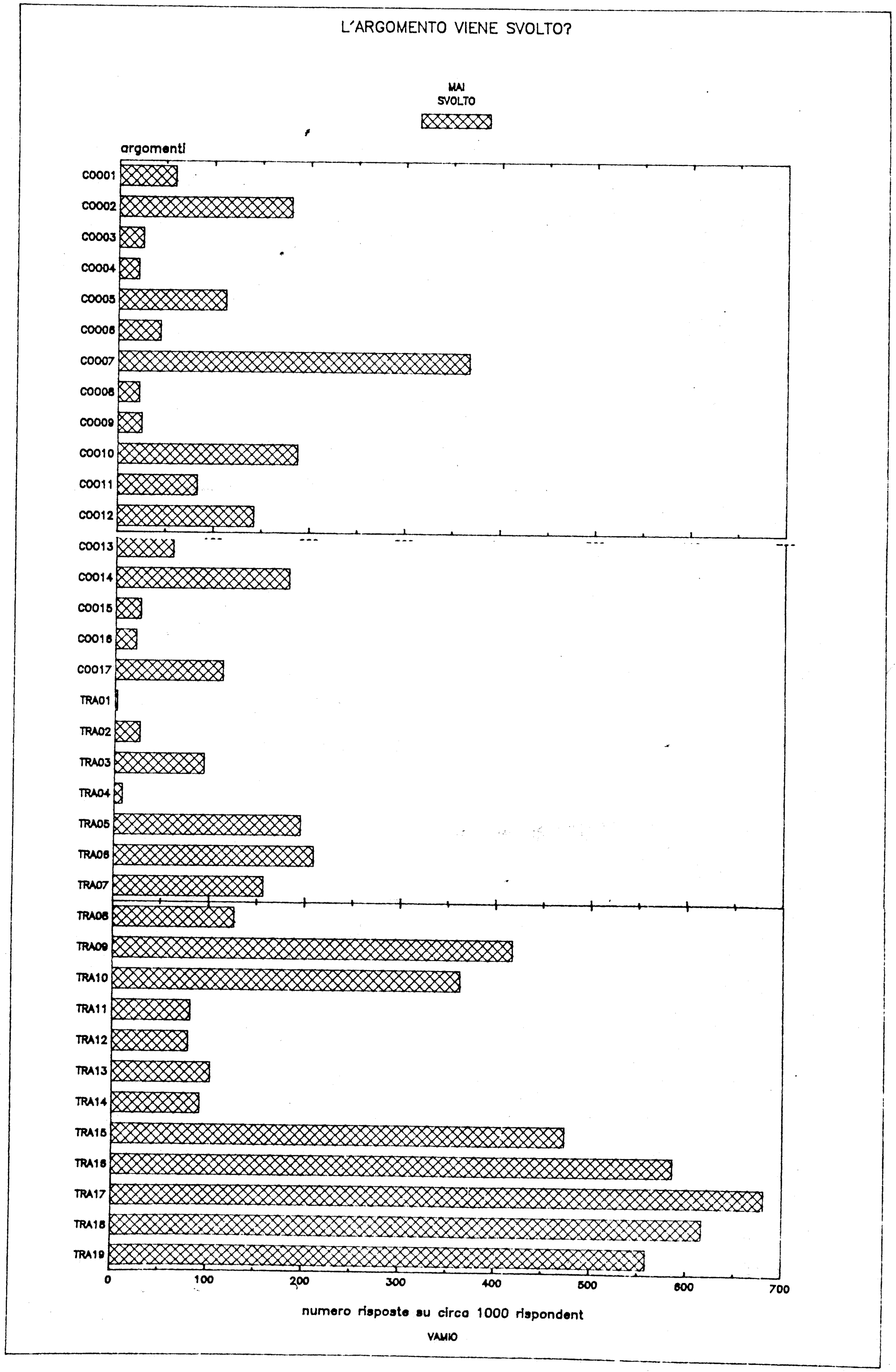
IMPORTANZA DELL'ARGOMENTO
tempo dedicato
IMPORTANZA
argomenti
PRO01
PRO02
PRO03
PRO04
PRO05
PRO06
PRO07
PRO08
PRO09
PRO10
PRO11
PRO12
PRO13
PRO14
PRO15
PRO16
PRO17
PRO18
PRO19
PRO20
PRO21
PRO22
PRO23
PRO24
PRO25
PRO26
PRO27
PRO28
PRO29
PRO30
PRO31
PRO32
PRO33
PRO34
PRO35
PRO36
0
1
2
3
4
5
media dei valori
VAMIO



L'ARGOMENTO VIENE SVOLTO?
MAI SVOLTO
argomenti
PR001
PR002
PR003
PR004
PR005
PR006
PR007
PR008
PR009
PR010
PR011
PR012
PR013
PR014
PR015
PR016
PR017
PR018
PR019
PR020
PR021
PR022
PR023
PR024
PR025
PR026
PR027
PR028
PR029
PR030
PR031
PR032
PR033
PR034
PR035
PR036
0 100 200 300 400 500 600 700
numero risposte su circa 1000 rispondent
VAMIO



IMPORTANZA DELL'ARGOMENTO
tempo dedicato
IMPORTANZA
argomenti
CO001
CO002
CO003
CO004
CO005
CO006
CO007
CO008
CO009
CO010
CO011
CO012
CO013
CO014
CO015
CO016
CO017
TRA01
TRA02
TRA03
TRA04
TRA05
TRA06
TRA07
TRA08
TRA09
TRA10
TRA11
TRA12
TRA13
TRA14
TRA15
TRA16
TRA17
TRA18
TRA19
0 1 2 3 4 5
media dei valori
VAMIO



Lista dei Partecipanti

ACCASCINA Giuseppe - Pisa
ADDUCE Raffaele - Caserta
ALBERTINI Pietro - Pavia
ALESSI Silvana - Verona
ANDREINI Annamaria - Bergamo
ANTONIAZZI Stefano - Treviso
ARCANGELI Fulvio - Verona
ARCIDIACO Giuseppe - Pavia
ARENA Massimo - Vibo Valentia
AREZZO Domenico - Genova
ARGENTI Lisa - Padova
ARGENTINI Ivano - Terni
ARRI Paolo - Asti
ARTUSI CHINI Liliana - Parma
ASCOLI BARTOLI M.Teresa - Roma
AURELI Gianfranco - Latina
AVANZINI Patrizia - Parma
BABINI Alessandra - Ancona
BANDINI M.Grazia - Piacenza
BARLOTTI Adriano - Firenze
BASSANI Angela - Varese
BASSETTO Anna Maria - Milano
BAZAN M.Chiara - Castelfranco Veneto
BAZZINI Luciana - Pavia
BERETTA Fabiola - Bergamo
BERNARDI Claudio - Siena
BERNASCONI Angela - Monza
BERNECOLI Sandra - Rovigo
BERTOLI Anna Rosa - Milano
BERTOTTO M. Rosa - Torino
BESTETTI Piera Emma - Milano
BETTI Patrizia - Piacenza
BETTOLI Giuliana - Parma
BOCCALETTI Cristina - Modena
BODINI Arturo - Milano
BOERO Paolo - Genova
BOFFA Michele - Mondovì
BOLLETTA Raimondo - Roma
BOMBARDIERI Angela - Bergamo
BONETTI Ester - Milano
BONIFAZI Patrizia - Mantova
BONOTTO Cinzia - Padova
BONVINI Giovanni - Parma
BORGHI Paolo - Reggio Emilia
BORNORONI Rosanna - Roma
BORNORONI Silvana - Roma
BORRELLI Virginia - Cosenza
BRESCIANI M. Rosaria - Brescia
BRUNENGO Gabriella - Imperia
BUONGIORNO Carmela - Bari
BUONTEMPO Franca - Roma
BURRAI Gino - Roma
CACCIALUPI Ughetta - Livorno
CACCIATORE Pietro - Padova
CADARIO Raffaella - Milano
CAIRA Rosanna - Cosenza
CALVI PARISETTI Carla - Parma
CAMARDA Salvatore - Palermo
CANCELLIERI Cesare - Mantova
CANDELA NICOLO' Elia - La Spezia
CANDELA Innocente - Bari
CANETTA Pietro - Milano
CAPILUPPI Adriana - Reggio Emilia
CAPUCCI PAVESI Ornella - Modena

CAREDDA Carla - Cagliari
CARRA Edgardo - Parma
CASARSA Franco - Udine
CASTAGNA Anna - Piacenza
CAVALLOTTI Enrica - Piacenza
CEDRAZZI Fiammetta - Monza
CHIODAROLI Carlo - Piacenza
CHIUSANO Giancarlo - Torino
CIANCIANAINI Cesare - Massa
CICCONE M. Luisa - Milano
CICERI Carlo - Savona
CINI ASTORE M. Luisa - Firenze
CIOSEFFI Marina - Padova
CINELLI Ornella - Ancona
COLOMBO Andreina - Milano
COLOMBO BOZZOLO Clara - Varese
COLONI M. Luisa - Trieste
COLUZZI M.Antonietta - Latina
CONTI CANDORI Francesca - Perugia
CONTI Patrizia - Pisa
COSTANTINO Vincenza - Latina
COTTI Celestina - Parma
CROTTA Elena - Bergamo
CREDI Rita - Modena
CROVINI Milena - Parma
CUCE' Nicolina - Varese
CUFFIA Mario - Torino
CUTTICA Anna - Genova
DABALA' Paola - Trento
D'AGOSTINI Giuliana - Padova
DAL BORGO Pietro - Belluno
DALENA Angela Maria - Livorno
D'ALFONSO Piero - Milano
D'AMORE Bruno - Bologna

DE CARLI Manuela - Monza
DE FLORA Alberta - Bologna
DEGAVI Emilia - Milano
DEL GIUDICE Valeria - Torino
DEL GROSSO Angela - Potenza
D'ELIA Rosaria - Cosenza
DELLA TOMMASINA Marusca - Massa
DELMONTE Gigliola - Treviso
DELSEDIME Piero - Torino
DEL VECCHIO Marisa - Napoli
DE NUCCIO Sergio - Campobasso
DERI Maria - Pisa
DE ROSE M. Luisa - Cosenza
DI BERNARDO BRUNETTO Maria - Padova
DI COMITE Claudio - Bari
DILEO Vittoria - Bari
DILIBERO Amerigo - Milano
DI MARINO Sandra - Gorizia
DIOTTI Silvia - Firenze
DISEGNI - Torino
DORIGATTI Luciana - Trento
EGANO Marina - Padova
ESPOSITO Pasquale - Roma
FACCHINELLI Claudio - Milano
FAIT Maria - Trento
FALCONE Floria - Cosenza
FANZINI Alba - Piacenza
FASANO Margherita - Roma
FAVARO Mario - Treviso
FERRANDINA Tommaso - Matera
FERRARI Mario - Pavia
FERRERO Enrica - Torino
FERRO Ruggero - Padova
FRACCAROLI Riccardo - Brescia

FRANCHI Anna Maria - Livorno
FUNK Martin - Potenza
FURINGHETTI Fulvia - Genova
FURLANI Marco - Trieste
FUSARI Ombretta - Parma
GALGANI Franca - Pisa
GALLEANO Pia - Parma
GALLINI Margherita - Piacenza
GALLO Elisa - Torino
GALLO Fausta - Salerno
GAMBA Patrizia - Ancona
GANDOLFI Rita - Parma
GARDINI Giuseppina - Fidenza
GATTULLO Marco - Bologna
GAZZOLO Graziana - Genova
GHISONI Margherita - Piacenza
GIACOBINI Lorena - Venezia
GIACOMELLO M.Grazia - Brescia
GIANNI Adriana - Lucca
GIUNTINI Paola - Pisa
GRAZIANI Mara - Ferrara
GRASSO Stefania - Latina
GRIGNAFFINI M. Cristina - Padova
GROSSI Adriano - Parma
GRUGNETTI Lucia - Cagliari
GUALA Elda - Genova
GUARNIERI Giuseppina - Piacenza
IADEROSA Rosa - Milano
INGAGLIO LA VECCHIA Augusto-Palermo
JENGO Letizia - Roma
LAMBERTINI Laura - Ferrara
LAMONICA Elio - Firenze
LANAVE Mariantonietta - Bari
LANCELLOTTI Paola - Modena

LEMBO Clementina - Bari
LEONORI Lucia - Ancona
LICHINCHI Annamaria - Firenze
LINATI Paolo - Varese
LIZZIO Angelo - Catania
LOLICH Dora - Milano
LONGINOTTI Fernanda - Piacenza
LOREFICE M.Fiorella - Palermo
LUCCHESI Amina - Lucca
LUCCHINI Gabriele - Milano
LUPPI Carla - Parma
MADDALOSO Mirella - Padova
MAFFINI Carla - Como
MAGGI Clelia - Pavia
MAGI Eugenio - Firenze
MALARA Nicolina - Modena
MAMMANA Carmelo - Catania
MANNUCCI Loris - Pisa
MANTOVANI Maurizia - Padova
MARASCHINI Walter - Roma
MARKO' STRUDTHOFF Roberta - Trieste
MARIOTTI M.Alessandra - Pisa
MARRONE DI COSIMO Giuseppina-Roma
MARSANO Graziella - Genova
MARTINELLI Angela Maria - Genova
MARZIALE M.Luisa - Padova
MASTROGIACOMO Pasquale - Bari
MEDICI Daniela - Parma
MELOTTI Maria - Piacenza
MENCONI Elda - Massa
MENCONI Fiorella - Arezzo
MENGHINI Marta - Roma
MICALE Biagio - Catania
MICHELETTI Emilio - Lucca

MICHELOTTI VENE' Margherita - Parma
MILELLA Anna Antonia - Bari
MODENINI Oriano - Verona
MOLTENI Francesca - Como
MONTALDO Oscar - Cagliari
MONTESI M.Fiorenza - Roma
MONTEVERDI Daniela - Parma
MORELLI Aldo - Napoli
MORETTI Alessandra - Milano
MORGANTINI Edmondo - Padova
MORINI Umberto - Ascoli Piceno
MOSCHINI Alfonsina - Parma
MOTTERAN Margherita - Padova
NANNI Giancarlo - Piacenza
NORBEDO Bruno - Trieste
OBERTI Luigi - Massa
OLIVETI M.Giovanna - Milano
OSS Armida - Trento
PACINI Annamaria - Livorno
PAGANUZZI Andreina - Piacenza
PAGLIARI Nella - Udine
PALLESCHI Giuliano - Verona
PALMA Michelina - Latina
PALUMBI Nicola - Ferrara
PALUMBO Rosaria - Trieste
PAOLETTI Brunella - Ascoli Piceno
PASINI Luigia - Parma
PASTORINO Massima - Genova
PATRIARCA Anna Vittoria - Frosinone
PATRIZIO Serafino - L'Aquila
PELLEGRI Mario - La Spezia
PELLEGRINO Consolato - Modena
PENSA Albrizia - Milano
PERGOLA Marcello - Modena

PERTICHINO Michele - Bari
PESCI Angela - Pavia
PICA Adelia - Terni
PILOTTO TROISIO Renata - Padova
PILOTTO Vally Nadia - Bolzano
PIRAINO Michele - Cosenza
PISA Massimo - Roma
PISANESCHI Paolo - Pisa
PISATTI Maria - Milano
PIZZI Eugenia - Piacenza
PRAMPOLINI Maria - Milano
PRODI Giovanni - Pisa
PROVINCIALI Igina - Parma
PUCCI Alfredo - Pisa
RABUZZI Alessandro - Pistoia
RACCANELLI Micaela - Treviso
RAGAGNI Grazia - Bologna
RAGAGNI Maria - Bologna
RAMBALDI Giacomo - Savona
REGGIANI Maria - Pavia
RENZI Marisa - Terni
REPICHINI Carla - Roma
REPOLA BOATTO Adele - Ancona
RIBOLLI Luisa - Piacenza
RINESI Silvia - Firenze
RIVA Anna Maria - Milano
ROCCALBERTI Carla - Modena
ROCCHETTI Giannina - Ancona
ROCCO Marina - Trieste
ROMAGNOLI Ersilia - Trento
ROMENI Claudio - La Spezia
ROSATI M.Rosaria - Firenze
ROSATI Mario - Padova
ROSSI M. Rita - Modena

ROSSITTO Gaetano - Siracusa
ROSSO Rosa - Bari
ROTTEGLIA Antonio - Modena
RUGANTI Riccardo - Pistoia
SAINATI NELLO Maria - Pisa
SALMASI Sandra - Venezia
SALMON Paolo - Bologna
SALTI Enrico - Belluno
SALVETTI Rita - Lucca
SAMPAOLO Renato - Piacenza
SANDIONIGI Attilio - Como
SANGUINETTI Lia - La Spezia
SAVINO Elena - Milano
SCALI Ezio - Torino
SCIMEMI Benedetto - Padova
SCIOLIS MARINO Maria - Pisa
SCOZZESI Enrica - Parma
SERGIO Giovanna - Torino
SERVI Mario - Parma
SESTI Sara - Milano
SGROI Giovanni - Treviso
SICHEL Teresa - Piacenza
SILVERI Pietro - Brescia
SIMI ALBANI Annamaria - Massa
SITIA Candido - Treviso
SOLI Isacco - Bari
SOMMARIVA Giancarlo - Piacenza
SPANO' M. Lidia - Lucca
SPECIALE Gioacchino - Roma
SPERANZA Francesco - Parma
SPILIMBERGO Francesca - Treviso
SPIRITO Giuliano - Roma
SPREGA Maria - Ancona
STANCHINA M. Luisa - Torino

STAROPOLI Francesco - Cosenza
SUCCI Francesco - Roma
SUCCI CRUCIANI Rosanna - Roma
TAGLIABOSCHI Nirvana - Modena
TANZI CATTABIANCHI Luigi - Parma
TANZI Nella - Parma
TASSI Carla - Piacenza
TAZZA Caterina - Terni
TIBILETTI Cesarina - Milano
TINTI Rosanna - Livorno
TIOLI Cristina - Modena
TOMASI Luigi - Rovigo
TOMMEI Giorgio - Pistoia
TONI Paolo - Padova
TORRE Antonio - Piacenza
TORRESI Rosa - Parma
TOSETTO Maurizio - Mantova
TRADIGO Luigi - Cosenza
TURCO Claudia - Pisa
USIGNOLI Adelaide - Parma
UTILI Raffaella - Ravenna
VACCARO Carmela - Milano
VADA Clara - Torino
VALABREGA Elda - Torino
VALENTINI Raimondo - Reggio Emilia
VANNUCCI Anna - Massa
VARIATI Mario - Parma
VENDRAMI Luisella - Belluno
VERONESI Elena - Como
VETRI Danila - Piacenza
VEZZANI Alberto - Parma
VIGHI Paola - Parma
VILLANI Vinicio - Pisa
VISINTAINER M.Grazia - Udine

VISMARA Marina - Milano

VITA Vincenzo - Roma

VOGLIOTTI SCALTRITI M.Angiolina-Torino

VOLPI CERIA Gabriella - Trieste

ZALUNARDO Anna - Venezia

ZAMBELLO Ugo - Padova

ZECCA MINA' Sarina - Latina

ZELASCHI Letizia - Roma

ZIVERI M. Rita - Piacenza

ZUCCHI Giuliana - Venezia

I N D I C E

APPENDICE