ISSN 0393-0998

Luglio 1986
Supplemento al n. 7

Period. mensile
sped. in abb. post. gruppo III/70

Anno XIII

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DECIMO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA: LA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

SALSOMAGGIORE T., 24-25-26 OTTOBRE 1985
A cura di M. A. Mariotti

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci e non è in vendita.

QUESTO FASCICOLO E' STAMPATO CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO SUI FONDI 40% DEL PROGETTO NAZIONALE "INSEGNAMENTO-APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA" DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE.

LA PRESENTE RIVISTA VIENE STAMPATA CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40138 Bologna (Italia)
Luglio 1986
Supplemento al n. 7

Nota

Si è svolto a Salsomaggiore Terme, nei giorni 24-25-26 Ottobre, il X° Convegno UMI-CIIM, sull'insegnamento della Matematica.(+) Questo anno il tema scelto vedeva come protagonista la Scuola Secondaria Superiore. Dopo una lunga fase di ambiguo silenzio i problemi della scuola secondaria superiore tornano alla ribalta: la perdurante assenza di una riforma non può costituire un alibi per nessuno.

Il Convegno annuale sull'insegnamento della Matematica ha rappresentato un momento importante di incontro e di dibattito per tutti gli insegnanti e per tutti coloro che da molti anni operano nel campo della didattica, all'interno sia dei "Nuclei di Ricerca Didattica",con il sostegno del C.N.R., sia dei "Seminari Didattici" dei Dipartimenti di Matematica.

Il Convegno si è articolato in tre giornate: per ogni giornata erano previste relazioni generali ed interventi specifici sulle varie esperienze di sperimentazione nel settore dell'innovazione didattica a livello di scuola secondaria superiore.

Un'attenzione particolare è stata dedicata al rapporto tra matematica e informatica: non perché l'informatica abbia il monopolio della novità, ma perché il suo avvento impetuoso può forse portare una salutare critica e provocare un rinnovamento globale.

La partecipazione è stata particolarmente numerosa, consolidando l'opinione degli organizzatori sull'importanza e l'attualità dei temi dibattuti.

Sono stati qui riprodotti i testi delle relazioni e degli interventi programmati.

Pisa, maggio 1986 M.A. Mariotti

(+) Tema del Convegno era il seguente: Nuovi contenuti e nuove metodologie per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore.

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Accascina Giuseppe (Pisa)
Adduce Raffaele (Ceraselle -)
Albertini Pietro (Pavia)
Alvisi Maria Teresa (Cesena - FO)
Amerio Annamaria (Torino)
Arcangeli Fulvio (Verona)
Arcidiaco Giuseppe (Pavia)
Argenti Lisa (Padova)
Argentini Ivaro (Terni)
Arri Paolo (Asti)
Artusi Chini Liliana (Parma)
Ascoli-Bartoli Brenci Maria Teresa (Roma)
Avanzini Patrizia (Parma)
Babini Alessandra (Ancona)
Baccarani Fulvia (Modena)
Baldan Giuliana (Mira - VE)
Baldoni Corrado (Umbertide - PG)
Bandera Riccarda (Pontedera - PI)
Barbanera Antonio (Terni)
Barbetta Maria Grazia (Modena)
Bartolacelli Paola (Modena)
Bartolini Bussi Maria (Modena)
Battaglia Giuseppe (Agrigento)
Bazzini Luciana (Pavia)
Bazzolo Luigia (Padova)
Benvenuti Cristina (Brescia)
Bernasconi Angela (Monza - MI)
Bernardi Maria (Padova)
Bernardini Colombetti Sonia (Pisa)
Bernecoli Sandra (Rovigo)
Bertotto Maria Rosa (Torino)
Betti Patrizia (Piacenza)
Bettinelli Costanza (Lodi - MI)
Bettiol Renato (Treviso)
Bettoli Giuliana (Parma)
Bianchi Mazzega Bianca (Modena)
Bianco Santa Caterina Eleonora (Schio -VC)
Bissi Giuseppa (Ravenna)
Bodini Arturo (Milano)
Bologna Simona (Pavia)
Bonfanti Fausta (Cremona)
Boni Daniela (Milano)
Bornoroni Silvana (Roma)
Bratina Giovanni (Gorizia)
Bresciani Maria Rosaria (Brescia)
Bressan Carlo (Aiello del Friuli - UD)
Brugnoli Maria Antonietta (Borgotaro - PR)
Brunetto Di Bernardo Maria (Padova)
Bugari Fiammetta (Ancona)
Buonocore Pasquale (Napoli)
Burlini Maria (Cremona)
Burrai Gino (Roma)
Burroni Malatesta Maria (Siena)
Caccialupi Ughetta (Livorno)
Caffau Agiae (Trieste)
Calisti Santa (Palermo)
Calabrese Maria Antonietta (Salsomaggiore T. -PR)
Calafiore Santa (Firenze)
Camarda Salvatore (Palermo)
Canetta Pietro (Milano)
Cannizzaro Lucilla (Roma)
Caredda Carla (Cagliari)
Casarsa Franco (Udine)
Casarico Maria Giovanna (Varese)
Castelletti Mariarosa (Segrate - MI)
Cedrazzi Fiammetta (Besana - MI)
Celi Francesco (Terni)
Ceriani Roberto (Milano)
Chersi Franco (Trieste)
Chiapponi Paola (Parma)
Ciampoletti Serenella (Gubbio - PG)
Ciarlante Camillo (Isernia)
Ciarrapico Lucia (Roma)
Cicenia Salvatore (S. Giuseppe Vesuviano -NA)
Ciceri Carlo (Savona)
Coloni Maria Luisa (Trieste)
Concari Primo (Soragna - PR)
Conti Savojni Anna (Pisa)
Conti Francesca (Perugia)
Gonzaga Anna (Ravenna)
Corrias Agnese Giuseppina (Cagliari)
Costantino Vincenza (Fondi - LT)
Cotti Celestina (Parma)
Crovini Nilena (Salsomaggiore T. - PR)
Cruciani Rosanna (Roma)
Cutera Maria (Palermo)
Dabalà Paola (Trento)
Dalena Angela Maria (Livorno)
De Amici Mirella (Brescia)
De Carli Manuela (Monza - MI)
De Carolis Lucian (Cesena - FO)
De Cristofaro Giampiero (Napoli)
De Giorgi Ennio (Pisa)
D'Elia Rosaria (Cosenza)
De Rose Maria Luisa (S. Marco Argentano -CS)
Devescovi Giuliana (Roma)
Di Cesare Merlone Liviana (Recco - GE)
De Grandis Annalisa (Piombino Dese - PD)
Delfrate M. Grazia (Colorno -PR)
Del Gallo Anna (Firenze)
Del Giudice Valeria (Torino)
Dello Sbarba Camillo (Volterra - PI)
Delmonte Gigliola (Treviso)
Delsedime Piera (Torino)
Demurtas Maria Bernardetta (Arbatax - NU)
De Vita Genoviè Marta (Milano)
Diamanti Maurizio (Cremona)
Di Gregorio Salvatore (Rende - CS)
Dileo Vittoria (Monopoli - BA)
Di Libero Amerigo (Cologno Monzese - MI)
Di Modica Marisa (Acqui T. - AL)
Drovandi Igiania (Genova)
Esposito Antonio (Napoli)
Fait Carlo (Trento)

Fait Cagol Maria (Trento)
Falconetti Lucia (Piacenza)
Farano Ruggiero (Castelraimondo -MC)
Favaro Mario (Conegliano V.-TV)
Favero Wally (Padova)
Ferrandina Tommaso (Matera)
Ferrari Fiorento (Cremona)
Ferrari Mario (Pavia)
Ferrero Giovanni (Parma)
Ferri Annunziata (Bari)
Finzi Vita Stefano (Roma)
Fioni Patrizia (Milano)
Fontana Renzo (Monfalcone - GO)
Fumagalli Tambi Rita (Milano)
Furinghetti Fulvia (Genova)
Furini Gianluigi (Mantova)
Furlani Marco (Trieste)
Galeone Luciano (Bari)
Galleano Pia (Parma)
Galliano Gigliola (Genova)
Galligani Paola (Gassino - TO)
Gallo Annalia (Modena)
Gallo Elisa (Torino)
Gandolfi Rita (Parma)
Garuti Nadia (Ravarino - MO)
Gasperi Carmela (Roma)
Gecele Afra (Vicenza)
Ghesini Nadia (Bologna)
Ghiandoni Gabriele (Fano - PS)
Giacuz Domenico (Conegliano V. - TV)
Giordano Gabriele (Napoli)
Girasoli Maria Gabriella (Modena)
Gobbato Sara (Zianigo-Mirano - VE)
Graziani Mara (Ferrara)
Grignaffini M. Cristina (Padova)
Grugnetti Lucia (Cagliari)
Guidi Sergio (Carpi - MO)
Ingaglio La Vecchia Augotto (Palermo)
Jengo Letizia (Roma)
Lamonica Elio (Grassina - FI)
Lanave Mariantonietta (Bari)
Lauricella Giuseppe (Raffadali - AG)
Leonardi Giuseppe (Acireale - CT)
Leonori Lucia (Ancona)
Lenzi Domenico (Lecce)
Letizia Angiola (Lecce)
Linati Paolo (Varese)
Lizzio Angelo (Acireale - CT)
Longoni Giuditta (Verano Brianza - MI)
Lucchini Gabriele (Milano)
Magenes Enrico (Pavia)
Magenes Maria Rosa (Pavia)
Malagoli Nadia (Pisa)
Malara Nicolina Antonia (Modena)
Mammana Carmelo (Catania)
Maniaci Nella (Palermo)
Mannucci Loris (Volterra - PI)
Mantovani Marisa Maurizia(Padova)
Maraschini Valter (Roma)
Marchetti Anna (Milano)
Marchetti Marco (Mantova)
Marchi Mario (Milano)
Marcone Perdonò Grazia (Foggia)
Margiotta Pasqualina (Galatina - LE)
Martinez Annalisa (Modena)
Marziale Maria Luisa (Padova)
Mauro Raffaele (Terracina - LT)
Melchiorre Anna Maria (Conegliano V.- TV)
Menichetti Sperandia (Cagliari)
Menconi Fiorella (Arezzo)
Merini Alvise (Milano)
Mestichelli Patrizia (Ancona)
Micheletti Emilio (Lucca)
Milazzo Filippo (Gravina di Catania -CT)
Mobilio Marina (Terracina - LT)
Modica Maria (CT)
Molteni Francesco (Cantù - CO)
Monari Teresa (Milano)
Montaldo Oscar (Cagliari)
Monticelli Cinzia (Lodi)
Morgantini Edmondo (Padova)
Morelli Adriana (Napoli)
Morelli Aldo (Napoli)
Mosca Miranda (Torino)
Motteran Margherita (Padova)
Mura Maria Giuseppina (Cagliari)
Musone Franco (Pisa)
Nanni Iva (Ravenna)
Nelli Dora (Napoli)
Niceta Francesca (Palermo)
Nutricato Bruno (Foggia)
Olivieri Giovanni (Roma)
Pacini Annamaria (San Vincenzo - LI)
Paesani Roberto (Roma)
Palazzoni Vilma (Perugia)
Palleschi Giuliano (Villafranca di Verona -VR)
Palma Mauro (Roma)
Palma Michelina (Fondi - LT)
Palmieri Chiara (Rimini - FO)
Palumbi Nicola (Argenta - FE)
Palumbo Rosaria (Trieste)
Parma Lidia (Castellanza- VA)
Parodi Federica (Pisa)
Pasini Luigia (Parma)
Passamonti Elena (Cremona)
Pedone Gaetano (Casteldelpiano - GR)
Pellegrino Consolato (Modena)
Penco Anna Maria (Trieste)
Pennisi Mario (Catania)
Peracchi Alba (Cassina De' Pecchi - MI)
Percario Zelinda (Grosseto)
Pergola Marcello (Modena)
Pertichino Michele (Bari)
Pesci Angela (Pavia)
Petrossi Furio (Udine)
Pezzella Maria (Roma)
Pennati Adriano (Milano)
Mecarelli Adelia Pila (Terni)
Piccinato Ludovico (Roma)
Pintacuda Nicolò (Pavia)

Pintus Giulia (Cagliari-Elmas)
Pisa Massimo (Roma)
Pisaneschi Paolo (Pisa)
Pisati Maria (Lodi - MI)
Pistelli Giuliana (Lucca)
Paolo Maria (Selargius - CA)
Pretto Lidia (Arzignano - VI)
Prosperi Barlotti Margherita (Firenze)
Prodi Giovanni (Pisa)
Provinciali Igina (Parma)
Pucci Alfredo (Pisa)
Quattrocchi Pasquale (Modena)
Quintavalle Nicoletta (Bari)
Racugno Walter (Cagliari)
Rambaldi Giacomo (Savona)
Ranci Ortigosa Franca (Milano)
Rastelli Carla (Milano)
Reggiani Maria (Voghera - PV)
Remondini Sandro (Roma)
Renzi Marisa (Terni)
Repola Boatto Adele (Ancona)
Rizzo Sebastiano (Lecce)
Rocco Marina (Trieste)
Romagnoli Ersilia (Trento)
Romano Luigi (Napoli)
Rosati M. Rosaria (Firenze)
Rosati Mario (Padova)
Rossano Luigina (Bologna)
Rosso Rosa (Bari)
Ruganti Riccardo (Pistoia)
Sainati Nello Maria (Pisa)
Salice Giovanna (Como)
Salmon Paolo (Genova)
Sandionigi Attilia (Erba - CO)
Sardo Giancarlo (Mozzate - CO)
Settanino Alessandra (Padova)
Salvino Elena (Cusano Milanino - MI)
Schemoz Antonino (Milano)
Schiavon Roberto (Padova)
Sciolis Marino Maria (Pisa)
Scorsipa Valerio (Perugia)
Secondi Antonia (Piacenza)
Sembenotti Loredana (Padova)
Sesti Sara (Milano)
Settimi Annarita (Ancona)
Sfarra-Campanato Amalia (Pisa)
Sguerso Cristina (Savona)
Sidoti in Coen Paola (Monza - MI)
Solida Antonia (Padova)
Sollevanti Rosalia (Perugia)
Spagnolo Filippo (Palermo)
Speciale Giovacchino (Roma)
Speranza Francesco (Parma)
Spotorno Bruno (Savona)
Staropoli Francesco (Tropea - CZ)
Stiaccini Postorino Angela (Siena)
Strudthoff Markõ Roberta (Trieste)
Succi Francesco (Roma)
Sugamiele Domenico (Montaldo Dora - TO)
Testa Marisa (Alessandria)
Tibiletti Cesarina (Milano)
Tinuzzo Ugo (Ivrea - TO)
Todaro Ennio (Siena)
Tomasi Luigi (Lama Polesine - RO)
Toni Paolo (Padova)
Torelli Giovanni (Trieste)
Tornatore Marisa (Rovereto - TN)
Torresi Rosa (Parma)
Tripodi Dalmazio (Bagnara)
Uboldi Paola (Como)
Vacirca Vincenzo (Catania)
Valabrega Elda (Torino)
Vecchiani Barbara (Pisa)
Veronesi Evasi Elena (Annone Brianza - CO)
Verrĕ Michelotti Margherita (Parma)
Vetere Rossi Aristide (Spilimbergo - PN)
Vighi Paola (Salsomaggiore T.-PR)
Villani Vinicio (Pisa)
Vismara Marina (Pregnana Milanese - MI)
Vita Vincenzo (Roma)
Volpi Geria Gabriella (Trieste)
Uorlova' Vera (Roma)
Zambello Ugo (Padova)
Zambon Stefano (Treviso)
Zan Rosetta (Livorno)
Zanibelli Paola (Pavia)
Zanobini Rita (Pisa)
Zanoli Carla (Modena)
Zelaschi Letizia (Roma)
Zennaro Elio (Trieste)
Zoli Mirella (Cesenatico - FO)
Zuccheri Luciana (Trieste)
Zucchetta Isabella (Vicenza)

GIOVEDI' 24 OTTOBRE 1985

E. Magenes - "Le basi matematiche per tutti" - Dipartimento di Matematica Università di Pavia -

Lo scopo di questo mio intervento è quello di rispondere alla seguente domanda: è possibile oggi, alla luce delle esperienze fatte e dei probabili sviluppi della riforma della scuola secondaria superiore, stabilire in linea di massima i contenuti di un programma di matematica della cosidetta "area comune", cioè indicare le basi matematiche che dovrebbe possedere un qualunque studente italiano alla fine della scuola secondaria superiore?

Per cercare di rispondere nel miglior modo a questa domanda ho voluto rivedere quanto è stato fatto in Italia dai famosi Convegni di Frascati del 66-67 (10) ad oggi, in particolare dall'U.M.I., dal C.N.R. e dai vari gruppi e centri di ricerca e di sperimentazione (cf. gli Atti dei Convegni didattici dell'U.M.I. (1) ed inoltre (2),...,(7)). Devo confessare che, pur conoscendo già la situazione nelle linee generali, ne sono rimasto quasi meravigliato e bene impressionato. Non voglio dire che la s.s.s. si sia già rinnovata, cosa ovviamente non vera perché quasi tutto è rimasto ufficialmente fermo in attesa della riforma (anche se occorre ricordare che recentemente il Ministero della P.I. ha istituito due Commissioni una più ampia per la definizione dei piani di studio previsti proprio dal progetto di riforma ed una più ristretta per la revisione dei programmi di matematica in vista anche dell'inserimento dell'informatica ed ha inoltre proposto un piano nazionale per l'informatica nella scuola che interessa in particolare la matematica e di cui parlerà venerdì M. De Vita). Voglio solo constatare che gli studi, le proposte e le idee di rinnovamento nel campo matematico si sono andati man mano approfondendo, almeno negli ambienti più sensibili e più attenti quale è l'U.M.I., in modo tale che oggi la gran parte dei matematici mi sembra possa dare concordemente una risposta positiva ed operativa alla domanda che ho posto. Ripeto che si tratta solo di delineare i contenuti di matematica dell'area comune, lasciando, come deve giustamente essere, completamente liberi gli insegnanti di scegliere le metodologie da seguire e le impostazioni da dare al programma, nel modo che preferiranno.

Dico subito che partirò dalla proposta di riforma legislativa così come si presenta oggi, prendendola come ipotesi di lavoro entro la quale muoversi. Naturalmente so bene che essa può essere ed è già stata criticata, che esistono posizioni culturali e politiche ad essa contrarie e che i tempi di realizzazione sono ancora lunghi. Ma penso che il contributo che noi potremo dare in questo convegno al problema delle "basi matematiche per tutti" rimarrà in ogni caso valido anche se le ipotesi dovessero in parte cambiare.

Le novità principali della proposta di legge approvata dal Senato nella seduta del 28/3/85 e attualmente in discussione alla Camera, rispetto alla precedente proposta approvata dalla Camera il 27/7/62 sono le seguenti:

1) (art. 3 comma 1 e 2) prolungamento dell'istruzione obbligatoria, contestualmente all'inizio del primo anno dei corsi della s.s.s. riformata, a complessivi dieci anni, prevedendo che l'assolvimento di questo obbligo si realizzi:
   a) con la frequenza dei primi due anni della s.s.s.;
   b) con la frequenza di corsi speciali biennali ("ciclo breve");
2) (art. 4 e art. 25) definizione di quattro settori: (dell'arte, umanistico, delle scienze sociali e dell'informazione, scientifico-tecnologico) rinviando a decreti delegati del Governo la definizione degli indirizzi in cui si articolerà ogni settore e dei relativi piani di studio.

La prima motivazione (scolarità fino a 16 anni) mi sembra importante non solo perché tiene conto di auspici già da tempo espressi dalla gran parte del popolo italiano (e anche da noi matematici) per adeguare il nostro paese al livello culturale delle nazioni più progredite, ma anche perché dovrebbe almeno in parte eliminare alcune obiezioni a proposito della cosiddetta "area comune" che da più parti erano state espresse alla proposta precedentemente approvata dalla Camera. Riferiamoci esplicitamente alla matematica che è considerata materia della cosidetta area comune (art. 6): che cosa può significare il biennio obbligatorio? Secondo me ciò può significare (e dobbiamo insistere perché ciò risulti dai decreti delegati) lo stesso programma per tutti gli indirizzi, svolto attraverso un consistente numero di ore settimanali (almeno 5) da un unico insegnante per ogni classe. La differenziazione di programma e di numero di ore settimanali tra i diversi indirizzi si dovrebbe fare a partire dal 3° anno, pur mantenendo una base comune (che dovrebbe costituire ancora la cosidetta area comune). Questa base comune dovrebbe essere insegnata, insieme agli argomenti cosidetti di indirizzo, ancora da un unico insegnante per ogni classe. Aggiungo che la differenziazione per indirizzi dovrebbe consistere in gran parte in un diverso approfondimento degli argomenti dell'area comune. Questa interpretazione, che porterebbe ad avere anche nel triennio un unico insegnante di matematica che svolge sia l'"area comune" che quella "di indirizzo", mi sembra possibile sulla base del comma 8 dell'art. 6 (i programmi delle materie dell'area comune sono comuni; quando siano specificamente funzionali ad un indirizzo, essi si articolano e si sviluppano in modo da corrispondere alla finalità dell'indirizzo medesimo).

Naturalmente l'estensione dell'istruzione obbligatoria a dieci anni porta con sè un rischio: che l'insegnamento del biennio in particolare per la matematica, venga concepito o si riduca in pratica ad un "prolungamento" della scuola media, nello spirito e al livello intuitivo della attuale scuola media. E ciò si deve assolutamente evitare; occorre che il biennio in tutti gli indirizzi rappresenti effettivamente un salto sia pur graduale di qualità, salto che deve corrispondere anche alla maturazione intellettuale del ragazzo e alle sue capacità di ragionamento. Se si pensa poi che il biennio deve essere non solo completamento dell'obbligo scolastico ma anche banco di prova per la continuazione degli studi nella s.s.s., occorrerà che, almeno per coloro che desiderano proseguire, ci sia un rigoroso esame finale, cosa di cui mi sembra il disegno di legge non parli (si prevede solo una "certificazione" dei corsi seguiti, comma 3 art. 3 e comma 6 art. 2).

La seconda innovazione del disegno del Senato (definizione degli indirizzi rinviata ai decreti delegati) interessa meno l'argomento di questa mia relazione. Osserverò solo che si può ormai ben sperare, dopo le critiche (anche da parte dell'U.M.I. (cf. Notiz. U.M.I. novembre 82)) e i ripensamenti che il Senato stesso aveva espresso circa il vecchio progetto della Camera, che venga inserito tra gli indirizzi quello matematico-naturalistico che dovrebbe dare una seria educazione scientifica a livello europeo ai nostri ragazzi (si vedano in particolare (3), (4) e anche la discussione apparsa sul Notiz. U.M.I. febbraio e marzo 1983).

E veniamo dunque a precisare i contenuti dell'area comune. Essi sono espressi dal programma che sarà indicato qui di seguito, ma occorre aggiungere alcuni commenti che per semplicità esporrò tutti quali premesse.

1) Anzitutto è ormai accettato da tutti, anche dai non matematici, il ruolo fondamentale che la matematica ha nella formazione della mente del giovane, abituandolo alla riflessione e al ragionamento e all'uso appropriato di un linguaggio preciso e del metodo deduttivo. Ma oggi si riconosce anche, assai più che nel passato, la funzione essenziale della matematica nell'interpretazione del "reale", non solo di quello tradizionale dei fenomeni della fisica e dell'ingegneria, ma anche di quello delle scienze biologiche, naturali, mediche, socio-economiche, linguistiche e di tante altre attività umane, con la conseguente necessità di formare nell'alunno la capacità di "matematizzare situazioni" e di applicare il metodo matematico nei diversi campi. Proprio questo secondo aspetto della matematica favorisce, anche più di quanto non sia accaduto nel passato, lo sviluppo delle capacità induttive del giovane, abituandolo a intuire congetture e a farne poi la verifica. Tutto questo riguarda il ruolo della matematica e gli obiettivi generali del suo insegnamento. Veniamo ora ai commenti sui contenuti.

2) Incominciamo con la geometria, senz'altro il capitolo che da più tempo i matematici, non solo in Italia, studiano e sperimentano nello insegnamento ad ogni livello. Mi sembra che ci sia qui un accordo sui punti essenziali che potrebbero far parte di un programma. Anzitutto c'è la conferma della validità e dell'importanza dell'insegnamento della geometria elementare piana, lasciando però libero l'insegnante di introdurlo nel modo che preferisce. Mi sembra che si possa aderire a quanto hanno scritto i col

leghi che hanno preso parte al Seminario di Arezzo nel 1983 (3): "Nell'introduzione della geometria piana, l'insegnante potrà seguire un metodo assiomatico-deduttivo di varia impostazione, oppure un metodo intuitivo-operativo, oppure un metodo, in qualche modo, intermedio che si esplichi attraverso deduzioni parziali; nella scelta l'insegnante terrà conto delle inclinazioni e del grado di preparazione degli allievi". Quanto ai contenuti specifici della geometria piana si preferisce ormai da tutti insistere sulle trasformazioni geometriche (simmetrie, isometrie ...) presentando così unitariamente le proprietà geometriche del piano ed evitando un eccesso di proposizioni frammentarie. Per la geometria spaziale sembra opportuno rinunciare ad una trattazione generale sistematica, accontentandosi di elementi della stessa, con lo scopo soprattutto di sviluppare la intuizione spaziale del ragazzo. L'introduzione del piano cartesiano e successivamente anche dello spazio cartesiano, altri argomenti di base, non solo permetterà di disporre di metodi analitici accanto a quelli sintetici più tipici della geometria elementare, ma aprirà la strada ai concetti di spazio vettoriale e di spazio euclideo sul corpo reale.

3) Un altro capitolo assai sperimentato e approfondito è quello dell'algebra. In questi ultimi anni poi, in conseguenza dell'avvento dei calcolatori, si è messo in evidenza anche il ruolo che l'insegnamento dell'algebra ha nella costruzione concettuale delle basi dell'informatica, basi che sarebbe bene che il ragazzo avesse fin dalla s.s.s. Il discorso si collega a quanto diremo meglio in seguito su matematica e informatica. Per ora limitiamoci ad osservare quanto segue. Riconosciuta l'opportunità che il capitolo "algebra" non sia solo calcolo letterale o risoluzione di certe equazioni algebriche, ma anche l'insegnamento di alcune fondamentali strutture algebriche, in particolare partendo dallo studio dei polinomi in una indeterminata e della loro struttura di anello, sarebbe opportuno che il linguaggio algebrico fosse presentato con maggior cura per gli aspetti formali mettendo in evidenza la "grammatica generativa" che lo produce (in quest'ottica ad es. un'espressione algebrica può essere vista come un effettivo programma di calcolo) e sarebbe anche opportuno che si approfondissero meglio quelle strutture maggiormente utili in informatica, quali l'algebra di Boole.

4) L'insegnamento della probabilità è anche ormai una proposta accolta da tutti (già fa parte anche dei programmi della scuola media). E c'è anche una certa esperienza per la s.s.s. fatta soprattutto all'estero, ma in parte pure in Italia. Più difficile è però ancora dire "quanta" probabilità fare oltre che in che modo introdurla e svilupparla. Si è fatta certo molta strada da Frascati ad oggi; allora se ne voleva parlare timidamente solo nell'ultimo anno di liceo. I contenuti che indicherò in seguito sembrano ora essere generalmente accettati. Ma ritengo che sarà importante sentire qui quello che ci dirà L. Piccinato nel suo intervento di oggi pomeriggio.

5) Un discorso analogo va fatto per la statistica, per la quale però la situazione è resa più difficile dal fatto che si hanno molto meno esperienze che per la probabilità, almeno in Italia. Anche qui rinvio all'intervento di Piccinato di oggi pomeriggio e mi limito a segnalarvi il recente Quaderno di Piccinato e Pintacuda (12) uscito proprio in questi giorni.

6) Un discorso più lungo vorrei fare sull'analisi. Data per scontata l'introduzione dei diversi insiemi numerici dai naturali ai reali, dell'equazioni e delle disequazioni di I e II grado e dei sistemi di I grado, mi sembra che si possa anche concordare sui seguenti contenuti di analisi: successioni e funzioni di una variabile reale, limiti e continuità, elementi di calcolo differenziale ed integrale. Non c'è nazione progredita che non insegni a tutti i ragazzi dai 15 ai 18 anni questi elementi di analisi. Mi sembra però utile dire qualcosa sulla motivazione e sul modo di presentare e sviluppare questi contenuti; il discorso si collega allora ad altre due tematiche che saranno dibattute a questo convegno: "applicazioni della matematica" e "matematica e calcolatore". Vorrei dunque prendere lo spunto dell'analisi per dire anch'io qualcosa di esse, in attesa delle conferenze di Luccio, di Zuccon e di de Vita e degli interventi soprattutto di venerdì pomeriggio.

Come è noto la discussione attorno a questi temi è tuttora quanto mai vivace: si va da affermazioni drastiche e toni aspramente polemici dell'ormai famoso articolo di C.A. Truesdell (19) su "Il calcolatore: rovina delle scienze e minaccia per il genere umano", agli articoli elogiativi quali ad es. quello di L. Solomon (18). Vorrei segnalarvi anche la più recente polemica apparsa sulla rivista The College Math. Journal (8) a partire da un intervento di A. Ralston dal titolo "La matematica discreta finirà per avere più importanza del calcolo infinitesimale?",nella quale sono intervenute anche personalità del calibro di P. Lax e S. McLane. E' così pure ricordo la relazione di Villani al IX Congresso dell'UMI dello scorso anno (1, IX), nella quale il nostro Presidente riferisce sulle discussioni svoltesi al V Congresso internazionale di Adelaide, e il rapporto I.C.M.I. pubblicato in (9).

Che fare allora? Mi sembra che "in medio stat virtus"; e cercherò ora di sostenere questa opinione partendo da alcune considerazioni sulla "matematica applicata". La matematica applicata classica, diciamo quella fino agli inizi del secolo, è stata soprattutto matematica applicata alla fisica: l'esempio tipico di questa matematica sono le equazioni differenziali della meccanica, dell'elettromagnetismo, dell'elasticità, ecc., dunque modelli essenzialmente rientranti nel calcolo infinitesimale. Questo tipo di modellizzazione matematica della realtà continua ad essere il pilastro principale della matematica applicata ed interessa oggi tante altre discipline quali la biologia, la medicina, l'economia e tante altre attività umane, coinvolgendo inoltre capitoli della matematica nuovi o una volta considerati solo matematica pura, quali ad es. la topologia o la geometria algebrica. A ragione P. Lax può intitolare il suo intervento "Elogio del calcolo" e S. Mc Lane ribattere all'affermazione di Ralston ("la diminuzione dell'importanza del calcolo nel mondo della matematica applicata subisce un processo di accelerazione" a favore della matematica discreta) sostenendo che "il calcolo è una disciplina intellettuale profonda e coerente con numerose radici nella scienza". Ma è altrettanto vero che l'avvento del calcolatore e l'estendersi della "matematizzazione della realtà" hanno messo l'accento e favorito anche lo sviluppo della cosidetta matematica discreta, la quale non mi sembra possa dirsi, come fa McLane, "una miscellanea d'ogni sorta di cose, dalla teoria dei grafi alla teoria dei numeri - alcune profonde, alcune sconnesse, alcune deprimenti". Rinviando alla conferenza di Luccio e all'intervento che farà Pintacuda il compito di mette re in evidenza per es. l'importanza della teoria degli algoritmi e della loro complessità computazionale, vorrei qui ricordare anche che accanto alle equazioni differenziali e al loro studio tradizionale (esistenza e proprietà qualitative delle soluzioni, rappresentazione esplicita quando possibile, sviluppi asintotici...) hanno ora sempre più peso le equazioni alle differenze finite che si ottengono o per discretizzazioni di equazioni differenziali o direttamente da un modello matematico definito per ricorrenza (al termine di questa mia conferenza ne darò degli esempi studiando i modelli matematici dell'accrescimento in biologia). Al Matematico applicato si richiede oggi competenza assai più vasta di una volta, non solo perché si è ampliato il campo di applicazione della matematica, ma anche perché più numerosi e più complessi sono gli strumenti matematici che egli deve conoscere e saper usare. Ed il suo ruolo è assai delicato perché sempre più in certe applicazioni occorre dare risposte in tempo assai breve, se non addirittura in tempo reale. Il modello del matematico applicato è oggi quello di J. Von Neumann, il che non è poco! Purtroppo occorre riconoscere che ancora (non solo in Italia, la situazione è generale, in tutto il mondo) i migliori "cervelli matematici" sono attratti dagli indubbiamente altrettanto affascinanti problemi della matematica pura e soprattutto non amano realizzare loro stessi le conseguenze applicative che si possono trarre sovente dalle loro teorie. Uno dei compiti della s.s.s. dovrebbe essere proprio quello di suscitare entusiasmo nei giovani per la matematica applicata.

Quanto alla questione più specifica "matematica e calcolatore" occorre mettere in evidenza anche altri aspetti, diciamo più informatici. In quello che ho finora detto il calcolatore è entrato quasi esclusivamente come strumento capace di far conti rapidamente o di fare simulazioni. Ma si vanno sempre più sviluppando anche altre capacità del calcolatore, dalla grafica alla manipolazione simbolica (calcolo algebrico, calcolo differenziale e calcolo integrale nel campo delle funzioni elementari,...) con programmi che saranno presto disponibili anche su piccoli calcolatori; e lascio da parte la capacità di "fare dimostrazioni". Dunque si vanno sempre più estendendo le funzioni in cui il calcolatore potrà sostituire l'uomo. Forse, per dirla con Prodi (5) "ciò che rimarrà privilegio della mente umana sarà l'idea dell'infinito matematico con tutta quella meravigliosa corona di "mondi possibili" che il fondatore della teoria degli insiemi Georg Cantor, ci ha insegnato a costruire liberamente".

Quali le conseguenze nella didattica di queste brevissime considerazioni su matematica applicata e matematica e calcolatore? Anzitutto, come ho già detto, è importante che l'insegnante sappia trasmettere al ragazzo il gusto per le applicazioni della matematica, sappia far capire che la matematica è dentro la realtà in cui viviamo nel senso galileiano che "il libro della natura è scritto in caratteri matematici" e tocca a noi trovare i modelli matematici che "descrivono" la realtà. Occorre saper collegare tra di loro situazioni apparentemente diverse, che possono però essere descritte dallo stesso modello matematico, facendo così veramente dell'interdisciplinarità anche nell'insegnamento. I giovani di oggi sono particolarmente sensibili all'idea di far qualcosa che serva al progresso della civiltà e penso che questa sia la strada attraverso la quale si potrà sia "convertire" alla matematica molti giovani dotati di talento matematico, che altrimenti si indirizzerebbero ad altre discipline scientifiche, sia convincere tutti gli altri della necessità di possedere una buona cultura matematica se ci si vuole inserire proficuamente e con successo nella società moderna.

Quanto al problema dei rapporti tra matematica e informatica nell'insegnamento nella s.s.s. ritengo che le indicazioni più volte espresse da Prodi (cf. (13), (1, VII)) e in particolare la conferenza tenuta alla Giornata AICA-UMI del dicembre 1983 pubblicata in (5) e (15) e i successivi commenti in (9)) siano quelle giuste, anche se non mancano opinioni diverse (cf. ad es. quella di C. Sitia in (1, IX) e (9)); rinviando agli articoli citati per maggiori dettagli mi limito qui a riassumerle.

1) La presentazione delle basi teoriche dell'informatica va fatta all'interno della matematica anziché mediante un corso specifico di informatica come materia a sè; ovviamente ci saranno dei corsi di informatica per quegli indirizzi per i quali occorrano conoscenze specialistiche, oltre a quelle dell'area comune.

2) Occorre tener conto allora che questa scelta comporta un rinnovamento dell'insegnamento della matematica. Anzitutto per costruire le basi concettuali dell'informatica nel quadro logico-matematico, occorre modificare alcuni punti delle consuete esposizioni matematiche, mettendo in luce gli aspetti e i punti di vista più "informatici". Abbiamo già detto ad es. del modo di presentare l'algebra, che in ordine di tempo si presenta tra i primi argomenti utili a questo fine. La "seconda grande occasione" per dirla con Prodi è la presentazione del principio di induzione, argomento tradizionalmente trascurato. Non si tratta di farne una trattazione approfondita arrivando fino ad uno sviluppo della teoria delle funzioni ricorsive, ma di avviare l'allievo nella direzione giusta. Da una parte gli si può mostrare che il principio di induzione permette di costruire funzioni molto più complesse e molto più utili di quello che si potrebbe immaginare, partendo per es. dalla considerazione di modelli matematici discreti di fenomeni reali (è ciò che cercherò di esemplificare nell'appendice, alla fine di questa conferenza); dall'altra si può far vedere che accanto alle funzioni "calcolabili" ve ne sono tante altre che non lo sono (e qui occorrerà ricuperare anche qualche nozione sulla cardinalità degli insiemi, di solito appannaggio di corsi universitari). Introdotta la nozione di algoritmo, sarà importante mettere in evidenza ogniqualvolta è possibile gli aspetti algoritmici dei problemi che si stanno studiando e così preferire le dimostrazioni di esistenza di un ente di tipo costruttivo, cioè ottenute costruendo un algoritmo che individui l'ente stesso.

3) Naturalmente ci sarà poi da considerare anche l'impatto del calcolatore in quanto strumento utile non solo per il calcolo numerico approssimato, ma anche nello studio di tanti problemi di algebra, del calcolo differenziale e integrale, (si è già detto della capacità dei calcolatori odierni di manipolazioni algebriche, di derivazione e di integrazione di funzioni elementari), nei problemi di geometria e di rappresentazione di funzioni (sfruttando le capacità grafiche del calcolatore), di probabilità, di aritmetica. A proposito dell'aritmetica si può proprio in questo contesto riprendere e rivalutare questa disciplina altamente formativa,che nella nostra s.s.s. è stata via via trascurata (e rinvio qui al-

la successiva conferenza di B. Scimemi).

4) Infine un'altra proposta è quella della istituzione di un corso di "Laboratorio di informatica" al I anno della s.s.s. con lo scopo di istruire il ragazzo nell'uso degli strumenti informatici, in particolare facendogli apprendere un linguaggio di programmazione e facendogli fare esperienze pratiche al calcolatore. Così il ragazzo sarà in grado di usare il calcolatore in tutte le materie nelle quali esso può servire e non solo in matematica. Il corso servirebbe anche ad alleggerire l'insegnante di matematica di compiti relativi a competenze puramente tecnologiche, che attualmente la maggior parte dei nostri docenti non ha.

Esposte così in rapida sintesi le idee e le proposte di Prodi, vorrei terminare questo paragrafo aggiungendo che l'impiego del calcolatore servirà anche a quanto prima auspicato, cioè a mettere in evidenza l'importanza delle applicazioni della matematica, purché si eviti di cadere negli errori messi in evidenza da Truesdell nel suo famoso articolo già citato e cioè di ritenere che la soluzione di un problema applicativo sia solo questione di avere a disposizione calcolatori sempre più potenti, senza preoccuparsi invece di approfondire i modelli matematici che lo rappresentano, scegliendo quello più adeguato prima di mettersi a fare calcoli. Naturalmente a questo punto devo dire che non è facile individuare, soprattutto ai fini didattici, i livelli di "ragionamento" nei quali il calcolatore si può sostituire proficuamente all'uomo e quelli più "elevati" ai quali occorre educare il ragazzo, onde evitare che il calcolatore, accettato "passivamente", provochi un abbassamento del livello medio di intelligenza dei nostri giovani. Penso che sarà l'esperienza a dire qui l'ultima parola. Ma in ogni caso non possiamo assolutamente comportarci come se il calcolatore non esistesse. Il giovane studente deve sapere che nel 1985, per risolvere un problema, oltre alla ricerca di una formula risolutiva, all'uso della riga e del compasso o di altri strumenti geometrici, c'è anche la descrizione mediante un programma leggibile da un calcolatore di un algoritmo risolutivo!

7) Un cenno anche alle nozioni di logica e di teoria degli insiemi e alle considerazioni e motivazioni di ordine storico. Circa le prime ritengo, in particolare dopo le sperimentazioni didattiche finora

fatte, di poter essere d'accordo con quanto hanno proposto i colleghi partecipanti al Seminario di Arezzo (3): "fin dall'inizio del primo anno, lo insegnante farà uso del linguaggio degli insiemi con naturalezza, senza che ciò implichi una preliminare trattazione sistematica. L'insegnante potrà presentare i primi elementi di logica (connettivi logici, variabili, quantificatori,...) e giovarsene, ad esempio, nella teoria delle equazioni, nelle dimostrazioni, ecc... E' necessario proporsi di condurre l'allievo all'uso di un linguaggio preciso ed essenziale".

Sul secondo punto (motivazioni di ordine storico) si sta sviluppando ora in Italia un sempre maggior interessamento alla storia della matematica, e non solo sotto l'aspetto didattico ma anche sotto quello della ricerca. Permettetemi solo di ricordare come esempi, almeno parzialmente diversi, di punti di vista entrambi significativi, gli articoli di Prodi (14) e di Pucci (17) su Archimede a proposito della dimostrazione di un noto teorema sui triangoli isosceli. Personalmente condivido anche su questo punto la posizione dei colleghi del Seminario di Arezzo (3):
"Si ritiene necessario che l'allievo sia guidato a vedere la matematica nel suo aspetto storico, sia come approccio globale a temi del passato (opportunamente presentati in veste moderna), sia nel cogliere lo sviluppo di alcune idee guida (l'idea di numero, di equazione, di linearità...), sia infine nel riflettere sullo sviluppo delle interazioni fra scienza matematica e cultura".

8) A questo punto prima ancora di vedere i contenuti di matematica per tutti che proporrò, molti dei presenti saranno un po' preoccupati per l'ampiezza del programma stesso. E non c'è dubbio che esso sia ampio. D'altra parte lo sviluppo della matematica comporta un continuo aumento e aggiornamento delle conoscenze, anche di base, senza poter abbandonare molto delle conoscenze acquisite e ciò a differenza di altre discipline (pensate a quante teorie fisiche del passato sono ora del tutto superate e sostituite). Dunque per forza di cose occorre saperne di più man mano che il tempo passa e che il mondo "si matematizza". Ciò va chiaramente fatto capire alla classe dirigente italiana, agli uomini politici, ai colleghi delle altre discipline. Tuttavia occorre che anche noi matematici facciamo un esame serio di quanto nella nostra disciplina è superato o è

diventato ormai meno importante e può dunque essere tralasciato; ecco un breve elenco di "tagli" che mi sembra si possano fare.

- nel calcolo letterale (le famigerate espressioni algebriche; ma vi segnalo il bell'articolo di Prodi e Villani su Archimede (16))
- nella ricerca a tutti i costi di formule risolutive (equazioni di grado superiore al secondo, per es. biquadratiche ...)
- nello studio di problemi di I e II grado, nello studio di funzioni e nel calcolo di derivate e di integrali,...

Immagino che su questi punti le nostre opinioni potranno differire; permettetemi però di dire che tutta la matematica è bella ed educativa, basta saperla rendere tale. E dunque evitiamo di cadere anche noi nell'affermazione di certi difensori del "latino" a tutti i costi che, tradotto nel nostro caso suonerebbe: senza questo capitolo non si riescono a sviluppare le capacità di ragionamento del ragazzo! Circa l'eccessiva ampiezza del programma qualcuno potrà obiettare anche che esso si presenta più come un programma da indirizzo "matematico-naturalistico" che da "area comune" e che molti argomenti dovrebbero essere dunque eliminati. Personalmente ritengo che, salvo alcuni piccoli aggiustamenti, tutti gli argomenti citati vadano lasciati perché devono far parte oggi della cultura matematica di tutti; si tratterà di svilupparli più o meno a fondo e per questo ho più volte parlato di "elementi di" e di "cenni a"; si tratterà di riuscire ad ottenere un adeguato numero di ore settimanali di insegnamento (5 nel biennio e 3 nel triennio). Gli eventuali tagli, in argomenti o in approfondimenti, andranno studiati "realisticamente" nel quadro generale della riforma.

9) Resta infine un problema: la divisione degli argomenti tra biennio e triennio. La distinzione tra biennio e triennio non è solo una questione di metodologia, sul modo cioè con il quale la matematica va presentata in relazione anche allo sviluppo mentale del ragazzo, e di obiettivi, con riferimento in particolare all'orientamento degli allievi nella scelta dell'indirizzo da seguire; ma anche di contenuti, poiché occorre tener conto sia del fatto che per la gran parte dei ragazzi, il biennio sarà la conclusione del loro impegno scolastico (e dunque dovrà essere un completamento sufficientemente ampio di quanto imparato nella scuo-

la media), sia del fatto che esso dovrà anche servire da base per il successivo insegnamento più specialistico del triennio. Devo dire che questa mi è sembrata una delle difficoltà più grandi. E per questo ho presentato un elenco unico di argomenti. Tenendo conto dei diversi studi e delle esperienze fatte in Italia, soprattutto dai gruppi di ricerca e sperimentazione per il biennio sorti negli ultimi anni per iniziativa dello U.M.I. e del C.N.R. e anche all'estero, quali risultano in particolare da (1,V), (4), (7), (11), si può proporre, a costo di sembrare un po' utopisti, di arrivare nel biennio finale al n. 16 compreso. Comunque mi sembra più facile stabilire quali devono essere i contenuti di matematica comuni a tutti gli indirizzi della s.s.s. nel corso dell'intero quinquennio, che individuare in essi quelli da mettere nel biennio.

10) Per terminare due brevi considerazioni. La prima riguarda l'ordine in cui sono elencati gli argomenti, che non deve essere inteso come indicazione circa una via da seguire nell'insegnamento. Una volta stabilita la suddivisione tra biennio e triennio, ciascun docente deve essere libero di ordinarli, di raggrupparli e suddividerli come meglio crede in funzione del suo disegno didattico. Importante è dare l'idea della unità della matematica, evitando eccessive separazioni dei vari campi, che diano al ragazzo l'impressione di muoversi in compartimenti stagni.

Infine desidero riaffermare che l'insegnante deve essere completamente libero nella scelta delle metodologie e delle impostazioni da seguire in tutto il programma, che, ripeto, vuol essere solo un insieme "non ordinato" di contenuti.

<u>Programma</u>

1. Le operazioni e l'ordinamento nell'insieme dei numeri naturali, degli interi relativi e dei razionali.
2. Elementi di calcolo letterale.
3. Valori approssimati e loro uso nei calcoli elementari; introduzione e prime proprietà dei numeri reali.
4. Relazioni, funzioni, piano cartesiano.

5. Funzioni lineari e loro rappresentazione grafica nel piano cartesiano Equazioni e disequazioni di primo grado. Sistemi di equazioni e disequazioni; interpretazione geometrica; cenni di programmazione lineare.
6. Funzioni quadratiche e loro rappresentazione grafica nel piano cartesiano. Equazioni e disequazioni di secondo grado. Problemi di primo e secondo grado.
7. Piano euclideo, incidenza e parallelismo di rette, perpendicolarità. Isometrie; simmetrie.
8. Poligoni; cerchio, ellisse, parabola e iperbole.
9. Omotetie e similitudini.
10. Misura degli angoli; seno e coseno degli angoli convessi. Teorema di Pitagora, dei seni e di Carnot.
11. Elementi di geometria dello spazio. Figure notevoli nello spazio. Spazio cartesiano.
12. Elementi di aritmetica: divisibilità, numeri primi, algoritmo di Euclide.
13. Principio di induzione; definizioni e dimostrazioni per ricorrenza. Successioni definite per ricorrenza e problemi connessi.
14. Nozione di algoritmo; esempi semplici di algoritmi e loro traduzione in un programma per calcolatore mediante un linguaggio di programmazione.
15. Elementi di calcolo delle probabilità: eventi e probabilità, eventi disgiunti, probabilità condizionale, eventi indipendenti, variabili aleatorie.
16. Elementi di statistica descrittiva: rilevazione di dati, indici di variabilità, distribuzioni di frequenza.
17. Funzioni polinomiali; zeri; equazioni algebriche.
18. Polinomi in una indeterminata e loro struttura di anello; divisibilità. Cenni alle strutture algebriche fondamentali e ai numeri complessi.
19. Struttura di spazio vettoriale sul corpo reale; basi. Spazi euclidei. Cenni alle trasformazioni lineari e alle loro rappresentazione mediante matrici.
20. Funzione esponenziale e logaritmica.

21. Funzioni circolari: seno, coseno, tangente e loro inverse. Teorema di addizione e principali conseguenze.

22. La completezza dei numeri reali. Area di regioni piane e lunghezza di curve.

23. Il concetto di limite per successioni e per funzioni di una variabile reale. Funzioni continue.

24. Elementi di calcolo differenziale e di calcolo integrale e applicazioni.

25. Esempi di equazioni differenziali e loro soluzione approssimate con l'uso di un calcolatore.

26. Complementi di probabilità: speranza condizionale, distribuzione binominiale, normale e di Poisson. Teorema di J. Bernoulli (legge debole dei grandi numeri). Catene di Markov.

27. Cenni di statistica inferienziale: inferenza bayesiana, inferenza frequentistica, prove di significatività, problema di decisione in condizioni di incertezza.

(1) Atti dei Convegni dell'U.M.I. sull'insegnamento della Matematica:

I (a Bologna) Notiziario U.M.I. suppl. al n. 5, maggio 1976

II (a Bologna) Notiziario U.M.I. suppl. al n. 6, giugno 1976

III (a Bologna) Notiziario U.M.I. suppl. al n. 8-9, agosto-settembre 1977

IV (a Ferrara) Notiziario U.M.I. suppl. al n. 8-9, agosto-settembre 1978

V (a Ferrara) Notiziario U.M.I. suppl. al n. 8-9, agosto-settembre 1979

VI (a Montecatini) Notiziario U.M.I. suppl. al n. 8-9, agosto-settembre 1980.

VII (a Montecatini) Notiziario U.M.I. suppl. n. 7, luglio 1981.

VIII (a Rimini) Notiziario U.M.I. suppl. al n. 3, marzo 1983

IX (a Rimini) Notiziario U.M.I. suppl. al n. 5, maggio 1985

(2) Calcolatori per la Scuola (a cura della Commissione UMI-AICA), Notiz. U.M.I. suppl. al n. 11 - novembre 1983.

(3) Nuovi traguardi per l'educazione scientifica - Atti del Seminario di Arezzo 1983. Ed. U.C.I.I.M. - Roma 1985.

(4) L'insegnamento della matematica e delle scienze sperimentali nella scuola secondaria superiore - Atti Conv. Intern. - Venezia, Dicembre 1983 - Uff. Studi e Programmazione, Ministero P.I., 1985.

(5) A.E.D., (Applicazione degli Elaboratori nella Didattica) nell'Insegnamento della matematica - Atti Giornata di Lavoro A.I.C.A.-U.M.I. - Genova, dicembre 1985.

(6) Atti Convegno su "Il valore della cultura scientifica nella formazione dell'insegnante elementare: idee e proposte", Montecatini, aprile 1982 - C.O.A.S.S.I. (Comitato Coordinamento Associazioni Scientifiche Italiane) - Ed. Techniprint, Bologna, 1982.

(7) Autori vari: Rapporti sull'insegnamento scientifico nella scuola secondaria europea - C.O.A.S.S.I. (Comitato Coordinamento Associazioni Scientifiche Italiane) - Ed. Techniprint, Bologna, 1982.

(8) Autori vari: "Forum" in The College Math. Journal - vol. 15, n. 5, novembre 1984 (trad. ital. a cura di C. Sitia)

(9) L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate - vol. 8, n. 1 (1985).

(10) B. De Finetti: Le proposte per la matematica nei nuovi licei: informazioni, commenti, suggerimenti - Periodico di Mat. s. IV, vol. XLV (1967), 75-153.

(11) J. Dieudonné: Finalità dell'educazione matematica - Nuova Secondaria, 4 (15-12-1983), 60-61.

(12) L. Piccinato - N. Pintacuda: Probabilità e Statistica - Quaderno del Progetto "Matematica come Scoperta" - C.N.R. (1985).

(13) G. Prodi: Tendenze attuali nell'insegnamento della matematica - Rend. Acc. Naz. delle Scienze dei XL - Mem. Mat. Fis. e Nat., 100 (1982), vol. VI, 183-196.

(14) G. Prodi: Storiella estiva con morale - Archimede - 36-4 (1984), 168-169.

(15) G. Prodi: I problemi della matematica di fronte all'informatica - L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 7 n. 1 (1984), 39-55.

(16) G. Prodi - V. Villani: Anche il calcolo letterale può essere intelligente - Archimede 34-4 (1982), 163-174.

(17) C. Pucci: Abbasso o evviva Euclide? - Archimede -36-4 (1984), 170-173.

(18) L. Solomon: Weierstrass e I.B.M., Bull. A.P.M.E.P. n. 343 (1984) (trad. ital. in Notiz. U.M.I., novembre 1984).

(19) C.A. Truesdell: Il calcolatore: rovina della scienza e minaccia per il genere umano - in "La nuova ragione" (Ed. Mulino - 1981) e Notiz. U.M.I. - novembre 1984.

Appendice

Abbiamo già ricordato che la definizione per ricorrenza di successioni numeriche ben si presta sia all'introduzione di modelli matematici discreti di tanti fenomeni e quindi a fare della buona matematica applicata, sia a mettere in evidenza il ruolo importante del principio di induzione, anche in rapporto al concetto di funzione. Un esempio molto significativo ci sembra essere lo studio dei modelli matematici dell'accrescimento di popolazioni con generazioni "non sovrapponentisi" quali sono certe famiglie di insetti o di animali più evoluti, ad es. i salmoni.

Il caso più semplice è quello dell'accrescimento cosidetto "naturale" cioè senza alcuna limitazione: in esso, detto x_n il numero degli elementi della n-esima generazione, l'aumento $x_{n+1} - x_n$ si suppone proporzionale ad x_n con un coefficiente di proporzionalità $\lambda > 0$ che misura il tasso di incremento. La successione x_n resta allora definita per ricorrenza, una volta assegnato x_o (cioè la generazione iniziale) da

$$x_{n+1} = x_n + \lambda x_n \qquad n = 1,2 \dots \qquad (1)$$

Come è noto, dalla (1) si può facilmente ricavare l'espressione esplicita di x_n in funzione di x_o, ed n; precisamente si ottiene la progressione "geometrica"

$$x_n = x_o \ (1+\lambda)^n \qquad (2)$$

Questo tipo di accrescimento non è però quello che si verifica più di frequente nella realtà perché l'accrescimento viene limitato e condizionato da vari fattori (insufficienza di cibo, mortalità di tipo vario, ecc...). L'individuazione del modello matematico più aderente alle diverse realtà biologiche è un ottimo argomento di discussione e di studio interdisciplinare, che mi sembra possa essere fatta in classe dall'insegnante di matematica insieme a quello di scienze (si veda ad es. l'articolo (2) dedicato al modello dell'accrescimento dei salmoni). Sono stati introdotti allo scopo diversi modelli; il più semplice e più conosciuto è quello cosidetto dell'accrescimento "logistico" che porta alla seguente definizione per ricorrenza di x_n (per comodità di calcolo ci riferiamo qui al modello già normalizzato, dove cioè x_n indicherà il rapporto tra il numero degli elementi della popolazione e quello della situazione cosidetta di equilibrio)

$$x_{n+1} = x_n + \lambda x_n (1-x_n) \quad n = 1,2,... \tag{3}$$

essendo sempre x_o supposto assegnato e un parametro di proporzionalità con $\lambda \geqslant 0$. Un altro possibile modello (ad es. preferito nello studio dei "salmoni" cf. (2)) è il seguente

$$x_{n+1} = x_n e^{\lambda(1-x_n)} \tag{4}$$

Prendiamo qui in considerazione il modello (3) segnalando che le cose che diremo valgono sostanzialmente anche per gli altri modelli, per es. per (4). La (3) individua per il principio di induzione la successione $\{x_n\}$; si presenta allora spontaneo il problema di trovare una espressione esplicita di x_n in funzione di x_o, λ ed n, $x_n = \phi(x_o, \lambda, n)$, così come si è fatto per (1) mediante la (2) (in termine tecnico si tratta di risolvere esplicitamente l'equazione alle "differenze finite" (3)). Ebbene se si cerca una espressione esplicita mediante funzioni elementari, come si potrebbe pensare ricordando la (2), non ci si riesce. Ed allora, possedendo un piccolo calcolatore programmabile, si può fare in classe un po' di matematica sperimentale per vedere se si riesce ad "immaginare" l'andamento della successione $\{x_n\}$. E si trovano dei risultati a prima vista non prevedibili. Riporto qui cinque "esperimenti" ottenuti dando valori diversi a λ e x_o segnalando che in ciascun caso le 3 colonne di numeri vanno lette di seguito a partire da quella di sinistra.

I caso $\lambda = 1.5$; $x_o = .2$

.44	1.000679422926694	1.000002657578232
.8096	.9996595961133831	.9999986712002898
1.04082176	1.000170028131099	1.000000664397207
.9770894958657536	.9999149425701023	.9999996678007346
1.010667915267595	1.000042517862799	1.000000166099467
.9944953357419675	.9999787383569474	.9999999169502251
1.002706880136126	1.00001063014344	1.000000041524877
.9986355691318301	.99999468475878	.9999999792375588

II caso $\lambda = 2.3$; $x_o = .9$

1.107	1.181698873554107	1.181691652424583
.8345673	.6878581588827493	.6878735817582584
1.152116160072633	1.181689576807472	1.181691671496101
.7490285417485184	.6878780148131867	.6878735410256598
1.181393548156113	1.181692273377855	1.181691665965363
.6885100629779253	.6878722555367971	.6878735528381089
1.18177716213686	1.181691491415685	1.181691667569277
.687690934870662	.6878739256380411	.6878735494124983
1.181666794695629	1.18169171818835	1.181691667104142
.6879266710172197	6878734413012044	.6878735504059253

III caso λ =2.52 x_o =.9

1.1268	.7154703245750601	.7152804161141294
.7667468352	1.228473123428406	1.228489359057202
1.217439072495176	.5211769327034109	.5211335584830776
.5503476391834757	1.150046807257024	1.1500080577018
1.173959729559675	.7151934611618958	.7152816605070877
.6593210025479361	1.228496732330268	1.228489253263352
1.22535538427868	.5211138600102546	.5211338411204589
.5294814918534601	1.149990456397232	1.150008310234387
1.157291212781458	.7153217210103766	.7152810857325045
.698571232014164	1.228485843292423	1.228489302129606
1.229206285871434	.5211429511211917	.5211337105700587
.5192169313383165	1.150016449678267	1.150008193589462
1.148286319404161	.7152625598503734	.7152813512212046
.7191929365491436	1.228490876273568	1.228489279558463
1.228118167097891	.5211295051027147	.5211337708708099
.5221248826477514	1.150004436018283	1.L50008247467336
1.150891316358666	.715289903572799	.7152812285929317
.7132693619666514	1.228488552270229	1.228489289984037
1.228650133667422	.5211357138825192	.5211337430179928
.5207039700876719	1.150009983511183	1.150008222581237
1.149623761056646	.7152772772773768	.7152812852347244
.7161559631146026	1.228489625875236	1.228489285168491
1.228412994131799	.5211328456554755	.521133755883137
.5213375592812674	1.15000742079842	1.150008234076062
1.150190224862342	.7152831101240239	.7152812590720261
.7148669570258545	1.228489130012249	1.228489287392781
1.228524077787548	.5211341703963205	.5211337499307546
.5210408013587322	1.150008604437302	1.150008228766628
1.149925158747752		.7152812711565198

IV caso λ =2.55 x_o=.9

1.1295	1.235372932458977	1.152440024232455
.7565108625	.4939008904860243	.7044611619203172
1.226226414919741	1.131306032687022	1.235360026749111
.5188441603154337	.7525104000741015	.493936385950954
1.15543864925155	1.227418569602865	1.131342629041848
.6974591007731752	.5156172423250147	.7524291651658939
1.23553435475389	1.152495301767527	1.227441932428701
.493456847844675	.7043324987543515	.5155539315369137
1.130847675102349	1.235365485133999	1.152437023331963
.7535272626881491	.4939213734817766	.7044681463255672
1.227123276726477	1.131327151745889	1.235359728027943
.5164172148549814	.7524635217903681	.4939372075343518
1.153229926248815	1.227432055711639	1.131343476030524
.7026211180538824	.5155806967356429	.752427284978447
1.235430058476299	1.152461663553184	1.227442472764392
.4937437626546456	.7044107964163831	.5155524672513796
1.131143954365056	1.235362173502854	1.152435675195486
.7528700919795783	.4939304816448079	.7044712840126217
1.227314719264289	1.131336542059495	1.235359593748908
.5158986320751348	.7524426772434124	.4939375768465834
1.152754077495391	1.227438048744167	1.131343856761631
.703729968993902	.515564456104328	.7524264398114711
1.235389923314949	1.152446712755078	1.227442715645941
.4938541580663756	.7044455946435647	.5155518090527711
1.131257841065039	1.235360691662205	1.152435069202496
.7526173632044988	.4939345572153186	.704472694413069
1.227387756113895	1.131340743745074	1.235359533373691
.5157007393656568	.7524333502279864	.4939377428985803
1.152572130663255	1.227440729644307	1.131344027947613
.7041536470813858	.5155571910234305	.7524260598035668

V caso $\lambda = 2.8$ $x_o = .5$

1.2	1.289165493558127	.2839278934280374
.528	.2453754001341701	.8532038587603898
1.2258048	.7638410769350349	1.203895554399348
.4507854984314881	1.268927158075966	.5165824901904861
1.144003710370504	.3134300296809786	1.215812549043917
.6827295292517704	.9159666389714251	.481127254011417
1.289237302842164	1.13148755370731	1.180129948496198
.2451298462889567	.7149132683430298	.5849150573401628
.7632452195814224	1.285587672195357	1.26472546984353
1.269210691810503	.2575732982204618	.3272713460067884
.3124924443028444	.7930153221604874	.9437328198579298
.914047010660983	1.252612980902208	1.092416136684534
1.134029214956554	.3666193436391889	.8097368754726946
.7084486877849671	1.016806225063715	1.24111346579545
1.286786629554998	.9689579371228152	.4032157920820894
.2534948161281692	1.053177606109454	1.076987679955657
.7833533602362509	.8963623071866933	.8448262880579449
1.258543805316162	1.156473687223289	1.211891815037647
.347455432482296	.6497921215769748	.4928799373483807
.9822998662606386	1.286966618454687	1.192737990530324
1.030983015474555	.2528805344810718	.5490574046631473
.941542719851691	.7818900498136617	1.242318843596753
1.09565479418041	1.259396449298605	.3994145000320561
.8022018194561111	.344684141118083	1.071085660181413
1.246489188344876	.9771396962614459	.8578969326398608
.3862000850606592	1.039685284965744	1.199244332339402
1.049938907268096	.9241567059017857	.5302049506748296
.9031270624318593	1.120411754649715	1.227650401348077
1.148095062730027	.7426616677886088	.4451201029184289
.6720188737919221	1.277784549749551	1.136687053228114

Si osserva subito che nel primo caso si ha una quasi immediata "stabilizzazione" di x_n attorno al valore; nel secondo caso la successione "saltella" tra 2 valori; nel terzo tra 4 valori, nel quarto tra 8 valori e infine nell'ultimo caso l'andamento di x_n è estremamente oscillante, di tipo che siamo tentati di chiamare "caotico".

Ora in realtà queste esperienze numeriche sono in perfetto accordo con la teoria dei sistemi dinamici discreti (si veda, per una esposizione universitaria a livello di primo biennio dei corsi di laurea in ingegneria o matematica, il cap. VIII di (1)). Da questa teoria si ottengono infatti i seguenti risultati.

Introdotta la funzione

$$F_\lambda(x) = x+\lambda x(1-x) \tag{5}$$

cosicché la (3) si scrive anche nella forma

$$x_{n+1}=F_\lambda(x_n) \tag{6}$$

si constata subito facilmente che F_λ trasforma l'intervallo $I_\lambda=|0,1+\frac{1}{\lambda}|$ in sè se λ verifica la $0<\lambda<3$.

Si dimostra poi che esiste una successione $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\dots$ crescente di numeri positivi contenuti in $|0,3|$ (detti valori di biforcazione per il parametro λ) tale che

$\lambda_1 = 2$ e per $0<\lambda<\lambda_1$ il punto è asintoticamente stabile cioè

$$\forall x_o \; I \text{ si ha } \lim_n x_n = 1; \tag{7}$$

$\lambda_2 = \sqrt{6}$ e per $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ si ha un ciclo di periodo 2 attorno ai due valori

$$x_{\lambda_{1\pm}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} \pm \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\lambda^2 - 4}; \tag{8}$$

$\lambda_3 - 2.544$ e per $\lambda_2<\lambda<\lambda_3$ si ha un ciclo di periodo 4; (9)

$\lambda_4 - 2.564$ e per $\lambda <\lambda<\lambda_4$ si ha un ciclo di periodo 8; (10)

in generale per $\lambda_n<\lambda<\lambda_{n+1}$ so ha un ciclo di periodo 2^n; (11)

la successione λ_n converge ad un valore critico $\lambda_c <3$ e per $\lambda>\lambda_c$ appaiono nella successione altri periodi, finché per λ sufficientemente vicino a 3 si ha il cosidetto caos deterministico. (12)

Rinviando a (1) per le definizioni precise dei concetti usati ricordiamo solo che l'ultima affermazione ("caos") significa che

a) esistono infiniti cicli di periodi diversi

b) esiste un sottoinsieme non numerabile S_λ di I_λ non contenente alcun ciclo tale che

$$\forall \xi,\eta \quad S_\lambda \quad \text{con} \quad \xi=\eta$$

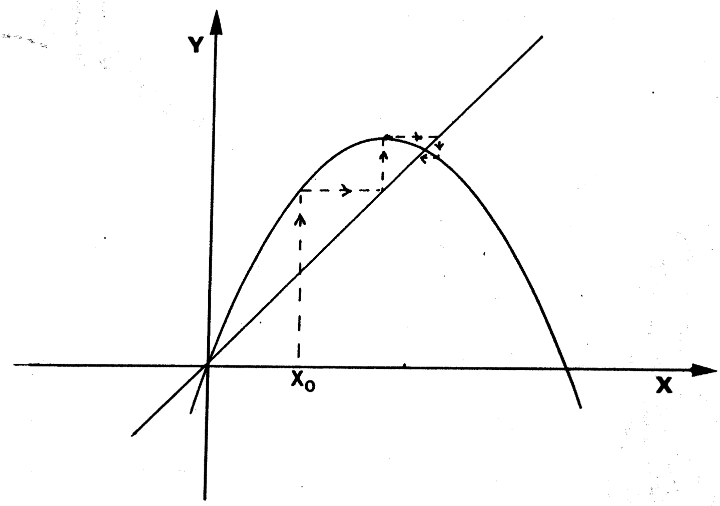
$$\max_n \lim \mid F^n_\lambda(\xi)-F^n_\lambda(\eta)\mid >0$$

$$\min_n \lim \mid F^n_\lambda(\xi)-F^n_\lambda(\eta)\mid >0$$

c) $\forall \xi \; S_\lambda$ ed $\eta \; I_\lambda$ e periodico si ha

$$\max_n \lim \quad F^n_\lambda(\xi)-F^n_\lambda(\eta)\mid >0$$

Naturalmente questi risultati non si possono assolutamente dimostrare in una s.s.s. ma mi sembra possibile ed importante che l'insegnante li illustri sia pure intuitivamente con riferimento ad esperienze numeriche del tipo di quelle sopra riportate; ciò farà meglio comprendere perché sia impossibile descrivere in forma esplicita mediante funzioni elementari la successione $\{x_n\}$ e perché piccolissime variazioni di parametri fisici (nel caso nostro il parametro λ) possano portare a fenomeni impensati di "turbolenza" e di "caos". E si avrà così l'occasione per dire ai ragazzi come molti fenomeni reali (ad es. i fenomeni dell'atmosfera e in generale della fluidodinamica) siano descritti da modelli matematici, ben più complessi di (3), che presentano caratteristiche analoghe. E' questo un modo in sostanza semplice di allenare al "giusto" per la matematica applicata, modo che non presuppone conoscenze matematiche particolari, tant'è che si può introdurre all'inizio dell'insegnamento degli elementi dell'analisi in un capitolo dedicato a successioni ed algoritmi (si veda ad es. per una simile impostazione (7) e (8+). Quando poi il ragazzo avrà fatto anche un po' di calcolo defferenziale e di studio di funzioni si potranno anche dimostrare alcune delle affermazioni precedenti quali ad es. la (7) e la (8), studiando rispettivamente l'andamento delle funzioni $F_\lambda(x)$ e della sua iterata $F_\lambda(F_\lambda(x)$ ed i loro punti "uniti" (che sono rispettivamente 0 ed 1 e $1, x_{\lambda_1+}$ e x_{λ_1-}), Ci limitiamo a riportare qui il grafico di $F_\lambda(x)$ per $0<\lambda<2$, da cui si può anche vedere come si comporta geometricamente la successione x_n, rinviando alla bibliografia citata (1), (2), (3), (4), (5), (6).



Per concludere può valer la pena di osservare che una volta introdotti gli elementi di calcolo differenziale si potrà parlare anche dei modelli "continui" dell'accrescimento, per i quali gli analoghi di (1) e (3) sono dati rispettivamente dalle equazioni differenziali

$$x'(t) = \lambda x(t) \tag{13}$$

e

$$x'(t) = \lambda x(t)(1-x(t)) \tag{14}$$

con la condizione iniziale $x(0)=x_o$. Queste equazioni, come è noto si sanno risolvere esplicitamente in modo elementare. Sarà interessante far vedere come "discretizzando" (13) e (14) ci si colleghi ancora a (1) e (3) e mettere quindi in relazione (13) e (14) con (1) e (2). Una traccia in questo senso si trova ad es. in (7) e in (8).

Bibliografia dell'Appendice

(1) G. Geymonat: Lezioni di matematica per allievi ingegneri - vol. 1, Ed. Levrotto e Bella, Torino, 1981.

(2) R.N. Greenweld: The Ricker Salmon Model, The U.M.A.P. Journal - vol. 3, n. 3 (1984), 341-362.

(3) T.Y. LI - J.A. Yorke: Period three implies Chaos, American Math. Monthly- vol. 82 (1975), 985-992.

(4) R. May: Biological Population with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos - Science- vol.186 (1974), 645-647.

(5) R. May: Biological Population obeying difference equations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos, J. Theor. Biol. - vol. 51 (1975), 511-524.

(6) R. May - G.F. Oster: Bifurcations and Dynamic Complexity in Simple Ecological Model - The American Naturalist, vol. 110, n. 974 (1976), 573-599.

(7) G. Prodi - E. Magenes: Elementi di Analisi Matematica per il triennio della seconda secondaria superiore - Ed. D'Anna, Firenze, 1982.

(8) Guida al volume (7) (a cura di L. Bazzini - A. Pesci - M. Reggiani), Ed. G. D'Anna, Firenze, 1985.

Gian Carlo Zuccon
Università di Cattolica "S. Cuore" - Brescia

LA MATEMATICA NELLA FORMAZIONE TECNICA

L'oggetto della mia relazione è chiaramente espresso alla lettera di incarico che ho ricevuto: "Preparando il programma del Convegno ci siamo accorti che nelle nostre ricerche didattiche e nelle nostre sperimentazioni consideriamo quasi sempre la scuola secondaria come scuola preuniversitaria, trascurando le scuole tecniche e professionali. Proprio per riequilibrare questa prospettiva, abbiamo pensato di chiedere a te una relazione su "La matematica nella formazione tecnica". L'importante sarebbe di presentare la scuola tecnica e professionale e di matematica, eventualmente, potresti parlare anche poco".

Il titolo non deve quindi trarre in inganno o suscitare attese che non verranno soddisfatte. Permettetemi di cominciare con un elenco di argomenti di cui non intendo parlare. Non proporrò nuovi programmi di matematica per la formazione tecnica. Non svilupperò neppure esempi di contenuti specifici. Non dirò assolutamente nulla sul problema fondamentale: "Perché la matematica nella formazione tecnica?", ossia non parlerò dell'importanza educativa della matematica. Non tenterò neppure di fare una analisi dello stato di fatto, cioè una rassegna di come si insegna matematica nella formazione tecnica, limitandomi a darne un rapido cenno nel contesto di una riflessione più ampia.

Che cosa rimane da dire dopo queste negazioni? Due cose. La prima, di carattere informativo, sulla realtà della formazione tecnica. La seconda, di carattere problematico, sull'insegnamento della matematica nella formazione tecnica. Mi propongo di trattarle separatamente.

Nella prima parte fornirò i dati quantitativi sulla attuale composizione della formazione tecnica nella fascia di età corrispondente alla secondaria superiore. Esaminerò poi i principali elementi qualitativi che costituiscono la complessità di questo settore del sistema formativo. Infine svilupperò alcune riflessioni collegate ai temi nodali della riforma, in particolare sulla struttura, sull'unitarietà, sull' area comune e sulla terminalità. Già in questo ambito di problemi avrò modo di accennare ad alcune immediate ricadute sulla matematica.

Nella seconda parte affronterò una questione importante non solo per l'insegnamento della matematica ma più in generale per la pedagogia e la didattica. Essà può essere posta nel modo seguente. E' noto che nella formazione tecnica prevale una concezione pratico-strumentale della matematica, mentre nei licei viene di solito insegnata una matematica più teorico-razionale. Indipendentemente dagli effettivi risultati raggiunti (generalmente più limitati rispetto a quelli previsti nei programmi) ci troviamo di fronte a due mondi educativi diversi, non solo e non tanto per i contenuti che vengono proposti quanto per la netta differenziazione dei reali obiettivi dell'insegnamento. In forma apparentemente provocatoria si potrebbe dire che esistono "due matematiche per due educazioni". Questa situazione, che ha peraltro origini lontane nel tempo in un contesto culturale e sociale molto diverso da quello attuale, sembra derivare dalla assunzione di un principio dicotomico, la cui validità pedagogica è tutta da discutere. Esistono ragioni sufficienti, dal punto di vista sociale e educativo, per rifiutare un tale principio. Ma ci sono anche ragioni diverse. Alcune provengono da riflessioni di epistemologia generale e riguardano il rapporto tra scienza e tecnologia che, pur nella distinzione degli scopi, è fortemente interattivo. Altre sono più legate a considerazioni di epistemologia specifica della matematica e in particolare ad ipotesi di complementarità tra le varie sue concezioni. Le une e le altre richiedono inoltre, nel momento in cui si calano nella struttura scolastica, alcune "operazioni didattiche" non facili da attuare.

Non trarrò conclusioni né proporrò soluzioni concrete. Il problema è soltanto impostato. Per risolverlo è necessario ancora tempo e molto impegno.

1. LA FORMAZIONE TECNICA

La denominazione *formazione tecnica* non è ufficiale dal punto di vista normativo e viene usata spesso per comodità discorsiva e con significati di volta in volta diversi. E' opportuno quindi che io precisi innanzi tutto di quale realtà parlerò nella relazione.

Considero tecniche le tre seguenti forme di attività formativa:

a) l'*istruzione tecnica*, comprendente i diversi tipi di istituti tecnici (industriali, agrari, nautici, aeronautici, per il turismo, per periti aziendali, per geometri, commerciali) di durata quinquennale;

b) l'*istruzione professionale*, comprendente i molti istituti professionali (per l'industria e l'artigianato, per l'agricoltura, per il commercio, per i servizi) di durata biennale (nel settore agricolo), triennale (di norma), quadriennale (in pochi casi), quinquennale (in base alla legge 754/69);

c) la *formazione professionale regionale*, nei suoi vari settori, di durata biennale (secondo la legge 845/78) ma spesso anche triennale.

1.1. Aspetti quantitativi

I dati principali che ci interessano sono:

- i valori assoluti e percentuali degli allievi che frequentano i corsi di formazione tecnica (tabelle 1 e 2);
- i valori assoluti e percentuali dei diplomati di corsi quinquennali di formazione tecnica (tabella 3);
- i valori assoluti e percentuali delle iniziative di sperimentazione nella formazione tecnica (tabelle 4 e 5).

L'analisi dei dati relativi alla *distribuzione degli allievi* per tipo di scuola secondaria superiore (*v. tabella 1*) mette in evidenza due fenomeni importanti. In primo luogo "sembra emergere una lenta ma progressiva *tecnicizzazione* della istruzione secondaria italiana, proprio in virtù dell'accesso a questo tipo di istruzione da parte di settori più larghi di realtà giovanile interessata a conseguire diplomi che permettono un ampio, e soprattutto più rapido, inserimento professionale" (rapporto CENSIS, 1985). Infatti, se si sommano i valori percentuali degli istituti tecnici in complesso e degli istituti professionali si vede come l'istruzione tecnica professionale dall'anno 1979-80 al 1984-85 è in continua ascesa passando dal 63% al 65,2%. In secondo luogo è molto rilevante, agli effetti della nostra questione, notare la consistenza di questo settore dell'istruzione rispetto al totale della secondaria superiore: due giovani su tre frequentano corsi di istruzione tecnica professionale.

Ad un'ulteriore conferma degli stessi fenomeni si arriva se si considerano anche i dati relativi agli allievi dei corsi base di formazione professionale gestiti dalle Regioni (*v. tabella 2*), che passano dai 262.483 del 1980-81 ai 281.735 del

Tab.1 - Distribuzione degli alunni per tipo di scuola secondaria superiore

Tipo di scuola	1979-80	1980-81	1981-82	1982-83	1983-84	1984-85 *(a)*
Valori assoluti						
Istituti professionali	435.622	448.119	462.504	473.859	493.711	503.859
Istituti tecnici in complesso	1.072.746	1.081.014	1.086.014	1.101.032	1.126.948	1.156.221
Istituti tecn. ind.	288.242	281.202	279.058	276.612	284.953	302.799
Istituti tecn. comm.	523.357	533.344	535.844	545.098	551.724	568.812
Istituti tecn. per geom.	136.193	137.279	140.246	145.680	153.233	146.949
Scuole e istituti magistrali	232.341	237.471	241.063	238.140	223.947	210.600
Licei scientifici *(b)*	397.751	393.637	390.621	389.933	392.609	400.110
Licei ginnasi	202.007	205.943	205.447	206.618	206.180	206.648
Istituti d'arte e licei artistici	56.400	57.046	57.932	60.454	64.644	69.334
Totale	2.396.867	2.423.230	2.443.946	2.470.036	2.508.039	2.546.772
Valori percentuali						
Istituti professionali	18,2	18,5	18,9	19,2	19,7	19,8
Istituti tecnici in complesso	44,8	44,6	44,5	44,6	44,9	45,4
Istituti tecn. ind.	12,0	11,6	11,5	11,2	11,4	11,9
Istituti tecn. comm.	21,8	22,0	22,0	22,1	22,0	22,3
Istituti tecn. per geom.	5,7	5,7	5,8	5,9	6,1	5,8
Scuole e istituti magistrali	9,7	9,8	9,9	9,6	8,9	8,3
Licei scientifici	16,6	16,2	16,0	15,8	15,6	15,7
Licei ginnasi	8,4	8,5	8,4	8,4	8,3	8,1
Istituti d'arte e licei artistici	2,3	2,4	2,3	2,4	2,6	2,7
Totale	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

(a) Dati provvisori. - *(b)* Compresi i licei linguistici.
Fonte: elaborazione Censis su dati Istat.

Tab.2 - Iscritti al CFP (corsi di base) per circoscrizione territoriale

	Ripartizione				
Anno	Nord-occ.	Nord-or.	Centro	Sud	**Totale**
Valori assoluti					
1980-81	90.147	77.238	42.982	52.116	262.483
1981-82	98.936	72.332	46.921	57.106	275.295
1982-83	83.506	86.833	46.888	62.895	280.114
1983-84	87.016	90.176	51.006	53.537	281.735
Valori percentuali					
1980-81	34,3	29,4	16,4	19,9	100,0
1981-82	35,9	26,3	17,1	20,7	100,0
1982-83	29,8	31,0	16,7	22,5	100,0
1983-84	30,9	32,0	18,1	19,0	100,0

Fonte: elaborazione Censis su dati Istat.

1983-84, con un tasso di incremento annuo del 2,4%. Di questi allievi poco più della metà frequentano corsi nel settore commercio, trasporti e servizi, più di un terzo nel settore industria e artigianato, il rimanente nel settore agricoltura.

Sommando i dati delle tabelle 1 e 2 si può giungere a due prime conclusioni:

a) la domanda di formazione tecnica nella fascia di età corrispondente alla secondaria superiore è tendenzialmente in crescita negli ultimi cinque anni;

b) la domanda di formazione tecnica riguarda oggi complessivamente il 68,7% dei giovani nella stessa fascia di età. Metà di essi frequentano corsi nel settore commerciale.

Mi pare che la seconda conclusione sia per noi particolarmente significativa. Quando si parla di formazione tecnica non ci si riferisce ad una minoranza ma a più di due terzi della realtà. In questo tipo di scuole quasi tutti gli allievi devono in diversa misura seguire corsi di matematica (in qualche caso la matematica non c'è o è collegata ad altre discipline). Sembrerebbe allora logico affermare che, se esiste un problema specifico di didattica della matematica nella formazione tecnica, sia necessario affrontarlo in modo serio e con un certo grado di priorità. Ma su questo riprenderemo il discorso nella seconda parte della relazione.

Se dall'analisi della frequenza passiamo a quella del "prodotto" scolastico e guardiamo i dati relativi ai *diplomati di scuola secondaria* (*v. tabella 3*), ricaviamo un'altra osservazione interessante. La somma dei diplomati con maturità tecnica o professionale raggiunge il 57% del totale nell'anno 1983-1984, con una tendenziale crescita, anche in questo caso, rispetto agli anni precedenti. Ovviamente il dato è inferiore a quello visto più sopra e relativo alla frequenza, perché non vi sono compresi gli allievi che hanno terminato i corsi biennali e triennali. Tuttavia la percentuale è ancora elevata.

Per completare l'analisi degli aspetti quantitativi ritengo infine utile accennare alla *diffusione di iniziative sperimentali* nella formazione tecnica. Nessuno di voi, credo, verrà tratto in inganno dal termine "sperimentazione". Sappiamo molto bene che è una denominazione a carattere normativo (contenuta nel DPR 419/74) e che più corretto sarebbe chiamarla "innovazione" (quando possibile controllata). Ma qui il problema nominalistico non ci interessa. Sta di fatto che in questi anni la sperimentazione è stata l'unica possibilità concreta per tentare di dare una risposta alle reali esigenze di rinnovamento, se non di riforma, e la sua diffusione è un indicatore molto significativo. Saprete anche che le esperienze sperimentali vengono di solito classificate in due modi: maxi, se investono l'intero ordinamento e la

Tab. 3 - Diplomati nelle scuole secondarie superiori (1980-83) (a)

	Anno scolastico				Variazioni %		
Titolo di diploma	1980-81	1981-82	1982-83*(b)*	1983-84*(b)*	1981-82	1982-83	1983-84
Maturità professionale	25.561	29.433	33.285	37.921	15,1	13,1	13,9
Maturità tecnica	162.301	165.071	175.132	177.613	1,7	6,1	1,4
Industriali	37.560	37.838	38.732	39.745	0,7	2,4	2,6
Commerciali	84.311	84.933	90.931	93.322	0,7	7,1	2,6
Geometri	21.887	21.796	23.296	23.734	0,4	6,9	1,9
Abilitazione Magistrale	41.999	45.024	45.881	46.131	7,2	1,9	0,5
Maturità scientifica *(c)*	67.299	65.921	68.447	70.142	–2,0	3,8	2,5
Maturità classica	33.031	32.684	38.979	37.785	–1,1	19,3	–3,1
Istituti d'arte	3.972	4.239	4.555	4.487	6,7	7,5	–1,5
Licei Artistici	4.660	4.753	4.203	4.683	2,0	–11,6	11,4
Totale	338.823	347.125	370.482	378.762	2,5	6,7	2,2

(a) Esclusi i corsi degli istituti professionali e degli istituti d'arte di durata inferiore a 5 anni e le scuole magistrali. - *(b)* Dati provvisori. - *(c)* Compresi i licei linguistici.

Fonte: elaborazione Censis su dati Istat.

struttura del curricolo; mini, se si limitano a parziali modifiche nel curricolo tradizionale. Un terzo modo, da poco considerato a parte, è quello che raggruppa i cosiddetti "progetti assistiti" (la maggioranza dalla Direzione della Istruzione Tecnica, alcuni da quella dell'Istruzione Professionale).

I dati che riporto sono abbastanza grezzi rispetto alla realtà che si presenta molto articolata. Tuttavia per le considerzioni generali che ne traggo ciò non ha tanta importanza.

Dalla *tabella 4* si può notare il complessivo aumento delle iniziative di sperimentazione nell'ultimo anno (+ 33,1%) con valori che raggiungono quasi il 10% del

Tab. 4 - Scuole secondarie superiori statali e non statali interessate a iniziative di sperimentazione per ripartizione geografica

Tipo di sperimentazione	NORD	CENTRO	SUD/ISOLE	ITALIA
Maxisperimentazioni				
V.A. '83-'84	135	63	45	243
V.A. '84-'85	181	79	54	314
Minisperimentazioni				
V.A. '83-'84	139	89	75	303
V.A. '84-'85	91	62	25	178
Progetti "assistiti"				
V.A. '84-'85	90	60	85	235
Totale '83-'84	274	152	120	546
Totale '84-'85	362	201	164	727
Variazione percentuale	+ 32,1	+ 32,2	+ 36,7	+ 33,1
Incidenza % rispetto al totale scuole	11,5	13,4	5,6	9,6

Fonte: elaborazione Censis su dati Ministero P.I.

totale delle scuole. Più in particolare la *tabella 5* considera la distribuzione della sperimentazione in rapporto al tipo di scuola statale (e solo di scuola statale;

TAB. 5 - ISTITUTI DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE IMPEGNATI NELLA SPERIMENTAZIONE NELL'A.S. 1984/85

Area geografica		Classica-Scientifica	Tecnica	Professionale	Artistica
Nord	Maxi	22	28	23	5
	Mini	54	86	11	2
	Totale	76	114	34	7
Centro	Maxi	33	32	24	9
	Mini	51	87	14	1
	Totale	84	119	38	10
Sud	Maxi	7	15	17	2
	Mini	21	100	2	1
	Totale	28	115	19	3
Italia	Maxi	62	75	64	16
	Mini	126	273	27	4
	Totale	188	348	91	20

Totale istituti secondari superiori statali n. 647

Fonte: Ministero P.I.

ciò spiega la differenza tra il totale della tabella 4 (727) e quello della tabella 5 (647)). Si tenga conto che in questa tabella i "progetti assistiti" sono compresi nelle minisperimentazioni. Se si sommano i dati relativi all'istruzione tecnica con quelli dell'istruzione professionale (348 + 91) ci si rende conto che la percentuale di questi settori rispetto al totale è del 67,8%. Un dato di alta maggioranza, omogeneo agli altri rilevati nel caso della frequenza e del diploma. Se poi si considerassero nel computo anche le innovazioni introdotte negli istituti tecnici industriali ad indirizzo per l'informatica e negli istituti commerciali con specializzazione per ragionieri programmatori, recepito ormai nell'ordinamento con l'entrata in vigore del DPR 725/81, la percentuale sarebbe ancora maggiore.

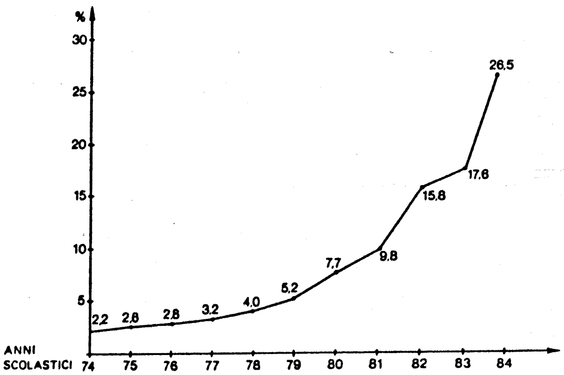


FIG. 1 PERCENTUALE DEGLI ISTITUTI CON CLASSI SPERIMENTALI SUL TOTALE DEGLI ISTITUTI TECNICI

Fonte: Ministero P.I.

Per quanto riguarda l'istruzione tecnica considerata separatamente, oltre i dati riferiti all'andamento della percentuale sperimentale negli ultimi dieci anni (*Fig. 1*) che ne evidenziano la recente rapida crescita, è importante prender atto che ormai più di un quarto degli istituti tecnici è in qualche modo coinvolto in iniziative sperimentali.

Il quadro delle esperienze o attività innovative non si esaurisce nei dati riportati fin qui. Bisognerebbe aggiungere i progetti-pilota promossi dalla Cee e tutta la sperimentazione attuata nei centri di formazione professionale regionale per i settori grafico, meccanico, elettrotecnico, ...

Una sintetica conclusione di questa rapida e sommaria rassegna di aspetti quantitativi potrebbe essere la seguente: la formazione tecnica è in fase di crescita, rappresenta oggi più dei due terzi dell'istruzione secondaria ed esprime una grande attenzione ai problemi innovativi.

1.2. Aspetti qualitativi

Mi limito a proporre soltanto alcune brevi ed essenziali considerazioni.

Una prima riguarda la *doppia valenza dei diplomi* di istituto tecnico e, se quinquennale, di istituto professionale: per gli studi universitari e per l'inserimento nel mondo del lavoro. La riforma degli esami di maturità del 1969 (sperimentale e provvisoria!) ha portato con sé la possibilità di accedere a qualsiasi facoltà universitaria anche per i diplomati "tecnici". E' vero che l'utilizzazione di tale possibilità, inizialmente molto alta (il 68,7% nel 1975/76), è successivamente calata al punto che oggi, secondo stime, meno della metà dei diplomati "tecnici" si iscrive all'università e una parte di questi non conclude i corsi. In ogni caso, tuttavia, a partire da quella data e con il concorso anche di altri fattori si è sviluppata una *maggiore connotazione pre-universitaria dell'istrzuione tecnica* rispetto al passato. L'analisi dei problemi connessi a tale sviluppo è molto complessa e non mi è possibile trattarla in questa sede. Dirò soltanto che alle ingenue ipotesi deprofessionalizzanti si sono sostituite via via proposte più sagge (ruotanti attorno al concetto di professionalità di base) che tengono conto della necessità (e purtroppo anche dell'incertezza) di ridefinire il ruolo della formazione tecnica di fronte alle trasformazioni che caratterizzano il mondo del lavoro: l'innovazione tecnologica, il nuovo concetto di professionalità, il nuovo sistema delle professioni e, conseguentemente, la quantità e qualità di istruzione sufficiente ai vari livelli. Tutti problemi che in qualche modo ricadono sulla costruzione dei curricoli, compreso quello di matematica.

Una seconda considerazione va fatta sulla *complessità* del sistema di formazione tecnica, che non trova confronto con la "semplicità" propria dei corsi tradizionalmente pre-universitari (sostanzialmente i licei). Elenco rapidamente i principali fattori costitutivi della complessità.

a) La durata variabile dei corsi (biennale, triennale, quadriennale, quinquennale). Essa è oggi ancora abbastanza funzionale ai diversi livelli di professionalità richiesti dal mondo del lavoro. Ciò determina però una *disomogeneità verticale* che non è neutra rispetto alla definizione degli obiettivi e dei contenuti del curricolo (anche per la matematica).

b) L'ampia tipologia degli indirizzi, delle specializzazioni e delle qualifiche. Si pensi, ad esempio, che solo gli istituti tecnici industriali hanno circa una trentina di specializzazioni (di cui però soltanto otto a larga diffusione) e che gli indirizzi di qualifica nell'istruzione professionale sono circa 120 (ci cui solo una trentina a larga diffusione). Esiste quindi anche una *disomogeneità orizzontale* che, per quanto riguarda la matematica, comporta differenze di programmi e di durata (da due a cinque anni e in certi casi niente).

c) La diversa anzianità. Accanto a indirizzi di vecchia istituzione convivono quelli più giovani. E' naturale che si constati una maggiore o minore *obsolescenza* *dei programmi*, comune in realtà a tutto il sistema scolastico ma ancora più accentuata nel settore tecnico e solo parzialmente compensata, come abbiamo visto, dalle iniziative sperimentali. Nel caso poi dei centri di formazione professionale regionale spesso non esistono neppure i programmi ufficiali ed ogni centro (cioè ogni insegnante) li stabilisce autonomamente.

d) L'esigenza continua di rinnovamento. Pur essendo vero che il sistema formativo ha (e deve avere) una sua autonomia finalistica, non si può negare che questo tipo di scuola debba vivere in stretto *collegamento con le attese dei giovani e della società*. Ciò rende difficile la risposta istituzionale e didattica, necessariamente ritardata rispetto ai mutamenti esterni.

Devo aggiungere una terza e ultima considerazione. Quelli che ho appena elencato sono fattori oggettivi di complessità che incidono negativamente sui pur generosi tentativi di razionalizzazione (non esclusivamente illuministica, come spesso è accaduto e accade) del sistema. Un'ulteriore incidenza negativa, didatticamente ancora più rilevante, è rappresentata dalla accettazione inconscia, e perciò acritica, di un *paradigma riduttivistico* nella costruzione dei curricoli della formazione tecnica (ma non soltanto in questa). Mi spiego. Sapete che il sistema scolastico dopo la terza media è normalmente percepito come gerarchizzato da parte di tutti gli attori sociali (genitori, studenti, docenti, dirigenti, politici, giornalisti, ...). Al vertice sta il liceo classico, alla base la formazione professionale regionale, in mezzo, secondo un ordine stabilito, gli altri tipi di scuola. Sapete pure che l'idea di "degerarchizzare" il sistema è sempre stata considerata una finalità esplicita della riforma fino al punto di arrivare, in un raptus nominalistico, a battezzare come "liceale" tutta la secondaria superiore. Non intendo discutere se la proposta sia un rimedio utile per guarire la malattia, perché qui entriamo nel campo delle opinioni e ciascuno di noi può legittimamente conservare la propria. Mi interessa osservare che forse il male peggiore non è la gerarchia ma il riduttivismo. La prima è probabilmente ineliminabile, il secondo può (e deve) essere rimosso. Ma che cosa intendo per "riduttivismo"? Vorrei innanzi tutto attirare la vostra attenzione sulla parola: riduttivismo e non riduzionismo. In epistemologia il termine riduzionismo è utilizzato per esprimere il fatto o il progetto di ridurre una scienza ad un'altra, sia nel caso in cui lo si limiti ai contenuti oggettuali sia quando se ne assuma anche i metodi di indagine. In tal senso il riduzionismo postula in ordine gerarchico tra le varie scienze, considerando come prima e fondamentale la fisica (oggi insidiata dalla biologia) e in subordine la chimica, ..., la psicologia, la sociologia, ... Forse un qualche corollario riduzionistico è presente anche nella scuola quando si stabiliscono gerarchie di materie e di insegnanti. Io non parlo comunque del riduzionismo ma di riduttivismo. Mi pongo dal punto di vista curricolare e didattico e chiamo paradigma riduttivistico (con evidente connotazione negativa) la modalità con la quale si definiscono i programmi di studio di una disciplina in un certo tipo di scuola in funzione della posizione gerarchica che essa occupa nella scala. Succede così che, se il programma di una disciplina trova il suo vertice gerarchico nell'istituto tecnico e in una certa specializzazione (ad esempio meccanica), lo stesso programma viene "ridotto" (togliendo alcuni contenuti o sviluppandoli in modo meno approfondito) per un'altra specializzazione (ad esempio elettrotecnica), ancora "ridotto" per l'istituto professionale equivalente quanto ad indirizzo e infine ulteriormente "ridotto" nel centro di formazione professionale. Il fattore della disomogeneità verticale si fa sentire con effetti pesanti, più che in altri tipi di scuola. Le conseguenze rifluiscono sui libri di testo di modo che, a partire da un'opera originariamente scritta in tre volumi si passa al volume unico, a sintesi preparate dal docente e agli appunti dell'allievo. Non è sempre così ma il fenomeno è certamente diffuso, con buona soddisfazione delle case editrici.

Per non essere frainteso aggiungo subito che l'assunzione di un qualche criterio di riduzione è inevitabile perché non si può offrire a tutti lo stesso menu e la stessa dieta. Ma c'è modo e modo. Ed il modo generalmente seguito non mi sembra corretto.

Provo a chiarire il mio pensiero con un paragone. Conoscete certamente le bambole di legno contenute una dentro l'altra, tipico souvenir di chi è stato in Russia (ma si trovano anche da noi!). Ebbene, ciascuna bambola interna è ridotta, ossia è rimpicciolita nelle dimensioni, ma è sempre una bambola completa. Diverso sarebbe il caso in cui il criterio riduttivo portasse a inserire bambole prima senza piedi, poi senza gambe, poi senza testa e via di seguito fino a lasciare solo le mani. Ora quando parlo di paradigma riduttivistico intendo proprio dire che tradizionalmente si procede come nel secondo caso: i programmi vengono ridotti e tagliati (o massacrati?) in malo modo, frammenti di una bambola della quale gli studenti non vedranno mai il vero volto e con la quale soprattutto non giocheranno mai.

In relazione alla matematica, ad esempio, mi pare che si applichi un paradigma riduttivistico di secondo tipo quando si limita il programma a "ciò che serve" come strumento di calcolo utilizzabile in altre discipline: si avrebbe una bambola con le mani ma senza testa. Analogo riduttivismo si ha quando si riduce il programma ai contenuti utili allo sviluppo delle capacità di astrazione e di ragionamento: la bambola avrebbe la testa ma non le mani.

Non vado oltre perché riprenderò il problema nella seconda parte. Mi basta aver esaminato brevemente gli aspetti qualitativi che caratterizzano il sistema di formazione tecnica e che riassumo in un elenco: ambivalenza dei diplomi, accentuazione pre-universitaria degli istituti tecnici, complessità della struttura, disomogeneità verticale e orizzontale, obsolescenza dei programmi, condizione costitutiva di rinnovamento, riduttivismo curricolare e didattico.

1.3. Una prospettiva di riforma

Do per scontata la conoscenza delle vicende della riforma e dei suoi ultimi aggiornamenti. E' una storia che assomiglia sempre più al mito di Sisifo, condannato a spingere su per un monte un gran macigno, che, una volta vicino al culmine, riprecipita a valle. Dirò anche che, secondo me, *quel* disegno di riforma non ha più ormai ragionevoli possibilità di venir approvato, sia perché non esiste una maggioranza culturale e politica in grado di sostenerlo, sia perché è largamente impraticabile, sia perché è fondato su criteri progettuali più sociologici che culturali e pedagogici, sia perché è già invecchiato. Ciascuna di queste ragioni è da sola sufficiente.

Resta comunque vero che *una* riforma, anche parziale e graduale, è assolutamente necessaria e urgente poiché il futuro del nostro paese si gioca sulla scuola.

Precisato ciò, vorrei limitarmi a considerare le pricipali esigenze di rinnovamento della formazione tecnica (indipendentemente dal testo in discussione) per quanto riguarda la struttura verticale ed orizzontale del sistema, privilegiando gli aspetti tipicamente didattici. Comincio dalla struttura verticale e dal problema più importante relativamente alla questione che ci interessa, trascurando tutti quelli che in assoluto non sarebbero meno importanti.

Una serie di ricerche recenti ha sottolineato come l'acquisizione di un ruolo professionale (di un insieme cioè di conoscenze, di capacità e di motivazioni necessarie per svolgere una determinata occupazione) non possa che perfezionarsi sul lavoro perché la scuola difficilmente è in grado di fornire una preparazione necessaria e sufficiente. Per altro verso è evidente che la struttura del sistema formativo, pur essendo funzione di più variabili, deve in qualche modo corrispondere alla struttura del sistema produttivo. In altri termini la quantità e qualità di formazione data dalla scuola (il che significa durata dei corsi, obiettivi, contenuti, certificazioni, ...) devono essere adeguate ai vari livelli di professionalità richiesti dal mondo del lavoro.

Scontati tali dati di partenza, la prima domanda da porsi è questa: "Nel prossimo futuro quali e quanti saranno i livelli di professionalità?". La risposta è per ora incerta. Forse la situazione non cambierà radicalmente ma sicuramente ci saranno dei mutamenti riguardanti il numero dei livelli e soprattutto i reciproci rapporti quantitativi. Non posso qui entrare nei dettagli del problema. Voglio soltanto rilevare che, per quanto detto sopra, la prima domanda implica la sua corrispondente: "*Nel prossimo futuro come dovrà essere la struttura formativa?*". Per il ritardo che il sistema formativo ha nei confronti del sistema produttivo una risposta esauriente alla seconda domanda è ancora più incerta. Si possono dare soltanto *alcune risposte parziali*. Le elenco.

1) Ci dovranno essere comunque cicli di formazione più lunghi e cicli più brevi.

2) Per i cicli brevi la durata minima dovrà essere di tre anni, con una strut-

turazione del curricolo specifica, coerente e continua. Questi tre anni non potranno quindi essere una parte dei cicli lunghi.

3) Il ciclo breve dovrà essere culturalmente più solido di quanto non sia negli attuali istituti professionali e nei centri di formazione. Ciò significa "più e meglio" lingua italiana, ligua/e straniera/e, matematica, scienze, ...

4) I cicli brevi non potranno essere chiusi ma aperti a ulteriore sviluppi, anche superiori, valorizzando i rientri dal sistema produttivo.

5) I cicli lunghi prevederanno in certi casi dei corsi postdiploma.

6) La componente pratica (leggi officine) dei cicli lunghi dovrà subire una forte riduzione nell'ambiente scolastico a favore di esperienze esterne e di specifici laboratori interni.

7) Nel complesso il sistema sarà organizzativamente flessibile e rapidamente adattabile se potrà ricorrere a tutte le risorse disponibili (Stato, Regioni, imprese, pubblico e privato), centralmente coordinate e non solo monopolisticamente gestite.

Chiunque di voi abbia minimamente seguito il dibattito sulla riforma si accorge che queste parziali risposte presuppongono l'abbandono del criterio ideale di unitarietà a favore di *criteri più realistici e funzionali*: la differenziazione, la coerenza e pertinenza dei curricoli, il policentrismo e la discontinuità. Mai nessuno infatti ha saputo dimostrare che con il criterio di unitarietà è concretamente possibile costruire curricoli in grado di soddisfare *contemporaneamente* a tre esigenze: una maggior cultura generale per tutti (cui non può dare risposta da sola sufficiente il semplice prolungamento della durata dell'istruzione obbligatoria), il rispetto dei bisogni, attitudini, aspirazioni, ritmi, capacità di ciascuno e il collegamento con la realtà lavorativa.

Se dalla struttura verticale passiamo a quella orizzontale ci sono altri elementi di rilievo per il tema che ci interessa. Due di questi mi sembrano particolarmente importanti: la distinzione area comune/area di indirizzo e il livello di terminalità chiamato professionalità di base.

Il mito dell'unitarietà è stato progressivamente scalfito non solo per quanto riguarda la uniformità della durata degli studi (attraverso la riconsiderazione della necessità di cicli brevi) ma anche in relazione alla ambigua distinzione tra area comune e area di indirizzo (che ne è un corollario). In astratto l'idea potrebbe sembrare buona. In realtà si rivela sostanzialmente debole e largamente inutilizzabile. Naturalmente a questa conclusione sono arrivati coloro (purtroppo pochi!) che hanno provato a definire orari, discipline e programmi per i singoli indirizzi. Il parere degli altri (purtroppo ancora molti!) spesso non va oltre la pura retorica.

Sembrerebbe semplice affermare che l'area comune (per tutta la secondaria) è costituita dall'insieme fondamentale e irrinunciabile del sapere che deve costituire il patrimonio di ogni giovane. Ma il problema difficile è proprio quello di definire questo insieme. Anche ammesso che ci si riesca, rimane poi da stabilire come si può versare tale insieme nei vasi tipici della scuola: orari, discipline, programmi. Ciò significa che la praticabilità di ciascuna ipotesi è legata alla *interpretazione concreta dell'area comune*. Ad esempio, un'area rigorosamente comune sul quinquennio con discipline, orari e programmi identici per tutti gli indirizzi anche non tecnici è irrealizzabile. Un'area comune, sempre sul quinquennio, con discipline annuali identiche ma programmi differenziati non risolve problemi di articolazione verticale del curricolo nei diversi indirizzi. Un'area comune solo per curricoli affini è più proponibile. Una divisione del programma tra parte comune e parte di indirizzo è artificiosa e organizzativamente complicata. Un'area comune nei primi due anni del ciclo lungo è possibile in buona misura (a patto di non caricarla troppo).

In sostanza la difficoltà maggiore proviene dal fatto che la presenza di un'area comune può disturbare in maniera più o meno forte la coerenza interna di un curricolo e la sua specificità culturale e didattica. Ciò significa che l'idea, in sé buona, va tradotta nei fatti con molta attenzione e in modo differenziato.

Per quanto riguarda la *formazione tecnica* pare si possa ragionevolmente sostenere quanto segue.

1) *Nel ciclo breve* non si può avere la stessa area comune (cioè identici orari, discipline e programmi) dei primi due anni del ciclo lungo. In particolare quindi *non si può* avere la stessa matematica o, meglio, non si può avere lo stesso impianto contenutistico e metodologico né lo stesso insieme di obiettivi.

2) *Nei primi due anni del ciclo lungo* è possibile definire un'area comune ai diversi indirizzi, con discipline, orari e programmi sostanzialmente identici. In particolare *si può* avere la stessa matematica, con gli stessi obiettivi e contenuti *almeno* per gli indirizzi industriali, nautici, aeronautici, agrari e per geometri (o per i corrispondenti riformati).

3) *Nei trienni* la soluzione ritenuta valida nel caso 2 diventa largamente impraticabile per ragioni di articolazione interna delle discipline del curricolo. La matematica, pur con gli *stessi obiettivi* (come vedremo nella seconda parte), avrà *contenuti parzialmente diversi* (non solo tra istituti commerciali e industriali, com'è ovvio, ma anche tra i vari istituti industriali). Per il nostro discorso è poco importante se la matematica è considerata in area comune o in area di indirizzo, purché non resti divisa.

Ci rimane, per concludere, da dire qualcosa sul problema della terminalità.

Conoscete certamente le vicende attraverso le quali si è passati dalle iniziali ipotesi deprofessionalizzanti (o licealizzanti) per tutta la secondaria a posizioni sempre meno radicali, chiamate dapprima "pre-professionalità" e successivamente "professionalità di base". Io mi limito qui a considerare l'ultimo passaggio.

Il termine professionalità di base è stato introdotto e inizialmente utilizzato solo come avamposto nominalistico contro interpretazioni per difetto o per eccesso della terminalità. Lo scopo dell'operazione era quello di delimitare in qualche modo, assegnandole un nome, una zona intermedia tra la generica pre-professionalità (considerata soluzione per difetto) e la professionalità specialistica e compiuta nella preparazione scolastica (considerata soluzione per eccesso). Avendo partecipato all'operazione posso testimoniare che le cose sono andate proprio così. Nonostante questa nascita poco nobile il termine conteneva già, in prima e grossolana approssimazione, due idee: prima di tutto la necessità di prevedere più indirizzi nello stesso settore (o area, come veniva allora chiamata), ciascuno dei quali avente come referente una famiglia omogenea di professioni "basate" su un comune corpus dottrinale; in secondo luogo l'impossibilità da parte della scuola di inseguire oggi una professionalità compiuta, dal momento che questa deve più o meno completarsi in altre situazioni formative o nel luogo di lavoro. Dirò anche che sorse subito il dubbio circa la possibilità di generalizzare un tale livello di terminalità per tutti gli indirizzi della secondaria, in particolare per quelli che sembravano tipicamente pre-universitari, corrispondenti, per intenderci, agli attuali licei classici e scientifici. I generosi sforzi di molti colleghi in tale direzione non furono in grado di eliminare forzature di significato e ambiguità.

Nella formazione tecnica l'idea della professionalità di base era vista a quel tempo (circa sei anni fa) come supporto teorico o come criterio utile per operare una forte riduzione dell'eccessivo numero di indirizzi esistenti (una quarantina nell'istruzione tecnica e oltre cento nell'istruzione professionale), individuando possibili raggruppamenti per omogeneità, senza tuttavia escludere ragionate e limitate eccezioni. Ci si accorge però che tale riduzione poteva diventare un'operazione puramente esteriore o di facciata se contemporaneamente non ci si poneva anche il problema della *ricostruzione dei piani di studio*. Fu così che il termine in questione venne via via caricato anche di significati collegati ai processi di apprendimento, in aggiunta a quelli che lo mettevano in relazione con le professioni e con il sistema produttivo.

Il compito di precisare meglio il significato passava allora alla pedagogia e alla didattica prima che alla ingegneria curricolare (alla quale, comunque, alla fine bisogna ricorrere). Vediamo in quale modo il compito è stato affrontato.

Il ruolo specifico della scuola consiste nella produzione di apprendimenti che non siano generici, meccanici, nozionistici, ripetitivi, inutili bensì riferiti a obiettivi espliciti e reali di conoscenze e capacità specificamente orientate (nel nostro caso) a professioni affini, deliberatamente perseguiti e non solo casualmente raggiunti. Con apparente paradosso si potrebbe dire che la scuola ha il compito di far acquisire competenze più trasversali che separate, più trasferibili che limitate, più metodologiche che contenutistiche, più polivalenti che specialistiche, più polifunzionali che monofunzionali. In questo contesto la professionalità di base ottenibile nella scuola si può sinteticamente ritenere connotata dai punti seguenti:

a) apprendimento significativo (nel senso di Ausubel, cioè incorporato nella matrice cognitiva del soggetto in modo organico e duraturo) di conoscenze specifiche (ma non specialistiche), di principi scientifici, di procedure e di metodologie tecnologiche relative a professioni affini dell'indirizzo prescelto;

b) acquisizione di capacità operative, progettuali e valutative concretamente legate alle diverse attività lavorative (di produzione, di manutenzione, di controllo, di distribuzione, ...) connesse all'indirizzo;

c) interiorizzazione di atteggiamenti mentali ed etici idonei al ruolo professionale (autonomia, responsabilità, rispetto, iniziativa, ...).

Ciascuno dei tre punti richiederebbe un commento adeguato ma ci possiamo accontentare di evidenziare due conseguenze tra loro collegate.

Nei nostri discorsi siamo soliti distinguere tra *formazione generale* e *formazione professionale* e ci divertiamo spesso a discutere sulla prevalenza dell'una rispetto all'altra, così come, analogamente, discutiamo sul rapporto tra area comune e area di indirizzo. La distinzione, secondo me, può avere valore se aiuta a precisare bene un sistema il più possibile completo di finalità e di obiettivi da raggiungere. Diventa però inutile e pericolosa se applicata alle discipline. Inutile perché in pratica non la si può usare per costruire il curricolo. Con quale criterio infatti è possibile decidere se una disciplina dà formazione generale o professionale? Tutte le discipline sono da questo punto di vista ambivalenti. Ed è pericolosa perché accetta implicitamente un principio di separazione nelle discipline, quando invece è necessario ricomporre in unità l'intero processo educativo. Neppure la matematica sfugge all'ambivalenza e la discussione se sia una disciplina di formazione generale o professionale, se sia da porsi in area comune o in area di indirizzo, è del tutto accademica e sterile tanto quanto lo sono le dispute sul sesso degli angeli.

La seconda conseguenza si può ricavare osservando il modo con cui, per rispondere alle nuove esigenze, si interviene sui curricoli e sui programmi delle discipline di studio. Di solito si procede per sottrazione e addizione, togliendo cioè contenuti invecchiati e aggiungendone di più recenti. Il bilancio però è in generale positivo, ossia la quantità aggiunta è maggiore di quella tolta, di modo che poco per volta il "corpus" disciplinare si allunga e si dilata. La cosiddetta "modernizzazione dei contenuti" rischia di essere una funzione monotona crescente.

Probabilmente in molte discipline tecniche si è oggi, scolasticamente parlando, alla soglia dell'infarto o del collasso. E' necessaria una cura drastica e severa. Forse un trapianto.

Fuor di metafora ciò significa *una nuova sintesi* culturale e didattica. Il compito non è facile ma non possiamo pensare che non sia anche nostro e, per quanto riguarda la matematica, vostro.

2. MATEMATICA E FORMAZIONE TECNICA

Ho precisato all'inizio il problema che intendo affrontare nella seconda parte della relazione. Lo ripropongo ora in una forma leggermente diversa.

L'insegnamento della matematica nella secondaria superiore assume due caratterizzazioni polarmente contrapposte cui corrispondono due obiettivi fondamentali nettamente differenziati: la capacità di *pensare correttamente* da una parte, la capacità di *calcolare correttamente* dall'altra. Ho parlato di caratterizzazioni estreme, perché di fatto esiste una gamma di posizioni intermedie cui corrispondono accentuazioni positive o negative rispetto ai due poli. Come dato di prevalenza (indipendentemente dalla scelta di singoli insegnanti) si può dire che nei licei si tende a dare maggiore rilevanza ad una matematica intesa come *pensiero* mentre nella formazione tecnica la si insegna come *calcolo*. Ciò potrebbe far pensare che, per la scuola, esistono due matematiche, una "attaccata al cielo della logica", l'altra "attaccata alla terra dell'esperienza sensibile" (l'immagine poetica è di G. Melzi).

La distinzione ha origini antiche ed è ben consolidata. Nella sua interpretazione più stretta (i due poli) equivale ad una contrapposizione chiaramente inaccettabile. Ma anche interpretazioni più sfumate (le posizioni intermedie) possono essere inadeguate. Non si tratta, infatti, solo di aggiungere pensiero a calcolo e viceversa; ciò avviene già, in qualche misura. Si tratta piuttosto di definire *quale pensiero, quale calcolo e in quale reciproco rapporto*. Il che significa ricostruire tutto l'impianto didattico: obiettivi, contenuti, metodi. In modo nuovo.

Mi pare sia questa l'idea direttrice delle ricerche e delle esperienze internazionali negli ultimi dieci anni, dal 3° Congresso Internazionale sull'Insegnamento della Matematica svoltosi a Karlsruhe nel 1976, al 4° di Berkeley nel 1980 e al 5° di Adelaide nel 1984. Seguendo tale linea di ricerca svilupperò tre aspetti che mi sembrano particolarmente importanti. Il primo è interno alla matematica e riguarda appunto il rapporto tra pensiero e calcolo esaminato attraverso i temi della complementarietà, del modello e dell'operatività. Il secondo riconsidera sotto una originale prospettiva il rapporto tra scienza e tecnologia, riproponendo il primo aspetto in un orizzonte più ampio. Il terzo infine è più strettamente didattico e interessa il problema degli obiettivi visti come sistema.

Prima però di sviluppare il discorso è opportuno esporre meglio e più in dettaglio la questione.

2.1. Un'antica dicotomia: due matematiche per due educazioni

La civiltà occidentale affonda le sue radici in due grandi tradizioni: quella mesopotamica-egiziana, contemporaneamente mitico-religiosa e tecnico-pratica e quella greca, filosofico-umanistica e scientifico-razionale.

Nella prima sono nate, ad esempio, l'aritmetica, l'algebra, la geometria e l'astronomia, con scopi sostanzialmente pratici legati alla vita quotidiana, anche se i risultati raggiunti erano ovviamente sostenuti da uno sforzo di teorizzazione, del quale però non abbiamo documentazione. L'insegnamento era affidato alla trasmissione orale e quanto ci rimane di scritto riguarda o tavole numeriche o raccolte di esercizi con soluzioni prive di dimostrazione, per cui non si riesce a stabilire come i risultati erano stati ottenuti.

La seconda tradizione, quella greca, assorbe in qualche modo la prima, trasformandola però con la elaborazione di un modello del sapere profondamente segnato dall'idea di razionalità. Tale modello si proponeva di dare una spiegazione della realtà non più legata solo alla interpretazione occasionale e singola dell'esperienza o ai miti cosmogonici bensì inserita in un quadro più ampio di principi universali e necessari, con un metodo dimostrativo rigoroso, rivolto a conoscere l'essenza e le cause. In questo modo la ragione (il *logos*) veniva posta al di sopra dell'esperienza (l'*empeirìa*).

"Senza dubbio la filosofia classica, accanto alla ragione speculativa, fa posto alla ragione pratica, ma attribuisce importanza prioritaria alla ragione speculativa e, nelle sue forme più logiche, considera nell'ambito di quest'ultima la ragion d'essere e i fini della ragion pratica. ...E' nel realizzare la possibilità dell'intelletto che l'uomo trova la sua armonia perfetta. Contemplare la verità dà la massima gioia; è nel contempo visione e fruizione. E' la teoria che dà adito alla vita beata" (J. Ladrière).

Non mi è possibile in questa sede dare una pur sommaria ricostruzione storica dei reciproci rapporti tra le due tradizioni. Mi è sufficiente far notare la ricaduta che esse hanno avuto sulla matematica e sul suo insegnamento.

Proclo, un commentatore degli Elementi di Euclide nel V° sec. d.C., racconta che Talete, di ritorno dall'Egitto, "per primo portò in Grecia la geometria ed egli stesso fece molte scoperte e di molte altre insegnò i principi a coloro che vennero dopo di lui, seguendo in alcuni casi un metodo più generale, in altri uno più empirico".

La testimonianza sta ad indicarci che già agli inizi la matematica greca sviluppò sia un impianto teorico rigorosamente dimostrativo (il metodo più generale cioè razionale) sia un'attenzione alle applicazioni concrete (il metodo più empirico, detto anche sensibile o pratico). Allo stesso Talete viene attribuita la dimostrazione di alcuni classici enunciati geometrici ma anche la soluzione di problemi pratici, quali la previsione di un'eclisse di sole, il calcolo dell'altezza delle piramidi e della distanza di una nave in mare.

Quando successivamente l'insegnamento ebbe una certa sistemazione e diffusione, la distinzione metodologica di cui parla Proclo comportò anche una distinzione dei contenuti. La matematica sensibile o pratica trattava i numeri naturali, le frazioni, la misura di lunghezze, superfici, volumi e problemi di calcolo ricavati dalla vita e dai mestieri. La matematica razionale o generale era fondata sulla geometria e sulla deduzione.

Alla radice della diversità di contenuti e metodi c'era una netta differenziazione di finalità educative e di destinatari. Le "due matematiche" corrispondevano a "due educazioni": la prima, quella pratica, nell'insegnamento elementare per tutti i cittadini liberi (ricordo però che non tutti erano cittadini!); la seconda, quella razionale per una élite che proseguiva negli studi filosofici superiori. In realtà la matematica razionale era l'unica degna del suo nome e la sola ricca di valore educativo in quanto, secondo Platone, era in grado di portare lo spirito a distaccarsi dal mondo del sensibile e ad entrare nella realtà vera dell'intelligibile. La matematica razionale apparteneva già alla ragione speculativa. Si dice che Platone avesse scritto all'ingresso della sua Accademia queste parole: "Non entri chi non conosce la geometria".

A voler essere precisi, la questione dal punto di vista storico sarebbe più complessa e articolata di come l'ho descritta. Ma non ho l'intenzione di approfondire questi aspetti. Ho voluto infatti ricordare la nascita non per raccontarvi la vita, che conoscete bene, ma per rendere più chiare due domande.

1) Quanto sopravvive nella scuola dell'antica distinzione?

2) Quanto ne guadagna l'educazione matematica?

Se dovessi esprimere la mia opinione rapidamente, in pochissimi secondi, quasi cercando di indovinare, risponderei subito "molto" alla prima domanda e "molto poco" alla seconda. Ma è giusto che io verifichi l'intuizione con ragioni appropriate.

2.2. Il movimento innovatore e la resistenza della scuola

Un profondo rinnovamento di contenuti e di metodi nell'insegnamento della matematica prende avvio negli anni cinquanta a partire dalla constatazione di una convergenza tra i progressi compiuti nella matematica ad opera soprattutto della scuola bourbakista e gli studi della psicologia genetica. Il punto di convergenza era colto nella nozione di struttura, intesa come sistema di relazioni dotato di particolari proprietà.

Nella Commission Internationale pour L'Etude et l-Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM) fondata nel 1950 da un gruppo di matematici (tra i quali G. Choquet), da J. Piaget e da C. Gattegno, fu elaborata una strategia di intervento: prima rinnovare l'insegnamento universitario, poi quello secondario, infine quello elementare; fu inoltre assunto come modello l'impianto bourbakista: gli insiemi, le strutture topologiche, algebriche e di ordine. Contemporaneamente negli Stati Uniti, sotto la guida di M. Beberman, avveniva qualcosa di analogo con una forte insistenza sulla necessità di ricorrere al "metodo della scoperta".

Per quanto riguarda la scuola secondaria l'effetto più rilevante del movimento innovatore fu la ricostruzione dell'intero edificio geometrico mediante l'introduzione del piano vettoriale affine (con proposte didattiche parzialmente diverse, sviluppate ad esempio da Choquet, Dieudonné, Artin, Papy, ...), con una conseguente algebrizzazione della geometria che in qualche misura, al di là delle stesse intenzioni dei riformatori, trasferiva anche nella scuola la "degradazione della coscienza geometrica" già in atto nella ricerca matematica da più di centocinquant'anni. I nuovi contenuti introdottti erano riducibili ad elementi di probabilità e di statistica.

Questa *prima ondata* di rinnovamento (chimata Nuova Matematica o Matematica Moderna) ebbe entusiastiche adesioni - soprattutto nella scuola elementare - ma incontrò anche varie difficoltà. L'impatto con la realtà scolastica non è stato infatti facile (v. rapporto del NACOME, 1975).

Serie e dure critiche (Freudenthal, 1973; Kline, 1973; Thom, 1971 e 1973) furono rivolte all'impianto detto bourbakista, al feticismo per l'insiemistica, all'inutile pedanteria di un rigore malamente inteso, all'uso quasi esclusivo del metodo ipotetico-deduttivo, all'introduzione solo assiomatica degli enti matematici, all'abbandono della realtà fisica come fonte di idee matematiche, alla perdita della visione globale fondata sulle intuizioni spaziali a vantaggio del pensiero algoritmico dell'algebra formale, ...

Le repliche a queste accuse furono altrettanto energiche (Dieudonné, 1973; Begle, 1974). Si accusò la critica di attaccare il modello teorico solo generalizzando i guasti prodotti dalla patologia della riforma, senza una oggettiva valutazione (assai complessa) dei risultati.

Polemiche e divergenze continuarono facendo emergere nuove tendenze e differenti approcci che costituirono la cosiddetta *seconda ondata*. Le proposte di rinnovamento contenutistico si intersecarono con ricerche più metodologiche, imponendo quindi come prioritario il problema della formazione dei docenti. Fu inoltre messo in discussione e perse forza lo stesso appoggio dato al movimento dalla psicologia genetica piagetiana, utilizzata spesso in modo maldestro e probabilmente scorretto. Successivi studi aprirono la strada, in questo campo, a nuove idee e interpretazioni. Si manifestarono anche spinte per un ritorno alle cose essenziali (il movimento Back to basic) e alla situazione esistente nella prima metà del secolo.

In Italia le iniziative sono state molteplici. Mi piace ricordare in questa sede l'impegno attento e costante della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica, in particolare per i progetti di ricerca sull'insegnamento nella scuola secondaria. Non sono mancati seminari, convegni, pubblicazioni (originali o tradotte), nuovi testi, corsi di aggiornamento, attività di gruppi di ricerca didattica.

Una quantità e qualità di lavoro e di impegno così notevole non trovarono (e non trovano) l'uguale, forse, in altre discipline scolastiche. Nonostante ciò, al di là dei desideri e degli ottimi risultati parziali, la spinta al rinnovamento fu (ed è) contrastata dell'*inerzia della tradizione*, giustificata solo in parte dalla mancata riforma della secondaria.

Non ho il compito né tanto meno l'intenzione di dare giudizi. Mi pare tuttavia di non sbagliare troppo se dico che, pur in un contesto culturale, sociale e scolastico profondamente cambiato, rimane attivo l'antico *principio dicotomico* delle due matematiche e delle due educazioni: la matematica dei licei, di valenza soprattutto umanistica e la matematica della formazione tecnica, di valenza soprattutto empirico-utilitaristica. Ho anche l'impressione che le due valenze, già in se stesse riduttive, risultino *indebolite* nell'applicazione reale. Mi spiego.

La lettura dei *programmi ufficiali* (tutti vecchi) e l'analisi della *realtà didattica quotidiana* sembrano avvalorare le seguenti considerazioni.

Nei licei prevale la matematica logico-razionale, della quale si sottolinea principalmente la coerenza interna senza alcun interesse per le applicazioni, in una strutturazione ordinata di cui il libro di testo è il deposito ed il paradigma, con un metodo espositivo e ripetitivo scandito dalla successione "spiegazione-studio-esercizi-interrogazione-compito in classe". Gli obiettivi prioritari sono: la capacità di pensare secondo logica, di esprimersi in modo rigoroso su assiomi-concetti-teoremi-dimostrazioni, di manipolare correttamente formule e simboli. In sostanza prevale *una matematica descrittiva-formale*. Minoritaria resta, mi pare, una concezione più costruttiva-sostanziale rivolta a promuovere capacità di elaborare concetti-modelli-teorie-applicazioni, badando maggiormente alla sostanza del discorso e al contenuto nascosto sotto i simboli. In realtà il tentativo di impostare l'insegnamento dal punto di vista assiomatico si rivela irto di difficoltà se ci si aspetta che tutta la classe riesca a seguirlo. Problemi analoghi derivano dal proposito di giungere alla capacità di riconoscere la architettura interna delle strutture matematiche via via apprese. Ridotta appare anche la possibilità di analisi e comprensione (nei licei classici) di argomenti di fisica, che richiedono concetti e metodi matematici non compresi nel programma. Non sempre inoltre è possibile l'attenzione allo sviluppo storico delle idee matematiche e ai rapporti di questo sviluppo con la cultura e la società. Tutto ciò indebolisce l'auspicata valenza umanistica della disciplina.

Nell'istruzione tecnica, escludendo alcune novità introdotte nelle sperimentazioni o in indirizzi di recente istituzione (ad esempio quello dei periti per l'informatica), rimane dominante una *concezione strumentale* della matematica. Indipendentemente dai diversi contenuti cambiano soprattutto gli obiettivi: meno rigore, meno dimostrazioni, più memoria, più calcolo, più tecnicismo. A dir il vero io ho trovato sempre alquanto strana questa cosiddetta concezione strumentale della matematica. Strumentale a che cosa? Alle discipline scientifico-tecniche, ovviamente. Periti ed ingegneri sono infatti grandi consumatori di matematica come strumento di calcolo. La studiano per diversi anni. Con quali risultati? Certamente gli studenti arrivano, più o meno con sicurezza, a risolvere equazioni/disequazioni, a studiare una funzione, a derivare, a integrare forse ... Ma ciò non basta. La vera difficoltà nelle applicazioni, dalle più banali alle più complesse, non sta generalmente nel calcolo in quanto tale ma nel *decidere quale calcolo può o deve esser fatto in un determinato problema*. Bisogna, ad esempio, saper stabilire in quali casi si deve o si può fare una derivata, un integrale o altro, compresa a volte, parrà strano, la stessa addizione. E' pur vero che è impossibile elaborare una "sistematica" comprensiva di tutte le situazioni nelle quali è appropriato fare una certa operazione o seguire un preciso procedimento, per gli stessi motivi per cui non c'è, ad esempio in meccanica, un modo sistematico per stabilire a priori quali forze esistono e vanno prese in considerazione. E' però certamente possibile costruire una classificazione per *tipologie di problemi* trattabili matematicamente in un certo modo.Quali docenti allora devono farsi carico di questo aspetto della didattica? Secondo me gli uni (i matematici) e gli altri (i tecnici), *in collaborazione*. So benissimo che è molto difficile. Non ci siamo abituati. E' più facile dire al collega di matematica: "Fammi questo, perché ne ho bisogno", piuttosto che mettersi a ricercare assieme la migliore soluzione didattica. Quando insegnavo meccanica e macchine a fluido mi sono posto più volte il problema. L'esperienza significativa (seppur limitata) che ho potuto fare con i colleghi di matematica mi ha convinto che la collaborazione è possibile ed utile. Riprenderò la questione nell'ultima parte della relazione.

Nell'istruzione e nella formazione professionale le cose vanno ancora peggio, aggravate dall'influenza negativa del *paradigma riduttivistico* di cui ho già parlato. L'approccio alla matematica è, per un verso, astratto e, per l'altro, stereotipato e mnemonico, quindi ancora meno correttamente strumentale e utile. In generale l'insegnamento si riduce di fatto (per molte ragioni, alcune delle quali oggettivamente forti) ad un puro tecnicismo di calcolo, ripetitivo e meccanico, che non conduce mai (o quasi) alla comprensione del "che cosa si fa" e del "perché lo si fa". E' necessario, in questo tipo di scuola più che in altri, uno sforzo di elaborazione didattica che tenga conto e delle caratteristiche attitudinali degli allievi e della specificità dei corsi. Il semplice calcolo non basta. Il rigore applicato anche alle cose banali è inutile. Una visione complessiva di coerenza interna è improponibile. La comprensione però di strutture parziali e di procedure specifiche è necessaria. *Un impianto fondato sui processi di matematizzazione e di algoritmizzazione* pare la migliore via da percorrere. Secondo me i matematici dovrebbero essere più interessati a tale ricerca, possibilmente in collaborazione (anche qui) con buoni pedagogisti. L'unica proposta italiana in tal senso che io conosco, molto valida, è quella dei proff. Bruno Spotorno e Michele Boffa, progettata per i corsi sperimentali della Regione Veneto nel settore della formazione professionale grafica.

Mi pare di aver sufficientemente chiarito perché ritengo indebolita la valenza empirico-utilitaristica, già in se stessa riduttiva, dell'insegnamento della matematica nella formazione tecnica.

2.3. Verso un principio antidicotomico

Abbiamo visto che nella realtà scolastica sopravvive in buona misura l'antica separazione "due matematiche per due educazioni". Si tratta ora di rispondere alla seconda domanda: "Quanto ne guadagna l'educazione matematica?".

Si potrebbe anche ampliare la domanda e chiederci quanto ne guadagna l'educazione tout-court o quanto ne guadagna la società. Ma non è il caso di farlo perché una "buona" educazione matematica è evidentemente un "buon" presupposto sia per l'educazione in sé che per le attese della società.

Partiamo invece da una serie di domande che ricorrono frequentemente in tanti nostri discorsi. Esse sono espresse linguisticamente in modi diversi ma sono tutte identiche nella loro formulazione dicotomica. Matematica razionale o pratica? Generale o applicata? Dialettica o algoritmica? Automatismo o comprensione? Concreto o astratto? Intuizione o formalismo? Padronanza delle strutture o pratica delle applicazioni? Gratuità od utilità? Costruzione o deduzione? Scoperta o ideazione inventiva? Fare matematica o matematica già fatta? Pensiero o calcolo?

Il problema così posto è mal posto. Lo avverte subito il nostro buon senso di educatori e di insegnanti, che rifiuta in questi casi soluzioni fondate sull'aut-aut e preferisce le risposte del tipo et-et. Ciò significa che una buona educazione matematica è da noi concepita, almeno in linea di principio, come un processo integrato che, se ammette forse le accentuazioni, nega certamente le esclusioni. Le distinzioni infatti sono utili quando si analizzano le valenze educative (finalità/obiettivi), per definirle più accuratamente e soprattutto per comporle in sistema secondo una particolare implicazione logica (v. punto 2.6). Ma se l'analisi viene utilizzata per contrapporre le finalità generali (dette, chissà perché, formative) a quelle professionali (dette, chissà perché, strumentali), attribuendo le prime ad un certo tipo di scuola o di insegnamento e le seconde ad un altro, il problema educativo non può dirsi risolto in modo soddisfacente.

Dalla applicazione di un principio dicotomico l'educazione matematica non ha nulla da guadagnare. Conviene cambiare principio.

Nel rapporto della NACOME (1975) si afferma che l'idea direttrice delle riforme della seconda ondata dovrebbe basarsi su un *principio antidicotomico* o, equivalentemente, su un *principio di complementarità*. Di per sé questa idea non è una novità. Già in anni non più recenti i programmi di matematica per le diverse scuole secondarie, sia in Europa che in America, contenevano, con maggiore o minore enfasi verbale, il suggerimento di integrare formalismo-rigore-deduzione-intuizione-applicazione. Programmi di questo tipo esistono anche da noi. Dove sta allora la novità? Che cosa è necessario fare?

In primo luogo, come ho già detto (v. punto 1.3), occorre una ricostruzione dei programmi. Ho detto ricostruzione perché un semplice aggiornamento dei contenuti non è sufficiente. Ricostruire significa ripensare il problema in modo nuovo. Bisogna identificare e formulare meglio gli obiettivi, eliminando espressioni vaghe, metaforiche o esortative. Vanno riorganizzati i contenuti individuando prima di tutto ciò che è fondamentale. A questo proposito va detto che le nozioni di base mutano con il mutare dei tempi, in relazione allo sviluppo della scienza matematica, alle sue diverse concezioni (v. punto 2.4.1) e ai metodi accettati. In particolare nella formazione tecnica si tratta di stabilire quali nozioni matematiche sono necessarie nelle varie attività professionali, non solo basandosi sullo stato attuale ma guardando alle prospettive di sviluppo della tecnica. Fino a pochi anni fa, ad esempio, la conoscenza dell'algebra di Boole è stata, nella pratica, meno importante della conoscenza dell'analisi. Considerando però che la soluzione dei più complicati problemi è stata affidata a metodi computazionali, la mancanza di una preparazione elementare nel campo della logica matematica può essere ritenuta come una mancanza di preparazione pratica (Krigowska, 1975). Qualcosa di simile si può dire per il calcolo delle probabilità, per la statistica, per alcuni campi della matematica del discreto, per la teoria delle decisioni, per la teoria dei giochi, per la programmazione lineare e dinamica, per la teoria dei grafi, per la simulazione. Naturalmente non si tratta di inserire tutto ciò nei programmi ma di operare una scelta su ciò che è fondamentale. In un certo senso bisogna ricostruire la casa sia con un restauro conservativo sia con stanze nuove, utilizzando al meglio "la cantina matematica".

Negli ultimi anni si è fatto un passo avanti in questa direzione con proposte di nuovi programmi? Cito, ad esempio, l'ottimo contributo pubblicato negli atti del Seminario UCIIM di Arezzo 1983 per l'indirizzo matematico-naturalistico (Prodi, 1985) e il documento elaborato dal Comitato per i programmi del biennio recentemente costituito dal Ministro. Non esiste, mi pare, qualcosa di ugualmente valido per i trienni dell'istruzione tecnica né per quella professionale. Nella formazione professionale di base c'è soltanto il lavoro, già citato di Spotorno-Boffa.

Tuttavia stabilire nuovi programmi non è sufficiente. Anche un "buon" programma (cioè ben costruito e non ambizioso) si limita, per sua natura, a fornire una lista di obiettivi e ad indicare i contenuti da apprendere, esortando (proprio così!) i docenti ad un certo comportamento metodologico. In sostanza il programma fornisce il **progetto di massima della ricostruzione**. Il progetto esecutivo e la direzione dei lavori sono affidati ai docenti. Capita spesso che essi non guardino (o non conoscano!) il progetto di massima. L'insegnamento si modella infatti su una specie di *programma nascosto* - cioè quello che è, in parte, nei libri di testo e più ancora nella testa degli insegnanti - molto più "vero" del *programma manifesto* - cioè quello ufficiale - e perseguito con obiettivi più limitati e con impostazioni più tradizionali. Bisogna quindi che il "buon" programma sia conosciuto bene dai docenti e che essi sappiano trasformarlo per l'uso didattico. Ciò richiede competenze diverse che riguardano l'analisi degli obiettivi, dei contenuti e dei metodi. Degli obiettivi parlerò più avanti (v. punto 2.6). Per quanto si riferisce ai metodi dirò che è necessario saperne utilizzare diversi. Un metodo solo, qualunque esso sia, può essere inadeguato. Chi dispone solo di un martello, dice un proverbio cinese, è portato a pensare che la realtà sia costituita tutta da chiodi!

Mi rendo conto che è molto facile parlare della responsabilità dei docenti e della necessità - da parte loro - di acquisire competenze didattiche ma sono anche convinto che discorsi di questo tipo sono sostanzialmente inutili e noiosi se non si ha modo di sviluppare il tema con esempi sufficientemente validi. Poiché non mi è stato richiesto di farlo, non parlerò di questo aspetto del problema, rimandando a pubblicazioni specifiche. Ci sono altre considerazioni che devono precedere il discorso didattico concreto e riguardano la questione posta all'inizio: quale pensiero matematico, quale calcolo e in quale reciproco rapporto.

2.4. Complementarità, modello, operatività

2.4.1. Vediamo innanzitutto come si può rispondere al primo punto: *quale pensiero* matematico promuovere nella formazione tecnica.

Nel linguaggio dell'uomo della strada alla matematica vengono normalmente associate parole come verità, evidenza, certezza, infallibilità, sicurezza, inattaccabilità, garanzia, fiducia. Anche tra coloro che hanno seguito studi superiori non è difficile sentir parlare della matematica come del paradiso della correttezza, della coerenza, della chiarezza, del rigore dimostrativo, dell'inconfutabilità, dell'unità di metodo e di edificio. In generale gli obiettivi dell'insegnamento vengono definiti sulla base di queste "immagini della matematica".

Ma che cos'è la matematica? Quali forme di pensiero utilizza? Che cosa significano certezza, coerenza, correttezza, unità, completezza? C'è una sola concezione della matematica o ce ne sono molte? Una risposta anche parziale e sommaria a domande di questo tipo ci potrebbe essere di grande utilità. Proviamo perciò a delineare alcuni elementi essenziali.

La comunità matematica nei primi decenni di questo secolo credette di aver risolto alcune contraddizioni e di aver raggiunto "il rigore assoluto" (Poincaré), la strutturazione unitaria e completa fondata sulla logica (*Russell*), la coerenza (cioè la non contraddittorietà) attraverso la formulazione di una teoria puramente sintattica dei sistemi formali (*Hilbert*), l'unità nel suo fondamento insiemistico, l'evidenza nella coscienza che il soggetto ha delle proprie costruzioni mentali (*Brouwer*).

Mentre ancora ciascuna scuola si vantava di un presunto successo o si accontentava di ritenere che le proprie dimostrazioni erano in accordo almeno con i principi prescelti, una famosa memoria di *K. Gödel* (*1931*), contenuta in venticinque pagine, mostrava che per ogni sistema formale sufficientemente potente (cioè capace di formalizzare l'aritmetica elementare dei numeri) si danno delle proposizioni indecibili all'interno di quei sistemi. Come risultato di questo primo teorema Gödel otteneva l'ulteriore conseguenza (usualmente detta secondo teorema) che è impossibile dimostrare la consistenza di una teoria sufficientemente potente con mezzi formalizzabili nella teoria stessa. Essa era un chiaro segnale dei limiti della potenza dimostrativa di ogni sistema formale ed in più una chiara esplicitazione del fatto che non si poteva pensare l'edificio matematico come un edificio basato su propri fondamenti indubitabili. Quasi contemporaneamente alcuni risultati di *A. Tarski (1935)* limitavano le capacità espressive di un sistema formale affermando che in nessun linguaggio formale coerente, contenente la teoria elementare dei numeri, era definibile la nozione di verità. D'altra parte per Tarski l'aspetto veritativo della deduzione logica doveva soddisfare non solo un criterio di correttezza formale ma anche uno di adeguatezza oggettuale. Ciò equivaleva a dire che una teoria formale aveva bisogno sia di una sintassi sia di una semantica.

L'*Indirizzo veritativo-semantico* tarskiano alimentò due filoni principali di ricerca: lo studio semantico dei modelli insiemistici e la cosiddetta teoria dei modelli. Nel primo filone (che si incontra con le istanze provenienti dalla scuola logistica di Frege e Russell e, mediatamente, con gli sforzi di assiomatizzazione della teoria ingenua degli insiemi di Zermelo-Fraenkel-von Neumann-Bernays, ...) risultati fondamentali sono stati trovati da Tarski stesso, e da Hao Wang (1963). In particolare Gödel (1938) e Cohen (1963), dimostrarono la indipendenza dell'ipotesi del continuo rispetto agli altri assiomi della teoria degli insiemi. Tale dimostrazione fu sviluppata in un contesto fondamentalmente semantico (modellistico) anche se Cohen utilizzò una tecnica di origine intuizionistico-costruttivistica (nota come il forcing) e Gödel, per la sua parte, fece uso di un modello soggetto a condizioni predicativistiche. Il secondo filone (cui possono essere collegati anche risultati precedenti come il teorema di Löwenheim-Skolem) fu molto fecondo nell'indagine algebrica, nelle ricerche sulle proprietà dei linguaggi infinitari (Barwise) e sulla analisi non standard (Robinson).

Accanto all'*indirizzo* veritativo-semantico si sviluppò quello *derivativo-sintattico* che per certi aspetti rilanciava la più bistrattata scuola sui fondamenti: l'intuizionismo. Gli studiosi di questa corrente di pensiero erano scettici di fronte alla accettazione di una teoria semantica della verità (e ciò soprattutto in forza della non disponibilità a "credere" nelle sue assunzioni ontologiche di oggetti pre-dati alla nostra conoscenza) e quindi rifiutavano il criterio della adeguatezza oggettuale come giustificativo delle regole di derivazione. Il problema della legittimità delle regole fu affrontato "costruttivamente", nel senso che il risultato matematico veniva ad essere il frutto, da una parte, della costruzione di determinati oggetti matematici come prodotti del pensiero umano e, dall'altra, delle modalità con cui venivano costruiti (modalità riconducibili a tecniche induttive). Poiché tuttavia non sembravano esistere criteri fissi di costruttività, all'interno della corrente costruttivistica si proposero diverse procedure (finitiste e non finitiste) e il criterio di evidenza contenutistica veniva assunto in funzione del grado di fiducia che si era disposti ad attribuire al principio di induzione transfinita. Alla corrente costruttivistica appartengono, ad esempio, l'intuizionismo (Brouwer, Heyting, Troelstra), il formalismo liberalizzato (Gentzen, Kreisel, Schütte), la scuola russa di analisi ricorsiva (Šanin, Markov), il costruttivismo di Bishop, la matematica operativa di Lorenzen.

Per quanto riguarda il problema della *giustificazione del sapere matematico* vale la pena di precisare che all'interno dei vari indirizzi esistono modi diversi e di impostare e di risolvere le questioni. Ad esempio per i costruttivisti il problema della correttezza è inteso in un senso sintattico profondamente diverso rispetto all'uso che del medesimo termine fanno i non-costruttivisti. Mentre infatti da un punto di vista costruttivistico garantire la validità di una argomentazione matematica significa elaborare delle procedure derivative e costruttive rispondenti a determinati principi di induzione transfinita (aventi un preciso limite superiore), per i non costruttivisti la validità è affidata, oltre che alla correttezza semantica delle argomentazioni, alla postulazione di determinati modelli la cui esistenza assicura la soddisfacibilità degli assiomi. Analoghe diversità di approccio e di indirizzo di ricerca si notano anche nella trattazione della problematica inerente ai limiti, riconosciuti in base ai teoremi sopra menzionati, dei sistemi formali. Ad esempio, la incompletezza semantica delle teorie formali, è per i costruttivisti una logica conseguenza del fatto che l'edificio matematico è il frutto di operazioni già per loro natura non completamente formalizzabili, cioè irriducibili sintatticamente. In altri termini, essendo la matematica non tanto un "sapere" quanto un "fare", ogni progetto animato dalla pretesa di ridurla ad un mero linguaggio sintattico (la cui funzione è principalmente quella del dire e non del fare) è di necessità condannato alla incompletezza. Invece per i non costruttivisti la incompletezza semantica dipende dal fatto che il sapere matematico è relativo ad un orizzonte di enti matematici che il formalismo non può descrivere esaustivamente e, a volte, neppure in maniera fedele. In questo caso, cioè, la incompletezza non è imputabile alla natura operativa delle procedure matematiche ma all'ambito oggettuale delle matematiche che, in quanto tale, non è totalmente descrivibile da un linguaggio formale.

Senza inoltrarci in ulteriori esempi relativi ai diversi modi di affrontare i problemi posti dalla ricerca sui fondamenti (quali la categoricità, la decidibilità, ...), quanto detto è sufficiente per sostenere che esistono più concezioni della matematica. Esse sono classificabili, nella sostanza, in due grandi gruppi: *le concezioni oggettivistiche e quelle costruttivistiche*. La loro fondamentale differenza si manifesta nel fatto di considerare gli oggetti matematici di cui trattano come "predati" (e quindi scoperti) o come "costruiti" (e quindi inventati). E' per questo che, come abbiamo visto, ad alcuni dei problemi sopra elencati tali indirizzi attribuiscono rilevanza e significato diversi. Tuttavia, nonostante le differenze, nella esperienza e nella pratica matematica (Davis e Hersh, 1981) non sono infrequenti i reciproci scambi di tecniche e di metodi, per cui si può parlare di una *complementarità di fatto* che ben sostiene un'ipotesi di *complementarità di principio* (Kuyk, 1977).

Non si può più infatti dire che "tutta la matematica" è fondabile sulla logica o sulla matematica finitista o su quella costruttivistica. Non c'è un fondamento unico. Metaforicamente si potrebbe dire che l'edificio matematico poggia su palafitte; ogni palo ha la funzione di sostegno e la costruzione è sufficientemente solida. L'architettura appartiene a diversi stili, è sviluppata su più piani ed è molto complessa. In molte parti ci sono lavori in corso. Gli inquilini vivono nei loro appartamenti. Spesso si incontrano e si scambiano oggetti e strumenti (matematici). Costituiscono una comunità reticolata e a-centrata. Anche per questo gli occasionali ospiti hanno l'impressione di entrare in un labirinto.

Utilizzando una seconda metafora si può dire che il pensiero matematico ha due sorgenti: quella contemplativo-speculativa e quella operativo-costruttiva. Esse danno origine al grande fiume dell'esperienza matematica nella quale è compreso anche il suo insegnamento. Dalla prima sorgente nasce l'attività di *scoperta* delle qualità possedute da oggetti matematici concepiti come pre-dati alla nostra conoscenza. Dalla seconda fluisce *l'invenzione* di oggetti matematici ottenuti attraverso procedure costruttive. L'acqua del fiume è una mescolanza di scoperta e di invenzione. Si scoprono qualità e relazioni su oggetti matematici costruiti e si costruiscono oggetti matematici per individuare le strutture astratte che sono pre-date.

Quale può essere la rilevanza di tutto ciò per un discorso che riguarda l'insegnamento/apprendimento?

In primo luogo va osservato che, contrariamente a quanto si crede, i discorsi che precedono interessano più il docente di matematica che il matematico di professione. Questi, probabilmente, può svolgere bene il suo lavoro anche senza problematizzare esplicitamente le questioni più sopra rilevate. Il docente invece deve conoscerle. In particolare deve avere una conoscenza almeno sufficiente della logica in generale e in particolare della logica matematica oltre alla conoscenza approfondita dei diversi linguaggi matematici e delle loro caratteristiche specifiche, grazie alle quali è possibile non solo la descrizione delle costruzioni matematiche mentali ma anche la loro trasformazione e applicazione alla soluzione dei problemi al di fuori della matematica in senso stretto (Krigowska, 1975).

In secondo luogo si può aggiungere che la condizione pluralistica della matematica in quanto scienza suggerisce un corrispondente pluralismo nel suo insegnamento. Ne deriva, ad esempio, la opportunità di utilizzare diverse modalità (o paradigmi) di approccio ai problemi matematici, tali da consentire l'attivazione di più processi cognitivi: *simbolico, ipotetico-deduttivo, intuitivo, costruttivo, algoritmico.* Ciò è tanto più utile se si pensa che apprendere la matematica non vuol dire soltanto assimilare un corpus dottrinale già elaborato ma anche, e soprattutto, *far esperienza di lavoro matematico.* Naturalmente i diversi paradigmi vanno scelti in relazione ai problemi che si analizzano. Se un problema richiede risposte numeriche è necessaria una impostazione algoritmica. Se un altro problema richiede una dimostrazione di esistenza allora possono entrare in gioco intuizione e deduzione. Non per tutti i problemi è utile la matematica del continuo. E così via. Una soluzione è corretta o ammissibile o soddisfacente o ragionevole entro i confini del paradigma prescelto. Non necessariamente deve essere tale per tutti i paradigmi. Si pensi, ad esempio, alla accettabilità della "dimostrazione" di Appel e Haken della congettura dei quattro colori fatta per una parte sostanziale al calcolatore o a quella relativa alla classificazione dei gruppi semplici finiti ottenuta nello stesso modo. Non esiste una gerarchia assoluta di paradigmi. Utilizzare uno o l'altro dipende dal problema e dal grado di correttezza o di accuratezza che si è disposti ad accettare. Proprio come avviene nell'esperienza e nella pratica matematica.

2.4.2. Dobbiamo ora considerare il secondo punto: *quale calcolo* matematico promuovere nella formazione tecnica.

Un noto studioso di didattica della matematica, H. Freudenthal (1985), ha espresso recentemente un giudizio piuttosto negativo circa i risultati dell'insegnamento. Ritengo utile riportare il suo pensiero perché individua chiaramente i termini del problema che ci interessa.

"A parer mio vi è qualcosa di fondamentalmente sbagliato nel nostro insegnamento della matematica. Come in ogni altra disciplina, la matematica non si può insegnare se non si possiede un'idea chiara di cosa sia la matematica e di come la si debba insegnare ed imparare. L'idea generale esposta dai libri di testo e suggerita a insegnanti e studenti è quella di una matematica come scienza pura e distaccata dalla realtà. Vero è che in alcuni Paesi si insegna la matematica applicata come materia separata e in altri - più spesso - alla matematica pura, che rimane l'argomento centrale, si aggiungono le applicazioni. Ma ciò non impedisce che la maggioranza dei nostri giovani lascino la scuola con un bagaglio di matematica che non applicheranno mai (e che presto dimenticheranno) per il semplice motivo che non hanno mai appreso la matematica in modo da poterla applicare.

Non è sorprendente che l'insegnamento della matematica si sia sviluppato in questo modo. Ciò è implicito nella stessa natura e nella logica della matematica, che in effetti è quella di separare forma e contenuti. Questo è proprio il modo in cui la matematica nasce: matematizzando la realtà, astraendo dalla realtà e conservando ciò che rimane, che è chiamato matematica. Ecco dunque che cosa si offre come matematica a chi deve imparare. I legami con la realtà sono stati tagliati e si lascia allo studente il compito di ricomporli, allo scopo di riconquistare quella realtà da cui la matematica è stata astratta.

Certo, esistono molte persone che sono in grado di realizzare questa sintesi. Altrimenti non esisterebbero scienziati, ingegneri, economisti capaci di applicare la matematica. Ma quasi sempre la matematica di cui hanno bisogno essi la devono imparare ex novo, in quell'area specifica che lo richiede. In ogni caso, per la maggioranza la matematica che si impara a scuola è un bagaglio inutile".

Quanto Freudenthal sostiene vale in generale ma certamente il suo giudizio è ancora più pertinente se pensiamo all'insegnamento della matematica nella formazione tecnica, poiché in questo tipo di scuola il legame con la realtà è una esigenza imprescindibile. La questione da lui sollevata è propriamente didattica. Ci possiamo allora chiedere se ci sono delle *risorse interne alla matematica* tali da consentire una impostazione didattica che aiuti lo studente, già nella scuola, a riconquistare quella realtà nella quale dovrà in seguito operare.

Personalmente sono convinto che la configurazione teorica del sapere matematico permette di impostare una didattica che tenga conto non solo del momento speculativo-razionale ma anche di quello applicativo. Ciò si può facilmente ricavare dalle considerazioni sopra svolte a proposito della problematica offerta dalla storia dei fondamenti.

Si è visto, ad esempio, che un approccio puramente formale alla matematica non è giustificato né da un punto di vista teorico né dal punto di vista dell'uso che delle matematiche si fa nelle singole scienze empiriche e tecnologiche. In particolare un approccio formalistico alla matematica non rende ragione del fatto che tra proposizioni matematiche e proposizioni di una teoria empirica espresse in un linguaggio matematico ci possa essere un qualche raccordo. Se il sapere matematico è costituito da una serie di teorie aventi un significato puramente sintattico non si riesce infatti a capire come sia possibile stabilire tra l'apparato linguistico della teoria matematica ed un sistema reale una qualche sorta di connessione.

Un tentativo per operare tale collegamento si potrebbe cogliere nella distinzione ideata da Hilbert tra proposizioni matematiche ideali e proposizioni matematiche reali. Tuttavia il fallimento del programma formalistico radicale di Hilbert non permette di giustificare in maniera plausibile tale distinzione e soprattutto, come già si è visto, costringe in maniera più o meno pronunciata a ricorrere ad una dimensione semantica delle teorie stesse. Non si vede dunque per quale motivo il raccordo con i sistemi reali di riferimento si debba avere soltanto con una parte delle teorie formali e non con le teorie formali intese nella loro globalità. D'altra parte, ammesso che l'utilità di un approccio almeno parziale di tipo formale è determinata dal fatto che oltre un certo livello di dominabilità della parte reale (secondo Hilbert) della matematica non si può andare, non è giustificabile intendere la parte matematica costruita in maniera formale in modo tale che essa non sia riferibile, per quanto mediatamente, al sistema reale cui si vuole applicare la teoria.

Alle difficoltà del formalismo si può far fronte attraverso una concezione della matematica che, pur non rigettando il valore delle teorie formali, intenda più appropriatamente le teorie matematiche come dotate di una loro dimensione semantica.

E' questo il significato più generale e più fecondo dal punto di vista logico-matematico della nozione di *modello*. Il modello di una teoria matematica è il risultato di una *interpretazione* opportuna dei termini matematici stessi, capaci di conferire alle proposizioni matematiche una valenza veritativa. Tramite tale interpretazione le proposizioni matematiche diventano vere a proposito di certi "enti matematici" di cui è difficile stabilire la natura ma che, in ogni caso, non possono essere completamente identificati con la loro descrizione linguistica. In altri termini nelle teorie matematiche si può fare distinzione tra il linguaggio che parla intorno a tali enti matematici e l'universo oggettuale nel quale essi si trovano legati da particolari relazioni e funzioni. Il linguaggio è la dimensione sintattica della teoria, mentre l'universo oggettuale ne costituisce la dimensione semantica. Queste due dimensioni sono imprescindibili allorquando si passa dalla teoria matematica alla sua applicazione concreta. La *dimensione semantica*, infatti, viene a costituire l'*anello di legame tra il linguaggio matematico e il sistema reale* che attraverso quel linguaggio viene descritto. La presenza della dimensione semantica della teoria (ossia l'esistenza di un modello matematico della teoria stessa) rende ragione del fatto che la teoria abbia una funzione referenziale, ossia che la teoria possa parlare di qualcosa. Il modello matematico di cui in questo modo la teoria matematica viene a parlare è un *modello astratto o ideale*, cioè un modello definito soltanto nelle sue caratteristiche strutturali, esprimibili in un *linguaggio estensionale*. Per questo motivo esso è suscettibile di interpretazione in molteplici ambiti oggettuali concreti diversificati.

Qualora infatti venga privilegiata una di queste interpretazioni, per esempio l'interpretazione del modello matematico analitico in un contesto fisico, si dà luogo ad una interpretazione fisica di quella teoria matematica, ovvero ad un *modello concreto della teoria stessa*. E' chiaro che con tale passaggio si carica il significato ideale dei termini matematici di specifiche *connotazioni intensionali*, legate all'ambito oggettuale su cui viene operata la applicazione. Consideriamo, per esempio, un caso molto semplice: la scrittura y = mx ammette una interpretazione ideale (= modello matematico espresso in linguaggio estensionale) su *enti geometrici*, cioè su punti del piano, mentre una sua interpretazione fisica associa a tali punti delle *grandezze fisiche* appartenenti a contesti anche profondamente differenziati (= vari modelli concreti espressi in linguaggio intensionale), del tipo:

$F = ma$	nella dinamica del punto materiale,
$M = J \cdot \varepsilon$	nella dinamica dei corpi rotanti,
$\sigma = E \cdot \varepsilon$	nella resistenza dei materiali,
$F_0 = fQ$	nella resistenza d'attrito,
$F_0 = -kx$	nel richiamo elastico di una molla,
$\Delta V = 1/C \cdot q$	in elettrostatica,
$\Delta V = RI$	nella legge di Ohm,
$p = \gamma \cdot h$	in idrostatica,
$Q = c \Delta T$	nelle equazioni calorimetriche.

Un elenco del genere potrebbe essere molto più lungo. Ciò che voglio evidenziare è che tali modelli concreti consentono non solo di descrivere sistemi reali ma anche di operare su di essi e che tale possibilità è giustificata dal fatto che il linguaggio matematico non è solo una sintassi ma contiene già intrinsecamente una semantica, ossia dei suoi modelli o interpretazioni ideali.

Conviene, per spiegarci meglio, considerare un esempio sepcifico. Supponiamo di dover studiare il comportamento dinamico di un sistema meccanico costituito da una sospensione a molla con dispositivo di smorzamento (*Fig. 2a*). Il significato dei simboli di figura è il seguente: F(t) è la sollecitazione applicata, funzione del tempo; k è la costante di rigidità della molla; S il fattore di smorzamento; M la massa del sistema; x la posizione del baricentro. Attraverso analogie (giustificate come vedremo più avanti) tra queste grandezze meccaniche e grandezze elettriche, si possono costruire due modelli elettrici - detti appunto analogici - del sistema meccanico di partenza: un modello elettrostatico e uno elettromagnetico. Va osservato che di per sé è arbitrario decidere quale configurazione è da considerarsi sistema reale o suo modello analogico; in generale si considera modello la configurazione che è più "trattabile", ossia quella nella quale le grandezze in gioco sono più agevolmente controllabili e misurabili. Va altresì detto che a sistemi meccanici diversi può corrispondere un medesimo modello analogico elettrico. Nel nostro caso l'analogia elettrostatica (*Fig. 2b*) porta alla corrispondenza di F(t) con E(t) (forza elettromotrice, funzione del tempo), di M con L (induttanza), di S con R (resistenza), di k con 1/C (reciproco della capacità) e di x con q (carica elettrica). L'utilità di questa operazione consiste nel fatto che sul modello analogico elettrostatico si possono fare *simulazioni* in condizioni di maggiore controllabilità in modo tale da poter trasferire i risultati così ottenuti sul sistema meccanico di partenza.

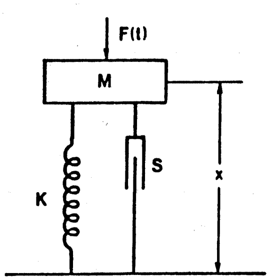


Fig. 2a

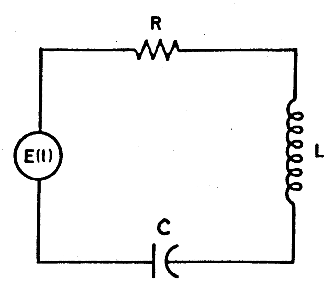


Fig. 2b

Questo è però soltanto l'aspetto fisico-sperimentale del problema. In realtà la possibilità di stabilire corrispondenze tra grandezze meccaniche e grandezze elettriche è basata sull'analogia formale delle equazioni che esprimono le leggi elementari valide per i due sistemi, cioè sulla analogia tra modelli matematici concreti (intensionali), del tipo di quelli riportati più sopra. La possibilità poi della simulazione è assicurata dalla analogia tra le equazioni che descrivono il comportamento sia del sistema meccanico che del suo modello elettrostatico (vedi, più sotto, le equazioni (1) e (2)), cioè, anche in questo caso, dalla analogia tra due modelli matematici concreti (intensionali). Il modello matematico concreto, tuttavia, non ha solo la funzione di descrivere il sistema reale o un suo modello fisico ma serve ancor più per operare sull'uno e sull'altro senza ricorrere, in linea di principio, alla sperimentazione pratica. Il vantaggio che si ottiene è duplice: da un lato i teoremi e le equazioni generali ricavati nella dinamica dei sistemi meccanici possono essere estesi allo studio di circuiti elettrici e, dall'altro, metodi usati per lo studio di circuiti elettrici possono essere applicati per lo studio di sistemi meccanici. Così, ad esempio, le equazioni di Lagrange per le piccole oscillazioni di un sistema elastico dissipativo a n gradi di libertà possono essere anche utilizzate per descrivere le oscillazioni proprie di un circuito elettrico (Ferrari-Romiti, 1966).

Nel nostro caso le due equazioni che descrivono il sistema meccanico e il suo modello elettrostatico sono le seguenti:

$$Mx'' + Sx' + kx = F(t), \tag{1}$$

$$Lq'' + Rq' + 1/Cq = E(t). \tag{2}$$

Si tratta, evidentemente, di due equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Alla loro scrittura si giunge modellando un linguaggio matematico noto (la teoria delle equazioni differenziali ordinarie) in funzione delle operazioni che si devono fare nell'ambito reale. In altri casi può succedere che il linguaggio matematico debba essere addirittura costruito ex novo. E' qui importante osservare, come dicevo sopra, che la possibilità di riferire un'equazione differenziale sia al sistema meccanico che al modello elettrostatico è garantita dal fatto che la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, come ogni altra teoria matematica, non è un puro linguaggio, cioè una sintassi, ma contiene intrinsecamente anche una dimensione semantica, costituita dall'insieme delle interpretazioni - ossia dei modelli matematici espressi in linguaggio estensionale - possibili già all'interno delle matematiche (si pensi, ad esempio, alla interpretazione geometrica del teorema di Cauchy). Ma questa è pur sempre una legittimazione teorica della connessione tra matematica e realtà. Da un punto di vista didattico è ancora più importante osservare che non è sufficiente limitarsi alla semantica interna della matematica, cioè non basta fare esercizi su modelli matematici estensionali, astratti e ideali (i classici esercizi di matematica), perché in questo modo non si educa lo studente al necessario raccordo con la realtà.

Dall'esempio riportato e da altri simili che si potrebbero sviluppare in relazione a modelli matematici discreti (numerici), deterministici o probabilistici, dovrebbe inoltre risultare chiaro che, intendendo un modello concreto di teoria matematica come appena detto, non si perde per niente la funzione operativa della matematica stessa. Da un lato infatti, come ho detto, il linguaggio matematico così interpretato serve sia a descrivere che ad operare nell'ambito del sistema reale cui è applicato e, dall'altro, la stessa applicazione operativa della matematica porta a modellare il linguaggio in funzione delle operazioni che si devono fare nell'ambito reale. *Se dunque la nozione di modello così intesa consente di attribuire all'uso del linguaggio matematico una funzione al contempo descrittiva e operativa, la stessa nozione permette di evitare i limiti di una concezione puramente strumentalistica del calcolo matematico.* Se il calcolo non servisse per operare all'interno di un ambito oggettuale precisato - e quindi per questo anche descritto - l'uso del calcolo rischierebbe di non poter essere finalizzato al compito che la sua applicazione concreta, in linea di principio, richiede. Si tratterebbe, come spesso accade nella pratica didattica, di un uso "fine a se stesso" del calcolo, avente più una funzione di esercitazione formale che di utilità pratica.

Ci si può chiedere a questo punto quali parti della matematica sono suscettibili di un calcolo non puramente astratto, o, con altre parole, quale matematica è applicabile. Non ci sono ragioni di principio talmente forti da escludere a priori la possibilità di applicazione di determinati ambiti del sapere matematico. In realtà praticamente tutte le teorie matematiche sono suscettibili di applicazione, anche se a volte in via indiretta; dalle matematiche applicate classiche (calcolo differenziale e integrale, equazioni differenziali, teoria delle funzioni, algebra, trigonometria, geometria), alle matematiche divenute applicate più recentemente (logica, insiemi, algebra lineare, algebra moderna, probabilità, statistica, ricerca operativa, ...), a quelle ritenute applicabili almeno da alcuni studiosi (per esempio, l'analisi non standard). Ogni teoria matematica diventa applicabile nella misura in cui ammette una interpretazione concreta cioè quando, a partire da una situazione reale, è in grado di fornire uno o più modelli matematici (in funzione dello scopo che ci si prefigge e dell'impostazione che si vuole dare alla soluzione), lavorando sui quali si ottengono dei risultati che sono riferibili alla soluzione del problema di partenza, intendendo per soluzione sia la spiegazione che la previsione dei fenomeni.

Se le cose stanno così, è ragionevole concludere che il calcolo matematico che si deve insegnare nella formazione tecnica non può limitarsi ad esercizi connessi ad un modello matematico ideale ma deve calarsi nella realtà delle applicazioni, cioè nei modelli matematici concreti. Un calcolo che non sia anche un fare matematica su situazioni reali risulta didatticamente inadeguato e incompleto. Se non si insegna in questo modo, la matematica che si fa a scuola, come dice Freudenthal, diviene un bagaglio inutile.

2.4.3. Conviene approfondire un aspetto importante ripetutamente emerso nelle considerazioni che precedono. Ho usato più volte i termini seguenti: operativo, operare, operazione. Vale la pena di precisarne il significato o i significati.

Un primo riferimento del termine "operativo" è alla matematica di P. Lorenzen (1955), detta appunto operativa, che rappresenta un moderno tentativo di dare un fondamento alla matematica nel quale assiomi classici dell'aritmetica e della logica formale sono teoremi dimostrabili (non naturalmente nel senso dei formalisti). Nella matematica operativa di Lorenzen gli assiomi si ottengono come asserzioni, che possono venire fondate a partire dal procedimento operativo di semplici calcoli. E' degno di nota che i lavori di Lorenzen abbiano già suscitato, anche tra i fisici, molta attenzione (Meschkowski, 1960). Come abbiamo visto tale concezione della matematica appartiene all'indirizzo derivativo-sintattico di carattere costruttivistico.

Un secondo significato del termine "operativo", strettamente legato al precedente, è quello che si riferisce ad una proprietà tipica del linguaggio e del pensiero matematico, quella proprietà che la Krigowska (1975) chiama "carattere operativo della matematica". Ad esempio, nella definizione del concetto di integrale si dà un elenco di azioni mentali che, se eseguite, portano alla costruzione di questo oggetto matematico astratto. In altri casi può anche succedere che le operazioni non compaiano esplicitamente nella definizione ma che, per comprenderla, sia necessario interpretarla operativamente, a volte anche con operazioni concrete. La Krigowska nel libro citato riporta parecchi esempi al riguardo. Senza entrare in dettagli, ciò che qui voglio far notare è che i concetti, i teoremi, i ragionamenti e lo stesso linguaggio matematico hanno un carattere operativo nel senso che richiedono da parte dello studente esplicite attività, riconducibili ad un complesso di operazioni sia mentali che concrete. Una conferma di questo punto di vista si può trovare in una affermazione di W. Servais: "La matematica non consiste tanto nel sapere quanto nel saper fare". E comunque è certamente sempre "da farsi" almeno da parte di chi apprende.

Il concetto chiave è quindi quello di operazione. Mi sembra perciò utile illustrare brevemente alcune proprietà o caratteristiche che a questo concetto sono normalmente attribuite nel contesto dei discorsi che ho sviluppato, anche perché ad esse farò riferimento nel successivo paragrafo. Per una trattazione più completa si veda l'opera di Ladrière citata in bibliografia.

In primo luogo quando si dice *operazione* si intende un'azione di *trasformazione*. Operare significa allora trasformare. In matematica e in logica, ad esempio, un "operatore" è caratterizzato dal modo in cui trasforma un insieme (la scrittura I(ab) = (ba) indica che la coppia di oggetti dati nell'ordine ab viene trasformata, mediante l'operatore I, in un'altra coppia formata dagli stessi oggetti, disposti però in ordine inverso ba).

In secondo luogo un'operazione ha carattere formale o *dipende da schemi formali*. Ciò significa che ha importanza la struttura operativa e non il contenuto al quale può applicarsi. Così la precedente scrittura I(ab) = (ba), dove a e b indicano oggetti particolari, può in realtà essere scritta I(xy) = (yx), con x e y variabili indeterminate. Anche quando si ha a che fare con un'operazione concreta (come sono le operazioni che appartengono al campo tecnologico) si agisce secondo uno schema formale che è indipendente dai materiali e dalle circostanze particolari).

In terzo luogo le operazioni sono *tematizzabili* ossia possono essere a loro volta trattate come oggetti e sottoposte ad operazioni di livello superiore. Ad es. l'operatore di combinazione C potrebbe essere applicato al precedente operatore di inversione I e ad altri, associati secondo un certo ordine. Ciò vale sia per operazioni logiche che per operazioni concrete.

In quarto luogo un'operazione è *generalizzabile*. Ciò significa che lo schema operativo che la rappresenta può essere ripreso in uno schema più generale che caratterizza una proprietà formale della trasformazione. Per es., la proprietà ricorsiva presente nelle operazioni di addizione e di moltiplicazione (che consente di procedere passo dopo passo, con la successione di operazioni elementari: 2 + 3 si può ottenere aggiungendo tre volte di seguito 1 al numero 2) si può rappresentare con uno schema generale, applicabile alla classe delle funzioni di numeri naturali computabili algoritmicamente, che indica come funziona un'operazione ricorsiva. Ad es. ancora, nel campo tecnologico, una macchina polivalente è descrivibile con schemi operativi di livello più generale rispetto a quelli utilizzati in una macchina specifica.

Infine le operazioni - formali o tecnologiche - possono essere messe in relazione sequenziale o retroattiva, *formando un sistema*, cioè una rete di connessioni che le rende interdipendenti. Si arriva così a rappresentare il *campo dell'operatività* come l'insieme delle reti parziali tematizzate e generalizzate (ad esempio la rete costituita dalle operazioni ricorsive).

Si può riassumere quanto detto nella seguente proposizione: le operazioni sono trasformazioni che dipendono da schemi formali e sono tematizzabili, generalizzabili e componibili in sistema.

2.5. Scienza e tecnologia: distinzione e interazione

I temi proposti nel paragrafo precedente - complementarità, modello, operatività - sono stati analizzati all'interno della matematica e del suo insegnamento. Essi però hanno una validità più generale e per questo ora li ripropongo in un contesto di discorso più ampio. Tale contesto è comunemente detto scientifico-tecnologico.

In prima approssimazione possiamo dire che scienza e tecnologia sono attività che si distinguono per la funzione che assolvono, cioè per lo scopo che perseguono; mentre l'attività scientifica mira alla *conoscenza* di qualcosa, l'attività tecnologica è orientata alla *applicazione* di ciò che è stato conosciuto. A dir il vero una distinzione di questo tipo sembra oggi solo apparente per il fatto che la frontiera tra scienza e tecnologia è sempre più sfumata. In ambedue i casi si ha a che fare infatti con una ricerca organizzata e sistematica, dove il termine "ricerca" sembra di natura tale da caratterizzare altrettanto bene sia quanto si fa sotto il nome tradizionale di scienza, sia ciò che viene fatto sotto il nome di tecnologia. In realtà ciò sta a significare soltanto che esiste una interazione molto forte tra le due attività ma non che esse tendono a confondersi. Tra loro sussiste una differenza di natura. Quale?

La scienza elabora teorie esplicative e predittive circa problemi di evoluzione (che nel caso più generale contengono anche i problemi di struttura) di sistemi reali. Naturalmente essa interviene sperimentalmente sui sistemi che studia ma lo fa per mettere alla prova lo schema teorico elaborato. La tecnologia, invece, interviene nel corso delle cose sia per impedire che certi stati si producano sia al contrario per far apparire stati che non apparirebbero spontaneamente, in funzione di certi obiettivi che sono in definitiva dettati dai sistemi di valori dominanti l'azione.

Seguendo questa linea di pensiero (Ladrière, 1977) si può distinguere l'attività scientifica da quella tecnologica utilizzando la relazione *informazione-organizzazione* (*Fig.* 3).

(attività scientifica) T_1 ↓ ORGANIZZAZIONE / INFORMAZIONE ↑ T_2 (attività tecnologica)

Fig. 3

L'attività scientifica consiste nell'ottenere informazioni supplementari circa sistemi esistenti, dunque nel trasformare (T_1) una conformazione realizzata oggettivamente sotto forma di organizzazione in informazione realizzata sotto forma di rappresentazioni concettuali. Il vantaggio di una tale trasformazione è che l'informazione concettuale è in qualche modo libera e interamente disponibile. Non essendo più incorporata in un supporto concreto, essa vale per qualsiasi supporto e può essere utilizzata in qualsiasi situazione di un dato tipo; in una parola essa ha un valore universale. Ciò vale sia per le teorie delle scienze formali (logica, matematica), sia per quelle delle scienze sperimentali (fisica, biologia, chimica, ...), sia per quelle delle scienze umane teoretiche (psicologia, sociologia, economia, ...).

L'attività tecnologica, al contrario, consiste nel trasformare (T_2) informazioni realizzate sotto forma di rappresentazioni concettuali in conformazioni realizzate sotto forma di organizzazione oggettiva; in altre parole consiste nel proiettare una informazione astratta e libera su un supporto concreto che riceve una organizzazione supplementare. Il vantaggio di tale trasformazione è che essa offre all'azione strumenti concettuali per produrre effetti quantitativamente più potenti e qualitativamente più variati. Ciò vale per tutte le scienze di tipo pratico-prescrittivo, cui appartengono non solo le tecnologie ma anche l'etica, il diritto, la pedagogia, ...

In altri termini T_1 ottiene informazione (cioè concetti, principi, teorie, piani o schemi di operazioni, regole di procedimenti) su organizzazioni reali (sistemi naturali o artificiali, materiali o sociali); T_2 invece immette informazione su organizzazioni esistenti o da produrre.

Precisato l'aspetto della differenza ritorniamo a quello dell'interazione. Ho detto sopra che la interazione tra scienza e tecnologia è sempre più serrata. Su che cosa si fonda?

In primo luogo va osservato che scienza e tecnologia si sono potute avvicinare perché hanno in comune il *carattere operativo*. Il processo scientifico (T_1) è infatti caratterizzabile, anche se non esclusivamente, con l'idea di operazione, della quale nel punto 2.4.3 ho segnalato le cinque proprietà; le operazioni sono cioè intese come trasformazioni che dipendono da schemi formali e sono tematizzabili, generalizzabili e componibili in sistema. Spesso queste operazioni sono espresse in linguaggio matematico. Anche il processo tecnologico (T_2) - come abbiamo visto - è scomponibile in operazioni che presentano proprietà notevolmente omologhe a quelle delle operazioni formali che caratterizzano il processo scientifico.

In secondo luogo scienza e tecnologia sono *complementari*. L'attività conoscitiva (scientifica), anche se ricerca pura, comporta numerose capacità e abilità di natura operativa tecnica, mentre l'attività applicativa (tecnologica) esige teorie potenti, esplicative e predittive, per utilizzare le apparecchiature e per interpretare i risultati. T_1 infatti interviene utilizzando procedimenti sperimentali, preparando il sistema, portandolo in uno stato di massima informazione, facendolo evolvere in modo controllato. T_2 modifica lo stato di un sistema (impedendo o favorendo una certa evoluzione) o produce nuovi sistemi, utilizzando rappresentazioni concettuali. I due processi, pur distinti, interagiscono fortemente. Per millenni T_2 è stato in anticipo su T_1, sviluppandosi senza avere una organica e strutturata quantità di informazioni, o addirittura disponendo solo di informazioni prescientifiche. Oggi invece T_1 e T_2 sono così strettamente collegate e alternativamente prioritarie da far pensare che ci sia stata quasi una loro fusione.

In terzo luogo scienza e tecnologia "costruiscono" e fanno uso di modelli. Non mi riferisco qui, evidentemente, ai modelli di logica di una teoria (come sono i modelli assiomatici, i modelli di spiegazione e i modelli di progettazione) ma ai *modelli di una teoria*. Sotto questa categoria cade la nozione di *modello matematico* e poiché si possono distinguere teorie a funzione conoscitiva e teorie a funzione prescrittiva, si possono parimenti distinguere modelli matematici di tipo conoscitivo e modelli matematici di tipo pratico-prescrittivo. Ci sono infatti modelli matematici (continui o discreti, deterministici o probabilistici) che possono servire sia per immettere informazione in sistemi reali che per ottenere informazioni a partire da organizzazioni esistenti. In ogni caso si tratta sempre dello stesso modello matematico che è suscettibile di assolvere, da un lato, la funzione pratica (da informazione a organizzazione) e, dall'altro, la funzione conoscitiva (da organizzazione a informazione). Tale duplice funzione, come si è visto nel punto 2.4.2, è garantita dal fatto che il modello matematico è, in ambedue i casi, interpretabile fisicamente, proprio perché esso non è un puro linguaggio sintattico ma è già dotato al suo interno di una dimensione semantica che può (al momento della applicazione) essere riferita ad un sistema reale.

A questo punto, come già in precedenza, ci possiamo chiedere quale rilevanza vengono ad avere le considerazioni appena fatte per il problema dell'insegnamento di discipline scientifiche e tecniche e della matematica in particolare.

Mi pare si possa rispondere che se quanto detto sul rapporto tra scienza e tecnologia è almeno in parte ragionevole e accettabile, allora è probabilmente legittimo sostenere che nessuna esperienza di apprendimento scientifico-tecnologico dovrebbe rimanere allo stato di pura rappresentazione concettuale, così come non dovrebbe rimanere allo stato di puro addestramento al fare. Per analogia con l'interazione tra stato delle teorie e stato delle tecnologie si può anche dire che un apprendimento significativo (cioè non meccanico, non isolato ma incorporato nella struttura cognitiva - costituita dalla mappa di concetti, principi, schemi di azione, ... - secondo i vari livelli di astrazione, di generalizzazione e inclusività) si instaura quando lo stato delle conoscenze acquisite ha un'appropriata corrispondenza con lo stato delle capacità applicative possedute. Dal punto di vista didattico ciò significa che il momento conoscitivo-teorico e quello applicativo-pratico, pur avendo funzioni diverse, non sono separabili. Sembra anzi che in molti casi la pratica sia la via obbligata alla teoria. Nella formazione tecnica ciò è ancora più vero che negli altri tipi di scuola.

D'altra parte il fatto che entrambi i momenti hanno un carattere operativo e proprietà omologhe costituisce un vantaggio notevole per l'unità del processo educativo.

2.6. Gli obiettivi come sistema

Prima di concludere devo riprendere una questione rimasta in sospeso. Al punto 2.3 ho parlato della urgenza di una ricostruzione dei curricoli di matematica nella formazione tecnica e delle condizioni necessarie perché ciò possa avvenire. Tra queste condizioni ho richiamato la vostra attenzione sul problema della ridefinizione degli obiettivi. Secondo me è il punto più delicato dell'opera di ricostruzione in atto perché interessa, in misura e forme diverse, sia la stesura dei programmi, sia la progettazione dell'azione didattica concreta, sia la preparazione di strumenti di valutazione.

Parlare di obiettivi dell'insegnamento nella scuola secondaria superiore, almeno per la tradizione italiana, significa molto spesso definire una lista di finalità generiche, vaghe, non specifiche. Anche nel caso in cui si riesca a precisarle sufficientemente esse rimangono una dichiarazione di intenti contenuta nei programmi ufficiali ma scarsamente utilizzata nel lavoro scolastico. E' noto infatti che nella azione didattica concreta la maggioranza dei docenti assume come criterio fondamentale (e forse unico) di programmazione non tanto gli obiettivi dell'insegnamento quanto invece i contenuti da apprendere, quasi sempre sviluppati secondo l'ordine stabilito nei libri di testo. Al momento poi della valutazione di quanto è stato appreso il giudizio del docente non è riferito, normalmente, in forma analitica agli obiettivi prefissati ma è il frutto di una "percezione globale" dei risultati ottenuti dallo studente, basata su parametri non ben esplicitati anche se, con un certo sforzo, esplicitabili. Ciò evidentemente non significa affermare che i docenti insegnino male o che non sappiano giudicare. Anzi! Voglio soltanto dire che l'esplicitazione degli obiettivi ha di fatto scarsa rilevanza nel lavoro didattico, sia nella progettazione che nella valutazione. Le ragioni di questo "stato di cose" sono diverse: la tradizione in primo luogo ma anche la convinzione che un controllo analitico dell'apprendimento sia impossibile e forse anche poco utile per il fatto che costringe, in qualche misura, a pensare come discontinuo e parcellizato un processo che in relatà è globale ed integrato. Inoltre si fa notare che le cosiddette qualità di ordine superiore sono difficilmente "trattabili" in termini di obiettivi precisi e che non sono misurabili e neppure, forse, che si possono considerare il risultato di uno sviluppo (nel senso di una maggiore complessità) di quelle di ordine inferiore. Numerosi studi rilevano che le capacità superiori, quelle che richiedono in buona misura la creatività, l'inventiva e l'originalità, sono negativamente condizionate da apprendimenti precedenti di tipo riproduttivo.

Ragioni di questo genere sono certamente rispettabili. C'è tuttavia da chiedersi fino a che punto esse giustificano la "natura delle cose" o non piuttosto, almeno in parte, una difesa della nostra incapacità ad elaborare una analisi sufficientemente attendibile sia dei costrutti concettuali cui la formulazione di una finalità educativa fa riferimento (ad esempio, il pensiero critico, il ragionamento logico, la capacità di sintesi, ...) sia delle relazioni di implicazione reciproca di tali costrutti (ossia del sistema unitario e compatto delle capacità esistenti nel soggetto che apprende).

Come è noto sulla questione degli obiettivi dell'insegnamento negli ultimi decenni si sono proposte varie classificazioni o tassonomie. Le più conosciute sono quelle di Bloom (e collaboratori), di Gagné (in diverse versioni) e di Guilford. Tutte queste tassonomie sono state elaborate per l'apprendimento in generale e non per la matematica soltanto. Specifiche per la matematica sono invece altre classificazioni: quella usata per i test di profitto del College Entrance Examination Board

(C.E.E.B., USA, 1960), quella dell'International Study of Educational Achievement (I.E.A., 1967), quella del Nationale Longitudinal Study of Mathematical Abilities (N.L.S.M.A., 1971), quella di T. Varga (Ungheria, 1973), quella di M. Pellerey (1974). Le prime tre sono più o meno derivate dalla tassonomia di Bloom e rappresentano una classificazione gerarchica di obiettivi specifici dell'insegnamento della matematica risultanti dalla combinazione di due dimensioni - quella operativa e quella contenutistica - rappresentabili in una matrice a doppia entrata. Le ultime due contengono dei quadri di riferimento che nella intenzione dei proponenti dovrebbero consentire di superare le difficoltà connesse ad una gerarchizzazione delle capacità. Dò per scontata la conoscenza di tutte queste proposte ed anche il dibattito critico che si è sviluppato sulla loro validità e sulla utilità per la didattica.

Secondo me qualsiasi tassonomia ha dei limiti intrinseci, riconosciuti dagli stessi autori. Un semplice elenco di obiettivi gerarchizzati o anche un quadro di riferimento non rappresentano infatti un progetto strutturato e organico né dal punto di vista pedagogico né da quello didattico. Indubbiamente gli elenchi possono essere utilizzabili per costruire il progetto ma non sono essi stessi sufficienti a definirlo. Un progetto pedagogico deve in qualche modo fornire un sistema di finalità intese non come descrizione degli scopi dell'insegnamento della matematica ma come specifiche disposizioni del soggetto educando che attraverso la matmeatica ci si propone di far raggiungere. Le disposizioni sono qualità rilevanti o capacità d'essere e di operare che, pur manifestandosi a volte isolate, costituiscono un sistema di elementi in diverso modo implicantisi. Potremmo anche dire che elaborare un progetto pedagogico significa prima di tutto, anche se non esclusivamente, stabilire un sistema di disposizioni legate tra loro da nessi di implicazione logica (che non significa necessariamente gerarchica). Per stabilire i nessi bisogna tenere conto sia della componente contenutistica delle disposizioni (cioè le teorie matematiche) sia di quella psicologica (cioè le teorie dell'apprendimento). Ciò comporta in particolare che ogni disposizione (= ogni finalità) trovi un supporto esplicativo in una teoria descrivente il costrutto concettuale che la sua formulazione contiene (si pensi, ad esempio, al costrutto concettuale espresso dalla formulazione: capacità di ragionamento logico in matematica). Non sempre si dispone di teorie di questo tipo e ciò costituisce una prima difficoltà. Ciascuna disposizione poi (o le sue sottodisposizioni) andrebbe messa in relazione con altre fino a formare una mappa disposizionale sufficientemente completa. A partire da questa mappa (o mappe) si possono stabilire con opportuni criteri le sequenze di obiettivi che costituiscono il progetto didattico concreto. E questa è la seconda difficoltà, perché alle sequenze di obiettivi bisogna associare i contenuti da apprendere.

Non entro in ulteriori dettagli perché il discorso è complesso e sarebbe troppo lungo presentarlo in questa sede. Mi basta rilevare che l'idea espressa in modo così sommario non è soltanto un'ipotesi di ricerca. Studi di questo tipo sono in avanzata fase di elaborazione e i risultati si prospettano molto significativi anche se per ora applicati ad altri gradi scolastici. Forse un approccio di questo genere alla didattica della matematica potrebbe essere molto fecondo. Mi permetto di suggerirlo alla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

A. (Per il punto 1.1)

XIX Rapporto CENSIS/1985 sulla situazione sociale del paese, Franco Angeli, Milano 1985.

AA.VV., *Una nuova metodologia nella formazione tecnica*, Studi e documenti degli Annali della Pubblica Istruzione n. 29, Le Monnier, Firenze 1984.

B. (Per i punti 2.1; 2.2; 2.3)

BEGLE, E.G., Review of *Why Johnny can't add*, The Nationale Elementary Principal, vol. 53, 1974.

DIEUDONNÉ, J., *Should we teach modern mathematics?*, American Scientist, vol. 61, 1973.

FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht 1973.

KLINE, M., *Why Johnny can't add*, St. Martin Press, New York 1973.

International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), *New trends in mathematics teaching*, vol. IV°, UNESCO, Parigi 1979.
Il volume si fonda sui lavori preparatori e sulle conclusioni del 3° Congresso Internazionale sull'Educazione Matematica tenuto a Karsruhe nell'agosto 1976. In relazione al tema si possono vedere i capitoli 3° (di D.A. QUADLING, sulla secondaria) e 12° (di H.O. POLLAK, su l'interazione della matematica con le altre discipline scolastiche).

NACOME report, National Advisory Committee on Mathematical Education, *Overview and analysis of school mathematics grades K-12*, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington (D.C.) 1975.

X PELLEREY, M., *Per un insegnamento della matematica dal volto umano*, Sei, Torino 1983. (alcuni passaggi della relazione sono liberamente ripresi dal primo capitolo).

X PRODI, G. (a cura di), *Nuovi traguardi per l'educazione scientifica*, Atti del Seminario di Arezzo 1983, UCIIM, Roma 1985.

X SPOTORNO, B. e BOFFA, M., *Lezioni di matematica*, corso propedeutico e di orientamento, vol. 1°, Regione Veneto, Assessorato Istruzione e Cultura, 1985.

THOM, R., *Les mathématiques "modernes" - une erreur pédagogique et philosophique?*, L'âge de la science, n. 3, 1971.

THOM, R., *Modern mathematics does it exist?*, Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge University Press, 1973.

C. (per il punto 2.4)

DAVIS, Ph.J. e HERSH, R., *The mathematical Experience*, Birkhauser, Boston 1981 (trad. it. *L'esperienza matematica, Da Talete al computer*, Edizioni di Comunità, Milano 1985). Il libro è molto interessante e di facile lettura. Su alcuni aspetti si può vedere anche la critica di G. LOLLI nel volume *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Il Mulino, Bologna 1985 (il cap. XII°, *Dimostrazioni ed esperienza matematica*, pagg. 329-355, è tutto dedicato al libro di Davis e Hersh).

FERRARI, C. e ROMITI, A., *Meccanica applicata alle macchine*, UTET, Torino 1966.

FREUDENTHAL, H., *La matematica nell'età dai 14 ai 18 anni*, in L'insegnamento della matematica e delle scienze sperimentali nella scuola secondaria superiore, atti del Convegno Internazionale 1983, Fondazione G. Cini, Istituto della Enciclopedia Italiana, Venezia 1985.

GALION, E., *La mathématique et ses applications* (Terzo seminario internazionale di Valloire, 1972), CEDIC 1972.

KLINE, M., *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, 1980 (trad. it. *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano 1985).

KRIGOWSKA, A.Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, Cracovia 1975 (trad. it. *Cenni di didattica della matematica*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana n. 12, Pitagora Editrice, Bologna 1979). Si veda soprattutto il cap. V°, *Il carattere operativo della matematica e il suo insegnamento attivo.*

KUYK, W., *Complementarity in Mathematics*, Reidel, Dordrecht 1977.

LORENZEN, P., *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer Verlag, Berlino-Gottinga-Heidelberg 1955.

MESCHKOWSKI, H., *Wandlungen des mathematischen Denkens*, Friedr. Vieweg e Sohn, Braunschweig 1960 (trad. it. *Mutamenti nel pensiero matematico*, Boringhieri, Torino 1963).

POLLAK, H.D., *How can we teach applications of mathematics?* in Educational Studies in Mathematics, vol. 2°, n. 2/3, dicembre 1969, pag. 393-494.

QUADLING, D.A., *Contexts for applications of mathematics in education*, 1975.

SCHIFFER, M.M., *Applied Mathematics in the High School*, Studies in Mathematics, Vol. X°, School Mathematics Study Group, 1963.

STEINER, H.G., *What is applied mathematics* (documento presentato al Seminario dell' Unesco sugli obiettivi e i metodi della matematica applicata a livello preuniversitario, Lione 1974).

\- *Les mathématiques dand l'einsegnement scientifique et technologique*; travaux d'Orléans, in Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques, settembre 1975.

D. <u>(per il punto 2.5)</u>

LADRIÈRE, J., *Les enjeux de la rationalité. Le défi de la science et de la technologie aux cultures*, UNESCO, Parigi 1977 (trad. it. *I rischi della razionalità. La sfida della scienza e della tecnologia alle culture*, SEI, Torino 1978). Ho rielaborato alcune idee contenute nel cap. 1° e nel cap. 2°.

COMUNICAZIONI E INTERVENTI

N.R.D. Modena

Autoaggiornamento, analisi e costruzione del curricolo nella Scuola Secondaria Superiore

Il NRD (sezione scuola superiore) di Modena è composto da insegnanti che lavorano in parte al liceo scientifico, in parte negli istituti tecnici industriali e commerciali. Nel liceo, il vecchio impianto culturale irrigidisce ancora la matematica in un astratto e meccanico "purismo"; negli istituti tecnici, finalità formative professionalizzanti privilegiano la matematica applicata all'interpretazione dell'ambiente e al controllo delle macchine e del lavoro umano. In entrambi i casi comunque spetta alla matematica il primato della difficoltà nell'insegnamento, della fatica nell'apprendimento, del numero di insuccessi. Promesse di riforma e di rinnovamento mai mantenute e neppur ora credibili hanno lasciato sostanzialmente invariato l'impianto anacronistico della scuola superiore: l'ambiente di lavoro è mal strutturato, l'organizzazione dello studio rigida, le attrezzature scarse. Ma l'innovazione tecnologica, l'informatizzazione dei sistemi produttivi e della società, l'accresciuta consapevolezza critico-culturale hanno ormai incrinato e reso instabile questo stato di cose, ponendo domande urgenti e numerose su contenuti, programmi, ambienti, orari, metodi e finalità del nostro lavoro, mostrando a tutti la necessità del cambiamento. Così, pur chiusi a una vera e radicale trasformazione, i licei sono oggi sollecitati a confrontarsi con nuove proposte didattico-editoriali: con libri di testo e progetti certamente interessanti, ma che non possono essere utilizzati senza rischi in assenza di più fondamentali innovazioni (causa questa non ultima della loro scarsa diffusione). Gli istituti tecnici, più dipendenti dalla realtà economica, costretti ad adeguarsi alle richieste del mercato, aprono in parallelo alle vecchie specializzazioni (ma con la tradizionale povertà di mezzi) i nuovi frequentatissimi indirizzi dell'area informatica: e forse compiono, complessivamente, uno sforzo innovativo e di sperimentazione più intenso.

In questo contesto, noi ci troviamo in posizione fortemente critica rispetto a proposte di aggiornamento centralizzato: perché impongono dall'alto metodi e contenuti che troppo spesso hanno poco a che fare col nostro lavoro concreto e soprattutto recepiscono in modo affatto superficiale le esigenze degli studenti. Preferiamo una riqualificazione almeno in parte autogestita: e perciò abbiamo avviato, da alcuni anni, una attività di formazione collettiva autonoma (ma in contatto con l'Università da un lato, con le nostre classi dall'altro) per metterci in grado di produrre noi stessi gli strumenti teorici e gli strumenti materiali di cui direttamente sperimentiamo la necessità, e per modificare anche (nella minima - ma non trascurabile - misura concessa agli insegnanti) l'ambiente di lavoro, L'impegno che ci mettiamo lo sentiamo veramente proporzionato, perché riguarda cose che si commisurano con noi stessi, con le nostre esigenze più profonde, immettendoci in un movimento culturale che matura e, trasformandoci, ci rende attenti alle domande analoghe espresse dagli studenti, capaci di ottenere livelli di chiarezza sempre più avanzati non solo per noi, ma per tutti quelli con cui operiamo. Le riunioni non sono monopolio di specialisti, ma occasioni ritmate di studio, scambio di riflessioni ed esperienze pratiche: tentiamo di recuperare il senso delle cose che facciamo e che trasmettiamo, liberandole dall'opacità e dell'appiattimento che le imprigionano, per ritrovare in esse la storia degli uomini e delle idee, l'unità del sapere, ridefinendo progressivamente il nostro profilo professionale.

Alcune scelte ci sono ormai chiare.

No all'insegnamento della matematica come addestramento a comportamenti schematici, ripetitivi, standardizzati; rifiuto di usare linguaggi e concetti della scienza, vecchi e nuovi, a scopo di selezione, scaricando sugli studenti le nostre difficoltà; valorizzazione, soprattutto, della dimensione culturale della scienza. Insistiamo brevemente su quest'ultimo punto che può essere interpretato in vari modi.

Secondo noi valorizzare la dimensione culturale dell'insegnamento scientifico significa anzitutto non adeguarsi acriticamente ai mutamenti ove siano guidati da mere esigenze tecnologico-produttive: le quali, per il carattere sempre più astratto assunto dalle mansioni nel ciclo di lavorazione delle merci e nelle attività di controllo e ricerca ad esso collegate,

spingono a una modellizzazione che si allontana in modo crescente dalla realtà concreta, dalla complessità qualitativa del mondo fisico reale e della società. Solo aggiungendo un movimento diverso (se vogliamo, complementare) di accostamento alla vita, alle cose, all'ambiente (nel senso più largo dei termini) possiamo sperare di cogliere e mostrare, anche in matematica, le molteplicità di significato dei concetti e delle teorie, la loro connessione multidimensionale alla cultura complessiva, alla struttura generale dei rapporti umani di un periodo determinato. Tra le principali finalità del discorso didattico entra così il disvelamento dello spessore storico della matematica, dei suoi condizionamenti storici e sociologici. Inoltre, gli aspetti euristico-intuitivi dovrebbero avere, nel rapporto insegnamento-apprendimento, la medesima importanza di quelli logico-deduttivi e algoritmico-ricorsivi: accordando il giusto rilievo anche alla dimensione ludica, perché il gioco non è lusso superfluo o espediente per catturare attenzione, ma esperienza fondamentale nel processo di sviluppo della creatività. La scuola non può essere solo imposizione, disciplinamento, sacrificio.
Ma non può essere solo il contrario!

Dopo un primo periodo di lavoro dedicato alla analisi dei libri di testo e dei progetti didattici elaborati da altri gruppi, abbiamo costruito uno schema generale di riferimento (centrato attorno al concetto di funzione) in cui inserire le nostre ricerche; ed ora ci siamo organizzati attorno a tre tipi di attività: - studi storici (finalizzati alla produzione di schede per gli insegnanti e di antologie commentate per gli studenti); - costruzione di modelli e realizzazione di audiovisivi (mediante l'attrezzatura, all'interno della scuola, di un laboratorio di matematica); - stesura e sperimentazione di unità didattiche multimediali (utilizzando) i risultati dei primi due tipi di attività, con l'intenzione di coinvolgervi gli studenti più interessati).

1) Storia

Tra le motivazioni che ci hanno convinto a rendere didatticamente operativo il nostro interesse verso la storia, ce n'è una abbastanza scontata, se vogliamo, ma importante: l'aver verificato che i testi scolastici e le lezioni tenute in classe - anche nei casi in cui il discorso vuol essere puramente tecnico - veicolano sempre comunque una precisa immagine della scienza. Immagine inadeguata, perché "si riduce di solito ad al cune comode ma acritiche equazioni: scienza = progresso, scienza = gioco creativo, scienza = ricerca della verità". Le cose sono assai più complesse.

Noi, per esempio, siamo convinti che l'idealità dell'ente matematico non implica alcun riferimento a strutture trascendenti, immobili, che sussisterebbero in attesa della loro scoperta: esprime invece la libertà della invenzione e costruzione operativa. Ma solo l'indagine storica può mostrarci che questa libertà non è arbitrio, che mille fili la connettono alla configurazione complessiva del sapere propria dell'epoca considerata, che a questi legami deve essere rapportato, per coglierne il significato culturale, il modo di funzionamento dei concetti entro contesti teorici. Concetti e scelte teoriche giungono quasi sempre a maturazione in situazioni conflittuali, emergono da una realtà spesso confusa e magmatica, subiscono condizionamenti filosofici, economici, tecnologici, politici, estetici...; scopriamo che non esiste una sola immagine della scienza, ma almeno tante quante sono le diverse epoche storiche e (talvolta) quante sono le scienze. (Non di rado - nel '600 ad esempio - diverse immagini della scienza convivono e si confrontano negli stessi anni).

Attraverso l'esame delle interazioni scienza-società "anche lo sviluppo matematico mostra gli attributi tipici di ogni progetto culturale: in primis, ad ogni passo, fra diverse opzioni: e tutte ugualmente possibili". Una didattica aperta alla prospettiva storica si soffermerà dunque in egual misura sia sui risultati della ricerca scientifica, sia sul loro modo di produzione.

Questi rapidi cenni sono appena sufficienti a esplicitare alcuni nostri riferimenti epistemologici e metodologici (Braudel e la sua scuola per l'impostazione generale: ma teniamo anche presenti Elkana e Amsterdamski per il concetto di immagine della scienza. Foucault per quello di configurazione complessiva del sapere; Lakatos per l'analisi della complessità; Desanti per alcune ricerche specifiche sulla matematica; ecc.). Non vorremmo apparire presuntuosi: e perciò sottolineiamo prima di tutto che il nostro lavoro (appena agli inizi, anche se il materiale accumulato è già significativo) ha come referente ideale una classe di scuola media superiore (triennio), alla quale non intendiamo proporre ricerche originali (di cui non ci sentiamo capaci) ma una semplice antologia di testi commentati; in modo, però, non approssimativo e ingenuo (ignaro cioè della natura e difficoltà dei problemi): condizione necessaria per avere sugli studenti - vivamente interessati a questi temi - una funzione positiva di stimolo.

In secondo luogo, intendiamo ricercare l'aiuto e utilizzare la collaborazione dei colleghi di storia e filosofia. Vogliamo anzi insistere sul fatto che proprio nella attuazione di scambi tra regioni disciplinari diverse (scambi a cui l'ambiente della scuola media superiore, nella quale i docenti non sono forzati a una specializzazione spinta, è particolarmente favorevole - ove sia presente interesse comune e manchino intralci burocratici) si realizzano le condizioni di una nuova professionalità rispondente al bisogno di ricomporre l'unità del sapere, tanto più acuto nei giovani quanto più appaiono disponibili strumenti effettivi per il suo soddisfacimento.

Su queste basi, si trattava in concreto di scegliere un periodo storico da cui iniziare la raccolta di testi e di materiali. L'arco di tempo su cui abbiamo per ora concentrato l'attenzione è quello che va dalla seconda metà del '500 alla seconda metà del '600 (dove cioè si formano molti dei concetti e delle teorie compresi nei programmi di scuola media superiore); esaminando in particolare alcuni temi fondamentali:
- autonomizzazione dell'algebra; - costituzione della geometria analitica; - tematizzazione del concetto di infinito (serie, geometria proiettiva, indivisibili ecc.); - fondazione delle teorie probabilistiche e del calcolo relativo; - genesi della analisi infinitesimale.

Non si può certo dire che questi titoli individuino processi autonomi, da seguire separatamente: anzi, se ci si occupa d'uno di essi si è subito avvolti dalla rete inestricabile dei rapporti che agli altri lo lega. Ma sono un'utile traccia per organizzare percorsi e sentieri di lettura comprendenti non solo le opere originali dei matematici, ma anche brani di storici, filosofi, sociologi, scienziati i cui lavori siano particolarmente significativi per idee e qualità, rispetto al nostro tema, nella sterminata bibliografia relativa al periodo considerato.

Abbiamo costruito alcuni di questi percorsi di lettura in modo da mostrare le connessioni, i parallelismi, le omologie di movimento con altre pratiche della esperienza culturale (^). Altri sono stati finalizzati a met-

---

(^) Per esempio:

1) La trasformazione dell'incognita da "cosa" in segno astratto (quindi l'abbandono del principio di omogeneità, da cui per la prima volta Descartes si svincola, nella sua Geometria, con piena consapevolezza) avviene contemporaneamente a quel distacco delle parole dalle cose che caratterizza - secondo Foucault - agli inizi del '600, la rottura del codice rinascimentale della analogia e della somiglianza; è accompagnato al progressivo emergere, nelle scienze biologiche, del concetto di vita staccato da quello di essere vivente e della separazione dell'essere vivente dal reticolo semantico che lo collegava al mondo; nell'economia, all'affacciarsi della distinzione tra valore reale e valore nominale delle monete.

2) E' noto che il concetto di infinito "esplode" nel '600: questo significa, in particolare, la distruzione del carattere locale, chiuso, costruttivo, centrato attorno al soggetto che aveva la geometria euclidea. Si colgono subito i collegamenti con il contemporaneo formarsi di diversi schemi di lettura della realtà, mutati rispetto allo spazio e rispetto al tempo. Cioè, senza render conto di come la desemantizzazione dello spazio lo rende infinito e uniforme, esplorato in tutti i sensi, col microscopio, il telescopio, i viaggi; di come il tempo da ciclico diventa lineare; da locale, globale e uniforme; da divino, secolarizzato; e di come il soggetto si pone in modo nuovo, critico, di fronte a un mondo unificato, a uno spazio obiettivato; è difficile leggere il valore culturale del passaggio dalla geometria euclidea a quella proiettiva.

3) Colpisce la presenza insistente del moto nelle opere di molti matematici del primo e tardo seicento. Questa cinematizzazione dei concetti (riconducibile per alcuni aspetti al rivoluzionamento introdotto dal principio di inerzia: il moto non è più un cambiamento, ma uno stato) la troviamo, per esempio, in Kepler (teoria dell'anima motrix, cui fa implicito riferimento il metodo di calcolo di certe aree nella Stereometria doliorum); in Napier (introduzione dei logaritmi attraverso lo studio di due particolari moti simultanei); in Descartes (caratterizzazione delle curve algebriche); in Desrgues (generazione delle forme); in Cavalieri (concetto di transito); in Newton (fluenti e flussioni); ecc.
Tale insistenza non è, ovviamente, dovuta al caso, ma collegata al processo di passaggio da un razionalismo qualitativo a sfondo finalistico verso il riduzionismo meccanicistico (un paradigma dominante nel pensiero scientifico e filosofico di allora) e al contemporaneo intensificarsi dei rapporti tra matematica e realtà. Se infatti la matematica (la geometria) è il linguaggio in cui è scritto il mondo; se la macchina è il modello del fenomeno reale: allora la matematica stessa deve accostarsi alla meccanica, e proprio nei suoi concetti primitivi, nelle s sue proposizioni di base. Si può anche documentare che il riferimento al moto permette di risolvere molte difficoltà relative alla composizione del continuo; e che la sua introduzione in matematica modifica

tere in evidenza le radici che ancorano il pensiero matematico alla realtà materiale ed economica dei rapporti sociali (^^). Altri ancora sottolineano la fecondità dei contrasti, il ruolo degli scontri teorici nella risistemazione di conoscenze acquisite, nella genesi di concetti nuovi (^^^).

Come si vede dagli esempi, che, sulla base dei materiali già raccolti, potrebbero essere moltiplicati) non è abituale tener conto di tutto questo quando si insegna matematica. Eppure, allo stesso modo in cui le conoscenze storiche sulla cultura e la società possono aiutarci a comprendere

---

progressivamente l'uso della teoria delle proporzioni attenuandone la importanza.

Questi esempi (che, insieme ad altri, dovrebbero essere ulteriormente sviluppati e connessi: ma non è possibile in questa sede) sono forse sufficienti a mostrare che non si tratta di un mero accostamento di fatti: è una nuova articolazione concettuale del mondo che si manifesta, con indizi analoghi, in campi diversi e lontani.

(^^) Per esempio. Seguendo il processo di sviluppo dell'algebra come scienza, ci si trova a strettissimo contatto con attività operative concrete. La tecnica della manipolazione dei simboli, della loro combinazione, progredisce insieme alla economia mercantile, e in modo particolarmente intenso laddove più è forte la mobilizzazione della economia (dunque, nel '600, non in Italia, ma nell'Europa del nord). Altro esempio: il calcolo numerico non è soltanto un problema scientifico. In quanto collegata alla modificazione del tempo quotidiano che si privatizza, alla crescente importanza dell'iniziativa individuale, all'affermarsi dell'idea di progresso, la velocità di calcolo coinvolge aspetti morali e religiosi, ma soprattutto interessi economici enormi (Briggs era socio della compagnia della Virginia). Ancora: Desargues era in contatto coi tagliatori di pietre, e il problema delle tracce gli suggerì molte idee sugli invarianti e sulle proiezioni; Cartesio osservava attentamente i levigatori di lenti ottiche, e collegava esplicitamente il problema delle tangenti a questo lavoro. Quando, agli inizi del '600, il concetto di probabilità incomincia ad essere tematizzato - nei porti, nelle banche, nei mercati, in tutti i luoghi dove si concentravano e circolavano merci e denaro, quotidianamente venivano operate valutazioni soggettive di eventi aleatori dal punto di vista del rischio; si calcolava quindi la probabilità/possibilità di incidenti sulla base di un'esperienza storica accumulata. Una pratica secolare precede dunque e accompagna la matematizzazione del concetto, la cui componente soggettiva è presente fin dalle origini.

(^^^) Limitiamoci a ricordare brevemente le tensioni che opposero la geometria (modello epistemologico di scienza rigorosa e perfetta) all'algebra (sapere pratico e approssimato, che aspirava però a diventare scienza, a sistemarsi e fondarsi more geometrico); l'opposizione dei gesuiti alla introduzione del concetto di movimento in matematica meglio le opere dei matematici, così la lettura di queste può essere essenziale per comprendere meglio la storia complessiva, la configurazione di un'epoca. Vogliamo riaffermare questa simmetria, scarsamente praticata.

Poiché non pretendiamo alla completezza né andiamo alla ricerca del raro (anche se ben decisi a non trascurare la cultura diffusa, gli autori meno noti, necessari altrettanto dei "grandi" per avere una buona idea sulla struttura delle conoscenze matematiche relative al periodo preso in esame) le nostre difficoltà si sono tutte presentate non nella fase di scelta dei testi, ma in quella della loro versione e/o trascrizione.

Le scelte di linguaggio erano infatti molto libere, tra '500 e '600: ogni autore caratterizza il proprio con amplissima discrezionalità (ricordiamo che il '600 è un secolo di rottura continua di codici, piuttosto che di consolidamento paradigmatico). Passare da Viète a Mydorge, da Descartes a Fermat, da Desargues a Pascal, da Bombelli a Stevin, da Clavio a Napier, ecc., significa essere costretti di volta in volta a riformulare intere zone del proprio dizionario. Stiamo perciò pensando a un glossario (che si accrescerà progressivamente insieme al numero degli autori presi in esame), e che sia di guida non solo alla comprensione dei termini obsoleti, ma aiuti anche a non sovrapporre inavvertitamente al contenuto dei testi che si stanno leggendo punti di vista posteriori, concettualizzazioni estranee, che ne altererebbero senso e significato.

2) Modelli e audiovisivi

Proprio la riflessione storica rivela l'importanza che ha in matematica la manipolazione e combinazione dei segni, la attività di trasformazione degli oggetti. L'astrazione ha uno sfondo operativo. Se costruire e progettare modelli significa sottolineare questo aspetto, non devono essere allora meccanismi o strutture da osservare, ma da rielaborare, rifare, perfezionare continuamente, riconsiderando sempre di nuovo situazioni

---

(giunto addirittura fino al rifiuto del calcolo coi logaritmi da parte di molti astronomi dell'Europa del nord, che preferivano usare le formule di prostaferesi, interamente fondate sulla teoria delle proporzioni); le dure polemiche sugli infinitesimi e gli indivisibili (Anderson-Kepler; Guldino-Cavalieri; ecc. ecc.).

e concetti. In questa attività, aspetti lucidi, euristico intuitivi, conoscitivi ed estetici si intrecciano saldamente. Per apprezzare la sua importanza nell'apprendimento, basta richiamare alcune situazioni tipiche in cui nasce l'esigenza (o semplicemente il desiderio, la curiosità) di "vedere" ciò che la nostra immaginazione costruisce e ci rappresenta: quelle,per esempio, che in geometria analitica possono essere descritte da equazioni o sistemi di equazioni (e disequazioni) contenenti uno o più parametri. Che cosa accade al variare dei parametri? Come si muove la curva generica di un fascio di coniche al variare del parametro nella combinazione lineare delle coniche base? Come si sposta nello spazio il centro di proiezione da cui una circonferenza (C) sul piano π viene mandata in una conica (C') su un altro piano π'quando uno dei due piani ruota intorno alla retta $\pi\pi'$? Quali sono le curve isottiche e ortottiche di una conica? Qual'è il luogo geometrico dei vertici di quei coni retti che si intersecano lungo una medesima ellisse? Si può pilotare meccanicamente una retta in modo che descriva l'inviluppo di una conica?

Nella fase costruttiva del modello, le abilità manuali necessarie (che dipendono dal tipo di materiale usato - nel laboratorio di matematica entra il materiale povero e il banco di lavoro della vecchia bottega artigiana, ma anche la tecnologia ricca e sofisticata del calcolatore) si confrontano col privilegio dell'intelletto: in una scuola come il liceo, dove mai si lavora con le mani, è un'esperienza importante. Ma vorremmo qui insistere soprattutto sulla ricchezza di spunti didattici forniti dalla fase di progettazione (da questo punto di vista, fondamentale). Si è costretti ad una attentissima analisi del contesto teorico in cui il modello viene inserito; l'oggetto matematico mostra configurazioni prima non sospettate; le piccole scoperte cui frequentemente si perviene sono assai stimolanti perché non apprese o lette, ma realizzate in piena autonomia; l'uso del calcolatore, spesso indispensabile, nasce da esigenze reali, non appare artificioso o imposto dall'esterno.

I materiali prodotti finora comprendono lucidi (fissi e mobili) per lavagna luminosa; costruzioni in legno e metacrilato che illustrano alcune trasformazioni lineari (isometrie, affinità, proiettività tra piani); meccanismi che realizzano la polarità rispettosa una circonferenza, che chiariscono alcuni aspetti del concetto di corrispondenza tramite inviluppi; oggetti di uso individuale (carte di Hahn, specchi piani per simmetrie, circuiti logici...); diapositive e films di animazione su fasci di coniche (uno di questi, sui fasci di parabole, presentato al 12° Congresso UMI - Perugia, settembre 1983) e omologie affini (ombre solari).

3) Unità didattiche

Solo un cenno su questo aspetto del nostro lavoro, non perché riteniamo che sia meno importante degli altri (anzi: in esso confluiscono si integrano e trovano applicazione tutti i risultati delle attività svolte dal gruppo, che giungono in tal modo a una specie di verifica), ma perché siamo ancora in fase iniziale. Concluderemo verso la fine di quest'anno la stesura e la sperimentazione nelle classi della prima unità didattica cui abbiamo pensato (introduzione del concetto di numero complesso e sue applicazioni elementari). Si tratta, in generale, di unità multimediali (che si avvalgono quindi di modelli tridimensionali, di brevi filmati, di semplici programmi elaborati su Olivetti M20 - disponibili nell'aula di matematica del Liceo Tassoni di Modena -: materiali posti tutti sullo stesso piano, senza concedere ad alcuno di essi, neanche al calcolatore, una posizione dominante) nelle quali il discorso storico (comprendente anche la lettura di brani tratte dalle opere dei primi matematici che si sono occupati dell'argomento e di quelli che in seguito ne hanno sviluppato lo studio) vorrebbe integrarsi alla presentazione dei concetti e al discorso tecnico in modo da non esserne assolutamente separabile. Pensiamo che questo obiettivo sia abbastanza nuovo, e intendiamo indagarne a fondo la praticabilità.

Bibliografia

(1) "Il più e il meno sui banchi. Analisi dei manuali di matematica per i licei". (A cura del NRD dell'Università di Modena), in "Riforma della Scuola" n. 3, marzo 1985.

(2) "Il concetto di funzione nella scuola media superiore" (a cura del NRD dell'Università di Modena): Quaderno n. 3 del NRD, 1985, Modena.

Ludovico Piccinato

Università di Roma "La Sapienza"

Contenuti di probabilità e statistica

Mi sembra che l'argomento sia ormai attuale e che se ne cominci a parlare anche se spesso in modo non troppo dettagliato o, talvolta, adottando punti di vista contrastanti. Devo premettere che non ho le carte del tutto in regola per inserirmi nel dibattito poiché, in particolare, non ho un impegno sistematico o almeno un'esperienza nel campo della didattica della scuola secondaria. Insegno tuttavia da molti anni, all'Università, argomenti di statistica matematica e soprattutto (per quanto ci riguarda ora) ho appena pubblicato con Nicolò Pintacuda il quaderno "Probabilità e Statistica" nell'ambito del progetto "Matematica come scoperta" (il quaderno, pubblicato con fondi CNR, è disponibile gratuitamente a richiesta presso i Nuclei didattici di Pavia, Pisa, Trieste). Tale testo ha l'obiettivo di fornire una preparazione di base all'insegnante, progettata con una certa ampiezza ma con un linguaggio e, in generale, uno stile che sono sostanzialmente quelli utilizzabili con gli studenti. Ovviamente la derivazione di un testo direttamente leggibile dagli studenti stessi richiede una collaborazione da parte degli insegnanti, in termini di letture critiche ed eventualmente di sperimentazioni anche parziali; di ciò si potrà riparlare, anche in relazione all'accoglienza che avrà avuto il quaderno, e ad una definizione quantitativa dell'impegno che può essere richiesto agli studenti per argomenti di questo genere.

La presentazione del quaderno che mi accingo a fare (brevemente) può essere vista quindi, per i motivi e con le limitazioni accennate, come un contributo al tema, cioè all'individuazione dei contenuti corretti di probabilità e statistica nell'ambito della scuola secondaria superiore. Il quaderno si compone di 3 capitoli: statistica descrittiva, probabilità, statistica inferenziale. I primi due sono leggibili autonomamente, e indipendentemente dagli altri; il terzo presuppone invece i precedenti. Sottolineo però che la statistica inferenziale ha la capacità di proporre stimoli culturali particolarmente vivi e interessanti, non riconducibili alla sola trattazione della probabilità o della statistica descrittiva, e quindi che un buon programma dovrebbe toccare aspetti di tutti e tre i capitoli.

Vale la pena di rilevare qui che il ruolo complessivo della statistica descrittiva viene visto, nella cultura statistica internazionale, in modo quanto mai eterogeneo. Per alcune scuole italiane (che certo hanno o avranno un influsso sulla didattica secondaria) la statistica descrittiva è in sostanza "la statistica"; il resto o è matematica poco rilevante per le applicazioni o è addirittura accademia futile. Nella tradizione anglosassone, invece, la statistica descrittiva è pressochè inesistente (a livello universitario) e figura di solito come prologo - poco più di un elenco di simboli da utilizzare in seguito - della "vera" statistica, cioè della statistica inferenziale completamente inquadrata in termini probabilistici. Forse ciò si può spiegare con lo sforzo di economizzare il tempo trattando una sola volta, quindi nel modo "avanzato" (probabilistico), argomenti che avrebbero già un loro interesse in un contesto meno formalizzato. Soprattutto in una trattazione che vuole ricollegarsi ad una cultura scientifica generale, e non ad obiettivi professionali strettamente definiti, ci è sembrato importante cercare di individuare una linea espositiva più equilibrata. Il carattere elementare delle nozioni matematiche necessarie alla statistica descrittiva non toglie infatti che i problemi affrontati o affrontabili possano essere validi e stimolanti. Basta pensare al tema delle relazioni statistiche tra più variabili e ai numerosi spunti che offre ad una riflessione critica (interpretazione di una relazione esistente tra X e Y, effetto sulla stessa relazione di una terza variabile Z, ecc.). Se l'approfondimento è inevitabilmente limitato, d'altra parte è larghissima l'applicabilità dei concetti presentati e quindi molto facile un collegamento non artificioso con le esperienze della vita quotidiana.

Per quanto riguarda la probabilità non si può non rilevare con soddisfazione quanto negli ultimi anni sia migliorata la situazione a livello universitario, con ovvi riflessi positivi sulla preparazione degli insegnanti. Comincia ad esserci anche una tradizione didattica italiana: penso ai testi di Pintacuda, oltre ovviamente ai classici scritti di de Finetti. Nel capitolo sulla probabilità (redatto proprio da Pintacuda) ci si basa sull'assiomatizzazione di Kolmogorov senza però favorire alcuna interpretazione riduttiva del concetto di probabilità (p. es. combinatorio o frequenziale); è un punto secondo me assai importante. Vengono affrontati diversi problemi significativi spesso partendo da situazioni elementari o addirittura concrete, per es. basate su prove ripetute; vengono introdotti così il paradosso di Borel, la legge debole dei grandi numeri e, ovviamente senza una dimostrazione rigorosa, il teorema limite centrale. Inoltre si avvia allo studio dei processi stocastici con una trattazione sia teorica che collegata ad esempi delle catene di Markov e dei processi di Poisson.

Per la statistica inferenziale mi sembra che sia particolarmente difficile, per il profano, orientarsi anche nella letteratura universitaria. Coesistono impostazioni così profondamente diverse (bayesiane e non bayesiane, decisioniste e non decisioniste, condizionate al risultato oppure incondizionate, ecc.) da oscurare il carattere sostanzialmente unitario della problematica. Si è adottato allora il criterio di un approfondimento critico dei concetti fondamentali, sempre con mezzi matematici elementari, offrendo anche la possibilità di un confronto fra le principali impostazioni rivali. Una esposizione del tutto neutra sarebbe impossibile, e il testo privilegia lo schema logico basato sul principio della verosimiglianza (contrapposto al principio del campionamento ripetuto che è caratteristico della impostazione frequentista) e su un completamento dell'analisi statistica secondo le linee neo-bayesiane. L'obiettivo non è però di esporre tecniche particolari (in qualche esposizione la statistica inferenziale si riduce ad un elenco di <u>test</u> !) ma di cogliere per quanto è possibile gli aspetti culturalmente significativi della logica induttiva, con riferimento ad un contesto non astrattamente filosofico ma ben radicato nella problematica della ricerca scientifica. Di passaggio, ma non è certo il momento per una discussione specifica, va ricordato che la diffusione di software statistico tende a deprimere il livello di consapevolezza metodologica, in quanto spesso, forse inevitabilmente, il software corrente privilegia le procedure automatiche di inferenza e decisione anziché un processo di riflessione coerente con la riconosciuta esistenza di una situazione di incertezza.

Riguardando ora il quaderno nel suo complesso, viene naturale porsi almeno due domande: sono giusti gli obiettivi? sono stati realizzati? L'invito alla collaborazione dei lettori, con cui si chiude la premessa, non è formale: gli autori sperano che un dialogo possa svilupparsi.

Lucilla Cannizzaro
Nucleo CNR-Scuola Secondaria Superiore di Roma

A. Elaborazione ed implementazione del curricolo

A1. Storia del Nucleo, principi metodologici e didattici che ne determinano la linea d'azione

La ricostruzione delle tappe evolutive di progetti di rinnovamento curricolare è, a nostro giudizio, nella fase attuale, essenziale per esaminare gli sviluppi attuali ed i problemi e metodi di disseminazione e di realizzazione delle innovazioni.

Nel caso del Nucleo di Roma, sono quattro le tappe di particolare rilievo per lo sviluppo della proposta curricolare: 1. (1963) l'avvio di classi pilota con progetto di rinnovamento parziale di tutte le materie. In particolare le innovazioni curricolari per la matematica messe in atto in tali classi hanno rappresentato uno dei contributi concreti di attività didattica al Convegno di Frascati nel 65 e 66 (cfr. B. de Finetti, Le proposte per la matematica nei nuovi licei, in Periodico di Matematiche, serie IV, vol. 45, 1976, pp. 75). Successivamente, i programmi che da tale convegno sono scaturiti hanno rappresentato un elemento costante di riferimento per il proseguimento della elaborazione curricolare; 2. (1970) passaggio delle classi da classi pilota a classi sperimentali, con una riorganizzazione tanto della struttura oraria, quanto dei curricoli di tutte le materie, linguistico e scientifico-informatico. La matematica si articola in area comune ed aree di indirizzo, e più precisamente, dal primo al quinto anno, rispettivamente in 4, 4, 3, 3, 3 ore con l'aggiunta di 1 ora al triennio per gli indirizzi scientifico e scientifico-informatico (che prevede 5 ore di informatica; 3. (1979) messa a punto del disegno curricolare completo e pubblicazione del testo di L. Lombardo Radice e L. Mancini Proia: Il metodo matematico; 4. (1981) l'obiettivo prioritario non è più quello della formulazione di un curricolo completo ma quello di individuare elementi di innovazione curricolare da considerarsi non più procrastinabili, di elaborare strategie e materiali tali da consentirne l'attuazione e la disseminazione (intesa come prova di una possibile generalizzazione) nella prassi scola stica attuale. Onde evitare fraintendimenti, preciso che auspichiamo, sempre, una riforma che metta in atto mutamenti non di semplice dettaglio.

In questa fase alle classi sperimentali nelle quali l'ipotesi di curricolo è nata vengono affiancate classi-normali di differenti tipologie di Scuola Secondaria Superiore.

Uno dei principi cardine sui quali è basato sia il curricolo nella sua globalità, che la scelta e l'elaborazione dei materiali per la disseminazione è l'opportunità di una cultura matematica per tutti che non sia riduttiva nelle concezioni e nei contenuti. Da ciò ha origine sia l'insistenza sulla definizione di un'area comune ampia e significativa nel biennio e nel triennio, sia la presenta tanto di note storiche che di impostazione storica nella trattazione di alcuni contenuti, sia l'uso, direi, quasi strumentale di alcuni contenuti nuovi e, per così dire, insoliti così da ampliare contenuti tradizionali e familiari restituendo loro vivacità e dinamicità.

Non meno determinante è il principio di considerare, anche al livello di insegnamento, la matematica come unitaria e, quindi, di fatto proporre un uso integrato di tutti quegli strumenti che siano utili e disponibili nelle varie fasi di insegnamento/apprendimento.

Da un punto di vista della metodologia didattica un ruolo primario è affidato alla operatività dei concetti e delle tecniche; questo perché è ferma convinzione che solo operando sugli oggetti, siano essi oggetti concreti e/o conoscenze precedentemente acquisite, si realizzi una effettiva conoscenza. E' fondamentale il ricorso al concreto, a ciò che è intuitivo o percettivamente evidente e lo sviluppo di una sensibilità alla necessità della dimostrazione 'in piccolo' come base per apprezzare e dominare la organizzazione razionale di un sistema ipotetico-deduttivo. Livelli successivi di astrazione sono tappe di un processo nel quale sono essenziali le relazioni reciproche tra i concetti, le tecniche, i modi di utilizzarli per scopi e di esprimerli.

Ovviamente, nella attuale quarta fase, uno degli elementi più delicati ed interessanti è la gestione contemporanea di curricoli in scuole con un differente numero di ore da dedicare alla matematica. Anche per questo nel Nucleo l'attenzione si sta spostando di nuovo verso aspetti di metodi e mezzi didattici. Il lavoro, comunque, è stato, fino ad ora, portato a vanti con una strategia ad hoc, legata alla particolare fascia di scolarità coinvolta (il biennio) e consentita dai particolari temi individuati. Abbiamo lavorato tenendo presenti come punti di riferimento le abilità e le capacità dei ragazzi e l'ipotesi di biennio con quattro ore settimanali di matematica, tutte in area comune; nella fase di sperimentazione e di utilizzazione 'a regime' del materiale, per quelle scuole con un numero inferiore di ore, abbiamo ridistribuito le attività sulle ore reali dei primi tre anni rispettando, ovviamente, l'esigenza di svolgere altre parti del curricolo.

Per una esposizione più dettagliata su aspetti metodologici e didattici si possono confrontare gli interventi di L. Mancini Proia sui Notiziari dell'UMI relativi ai Convegni UMI-Didattica del 1976, del 1977, e del 1979 rispettivamente alle pagine 40, 92; e Accademia dei Lincei nell'ottobre 1979: 'La sperimentazione al Liceo Virgilio di Roma' (intervento non pubblicato e giacente presso il Dipartimento di Matematica di Roma).

A2. Contenuti sviluppati

Sia per le innovazioni che per il rinnovamento di contenuti tradizionali, oltre ai Notiziari dell'UMI elencati poco sopra ed al testo già citato, è possibile vedere sul Periodico di Matematiche, Serie V, volume 50, n. 1/2 maggio 1975 pp. 44: 'Ancora una proposta',di L. Mancini Proia e l'analisi del curricolo curata dagli insegnanti del Nucleo di Modena.

Nella fase attuale il Nucleo, stà lavorando a due livelli: elaborazione di nuove proposte su algebra lineare e sue applicazioni e studio di procedure numeriche da inserire nel curricolo sperimentale negli indirizzi scientifici; riesame dei contenuti individuati come non più procrastinabili nell'ottica della messa in atto di un primo mutamento del curricolo reale nel biennio di Scuola Secondaria Superiore. Quest'ultimo lavoro riguarda lo sviluppo delle seguenti abilità: uso del piano cartesiano, conoscenza e familiarità d'uso delle isometrie nel piano, delle loro composizioni, delle loro rappresentazioni in coordinate cartesiane, conoscenza ed uso corretto dei primi elementi di logica elementare e problemi di interazione tra linguaggio naturale e linguaggio matematico.

Tali elementi, per altro, si ritrovano nella maggioranza delle ipotesi di rinnovamento curricolare sperimentate attualmente, dentro e fuori il contesto dei progetti C.N.R. e sono stati riconosciuti come qualificanti e irrinunciabili.

Il materiale già standardizzato (per aspetti metodologici si veda il punto A4) riguarda 'logica e linguaggio', 'funzioni lineari e sistemi di primo grado' e 'funzioni del tipo y=ax +bx+c e sistemi relativi'. Materiale più specificamente orientato alla logica delle proposizione ed alla teoria della dimostrazione è attualmente in via di elaborazione; materiali su funzioni di secondo grado in generale e materiali su altri tipi di funzioni elementari sono attualmente in elaborazione.

A3. Rapporti con l'informatica

A tutt'oggi, nel curricolo delle classi sperimentali, sono state condotte occasionali, programmate, ma sporadiche, esperienze di utilizzazione del calcolatore per trattare o estendere temi matematici quali, ad esempio, programmazione lineare e metodo del simplesso e trasformazioni geometriche nello spazio tridimensionale. Con l'intervento di due laureandi,poi, è stato condotto, con un numero ristretto di studenti, un lavoro sulle geometrie iperboliche nel quale le possibilità grafiche della macchina erano elemento essenziale per attività di scoperta di caratteristiche geometriche (cfr L. Cannizzaro ed altri, Atti XXXIV Incontro CIEAEM, Orleans, 1982, pp. 226).

Si è, fin qui, nutrita forte perplessità sulla opportunità di mettere in atto una alfabetizzazione informatica a tutti i livelli scolari perché si ritiene che non corrisponda realmente ad una azione culturalmente significativa. Con questo non si intendeva, ovviamente, misconoscere valore culturale e formativo ai curricoli informatici seriamente impostati e ad una azione di alfabetizzazione realizzata in età scolare propria rispetto allo sviluppo delle capacità e delle motivazioni degli allievi.

Il problema era, naturalmente, visto in rapporto al curricolo che il Nucleo ha come quadro generale di riferimento ed alle sue valenze culturali generali.

Oggetto di riflessione è stata l'incidenza dell'uso del calcolatore sul curricolo matematico sia da un punto di vista di singoli temi, che di possibile (anche in relazione allo sviluppo dei ragazzi) diversa organizzazione generale del curricolo, che di diverse procedure coinvolte.

Nel 1981 si è condotto un corso di aggiornamento di introduzione di tecniche numeriche e di riflessione su aspetti culturali e didattici coinvolti da una loro possibile introduzione a scuola; non è, però, seguita la fase di sperimentazione. Anche per acquisire nuovi elementi, un membro del Nucleo è entrato nell'equipe di sperimentazione del Progetto IRIS, ed, infine, un altro, fa attualmente parte del gruppo del progetto MPI/IBM.

A4. Strumenti e mezzi del lavoro in classe; strumenti e metodi per la verifica dei materiali e delle unità didattiche

Nella prassi scolastica è previsto l'uso integrato di materiali concreti, schede di lavoro sia propriamente formative che di sintesi, schede di verifica, letture storiche; tesine, talvolta a carattere multidisciplinare, da elaborare in ultimo anno per gli esami di maturità costituiscono un elemento caratterizzante delle sole classi sperimentali.

Riferirò di esempi di materiali elaborati per il biennio con l'obiettivo primario di sondare la possibilità di una effettiva disseminazione di innovazioni. Il materiale pur essendo parte integrante del disegno curricolare sviluppato ne 'Il Metodo Matematico', è stato formulato, per quanto chiarito poco sopra, in modo che ne risulti indipendente così da renderne possibile lo uso senza il testo.

Si tratta di schede di lavoro individuale per gli studenti con alcune schede-guida per gli insegnanti messe a punto, sottoposte a try-out, corrette e sperimentate per almeno un anno, nel corso degli ultimi quattro anni.

I pacchetti di schede (Logica e linguaggio; Funzioni lineari; Funzioni paraboliche) sono costituiti ciascuno di una delle seguenti tipologie di scheda di lavoro:

a. schede formative in rigida successione temporale da usarsi senza discontinuità temporali, ricoprono in maniera esaustiva la varie tappe di lavoro e di conquista concettuale e tecnica; il lavoro dello studente risulta fortemente guidato; comprendono momenti di costruzione dei concetti, commenti, definizioni, momenti di sistematizzazione, di sintesi, di codificazione scritta delle tappe raggiunte (formulati, talvolta, in forma di domande a risposta guidata, talvolta, in forma di schema da leggere). L'insegnante de ve controllare i tempi di svolgimento del lavoro, proporre, anche collegialmente, esercizi di rinforzo delle tecniche e curare l'aspetto di verbalizzazione e di confronto del lavoro individuale. Le verifiche sono in itinere (esercizi di sintesi, codificazione scritta delle scoperte e delle tecniche); possono essere previste verifiche a tempi lunghi per sondare il persistere delle conoscenze e delle tecniche. Questo tipo di schede richiede una rigida continuità nella fruizione da parte di ogni singolo studente.

b. schede formative in rigida successione da usarsi alternandole a momenti di lavoro collettivo di sintesi, di verbalizzazione e codificazione scritta. Quest'ultima attività non è prevista all'interno delle schede; la gestione di tali momenti (tempi, frequenza, tempo dedicato) è lasciata allo insegnante. Le schede coprono l'ossatura di base del lavoro ed introducono alcune definizioni. Sarà l'insegnante, invece, a curare aspetti di precisazioni e puntualizzazioni oltre che di rinforzo e di padroneggiamento di tecniche. Il momento di verifica non è previsto in itinere,ma, alla fine del lavoro e può essere ripetuto a tempi lunghi e/o all'inizio dell'anno scolastico successivo. Questo tipo di schede risulta, ovviamente, più duttile e malleabile del precedente.

c. Gruppo di schede mono-consistenti in rigida successione senza che sia richiesta continuità di lavoro; ogni scheda vuole essere una occasione autonoma di riflessione su un singolo problema e/o su un singolo'errore ricorrente' e di maturazione di sensibilità ad una maggiore accuratezza nel lavoro. Non sono previsti momenti di verifica per l'obiettivo stesso al quale tecnicamente servono le schede: sviluppare un particolare atteggiamento od una certa sensibilità.

Descrizione analitica delle schede su questioni 'elementari' di logica.

Si tratta di schede organizzate secondo la tipologia c.

Scheda 1: comprensione della lettura.

E' stato scelto un brano sulla storia dei numeri naturali tratto da T. Dantzig (Il numero linguaggio della scienza - La Nuova Italia - Firenze-1965) ed opportunamente adattato. Lo studente deve rispondere a quattro quesiti del tipo a scelta multipla; uno di comprensione generale del testo, due di esplicitazione dei termini 'ciascuno' e 'rispettivamente', uno di esplicitazione del significato della espressione '... è un problema insoluto'.

Schede 2, 6, 7: negazione, quantificatori ed implicazione.

La scheda 2, verte sull'uso semplice e simultaneo delle particelle logiche; è articolata in nove quesiti a scelta multipla formulati in termini di riconoscimento di equivalenza di una espressione assegnata ad una tra quattro espressioni proposte;

la scheda 6 verte sulla trascrizione in linguaggio simbolico di affermazioni (contenenti quantificatori e negazione) relative ad elementi di insiemi;

La scheda 7 verte sull'uso di implicazione semplice e doppia ed è articolata in tre esercizi chiusi del tipo di quelli della scheda 2 ed un esercizio aperto di scrittura (guidata) di tre espressioni equivalenti ad una data.

Scheda 3: riflessione sull'uso di termini quali, ad esempio, al minimo, non più, non minore.

Lo studente deve sostituire in dieci frasi formulate con l'uso di tali espressioni, un'altra espressione equivalente scelta tra sette a sua disposizione.

Scheda 4: codifica e decodifica di espressioni simboliche sempre coinvolgenti l'uso della negazione.

Un totale di quindici esercizi su espressioni del tipo '$x \nless 3$ si scrive : x non è minore di 3'.

Scheda 5: proprietà di relazioni e loro classificazione.

Sono elencate dodici relazioni con il rispettivo insieme di definizione; è fatta richiesta di riempire una tabella a doppia entrata relazioni/loro proprietà e loro denominazione.

Descrizione generale delle schede su funzioni lineari e sistemi di primo grado.

Prerequisiti: conoscenza della corrispondenza coppie di numeri e punti del piano; conoscenza ed uso delle traslazioni nel piano e loro equazioni.

Precisazioni: - il pacchetto è costituito di sedici schede formative (tipologia b) ed una scheda di verifica finale;

- si alternano costantemente esercizi di traduzione di condizioni numeriche in rappresentazioni grafiche ed esercizi inversi;
- le schede possono essere precedute od accompagnate da attività di lavoro sui grafici empirici, là dove la struttura scolastica (Istituti con insegnamento della fisica al primo anno) o la struttura oraria (Scuole Sperimentali Licei Scientifici, futuribile biennio) lo consenta;
- le prime tre schede possono essere usate alla fine del primo anno di corso e il riproporle all'inizio del secondo anno consente una verifica su tempi lunghi di quanto gli studenti hanno assimilato;
- le schede dalla 4 alla 16 sono da usarsi sul finire del primo trimestre del secondo anno.

Descrizione generale delle schede su funzioni del tipo $y=ax +bx+c$ e sistemi relativi.

Prerequisiti: traslazioni e simmetrie nel piano e loro equazioni, conoscenza della nozione di sistema e delle strategie analitica e geometrica per la ricerca delle soluzioni.

Precisazioni: l'uso delle isometrie è strettamente funzionale; le schede sono articolate secondo la metodologia a.

La verifica dei materiali viene condotta sottoponendoli ad un primo try-out con ragazzi che abbiano già avuto introdotti i temi corrispondenti e che usano i materiali come materiali di ripasso; su indicazione raccolte dagli insegnanti e date direttamente dagli studenti vengono corretti il linguaggio, la difficoltà degli esercizi, la suddivisione del materiale in unità temporali di insegnamento; vengono soppresse e/o introdotte schede. Il materiale così modificato viene usato in situazione di apprendimento vera e propria e ulteriormente modificato in base alle osservazioni degli insegnanti. In tale fase è essenziale che insegnanti diversi da quelli che hanno elaborato il materiale seguano nelle loro classi la nuova implementazione del materiale stesso.

B. Metodologia di lavoro del nucleo: prassi consolidata e problemi di rapporto con un modello teorico di ricerca curricolare.

Per le proposte innovative la prima tappa è rappresentata da uno studio preliminare condotto da alcuni membri del Nucleo sia su aspetti disciplinari, tecnici e storici del tema scelto, sia su aspetti didattici (prerequisiti, sviluppi, conoscenze, richieste all'insegnante, proposte di realizzazione di itinerari e di materiali). Tale lavoro diviene oggetto di seminari, è sottoposto così all'esame degli altri membri e talvolta di persone esterne al Nucleo. Si cerca di farne subito dopo oggetto di un corso di aggiornamento in modo da verificarne il grado di accettabilità da parte di insegnanti sia in ottica di rinnovamento,che di conduzione del curricolo reale attuale. Si passa, quindi, alla elaborazione della proposta didattica che nel caso di elaborazione di schede segue l'iter illustrato in A4. Contestualmente a questa fase e, dopo la prima sperimentazione, si elaborano le schede-guida per gli insegnanti.

In caso diverso, si elabora la linea didattica e poi gli insegnanti ne realizzano la gestione e le varianti richieste dalle classi raccogliendo osservazioni e commenti secondo una griglia che segue la traccia della linea proposta. Si passa così alla eventuale nuova stesura. Per alcuni temi di carattere particolare quali, ad esempio, geometrie finite, geometrie non-euclidee, programmazione lineare, prospettive ed arte già destinati per i prerequisiti richiesti, o per la loro particolarità, alle sole classi sperimentali, ci si è avvalsi del contributo di laureandi per la prima attuazione didattica rivolta ad un piccolo numero di studenti delle classi sperimentali; in alcuni casi si è, poi, passati alla elaborazione di materiali per le intere classi, in altri, invece, questa prima fase ha permesso di individuare i temi come didatticamente non adatti ad essere inseriti nel curricolo generale delle classi sperimentali.

Ed è, soprattutto, in relazione all'ultima fase di lavoro, che gli interessi del Nucleo circa aspetti metodologici generali si stanno concentrando su problemi di sviluppo e di gestione di curricoli. Da una parte, l'analisi tanto della composita, variata e dinamica situazione inglese quanto della articolata situazione tedesca, e dall'altra, le problematiche e le metodologie della ricerca-azione come modello per la elaborazione decentralizzata di programmi stanno suggerendo utili elementi di riflessione sulle potenzialità ed i possibili aggiustamenti della attuale impostazione della ricerca.

Rosanna Succi Cruciani
Seminario Didattico - Dipartimento di Matematica
Università "La Sapienza" Roma

Sull'insegnamento dell'Algebra e della Geometria nella Scuola Secondaria Superiore

Vorrei riferire su una ricerca che abbiamo in corso nell'ambito delle attività del Seminario dell'Indirizzo Didattico del Dipartimento di Matematica della Sapienza di Roma. Si tratta di una ricerca di programmazione e di sperimentazione didattica relativa ad un curriculum di Matematica per la Scuola Secondaria Superiore.

La parte più propriamente scientifica di questa ricerca trae origine da precedenti lavori di tipo fondazionale che si inseriscono nella linea che fonda le varie teorie matematiche, quindi in particolare la Geometria Euclidea e le varie teorie di anelli, sulla Teoria delle Categorie; certe motivazioni di tipo sintattico e relative alla semantica categoriale hanno condotto ad individuare un nucleo centrale di assiomi della Geometria Euclidea e ci sembra, per varie ragioni di cui diremo, che questa impostazione possa essere adattata in modo proficuo per la programmazione di un curriculum di algebra e geometria, diciamo, nel biennio della Secondaria Superiore e che un tale adattamento potrebbe bene soddisfare certe esigenze sulle quali è chiaro ormai che vi è un largo consenso.

Sono qui elencate ed è evidente che alcune di esse implicano o sono implicate da altre:

- Continuità con i curricula e le metodologie della Scuola media inferiore.
- Riferimento a situazioni reali fin dalle prime lezioni, quindi insegnamento condotto per problemi e problemi di applicazione dei fatti teorici acquisiti.
- Uso dell'algebra per descrivere "fatti geometrici" fin dalle prime lezioni, quindi conduzione unitaria degli insegnamenti di algebra e geometria.
- Uso, quanto più è possibile, degli strumenti e del linguaggio della moderna ricerca matematica (pensiamo che, una volta acquisito un concetto, convenga esprimerlo con linguaggio rigoroso e moderno; ciò potrà facilitare successivamente il riferimento a situazioni più generali e dare forse una

idea del significato della moderna ricerca matematica; è un tantativo che pensiamo in qualche modo debba essere fatto).

- Limitarsi nella trattazione teorica della Geometria a pochi fatti fondamentali e lasciare quindi largo spazio alle applicazioni (non è pensabile che si dedichi alla sola teoria il grande impegno imposto attualmente da certi insegnanti e d'altra parte si deve evitare l'eccesso opposto di ridurre a poche nozioni sconnesse l'insegnamento della geometria che precede l'uso delle coordinate, come per reazione sembra che accada sempre più in larga misura nelle nostre scuole).

Queste cose sono state dette molto bene da molti e quindi non ci soffermeremo ulteriormente.

Gli insiemi che pensiamo debbano essere posti a fondamento della assiomatica che descrive la nostra "realtà geometrica" sono gli insiemi che chiamiamo "insiemi spazio" (o di natura geometrica): la retta L, il piano P, lo spazio S, ed insiemi provvisti di struttura algebrica, che chiamiamo "insiemi quantità"; l'insieme dei "numeri" (o quantità pure) $\mathcal{R}$, l'insieme delle lunghezze $\mathcal{L}$, l'insieme delle aree $\mathcal{A}$, l'insieme dei volumi $\mathcal{V}$.

Riteniamo che il bagaglio intuitivo e culturale degli alunni che arrivano al biennio della Secondaria Superiore ci permetta di motivare sufficientemente l'assiomatica che proponiamo per questi insiemi (nel caso della Geometria piana alla quale per ora ci limitiamo) la quale consiste nel descrivere la struttura algebrica degli insiemi quantità $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$, le interazioni fra essi e le interazioni fra essi e gli insiemi-spazio.

Dunque inizialmente si tratterà di presentare le proprietà dell'insieme dei numeri $\mathcal{R}$ e dell'insieme delle lunghezze $\mathcal{L}$; $\mathcal{R}$ è dotato di due operazioni, addizione e moltiplicazione

$$\mathcal{R} \times \mathcal{R} \xrightarrow{+} \mathcal{R} \qquad\qquad \mathcal{R} \times \mathcal{R} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{R};$$

L è un monoide commutativo che gode della proprietà:

$$l_1+l_2=0 \Rightarrow l_1=0 \quad l_2=0;$$

è data una funzione $\mathcal{R} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ che ad ogni coppia (k,l) associa una lunghezza che indichiamo kl; questa funzione rappresenta una "azione" di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{L}$.

Le funzioni indicate soddisfano certi assiomi sui quali non possiamo soffermarci; le proprietà assunte per la funzione $\mathcal{R} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ conferiscono ad $\mathcal{R}$ la struttura di semianello commutativo ed a $\mathcal{L}$ la struttura di semimo dulo su $\mathcal{R}$ (la struttura additiva di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{L}$ è quella di monoide non di gruppo).

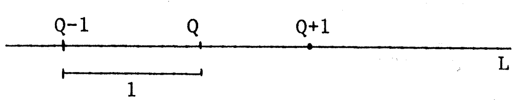
Ci sembra che queste proprietà possano essere ottimamente motivate; ad esempio, la funzione $\mathcal{R}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ si rappresenta con notazioni ben familiari (7 cm, 7,5 m...) e così pure, ad esempio, la proprietà $k_1 l+k_2 l=(k_1+k_2)l$ (7cm + 5 cm = 12 cm).

Gli assiomi ammessi permettono di provare che R contiene il semianello dei razionali assoluti e, per tutto ciò che riguarda le applicazioni ed il riferimento al concreto, potrà essere identificato con questo semianello fino a quando certe proprietà geometriche che ammetteremo come assiomi indurranno in $\mathcal{R}$ proprietà che impediranno questa identificazione. Infatti man mano che procediamo nello studio degli insiemi che costituiscono il nostro mondo geometrico, $\mathcal{R}$ acquista tutte quelle proprietà che ne renderanno la struttura sempre più simile a quella dei reali assoluti: $\mathcal{R}$ acquista una certa proprietà perché l'intuizione geometrica ci spinge ad ammettere proprietà, diciamo così, "evidenti" per certe configurazioni geometriche del piano; così, quando il livello di maturità dei ragazzi sarà tale da poter svolgere una teoria dei numeri reali, ciascuna proprietà sarà sufficientemente motivata.

Le funzioni viste rappresentano interazioni fra insiemi-quantità; interazioni fra un insieme-spazio ed un insieme-quantità, precisamente fra la retta L ed il monoide delle lunghezze $\mathcal{L}$, sono costituite da due funzioni che associano ad ogni coppia (Q,l), costituita da un punto di L e da una lunghezza, un punto di L denotato rispettivamente Q+l e Q-l ed inoltre da una funzione distanza $\mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$.

$\mathcal{L}\times L \Longrightarrow L$

$(l,Q)\longrightarrow Q\pm l$



Queste funzioni soddisfano certi assiomi ed anche qui ci sembra che, con ovvii riferimenti al concreto e con opportuni stimoli, questi assiomi potranno essere facilmente formulati dall'allievo sollecitato alla ricerca di proprietà che già appartengono al suo bagaglio intuitivo.

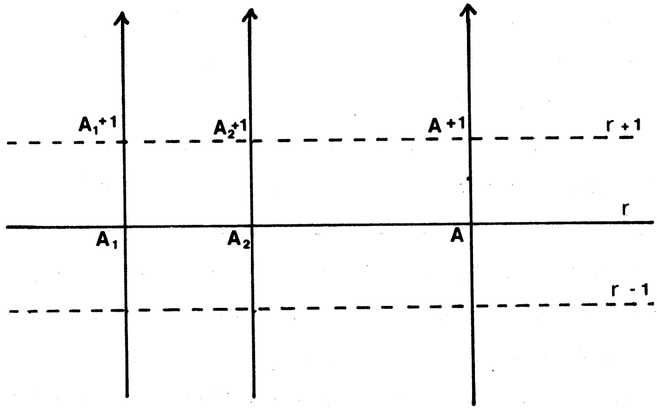
Non mi soffermo su queste proprietà; voglio però osservare, ad esempio, come la struttura di insieme ordinato della retta segua da fatti quantitativi come, tra l'altro, la proprietà del monoide $\mathcal{L}$: $l_1+l_2=0 \longrightarrow l_1=0 \wedge l_2=0$. Questo privilegiare fatti quantitativi è una scelta costante che ci indurrà a rimuovere dal ruolo centrale in cui sono comunemente collocate nozioni quali il parallelismo e la relazione fra le strutture affini di rette diverse; queste nozioni si esprimono a partire da proprietà delle lunghezze e delle aree.

Dunque seguiamo una linea che permette di utilizzare subito i mezzi efficaci dell'algebra ma evitando, nel formulare gli assiomi, la scelta di una unità di misura per le lunghezze e le aree. Infatti ammettere una funzione distanza ed una funzione area a valori nei reali significa rinunciare a priori ad una teoria della misura delle grandezze (sappiamo quanto questa sia importante quando, ad esempio, ci si rivolga al mondo della Fisica) ed inoltre priva i discenti della consapevolezza che le proprietà che caratterizzano i reali possono riguardarsi come conseguenza di certe proprietà geometriche delle figure.

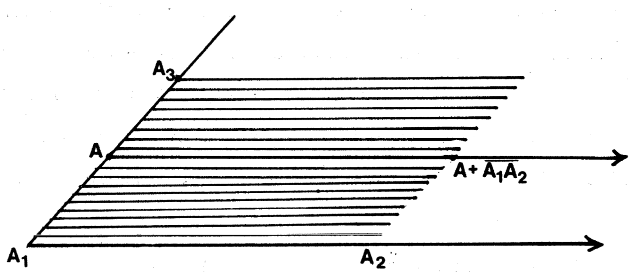
Introduciamo la nozione di "retta nel piano" (in P è assegnata una funzione distanza a valori nel monoide delle lunghezze) come isometria $L \rightarrow P$ e ciò formalizza la situazione concreta che si presenta quando si eseguono i disegni; per tracciare una retta sul foglio, si riproduce il bordo di una riga ed è possibile fare ciò in un solo modo se si vuole che questa riproduzione (cioè l'immagine dell'isometria) contenga due punti distinti fissati A_1 e A_2.

Le nozioni fondamentali per lo studio delle proprietà del piano sono, oltre alla nozione di distanza, le nozioni di perpendicolarità e di area; sappiamo che queste ultime sono strettamente collegate fra loro nella pratica matematica quando si calcolano le aree delle regioni poligonali.

Un assioma afferma che, per ogni retta r del piano, c'è una famiglia di rette, le "rette perpendicolari" ad r, e che è possibile orientare ciascuna retta della famiglia in modo che i punti del tipo A+l (A-l) su tale retta descrivano, al variare di A su r, una retta che denotiamo r+l (r-l). Si perviene così ad una nozione di parallelismo che è aderente alla tecnica usata quando si eseguono i disegni; per disegnare una parallela ad r si fa scorrere una squadra sull'altra ed ogni punto di r viene traslato, di norma in direzione perpendicolare ad r, di una stessa lunghezza.



Possiamo definire la nozione di orientamento concorde su due rette parallele e quindi quella di parallelogramma $[A_1A_2A_3]$, individuato da una terna di punti A_1, A_2, A_3, come unione di segmenti di lunghezza $\overline{A_1A_2}$.



Un assioma ammette l'esistenza di una classe $\mathfrak{M}$ di parti di P (che possiamo chiamare parti di P "misurabili") e di una funzione $\mathfrak{M} \xrightarrow{m} \mathcal{A}$, a valori nel monoide delle aree $\mathcal{A}$ che gode delle consuete proprietà:

Per ogni $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2 \in \mathfrak{M}$:

$\mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_2 \in \mathfrak{M}$

$m(\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2)=0 \Longrightarrow m(\mathfrak{J}_1 \cup \mathfrak{J}_2)=m(\mathfrak{J}_1)+m(\mathfrak{J}_2)$

$\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}_2 \Longrightarrow_m(\mathfrak{J}_1) \leq m(\mathfrak{J}_2)$

Con un assioma ammettiamo che i parallelogrammi appartengono alla classe $\mathfrak{M}$.

Una coppia di rette perpendicolari individua una funzione

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$$

uguale per tutte le coppie, che associa ad (l_1, l_2) l'area del parallelogramma con lati sulle due rette, di lunghezze l_1 ed l_2. Le proprietà che ammettiamo per questa funzione, in particolare la bilinearità, insieme con la proprietà che un parallelogramma di base l_1 ed altezza l_2 ha la stessa area del rettangolo di dimensioni l_1 ed l_2 (cosa che, nel nostro ambito non è altro che un caso particolare del Principio di Cavalieri nel piano) ci permette di pervenire al teorema di Talete, alla nozione di semipiano e quindi a tutte le proprietà della geometria affine ordinata (pensiamo che questa debba poi essere sviluppata con particolare riguardo alle trasformazioni geometriche).

L'assioma di simmetria del rapporto di proiezione di due rette conduce al teorema di Pitagora e quindi alle proprietà metriche; è a questo punto che possiamo individuare nel semianello $\mathcal{R}$ numeri che non sono razionali: ora in $\mathcal{R}$ esistono le radici quadrate delle somme di quadrati.

L'assioma che ammette l'esistenza di un punto comune ad una circonferenza ed a un segmento che unisce un punto interno con un punto esterno equivale ora ad ammettere che in $\mathcal{R}$ esiste la radice quadrata di un numero qualunque.

Un assioma colloca ogni cerchio nella famiglia degli insiemi misurabili; questo, insieme con l'assioma di Archimede; permette di individuare in $\mathcal{R}$ un numero π che è il rapporto fra l'area di un qualunque cerchio e l'area del quadrato di lato il raggio.

Non so se questa rapida esposizione sia riuscita a dare un'idea del significato di questa proposta. Pensiamo che una ricerca di programmazione didattica fondata su queste basi possa essere condotta in vario modo perché questa impostazione può interagire in vario modo con le varie recenti proposte.

La linea teorica, insieme con considerazioni di tipo fondazionale e con motivazioni e suggerimenti didattici, è esposta nel volume: Rosanna Succi Cruciani, Fondamenti di Geometria Euclidea, Proposta per una ricerca didattica, La Sapienza Editrice, Roma, 1984.

VENERDI' 25 OTTOBRE 1985

P. Pisaneschi

Seminario Didattico del Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Sulla partecipazione italiana a gare matematiche internazionali

Nel passato anno scolastico 1984-85 l'Italia ha partecipato a ben tre gare matematiche internazionali: in questa relazione, dopo aver fatto un breve resoconto dei risultati ottenuti, cercheremo di trarre un bilancio complessivo di questa esperienza.

In ordine cronologico la prima gara è stata la Annual High School Mathematical Examination" (AHSME), giunta ormai alla sua quinta edizione italiana. L'AHSME è una gara internazionale organizzata dalla M.A.A. (Mathematical American Association), cui partecipano ogni anno più di mezzo milione di studenti delle scuole superiori di vari paesi.

Di anno in anno la presenza italiana a questa gara si è fatta più consistente: tuttavia soltanto nel 1985 il numero degli studenti partecipanti è stato veramente significativo (più di 4.000 ragazzi): ciò anche grazie all'informazione e al riconoscimento ufficiale della gara stessa da parte del Ministero della Pubblica Istruzione, che ha deciso di prendere i risultati dell'AHSME come punto di partenza per la selezione dei componenti della squadra italiana da inviare alle Olimpiadi di Matematica Internazionali (IMO).

Ma a parte il valore strumentale che in tal modo è venuta ad assumere, la AHSME persegue finalità sue proprie che sono: favorire la diffusione e l'approfondimento di alcuni concetti matematici fondamentali, creare e mantenere vivo l'interesse per la materia con problemi stimolanti, valorizzare l'intuizione e la creatività degli studenti restituendo loro quel "gusto della scoperta" troppo spesso mortificato, nella comune prassi scolastica, dalla preponderanza di esercizi presentanti quasi esclusivamente difficoltà di calcolo, e talora anche dalla sopravalutazione degli aspetti dimostrativi

Il testo della gara consta di 30 esercizi, in genere ben scelti, che mirano a saggiare le capacità degli studenti sui temi più significativi della matematica elementare: ci sono così quesiti sui numeri complessi, quesiti di aritmetica, di algebra, di probabilità, di calcolo combinatorio, di trigonometria, di geometria del piano e dello spazio; non mancano peraltro domande che richiedono assai più creatività ed inventiva che non un corredo di nozioni.

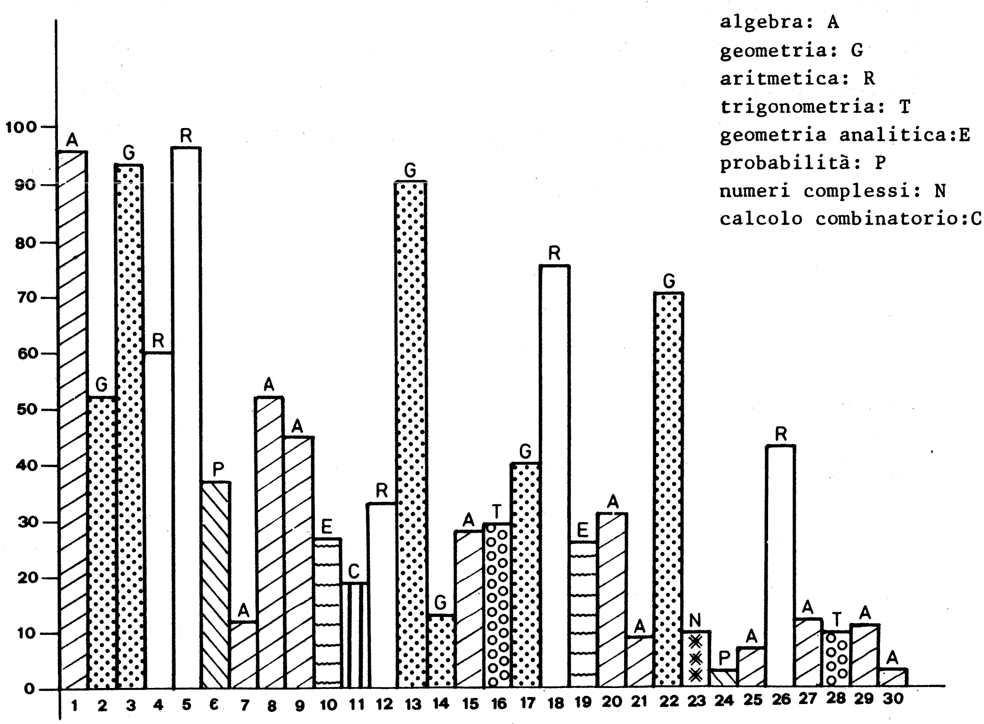
Il meccanismo di valutazione è il seguente: per ciascuno dei 30 quesiti che costituiscono la prova vengono fornite cinque risposte (A), (B), (C), (D), (E) di cui soltanto una è giusta: se lo studente la indovina guadagna 4 punti, è penalizzato di 1 punto se la sbaglia, mentre non guadagna alcun punto, ma nemmeno ne perde se tralascia il relativo quesito. Per evitare punteggi negativi, a tutti indistintamente vengono assegnati 30 punti: in questo modo il punteggio massimo raggiungibile è 150; tuttavia già punteggi superiori a 90 sono da considerarsi discreti e quelli superiori a 100 decisamente buoni. Il tempo concesso per l'esecuzione della gara è di 3 ore.

Seguono i risultati dell'edizione 1985 dell'AHSME:
Numero scuole partecipanti: 120
Numero studenti partecipanti: 4089

punteggio	studenti che hanno ottenuto il punteggio a lato	percentuale
$p<50$	562	14
$50\leqslant p<60$	845	21
$60\leqslant p<70$	963	23
$70\leqslant p<80$	779	19
$80\leqslant p<90$	491	12
$90\leqslant p<100$	308	7
$p\geqslant 100$	141	4

Bisogna riconoscere che gli esiti raggiunti sono tutt'altro che incoraggianti: basta pensare che il 77% dei partecipanti non ha raggiunto la soglia degli 80 punti, quando per questo sarebbe bastato rispondere esattamente a 13 degli esercizi proposti, ad es. ai numeri 1,2,3,4,6,7,8,10,11, 13,17,22,26 tutti piuttosto facili; inoltre solamente l'11% ha ottenuto punteggi superiori a 90 e solo il 4% punteggi maggiori di 100 in quella che si può ritenere una delle edizioni più facili dell'AHSME da cinque anni a questa parte.

Può essere interessante esaminare i quesiti con indice di soluzione più bassa. Come risulta dall'istogramma che segue essi sono, in ordine crescente, quelli contrassegnati dai numeri 24,30,25,21,28,29,23,27,7,14. Anche a non voler considerare il n. 24 (il cui basso indice di soluzione è probabilmente dipeso dalla formulazione poco felice del testo) è abbastanza sorprendente che neppure uno studente abbia risposto al n. 30 che ammetteva invece una facile ed elegante soluzione grafica. L'esercizio, che chiedeva il numero delle soluzioni reali dell'equazione $4x^2-40[x]+51=0$ (in cui [x] è la "parte interna" di x) ha infatti come soluzione le ascisse dei punti di intersezione della parabola $y=-\frac{1}{10}x^2+[x]\frac{51}{40}$, e alla "curva" di equazione $y=x-[x]$.



E' chiaro che non possiamo qui esaminare uno per uno gli altri esercizi poco risolti. Tuttavia tale esame (per il quale v. Archimede, fascicolo 2-3, 1985), che pure si presta ad interessanti considerazioni didattiche, mette in luce quanto segue: le nozioni richieste da questi esercizi non sono nulla di trascendentale: si tratta semplicemente di possedere in modo operativo i concetti di progressione geometrica, di potenza, di logaritmo nonché alcune nozioni elementari di geometria e trigonometria. Vale a dire, tutte cose che i nostri ragazzi dovrebbero conoscere bene considerato lo spazio e il tempo ad essi dedicati nell'insegnamento. Come si spiega allora il fallimento proprio in questa area? Indubbiamente ciò è dovuto alla mancanza, nell'insegnamento corrente, di una metodologia che privilegi le capacità euristiche e creative: in assenza di questa si ha che anche in argomenti tradizionali, non appena fuori dagli esercizi di routine, la maggior parte dei nostri studenti è come se fosse su terreno minato.

E' stato osservato da varie parti che gare a quiz del tipo AHSME, anche nell'ipotesi di un risultato positivo, testimoniano più doti di prontezza e intuizione che una vera capacità di cosciente elaborazione matematica. A mio parere traspare, da questa critica, una eccessiva preoccupazione per l'aspetto formale, preoccupazione che appare inopportuna essendo i risultati ottenuti globalmente negativi. Se non altro queste gare servono ottimamente, come cartina al tornasole, a rilevare i mali cronici di una scuola che mentre appare incapace di introdurre nell'insegnamento tematiche "nuove" non dà d'altra parte buona prova di sé neppure nei campi più tradizionali. E non vale a nulla dire che i risultati risentono del modo in cui è congegnata la gara, che 3 ore sono poche (^) e 30 esercizi sono troppi: la gara successiva cui tali rilievi non si applicano (o si applicano in misura assai minore) conferma purtroppo il giudizio negativo emerso dalla prima.

Infatti gli studenti che avevano superato con un buon punteggio la prima selezione sono stati invitati a partecipare ad una seconda gara internazionale, la AIME (American Invitational Mathematical Examination) organizzata anch'essa dalla associazione che organizza la AHSME. A differenza però di que-

---

(^) Da notare che, venendo incontro a una generale richiesta, abbiamo aumentato il tempo concesso per l'esecuzione della AHSME, che in tutti gli altri paesi è soltanto 1 ora e 30 minuti.

sta ultima, che si è svolta nelle sedi delle singole scuole, la gara AIME ha avuto luogo, a cura della C.I.I.M., il 25 maggio 1985 presso il "Collegio Colombo" di Viareggio, dove sono convenuti da tutte le parti d'Italia circa cento studenti.

La AIME consiste di 15 problemi (^^) (di difficoltà varia ma in genere superiore a quelli della AHSME) per la cui soluzione è concesso il tempo di 5 ore. Con utile artificio, inteso ad agevolare la correzione, i temi sono formulati in modo che la risposta sia espressa in ogni caso da un numero compreso tra 0 e 999. Il punteggio è dato dal numero delle risposte esatte, una risposta essendo esatta quando il risultato oltre che essere giusto, è motivato dai calcoli e dai passaggi logici che sono necessari per trovarlo.

I risultati globali ottenuti dai 99 ragazzi che hanno partecipato alla AIME sono riassunti nelle tabelle che seguono. Di queste la prima indica per ciascun esercizio il numero degli studenti che lo hanno risolto, mentre la seconda dà, in corrispondenza a ciascuno dei quindici punteggi possibili, il numero degli studenti che lo hanno conseguito. Come avevamo già anticipato, le cifre parlano chiaro e putroppo non a favore della nostra scuola: soltanto il 4% degli studenti sono riusciti a risolvere più della metà dei quesiti della gara, mentre il 75% non è stato in grado di risolverne più di 5.

TABELLA 1

N. esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N. risposte esatte	84	78	13	44	19	3	15	23	7	5	1	10	1	2	7

TABELLA 2

Punteggio	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N. studenti che lo hanno conseguito	4	14	23	26	14	4	6	4	3	0	1	0	0	0	0	0

Come appare dalla Tabella 1 alcuni esercizi hanno presentato notevoli difficoltà: tra questi il n. 11 (un solo solutore) e il n. 13 (un solo solutore) che

(^^) Il testo dei 15 problemi della AIME è comparso nel numero di giugno 1985 del Notiziario della Unione Matematica Italiana.

commenteremo brevemente.

Il numero 11 chiedeva la lunghezza dell'asse maggiore di una ellisse tangente all'asse delle ascisse e avente i fuochi in $F_1=(9;20)$ e $F_2=(49;55)$.

E' ovvio che, come non si può andare a scalare montagne senza l'idonea attrezzatura, così non si può partecipare ad una gara selezionatrice ristretta senza un certo grado di cultura matematica. La quale, nel nostro caso, si riduce alla familiarità con la seguente ben nota proprietà di una ellisse di fuochi F_1 e F_2: preso un punto qualunque A di essa, la tangente t alla curva in A è la bisettrice esterna dell'angolo di vertice A e lati passanti per F_1 e F_2: ciò si può esprimere in forma suggestiva dicendo che se l'ellisse è realizzata in materiale internamente riflettente, i raggi luminosi partenti da un fuoco vengono riflessi da ogni punto della curva in modo da passare per l'altro fuoco. Il termine "fuoco" deriva appunto da questa proprietà, tenendo conto della quale per avere il risultato richiesto basta trovare il simmetrico F'_2, rispetto all'asse delle ascisse, del fuoco F_2 e quindi calcolare la distanza $F_1F'_2$.

L'unico solutore di questo esercizio, non conoscendo la proprietà di cui sopra ha risolto il problema con una pagina e mezza di calcoli!

Un rilievo analogo vale per l'esercizio 13 che chiedeva di determinare il massimo dei numeri $d_1, d_2, \ldots$ in cui d_n è il MCD di $a_n = 100 + n^2$ e $a_{n+1}=100+(n+1)^2$. Qui il "deus ex machina" è l'algoritmo di Euclide: MCD(a, b)=MCD(b,r) (r resto della divisione di a per b), usando ripetutamente il quale si ottiene

$$\begin{aligned} d_n &= \mathrm{MCD}(a_{n+1}, a_n) = \mathrm{MCD}(n^2+2n+101,\ n^2+100) \\ &= \mathrm{MCD}(n^2+100,\ 2n+1) = \mathrm{MCD}(4n^2+400,\ 2n+1) \quad (\hat{}) \\ &= \mathrm{MCD}(2n+1,\ 401) \end{aligned}$$

da cui segue subito che il massimo richiesto è 401.

I primi sei studenti meglio classificati nella AIME sono stati chiamati a rappresentare l'Italia alle Olimpiadi Internazionali di Matematica svoltesi nello scorso luglio in Finlandia (^^). Dei sei convocati lo

---

(^) Dal momento che il termine 2n+1 non ha come fattore il numero 4, il quadruplicare il primo termine non altera il MCD.

(^^) Per i testi della gara IMO ed altri dettagli v. "OLIMPIADI DELLA MATEMATICA" nel Notiziario dell'U.M.I., ottobre 1985.

studente che aveva risolto il maggior numero di problemi tra cui quello dell'ellisse, non ha risposto all'appello.

La gara si è svolta in due giorni successivi, il 4 e il 5 luglio 1985, a Joutsa. Le due prove consistevano ciascuna di 3 problemi: ogni problema (se completamente risolto) dava diritto a 7 punti, ma venivano prese in considerazione anche soluzioni parziali. Il tempo concesso era di 4 ore e 30 minuti per ogni prova.

I risultati ottenuti dalla nostra squadra (formata da 5 studenti), benché superiori a quelli dello scorso anno, sono stati deludenti.

Riportiamo di seguito i risultati totalizzati da ciascuna squadra:

Romania (6)	punti 201	Grecia (6)	punti 69
Stati Uniti (6)	180	Iugoslavia (6)	68
Ungheria (6)	168	Svezia (6)	65
Bulgaria (6)	165	Mongolia (6)	62
Vietnam (6)	144	Belgio (6)	60
URSS (6)	140	Marocco (6)	60
Germania Federale (6)	139	Colombia (6)	54
Rep.Dem.Tedesca (6)	136	Turchia (6)	54
Francia (6)	125	Tunisia (6)	46
Inghilterra (6)	121	Algeria (6)	36
Australia (6)	117	Norvegia (6)	34
Canada (6)	105	Iran (1)	28
Cecoslovacchia (6)	105	Cipro (6)	27
Polonia (6)	101	Cina (2)	27
Brasile (6)	83	Finlandia (6)	25
Israele (6)	81	Spagna (4)	25
Austria (6)	77	Italia (5)	20
Cuba (6)	74	Islanda (2)	13
Olanda (6)	72	Kuwait (5)	7

Come si può vedere in essa precediamo soltanto l'Islanda (che però ha partecipato con solo due studenti) e il Kuwait: un risultato un po' misero per un Paese che si considera una potenza industriale!

Conclusioni

Le tre gare mettono in rilievo non solo una estrema povertà culturale (scarsa conoscenza dell'aritmetica e della teoria dei numeri, incapacità di usare la geometria analitica come metodo per risolvere problemi, mancanza di vera familiarità con il principio di induzione e i processi ricorsivi) ma anche una preoccupante debolezza in aree più tradizionali come la geometria. Infatti una buona conoscenza di questa avrebbe, tra l'altro, permesso una rapida e agevole soluzione di almeno due problemi dell'IMO con la conseguente acquisizione di almeno 70 punti, lasciando anche un ampio margine di tempo per gli altri problemi.

In ogni scuola, ma soprattutto nella scuola italiana, in cui il valore culturale della matematica è fortemente limitato dall'esecuzione di esercizi di routine poveri di vero contenuto matematico, i temi di gare come l'AHSME e l'AIME e in parte anche l'IMO, possono costituire una buona occasione per una attività matematica tendente al "problem solving" che impegni al meglio le capacità dei ragazzi.

Unitamente all'interrogazione, il compito in classe è uno dei rari momenti in cui gli alunni sono impegnati e motivati a fondo anche se ciò avviene più sulla linea della difficoltà dei calcoli che di una vera e propria elaborazione concettuale.

La diffusione di quesiti e di problemi come quelli delle gare matematiche (che implicano tra l'altro un minimo sforzo di correzione e sono quindi proponibili in modo non episodico) può avere allora la funzione di utile correttivo alla tendenza di cui sopra, impegnando l'allievo a sfruttare tutte le risorse della sua intuizione e della sua fantasia per elaborare una coerente strategia di soluzione prima di passare alla fase del calcolo.

Infine, proponendo regolarmente quesiti riguardanti i numeri complessi, l'aritmetica, la probabilità e i processi ricorsivi le gare matematiche possono avere una funzione di insostituibile supporto alla imminente riforma della scuola secondaria superiore. Se si continuerà ad ignorare il vuoto di contenuti che attualmente affligge la nostra scuola, finendola una volta per tutte con cose come la discussione dei problemi di secondo grado e lo studio, con il metodo delle derivate, di funzioni polinomiali di 3° grado, è inevitabile avere una matematica scolastica alla quale lo sconsiderato giudizio dato dal Gentile sulla matematica in genere sembra attagliarsi in modo perfetto.

Carlo Bressan - Renzo Fontana - Luigi Todisco - Aristide Vetere Rossi
N.R.D. - Trieste

Probabilità dal punto di vista non assiomatico

Un'ipotesi di lavoro con il calcolatore proposto per la Scuola Media o per il biennio superiore, corredata dal software relativo.

La teoria della probabilità è affrontabile da 4 punti di vista: classico, statistico, soggettivo, assiomatico. Volendo proporre tale reoria ad allievi di scuola media e del biennio superiore abbiamo ritenuto opportuno utilizzare il criterio classico e statistico per la loro maggiore semplicità.

Il lavoro che presentiamo è una proposta per l'insegnamento delle prime nozioni di Calcolo della Probabilità e prevede l'utilizzo del calcolatore al fine di rafforzare e integrare i concetti esposti e di risolvere alcuni problemi.

Riteniamo così di perseguire, in generale, questi obiettivi:

- insistere su una azione di sensibilizzazione (di cui a nostro giudizio c'è esigenza) per l'introduzione del Calcolo delle Probabilità sia a livello di scuola dell'obbligo (si vedano i nuovi programmi della Scuola Media e della Scuola Elementare) sia a Livello di Secondaria Superiore.
- cogliere l'occasione di fornire agli allievi oltre alle classiche nozioni, occasioni di apprendimento e approfondimento del concetto di algoritmo di costruzione di diagrammi a blocchi per la risoluzione dei Problemi ed eventualmente di una traduzione in un linguaggio di Programmazione.

In definitiva abbiamo raccolto e reso operanti i suggerimenti che provengono da più parti proponendoli in tempi che esigono un continuo rinnovo dei contenuti e delle metodologie.

Al fine di accelerare alcuni ritmi di apprendimento abbiamo prodotto una serie di programmi (12) nelle versioni per gli home computer Amstrad, Commodore, Spectrum ZX, Texas TI 99, per essere direttamente utilizzati nel corso delle lezioni. Per elaboratori diversi da questi si dovrà procedere alla realizzazione del software adatto.

Il lavoro si articola in più parti di crescente complessità.

In una prima fase ci affidiamo alle capacità intuitive dei ragazzi: si tratta di semplici esercizi che si propongono di far emergere il concetto che eventi diversi hanno in generale un diverso indice di 'preferibilità' dipendente dalle modalità con cui essi si presentano.

Si richiede in questa prima fase una assegnazione di preferenza di fronte ad urne in cui è noto il contenuto. Presentiamo poi la definizione classica di probabilità rafforzandola con alcuni opportuni esercizi; momentaneamente poi l'abbandoniamo per percorrere un'altra strada.

Vogliamo cogliere l'occasione di introdurre il concetto frequentista di probabilità dalla possibilità di sperimentazione individuale o collettiva degli eventi aleatori. Confidando in un primo momento nella disponibilità dei giovani allievi ad eseguire un gran numero di prove di uno stesso evento cerchiamo di far entrare i concetti 'dalle mani'.

Quando la disponibilità suddetta viene meno e si riscontra negli alunni un discreto livello di interesse, una adeguata conoscenza del concetto di variabile, dei principali elementi di algebra e del pensare algoritmico, riteniamo utile fare ricorso alle loro risorse intellettive per la costruzione di opportuni diagrammi a blocchi che simulino quei processi fisici.

Una tale attività tuttavia richiede rigore logico, uso di tecniche e competenze particolari: ecco un'occasione per sviluppare tutto ciò. Allora l'estrazione di palline colorate da un'urna di composizione assegnata, il calcolo delle frequenze di successo, la costruzione di istogrammi non diventano più un avvilente lavoro di routine ma uno stimolante esercizio di verifica delle proprie intuizioni. E non solo questo.

Si prepara la strada per l'introduzione di altri concetti: metodi Montecarlo, valutazione dell'attendibilità del risultato in funzione del numero di prove effettuate e l''osservazione' della Legge dei gran di Numeri.

Il lavoro prosegue con una parte dedicata agli elementari teoremi della Probabilità che vengono proposti secondo il punto di vista classico in quanto per questa via risultano di facile comprensione. Attraverso semplici esercizi guidati si giunge alla formula della Probabilità totale e nel caso di eventi incompatibili alla formula della probabilità composta.

Mediante l'aiuto di grafi ad albero e tabelle a doppia entrata si studiano alcuni semplici problemi come ad esempio il lancio di due monete fermando l'attenzione su diversi aspetti del problema.

Anche in questo caso il computer ci viene in aiuto per simulare un gran numero di prove e quindi anche ottenere la soluzione frequentista del problema.

Le possibili applicazioni della teoria fin qui svolta vengono poi evidenziate con un accenno (ma significativo) alla genetica e al campo assicurativo.

Forti così delle nozioni acquisite cerchiamo di far affrontare all'allievo, da un punto di vista frequentista, alcuni divertenti ma impegnativi problemi che con la teoria classica risultano in alcuni casi di difficile soluzione. Prendiamo ora quello che riteniamo il più significativo: Il problema dei cappelli.

Questo problema viene articolato in tre parti e riguarda un gruppo di amici che ad una festa consegnano i loro cappelli ad una disordinata guardarobiera che però confonde i cartellini e quindi li riconsegna a caso.

Un primo quesito consiste nel determinare la probabilità che tutti gli amici ritornino in possesso del proprio cappello. Noi proponiamo un diagramma a blocchi che lo risolva mediante simulazione. Quindi lanciamo il programma denominato 'cappelli 1'.

La soluzione classica di questo problema tuttavia non è difficile.

Nel secondo quesito si chiede quale sia la probabilità che colui che arriva per penultimo ritorni in possesso del proprio cappello. Qui è difficile proporre la soluzione con il calcolo classico. Utilizziamo la simulazione. Difficoltà decisamente superiori secondo lo schema classico si riscontrano nel caso in cui si debba calcolare la probabilità che almeno uno ritorni in possesso del proprio cappello.

Lanciamo il programma che abbiamo chiamato 'cappello 3' ed eseguendo numerose prove cerchiamo di dare una valutazione statistica del la probabilità richiesta. Volendo possiamo far osservare che in prima approssimazione tale probabilità è indipendente dal numero di amici se questi sono almeno quattro.

Si seguono analoghe metodologie per le soluzioni dei problemi che abbiamo denominato degli 'incontri casuali', del 'compleanno' e del 'calcolo statistico di pigreco'.

Una appendice per gli insegnanti si propone lo scopo di approfondire alcuni argomenti o dimostrazioni che sono state frettolosamente trattate in precedenza e di giustificare alcuni risultati relativi ai problemi.

Patrizia Avanzini - Margherita Michelotti - Paola Vighi
Dipartimento di Matematica - Parma

Approccio alle trasformazioni geometriche mediante calcolo matriciale e calcolatore

Nell'era dell'informatica l'insegnamento della Geometria è spesso trascurato, in quanto si preferisce sviluppare gli argomenti caratteristici di un modo di pensare algoritmico. Poiché invece si ritiene che i contenuti e i metodi propri della Geometria costituiscano un patrimonio culturale irrinunciabile, si è pensato ad un approccio alternativo alle trasformazioni geometriche, che possa rispondere contemporaneamente alle esigenze geometriche e informatiche.

Il primo passo in questa direzione è scegliere di utilizzare un personal computer (con video) come strumento per introdurre le trasformazioni geometriche. Lavorando operativamente lo studente riesce a visualizzare i "movimenti" delle figure piane e a classificare le varie trasformazioni in base alle loro proprietà.

Il lavoro che si presenta è stato progettato per essere inserito nel programma di Matematica di una terza classe di Scuola Secondaria Superiore (in particolare, per l'ITSOS di Langhirano).

I prerequisiti necessari per affrontare l'argomento sono: calco lo algebrico, primi elementi di calcolo matriciale (con particolare riferimento al prodotto di matrici), primi elementi di geometria analitica.

Si introducono matrici del 2° ordine come trasformazioni lineari omogenee nel piano cartesiano e si osserva come queste operano sui punti e sulle rette del piano. In questo modo però si realizzano solamente le centro-affinità, in cui è invariante l'origine. Per ampliare l'ambito di operatività si introducono poi, come "macchine più potenti", matrici del 3° ordine, utilizzando coordinate omogenee. Si possono così classificare le trasformazioni lineari, ricavandone anche induttivamente le proprietà, dall'esame di casi particolari; si usa solamente l'algoritmo del prodotto tra matrici al quale il calcolatore si adatta molto bene. Una volta scritto il programma il calcolatore permette di trattare rapidamente molti dati e il video consente di vedere direttamente parecchie proprietà geometriche (se si perdesse tempo per fare calcoli manuali, o per verificare analiticamente delle proprietà geometriche, diventerebbero praticamente impossibili i procedimenti mentali di induzione).

Attività del gruppo di Parma

A) Formazione

La nostra attività si è rivolta soprattutto ai settori della Scuola Elementare e della Scuola Media, poiché da questi - soprattutto dal primo - vengono per la maggior parte le richieste. Abbiamo condotto due gruppi di futuri formatori, uno per la Scuola Elementare (già attivo da alcuni anni) e uno per la Scuola Media (di nuova istituzione). Il primo partecipa all'attività di formazione dei formatori coordinata da P. Quattrocchi.

In esso, temi particolarmente seguiti sono stati la Geometria - nei suoi vari aspetti - e Statistica e Probabilità. Dal punto di vista dei contenuti, si è visto che è opportuno presentare assieme sia gli argomenti che interessano direttamente l'insegnamento elementare che gli altri: gli insegnanti possono così inquadrare i vari aspetti in un unico contesto, e apprezzare l'interesse di quegli argomenti che apparentemente non hanno un riflesso sull'insegnamento. Insomma, bisogna evitare lo errore che per un insegnante basti sapere quello che deve insegnare; ma bisogna anche evitare l'errore opposto (che sostanzialmente si trova già negli attuali programmi dell'Istituto Magistrale) di dare loro dei contenuti senza mostrare come si integrano nel contesto dell'insegnamento. Per la Geometria, in particolare, si sono messe in evidenza le fasi della Geometria sperimentale e della formazione dei concetti, e della riflessione sulla Geometria (da un lato, programma di Klein, dall'altro presentazione assiomatica di una geometria, nelle sue linee essenziali).

Per quanto riguarda la struttura del corso, si è visto che la presenza "in parallelo" di gruppi analoghi operanti in altre sedi serve da stimolo per affrontare i problemi, anche quelli che sono di meno immediato interesse per i componenti il gruppo. Così abbiamo affrontato e stiamo approfondendo altri temi, quali gli insiemi numerici, i concetti di relazione e di funzione, i calcolatori tascabili. E' essenziale che i vari gruppi si incontrino in riunioni globali o anche solo di alcuni gruppi.

Il <u>gruppo per la Scuola Media</u> si occupa di vari argomenti matematici, anche in correlazione con le Scienze: i partecipanti hanno elaborato e sperimentato in classe itinerari didattici (che hanno utilizzato anche ai fini dell'anno di formazione); ora si sta passando anche a problemi metodologici. Speriamo che anche questo gruppo possa organizzarsi entro un più vasto gruppo interregionale. La formula "gruppo locale entro un gruppo intersede" ci sembra infatti la migliore fra quelle sperimentate. In questa prospettiva, abbiamo cominciato a prendere contatto con <u>gruppi</u> di altre città, nelle quali non vi sono gruppi già avviati. Infatti, dovremo occuparci anche delle zone che non hanno delle strutture locali già formate (per es., un'Università) in grado di iniziare autonomamente un lavoro di formazione.

Infine, vista l'importanza che sembra avranno i direttori didattici nel piano di aggiornamento degli insegnanti elementari, abbiamo allo studio <u>attività di formazione per i direttori didattici</u>.

In attesa di affidare queste attività ai formatori, il nostro gruppo si è prodigato in attività d'aggiornamento per tutti gli ordini scolastici. Segnaliamo in particolare corsi per insegnanti elementari (per l'anno prossimo si aspettano moltissime richieste), e uno per l'alfabetizzazione informatica di insegnanti di Scuola secondaria superiore (il gruppo si è occupato dalla parte logico-algebrica).

Siamo pure intervenuti nelle attività del 'corso di formazione' per i vincitori di concorso nella Scuola Media.

B) Ricerca

Sono stati seguiti vari filoni. Per ciascuno si indicano le pubblicazioni più recenti.

1) Ricerche curricolari

- M. Michelotti, G. Bettoli, L'introduzione dei sistemi cartesiani e polari partendo dalla lettura delle carte, Boll. Ass. It. Cart., n. 58-59, 41-57 (1981).
- D. Medici, P. Vighi, Un approccio al concetto di operazione astratta con il metodo dell'istruzione programmata, Le Sc., la Mat. e il loro ins., 18,3-24 (1981).
- D. Medici, Introduzione alle isometrie mediante diapositive e fotografie, ivi, 18, 221-246 (1981).
- D. Medici, P. Vighi, Approcci al concetto di probabilità nella Scuola Media, ivi, 20, 42-51 (1983).
- D. Medici, P. Vighi, Probabilità composta e calcolo frazionario, ivi, 20, 161-170 (1983).
- D. Medici, M. Michelotti, P. Vighi, Matematica e musica, ivi, 20, 259-281 (1983).
- P. Vighi, D. Medici, Sui calcolatori algebrici non programmabili nella Scuola Media, ivi, 6, 163-183 (1985).
- P. Vighi, D. Medici, Avvio alla programmazione su calcolatori tascabili in terza media, ivi, in corso di stampa.
- M. Michelotti, G. Bettoli, A. Corini, La Geometria nella Scuola Media: proposta per un itinerario didattico, la Sc., la Mat., ... in corso di stampa.

2) Piano di lavoro, programmi

- M. Michelotti, Orientamenti per il piano di lavoro di matematica, La nuova sec., 1, 68-70 (1983).

- P. Fava, Ipotesi di lavoro per l'insegnamento delle Scienze sperimentali nella Scuola media, Le Sc., la Mat., ..., 18, 122-125 (1981).
- F. Speranza, Confronto fra i programmi in Italia e in altri Paesi, in "Atti del Conv. su l'ins. d. Mat. e d. Sc. sper. nella Sc. Sec. Sup.", 1983, 243-250.

3) Ricerche su problemi di apprendimento e inquadramento di problemi

- F. Speranza, La Geometria nella Scuola Elementare, L'ed. Mat., 2, supp. 2, 1/23 (1981).
- F. Speranza, L'insegnamento dalla Geometria della Scuola Elementare alla Scuola Superiore, Atti Conv. Mathesis 1982, 94-105.
- S. Speranza, Le trasformazioni geometriche, come e perché, L'ed. Mat.5, suppl., 113-131 (1984).
- F. Speranza, Dal linguaggio naturale al linguaggio formalizzato: le variabili, L'Ed. Mat., 3, supp. 1, 123-137 (1982).
- D. Medici, F. Speranza, P. Vighi, Sulla formazione dei concetti geometrici e sul lessico geometrico, Ensenanza de las Ciencias, in corso di stampa.

4) Ricerche sui problemi dei portatori di handicap

- P. Fava, Un'esperienza di sostegno nell'ambito dell'educazione matematica, Le Sc. la mat., 19, 52-58 (1982).
- P. Fava, F. Speranza, Un esempio di questionario interdisciplinare per la Scuola Media metodi diversi di valutazione e confronto fra normali e svantaggiati, L'Ed. Mat. 5, 179-199 (1984).

Raffaele Mauro

Una esperienza di insegnamento dell'informatica nell'ambito del progetto IGEA

Voglio innanzitutto esaudire una richiesta fattami da alcuni di voi, relativamente al progetto IGEA.

Il progetto IGEA è un piano di ristrutturazione dell'attuale indirizzo tecnico commerciale della Scuola Media Superiore. Attualmente sono coinvolti una cinquantina di Istituti Tecnici Commerciali, metà dei quali si trovano al secondo anno di attuazione.

Il progetto presenta molti aspetti interessanti, relativamente alle varie materie. In questa sede mi preme sottolineare la scelta dello insegnamento dell'Informatica, sin dal primo anno di scuola superiore, e abbinato all'insegnamento della Matematica. I contenuti dell'insegnamento di Matematica e Informatica e le metodologie proposte, almeno per quanto riguarda i primi due anni costituiscono a me pare, una valida base per ogni tipo di scuola Superiore.

Da qualche anno mi occupo di problemi di didattica con il personal computer, e ho dato vita, in provincia di Latina, con altri colleghi aventi gli stessi interessi, al Centro Pontino per la Diffusione dell'Informatica,di cui sono attualmente il direttore.

Il Centro è attualmente impegnato su due fronti, e cioè sulla produzione di materiali per la didattica e sull'attivazione all'interno di varie scuole della Provincia di gruppi di interesse, nell'ambito di una serie di corsi di aggiornamento finanziati dall'IRRSAE LAZIO e dagli Enti Locali della Provincia.

La necessità di produrre del materiale da utilizzare nell'insegnamento dell'Informatica (due docenti del Centro, tra cui io stesso, hanno avuto nel settembre 1984 la cattedra di Matematica e Informatica al corso IGEA in una scuola di Latina) ci ha portato ad un lungo lavoro di elaborazione che si è concretizzato nel libro "Programmare in Basic" edito dalla Lucania Editrice di Latina, testo che è stato anche utilizzato come base nei vari corsi di aggiornamento per docenti da noi diretti.

Due sono le idee di fondo che hanno guidato me e mia moglie Marina nel produrre questo manuale,e cioè da un lato presentare le varie istruzioni del linguaggio Basic con programmi semplici e nello stesso tempo interessanti, e contemporaneamente dare grande importanza agli aspetti matematici che si presentano nell'operare con una macchina che considera solo numeri in una data rappresentazione decimale.

Per quanto riguarda il primo punto, devo dire che l'interesse dei colleghi per una presentazione del Basic, e di quello ché è possibile fare con poche istruzioni, è stato veramente notevole. Nel convegno nazionale organizzato dall'AICA nella primavera scorsa a Milano, un discreto successo è stato decretato in particolare ad un programmino per il controllo di una dieta ipocalorica bilanciata, che è scritto con pochissime istruzioni.

Dovendomi rivolgere oggi a docenti di Matematica, voglio invece soffermarmi sugli aspetti meramente matematici, che sono poi quelli che più mi riescono a coinvolgere.

Se è vero che l'approfondimento di alcune questioni legate all'uso del computer per il calcolo numerico è possibile solo durante gli studi universitari, mi pare che comunque sia compito del docente di Matematica e Informatica nel biennio delle superiori far cogliere alcuni aspetti in modo chiaro ai suoi allievi.

Quella che in breve ora riassumo è la mia personale esperienza, in una prima classe di scuola media superiore, relativamente a questo punto.

Mi sono trovato ad operare in una prima parte dell'anno scolastico con una dozzina di APPLE IIe, cui si sono aggiunti poi dei COMMODORE 16 e degli SPECTRUM. Nel primo quadrimestre, per quanto riguarda la programmazione Basic, ho dato le prime nozioni, si sono costruiti i primi programmi, e contemporaneamente si sono affrontate le questioni relative all'immagazzinamento e alla visualizzazione dei dati.

All'inizio del secondo quadrimestre gli alunni hanno avuto a disposizione il manuale e nel frattempo sono arrivati gli altri computers: ciò che era stato svolto fino ad allora sugli APPLE IIe è stato ripreso sulle altre macchine.

A parte le questioni relative all'uso di dialetti Basic leggermente diversi si è scoperto come l'immagazzinamento dei dati numerici e la visualizzazione degli stessi presenti delle differenze nei vari computers a disposizione: e qui mi preme sottolineare come a questa "scoperta" gli allievi ci siano arrivati sostanzialmente da soli, applicando la metodologia d'approccio da me proposta precedentemente.

E' a questo punto che mi sono soffermato per qualche settimana sulla messa a punto di un programma sui numeri primi.

Con le prime istruzioni del Basic è piuttosto semplice costruire un programma che ci permetta di stabilire se un numero intero è primo oppure no.

Quello che ora presento è in particolare scritto per lo SPECTRUM:

```
10  PRINT"N E' UN NUMERO PRIMO ?":PRINT
20  INPUT"SCRIVI UN NUMERO INTERNO          ";N
30  IF N=1 THEN GOTO 100
40  LET A=1
50  LET A=A+1
60  IF N/A <> INT(N/A)THEN GOTO 50
70  IF N=A THEN GOTO 100
80  PRINT N; " NON E' PRIMO"
90  PRINT:GOTO 20
100 PRINT N; "E' UN NUMERO PRIMO"
110 PRINT:GOTO 20
```

Utilizzando tale programma ci si accorge che esso è estremamente lento: ci vuole circa un minuto per scoprire che 3359 è un numero primo, e circa 20 minuti per scoprire che 65537 è un numero primo. A parte la lentezza nel dare la risposta il programma ha anche un'altra limitazione: non può essere usato su numeri superiori a 4294967295, che è il più grande numero intero immagazzinato in modo corretto dal nostro computer.

Riuscire a costruire un programma più "veloce" non è molto difficile: con delle semplici considerazioni si arriva ad un programma come questo:

```
10  PRINT"N E' UN NUMERO PRIMO ?":PRINT
20  INPUT"SCRIVI UN NUMERO INTERO          ";N
30  IF N=2 THEN GOTO 110
40  IF N/2=INT(N/2)THEN GOTO 100
50  LET B=SQR N
60  LET A=1
70  LET A=A+2
80  IF A>B THEN GOTO 110
90  IF N/A <> INT (N/A) THEN GOTO 70
100 PRINT N: " NON E' PRIMO":PRINT:GOTO 20
110 PRINT N: " E' UN NUMERO PRIMO":PRINT:GOTO 20
```

Questo programma è decisamente più "veloce" del precededente: ci vogliono pochissimi secondi questa volta per scoprire che 65537 è un numero primo!

Ebbene, salvo qualche variazione di carattere puramente estetico, questo programma scritto in questo modo, si ritrova in vari manuali di programmazione per vari personal computer.

Non è difficile, a partire da questo programma, costruirne uno che ci visualizzi, ad esempio i numeri primi compresi tra 1 e 1000. E programmi di questo tipo si ritrovano in effetti in alcuni manuali di programmazione.

Ebbene, se effettivamente vado a farmi visualizzare la tabella dei numeri primi con questo programma su uno SPECTRUM (con gli altri computers vi sono delle differenze ma la sostanza del discorso è la stessa), noto che sono visualizzati anche i numeri 361, 841 e 961 che primi certamente non sono.

Non è difficile a questo punto individuare la ragione dell'inefficienza del programma: essa sta nel fatto che per il computer SQR 361 non è 19 (anche se viene visualizzato effettivamente 19) ma è 18.99999999 e questo fa si che nel controllare i possibili divisori di 361, tale controllo non viene effettuato anche sul numero 19.

A questo punto si può svolgere in modo empirico una ricerca sulla valutazione dell'errore di approssimazione compiuto dalla macchina nel calcolare SQR N.

Si giunge, nel caso dello SPECTRUM, ad una versione del programma precedente, esente da errori, modificando la linea 50 nel modo seguente:

50 LET B = SQR N + 0.000001

Tale modifica è sufficiente nel caso utilizziamo in INPUT numeri al massimo di 5 o 6 cifre.

Continuando ancora con delle ricerche sulla macchina, sugli errori di approssimazione, si arriva ad una modifica della linea 50, in modo che il programma dia sempre risultati corretti, sempre che si utilizzi in INPUT un numero intero non superiore al massimo immagazzinabile correttamente. La linea 50 va allora così modificata:

50 LET B = SQR N + 0.001.

Per degli approfondimenti su queste questioni rimando esplicitamente al manuale, sul quale evidentemente ci è stato possibile dilungarci maggiormente di quanto non abbia potuto fare io in questo momento.

Mi preme comunque sottolineare l'importanza della metodologia di approccio alla macchina che consiste sostanzialmente nel considerare il computer in un primo momento come una 'scatola chiusa' i cui meccanismi vanno successivamente esplorati.

Un momento successivo, che deve esserci nel corso degli studi preuniversitari è quello di un discorso semplice e chiaro sui problemi di approssimazione nell'uso del computer. In proposito ho oggi seguito con notevole interesse le linee tracciate da Luciana Zuccheri nel suo intervento.

Sergio Guidi - Nicolina A. Malara - Consolato Pellegrino

Dipartimento di Matematica Università di Modena

Informatica e didattica della Matematica

Relazione sull'attività di ricerca 1984/85

Scopo fondamentale delle attività svolte è stato quello di analizzare quali fossero le modalità ottimali di inserimento dei metodi informatici all'interno dei programmi attuali (per la scuola media e superiore) o dei nuovi programmi (per le elementari).

Si è puntata l'attenzione soprattutto sulle metodologie e sui linguaggi per la progettazione e l'implementazione di algoritmi, nella convinzione che tali metodologie e linguaggi presentino degli aspetti logico-matematici interessanti di per sé, come è detto chiaramente anche nei testi dei programmi scolastici più recenti.

Le attività si sono svolte su due piani paralleli: formazione di insegnanti ed elaborazione di materiali.

Per quanto riguarda la formazione sono stati svolti due cicli di seminari rivolti ad insegnanti di Scuola Media (presso il Dipartimento di Matematica e presso il Distretto Scolastico di Carpi (Mo)) sull'analisi del linguaggio di programmazione Basic e sulle sue applicazioni ad argomenti tratti dai programmi di Matematica.

In tali seminari sono state analizzate le strutture fondamentali per la costruzione di algoritmi e si è mostrato come tali strutture possono essere realizzate in un linguaggio di programmazione specifico (BASIC).

Sono poi stati presentati numerosi esempi di algoritmi e programmi Basic sui seguenti argomenti: elaborazioni su divisori e multipli negli interi, confronto di frazioni, calcolo approssimato nei razionali, risoluzione di problemi di aritmetica, calcolo di medie, calcolo di grandezze geometriche mediante formule, risoluzione di equazioni in modo esatto ed approssimato, grafica mediante le coordinate cartesiane, tracciamento di grafici di funzioni.

Il primo di questi due cicli, cioè quello tenuto all'Università, era stato preceduto da un altro su argomenti di probabilità e statistica.

E' poi stato svolto un ciclo di seminari presso la Scuola Elementare di Novi di Modena (responsabile S. Guidi) analogo al precedente ma riguardante il linguaggio Logo.

In tali seminari si è affrontato inizialmente lo studio della "grafica della tartaruga" partendo dalla realizzazione di percorsi e analizzando poi le proprietà delle figure più regolari (rettangoli, parallelogrammi, poligoni regolari, circonferenze, cerchi, figure composte mediante simmetrie, traslazioni, rotazioni e omotetie su elementi base).

Contemporaneamente sono state studiate le principali strutture per la realizzazione di procedure(sequenze, sottoprocedure, iterazioni, diramazioni) e l'uso di simboli (variabili).

Si è poi introdotta la ricorsività nei casi più semplici (poligoni regolari, circonferenze, spirali, traslazioni dinamiche, rotazioni dinamiche, omotetie dinamiche).

Infine sono stati mostrati esempi di risoluzione di problemi aritmetici mediante decomposizione in sottoproblemi, di semplici controlli statistici mediante la generazione di numeri casuali, di tracciamento di istogrammi, di linguistica formale.

Le reazioni degli insegnanti partecipanti ai singoli seminari sono state diverse nei tre casi; i motivi di queste differenze sono secondo noi di due tipi.
Prima di tutto abbiamo notato che, pur trattando dello stesso linguaggio (BASIC), sono stati molto maggiori l'interesse e l'attenzione nel caso del secondo ciclo, nel quale gli insegnanti avevano a disposizione dei calcolatori su cui esercitarsi con il nostro aiuto, rispetto al primo in cui questa possibilità non c'era.

A questo proposito ci è stato fatto osservare da molti insegnanti come un aggiornamento serio ed approfondito, soprattutto su questo tema che ha aspetti fortemente operativi, richieda molto tempo che non è facile trovare durante le normali attività scolastiche; inoltre sarebbe necessario, secondo molti, disporre di un maggior numero di calcolatori nelle scuole.

Ci è poi sembrato che anche il tipo di linguaggio trattato abbia influito sulla risposta degli insegnanti; infatti nel caso del Logo ci è sembrato di notare fin dall'inizio un coinvolgimento maggiore, probabilmente dovuto al fatto che tale linguaggio, appositamente studiato per scopi didattici,può essere graduato in modo da ridurre le difficoltà dell'impatto iniziale.

Per quanto riguarda la produzione di materiali, si è poi puntata l'attenzione soprattutto sul Logo, sia per i motivi precedenti sia in quanto linguaggio di tipo essenzialmente funzionale e quindi con forti valenze logico-matematiche.

L'insegnante R. Cavani, nostra collaboratrice, ha compiuto una sperimentazione sull'uso di tale linguaggio in attività di recupero con studenti demotivati in prima media.

Inoltre è stata presentata in convegni e in corso di stampa sulla rivista "L'Educazione Matematica" un lavoro di S. Guidi dal titolo "Il Logo e le trasformazioni", dove si mostra come è possibile sperimentare con procedure molto semplici gli effetti delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, omotetie) su figure qualsiasi.

Infine è stato pubblicato su "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate" (Vol. 8 N. 5, 1985) un lavoro di S. Guidi e N.A. Malara dal titolo "Simulazione del dispositivo di Galton mediante il linguaggio Logo" in cui si mostra come realizzare mediante tale linguaggio una simulazione che presenta aspetti abbastanza complessi.

In tale lavoro vengono anche mostrate procedure per il calcolo, con diverse metodologie, dei coefficienti binomiali e altre per il confronto grafico tra probabilità e frequenze relative di un esperimento bernoulliano.

Questi materiali didattici possono essere sperimentati a diversi livelli di scuola, purché gli insegnanti abbiano una buona conoscenza del Logo e sappiano adattarli alle capacità dei loro allievi.

Marina Rocco

N.R.D. - Trieste

Tutti i rettangoli che vuoi

L'unità didattica proposta si presta ad esser utilizzata, a livelli ed in modi diversi, dalla scuola media al triennio della Scuola Superiore.

1. Lo studio relativo all'insieme dei rettangoli di area assegnata k si collega tradizionalmente nella scuola media alla proporzionalità inversa ed alla sua rappresentazione grafica.
   Le abilità di calcolo, manuali, grafiche, sviluppate dagli allievi a questo punto del corso (generalmente circa a metà della II), sono di solito tali da far scegliere l'area in modo che k sia un numero naturale, possibilmente minore di 100 e con "tanti" divisori (interi).

2. Una classe modesta, che non ha goduto di continuità didattica, ma cui sono state fatte - nell'arco dell'anno - determinate proposte, è riuscita a percorrere l'itinerario qui esposto, cui si è dato l'avvio con la seguente domanda:
   - Posso, basandomi sulle considerazioni finora fatte, disegnare con precisione <u>tutti</u> i rettangoli di area k?

   Anche se la prima risposta (ovviamente!) è stata si, c'è stato chi ha visto il serpente mangiarsi la coda: i rettangoli servono per avere una approssimazione dell'iperbole, quindi non posso usare l'iperbole per ottenere i rettangoli.

3. E' stata allora proposta la seguente costruzione (fig. 1):
   - Disegno il quadrato ABCD di area assegnata k.
     Fisso un punto qualunque D' sulla retta passante per C e D
     Segno la retta a passante per A e per D'
     Traccio la retta p parallela alla a e passante per B e le rette s e t perpendicolari ad a e passanti rispettivamente per A e per D.

   Mediante le rette a, t, p, s si individua il rettangolo AD'C'B' che ha la stessa area di ABCD.

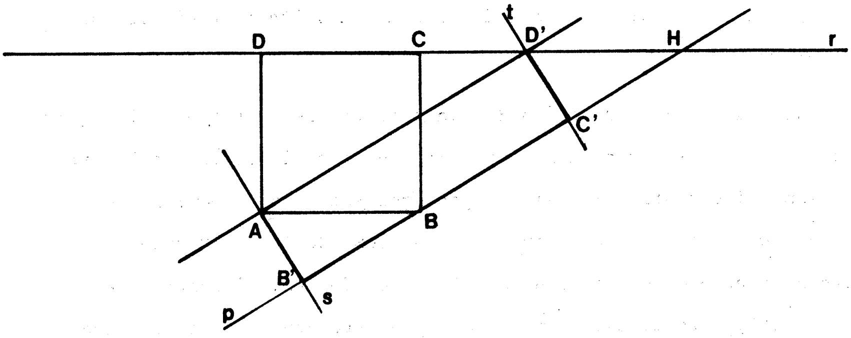


Fig. 1

4. Da precedenti lavori i ragazzi riconoscono l'equistensione per equiscomponibilità e la transitività dell'equiestensione.
Indicato allora con H il punto intersezione di p con r, si vede che AB'C'D ha la stessa area di ABHD', il quale ha la stessa area di ABCD. Poiché a questa età la manipolazione ha notevoli effetti sull'interiorizzazione delle conoscenze, i tagli necessari per comporre ABHD' con pezzi di AB'C'D' e poi quelli per comporre ABCD con pezzi di ABHD' sono stati effettivamente praticati.

5. Ad un altro livello, la continuità della retta sarebbe sufficiente ad assicurare che, mediante diverse scelte di D', posso effettivamente ora avere una costruzione esatta (cioè con riga e compasso) di ogni rettangolo di area k. Per noi invece il cammino è stato lungo. Facendo riferimento alla fig. 1, si vede che AD'>ℓ per ogni D' ed essendo ℓ il lato di ABCD, sicché riesco ad ottenere tutti i rettangoli di area k purché del rettangolo specifico che si vuole disegnare sia noto il lato maggiore ℓ_1: basta seguire la costruzione proposta al punto 3 ma, anziché scegliere D' a piacere, sia esso una delle intersezioni della retta r con la circonferenza di centro A e raggio ℓ_1.

6. Se invece fosse noto il lato minore ℓ_2 (cioè AB' o D'C', nella fig. 1), per la costruzione del rettangolo con riga e compasso occorre conoscere il luogo dei punti B' (o il luogo dei punti C') al variare di D' su

r. E sperare che almeno uno dei due sia a sua volta costruibile con riga e compasso ...

7. Al variare di D', i triangoli ABB' hanno sempre nel vertice B' l'angolo retto e l'ipotenusa coincidente con AB: sono cioè inscritti nella circonferenza di diametro AB. Allora per ogni scelta di $\ell_2 (<\ell)$ il rettangolo voluto si costruisce individuando B' (una delle intersezioni della circonferenza di diametro AB con la circonferenza di centro A e raggio ℓ_2), congiungendo tale punto con A per ottenere la retta s e con B per ottenere la retta p, costruendo quindi la a parallela a p e passante per A ed infine la t perpendicolare ad a e passante per D', essendo D' l'intersezione di a con r (vedi sempre fig. 1).

8. Il luogo descritto da B' esaudisce le nostre speranze. Resta la curiosità riguardo il luogo di C'.
Un ovvio tentativo è quello di disegnare "molti" rettangoli; per diverse scelte di D': ben presto la situazione è molto confusa !
Cerchiamo di nuovo di ricorrere alla manipolazione : si ritagliano da cartoncini alcuni rettangoli (anche il quadrato !) di area k e si incollano l'uno sull'altro in modo da rispettare la situazione della fig. 1. Basta poco per capire che conviene poter vedere le "due facce" del risultato: si incollano tutti i rettangoli al vetro di una finestra. L'effetto è suggestivo e si riesce ad intuire parecchio riguardo al luogo dei

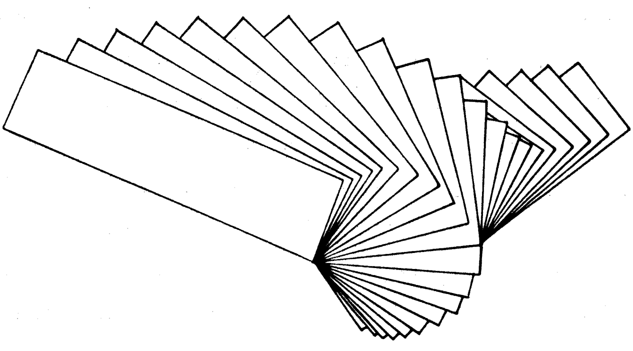


Fig. 2 - I rettangoli incollati, visti al "diritto"

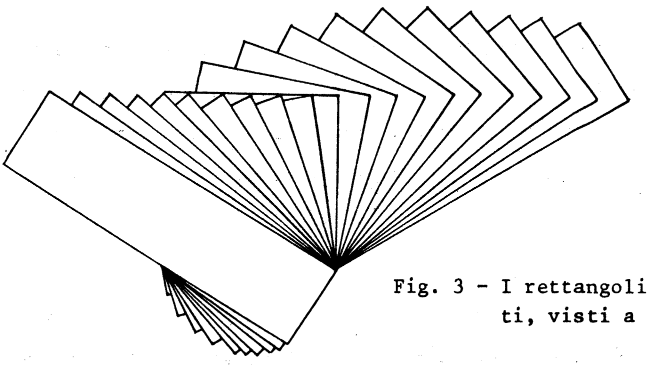


Fig. 3 - I rettangoli incolla
ti, visti a "rovescio"

punti C'. Ma non si può aggiungere alcun nuovo rettangolo per migliorare l'approssimazione.

9. Si ricorre all'aiuto di un "amico": il calcolatore è già stato usato dalla classe, in modo diretto o con semplici programmi costruiti dai ragazzi stessi, sia per problemi di calcolo che in questioni geometriche. Questa volta però il programma è mio (perché i ragazzi hanno sempre lavorato in BASIC mentre questa volta ho usato il LOGO e non sembrava opportuno sottoporli allo stress di cambiare linguaggio. Si vedano in Appendice 1 le procedure usate).

10. La curva che si ottiene (fig. 4 ma vedi anche fig. 7) conferma le intuizioni suggerite dall'attività del punto 8.

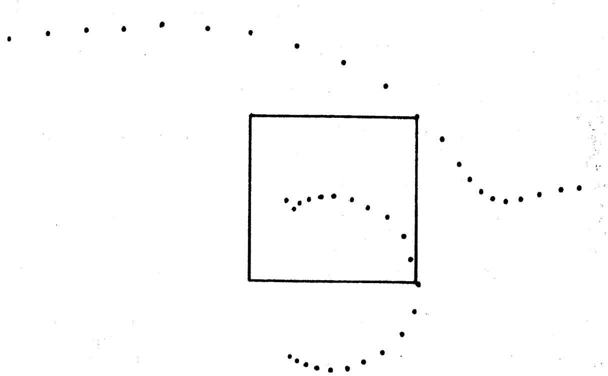


fig. 4

Si dimostra che, per la misura di ℓ_1 che tende all'infinito, la curva si avvicina alla retta r senza intersecarla (il termine "asintoto" non è stato introdotto). Si riconosce che, oltre ad esser "particolari" gli estremi del diametro perpendicolare ad AB nella circonferenza luogo dei punti B', sono "particolari" anche i punti C' corrispondenti.

11. Il problema nel suo complesso appare proponibile anche ad altri livelli, ovviamente con altre finalità ma soprattutto con altre metodologie e con altro rapporto nello sviluppo delle varie parti.
Ad esempio, dal biennio in poi si ometteranno tutte le parti "manipolative", ma si può riconoscere l'appartenenza di B' alla circonferenza di diametro AB anche per via analitica. Nel triennio si può approfondire il cenno fatto al punto 5 a proposito della continuità della retta e si può giustificare per via analitica l'andamento del luogo di C' (vedi Appendice 2).

12. Per quanto riguarda la scuola media, val la pena di spendere ancora qualche parola sulle finalità:
- svincolarsi dai limiti insiti in quanto esposto al punto 1 (vedi punto 13)
- un ulteriore allenamento per quanto riguarda le costruzioni con riga e compasso (vedi punto 14)
- rinsaldarsi dell'acquisizione di alcune conoscenze geometriche, quali i teoremi relativi a perpendicolarità e parallelismo, proprietà dei parallelogrammi, criteri di congruenza dei triangoli, ecc.., evitando che diventino fatti scontati, (vedi punto 15)
- abitudine a proprietà di linguaggio ed avvio alla "dialettica della dimostrazione" (vedi punto 15)
- sviluppo delle capacità critiche e di collegamento (vedi punto 15).

13. Un serio approccio alle questioni relative alla teoria della misura, anche a livello elementare, ci impone di uscire dai "comodi" insiemi N e Q. Ne deriva la necessità almeno di accennare alle situazioni simili a quella che si presenta e ℓ ed ℓ_1 (o ℓ ed ℓ_2) sono incommensurabili, inclusi i casi in cui hanno per rapporto un numero reale trascendente.

14. Per ottenere la costruzione di AB'C'D' vi sono molte vie, ognuna basata su considerazioni diverse. Ad esempio:

In riferimento alla costruzione proposta al punto 3 (fig. 1)

- costruisco s e t come bisettrici degli angoli piatti di vertice rispettivamente A e D' e la retta p come lato del parallelogramma ABHD'

oppure

- costruisco $\widehat{ABB'} \cong \widehat{BAD'}$ (devono risultare alterni interni fra le rette parallele a e p); costruisco $\widehat{D'AB'} \cong \widehat{DAB}$ e $\widehat{AD'C} \cong \widehat{DAB}$ ($\widehat{DAB}$ è retto per ipotesi).

In riferimento alla costruzione del punto 6, disegno la circonferenza di diametro AB (dopo averne individuato il centro come punto medio di AB), fisso su essa il punto B' e traccio le rette s e p. Quindi

- disegno la retta a (come perpendicolare ad s passante per A); individuo la sua intersezione D' con la retta r; costruisco B'C' $\cong$ AD' per completare il rettangolo.

oppure

- determino il punto H intersezione di p con r; costruisco il triangolo HC'D' congruente al triangolo BB'A.

15. Le costruzioni proposte al punto precedente sono sempre state corredate da descrizioni scritte (stese dai ragazzi, già abituati a questo tipo di attività'). Lo scopo di questo lavoro è quello di avviare gli allievi ad un linguaggio rigoroso nei termini e nella forma e rispettoso della logica secondo la quale si succedono le singole azioni da compiere. Ne derivano una miglior acquisizione dei contenuti proposti, una certa consapevolezza della necessità di giustificare passo passo ciò che si sta facendo, lo sviluppo della capacità di collegamento fra le varie conoscenze, che si attua nel basare su teoremi diversi l'una o l'altra delle costruzioni fatte.
Pretendere o sperare il pieno raggiungimento di questi ultimi obiettivi entro la scuola dell'obbligo significa non tener conto dello stadio evolutivo degli allievi.

16. Così come proposto, il lavoro presenta un punto debole, poiché la costruzione vista al punto 3 sottointende che si sia capaci di costruire il quadrato di area uguale a quella di un assegnato rettangolo.

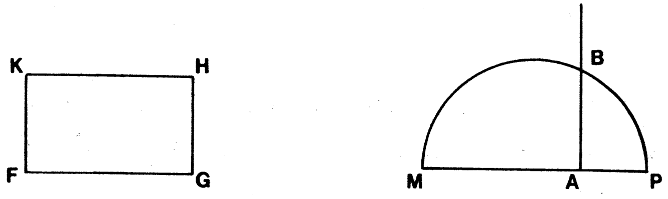


fig. 5

Sia FGHK il rettangolo in questione : si costruisca il segmento MP = MA + AP con MA ≅ FG e AP ≅ GH. Tracciata la semicirconfenza di diametro MP, si costruisca la retta perpendicolare ad MP e passante per A. Detto B il punto in cui tale retta interseca la semicirconferenza, dal II° teorema di Euclide si ricava che AB è il lato del quadrato cercato.

Sarebbe stato del resto possibile uno svolgimento analogo a quello proposto anche a partire da un rettangolo.

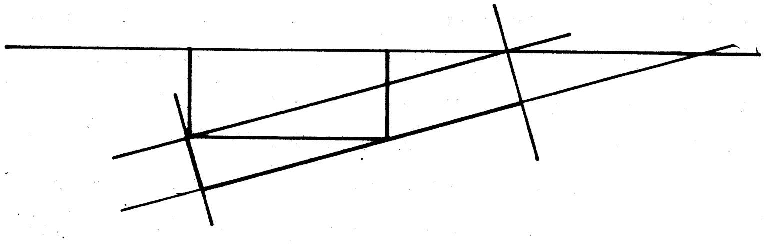


fig. 6

17. Va notato infine che la costruzione proposta al punto 3 ed illustrata in fig. 1 non è certo l'unica che risolve il problema. Ad esempio si può ricorrere al primo teorema di Euclide (vedi fig. 6 bis)

- si disegna il quadrato ABCD di area assegnata k ed il prolungamento BE del lato AB
- se del rettangolo cercato si conosce il lato maggiore CG, si disegna il triangolo rettangolo BCE intersecando BE con la circonferenza di centro C e raggio uguale a CG; se invece si conosce il lato minore CH, si determina sulla semicirconferenza di diametro BC il punto H in modo che CH sia il segmento assegnato, quindi, prolungando CH si ottiene il triangolo rettangolo BCE
- disegnato il quadrato CEFG, con la retta per B perpendicolare a CE si stacca da esso il rettangolo cercato.

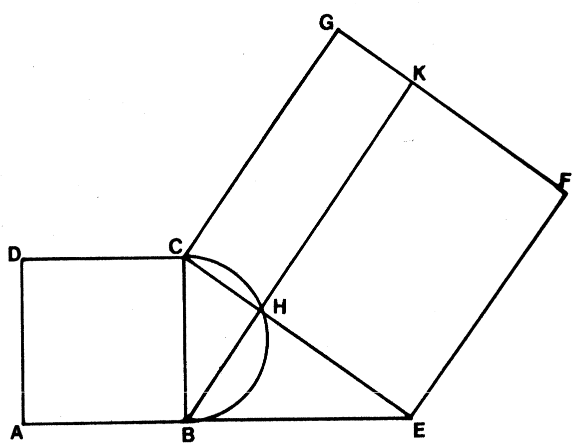


fig. 6 bis

18. Quest'ultima costruzione presenta indubbi vantaggi, come il mostrare un'applicazione di un importante teorema e l'unitarietà di metodo risolutivo, indipendentemente dal conoscere il lato maggiore o quello minore del rettangolo da disegnare. Tuttavia viene così a mancare un'occasione per introdurre il concetto di luogo geometrico, che qui viene invece affrontato (a seconda dell'età e delle conoscenze degli allievi) a più livelli e con diverso tipo di approccio, compresa la sua generazione dinamica.

Appendice 1 - Procedure LOGO per ZX - SPECTRUM

```
TO L  :LATO
FD  :LATO
RT  90
END
```

Disegna il lato di un quadrato; la misura del lato è variabile; la rotazione predispone l'orientamento per il prossimo avanzamento

```
TO Q  :LATO
REPEAT 4 [L  :LATO]
END
```

Disegna il quadrato di lato assegnato mediante ripetizione della procedura precedente

```
TO R  :LATO  :ALFA
RT 90  -  :ALFA
FD  :LATO / SIN  :ALFA
RT 90
FED  :LATO * SIN  :ALFA
RT 90
FD  :LATO / SIN  :ALFA
RT 90
FD  :LATO * SIN  :ALFA
RT  :ALFA
END
```

Disegna il rettangolo (di area fissata in base al lato del quadrato) il cui lato AD' forma con AB l'angolo assegnato

```
TO C  LATO  :ALFA  :INC
R  :LATO  :ALFA
C  :LATO  :ALFA +  :INC  :INC
END
```

Disegna la fig. 7 fissato che sia il lato del quadrato

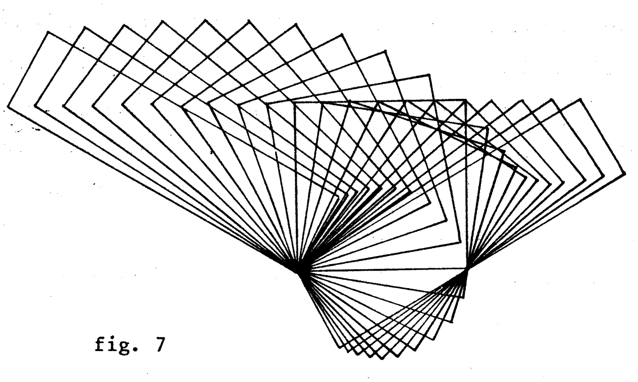


fig. 7

Segna i vertici C' e B' del rettangolo equiesteso al quadrato di lato fissato) il cui lato AD' forma con AB l'angolo assegnato, senza disegnare il rettangolo.

```
TO R1  :LATO  :ALFA
RT 90 -  :ALFA
PU
FD  :LATO / SIN  :ALFA
RT 90
FD  : LATO * SIN  :ALFA
PD FD 1 BK 1
RT 90
FD  :LATO / SIN  :ALFA
PD FD 1 BK 1
PU
RT 90
FD  :LATO * SIN  :ALFA
RT  :ALFA
END
```

Disegna le due curve per punti, cancellando i rettangoli usati per costruzione (fig. 4)

```
TO B  :LATO  :ALFA  :INC
PX
R  :LATO  :ALFA
PD
R1  :LATO  :ALFA
PX
R  :LATO  :ALFA
B  :LATO  :ALFA +  :INC  :INC
END
```

Disegna le due curve senza mostrare rettangoli di costruzione (fig. 4)

```
TO D  :LATO  :ALFA  :INC
R1  :LATO  :ALFA
D  :LATO  :ALFA +  :INC  :INC
END
```

Appendice 2

Disegnato il quadrato ABCD, si scelga come sistema di riferimento cartesiano quello che ha origine in A, asse x per A e B, asse y per A e D, unità scelta uguale al lato del quadrato

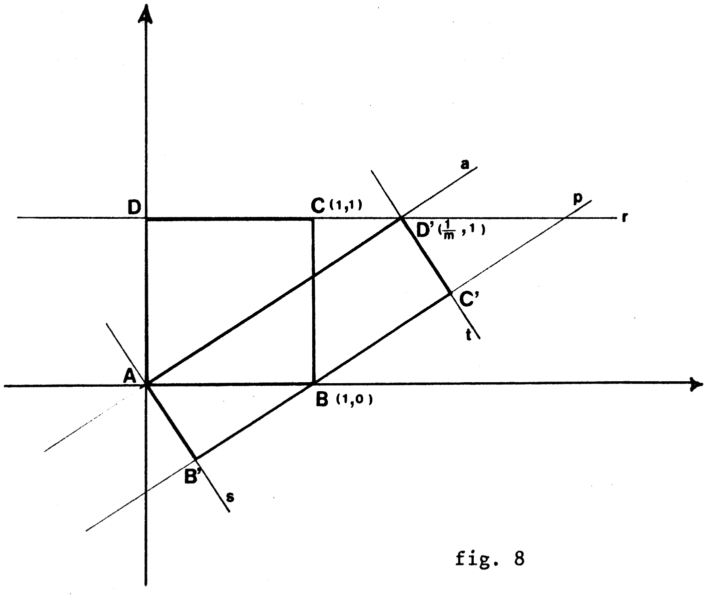


fig. 8

Si possono allora scrivere le equazioni seguenti

retta a $\qquad y = m\, x$

retta p $\qquad y = m\,(x-1)$

retta s $\qquad y = \frac{1}{m}\, x$

$$y-1 = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{1}{m}\right)$$

Il luogo dei punti B' è espresso in forma parametrica da:

$$y = m\,(x-1)$$

$$y = \frac{1}{m}$$

Eliminando il parametro si ottiene l'equazione della circonferenza di centro $(\frac{1}{2}, 0)$ e raggio $\frac{1}{2}$.

Il luogo dei punti C' è espresso invece da:

$$y = m(x-1)$$

$$y-1 = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{1}{m}\right)$$

ed eliminando il parametro si ricava:

$$y^2 (x-1) = (x-1)^2 - xy (x-1)$$

il cui grafico passa per C(1,1), ha per asintoto $y = 1$ ed ha un massimo relativo in $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{2})$ ed un minimo relativo in $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Capuzzo Dolcetta, M. Emmer, M. Falcone, S. Finzi Vita
Dipartimento di Matematica - Università degli studi di Roma "La Sapienza"

L'uso dei personal computer nell'insegnamento dell'analisi matematica

La sperimentazione didattica, iniziata nel 1983 nel corso di Analisi Matematica I per gli studenti in Fisica, è nata dalla convinzione che l'uso del personal computer, e in particolare le sue capacità grafiche, possano costituire un valido aiuto nell'insegnamento di alcuni argomenti del programma. Inoltre la crescente diffusione degli home computer ha creato tra gli studenti un notevole interesse per la costruzione di programmi di tipo scientifico, interesse che è accompagnato però da una scarsa preparazione matematica e da una visione un po' mitica dei calcolatori.

Per venire incontro a queste diverse esigenze si è ritenuto utile affiancare al corso tradizionale di analisi matematica alcune ore di esercitazione al calcolatore. Poiché l'obiettivo fondamentale che si intendeva raggiungere era quello di un migliore apprendimento dell'analisi matematica, l'accento è stato posto sull'aspetto matematico dei problemi e sulla discussione critica dei risultati, piuttosto che sugli aspetti informatici e sull'ottimizzazione dei metodi numerici impiegati.

Questa sperimentazione didattica, che ha coinvolto anche altri corsi di analisi, meccanica e statistica, ha avuto il sostegno della Commissione per l'Istruzione Superiore della CEE che ha concesso un finanziamento per favorire lo scambio di contatti tra i docenti del Dipartimento dell'Università di Roma impegnati nell'esperimento e i docenti delle Università di Parigi-Sud e Leeds che si muovono nella stessa linea.

La sperimentazione

Nell'ultimo anno accademico hanno partecipato alle esercitazioni al calcolatore circa venti studenti per ognuno dei due corsi di analisi matematica. Gli studenti,del primo anno sono stati selezionati sulla base di un test (sulle successioni numeriche) proposto a tutti gli studenti del corso. Per ottenere un campione ragionevolmente rappresentativo della popolazione studentesca sono stati scelti 5 studenti che avevano risolto bene l'esercizio proposto, 10 studenti sufficienti e 5 studenti insufficienti.

Il gruppo del secondo anno era costituito da una decina di studenti che avevano già partecipato alle esercitazioni al calcolatore durante l'anno precedente e da dieci studenti selezionati anch'essi sulla base di un test. Poiché questi ultimi avrebbero dovuto inserirsi in un gruppo che aveva ormai una buona conoscenza del BASIC e una discreta pratica di programmazione, il test è consistito nel chiedere loro di "eseguire", con carta e penna, un programma di una decina di istruzioni scrivendo esattamente quello che sarebbe apparso sul video del calcolatore. E' interessante osservare che tutti gli studenti che avevano preso parte al test hanno superato brillantemente la prova, testimoniando ancora una volta il grado di diffusione che il BASIC ha raggiunto.

Il gruppo del primo anno aveva a disposizione i calcolatori per due sedute settimanali di due ore ciascuna e, parallelamente, seguiva per due ore alla settimana delle lezioni teoriche nelle quali venivano presentati i problemi e i metodi che avrebbero costituito l'oggetto delle esercitazioni al calcolatore successive. Gli argomenti trattati sono stati i seguenti:

INTRODUZIONE ALLA LOGICA DELLA PROGRAMMAZIONE (cicli, alternative, diagrammi a blocchi)	2 ore
PRESENTAZIONE DEL LINGUAGGIO BASIC	4 ore
GLI ERRORI DEL CALCOLATORE (arrotondamento e perdita delle cifre significative)	1 ora
GRAFICI DI FUNZIONI E COMANDI GRAFICI DEL BASIC	2 ore

METODI PER LA RICERCA DEGLI ZERI (bisezioni, Newton, secanti) 2 ore

METODI DI INTEGRAZIONE NUMERICA (rettangoli, trapezi, Simpson) 2 ore

(Il numero di ore si riferisce alla parte teorica)

Trattandosi di un corso di analisi matematica, di tutti i metodi numerici sono stati dati i risultati di convergenza e le stime dell'errore. Gli studenti avevano a disposizione anche delle dispense (I. Capuzzo Dolcetta - M. Falcone, Note di supporto alle esercitazioni al calcolatore: analisi matematica I, Dipartimento di Fisica, 1983) che sono servite da traccia alle lezioni teoriche.

Durante le ore di esercitazione al calcolatore i dieci studenti presenti venivano costantemente seguiti da un insegnante, il cui compito era essenzialmente quello di aiutarli nella fase di scrittura del programma e di sollecitare una riflessione sugli aspetti matematici dei vari metodi proponendo continuamente nuovi esercizi e nuovi test. La presenza dell'insegnante durante le ore di esercitazione al calcolatore si è dimostrata proficua al primo anno perché rende molto più celere l'apprendimento e obbliga gli studenti a riflettere sulle proprietà matematiche dei vari metodi. La tendenza dello studente, una volta che il programma sia stato scritto, è infatti quella di testarlo su esempi molto banali e troppo simili tra loro: questo fatto fa si che il suo programma fornisca sempre un risultato e che egli lo consideri perfetto. La presenza dell'insegnante serve appunto a sollecitare il suo senso critico proponendo in particolare esempi in cui il programma <u>non</u> funziona e chiedendone una spiegazione.

L'organizzazione delle esercitazioni del gruppo del <u>secondo anno</u> è stata invece basata sulla convinzione che non fosse più necessaria un'opera di tutoraggio così stretta e che, anzi, fosse giunto il momento di dare agli studenti una maggiore libertà nella realizzazione dei programmi e un maggior numero di ore al calcolatore. Ferme restando quindi le due ore settimanali di teoria per la presentazione dei problemi e dei metodi numerici, gli studenti hanno lavorato al calcolatore in gruppi di tre per due ore alla settimana. Gli argomenti trattati sono stati i seguenti:

SOLUZIONE DIRETTA DEI SISTEMI LINEARI (Gauss, pivot massimale)	3 ore
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI SUPERFICI	4 ore
METODI PER L'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Eulero, Eulero modificato, Taylor, Runge-Kutta)	6 ore
METODI DI OTTIMIZZAZIONE NON LINEARE (gradiente, gradiente proiettato)	4 ore

Anche in questo caso gli studenti hanno avuto a disposizione delle dispense (M. Falcone, Note di supporto alle esercitazioni al calcolatore: analisi matematica II, Dipartimento di Fisica, 1984) che presentavano i vari argomenti da un punto di vista matematico.

Gli studenti non sono stati più seguiti durante le ore di esercitazione al calcolatore. L'insegnante era a disposizione di tutti i gruppi per due ore alla settimana per discutere dei problemi sorti nella fase di costruzione dei programmi. Il lavoro al calcolatore era finalizzato alla realizzazione di un progetto che ogni gruppo doveva consegnare con scadenza quindicinale. Mentre i gruppi lavoravano ad un progetto (ad esempio, la realizzazione di un programma per l'implementazione dei vari metodi di integrazione numerica delle equazioni differenziali) durante le ore di teoria venivano presentati i metodi che sarebbero stati al centro del progetto successivo.

Questa nuova organizzazione delle esercitazioni al secondo anno ha permesso agli studenti di lavorare al calcolatore per un numero di ore notevole e li ha costretti a impegnarsi molto per la realizzazione dei progetti. Tuttavia, forse per il fatto che i progetti non avevano nessun valore ai fini dell'esame, gli studenti si sono concentrati maggiormente sugli aspetti informatici legati alla realizzazione dei programmi e, in molti casi, hanno trascurato l'aspetto matematico dei vari metodi.

Conclusioni

Anche se la nostra sperimentazione si è svolta su un arco di tempo troppo breve per poter trarre delle conclusioni definitive ci sono tuttavia alcuni aspetti importanti che sono emersi e che crediamo interessante sottolineare a tutti coloro che intendano iniziare esperienze analoghe.

In primo luogo bisogna tenere presente che la risposta degli studenti è, a dir poco, entusiasmante: sono impazienti di conoscere tutto ciò che riguarda i calcolatori e, soprattutto, vogliono usarli per fare qualsiasi cosa. Il problema, almeno in un corso che non ha come obiettivo l'insegnamento dell'informatica, è piuttosto quello di frenare il loro entusiasmo o almeno guidarlo. In questo senso la presenza di un insegnante è fondamentale specialmente all'inizio quando si tratta di riportare il loro interesse dallo strumento (il calcolatore) alla matematica proponendo sempre nuovi esempi e invitandoli a capire il significato dei risultati che il calcolatore fornisce. Senza questo sforzo una attività di esercitazioni al calcolatore nell'ambito dei corsi di matematica si riduce, nel migliore dei casi, ad un esercizio di programmazione che sarebbe più sensato svolgere nell'ambito di un corso di introduzione all'informatica. Questo punto di vista è avvalorato anche dai risultati ottenuti nella sperimentazione degli ultimi due anni: gli studenti del primo anno hanno acquisito rapidamente una buona intuizione matematica dei problemi che stavano trattando mentre circa un terzo degli studenti del secondo anno si è perso nei meandri della programmazione senza ottenere nessun risultato significativo.

Il secondo aspetto che ci interessa sottolineare è che in realtà esistono vari modi di utilizzare il calcolatore nell'insegnamento della matematica. Quello che abbiamo finora seguito ha coinvolto gli studenti nelle esercitazioni al calcolatore dando loro modo di acquisire le basi della programmazione e la conoscenza del linguaggio BASIC. Tuttavia dal punto di vista dell'insegnamento della matematica, in particolar modo nelle scuole medie superiore, si potrebbero ottenere buoni risultati già utilizzando il calcolatore come un mezzo per <u>mostrare</u> alcuni fenomeni matematici e <u>illustrare</u> alcuni concetti e alcuni metodi. Il calcolatore avrebbe quindi il ruolo di "laboratorio di matematica". Questa seconda alternativa ha bisogno di meno strutture ma necessita di un software specializzato sufficientemente duttile da permettere all'insegnante di modificare il contenuto delle sue lezioni e la scelta dei suoi "esperimenti".

S. Cicenia - A. Drago
Gruppo di Storia della Fisica
Dipartimento di Fisica di Napoli

Analisi di "studi sulla teoria delle parallele" di N.I. LOBACEVSKIJ

1. Nel seguito si esamineranno le proposizioni che Lobacevskij premette alla esposizione succinta, centrata sul problema delle parallele, della sua geometria.

L'obiettivo finale è quello di verificare se è valida l'interpretazione della geometria lobacevskiana mediante una essenziale imprecisione nelle misure di angoli, segmenti, punti, ecc.; cioè se questa interpretazione:

1) è compatibile con le proposizioni premesse da L., o, detto in altre parole, se essa fornisce una spiegazione intuitivamente semplice della validità delle 16 proposizioni lobacevskiane e quindi della intera geometria lobacevskiana;
2) dà una spiegazione del modo con cui L. ha organizzato e ideato le 16 proposizioni.

Non sappiamo se questa stessa interpretazione può anche spiegarci la nascita nella mente di L. della stessa idea di geometria non euclidea; l'opera che esamineremo non può rispondere a questo quesito. Invece lo potrebbe la sua prima opera (1826) che però è andata perduta e fu ripresa, rimaneggiata, dalla prima pubblicazione di L. sul Messaggero di Kazan (1828). Purtroppo questa opera è in russo e non è disponibile in lingua occidentale.

Ad ogni modo se L. avesse intuito la sua geometria mediante la idea-base delle misure imprecise, certamente non avrebbe potuto esporla seguendo questa idea, pena cadere nel ridicolo; infatti in quei tempi la imprecisione veniva uguagliata con la confusione logica. Allora L. deve aver cercato di tradurre il più possibile la sua geometria in termini assiomatici, così da porsi al livello di rigorosità della geometria euclidea. Nei nuovi principi (1835-1838) (1), infatti, il L., pur partendo da situazioni concrete, dai corpi solidi e dalla consapevolezza della imprecisione delle misure, come egli stesso sostiene nella introduzione, (il che gli fa ritenere come primitivi non più il punto, la retta, il piano, ma il corpo, il contatto fra corpi e il movimento) procede, poi, in maniera astratta, sviluppando tutto assiomaticamente ed articolatamente.

Ma allora l'opera che più può rivelare la sua idea-base non è tanto un'opera sistematica, ma un'opera di tipo pedagogico e riassuntivo. Giustappunto gli "Studi nella teoria delle parallele" (2) furono scritti solo dopo che L. aveva completato la sua opera sistematica, i NPG, con la quale si era qualificato anche in Germania come il migliore studioso di questi problemi. Dopo tre anni da questa pubblicazione L. sente il bisogno di dare un'esposizione succinta, che è appunto gli "Studi". Qui l'ordine deduttivo viene mantenuto per tutto quello che segue dal postulato delle parallele, ma prima L. curiosamente compendia la geometria assoluta, che gli servirà in seguito, con 16 proposizioni: troppo poche per dare una minima descrizione della geometria assoluta, troppe per dare i postulati che precedono quello delle parallele. E di fatti, come vedremo, alcune proposizioni sono dei veri postulati, altre sono dei teoremi dimostrabili dalle altre proposizioni. Come mai questo pressapochismo logico? Evidentemente L. qui non ha seguito un criterio strettamente logico, ma un altro criterio; forse, proprio dopo aver compiuto la sua opera accademicamente inappuntabile, L. ha voluto rivelare il metodo semplice che aveva seguito lui, e che chiunque altro poteva seguire, per afferrare rapidamente i contenuti della geometria non euclidea. Che l'opera si chiami "Studi" e non "Principi" o "Teoria" o "Introduzione alla Teoria" sta a rafforzare l'idea che L. qui non abbia preteso affatto di trattare la geometria assiomaticamente, benché dalla 16° proposizione in poi egli proceda per dimostrazioni rigorose.

Se la interpretazione mediante la imprecisione delle misure risulterà valida allora si dovrà concludere che la imprecisione delle misure non implica affatto la non matematica; il che già diversi avevano sostenuto prima di L. (ad es. L. Carnot che equiparava tutti i metodi di analisi infinitesimale sostenendo che in sostanza essi erano riducibili tutti ad una analisi approssimata). Comunque Lobacevskij sarebbe certamente il primo (e per lungo tempo l'unico; nel 1908 Duhem sostenne che si poteva dare una matematica della approssimazione e solo negli ultimi decenni si sono introdotti fuzzy sets e tolerance geometries) a riuscire a ragionare assiomaticamente su concetti imprecisi, cioè disgiungendo la rigorosità dalla idealizzazione della assoluta precisione dei concetti.

La nostra analisi in un primo tempo sarà circoscritta alla sola deducibilità delle prime 15 proposizioni (che L.premette e non dimostra "per non affaticare il lettore con molte proposizioni") e poi vedremo se gli assiomi restanti possono essere intesi col fatto che un angolo, un segmento ecc. hanno misure approssimate.

2. Diamo innanzitutto l'elenco delle dette 15 proposizioni: "1) una linea retta si sovrappone a se stessa in tutte e le sue posizioni. Intendo dire, se si fa girare intorno a due punti della retta la superficie che la contiene, la linea non cambia di posto. 2) Due rette non si possono intersecare in due punti; 3) Una linea retta sufficientemente prolungata nei due sensi, potrà superare ogni limite, e dividerà così in due parti ogni porzione di piano limitata. 4) Due linee rette perpendicolari ad una terza, e situata nello stesso piano della terza, non possono intersecarsi, anche se le si prolunghi molto. 5) Una linea retta intersecherà sempre un'altra retta, allorquando avrà dei punti situati da una parte e dall'altra di quella retta. 6) Due angoli opposti al vertice e aventi i loro lati situati gli uni sui prolungamento degli altri sono uguali. Questa proposizione è vera anche per gli angoli diedri. 7) Due linee rette non possono intersecarsi, allorquando sono intersecate da una terza sotto angoli uguali. 8) In un triangolo a lati rettilinei, a 2 lati uguali si oppongono angoli uguali e viceversa. 9) In un triangolo a lati rettilinei, al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore. In un triangolo rettangolo, l'ipotenusa è maggiore di ciascuno dei lati che contengono l'angolo retto, e i 2 angoli adiacenti all'ipotenusa sono acuti, 10) Due triangoli a lati rettilinei sono uguali allorquando hanno un lato uguale e 2 angoli uguali, oppure 2 lati uguali e l'angolo compreso uguale, oppure 2 lati uguali e l'angolo opposto al maggiore di questi lati uguali, oppure infine i 3 lati uguali. 11) Una retta perpendicolare a 2 altre rette situate in un piano che non la contengono è perpendicolare a tutte le altre rette passanti per il suo piede in questo piano. 12) L'intersezione di una sfera con un piano è un cerchio. 13) Una retta perpendicolare all'intersezione

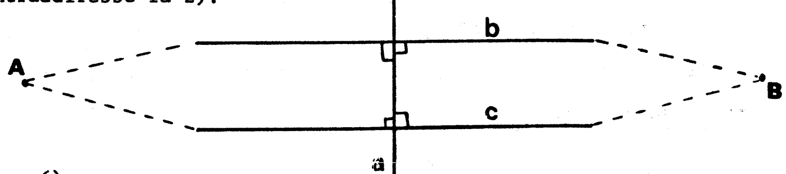
di 2 piani perpendicolari tra loro, e situata in uno di questi piani, è perpendicolare all'altro. 14) In un triangolo sferico, a dei lati uguali sono opposti degli angoli uguali, e viceversa. 15) Due triangoli sferici sono uguali allorquando hanno 2 lati uguali comprendenti un angolo uguale, o meglio un lato uguale adiacente a 2 angoli uguali".

3. Si noti che Lobacevskij non lo dice ma presuppone che si possano effettuare delle misure di lunghezza e di angolo, e stabilire l'uguaglianza (approssimata) tra i risultati (ipotesi che uno studente può considerare valide senza difficoltà).

Facciamo ora vedere che le proposizioni 4-6-7-9 e in un certo senso la 8 sono dei teoremi, dando di esse una dimostrazione.

Prop. 4)

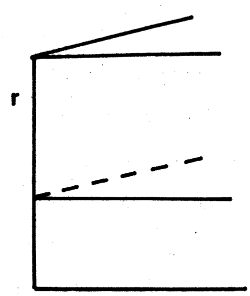
Siano b e c due rette entrambe perpendicolari ad a. Se esse, per assurdo, si incontrassero in A, si dovrebbero incontrare anche in B, perché esse formano da tutti e due i lati rispetto alla trasversale le medesime condizioni (angoli retti). Ma allora le rette si incontrerebbero in due punti e ciò contraddirebbe la 2).

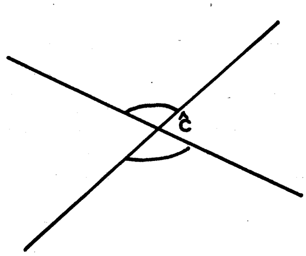


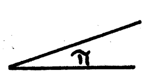
Prop. 6)

L'uguaglianza degli angoli opposti al vertice a e b si acquisisce facilmente per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, essendo entrambi supplementari di ĉ.

Nel caso dell'angolo diedro la situazione non muta, perché, conducendo il piano π perpendicolare allo spigolo r dell'angolo dietro, ricadiamo sempre nel caso piano.



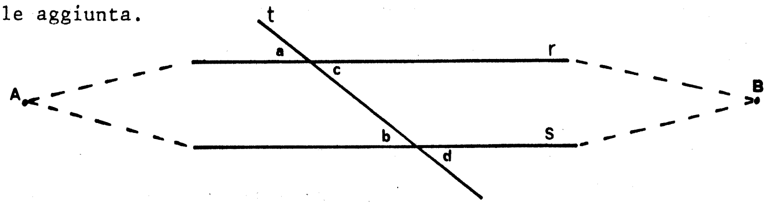




Prop. 7)

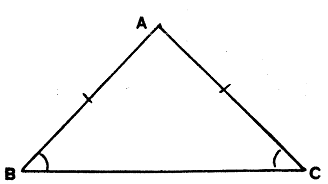
Siano date due rette r ed s intersecate sotto angoli uguali, $\hat{a}$ e $\hat{b}$, dalla retta t. Se r ed s si incontrassero da un lato della trasversale in A,essi si incontrerebbero anche dall'altro in B, perché anche dall'altro lato gli angoli $\hat{c}$ e $\hat{d}$ sono uguali essendo supplementari di angoli uguali.

Ma ciò è assurdo perché contro la 2). Si noti che la 7) è indipendente dalla 4). Se cerchiamo di tracciare una trasversale perpendicolare alle due rette ne possiamo ottenere la perpendicolarità con r ma non è detto che allora lo sia anche con s; e viceversa. Quindi la 7) è una reale aggiunta.



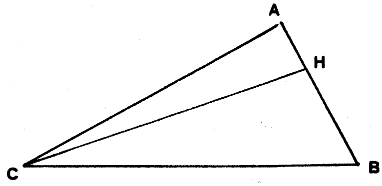
Prop. 8)

Riportiamo innanzitutto la dimostrazione dei NPG: "Dato un triangolo isoscele ABC, dove A è il vertice, sovrapponiamolo a sè stesso ribaltandolo, in modo che il lato AC vada in AB e, di conseguenza, AB in AC. L'uguaglianza dei lati AB, AC fa si che i punti B,C si scambino di posto, e che la linea BC ricopra se stessa.



Ciò significa che $\hat{B} = \hat{C}$. Se noi supponiamo poi che $\hat{B} = \hat{C}$ allora ancora una volta il triangolo ABC ricopre se stesso dopo un ribaltamento, se riflettiamo sul fatto che scambiando B con C e C con B il lato CA deve andare in BA, così come BA in CA, e che, di conseguenza, i due lati si incontrano di nuovo nel medesimo punto A; ciò significa che AB = AC". La dimostrazione di L. fa ricorso all'operazione di ribaltamento, che però i risultati precedenti non ci assicurano che sia valida. D'altra parte si noti che ora dobbiamo legare per la prima volta l'uguaglianza di angoli con l'uguaglianza di segmenti (e non coll'incidenza, o non, di rette). E' una novità che, ad un primo esame, non può che essere postulata, perché indipendente dalle precedenti proposizioni. Tenendo conto dell'imprecisione delle misure, notiamo che questa imprecisione permette di stabilire l'uguaglianza di angoli o di segmenti, e non impedisce di legare l'uguaglianza dei primi ai secondi in un caso particolare, quando appartengono ad uno stesso triangolo (si noti che la zona di spazio è finita).

Tuttavia ove si ponga come assioma la prima parte della proposizione (cioè l'uguaglianza di due lati implica l'uguaglianza dei due angoli opposti) si riesce a dare una dimostrazione del fatto che in un triangolo a lati rettilinei, ad angoli uguali si oppongono lati uguali. Dato, infatti, il triangolo ABC, sia $\hat{C} = \hat{B}$; facciamo vedere che AB = BC.

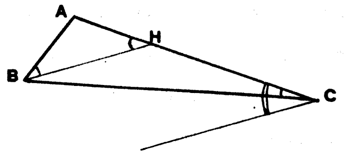


Se AB fosse maggiore di AC, esisterebbe H tale che HB = HC. Allora per l'assioma premesso (cioè in virtù della prima parte della 8) $H\hat{C}B = H\hat{B}C$; il che è assurdo perché HCB è ovviamente minore di ACB, ovvero di ABC. Se AB fosse minore di AC, esisterebbe nel prolungamento di AB un punto H tale che HB = HC. Si avrebbe in tal caso $H\hat{C}B = H\hat{B}C$, il che non è possibile perché $H\hat{C}B$ è maggiore di $A\hat{C}B$ e quindi di $A\hat{B}C$. Pertanto AB, non potendo essere nè maggiore nè minore di AC, sarà necessariamente uguale ad AC.

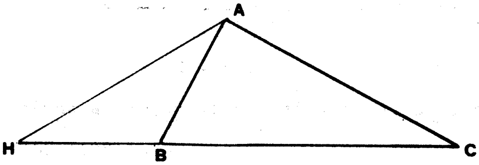
Prop. 9)

Nei NPG L. dimostra questa proposizione facendo uso del I teorema dell'angolo esterno, di cui qui non disponiamo perché ancora ci mancano i criteri di uguaglianza dei triangoli (prop.10). E' interessante che qui L. segua un percorso diverso da quello dei NPG. Si noti che le proposizioni 8, 9,10 formano una sequenza di crescente contenuto concettuale.

Sia dato dunque un triangolo ABC con AC>AB; vogliamo dimostrare che $A\hat{B}C > B\hat{C}A$. Stacchiamo su AC un segmento AH pari ad AB. Per la proposizione 8) gli angoli $A\hat{B}H$ e $B\hat{H}A$ sono uguali. Ora tracciamo per C una retta che con HC forma un angolo pari a $B\hat{H}A$. Per la proposizione 7) le due rette non si incontreranno. Ma allora la retta CB che invece incontra BH deve formare con HC un angolo inferiore a $B\hat{H}A$. D'altra parte ABC è certamente superiore ad $A\hat{B}H$ e quindi a $B\hat{H}A$. Ne segue che $A\hat{B}C>A\hat{C}B$.



Sia dato ora il triangolo BAC retto in A. Facciamo vedere che BC è il lato maggiore. Se BC fosse uguale a BA, l'angolo $\hat{C}$ sarebbe retto per la 8 e allora, per la 4, BC ed AB non si dovrebbero incontrare. Se, poi, BC<AB, prolunghiamo BC fino ad H tale che AB = BH. Dunque $B\hat{A}H$ sarebbe uguale a $B\hat{H}A$ per la 8. Ma in tal caso $B\hat{A}H$ sarebbe ovviamente ottuso e ciò è assurdo per la 4. Infatti se due rette perpendicolari ad una terza non si incontrano, a maggior ragione due rette che formano angoli ottusi con una terza non si incontreranno dalla parte degli angoli ottusi. Pertanto BC è certamente maggiore di BA. Analogamente si dimostra che BC è maggiore di CA.



Infine, di due angoli adiacenti all'ipotenusa sono acuti perché, per la prima parte della proposizione 9, l'angolo,retto è l'angolo maggiore in quanto opposto all'ipotenusa, che è il lato maggiore.

4. A questo punto vediamo come le rimanenti proposizioni, che non sono deducibili e cioè risultano dei veri e propri assiomi, sono suscettibili di essere interpretati alla luce della imprecisione delle misure.

Prop. 1

La prima fase è oscura e non si capisce cosa debba esprimere secondo L., nemmeno se uno cerca di risalire al suo significato dalle proposizioni successive. La seconda frase ha un senso preciso: una rotazione della retta attorno a due punti qualsiasi non ne cambia la posizione nei punti differenti da quelli fissati. In altri termini, per rotazione (e per slittamento) tutti i punti della retta si sovrappongono a se stessi (o si sostituiscono ad altri), anche se questi punti sono misurati in maniera imprecisa. (Si potrebbe sostituire la prima proposizione con la seguente: "per due punti passa una ed una sola retta". Allora la precedente proposizione sarebbe una conseguenza. Ma la nuova affermazione è idealistica, non è compatibile con le misure approssimate: siccome i punti sono imprecisi, allora non sappiamo bene se ci passano una retta o più rette).

Prop. 2

(Sarebbe molto interessante conoscere le parole originali di L. per esprimere "due punti" nell'affermazione qui riportata). Comunque per intendere questa proposizione con le misure imprecise bisogna mettersi nell'ipotesi di sapere che i due punti sono distinti. Infatti sia a una retta; su a prendiamo due punti che sappiamo essere distinti, P e B; allora per quanto imprecisa sia la misura della retta b, questa interseca la retta a solo in un punto, o P, o B; cioè la sua imprecisione non può superare la distanza tra P e B che sappiamo essere finita, cioè superiore all'imprecisione con cui misuriamo i punti.

Se invece non sappiamo se i due punti sono distinti, cioè se hanno un intervallo in comune, allora non possiamo decidere in generale se una retta incidente passa per uno o per l'altro punto. (Si noti che se valesse la proposizione idealistica detta sopra, anche la 2) ne sarebbe conseguenza. Cioè L. deve porre due affermazioni, valide con punti approssimati, invece di una affermazione idealistica).

Prop. 3)

Con questa proposizione osserviamo ancora una volta come L. tratta solo parti finite di rette e di piani, considerando l'infinità delle rette in modo costruttivo, cioè come la possibilità di prolungare un segmento oltre un limite prefissato, che qui è il limite della porzione di piano. L'affermazione aggiunge poi che la retta, per quanto il suo prolungamento possa essere diretto in modo impreciso a causa della imprecisione delle misure, però non si attorciglierà mai su sé stessa e andrà a tagliare una linea limitatrice del piano, comunque essa sia distante.

Prop. 5)

L'affermazione è chiara se prendiamo due punti che stanno di qua e di là rispetto ad una retta a, e che hanno da essa distanza imprecisa ma sempre maggiore di zero.

Allora per continuità la linea b che li congiunge non può stare da una parte sola delle rette. E la continuità non viene unificata dalla imprecisione delle misure. (Si noti che si dice che l'intersezione c'è, ma L. non dice che la sappiamo determinare; questo problema in matematica costruttiva è indecidibile).

Prop. 10)

Anche qui l'aggiunta della "nuvoletta di imprecisione" non cambia nulla della verità euclidea. Non sembra possibile dedurre questa proposizione dalle 8 e 9 perché qui si tratta di comparare due triangoli distinti, e separati da zone qualsiasi di spazio. Non è accettabile l'uso del trasporto perché significherebbe assumere corpi rigidi invarianti alle traslazioni, il che non è assicurato nelle geometrie non euclidee; e in questo L. erra nei NPG quando "dimostra" questa proposizione. L'unica loro giustificazione possibile è quella delle misure: se i nostri processi di misura ci danno dei valori sul primo triangolo che sono uguali ai corrispondenti sul secondo (secondo l'affermazione 10) allora ogni altra misura è uguale alla corrispondente. Come si vede la interpretazione delle misure è l'unica che può giustificare la 10) e che segue in maniera molto aderente la progressione concettuale delle proposizioni 8), 9, 10).

Trascurando le proposizioni successive, perché relative allo spazio, si nota allora che di 10 proposizioni alcune sono teoremi, rispetto alle precedenti assunte come ipotesi. A queste ultime si può aggiungere la proposizione 16) (parallele) come ulteriore ipotesi per formare l'insieme assiomatico della geometria lobacevskiana del piano. Tale proposizione 16 non si ottiene con una semplice sostituzione dell'assioma delle parallele di Euclide (come molti autori ci hanno trasmesso) ma, ancora una volta, ragionando al finito, dove per un punto esterno ad una retta passano infinite rette ché non intersecano la retta data e da Lobacevskij chiama iperparallele. Saranno, invece, definite parallele le due rette che separano le rette che intersecano la retta data da quella che non la intersecano.

Questa sintesi ridottissima è un risultato notevole a cui è giunto L. Inoltre si tenga conto che il percorso mentale di queste proposizioni è differente da quello dei NPG, quindi è il frutto di un ripensamento non banale a tre anni dalla stesura dei NPG.

NOTE

(1) N.I. Lobacevskij, Nuovi principi della geometria, con saggio introduttivo di L. Lombardo Radice, 1978, Universale scientifica Boringhieri, Torino; in seguito NPG.

(2) N.I. Lobacevskij, Etudes géométriques sur la théorie des paralléles, Paris, 1866.

Nicolò Pintacuda
Dipartimento di Matematica di Pavia

Algoritmi e insegnamento della matematica

1. Premessa

Se sarà confermata l'attuale propensione ad inserire l'informatica nella Scuola Secondaria entro l'ambito dell'insegnamento della matematica, spetterà a noi il duplice compito di recepire nel curriculum di matematica talune delle idee fondamentali della "Computer Science", e (soprattutto) di orientare in senso marcatamente algoritmico quei capitoli della matematica che vi si prestano o addirittura reclamano già, per autonome esigenze culturali, una simile accentuazione.

Occorrerà far questo evitando da un lato di indulgere eccessivamente agli aspetti tecnici, per quanto interessanti, dell'impiego del Computer(hardware, sistemi operativi, files, linguaggi di programmazione) e dall'altro contrastando nettamente la tendenza, non infrequente tra i matematici, a concepire riduttivamente l'elaboratore come puro strumento di valutazione di espressioni analitiche già pronte all'uso, o al più di calcolo numerico approssimato e a sottovalutarne così le potenzialità generali di elaborazione.

Mi propongo perciò di sottolineare alcuni fra gli aspetti che, in considerazione dell'orientamento culturale oggi prevalente nel mondo della matematica scolastica, corrono il pericolo di essere trascurati o di ricevere comunque un'attenzione inadeguata:

a) Struttura e importanza degli algoritmi;

b) computazione aritmetica e algebrica;

c) algoritmi non numerici.

Cercherò di toccare questi punti muovendo da esempi concreti.

2. Algoritmi e loro struttura

Non è raro che sia riconosciuta l'importanza centrale di disporre di un algoritmo efficiente per la soluzione di un determinato problema; quanto meno, il ruolo decisivo della struttura dell'algoritmo è sovente oscurato da molti fattori secondari.

Può servire come illustrazione didattica l'esempio abusato della ricerca di un nome in un elenco: è banale osservare che se si cerca scorrendo un nome dopo l'altro da cima a fondo, occorrerà leggere mediamente metà dell'elenco per trovare il nome cercato, e si renderà addirittura necessario leggerlo tutto (inutilmente) qualora il nome sia assente dall'elenco.

D'altra parte, se l'elenco è redatto in ordine alfabetico, è conosciuto un diverso ben più redditizio procedimento di ricerca: si legge il nome al centro dell'elenco; se non è quello voluto si elimina la metà dello elenco che sicuramente non può contenere il nome cercato e si riprende a lavorare sulla metà superstite riapplicando la stessa metodologia (ricerca <u>per bisezione</u>).

Dimezzando ad ogni passo il campo di ricerca, il metodo permette di concluderla in un numero di operazioni proporzionale a lgn, se l'elenco ha n voci: ha, come suol dirsi, complessità O(lgn) (dell'ordine di lg n), laddove il metodo sequenziale aveva complessità O(n).

L'esempio, classico e del tutto elementare, è di certo convincente sul piano didattico: mette clamorosamente in evidenza, in una situazione sicuramente familiare agli allievi, come il procedimento di bisezione risulti intrinsecamente migliore in virtù della sua <u>struttura</u> logica, che non ha niente a vedere con la velocità e le prestazioni della macchina eventualmente usata per eseguire il lavoro né con la qualità e la raffinatezza del linguaggio di programmazione impiegato per formulare l'algoritmo; familiarizza poi con l'idea di complessità computazionale.

L'esempio si presta inoltre assai bene a far risaltare l'importanza delle <u>strutture di dati</u> (aspetto quasi sconosciuto ai matematici) e introdurre ai problemi della loro gestione: l'algoritmo di bisezione poggia in maniera determinante sulla struttura di elenco <u>ordinato</u>; l'ordine (alfabetico) però, eccezionalmente vantaggioso per la ricerca, è di drammatica scomodità ad esempio per le operazioni di aggiornamento di un elenco (aggiunte e cancellazioni).

Un secondo aspetto didatticamente rilevante merita di essere sottolineato: come avvenga che si possa migliorare inaspettatamente un algoritmo in condizioni apparentemente "irriducibili", come mostra l'esempio seguente.

Se vogliamo determinare il massimo e il minimo in una fila di n numeri dati; è noto che si può trovare il massimo operando n-1 confronti tra i dati (né si può far meglio, com'è facile comprendere); poiché ai fini della ricerca del minimo l'elemento massimo può essere tranquillamente ignorato, occorreranno altri n-2 confronti per calcolare il minimo, e il compito assegnato sarà in definitiva completamente eseguito con 2n-3 confronti. E' difficile in questa situazione scorgere prospettive di miglioramento.

Facciamo tuttavia due osservazioni all'apparenza futili (con $a \wedge b$ indicando il minimo e con $a \vee b$ il massimo dei numeri a,b):

1) Se A e B sono due insiemi numerici,

$\max(A \cup B) = \max(A) \vee \max(B)$

$\min(A \cup B) = \min(A) \wedge \min(B)$;

2) $x = x \vee y$ implica $y = x \wedge y$.

Tanto basta a progettare il calcolo nel modo seguente:

spezzare la fila originaria A di n elementi in due sottoinsiemi disgiunti A_1 e A_2, di n/2 elementi ciascuno (non è restrittivo supporre per comodità che n sia potenza di 2);

calcolare

$$
\begin{array}{ll}
M_i := \max(A_i) & i = 1,2 ; \\
m_i := \min(A_i) & i = 1,2 ; \\
M := M_1 \vee M_2 & m := m_1 \wedge m_2 .
\end{array}
$$

Il procedimento riconduce il calcolo di massimo e minimo agli analoghi calcoli su insiemi più piccoli; a sua volta il metodo può riapplicarsi a ciascuna delle due metà ricorsivamente, senza dimenticare che non appena si giunge ad una fila di due elementi la ricerca del massimo tra essi fornisce automaticamente (con un solo confronto) anche l'indicazione del minimo, grazie all'osservazione 2).

Se dunque $t(n)$ è il numero di confronti richiesti, la struttura del metodo progettato più sopra comporta la relazione

$$t(n) = 2t(n/2)+2$$

che facilmente si risolve con la condizione $t(2)=1$ e dà $t(n) = 3n/2 - 2$, fornendo a sorpresa una complessità migliore di $2n-3$ (se pure dello stesso ordine $O(n)$).

E' una pregevole esemplificazione del metodo che gli informatici pittorescamente chiamano "divise et impera"; al tempo stesso l'esempio illustra il fenomeno frequente per il quale l'esecuzione contestuale di più compiti (cercare il massimo e il minimo) consente un risparmio nella complessità totale, giacché l'espletamento di uno fornisce informazioni utili agli altri (il fatto è qui vistoso in una lista di due elementi, dove la determinazione del massimo dà un'informazione completa anche sul minimo).

Mi sembra infine significativo richiamare che la soluzione algoritmica di un problema comporta di regola l'adozione di un punto di vista "dinamico" determinato dalla necessità di opportuna manipolazione delle variabili in gioco: punto di vista non sempre naturale, che urta talvolta contro una vera e propria "resistenza psicologica" anche da parte di persone esperte in matematica ma poco avvezze a procedimenti computazionali.

Esempio: calcolare r^{-1} mod m (r dispari, m potenza di 2, $m>1$).

Qui si vuole un intero x con le proprietà $rx = qm+1$, $0\leq x<m$; è dunque ovvio trattare come variabili x e q; è d'altra parte banale risolvere il problema quando $m=2$, che allora deve essere di necessità $x=1$ (e

q = (r-1)/2).

Una soluzione si costruisce dunque bene introducendo una variabile d inizialmente posta uguale a 2 e cercando di spingere d a valere m al termine di un ciclo nel quale venga incrementata d mantenendo invarianti le relazioni {rx = qd+1, 0≤x<d}; si scriverà

```
x,d,q: =  1,2,(r-1)/2;
while d<m do begin
        if q dispari then x,q : = x+d, q+r;
        q,d : = q/2, 2d;
        end;
{x=r^1 mod m}
```

Il programma risolve in sostanza il problema dapprima in Z_2, poi in Z_4, Z_8,... e finalmente in Z_m; la sua scrittura semplice ma non banale, è divenuta immediata non appena si è scelto di trattare come variabile il dato m (l'ultima cosa, in verità, che verrebbe spontaneamente in mente di trattare come tale).

Concludendo, appare quanto mai opportuno nell'insegnamento (anche volendo astenersi dall'esporre una teoria vera e propria degli algoritmi) dare giusta attenzione ad alcuni punti importanti, e in specie:

1) accennare a un esame formale dell'algoritmo e della sua costruzione;
2) affrontare in modo chiaro le questioni di terminazione finita e di esattezza del risultato prodotto;
3) mettere in evidenza le relazioni invarianti nei cicli e le condizioni che ne garantiscono la terminazione;
4) illustrare seppure in modo elementare certe strutture dei dati e della morfologia degli algoritmi (ad es. la ricorsività);
5) suscitare attenzione per le stime di efficienza (tanto in spazio che in tempo) e per la valutazione della complessità;
6) assecondare una costruzione "modulare" degli algoritmi, che renda trasparente l'interazione tra le parti.

Sarà fondamentale insistere sulla chiarezza logica di formulazione dell'algoritmo, ricorrendo all'uopo ad un linguaggio possibilmente indipendente da quello della programmazione sulla macchina; sarà opportuno in tal senso mettere gli allievi a contatto con gli elementi introduttivi di più linguaggi di programmazione (cenni di PASCAL insieme a BASIC, e simili).

3. Computazione aritmetica e algebra

Se fra i docenti di matematica comincia a essere familiare l'impiego del computer per il calcolo numerico approssimato (soluzione di sistemi lineari, zeri di funzioni, integrali definiti), relativamente meno conosciuto è ancora quello nella computazione esatta (interi, polinomi, oggetti algebrici); mi pare il caso di spendere due parole su questo aspetto, collegato d'altra parte a sviluppi recenti importantissimi dell'uso matematico dell'elaboratore, che hanno condotto alla diffusione di sistemi di software per la "manipolazione simbolica" e allo straordinario sviluppo di vari rami della cosiddetta computer algebra.

Esiste dopotutto, da qualche tempo, una precisa tendenza a rivalutare l'insegnamento nella secondaria dell'aritmetica; poiché verte su oggetti matematici semplici e ben conosciuti, essa offre la gradita opportunità di avviare gli allievi ad un uso significativo del computer fin dalle prime classi, senza dover attendere l'introduzione di strumenti matematici più complessi (se non addirittura degli elementi di calcolo infinitesimale).

Naturali candidati per un tale insegnamento sono gli argomenti classici dell'aritmetica: divisibilità, primalità, decomposizione in fattori primi (proprietà tutt'altro che banali, utili per mettere alla prova correttezza ed efficienza dei programmi che si progettano); il Crivello di Eratostene nella sua forma classica (che è istruttivo mettere a raffronto con criteri di primalità basati sulla divisione).

Di grande interesse risulterà lavorare con le classi di resti e la relativa aritmetica modulare, indagandone i ricchi risvolti di carattere combinatorio, utili ad esempio a costruire quadrati latini (di particolare rilevanza nella pianificazione di esperimenti statistici) come nel compito più frivolo di progettare il calendario degli incontro in un torneo (campionato di calcio, poniamo).

Può essere istruttivo verificare la validità del (piccolo) teorema di Fermat (a^{p-1}=1 mod p se p è un primo che non divide a), cimentandosi nel calcolo esatto di potenze modulari con grandi esponenti e nello studio degli algoritmi veloci di elevamento a potenza; non va ignorata la sorprendente tendenza recente ad un crescente uso applicativo di nozioni aritmetiche e algebriche astratte, ad esempio nella teoria dei codici e nella crittografia (v. Childs, [1]).

Ma soprattutto andrà concentrata l'attenzione sui veri e propri pilastri della computazione aritmetica e algebrica: algoritmo di Euclide e algoritmo cinese dei resti.

3.1. Algoritmo di Euclide

E' superfluo ricordare che l'algoritmo calcola il mcd di due interi m,n (indicato con (m,n)), basando sulle semplici due osservazioni

$(a,o) = a$ per $a>0$

$(a,b) = (b, a \bmod b)$ per $b>0$

(con a div b indicheremo com'è abituale il quoziente della divisione intera di a per b, con a mod b il resto).

Di qui l'idea di trattare m,n come variabili e scrivere un ciclo che utilizzi la seconda osservazione per condurre una delle variabili a zero, riportando il problema al calcolo di (a,0); il programma è notoriamente il seguente

```
{algoritmo di Euclide}
 a,b: = m,n;
 while b≠0 do begin                     relaz. invar.
         q: = a div b;                 {(a,b) = (m,n)}
         a,b: = b,a-q*b;
         end;
 g: = a;
{g = mcd(m,n)}
```

(a fianco del ciclo è scritta la relazione invariante, al termine la relazione finale che ne risulta all'uscita dal ciclo).

Nella sua geniale semplicità, l'algoritmo è alla base di sviluppi di eccezionale importanza: è sufficiente inserire una seconda coppia di variabili u,v e manipolarle esattamente come a,b (ma inizializzandole diversamente) per ottenere il seguente

```
{algoritmo di Euclide esteso}
a,b : = m,n;
4,v : = 1,0;                                    relaz. invarianti
while b ≠ 0 do begin
        q:=a div b;                             {(a,b) = (m,n) ;
        a,b:=b,a-q*b;                            a = um mod n;
        u,v:=v,u-q*v;                            b = vm mod n }
        end;
g: = a;
h: = u mod n;
{g = mcd(m,n), g = um mod n,  h = g/m mod n}
```

Si controlla facilmente la validità delle ulteriori relazioni invarianti a = um mod n b = v mod n, e dunque della relazione finale g = um mod n; perciò l'algoritmo esegue la divisione modulare g/m mod n, e più in generale permette di calcolare r/m mod n = r/g * g/m mod n tutte le volte che g = (m,n) divide r; emerge in particolare che si può sempre eseguire la divisione mod p se p è primo, e dunque che Zp è in tal caso un corpo.

Poiché è facile dimostrare che l'algoritmo ha complessità minore di O(lgN), se N = max (m,n), e che tutti i risultati intermedi prodotti dal calcolo non superano N in valore assoluto, esso è assai efficiente e agevolmente eseguibile in precisione aritmetica.

L'algoritmo di Euclide esteso potrà essere strumento essenziale per familiarizzare gli allievi con le operazioni nei corpi finiti, divisione compresa; le operazioni modulari sono d'altronde tutt'altro che sprovviste di portata intuitiva e di legame con problemi concreti. Un esempio lo confermerà, esaltando il parallelismo intuitivo tra divisione ordinaria e divisione modulare:

a) quante brocche da 8 litri occorre riempire per mescere 24 litri? risposta: 24:8 = 3 (divisione ordinaria);

b) quante per mescerne 31, se si dispone anche di brocche da 5 litri? risposta: 31:8 a meno di multipli di 5 (che si prestano alle eventuali correzioni additive o sottrattive); dunque 31:8 mod 5 = 1:3 mod 5 = 2 (divisione modulare); si ha la soluzione 31 = 2*8 + 3*5 (donde le infinite possibili soluzioni 31 = (2+5K)*8 + (3-8K)*5).

Del pari è spontaneo coinvolgere l'aritmetica modulare in svariati problemi tratti dalla vita quotidiana, soprattutto legati a fenomeni periodici.

3.2. Algoritmo cinese dei resti

Dati due moduli m,n primi tra loro, l'algoritmo "ricostruisce" il numero x, di cui siano noti i residui

$$x \bmod m = r \quad , \quad x \bmod n = s$$

nella forma $x = u + kmn$, calcolando

$u = r + ((s-r)*m^{-1})_n * m$ (l'indice n in basso denota operazioni mod n).

(Tipico esercizio di applicazione: un pianeta ha due satelliti con periodi di rivoluzione m,n, e sono trascorsi r,s giorni dai rispettivi passaggi allo Zenith; quanto manca al prossimo plenilunio simultaneo?)

E' ovvia la generalizzazione al caso di h moduli due a due coprimi, pur di iterare h-1 volte il procedimento:

```
{algoritmo cinese dei resti}

M: = 1 ; u: = r_o;
for k: = 1  to  h-1  do begin
        M: = M*m_(k-1);
        c: = M^(-1) mod m_k;
        s: = (r_k-u mod m_k)*c  mod m_k
        u: = u+s*M;          <---
        end.
```

Il programma trova u per calcolare nella forma

$x = u + k \prod_{j=o}^{h-1} m_j$ la soluzione delle congruenze $x = r_i \bmod m_i$ $(i = 0,1,\dots, h-1)$; l'inverso $M^{-1} \bmod m_k$ si determinerà mediante l'algoritmo di Euclide esteso.

Si noti che i valori delle variabili M,c possono essere precalcolati su ogni k una volta assegnato il sistema di moduli, limitandosi di volta in volta per ogni assegnazione dei residui r_i al computo di s e alla "ricucitura" espressa dalla linea indicata con la freccia.

3.3. Sviluppi algebrici

Algoritmo di Euclide (esteso) e algoritmo cinese dei resti poggiano sulle proprietà delle operazioni div e mod, cioè sull'esistenza della divisione con resto: essi funzionano dunque senza alcuna modifica in qualsiasi anello euclideo; in particolare (cosa molto importante !) in $F[x]$, anello dei polinomi sul corpo F (in una indeterminata).

Ne discendono possibilità computazionali facili e anzi interessanti, fra le quali:

A. Agevole calcolo del mcd di polinomi, e relative operazioni di semplificazione "formale" di funzioni razionali in cui numeratore e denominatore posseggano fattori (polinomiali) in comune;

B. Interpolazione polinomiale: poiché $p(x) \bmod (x-x_o) = p(x_o)$, la determinazione di un polinomo p che assume valori assegnati in punti assegnati (interpolazione) si riconduce ad un problema cinese dei resti con moduli $m_i = (x-x_i)$ e residui noti; si ottiene l'interpolazione di Newton;

C. Calcolo formale ("esatto") di radicali come aritmetica modulare di polinomi: per trattare un quoziente del tipo $(5\sqrt[3]{7} + 2) / (\sqrt[3]{7} + 3)$ basterà porre un'indeterminata in luogo di $\sqrt[3]{7}$, e calcolare $(5x + 2) / (x + 3)$ mod $(x^3 -7)$ (così da identificare x^3 con 7). Posto $r = 5x+2$, $m = x + 3$, $n = x^3 -7$, basterà applicare l'algoritmo di Euclide esteso e calcolare r: m mod n; si otterrà $(53 + 39x - 13x^2) / 34$, e dunque la "razionalizzazione" dei radicali

$$(5\sqrt[3]{7} + 2) / (\sqrt[3]{7} + 3) = (53 + 39\sqrt[3]{7} - 13\sqrt[3]{49}) / 34.$$

C'è da credere alla possibilità di introdurre così, per via computazionale, un percorso didattico fruttuoso in direzione di nozioni algebriche relativamente avanzate (estensioni algebriche di corpi, ad esempio); ma si può anche far comprendere come sia possibile il trattamento automatico di determinate espressioni in forma simbolica, come è il caso delle <u>somme formali</u>.

Si voglia calcolare $p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^e$ per un esponente e intero positivo, con l'obiettivo di ottenere la dipendenza da n e non il valore numerico per valori di n assegnati; una volta riconosciuto che p(n) è un polinomio in n di grado e+1, basterà scrivere un programma che calcola p(n) per c+2 valori distinti di n e applica poi ai risultati l'interpolazione di Newton per avere servito bell'e pronto il polinomio p(n) (sono sufficienti un paio di dozzine di linee di basic in un comune home computer!). Si tocca così con mano, su un caso terribilmente minuscolo, una delle possibilità che sfruttano i grossi sistemi di software dedicati alla manipolazione simbolica, soluzione simbolica di equazioni differenziali, somme formali, gestione di polinomi e funzioni razionali, trattamento di gruppi, ideali e manipolazione di strutture astratte.

Sarà il caso di menzionare tra essi MACSYMA, REDUCE, MAPLE, SCRATCHPAD e il piccolo MUMATH (cui basta un personal computer con 128 K RAM come sistema ospitante).

E perché tacere dei metodi di calcolo per immagini omomorfe, che così profondamente hanno contribuito a trasformare gli algoritmi classici dell'algebra: se si osserva che il calcolo modulare (con modulo primo) è sempre esatto e privo di overflow e consente in ogni caso la divisione, è spontaneo concepire l'idea di effettuare un grosso calcolo di interi con la seguente tecnica:

a) assumere un sufficiente numero h di primi p_o, $p_1, \dots, p_{h-1}$;
b) svolgere il calcolo modulo p_i, eseguendolo dunque h volte (in Zp_o, Zp_1, ..., Zp_{h-1} anziché nell'originario ambiente Z);
c) riconoscere che i risultati così ottenuti sono i residui mod p_i del vero risultato in Z, e ricostruire dunque quest'ultimo mediante l'algoritmo cinese dei resti, osservando che le uniche operazioni non modulari che coinvolgono numeri grandi sono quelle di ricucitura finale.

4. Algoritmi non numerici

Un congruo spazio nell'insegnamento dovrebbe essere riservato alla discussione di algoritmi non numerici, sia per l'interesse che questi di per sé presentano, sia per evitare di legare l'immagine del computer in maniera esclusiva alle elaborazioni matematiche e per contribuire a sfatare l'erronea concezione che nell'elaboratore vede una pura "macchina di calcolo numerico".

Il campo degli algoritmi non numerici è vastissimo, ma pochi esempi selezionati basteranno.

4.1. Ordinamento (Sorting)

L'argomento, di sicuro interesse pratico se si pensa che disporre in ordine alfabetico è operazione comune e frequentissima in qualsiasi gestione, è ricco di soluzioni variate, e offre preziosi spunti di riflessione sulle strutture di dati.

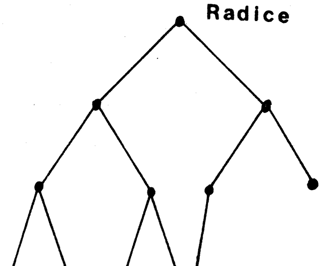
Converrà presentare agli allievi dapprima un algoritmo elementare, quale quello di ordinamento per selezione: basato sulla ripetuta ricerca di un minimo, esso costruisce poco alla volta le posizioni della fila che si desidera ordinata scegliendo per ogni successiva collocazione il più "piccolo" degli elementi non ancora sistemati (piccolo nel senso dell'ordine, generalmente potrà trattarsi di parole in ordine alfabetico).

Poiché un simile procedimento ha tipicamente complessità quadratica (occorrono in totale $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = O(n^2)$ confronti), si suggerirà la ricerca di un algoritmo più efficiente; bene può prestarsi, tra gli algoritmi "avanzati", il seguente.

Manteniamo i dati (parole) in una struttura ad albero binario (in inglese heap, mucchio) conservando costantemente un certo parziale ordinamento tra loro, in modo di assicurare che in ogni "nodo" dell'albero sia posto un dato minore o uguale di quelli collocati nei vertici che da quel nodo discendono e che diremo suoi "figli" (proprietà di heap).

Saremo in tal modo sicuri che il dato collocato nella radice dell'albero è il più piccolo di tutti (secondo l'ordine).

E' importante osservare che se il dato nella radice viene sostituito con un altro, sì da violare eventualmente la proprietà di heap, questa si ristabilisce facilmente con confronti e scambi ripetuti tra un nodo e uno dei suoi figli, ai vari livelli che si incontrano discendendo dalla radice lungo una ramificazione; un tale restauro ha complessità $O(\lg n)$, tanti sono i livelli dell'albero



Partendo dall'albero vuoto e aggiungendo un dato (nodo) alla volta siamo dunque in grado di costruire l'intero heap in tempo O(nlg); se ora, iterativamente, leggiamo il dato nella radice togliendolo poi per rimpiazzarlo con un altro dell'albero, con altre O(nlgn) operazioni scorreremo i dati uno dopo l'altro nel corretto ordine.

Abbiamo insomma facilmente costruito un algoritmo di ordinamento (detto HEAPSORT) di complessità totale O(nlgn) anziché $O(n^2)$, e prodotto un esempio brillante di influenza delle strutture di dati: è bastato, in un certo senso, "immaginare" una particolare disposizione dei dati e agire di conseguenza per riscuotere il dividendo di un significativo miglioramento nell'efficienza. Al tempo stesso l'algoritmo induce a sottolineare l'utilità di sfruttare la transitività dell'ordine (che il metodo di selezione lasciava deplorevolmente inutilizzata).

4.2. Mediana

Il problema di trovare, in una fila di dati, quello in posizione centrale rispetto all'ordinamento può certamente essere risolto mediante un completo ordinamento della fila (in tempo O(nlgn) dunque); ma è presumibile che esistano algoritmi specifici più efficienti, se si pensa che per stabilire che x è la mediana non serve ordinare gli elementi alla sua sinistra e alla sua destra, ma basta solo sapere che metà degli elementi precedono x e l'altra metà seguono.

Particolarmente adatto all'esposizione didattica si rivela il procedimento seguente:

1) si sceglie un valore x nella fila;
2) posti due puntatori agli estremi della fila, si muovono questi concentricamente a scandagliare i dati, scambiando tra loro tutti i valori "fuori posto" e continuando l'opera sino all'incontro dei puntatori.

In tal modo a sinistra di x resteranno solo dai più piccoli di x e a destra solo dati più grandi, sicché x sarà stato collocato al giusto posto che occuperebbe se la lista fosse stata completamente ordinata (notiamo che la procedura di scandaglio richiederà O(n) operazioni).

Se, al termine della procedura, x sarà capitato nella posizione centrale, esso sarà senz'altro la mediana cercata; altrimenti (in modo va gamente analogo al metodo di ricerca per bisezione) se x è risultato fuori centro si riprenderà a lavorare sul segmento interessato della fila (quello che contiene la posizione centrale) tra i due in cui è spezzata dalla collocazione di x, eseguendo nuovamente le operazioni 1) -2), fino a centrare esattamente la collocazione.

Poiché dopo ogni esecuzione della procedura 1)-2) il campo di lavoro viene mediamente dimezzato, la complessità media totale dei successivi scandagli assommerà a $n + n/2 + n/4 + \ldots + 1 = O(n)$, e si avrà un algoritmo lineare (imparentato con un celeberrimo algoritmo di ordinamento noto con l'altisonante nome di QUICKSORT).

4.3. Altri algoritmi non numerosi

Non va ovviamente tralasciata l'ampia messe di algoritmi che, se pure non numerici, sono tuttavia di stretta pertinenza matematica.

Tali sono i numerosi algoritmi relativi a problemi su grafi e reti (cammini minimi in un grafo, rete minima sostegno, flusso massimo e problemi di trasporto, cammini hamiltoniani); gli algoritmi strettamente geometrici (appartenenza, intersezione, inviluppo convesso); quelli combinatori; (generazioni di particolari permutazioni di simboli, anagrammi, partizioni); quelli connessi a classici argomenti della matematica finita (rappresentanti distinti e simili).

In quest'ultimo ambito si segnalano i vari tipi di problemi di assegnazione, tra i quali spicca quello dell'assegnazione stabile (stable marriage).

Esempio: n medici devono essere assegnati a n ospedali (uno per ciascuno); ogni medico ha una propria lista di preferenza per i vari ospedali, ciascuno dei quali a sua volta possiede una propria scala di precedenza per la scelta dei medici (si escludono casi di ex-aequo in tutte queste preferenze). Si ha instabilità nell'assegnazione se esistono un medico M e un ospedale O tali che

i) M preferisce O al suo ospedale di nomina;

ii) O preferisce M al medico assegnatoli.

Si vuole ovviamente realizzare un'assegnazione stabile (priva cioè di instabilità).

L'esistenza di una soluzione stabile (nemmeno troppo ovvia a prima vista) è dimostrata per via costruttiva dal seguente algoritmo (di Mc Vitie e Wilson) che ne calcola una. L'algoritmo cerca iterativamente collocazione a tutti i medici, piazzandoli eventualmente al posto di medici meno graditi che tornano così in circolo a cercare sistemazione; per trattare allo stesso modo gli ospedali occupati e quelli ancora sprovvisti di medico si finge che a questi ultimi sia assegnato un medico fittizio "zero".

```
assegnazione stabile
begin
assegnare a tutti gli ospedali il medico 0;
for k: = 1 to n do
    begin
        m:=k;
        repeat
          os:=miglior scelta attuale di m;
          if os preferisce m al suo attuale medico then
               begin
               assegnare m a os;
               m:=medico di os resosi disoccupato;
               end;
          if m≠∅ then cancellare os dalla lista di m;
        until m=∅;
      end;
  end.
```

La terminazione del ciclo interno repeat-until è assicurata dal fatto che ad ogni sua esecuzione viene cancellato qualche nome da una lista (finita); è anche facile convincersi che la soluzione ottenuta è stabile.

Bibliografia

[1] L. Childs: A Concrete Introduction to higher algebra Springer, 1983.

[2] F. Luccio; La struttura degli algoritmi, Boringhieri 1982.

[3] G. Lolli, C. Mangione (a cura di): Matematica e Calcolatore, quaderno n. 14 di "Le Scienze", Milano, marzo 1984.

[4] E.S. Page, L.B. Wilson: La combinatoria computazionale, Muzzio, 1980.

[5] N. Pintacuda: Algoritmi, di prossima pubblicazione da Muzzio Editore, Padova, 1986.

[6] R. Sedgewick: Algorithms, Addison-Wesley, 1983.

M.G. Barbetta - P. Bartolacelli - M.G. Girasoli - A. Volpi
Istituto Tecnico Commerciale "J. Barozzi" - Modena

Informatica e informazione statistico-economica nelle decisioni di impresa

Come è nata

L'iniziativa ha trovato la sua origine nell'ambito del Progetto CEE "Passaggio dei giovani dagli studi alla vita attiva" (1).

Al progetto, rivolto per la nostra provincia alle "Tecnologie avanzate", è stato dato lo scopo, per le scuole superiori, di sensibilizzare gli studenti alle nuove aree di attività legate alla scienza dell'informazione e della microelettronica.

Nello stesso ambito la Camera di Commercio e il Provveditorato agli Studi di Modena, nell'anno scolastico 1984/85 promuovevano, con l'Agenzia Scuola - Mondo del Lavoro, una serie di iniziative di informazione, rivolte ai giovani e tese a favorire un maggior collegamento tra scuola e imprese.

In questo quadro quattro insegnanti di due corsi paralleli di ragionieri programmatori dell'I.T.C.S. "J. Barozzi" di Modena hanno deciso

(1) Progetto CEE: progetto pilota triennale promosso dalla CEE nell'anno 1983/84, articolato per l'Italia in 5 sottoprogetti:
a) Terziario "Turismo",
b) Terziario "Gestione e organizzazione Amministrativa",
c) Agricoltura e alimentazione,
d) Tecnologie avanzate,
e) Artigianato.

di impegnare energie, conoscenze e capacità in una attività che, portando gli studenti a contatto "vivo" col mondo dei lavoro risultasse strettamente legata ai programmi delle materie curriculari più importanti: matematica, informatica, ragioneria.

Oggetto

Si è scelto di effettuare una indagine statistica campionaria nelle imprese manufatturiere modenesi da 15 a 500 addetti su: "Informatica e Informazione statistico-economica nelle decisioni di impresa".

Con l'estrema diffusione delle tecnologie elettroniche e di automazione stiamo assistendo a un vero e proprio cambiamento nella organizzazione della produzione: stretta incorporazione del sistema informativo dentro il sistema produttivo, rilievo sempre maggiore di figure professionali e di mansioni relative alle attività non direttamente produttive, anche all'interno del settore industriale in senso stretto. D'altra parte il complesso di funzioni che l'impresa oggi deve svolgere non diminuisce, anzi può aumentare, con uno spostamento dalle funzioni direttamente connesse alla produzione a quelle strategiche di progettazione, gestionali, finanziarie, commerciali, di controllo, pubblicità, ecc... Sempre più centrale è oggi la ricerca di informazione su una molteplicità di fatti socioeconomici che, presentando un forte dinamismo, hanno interesse solo se portati rapidamente a conoscenza degli operatori economici.

Accettata l'idea che l'informazione sia un fattore di produzione, è necessario ora capire: 1) in quale rapporto essa stia con il lavoro, la produzione di beni e le trasformazioni che stanno avvenendo nella produzione industriale; 2) su quale dotazione strumentale si fondi in concreto la attuale fase del processo di informatizzazione, cioè l'elaborazione e trasmissione automatica dei dati.

Un uso diffuso e razionale della risorsa informatica sembra oggi essere una condizione essenziale per ogni sistema economico, anche in relazione al fabbisogno di beni "immateriali" necessari a ottenere un certo prodotto. E questo sembra particolarmente importante per le piccole e medie imprese, data la loro maggiore dipendenza dalla evoluzione dei mercati rispetto alle imprese grandi. Ad esse perciò si è rivolto il nostro interesse.

Per quel che riguarda la matematica il valore didattico del nostro lavoro è stato nel proposito di cercare di formare negli studenti una mentalità statistica: 1) capace di cogliere l'uniforme nel difforme dei fenomeni collettivi, mediante il calcolo numerico di alcuni indici statistici che permettono di sintetizzare realtà complesse e aiutano a fare previsioni; 2) capace di ricercare, nell'analisi dei dati, le interdipendenze tra i fenomeni.

Per quel che riguarda l'informatica, guidando gli studenti alla realizzazione dei programmi per l'archiviazione ed il trattamento dei dati raccolti, si è voluto evitare l'utilizzo di pacchetti statistici esistenti sul mercato, allo scopo di sviluppare una capacità critica nell'utilizzo di queste metodologie inerenti allo studio dei fenomeni collettivi e dell'inferenza statistica, cosa tanto più necessaria oggi che, avvalendosi dell'uso degli elaboratori elettronici, si è in grado di sviluppare procedimenti complessi e sofisticati.

Da chi

L'indagine è stata svolta da:

- 84 alunni delle classi IV e V sezioni B e C, indirizzo programmatori dell'I.T.C.S. "J. BAROZZI" di Modena;
- le insegnanti:
  Barbetta M. Grazia, matematica corso B
  Bartolacelli Paola, informatica corso C
  Girasoli M. Gabriella, matematica corso C
  Volpi Angela, ragioneria corso B
- coordinatore dei lavori il dott. C. Fornasari, responsabile dell'ufficio Studi e Statistica della CCIAA.

Quando

L'inizio ufficiale è datato: 9.1.1985 giorno della riunione fra il direttore della CCIAA, il direttore tecnico del progetto CEE, il Preside dell'ITC "Barozzi", due insegnanti, con la quale si è conclusa la serie di incontri informali iniziati nel mese di ottobre '84. I primi risultati sono stati comunicati il 16.5.85 nell'ultimo dei 4 incontri organizzati dalla Camera di Commercio e dal Provveditore agli Studi sulla "Nuova imprenditorialità".

L'elaborazione completa avverrà nell'anno scolastico 1985/86.

Obiettivi didattici generali

Si sono individuati i seguenti obiettivi didattici generali:

a) Rivolti agli studenti
  - applicare alcune tecniche statistiche e di programmazione per la realizzazione e l'elaborazione dell'indagine;
  - acquisire maggiori conoscenze sugli spazi per un proprio inserimento professionale;
  - realizzare alcuni contatti con imprenditori e managers locali.

b) Rivolti all'ITC "Barozzi"
  - acquisire specifici orientamenti didattici per meglio finalizzare la formazione degli studenti dell'indirizzo programmatori;
  - individuare spazi di mercato per i propri diplomati esperti nel trattamento delle informazioni.

Obiettivi per la CCIAA

Anche la Camera di Commercio ha individuato specifici obiettivi, e precisamente:

- cogliere i fabbisogni informativi di origine extraziendale delle imprese più innovative al fine di gestire in modo più appropriato la promozione del proprio servizio di banche dati;
- finalizzare meglio le proprie attività informative riguardanti i principali mercati delle imprese locali;
- apportare modifiche alla propria attività di "osservatorio congiunturale locale".

Finalità e contenuti dell'indagine

Dopo lunga discussione con le 4 classi interessate, si è deciso di rivolgere l'attenzione alle piccole e medie imprese manifatturiere di Modena e provincia, valutandone e misurandone:

- lo stato attuale e l'evoluzione di hardware e software;
- il livello di utilizzo degli elaboratori;
- il comportamento nella gestione dei dati aziendali ed extraziendali.

Piano di lavoro

Si sono stabilite le seguenti modalità di conduzione dell'indagine:

- Costruzione del campione: mediante la tecnica del campionamento casuale stratificato (per settori e per classi di addetti),
- Numerosità del campione: 390 imprese, (2)
- Raccolta dei dati: tramite questionario compilato per intervista diretta,
- Spoglio ed Elaborazioni dati: tramite P.C. IBM, con programmi preparati dagli studenti (BASIC).

Fasi del lavoro svolto e partecipazione ad esso degli studenti

- Definizione degli obiettivi (tutti),
- Deduzione delle ipotesi da verificare (tutti),
- Definizione del questionario (tutti)
- Scelta del campione (Camera di Commercio),
- Collaudo del questionario su 6 imprese (6 studenti)
- Correzione e stesura del questionario definitivo (gruppo insegnanti-studenti),
- Esecuzione delle interviste (tutti gli studenti),
- Controllo dei questionari compilati (un responsabile per classe),
- Stesura del programma di immissione dei dati raccolti (un gruppo per classe)
- Immissione dei dati raccolti (tutti gli studenti di IV),
- Stesura del programma di tabulazione dei dati (un gruppo per classe)
- Interpretazione dei primi risultati (gruppo insegnanti-studenti).

---

(2) Il tasso di caduta, dovuto ai rifiuti di intervista da parte delle imprese sorteggiate, è stato del 18%. Il numero effettivo di questionari raccolti è stato quindi 321, ma si è verificato che il campione reale, ha mantenuto le caratteristiche di casualità di quello originale.

I lavori si sono svolti in parte in ore di lezione e in gran parte in ore extrascolastiche.

Il questionario

Le domande tendevano a cogliere:

- l'aspetto strutturale e la dotazione di calcolatori da parte delle aziende,
- il comportamento delle aziende in relazione a:
  - utilizzo degli elaboratori,
  - personale addetto alla programmazione,
  - acquisto di software dall'esterno,
  - utilizzo di tecniche di statistica aziendale,
  - gestione dei dati aziendali ed extraziendali.

Bilancio del lavoro svolto

Ci sono stati costi: molta fatica da tutte le parti, modifica dell'orario di lezione delle 4 classi, in funzione dei vari impegni, sottrazione di molte ore normalmente dedicate ad altro (studio, riposo, divertimento, ecc.). Questi costi però sono stati ripagati da numerosi risultati positivi, raggiunti anche per l'estrema disponibilità di tutte le parti coinvolte:

- realizzazione di un contatto significativo degli studenti col mondo del lavoro e superamento delle difficoltà connesse;
- realizzazione di un lavoro non "sterilizzato", cioè non impostato in termini scolastici, ma nella sua completezza e complessità;
- avvio di una esperienza di tipo inter-disciplinare, inter-classe, intersezione.

In sintesi la valutazione che si dà è senz'altro positiva, da parte degli insegnanti che hanno voluto questa ricerca e sperimentato nuovi metodi di lavoro, e da parte degli studenti che, nel contatto diretto con la realtà esterna hanno acquisito maggior consapevolezza del rapporto esistente tra ricerca teorica, innovazioni tecnologiche e vitalità di una economia locale.

P. Pisaneschi -

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Il logo come esempio di linguaggio procedurale e ricorsivo operante su liste

0. Considerazioni introduttive

Ogni linguaggio di programmazione ad alto livello deve possedere una serie di caratteristiche che permettano l'applicazione sia a casi generali (general purpose) sia ai fini particolari cui il linguaggio è specialmente rivolto. I linguaggi di tipo didattico non fanno eccezione a questa regola; in particolare per la didattica della matematica è necessario disporre di un linguaggio L che abbia le seguenti caratteristiche:

C1) L deve rendere possibile la presenza di più procedure coesistenti in una stessa area operativa (work-space) che si possano richiamare a vicenda (proceduralità)

C2) L deve ammettere la definizione di procedure ricorsive: si ha così la possibilità di attaccare problemi complessi difficilmente trattabili in modo diverso (ricorsività)

C3) L deve avere la capacità di elaborare espressioni simboliche: è il requisito indispensabile per la manipolazione di "oggetti" matematici di tipo algebrico oltre che di tipo numerico (capacità di elaborazione simbolica).

Il linguaggio che attualmente meglio risponde a C1), C2), C3) è probabilmente il linguaggio LCSI LOGO per il PC IBM, che tuttavia "gira" su qualunque personal dotato di sistema operativo MS-DOS.

1. Procedure. Loro costruzione modulare

Illustriamo l'argomento con un esempio semplice, scrivendo una procedura AREA per calcolare l'area di un triangolo note le coordinate dei suoi vertici P1, P2, P3. Useremo, per questo, la formula di Erone:

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (^)$$

in cui a,b,c sono le misure dei lati e p è il semiperimetro. E' chiaro che non conviene inserire l'algoritmo relativo alla (^) all'interno della procedura principale, che ha come input P1, P2, P3; così facendo, infatti, essa svolgerebbe soltanto una funzione sussidiaria e non potrebbe essere applicata a quei casi in cui a,b,c sono dati direttamente. Molto meglio definire a parte, in modo indipendente, una "sottoprocedura" ERONE da utilizzare per il calcolo dell'area, di un triangolo quando sono noti i lati. In LOGO la procedura ERONE diviene

```
TO ERONE  :A  :B  :C
LOCAL "P  MAKE "P (:A + :B + :C)/2
OUTPUT SQRT :P (:P - :A) (:P - :B) (:P - :C)
END
```

Il programma inizia con la "parola chiave" TO, che significa PER, sottinteso "definire la procedura". Segue quindi il nome della procedura stessa seguita dalla o dalle variabili da cui dipende: in questo caso il nome è ERONE e le variabili sono :A, :B, :C. In LOGO le variabili sono in genere precedute da due punti: questo affinché l'interprete LOGO possa distinguerle dalle procedure. Nella prima riga viene poi definita come locale (cioè esistente solo all'interno della procedura) la variabile :P, cui nella riga stessa è assegnato, tramite l'operatore di assegnazione MAKE, il valore (:A + :B + :C)/2, cioè il semiperimetro. Da notare che quando una variabile viene introdotta per la prima volta, essa non è preceduta dai due punti ma dagli apici (^); lo stesso avviene quando essa è dichiarata locale. Nella terza riga figura poi la primitiva OUTPUT che significa "dai in uscita", "butta fuori" e la primitiva SQRT (da SQuare RooT) che esegue la radice quadrata del suo argomento. I nomi delle procedure hanno spesso dei "diminuitivi"; ad es. invece di OUTPUT di solito si usa OP.

Tornando al nostro problema, dal momento che ERONE accetta come input le lunghezze dei lati mentre AREA richiede i vertici espressi dalle loro coordinate, occorre chiaramente un'altra procedura, la procedura DIST, che prendendo come dati d'ingresso le coordinate delle coppie di punti dia

---

(^) Non sottostanno a questa regola soltanto le variabili che figurano nella intestazione delle procedure; ad es., in ERONE, le variabili :A, :B, :C.

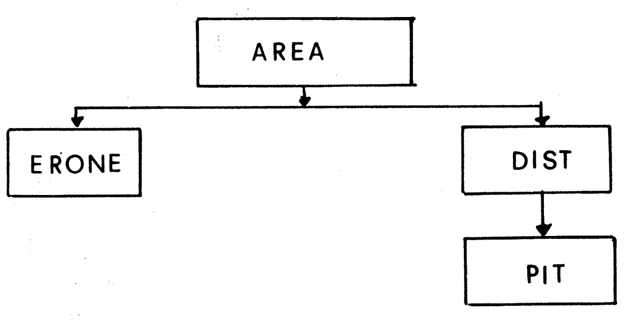
come risultato la loro distanza. Il LOGO consente di riguardare un punto o vettore P=(x,y) come la lista [x y] formata dagli oggetti x ed y, come pure di "recuperare" tali oggetti con le primitive FIRST e LAST che danno rispettivamente il primo e l'ultimo oggetto di una lista. Ciò premesso la procedura DIST è subito definita:

```
TO DIST :A :B
LOCAL "X  LOCAL "Y
MAKE "X (FIRST :A) - FIRST :B
MAKE "Y (LAST :A) - LAST :B
OP PIT :X :Y
END
```

in cui PIT, ancora da definire, è una nuova procedura che, dati i cateti di un triangolo rettangolo, dà come risultato la corrispondente ipotenusa

```
TO PIT :A :B
OP SQRT :A*:A + :B*:B
END
```

Riassumendo abbiamo una procedura AREA che chiama come sue sottoprocedure le procedure ERONE e DIST: quest'ultima poi ha come sottoprocedura la procedura PIT. Graficamente la situazione è riassunta dal seguente schema



mentre il programma in LOGO si scrive

```
TO AREA :P1 :P2 :P3
LOCAL :A LOCAL :B LOCAL :C
MAKE "A DIST :P1 :P2
MAKE "B DIST :P2 :P3
MAKE "C DIST :P1 :P3
```

```
OP ERONE :A :B :C
END
```

La costruzione di AREA è stata fatta per moduli che possono in seguito tornare utili per tanti altri scopi oltre quello per cui sono stati creati inizialmente. Lo stile di programmazione che parte da un progetto di massima definendo i particolari solo in secondo (o in terzo) tempo è detto TOP-DOWN, cioè dall'alto al basso, dal generale al particolare. La costruzione modulare di procedure, oltre ad essere concettualmente più semplice e a fornire strumenti utili da usare in seguito, ha l'ulteriore vantaggio di rendere agevole il debugging del programma, cioè l'individuazione e la successiva correzione degli errori che (provare per credere!) fatalmente si insinuano anche nei programmi più semplici. Il modo in cui una procedura (relativamente) complessa viene costruita modularmente attraverso altre procedure già definite o ancora da definire richiama da vicino il modo in cui in geometria elementare si cerca di dimostrare un teorema, ciò che avviene facendo un uso diretto degli assiomi o ricorrendo ad altri teoremi (già dimostrati o ancora da dimostrare a partire dagli assiomi); i termini che si corrispondono sono

primitive del sistema	assiomi del sistema geometrico
sottoprocedure (già costruite o da costruire)	teoremi (già dimostrati o da dimostrare)

2. <u>Ricorsività. Costruzione di procedure ricorsive</u>

Abbiamo veduto che una procedura può chiamare per la sua esecuzione sia le primitive del sistema che procedure già costruite o da costruire.

Le possibilità di linguaggi che, come il LOGO, si ispirano al LISP non si fermano qui: in essi è del tutto legale che, ancora nell'atto stesso della sua definizione, oltre alle primitive del sistema e altre procedure già definite, una procedura possa richiamare addirittura se stessa! Le procedure che operano in questo modo sono chiamate <u>procedure ricorsive</u>. Qui l'analogia con il modello geometrico va manifestamente a farsi ... benedire; è come se, nella dimostrazione di un teorema ci appellassimo al teorema stesso o a una sua conseguenza: è chiaro che così si incorre nell'errore logico chiamato "petitio principii" o più familiarmente "circolo vizioso". Ma nel caso delle procedure ricorsive non c'è alcun vizio logico: resta, è vero, il carattere un po' paradossale implicito in questo tipo di processi che crea non poche remore al loro uso, soprattutto negli adulti. Tuttavia qui il paradosso è solo apparente: in base al principio di induzione completa la definizione ricorsiva di procedure è non solo legittima ma spesso anche più maneggevole della corrispondente formula esplicita: si confronti, ad es., la seguente generazione ricorsiva dei coefficienti binomiali:

$$C_{n,0} = 1$$

$$C_{n,k} = \frac{n-k-1}{k} \quad C_{n,k-1} \qquad (\hat{})$$

con quella esplicita espressa dalla formula classica

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Ecco come si scrive la (^) in LOGO

```
TO BINOMIAL :N :K
IF :K=0 [OP 1] [LOCAL "A MAKE  "A (:N-:K-1)/:K
OP :A*BINOMIAL :N :K-1]
END
```

in cui la struttura di controllo "IF condizione [lista di istruzioni n. 1] [lista di istruzioni n. 2]" opera come segue: se condizione è verificata viene eseguita la lista di istruzioni n. 1, in caso contrario la lista di istruzioni n. 2.

I linguaggi di programmazione più evoluti ammettono tutti la ricorsività: ad es. è possibile definire procedure ricorsive oltre che in LISP (linguaggio principe della Intelligenza Artificiale e storicamente il primo linguaggio quasi interamente fondato sul concetto di ricorsione) in APL, in PASCAL, in PROLOG.

Sarebbe assai riduttivo e superficiale riguardare la ricorsività come una particolare "facilità" che un linguaggio può avere, ma di cui può anche mancare senza che si perda nulla di essenziale: ciò soprattutto tenendo conto della sempre maggiore attenzione oggi rivolta allo studio delle equazioni alle differenze finite, tendenti ormai ad assumere una dignità e importanza pari a quella attribuita in passato alle equazioni differenziali.

Sull'importanza dei processi ricorsivi e sullo spazio da riservare ad essi in un insegnamento della matematica in linea con i tempi, ci sarebbe molto da dire: qui basterà dare un cenno in proposito nell'intento di mettere in luce che il calcolatore, se propriamente usato, arricchisce il problem solving di un nuovo modello di pensiero: il modello algoritmico ricorsivo. Illustriamo brevemente le cose dette risolvendo un problema di probabilità molto noto, il problema dei compleanni coincidenti, che consiste nel determinare la probabilità che tra n persone, ad es. gli invitati ad un banchetto, almeno due siano nate nello stesso mese e nello stesso giorno. La trattazione usuale è la seguente: sia $P=\{1,2,...n\}$ l'insieme delle persone, $G=\{g_1,....g_{365}\}$ quello dei giorni dell'anno. Come spesso avviene, anche qui è vantaggioso calcolare la probabilità dell'evento contrario, cioè la probabilità che non ci siano neanche due compleanni coincidenti. I casi possibili sono tanti quante le applicazioni di P in G cioè $(365)^n$. I casi favorevoli sono tanti quante le applicazioni iniettive di P in G, cioè 365 364 ... (365-n+1) per cui

$$q_n = \frac{365\ 364\ \dots\ (365-n+1)}{(365)^n} \qquad (1)$$

e $p_n = 1-q_n$.

Questo modo di affrontare il problema, oltre che nozioni combinatorie, a scanso di infelici esiti del calcolo, richiede anche l'accorgimento di riscrivere la (1) in modo opportuno, rendendo così la stesura del programma non dico difficile, ma certamente non immediata.

Vediamo ora, invece, come è l'approccio ricorsivo. A differenza di quello statico veduto prima, questo consiste nel considerare il problema come un"processo in fieri": si tratta appunto di determinare come in questo processo si modificano i parametri in gioco quando si passa dallo stato n allo stato n+1. Precisamente nel caso in questione si tratta di vedere come varia la probabilità cercata quando "si aggiunge un posto a tavola", agli n convitati già presenti essendosene unito un (n+1)-esimo. Detti E_n, E_{n+1} e E gli eventi

E_n "Le n persone non hanno compleanni coincidenti"

E_* "L'ultimo venuto ha un compleanno che non coincide con nessuno dei precedenti n"

E_{n+1} "Le n+1 persone non hanno compleanni coincidenti"

è chiaro che si verifica E_{n+1} se e solo se si verificano gli eventi, tra loro indipendenti, E_n e E_*. Dette q_{n+1}, q_n e q_* le rispettive probabilità abbiamo

$$q_{n+1} = q_* \cdot q_n$$

che, essendo $q_* = 1 - \frac{n}{365} = \frac{365-n}{365}$ si scrive $q_{n+1} = \frac{365-n}{365} \quad q_n$

ovvero $$q_n = \frac{366-n}{365} \quad q_{n-1}$$

Questa è la relazione ricorsiva cercata. Più facile da stabilirsi, non ha richiesto alcuna nozione sul numero delle applicazioni tra insiemi finiti. Completata con l'osservazione che $q_2 = \frac{364}{365}$ o, se si preferisce, con il fatto che $q_1=1$ essa contiene tutto ciò che occorre e basta a risolvere il problema; ecco il relativo programma in LOGO

```
TO Q :N
IF :N=1 [OP 1] [LOCAL "A MAKE "A (366-:N)/365
OP :A*Q :N-1]
END
```

```
TO P :N
OP 1 - :Q :N
END
```

Usando la ricorsività, in LOGO è possibile creare in modo semplice cose molto difficili in altri linguaggi. Ad esempio si voglia definire una procedura che, dato il numero :A, dia come output un vettore di :N componenti uguali ad :A. Supponendo che in qualche modo ciò sia stato fatto per i vettori con :N-1 componenti, per completare l'opera basta aggiungere, usando l'operatore di concatenazione SE, una ultima :A, senza peraltro trascurare di dare una base all'intero processo prevedendo che se :N è zero il risultato dovrà essere il vettore vuoto [ ]:

```
TO VECT :N :A
IF :N=Ø [OP [ ]] [LOCAL "LG MAKE "LG VECT :N-1 :A OP SE :LG :A]
END
```

Didatticamente un processo ricorsivo si può illustrare con efficacia come la richiesta di aiuto ad un "gigante buono" (Gigante pensaci tu!). Il gigante fa il grosso del lavoro: il nostro contributo si limita alle piccole rifiniture. Nel caso precedente, se a creare un vettore di :N-1 componenti uguali ad :A provvede lui, a noi resta solo da aggiungere l'ultima componente (e fornire una base all'intero processo). Nel programma precedente abbiamo introdotto la variabile :LG proprio per alludere al lavoro del gigante; in seguito, quando i "ritocchi" saranno un po' più impegnativi di quello di questo esempio, useremo anche la variabile :NC (Nostro contributo) per indicare il restante lavoro di rifinitura. E' da sottolineare comunque che "la richiesta di aiuto al gigante" equivale alla chiamata ricorsiva della procedura ad un livello di complessità n-1.

Concludiamo questo paragrafo proponendo due procedure, la prima per moltiplicare uno scalare per un vettore, la seconda per eseguire, componente per componente, la somma di due vettori. A parte l'interesse intrinseco, queste procedure costituiscono la base per l'algebra dei polinomi che sarà trattata nel prossimo paragrafo.

```
TO MULT :K :V
LOCAL "LG LOCAL "NC
TEST EMPTYP :V
IFTRUE [OP[ ]]
IFFALSE [MAKE "LG MULT :K BL :V]
MAKE "NC :K *LAST :V
OP SE :LG :NC
END
```

riga 1: si esegue un test per vedere se :V è vuoto

riga 2: in caso affermativo si dà come risultato il vettore vuoto

riga 3: in caso negativo si priva, con BL, il vettore dell'ultima componente, si affida l'incarico al gigante e si mette in :LG il risultato del suo lavoro

riga 4: si moltiplica per :K l'ultima componente e si mette il risultato nella variabile :NC

riga 5: si rimettono insieme i pezzi e si stampa il risultato

```
TO VECTSUM :A :B
LOCAL "LG LOCAL "NC
IF OR EMPTYP :A  EMPTYP :B [OP[] ]
MAKE "LG VECTSUM BL :A  BL :B
MAKE "NC (LAST :A) + LAST :B
OP SE :LG :NC
END
```

riga 1: se almeno uno dei due vettori è vuoto si dà in uscita il vettore vuoto

riga 2: in caso contrario si privano :A e :B della loro ultima componente, si mette in azione il gigante il cui lavoro è raccolto nella variabile :LG

riga 3: si fa la somma delle ultime componenti e la si mette nella variabile :NC

riga 4: si rimettono insieme i pezzi e si stampa il risultato

3. L'algebra dei polinomi

Facciamo ora vedere come per mezzo delle liste si possa trattare l'algebra dei polinomi. Questi verranno identificati con i vettori dei loro coefficienti, ad es. $ax^3 + bx^2 + cx + d \longrightarrow$ [a b c d], $x \leftrightarrow$ [1 0].

Nei due programmi che seguono si fa uso della primitiva COUNT che fornisce il numero degli oggetti di una lista, ad es, COUNT [10 20 30 40] dà come risultato 4.

Somma di polinomi

E' chiaro che quando due polinomi hanno lo stesso grado, per sommarli basta fare, con VECTSUM, la somma dei vettori ad essi associati; se invece uno ha grado maggiore dell'altro si completa questo ultimo con tanti zeri quanti sono i termini mancanti: si ritorna così nella situazione precedente.

```
TO POLSUM :P :Q
LOCAL "N MAKE "N COUNT :P
LOCAL "M MAKE "M COUNT :Q
LOCAL "H LOCAL "V LOCAL "LG LOCAL "NC
IF :N=:M [OP VECTSUM :P :Q]
```

```
TEST :N>:M
IFTRUE [MAKE "H :N-:M
MAKE "V VECT :H Ø
MAKE "Q  SE :V :Q
OP VECTSUM :P :Q]
IFFALSE [OP POLSUM :Q :P]
END
```

Prodotto di polinomi

Allo scopo di ottenere una relazione ricorsiva per il prodotto di due polinomi notiamo che se, ad es., è $Q=ax^3+bx^2+cx+d$ si ha:

$$Q=(ax^2+bx+c).x + d = Q'x + d$$

dove Q' è il polinomio ottenuto da Q togliendo a questo l'ultimo coefficiente e dividendo per x. Ne segue, per ogni polinomio P

$$PQ = PQ'x + d P$$

che è la relazione ricorsiva cercata. Segue il programma in LOGO.

```
TO POLPROD :P :Q
LOCAL "LG LOCAL "NC
TEST (COUNT :Q)=1
IFTRUE [OP MULT  (LAST :Q)  :P]
IFFALSE [MAKE "LG POLPROD :P BL :Q]
MAKE "LG SE :LG Ø
MAKE "NC MULT (LAST :Q) :P
OP POLSUM :LG :NC
END
```

riga 2: si esegue un test per vedere se Q è ridotto ad un monomio
riga 3: in caso affermativo si moltiplica l'unica componente di Q per P
riga 4: in caso negativo si moltiplica P per Q' e si mette il risultato in :LG
riga 5: si aggiunge uno zero finale, equivalente alla moltiplicazione per x.
riga 6: si moltiplica l'ultima componente di :Q per :P e si mette il risultato in :LG

riga 7: si sommano i due polinomi PQ'.x e d.P e si stampa il risultato.

4. Considerazioni conclusive

Pur nei limiti di brevità imposti da comunicazioni quali la presente, speriamo di essere riusciti a dare al lettore almeno una idea delle capacità didattiche di un linguaggio modulare e ricorsivo come il LOGO LCSI. Molte altre cose ancora varrebbe la pena di illustrare, tra cui:

1) la grande semplicità di sintassi ottenuta sostituendo le operazioni infisse "+", "-", " ", "/", "=", etc. con le corrispondenti operazioni prefisse SUM, DIFFERENCE, PRODUCT, QUOTIENT, EQUALP. Si constaterebbe così che il LOGO segue la notazione polacca "diretta" di Luckasiewicz con la conseguente riduzione di parentesi che ne deriva
2) la grande facilità con cui in LOGO si possono definire le strutture di controllo della programmazione strutturata del tipo FOR, WHILE, UNTIL, CASE OF
3) l'uso del comando SET PRECISION che consente una grandissima accuratezza di calcolo in problemi come il calcolo di π che richiedono un gran numero di cifre esatte dopo la virgola
4) l'incredibile semplicità con cui le operazioni unarie e binarie possono essere estese ad argomenti vettoriali
5) la possibilità di estendere le operazioni binarie ad operazioni n-arie con le conseguenti capacità di programmazione di tipo globale.

Diciamo comunque che è nostra intenzione di redigere un "quaderno" dove questi argomenti e molti altri ancora possano essere trattati con l'ampiezza e la gradualità che meritano.

Furio Petrossi
Nucleo di Ricerca Didattica di Trieste

Algebra e linguaggi di programmazione

Obiettivo

Il linguaggio LOGO è stato usato nel corso di una esperienza didattica in una classe terminale dell'Istituto d'Arte di Udine con l'obiettivo di approfondire lo studio dei teoremi di derivazione (derivata di somma, prodotto di funzioni e di funzioni composte) ed introdurre gli studenti all'analisi di algoritmi ricorsivi. Con tale lavoro si è fatto intravedere come il computer possa essere utilizzato, anche in campo matematico, per usi che vanno al di là di quello numerico.

L'uso del computer per operare trasformazioni "simboliche" viene un po' a ravvicinare tra loro i termini - spesso per polemica contrapposti - tra CONTINUO e DISCONTINUO, in quanto, nella scienza, il continuo è stato per lo più descritto con la discontinuità del simbolo.

Risultati

L'obiettivo didattico fondamentale era quello di mostrare quali capacità di analisi dell'espressione da derivare, quali leggi di trasformazione, quali capacità di sintesi siano necessarie nell'applicazione dei teoremi di derivazione.

Il programma LOGO costruito con gli studenti è in grado di derivare (secondo la variabile "x") un'espressione come:

[sin [5 * x]] + a

stampando,come risultato, l'espressione

[[cos [5 * x]] * [[ø * x] + [5 * 1]]] + ø

che corrisponde, a meno di ulteriori calcoli, al risultato accettato $5\cos(5x)$.

Quale linguaggio usare

Tre sono le vie fondamentali per affrontare, via computer, il pro blema proposto:

1. Utilizzare linguaggi specializzati per il trattamento di problemi simbolici in matematica, come il MACSYMA o il MU-MATH.

2. Utilizzare linguaggi che facciano uso dell'algoritmo di UNIFICAZIONE (Robinson e altri), ovvero, ad esempio, che siano in grado di far rilevare che espressioni come (5 + 2*x)*(3*a*x) possano essere considerate come casi particolari della forma x * y, fatta la sostituzione x=(5+2*x), y=(3*a*x).

   I linguaggi più adatti a tale scopo sono il PROLOG e il LISP.

3. Procedere per analisi dell'"albero dell'espressione" e sintesi dopo l'applicazione di opportune regole di trasformazione.

In tal caso potranno essere utilizzati linguaggi che permettano la costruzione di algoritmi ricorsivi come il PASCAL, il LOGO o il BBC-BASIC.

La seconda via è stata da me sperimentata a livello teorico (relazione al convegno "Computer e Didattica" dell'IRRSAE Friuli-Venezia Giulia - Arta Terme, 1984).

La terza soluzione è stata quella adottata.

Funzioni del LOGO utilizzate

La struttura fondamentale dei dati presente nel LOGO (come nel LISP) è la LISTA: essa è costituita da un insieme di caratteri racchiusa da parentesi quadre. Una lista può essere a sua volta composta di liste.

Le funzioni che permettono la manipolazione di liste sono (Logo Commodore 64) PRI,ULT,MENPRI,LISTA:

PRI	[[* x] + b]	→	3 * x
ULT	[[3 * x] + b]	→	b
MENPRI	[[3 * x] + b]	→	+ b
PRI MEMBRI	[[3 * x] + b]	→	+
(LISTA 1 + x)		→	[1 + x]

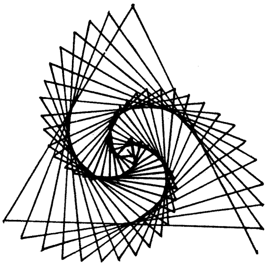
In tal modo, data un'espressione, sarà possibile riconoscerne operando destro e sinistro (se c'è) e segno di operazione; in seguito l'espressione potrà essere "rimontata" in modo diverso, come nel seguente caso:

(LISTA PRI [a + b] ULT [a + b] PRI MENPRI [a + b]) → [a b +]

La ricorrenza

Per introdurre gli studenti alle caratteristiche degli algoritmi ricorsivi ho presentato sia esempi matematici che grafici come in:

```
PER PRODOTTO :A  :B
SE  :A = 1 ALLORA RIPORTA  :B
 ALTRIMENTI RIPORTA  :B +
 PRODOTTO (:A - 1)  :B
FINE
```



o in :

```
PER SPIR  :PASSO  :ANGOLO
AVANTI  :PASSO
DESTRA  :ANGOLO
SPIR  :PASSO + 1  :ANGOLO
FINE
```

Nei casi presentati si vede come le procedure definite richiamino se stesse.

Il meccanismo fondamentale del programma

Solo per esemplificare i meccanismi utilizzati mostrerò il caso del teorema della derivata di un prodotto di funzioni, isolando - dal programma complessivo - due procedure:

```
per DERIVARE  :espressione
...
se pri menrpi  :espressione = "* allora riporta
DERIVAPRODOTTO :espressione
...
fine

per DERIVAPRODOTTO :espre
riporta (lista (lista DERIVARE pri :espr  "* ult :espr )
              "+
              (lista pri  :esp  "* DERIVARE ult : espr))
fine
```

Si vede che per derivare un'espressione composta dal prodotto di due funzioni sia necessario prima applicare la regola di derivazione del prodotto (DERIVAPRODOTTO) ma in seguito sia pure necessario RIAPPLICARE la derivazione ad alcuni dei termini originati: le due procedure si richiamano una con l'altra. Questo meccanismo "sviscera" l'espressione fino alle parentesi più interne.

Conclusioni

Dal punto di vista didattico ho potuto affrontare con gli studenti temi di indubbio interesse per la matematica nel suo complesso; per quanto riguarda il più specifico tema della derivazione ho potuto notare una maggiore disinvoltura nel trattare casi anche macchinosi di derivazione, rispetto classi parallele.

La strada del "calcolo simbolico" ha avuto in Italia poche applicazioni didattiche: vale la pena dedicare approfondire la ricerca didattica su questo tema indubbiamente fecondo.

R.M. Bottino - P. Focheri^ *- F. Furinghetti - M.T. Molfino*
Istituto di Matematica di Genova

Calcolatore e Informatica nel corso di matematica: proposte del gruppo superiori di Genova

1) Il gruppo superiori di Genova lavora da diversi anni sul problema Calcolatori e Informatica nel corso di matematica. Su questo tema sono state elaborate tre proposte, diverse nella filosofia, nei contenuti, nell'utenza a cui erano rivolte, nella strumentazione utilizzata.
   La prima proposta (1980), riguarda l'uso del calcolatore tascabile programmabile. Tale strumento, relativamente economico, di facile gestione in aula, diffuso tra gli studenti, veniva utilizzato per

^ Istituto di Matematica Applicata del C.N.R.
Via L.B. Alberti, 4 - 16132 Genova

fornire ai ragazzi capacità di visione computazionale di processi. A tale scopo sono state suggerite agli insegnanti alcune tracce di lavoro flessibili di vari livelli di difficoltà che si prestavano ad essere sviluppate in diversi ambiti.
I dettagli sull'esperienza e sull'aggiornamento degli insegnanti sono esposti in [1] e [5].
Le tracce di lavoro proposte sono state sperimentate in classe solo parzialmente, soprattutto per la scarsità di tempo a disposizione e per la necessità di svolgere, comunque, tutto il programma scolastico. Questa sperimentazione ha permesso il recupero di contenuti matematici istituzionali introdotti in forma operativa, ma non si è giunti all'introduzione di contenuti nuovi e l'approccio all'informatica è stato assai limitato.
In considerazione di ciò, nell'attesa di tempi migliori (riforma della scuola secondaria superiore), in cui questi problemi siano superati istituzionalmente ci sembra che vada modificato l'approccio a questo tipo di lavoro, cambiando le premesse.
E' insufficiente proporre nuovi temi e/o nuove metodologie e curare un buon training di preparazione. Tutto ciò deve essere preceduto da una revisione critica degli attuali contenuti dei corsi di matematica, delle loro finalità, della loro effettiva utilità culturale e/o pratica.

2. Poiché l'esperienza precedente, pure con i suoi limiti, ha creato un certo interesse tra gli insegnanti del gruppo sul tema informatico abbiamo successivamente deciso di continuare il discorso affrontando direttamente il nodo del problema matematica-informatica. Ritenendo che ciò non potesse essere fatto direttamente in classe senza un'attività di studio preliminare, abbiamo organizzato due corsi (1983 e 1984) intitolati <u>Matematica e Informatica</u> dai seguenti contenuti (v. [5] per ulteriori informazioni):

- La formalizzazione delle teorie matematiche.
- Problemi metateorici relativi alle teorie formalizzate.
- Centralità della nozione di algoritmo.
- Sintassi e semantica.

- Strutture dati e astrazione sui dati.
- Procedure ad astrazione funzionale.
- Programmazione strutturata e modulare.

Come si evince dai titoli, in questi corsi sono stati trattati alcuni aspetti fondamentali dei linguaggi di programmazione e della programmazione, illustrandone sia i principi matematici, sia gli esempi concreti nell'informatica (esempi tratti dai linguaggi PASCAL, LISP, ADA).

Lo scopo del lavoro era sia quello di informare, sia quello di stimolare al rinnovamento nell'insegnamento secondario, non solo nel senso di introdurre elementi di tecniche informatiche specifiche, ma soprattutto nel preparare alla comprensione e all'uso corretto di tali strumenti informatici.

In particolare alcune parti della matematica acquistano nuova valenza e motivazioni dalle interazioni con l'informatica (logica [3], algebra).

Il corso è risultato dal punto di vista del contenuto molto impegnativo per gli insegnanti. In effetti l'argomento è complesso e distante dall'usuale bagaglio culturale di un insegnante di materie scientifiche. Inoltre è ben lungi dall'avere una sistemazione definitiva e assestata quale quella che caratterizza molte parti della matematica (geometria euclidea, algebra, analisi...) ed è ancora abbastanza labile il confine tra conoscenza di base istituzionale e ricerca in atto, tanto che in qualche caso sono stati esposti risultati recenti per cui non esistono testi di riferimento.

D'altra parte è tra le nostre motivazioni esplicite nell'attività di aggiornamento [4] l'intento di collegare, quando ciò sia significativo, secondaria superiore e ricerca (v. a questo proposito il contributo di P. Salomon ne "Il ruolo della geometria nella cultura e nella scuola", Tilgher, Genova (1983).

3. Per portare nella scuola qualche effetto di questi stimoli al rinnovamento stiamo ora attuando un lavoro che consiste nel tenere cicli di seminari di argomento informatico, all'Università (Istituto di Matematica) e fuori dall'orario di lezione a studenti di secondaria

superiore.

In questo modo abbiamo cercato di aggirare le perplessità degli insegnanti riguardo all'introduzione di nuovi contenuti nell'ambito scolastico, eliminando problemi di tempo e di insicurezza dell'insegnante. Esponiamo a grandi linee come è organizzato il lavoro.

Nell'anno accademico 1984-1985 sono state tenute le prime tre conferenze di un'ora e mezza circa dai tioli:

- Dal problema all'algoritmo.
- Dall'algoritmo al programma.
- Panoramica sui linguaggi di programmazione.

Gli studenti coinvolti sono stati circa cinquanta provenienti da prime e seconde del liceo scientifico e dell'istituto tecnico commerciale e da una quarta dell'istituto tecnico commerciale. La scelta di seguire i seminari è stata pilotata dall'insegnante che in classe ha presentato preliminarmente il lavoro ed orientato gli alunni.

Riguardo agli studenti che hanno scelto di seguire i seminari, si è constatato che la maggior parte proveniva dal liceo scientifico, dove (almeno sulla carta) la matematica ha un ruolo culturale-formativo e non "utilitaristico" come all'istituto tecnico. Inoltre inaspettatamente molti di coloro che possedevano un personal computer non hanno scelto di venire alle conferenze. Non sappiamo se da questi elementi sia lecito dedurre che gli studenti grazie alla presentazione dell'insegnante hanno colto la valenza teorica degli argomenti assimilando a livello inconscio informatica e matematica come tipo di disciplina.

I contenuti e la linea dei seminari sono stati decisi con la collaborazione degli insegnanti. Per rendere riproducibile in classe l'esperienza, nel normale orario e con valutazione, si stanno ora curando gli appunti di questa prima parte. Questi appunti potrebbero anche servire come punto di partenza per un corso di aggiornamento per insegnanti.

Quest'anno si sta anche lavorando, con attività di studio e discussione, alla preparazione di un secondo ciclo di seminari con lo sco po di costruire dei capitoli di un itinerario didattico per l'introduzione nel corso di matematica di elementi di informatica. Le classi a cui orientiamo in particolare la nostra attività sono la seconda e la terza della secondaria superiore.

4. Concludiamo questa breve rassegna sui nostri modi di interpretare il rapporto matematica-informatica segnalando che, a livello teorico,ci siamo interessati anche al lavoro sul calcolatore usato come scatola nera a supporto del corso di matematica. In una nota [2], scritta in un periodo in cui ci occupavamo in particolare dell'insegnamento della geometria nella secondaria superiore, abbiamo prospettato come il calcolatore potrebbe essere un mezzo stimolante nell'introdurre e trattare problemi di geometria proiettiva e descrittiva.
Tornando alla linea generale di lavoro pensiamo che da quanto abbiamo detto si evinca che il nostro obiettivo, pur nelle diversità di situazioni, è quello di privilegiare gli aspetti formativi globali, cioè di cogliere le trame concettuali ed i principi comuni che sono alla base di discipline, linguaggi ed applicazioni all'apparenza diversissimi.

Bibliografia

[1] R.M. Bottino, P. Forcheri, F.M. Furinghetti, M.T. Molfino, Tra il dire e il fare..., L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol. 8, n. 2, Aprile 1985.

[2] P. Forcheri, F.M. Furinghetti, M.T. Molfino, Nouveaux moyens pour vieux sujets: La représentation des objets. Comptes rendus de la 33e Rencontre International, Pallanza 2-9 Aout 1981.

[3] F.M. Furinghetti, Relazione al VII convegno sull'insegnamento della matematica, N.U.M.I., VIII, supplemento al n. 7 luglio 1981, p. 49.

[4] F.M. Furinghetti Quale ricaduta nella classe? Riforma della Scuola, Anno 31, n. 3, Marzo 1985.

[5] Scheda a cura del gruppo, N.U.M.I., XII, supplemento al n. 5, maggio 1985, p. 133.

Salvatore Di Gregorio

Dipartimento di Matematica - Università della Calabria

Linee progettuali per una prima alfabetizzazione informatica nella scuola media inferiore e risultati delle prime sperimentazioni

1. Premesse

Mentre la vieppiù crescente importanza delle applicazioni informatiche nella nostra società pone con particolare urgenza l'esigenza di una alfabetizzazione informatica fin dalla prima scolarizzazione, assistiamo ad una tumultuosa evoluzione degli strumenti informatici e ad una loro utilizzazione in contesti comportanti i più vari tipi di approccio con diversità di competenze da acquisire a monte.

Una tale situazione, per molti aspetti non ben definita nella sua dinamica ingenera perplessità e talvolta confusione in special modo per quello che è il problema cruciale: l'alfabetizzazione informatica, e come questa si debba porre nel nostro ambito culturale.

Anzitutto v'è da sgombrare il campo da una prima possibilità di equivoco: l'utilizzazione degli elaboratori nelle materie scolastiche non significa assolutamente fare dell'alfabetizzazione informatica!

I rilevanti problemi di un corretto uso dell'elaboratore vengono ormai a valle di quelli di una alfabetizzazione informatica.

Con questo non si vogliono minimizzare le connessioni della Informatica con le altre discipline, anzi si è dell'avviso che una corretta ottica debba esaltare quest'aspetto ed in special modo per la Matematica, che ne è interlocutrice privilegiata.

Un secondo punto da mettere in rilievo è la nacessità di mirare ad una formazione la più "scientifica" possibile, con ciò intendendo far anche risaltare che non deve essere dato un approccio succube a particolari applicazioni anche rilevanti; ciò può sembrare paradossale, se consideriamo che la maggior spinta ad una introduzione della Informatica nella scuola viene dalla necessità di assicurare una base di preparazione professionale, mirata alle applicazioni, ma non dobbiamo dimenticare che il rapido sviluppo di questa scienza insieme alle tecnologie ad essa correlate esige la formazione di una mentalità la meno specialistica possibile, elastica, flessibile e critica, per preparare gente in grado domani di poter recepire attivamente ed autonomamente le continue innovazioni; v'è inoltre accanto a queste motivazioni, da sottolineare il discorso propriamente culturale onde evitare che ci si trovi, e il rischio diventa sempre più forte, di fronte ad una colonizzazione dall'esterno, che non tenga conto delle nostre peculiarità sociali, ma di potenti interessi commerciali.

Di seguito verranno date le linee di un progetto di prima alfabetizzazione informatica per la scuola media inferiore come base per l'ulteriore sviluppo nella scuola media superiore.

Ovviamente quanto esposto deve essere riguardato elasticamente; per esempio il programma da svolgere in I media, potrebbe essere opportunamente inserito in IV e V elementare.

Una prima sperimentazione è stata portata avanti dal nostro gruppo presso la scuola media di Quattromiglia a Rende (CS) con 60 ragazzi della I classe a gruppi di 15 per mezzo trimestre (il periodo programmato era un trimestre) con quattro ore extrascolastiche settimanali, mediamente due di lezione e due di esercitazione sugli elaborati.

Tale esperienza sarà portata avanti fino alla III media (un trimestre all'anno con quattro ore settimanali), coinvolgendo via via le nuove leve; alle lezioni presenziano alcuni docenti di Matematica i quali inoltre seguono dei seminari in corrispondenza ad alcuni degli argomenti trattati.

2. Il problema del linguaggio

Si presenta questo come uno dei nodi cruciali, in quanto condiziona l'intera impostazione del programma. Scartando linguaggi significativi ma complessi o semplici ma terribilmente diseducativi come il Basic, la scelta è caduta sul Logo, di cui esistono delle versioni in lingua italiana (cosa importantissima).

Il Logo fu sviluppato all-MIT, da un gruppo di lavoro guidato da S. Papert, con caratteristiche tali da essere fruibile immediata mente dai bambini, sin dalla primissima scolarizzazione e sufficientemente dotato da poter supportare un'ampiezza di estensione, sì da diventare sufficientemente generale.

I due requisiti furono soddisfatti da un lato implementando il Logo, sugli schemi del Lisp, potente linguaggio usato nel campo dell'Intelligenza Artificiale, dall'altro avendo come punto di riferimento gli studi psicologici di Piaget, di cui Papert fu allievo.

Non abbiamo giudicato però sufficiente un programma di scuola media tutto basato sul Logo, ed abbiamo sviluppato una estensione del Logo, ancora in fase sperimentale, che riporta le più importanti peculiarità del linguaggio Pascal.

Ciò permetterebbe allo studente di passare quasi naturalmente da un linguaggio procedurale come il Logo ad uno del tipo di Von Neumann come il Pascal e si verrebbe così a determinare nel periodo di massima maturità dello studente, prima di andare alla scuola media superiore, un'ampia esperienza, forse eccessivamente vincolata ad una mentalità procedurale, ma sufficientemente orientata ad una mentalità algoritmica corretta e generale, che permetta di staccarsi dal cordone ombelicale del Logo, per acquisire in breve, efficientemente e con una certa autonomia altri linguaggi di programmazione.

La scelta del Logo impone anche un'analoga metodologia di approccio per tutti quegli argomenti non riferibili al corso di Matematica, nel senso che si preferisce, ove possibile, introdurli nel momento in cui lo studente è stimolato a ciò nel corso della propria esperienza. A titolo esemplificativo la struttura dell'elaboratore viene introdotta brevemente all'inizio del corso, viene ripresa ed approfondita durante questo ed infine completata circa alla fine del II anno.

3. I contenuti di Matematica

Si giudica che i seguenti argomenti di Matematica, in parte già presenti nei curricula della scuola media inferiore, debbano essere correlati al programma di Informatica e quindi introdotti con taglio appropriato:

I classe: aritmetiche non decimali (con particolare riferimento alla aritmetica binaria) e problemi di codifica, algebra booleana.

II classe: elementi di calcolo delle probabilità e statistica.

III classe: accenni alla ricorsività ed alla analisi ricorsiva dei problemi, accenni alle grammatiche generative.

4. Gli strumenti e l'esperienza

Abbiamo a disposizione un'aula attrezzata con cinque unità complete Commodore 64 (una per tre studenti) e una per il docente con un televisore a colori in più. Da notare che il costo totale relativamente al materiale informatico è stato contenuto a circa 7 milioni.

Del programma del primo anno è stato sviluppato poco meno della metà per i soliti ritardi organizzativi, e precisamente la parte più intuitiva di primo approccio, cioè la "geometria della tartaruga" insieme alle prime nozioni sulla struttura ed il funzionamento dell'elaboratore, si è fatto riferimento ai problemi di codifica ed all'aritmetica in base due, ma non tutti gli studenti possedevano l'appropriato retroterra matematico.

L'esperienza, anche se breve, è stata positiva, soddisfacente ed anche gratificante per studenti e docenti, per quanto riguarda la Matematica è stata notevole la simbiosi instauratasi, anzi per taluni studenti vi è stato un recupero e senz'altro un approfondimento di concetti matematici proprio tramite l'uso dell'elaboratore e grazie alla metodologia piagetiana insita nell'approccio adottato.

Luciana Zuccheri
Istituto di Matematica dell'Università degli Studi di Trieste

Analisi di alcuni problemi che scaturiscono dall'uso del computer nelle discipline scientifiche: una proposta didattica

Nella scuola secondaria superiore si va diffondendo sempre più, ora anche secondo direttive del Ministero della Pubblica Istruzione, l'uso di macchine calcolatrici ed, in particolare, di personal computers, che vengono utilizzati nella didattica delle varie discipline. Sono mezzi che possono risultare validi in molti campi di studio, quando siano usati correttamente, sia dal punto di vista della istruzione assistita dal calcolatore (quando però questa, a mio parere, non sostituisca il lavoro dell'insegnante, ma sia solo un complemento), sia per lo studio dei principi d'informatica (che devono ormai far parte del nostro patrimonio culturale, in un mondo che si va sempre più "informatizzando"), sia, ancora, nel loro uso più "naturale", ovvero come mezzi di calcolo, sia per la matematica, che per la simulazione di fenomeni della fisica, della chimica, ecc.

Soprattutto in quest'ultimo caso, però, l'uso del computer (o della calcolatrice tascabile), non può essere indiscriminato ed acritico,se non si vuole rischiare di travisare completamente la funzione del calcolatore e l'essenza stessa delle materie studiate.

Occorre che lo studente, prima di accingersi ad effettuare dei calcoli o, più in generale, ad impostare dei programmi che riproducano degli algoritmi, venga a conoscenza di alcune nozioni fondamentali sul "funzionamento" della macchina che sta per usare, ovvero sul trattamento dei numeri, sui processi di approssimazione e relativi errori.

Tali argomenti, che non sono solo di tipo informatico, ma sono matematica vera e propria, sono quelli che stanno alla base di tutti i corsi universitari di Analisi Numerica, e, quindi, sarà proprio compito dell'insegnante di matematica quello di proporli ai propri allievi. Il fatto che vengano insegnati anche all'Università, sebbene in maniera più approfondita, non vuol dire che siano troppo difficili, ed anzi ritengo che possano essere compresi anche da studenti dei primi anni di scuola secondaria superiore, anche perché possono essere supportati da molti esempi ed esercizi di carattere estremamente elementare.

L'esigenza di trattare tali argomenti nella scuola secondaria superiore è sorta spontaneamente nell'ambito del corso pluriennale su: "Didattica e computer", che si sta svolgendo già da tre anni nella Regione Friuli-Venezia Giulia, coordinato da docenti del Nucleo di Ricerca didattica di Trieste, col supporto dell'I.R.R.S.A.E. della nostra Regione.

Il lavoro è stato svolto in collaborazione con il prof. A. Bellen, docente di Analisi Numerica presso l'Università degli Studi di Trieste.

L'itinerario didattico proposto (per studenti della scuola media superiore) è il seguente.

PRIMA PARTE

Dapprima bisognerebbe sensibilizzare gli studenti sul fatto che, volendo studiare un fenomeno (ad esempio fisico: moto di un pendolo, o biologico: accrescimento di una popolazione...), ci si trova difronte, man mano che si procede, a diversi tipi di "errori" (nel senso di "approssimazione").

Innanzitutto vi sono gli errori inerenti al problema stesso, che dipendono dagli strumenti di misura (quando questi intervengono) e dalla schematizzazione usata per ridurre il problema in termini matematici (ad es., per il pendolo, possiamo semplificare il problema non considerando l'attrito, o, per l'accrescimento di una popolazione, considerare le risorse illimutate, ecc.).

Una volta stabilito il modello da studiare,si tratterà di effettuare dei calcoli con degli algoritmi, che, in quanto tali, dovranno essere costituiti da un numero finito di passi. Se, per ottenerli, dovremo troncare un processo che ne richiederebbe invece infiniti (ad es., calcolo di una serie, oppure suddivisione di un intervallo in intervalli di ampiezza sempre minore,...), introdurremo un altro tipo di errore, valutabile però teoricamente, a priori, se valgono opportune i potesi sulle funzioni in gioco. Chiameremo tali errori: "errori di troncamento"(nel senso di "troncamento dei calcoli"). Naturalmente tale discorso esige un approfondimento a parte, che si effettuerà accompagnando sempre i metodi numerici studiati con le opportune stime di errore.

Infine, ed è questo, il tema principale della presente comunicazione, si arriverà a considerare gli errori dovuti al calcolo effettivo delle soluzioni, che è soggetto ad arrotondamenti, quando si lavori con dati approssimati, sia che si voglia eseguirlo manualmente o al computer.

Soffermando la nostra attenzione sull'uso del computer, sarà a questo punto opportuno presentare agli studenti la rappresentazione "floating point", che è la più usata comunemente, con troncamento o arrotondamento della mantissa del numero reale che si vuole rappresentare.

Vi saranno tre considerazioni importanti da fare:

1) il calcolatore lavora con "numeri di macchina", che sono, in pratica, numeri che ammettono una rappresentazione decimale finita, intervallati in un certo modo; indagando sulle loro proprietà, sarà interessante notare come l'insieme costituito da tali numeri sia ben distante da quello dei numeri reali, poiché è finito e, oltre a non possedere la fondamentale proprietà della continuità, che utilizziamo spesso nello studio dell'Analisi Matematica, non ha la proprietà della stabilità rispetto alle operazioni di somma, prodotto, ecc. ciò risulterà utile per lo scopo che ci si è prefissato (ovvero conoscenza della macchina) e servirà anche per mettere in risalto, come in un effetto di chiaroscuro, le proprietà dei numeri reali (o razionali);

2) i risultati delle operazioni aritmetiche eseguite al calcolatore sono soggetti ad arrotondamenti e possono quindi diffeire da quelli ottenuti in modo "esatto"; lo stesso dicasi per il calcolo di alcune funzioni elementari, che sono inoltre ottenute con particolari procedimenti di approssimazione;

3) il modo più opportuno per valutare l'approssimazione di un numero reale x mediante un numero di macchina $\tilde{x}$, è quello di considerare l'errore relativo, definito da:

$$E = \frac{\tilde{x} - x}{x}$$

ovvero, non importa tanto la differenza $\tilde{x}-x$, quanto il rapporto, di questa con x stesso; naturalmente sarà spesso opportuno considerare il valore assoluto di E.

Si raggiungerà la prima tappa didattica perciò con l'osservazione che, detti:

fl(x) = numero di macchina che approssima x mediante la rappresentazione "floating point"

b = base del sistema di numerazione usato dal computer

t = numero di cifre della mantissa ammesse dal computer si ha:

$$\frac{|fl(x) - x|}{|x|} < eps \qquad (fl(x)=x(1+E), \text{ con } |E|<eps)$$

dove:

$$eps = b^{1-t} \qquad \text{se il calcolatore tronca}$$

$$eps = 0.5 \; b^{1-t} \qquad \text{se il calcolatore arrotonda}$$

Inoltre, in un buon calcolatore scientifico, dovrà essere:

$$fl(x+y) = (x+y)(1+E_1)$$

$$fl(x*y) = (x*y)\;(1+E_2)$$

....

$$fl(\sin(x)) = \sin(x)*(1+E_n)$$

....

con $|E_i| < eps$.

(Per brevità, con fl(x+y) si intenderà il risultato approssimato della operazione + eseguita al calcolatore, e così via).

SECONDA PARTE

La seconda tappa didattica consisterà nella considerazione del problema della propagazione degli errori. Dopo aver visto, nella prima parte, cosa succede quando ad un dato "esatto" si sostituisca un dato approssimato e quando su dati "esatti" si operi con una singola operazione (o funzione) elementare, ci si porrà infatti il seguente interrogativo: che succede, quando si operi con operazioni affette da errore, su dati anch'essi già affetti da altri errori, o, il che è lo stesso, quando si debbano effettuare più operazioni, una di seguito all'altra, a partire da certi dati?

Tale problema è molto complesso e vi sono svariati metodi per affrontarlo (metodi che fanno uso di strumenti di calcolo differenziale, metodi statistici, aritmetica intervallare, analisi "all'indietro", uso della doppia precisione), ma la loro trattazione completa non è certo a livello di scuola media. Tuttavia, ritenendo essenziale il fatto che lo studente si renda conto del problema, sarebbe opportuno presentargli alcuni esempi trattabili in maniera elementare e relativi agli algoritmi di cui fa uso più di frequente.

Alcuni di tali esempi potrebbero essere i seguenti.

Esempio 1

(Condizionamento della somma)

Dovendo calcolare: $y = a+b+c$, ammesso che le operazioni siano eseguite in modo esatto, che influenza avrà sul risultato una piccola variazione dei dati iniziali?

Per studiare questo problema, si potrà prima portare degli esempi numerici, per poi analizzare con semplici mezzi quanto accade in generale. Infatti, detti:

$\tilde{a}=a(1+E_a)$; $\tilde{b}=b(1+E_b)$; $\tilde{c}=c(1+E_c)$

si tratterà di calcolare il valore di $\tilde{y}=\tilde{a}+\tilde{b}+\tilde{c}$, concludendo, che:

$$E_y = \frac{\tilde{y}-y}{y} = \frac{a}{y} E_a + \frac{b}{y} E_b + \frac{c}{y} E_c$$

Tale espressione evidenzia quanto i tre coefficienti (indici di condizionamento) a/y, b/y, c/y possano influire sull'errore finale.

Esempio 2

(Non validità della proprietà associativa per la somma in macchina)

Dovendo sempre calcolare: $y=a+b+c$, considerando ora i dati esatti, ma le operazioni affette da errore, i seguenti algoritmi daranno lo stesso risultato?

I) $y=(a+b)+c$

II) $y=a+(b+c)$

Dopo aver verificato, con opportuni esempi numerici, che i risultati possono differire notevolmente, anche in questo caso si potrà procedere alla trattazione del problema in generale, in quanto, ricorrendo al concetto di errore relativo, essa riesce molto elementare.

Infatti, per l'algoritmo I), detto $z=(a+b)(1+E_1)$ si calcolerà $y=(z+c)(1+E_2)$, trovando che l'errore relativo rispetto ad y sarà, a meno di termini del tipo kE_1E_2, che possiamo trascurare se il numero di cifre usato per la mantissa è sufficientemente grande:

$$E_y = \frac{\tilde{y}-y}{y} \cong E_2 + \frac{a+b}{y} E_1$$

Analogamente, per l'algoritmo II) si troverà:

$$E'_y = \frac{\tilde{\tilde{y}}-y}{y} \cong E_4 + \frac{b+c}{y} E_3$$

(con $|E_i|<eps$).

Sarà quindi evidente che non vale la proprietà associativa, ma anche che, potendo valutare a priori, anche in maniera grossolana, i valori $(a+b)$ e $(b+c)$, è possibile scegliere quello dei due algoritmi che darà luogo ad un errore relativo minore e, quindi, ad un risultato finale migliore.

Esempio 3

(Sistemi lineari)

Qui non ci si propone di trattare in modo esauriente il problema del condizionamento dei sistemi lineari, ma di affrontarne semplicemente una parte, e cioè:

Dato un sistema lineare del tipo:
$$\begin{cases} ax+by = c \\ a'x+b'y = c' \end{cases}$$

ammesso di aver ricavato il valore dell'incognita y (ottenendo $\tilde{y}=y(1+E_y)$), è meglio ricavare l'altra incognita dalla prima o dalla seconda equazione?

Anche in questo caso, dopo aver visto con degli esempi numerici che i risultati ottenuti possono essere diversi nei due casi, si troverà che si può valutare a priori quale delle due strade convenga seguire, visto che, sostituendo $\tilde{y}$ nella prima equazione, si ottiene un errore relativo dato da:

$$E_x = \frac{\tilde{x}-x}{x} \cong -\frac{b}{a}\,\frac{y}{x}\,E_y + E_1 \qquad \left(\text{dove: } \tilde{x} = \frac{c-b\tilde{y}}{a}(1+E_1)\right)$$

mentre, sostituendo $\tilde{y}$ nella seconda equazione, si avrà:

$$E'_x = \frac{\tilde{\tilde{x}}-x}{x} \cong -\frac{b'}{a'}\,\frac{y}{x}\,E_y + E_2 \qquad \left(\text{dove: } \tilde{\tilde{x}} = \frac{c'-b'\tilde{y}}{a'}(1+E_2)\right)$$

La scelta dell'algoritmo migliore sarà stabilita in base al valore dei coefficienti b/a e b'/a'.

Esempio 4

(Equazione di II grado)

Uno dei primi algoritmi che ci si accinge a programmare, per esercizio, su di un computer è quello risolutivo dell'equazione di II grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Normalmente, viene usata la formula risolutiva:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (\text{supp.} \Delta > 0 \text{ ed } a \neq 0)$$

Si può facilmente mettere in crisi un programma di questo tipo, richiedendo la soluzione di un'equazione come la seguente:

$$x^2 - 100000x + 1 = 0$$

Se il calcolatore lavora, ad esempio, con 8 cifre, otterremo infatti le seguenti soluzioni:

$$x_1 = 10^5 \quad e \quad x_2 = 0$$

Su x_2 si avrà perciò un errore relativo uguale ad 1. Infatti se $|b| \cong \sqrt{\Delta}$, si ha un effetto di cancellazione. In tali casi, conviene ricavare prima, con la formula già citata, la radice di modulo massimo e poi trovare l'altra, ricordando che:

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

Tale considerazione è spiegabile con calcoli piuttosto elementari, ponendo:

$fl\ (\sqrt{\Delta}) = (\sqrt{\Delta})\cdot(1+E)$

e ricavando poi l'errore relativo su $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$. Si otterrà:

$$\frac{\tilde{x}_1 - x_1}{x_1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{-b+\sqrt{\Delta}}\ E \qquad\qquad \frac{\tilde{x}_2 - x_2}{x_2} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{-b-\sqrt{\Delta}}\ E$$

detti, allora:

$$i_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{-b+\sqrt{\Delta}} \qquad\qquad i_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{-b-\sqrt{\Delta}}$$

si osserverà che la radice di modulo massimo viene sempre calcolata meglio dell'altra, in quanto, se $b < 0$, è $|i_1|<1$ e $|i_2|>|i_1|$, e se $b > 0$, è $|i_2|<1$ ed $|i_1|>|i_2|$.

Ammesso allora che sia $b < 0$, e che $\tilde{x}_1$ sia nota con un errore relativo E, rispetto ad x_1, "molto piccolo" in valore assoluto, si troverà che, ricavando x_2 dalla formula:

$$x_2 = \frac{c}{ax_1}$$

si otterrà un risultato affetto da un errore relativo circa uguale ad E.

Bibliografia

Gli esempi a cui ho accennato si trovano anche riportati nell'articolo:

"Problemi di approssimazione nell'uso del computer" (A. Bellen e L. Zuccheri) - Atti del Convegno su "Didattica e Computers", organizzato dall'I.R.R.S.A.E. Friuli Venezia Giuliano, Lignano 1985.

Un approfondimento degli argomenti trattati si può trovare nei capitoli introduttivi di qualunque buon testo di Analisi Numerica.

Si possono consultare, ad esempio, i seguenti:

S.D. Conte- C. de Boor, "Elementary numerical analysis" ed. Mc Graw Hill, 1982.

F. Fontanella-A. Pasquali, "Calcolo numerico", vol. 1 ed. Pitagora, 1978.

P. Henrici, "Essential of numerical analysis with pocket calculator demonstration" ed. John Wiley & Sons, 1982.

J. Stoer, "Introduzione all'analisi numerica", vol. 1, Ed. Zanichelli, 1975.

SABATO 26 OTTOBRE

Benedetto Scimeni

Dipartimento di Matematica - Università di Padova

Attualità e validità dell'aritmetica

Quando la C.I.I.M. mi invitò a prendere la parola in questa sede, proposi subito un argomento apparentemente... disimpegnato: "Aritmetica: si può rendere divertente?". Il titolo corrispondeva al mio ruolo di "dilettante" del settore, e all'importanza che assume questo dilettarsi nell'insegnare e nell'apprendere.

Qualche settimana più tardi, il titolo era stato Prodi-toriamente modificato: "attualità e validità". La buona volontà ad adeguarmi non è bastata a distogliermi dall'originale intenzione, sicché questa conversazione risulterà discontinua: considerazioni generali, qualche esempio di aritmetica divertente, una scelta di argomenti per le scuole secondarie, infine un altro esempio che si conclude con un piccolo programma per il calcolatore.

Dirò subito che ho qui inteso per aritmetica la matematica dei numeri naturali e interi, dai problemi di conteggio (combinatoria) ai primi capitoli della teoria elementare dei numeri.

Considerazioni generali

Nella tradizione scolastica italiana degli ultimi decenni la aritmetica è generalmente trascurata, e spesso non viene affatto nominata nei programmi per le scuole secondarie superiori. Non era così all'inizio del secolo: conservo con cura un libro di "Teoria dei numeri" che veniva consigliato, se non adottato, in un liceo classico della mia città. Non so ricostruire le vere cause di questo passar di moda, ma posso immaginarle legate, per esempio, a considerazioni di tipo utilitaristico: l'aritmetica, si dice, non fornisce metodi generali che siano utili alle altre discipline; i suoi problemi sono per lo più fine a se stessi. Dei numeri primi potremmo anche dimenticare la definizione; ma del teorema di Pitagora o del concetto di derivata, come potrebbero fare a meno tutte le altre scienze e la tecnica? C'è del buon senso in questi argomenti, e resta vero che per lo studio della Fisica, per esempio, la geometria analitica, il calcolo differenziale e un po' di trigonometria sono strumenti di lavoro indispensabili, sicché l'aritmetica, a confronto, può sembrare una sorta di passatempo intellettuale di lusso.

Ma è innegabile che in questi ultimi decenni la situazione si sta rapidamente evolvendo in modo imprevedibile, soprattutto per l'impetuoso ingresso del calcolatore nella ricerca e nella tecnologia: gli integrali tornano ad essere somme, i differenziali differenze finite, e insomma la matematica "continua" cede sempre più spazio a quella "discreta", il controllo "analogico" diventa "digitale"... Né si vede se e quando questa tendenza si fermerà. E' chiaro che le conseguenze si sono avute anche in molti programmi universitari, e il calcolo combinatorio e aritmetico è stato necessariamente rivalutato dalla comparsa di tante nuove discipline, quali le teorie dei grafi, dei giochi, dei codici.

Ma qui interessano argomenti più vicini alla professione di insegnante nella scuola secondaria. Manteniamo pure il punto di vista "utilitario" e pensiamo ai nostri programmi di matematica. Come vorremmo diffondere le basi della probabilità se non avremo premesso un po' di combinatoria? E come oseremo parlare di strutture algebriche se non potremo disporre, come esempio non banale, almeno delle classi di resti? Se poi ci proponiamo di introdurre nelle classi il "personal computer", che molti riconoscono oggi come un'impellente necessità, allora l'aritmetica si rivela un capitolo quanto mai attuale per due ordini di motivi. Da un lato, esistono molte questioni di combinatoria e di teoria dei numeri che difficilmente si prestavano al calcolo manuale (si pensi agli enormi numeri in cui ci trascina il fattoriale di n, o al problema di valutare se è plausibile che i primi "si diradino"). Questi problemi si illustrano oggi in modo molto semplice, perché il calcolatore fornisce una gran quantità di dati sperimentali (esempi: per quali n è il primo numero 2^n-1? quali numeri sono somma di due quadrati? qual è la più piccola soluzione di una congruenza lineare?). che spesso suggeriscono addirittura la giusta congettura.

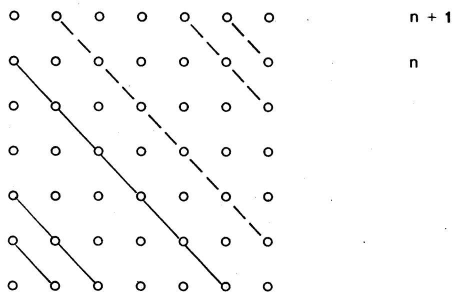
D'altra parte, un docente di matematica che si accinga a insegnare ai suoi studenti i primi rudimenti della programmazione, troverà l'aritmetica particolarmente adatta allo scopo, perché problemi facili, difficili o addirittura aperti si lasciano impostare spesso con pochissime istruzioni, cioè con algoritmi di grande semplicità, che lo studente è in grado di scrivere da sé e di collaudare dopo poche ore di pratica alla tastiera.

Ma è tempo di lasciar da parte questo genere di argomenti, che volevano incoraggiare un ritorno all'aritmetica come sussidio ad altri capitoli. Chiediamoci ora piuttosto: ha l'aritmetica una sua intrinseca importanza dal punto di vista didattico? e se così è, perché è invece passata di moda? Anzitutto, è inutile nascondersi che si tratta di argomenti difficili. Anche per molti matematici professionisti il calcolo combinatorio rappresenta un vero incubo: non si sa da che parte affrontare il problema, e spesso si commette l'errore di trascurare qualche eventualità o di contare più volte la stessa cosa. Quanto alla teoria elementare dei numeri, la semplicità de gli enunciati contrasta spesso con la difficoltà di dimostrarli; i diversi problemi richiedono metodi differenti, e se si parte con il... piede sbagliato, si rischia di arrovellarsi giorni e giorni alla ricerca di un risultato che per altra via si otterrebbe subito. In altre parole, l'aritmetica non si lascia attaccare con un metodo generale, che si possa mettere a punto a poco a poco (come sono ad esempio, la geometria analitica e la trigonometria). Non contanto tanto la sistematicità e l'esperienza quanto piuttosto la fantasia e un certo spirito spregiudicato, che spesso mancano proprio al professore di matematica e al ... primo della classe! Ecco perché certi problemi vengono risolti più facilmente da un ragazzino di dieci anni piuttosto che da un liceale o dal suo insegnante. E proprio questo aspetto -se ben sfruttato - può recuperare la curiosità e talvolta l'amor proprio di qualche ragazzo intelligente ma svogliato, che abbia perso interesse alla matematica tradizionale, deluso dalle pignolerie e stanco dei procedimenti di routine. Ma se si vuole che questo programma si applichi a un consistente numero di studenti, e non a una piccola élite, è indispensabile dedicare gran cura al modo di proporre i problemi. E' qui che entrano in ballo l'aspetto "divertimento", l'effetto "sorpresa". Non so descriverli meglio che fornendo qualche esempio, che ritengo meritevole di essere pubblicizzato.

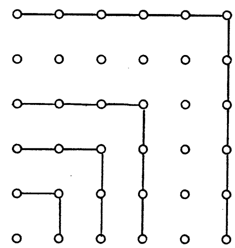
Aritmetica divertente:

Poiché in Italia non mi sembra che vi sia una tradizione in materia, cercherò di descrivere con esempi quella "grafica dei numeri interi" che a mio avviso è una ricetta efficace - se non infallibile- per rendere affascinanti una quantità di probmemi aritmetici che potrebbero altrimenti apparire astratti o irrilevanti. Si tratta sostanzialmente di recuperare l'uso della carta quadrettata, o il vecchio quaderno "a quadretti grandi". Chiameremo reticolato intero (qualcuno dirà "reticolo") un piano su cui siano segnati i punti a coordinate intere; nella carta a quadretti, più che le linee ci interesseranno dunque le loro intersezioni.

Per incominciare, il reticolato può facilitare il compito di contare gli elementi di certi insiemi. Le figure che seguono illustra no le note formule per la somma dei primi n numeri naturali e quella dei primi n numeri dispari. Ma ogni progressione aritmetica suggerisce qualche grafico. Uno dei più noti e utili tra i grafici combinatori è quello che illustra sia la genesi induttiva che il significato combinatorio del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$. Conviene qui girare il



$(n+1)^2 = n+1 + 2\ (1+2+3+ \ldots +n)$

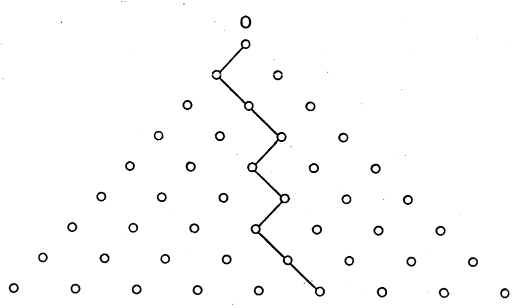


$n^2 = 1+3+5+ \ldots +2n-1$

reticolato di 45 gradi. La figura rappresenta un percorso da O a P, in discesa, realizzato con 8 tratti rettilinei; negli 8 incroci si è scelta la strada di destra (d) oppure quella di sinistra (s) secondo lo schema:

(d,s,s,d,s,d,s,s)

che si può anche rappresentare in "bianco e nero": ○●●○●○●●



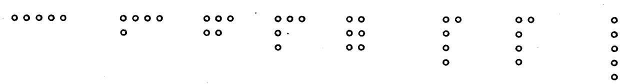
Per arrivare a P si sarebbero potuti seguire tanti percorsi diversi da quello della figura, e cioè tutti quelli che svoltano 3 volte a destra e 5 a sinistra. Il loro numero è dunque eguale a quello delle possibili scelte di cinque oggetti (neri) su un totale di 8. Quel numero si indica con $\binom{8}{5}$. Poiché a P si perviene soltanto attraversando uno dei due incroci immediatamente sovrastanti P, risulta $\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5}$. Generalizzando, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ è il numero di sottoinsie mi di k elementi in un insieme che ha n elementi. Poiché ogni incrocio consente due scelte, i percorsi di n passi sono in numero di $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+$ $+ \,..\, +\binom{n}{k}+ \,..\, +\binom{n}{n} = 2^n$ e questo è dunque anche il numero dei sottoinsiemi in un insieme che ha n elementi.

E' davvero inconsueto ottenere una tanto ricca messe di risultati con così poca fatica: ora il triangolo di Tartaglia ha un significato più naturale.

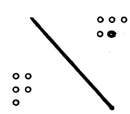
Meno familiare, ma importante anche in molte applicazioni, è la nozione di "partizioni di n", cioè il numero p(n) di modi in cui n si può ottenere come somma di addendi (prescindendo dal loro ordine). Per esempio, p(5) = 7, perché le 7 addizioni possibili sono

5   4+1   3+2   3+1+1   2+2+1   2+1+1+1   1+1+1+1+1

Se utilizziamo il reticolato intero per costruire le 7 rappresentazioni



ci accorgiamo di un'imprevedibile simmetria: cambiando le righe con le colonne nelle figure, le partizioni si permutano e diventano ordinatamente le seguenti:

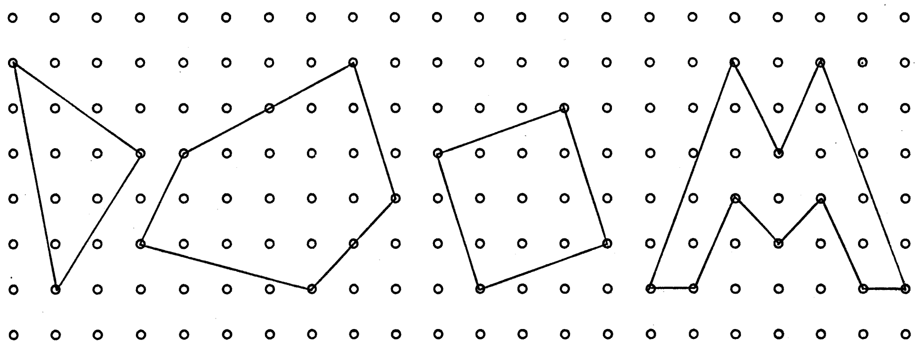


1+1+1+1+1   2+1+1+1   2+2+1   3+1+1   3+2   4+1   5

Questa semplice osservazione consente di dimostrare immediatamente qualche piccolo curioso teorema, come il seguente: il numero di modi in cui n si ripartisce in addendi minori di m eguaglia il numero di modi in cui n si ripartisce in meno di m addendi.

Lasciamo ora il calcolo combinatorio, e passiamo ad un argomento poco noto, a cavallo tra aritmetica e geometria. Si tratta di un teoremino classico che illustra bene, a mio parere, le caratteristiche che abbiamo descritto prima, tipiche di un teorema di aritmetica, e cioè: 1) l'enunciato è soprendente; 2) la dimostrazione, se condotta con un po' di fantasia e di libertà, è elementare; 3) le "applicazioni" sono più generali di quanto a prima vista si direbbe.

Utilizzando il solito reticolato, disegnamo a nostro piacere alcuni poligoni "interi", cioè i cui vertici siano tutti punti interi.
Ci poniamo il problema di calcolarne velocemente l'area.



i =	6	15	9	9
c =	3	7	4	10
A =	$6\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	10	12

Per ciascun poligono contiamo

i = il numero dei punti interi che cadono internamente

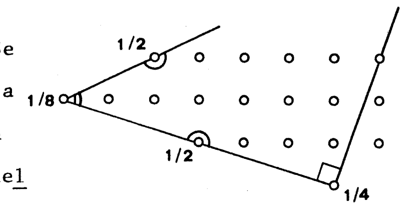
c = " " " " " " " sul contorno

In pochi secondi siamo in grado di calcolare l'area con la formula

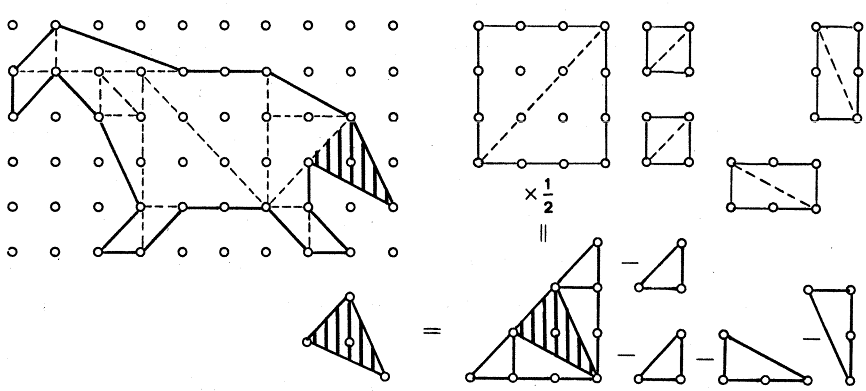
$$A = \frac{1}{2} c + i - 1$$

che ci accingiamo ora a dimostrare, procedendo per successivi passi.
1° passo. Cambiamo un po' il problema: immaginiamo che i punti interi da noi contati abbiano un'estensione finita, anzi una sorta di consistenza materiale, quasi si trattasse di ... mele contenute in una cassetta. La mela è intera se è all'interno, ma è tagliata sul contorno. Quale porzione di mela è contenuta nel recipiente poligonale? E' chiaro che lungo i lati le mele sono dimezzate, mentre in un vertice lo spicchio è una frazione di mela corrispondente alla misura (in angoli giri) dell'angolo interno. E' noto che in un poligono di n lati la somma degli angoli
è pari a n-2 angoli piatti; dunque il con

tributo in mele dei vertici è $\frac{1}{2}(n-2)$. Se lungo i lati vi sono j mele dimezzate, la formula $\frac{1}{2}(n-2)+\frac{1}{2}j+i = \frac{1}{2}c+i-1$ fornisce in definitiva il numero di mele contenuto nella cassetta. Rimane da dimostrare che l'area eguaglia il numero delle mele.

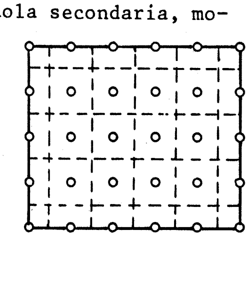


2° passo. Osserviamo che le quantità "area" e "contenuto in mele" sono entrambe additive, nel senso che se una cassetta si suddivide in sottocassette mediante tramezzi, il contenuto e l'area si ottengono sommando i contributi parziali. D'altra parte è evidente, guardando il reticolato, che ogni poligono intero si suddivide in triangoli che sono "dritti" (cioè hanno i cateti verticali o orizzontali) oppure si ottengono per differenza di triangoli dritti. A sua volta, ogni triangolo dritto è la metà di un rettangolo dritto che, per simmetria, contiene il doppio delle mele. In conclusione, la dimostrazione "area = N° di mele" si può ricondurre ai soli rettangoli dritti.



3° passo. Ma per questi rettangoli la dimostrazione è immediata. La figura accanto, suggerita da uno studente di scuola secondaria, mostra il rettangolo suddiviso in porzioni la cui area è esattamente 1, $\frac{1}{2}$ oppure $\frac{1}{4}$ in corrispondenza alle mele contenute.

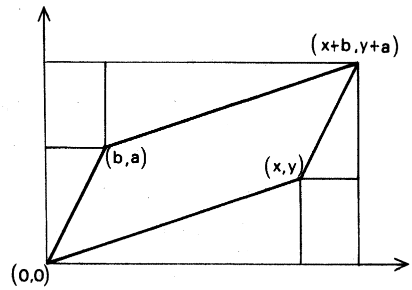
Così la dimostrazione è conclusa.



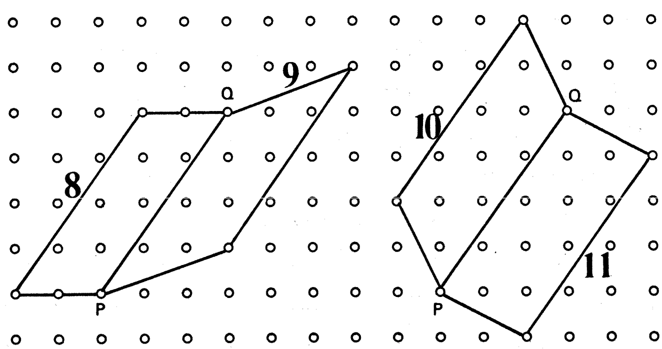
Questo teorema dà l'impressione di essere niente più che una curiosità. Ma in seguito vedremo una sua semplice applicazione che produce un fondamentale risultato di aritmetica. Oltre al teorema "delle mele", avremo bisogno della formula

$$A = \begin{vmatrix} a & y \\ b & x \end{vmatrix} = ax - by$$

che fornisce l'area di un parallelogramma come determinante delle coordinate dei suoi vertici. Anche la dimostrazione di questa formula è elementare, ed è riassunta in calce alla figura. Il problema dell'esistenza di soluzioni intere per la equazione $ax - by = n$ sarà legato al seguente quesito: Assegnati due punti interi P,Q e un numero naturale n, esiste un parallelogramma intero PQP'Q' che abbia area n ?



$(x+b)(y+a)=2by+ba+xy+A$



Argomenti di aritmetica per la scuola secondaria

Prima di elencare gli argomenti, sarà bene precisare che un tale inserimento sembra raccomandabile purché siano verificate alcune condizioni. Anzitutto, l'insegnante deve avere un ragionevole tempo a sua disposizione, e non -per esempio- le striminzite due ore settimanali del Ginnasio. Forse non è il caso di dedicare all'argomento un intero periodo dell'anno, ma piuttosto di usare l'aritmetica per interrompere qui e lì qualche argomento più sistematico. Quanto al livello scolastico, in prima approssimazione si potrebbero trattare nel biennio alcune questioni che non escono dall'ambito dei numeri naturali, quali

1) il principio di induzione
2) il calcolo combinatorio
3) il teorema fondamentale dell'artimetica (divisibilità e primi) lasciando al triennio altri argomenti che si possono discutere meglio nell'ambiente dei numeri interi, quali
4) l'equazione diofantea $ax+by = c$ con l'algoritmo di Euclide
5) le congruenze (mod n) e l'anello delle classi resto $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Gli argomenti precedenti si potrebbero ritenere obbligatori in un programma di "matematica per tutti" che disponesse appunto di orari ragionevoli. In qualche scuola si potrebbe continuare con
6) questioni sui periodi decimali
7) problemi di 2° grado.

Fermiamo qui l'elenco, ma è chiaro che molte altre scelte sono accettabili, e anzi è indispensabile che l'insegnante abbia, una volta tanto, la sensazione di poter svolgere o meno un certo argomento in corrispondenza ai suoi gusti e alla sua .. gratificazione, senza dare troppa importanza all'esaurire un certo programma, ma dedicando piuttosto la massima cura a rendere piacevole la trattazione. Se questo avverrà, nessuno studente si porrà mai il problema dell'utilità dell'aritmetica, e la causa generale dell'educazione scientifica ne trarrà comunque vantaggio.

Nell'elenco che segue, accanto alle nozioni da apprendere (definizioni ed enunciati di teoremi) compaiono alcuni quesiti, che le possono motivare e illustrare. La presenza dell'asterisco denota la possibilità di affrontare il problema creando un opportuno algoritmo e un programma per il calcolatore.

1) INDUZIONE

Buon ordinamento	⁘	Trovare il minimo in un insieme di numeri naturali
Definizioni per ricorrenza	⁘	Progressioni aritmetiche e geometriche
	⁘	Serie di Fibonacci
	⁘	Fattoriale e coefficienti binomiali
Dimostrazioni per ricorrenza		Qual è la somma di una progressione?
		Quanti sono i sottoinsiemi di 1,2,..n?
		Qual è la somma degli angoli interni in un n-gono?
Divisione (con resto)	⁘	Cambiamenti di base di numerazione

2) CALCOLO COMBINATORIO

n-ple: k^n	Quante sono le schedine 1,2,X ?
combinazioni: $\binom{n}{k}$	Quante targhe si scrivono con due lettere e 6 cifre?
permutazioni: n!	Quante squadre di k elementi si possono formare disponendo i n giocatori?
	Quante sono le diverse classifiche di n squadre?
partizioni: p(n)	In quanti modi possono essere cambiate 1000 lire?
[Probabilità]:	: di estrarre due assi dal marzo
	di far 12 con 2 dadi
	di vincere un terno al lotto
	di avere un poker servito

3) DIVISIBILITA'

Divisibilità (come ordine parziale)	⁘	Elencare i numeri primi minori di n
		Crivello di Eratostene
Numeri primi (come irriducibili)		I numeri primi sono infiniti?
	⁘	Come si trovano i fattori primi di n ?
Fattorizzazione unica;		per capire l'enunciato:
		Se ci fossero solo numeri del tipo 3k+1, chi sarebbero gli irriducibili? e sarebbero "primi"?

mcm$[a,b]$: ogni multiplo comune è multiplo di $[a,b]$

MCD(a,b) = $ab / [a,b]$; ogni divisore comune è divisore di (a,b)

Ogni irriducibile è primo: se p divide ab allora divide a oppure b

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$

(n) Quanti sono i divisori di n?

(n) Qual è la somma dei divisori di n?

(n) Quanti numeri minori di n sono primi con n?

4) ARITMETICA NEGLI INTERI

Estensione agli interi di: divisibilità, divisione, primi, MCD, mcm.

Algoritmo delle divisioni successive per il calcolo del MCD.

L'equazione $ax + by = c$ — Quando ammette soluzioni?

⁙ Come si calcola una soluzione?

⁙ Come si calcolano tutte le soluzioni? E quelle positive?

5) CONGRUENZE

Equivalenze e congruenze (compatibilità con le operazioni)

L'anello $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ — Quali elementi sono invertibili?

⁙ Come si calcola l'inverso?

Teorema cinese del resto

(Teoremi di Wilson $(p-1) \equiv -1$ e di Fermat $x^p \equiv x \mod p$)

6) PERIODI DECIMALI

Frazioni generatrici — ⁙ Quante cifre ha il periodo di $1/p$? E quello di m/p ? quali cifre compaiono?

7) PROBLEMI QUADRATICI

Terne pitagoriche — ⁙ Quali sono le "prime" terne pitagoriche?

Primi $\equiv 1$ e 3 mod 4 — ⁙ Quali primi sono somme di due quadrati?

Le serie di Farey

Scegliamo un numero naturale n e consideriamo tutte le frazioni $\frac{a}{b}$ proprie ($a < b$) e ridotte ($MCD(a,b)=1$) che si possono scrivere utilizzando i soli numeri 1,2, .., n-1, n. Per esempio, per n=7 si tratta delle frazioni

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3},\frac{2}{3};\ \frac{1}{4},\frac{3}{4};\ \frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5};\ \frac{1}{6},\frac{5}{6};\ \frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}$$

Se a queste frazioni aggiungiamo, per nostra comodità, $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$ e ordiniamo questo insieme di numeri razionali nel solito modo, otteniamo la cosiddetta (n-esima) "serie di Farey F_n : $\frac{0}{1},\frac{1}{n}$, .. , $\frac{n-1}{n},\frac{1}{1}$
Per esempio, F_7 è la seguente:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{1}{1},$$

Nel primo '800 il geologo inglese Farey, che evidentemente si dilettava di aritmetica, pubblicò, senza dimostrazioni, due sorprendenti osservazioni, poi chiamate "prima e seconda legge di Farey":

1) se (in F_n) due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sono consecutive, allora $bc-ad=1$

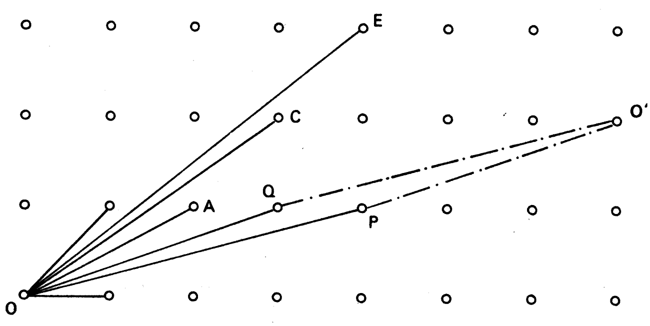
2) se (in F_n) tre frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ sono consecutive, allora $\frac{a+e}{b+f}=\frac{c}{d}$

Per esempio, in F_7 sono consecutive $\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3}$; e infatti risulta

1) $7x3 - 4x5 = 1 = 5x2- 3x3$; 2) $\frac{4+2}{7+3}=\frac{3}{5}$.

Questi enunciati, osservati casualmente da un dilettante, non sfuggirono all'attenzione di Cauchy, che dopo qualche anno ne pubblicò una dimostrazione. Oggi le serie di Farey non sono soltanto una curiosità; esse compaiono inopinatamente in vari capitoli della matematica, anche con metodi geometrici, utilizzando il teorema "delle mele".

Quanto alla prima legge, osserviamo più generalmente che il confronto tra due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ nell'ordine naturale dei razionali si fa proprio introducendo il determinante $D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Allora $\frac{a}{b} \lesseqgtr \frac{c}{d}$ significa $D \lesseqgtr 0$ e dunque D misura, in certo qual modo, una "distanza" tra le frazioni. Dobbiamo dunque provare che in una serie di Farey due frazioni contigue hanno distanza minima, cioè $D = \pm 1$. A questo scopo, riprendiamo il reticolato intero; rappresentiamo la frazione $\frac{a}{b}$ con il punto P(b,a) e congiungiamolo con l'origine. Allora la serie F_n produce una serie di segmenti OP di pendenza $\frac{a}{b}$ crescente. Poiché le frazioni sono ridotte, nessuno di questi segmenti incontra punti interi diversi dagli estremi. Se ora due tali segmenti OP, OQ sono "contigui", il parallelogramma OPO'Q non contiene al suo interno alcun punto intero (che produrrebbe un segmento intermedio) e dunque, per il teorema "delle mele" (c=4, i=0, n=4) ha area unitaria $A = \pm 1$. Ma questa è la prima legge di Farey perché l'area è proprio eguale a $|D|$.



Quanto alle seconda legge, osserviamo preliminarmente che la frazione "mediante" $\frac{a+e}{b+f}$ si inserisce in ogni caso tra le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ nell'ordine naturale. Geometricamente, si tratta infatti della pendenza della diagonale del parallelogramma O A(b,a)M(b+f,a+e) E(f,e). Osserviamo anche che la retta per O, M è il luogo dei punti X per cui i triangoli OAX,OXE hanno eguale area. Supponiamo ora che $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ siano consecutive in qualche F_n. Allora (per la prima legge) $ad-bc= -1 = cf-de$ significa che il punto C(d,c) sta su quella retta. Ma allora O, C, M sono allineati, e dunque la seconda legge è provata: $\frac{a+e}{b+f} = \frac{c}{d}$.

Affinché non sembri che ci siamo troppo allontanati da quei programmi di aritmetica che abbiamo suggerito "per tutti", applichiamo subito questi risultati alla discussione dell'equazione "diofantea" $ax+by=1$. Ci limiteremo, per semplicità, a considerare l'equazione $ax - by = 1$ con l'ipotesi $0 < a < b$. Se MCD(a,b)=1, la frazione $\frac{a}{b}$

compare nella serie di Farey F_b; se in essa le frazioni $\frac{y}{x}$, $\frac{a}{b}$ sono consecutive, allora (la legge) (x,y) sono una (particolare) soluzione della equazione, e anzi risulta $y<x\leq b$. Abbiamo così provato la parte non banale del teorema "L'equazione ax+by=c ha soluzioni (intere) se e solo se c è multiplo del MCD(a,b)". Con riferimento al problema lasciato sospeso nel precedente paragrafo, è ora chiaro che la possibilità di contenere un arbitrario numero di "mele" per un parallelogramma intero PQP'Q' è condizionata all'ipotesi che, riferite all'origine P, le coordinate di Q siano prime tra loro.

Ma questo è un teorema di esistenza, e subito ci chiediamo come si possa calcolare effettivamente una soluzione. E' noto che lo algoritmo di Euclide fornisce (rimontando i resti) una soluzione. Ma la seconda legge di Farey suggerisce un algoritmo alternativo che ora vogliamo esporre.

Partendo con le frazioni $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$ iteriamo la costruzione della "mediante" mirando ad ottenere la frazione $\frac{a}{b}$. Illustriamo il procedimento con un esempio. Sia $11x - 25y = 1$ l'equazione di partenza. Consideriamo la frazione $\diamond = \frac{11}{25}$ e costruiamo medianti successive, come nel seguente schema: è compresa tra $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$ (scriviamo $\frac{0}{1} \diamond \frac{1}{1}$). Costruiamo la mediante $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ e, con riferimento alle tre frazioni $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$ vediamo dove si inserisce $\diamond$. Calcoliamo $D = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 25 \end{vmatrix} = 3>0$ e troviamo che cade tra le prime due frazioni.

Stadio 1: $\frac{0}{1} \diamond \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$ Tra queste calcoliamo la mediante $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$. Ora $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 25 \end{vmatrix} = -8.$

Stadio 2: $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \diamond \frac{1}{2}$ La mediante è $\frac{2}{5}$ e risulta $D = -5$

Stadio 3: $\frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \diamond \frac{1}{2}$ " " $\frac{3}{7}$ " " $D = -2$

Stadio 4: $\frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \diamond \frac{1}{2}$ $D = -2$

Stadio 5: $\frac{3}{7} \diamond \frac{4}{9} \quad \frac{1}{2}$ $D = 1$

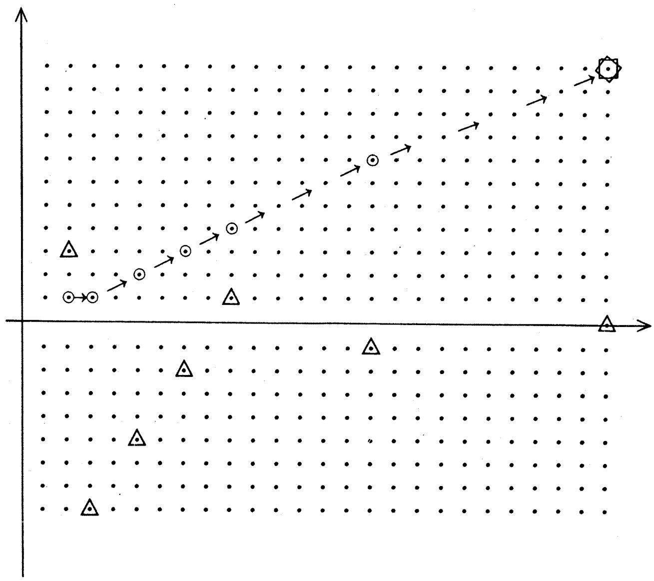
A questo punto è già disponibile la soluzione (-9,-4); ma procedendo:

Stadio 6: $\frac{3}{7}$ $\frac{7}{16}$ ◇ $\frac{4}{9}$ D = -1

si ottiene la soluzione cercata (0<y<x) (I6,7) e infine

Stadio 7: $\frac{7}{16}$ $\frac{11}{25}$ =◇ $\frac{4}{9}$ D = 0

L'annullarsi di D segnala appunto che la frazione è stata ottenuta con 7 passi di "mediazione".



Illustriamo il procedimento geometricamente: nella figura, la spezzata conduce al punto (25,11) passando per sei successive medianti I punti △ segnano i corrispondenti valori di D. La soluzione cercata è l'ultimo punto per cui D<0. Che per esso risulti proprio D = -1, non è del tutto ovvio. Piuttosto che dedicare altro spazio a questa dimostrazione, preferiamo concludere affidando il problema al calcolatore. Seguendo il seguente programma (in BASIC), la macchina esegue precisamente il procedimento descritto sopra:

```
10  REM  Risolve  ax-by=1  con le serie di Farey   (0<a<b)
20  INPUT "a="; INPUT "b=";B
30  U=1 : V=1: W=1 : Z=0
```

```
40  X=U+W : Y=V+Z
50  D = Y*B-X*A
60  IF D>0  THEN U=X : V=Y : GOTO 40
70  IF D<0  THEN W=X : Z=Y : GOTO 40
80  IF D=0  THEN PRINT "x=";W; " y=";Z
```

L'algoritmo è più lento di quello di Euclide, e ogni buon informatico avrebbe motivi per storcere il naso. Ma un "aritmetico" che si diletti a far "girare" il programma per raccogliere un po' di materiale sperimentale, aggiungendovi, per esempio l'istruzione

```
55 PRINT  V,Y,Z,,D:PRINT U,X,W:PRINT
```

per seguire tutti gli stadi dell'approssimazione, sarà sollecitato da molte curiosità: quanti stadi sono necessari per concludere? perché i "salti" nei valori di D eguagliano, in valore assoluto, i resti delle tradizionali divisioni successive? e perché il numero di queste ultime eguaglia quello dei passaggi di D attraverso lo zero? Le risposte sono alla portata di uno studente di scuola secondaria che, attraverso l'"aritmetica dilettevole", voglia cimentarsi in una vera ricerca. Nella storia della matematica, più che in quella delle altre scienze, il progresso è sempre stato stimolato da due stati d'animo che sono caratteristici dei giovani: la curiosità e il divertimento.

Bibliografia

- G. Prodi, Matematica come scoperta, vol. 2°, cap. 19° (D'Anna, 1977) è uno dei pochi libri per le scuole secondarie che trattano l'aritmetica.
- G. Polya, La scoperta matematica voll. 1° e 2° (Feltrinelli, 1970) contiene molti problemi aritmetici e combinatori.
- G.H. Hardy, E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers (5a ed. 1978, Oxford Sc. Pub.) è un classico riferimento, e contiene le idee di tutti i problemi cui abbiamo accennato, dai reticolati interi alle frazioni di Farey. Qualche capitolo è di facile lettura.
- R. Honsberger, Mathematical gems n. 1 (1973) e 2° (1976) (Math. Ass. of America Publ.) e altri volumetti dello stesso autore contengono enunciati e dimostrazioni particolarmente eleganti di vari fatti arit

metici. In essi il teorema "delle mele" è attribuito a Pick (fine '800).

- H. Rademacher e O. Ore sono autori di varie opere di facile lettura, che trattano la teoria elementare dei numeri e la sua storia.

Ennio De Giorgi

Scuola Normale Superiore - Pisa

Significato culturale della matematica: riflessioni didattiche e scientifiche

Se noi proviamo a considerare l'atteggiamento della maggior parte del pubblico nei confronti della matematica, troviamo situazioni abbastanza paradossali.

Da una parte la matematica è ritenuta una scienza sicuramente affidabile (per esempio, chi dice "sono matematicamente certo" pensa al più alto grado di certezza) e molto utile al progresso delle scienze sperimentali e della tecnica; dall'altra sono ben poco conosciuti i progressi della stessa matematica. Per esempio i nomi dei maggiori matematici del nostro secolo sono meno noti dei nomi dei maggiori fisici, biologi, artisti, ...

Accanto a questa scarsità di informazioni sul progresso della matematica vi sono pure incomprensioni di fondo sulla natura stessa di questa scienza. Per esempio molti considerano solo gli aspetti quantitativi della matematica ignorando che i più bei risultati matematici sono spesso risultati di tipo qualitativo. Volendo fare un esempio molto elementare, possiamo pensare alla storia del numero π. Vi sono state nei secoli molte e interessanti ricerche dirette alla valutazione numerica di π che hanno dato risultati sempre più precisi. Tuttavia uno dei più bei risultati è stato la scoperta della trascendenza di π, cioè del fatto che π non è esprimibile come rapporto di due numeri interi e, più in generale, non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi. Questo è un risultato qualitativo che non sarebbe deducibile nemmeno dalla conoscenza di milioni di cifre decimali di π.

Il discorso fatto per problemi di matematica pura si può ripetere per quanto riguarda le applicazioni della matematica alle scienze sperimentali e alla tecnica. Molti pensano che queste applicazioni si riducano alla soluzione di equazioni più o meno complicate proposte dal fisico o dall'ingegnere. Raramente si riflette su quello che è il momento più originale e creativo del rapporto tra matematica e scienze sperimentali, cioè la scelta del modello matematico che si ritiene idoneo a rappresentare determinati fenomeni, scelta che in primo luogo è fondata su una certa somiglianza qualitativa tra modello matematico e fenomeni studiati.

A un livello di riflessione filosofica o teologica uno dei temi più affascinanti è quello della possibilità di descrivere mediante modelli matematici la realtà del mondo. Non posso approfondire un tema così ampio e superiore alle mie forze come quello dell'ordine e dell'armonia nell'universo; vorrei solo osservare che la lettura di alcuni passi degli scritti di grandi scienziati, come Galileo, Keplero, Newton, Einstein, potrebbero far provare agli studenti della nostra scuola almeno una parte dell'immensa ammirazione e gioia intellettuale provata dai maggiori scienziati considerando l'armonia esistente tra l'ordine interno della matematica e l'ordine dell'universo.

Avendo parlato delle applicazioni della matematica, dobbiamo anche considerare l'aspetto complementare di questa scienza, cioè quello della libertà nella scelta dei postulati di una teoria matematica: essi debbono obbedire a delle condizioni di coerenza interna, ma non debbono necessariamente rappresentare una determinata realtà fisica esterna.

Per esempio la geometria euclidea e le geometrie non euclidee restano comunque teorie matematicamente valide e importanti, indipendentemente dal fatto che l'una o l'altra si prestano meglio a rappresentare determinati aspetti del mondo fisico.

A un osservatore superficiale la libertà dell'invenzione matematica può sembrare incompatibile con la certezza matematica e con l'applicabilità della matematica allo studio del mondo fisico e spesso un'informazione incompleta sulla varietà delle teorie matematiche suscita perplessità e disagio nell'ascoltatore, che magari domanda ingenuamente: "4 + 4 fa sempre 8?" In realtà si dimentica di avvertire che la scelta dei postulati è una scelta libera, ma anche, come ogni scelta libera, deve essere una scelta responsabile e meditata. E' abbastanza difficile indicare i criteri seguiti dai più grandi matematici nello scegliere i postulati delle loro teorie, ma si possono segnalare alcuni elementi che concorrono a far ritenere valida una data teoria matematica: per esempio la possibilità di ritrovare ed estendere molti concetti della tradizione precedente, di collegare idee prima apparentemente slegate, di presentare una certa "naturalezza" o "intuitività", una certa armonia e bellezza estetica, di aprire la strada a nuove ricerche matematiche interessanti e a nuovi collegamenti con i più diversi rami del sapere.

Un discorso analogo a quello sulla scelta dei postulati potrebbe essere fatto sulla scelta dei teoremi di cui conviene cercare una dimostrazione. Le regole della logica matematica ci dicono con sufficiente precisione cosa è una dimostrazione corretta, ma è molto più difficile dire cosa è un bel teorema o una bella congettura. Si può dire che una bella congettura è una congettura di cui è difficile prevedere se risulterà vera o falsa, che una serie di bei teoremi rappresenta la migliore prova della validità di una data teoria, che un bel controesempio può essere più ricco di significato di qualsiasi teorema, indicando la necessità di cercare delle vie nuove e originali.

Si può dire er la matematica come per le altre scienze che la scoperta ordinaria nasce dallo sfruttamento del successo, cioè dall'applicazione sistematica dei metodi disponibili, la scoperta straordinaria dallo sfruttamento dell'insuccesso, cioè dalla constatazione che i metodi disponibili sono inadeguati alla trattazione di un certo problema e che occorre introdurre idee del tutto nuove.

Naturalmente si può obiettare a queste considerazioni che io non dò alcuna definizione soddisfacente della bellezza matematica.

Purtroppo posso solo dare alcuni esempi di bei teoremi. Uno era quello già citato della trascendenza di π, un altro molto vicino è dato dalla classica uguaglianza $e^{i\pi} = -1$ e dalle altre formule di Eulero, in cui sono mirabilmente collegate idee centrali della riflessione matematica: funzioni circolari ed esponenziali, numeri trascendenti, numeri immaginari, serie, ...

Più in generale penso che una sensibilità alla bellezza matematica possa nascere dalla riflessione su molti temi, sulla struttura interna della stessa matematica, sui suoi rapporti con tutte le altre forme del sapere, sulla storia della matematica.

Ognuno naturalmente può approfondire più o meno queste diverse riflessioni secondo il proprio gusto e i propri interessi culturali, ricordando tuttavia che concentrando l'attenzione su un solo aspetto della matematica si finisce col darne una interpretazione riduttiva e distorta. Per esempio non si può considerare la storia della matematica senza tener presente la complementarietà tra innovazione e tradizione. Non si fa buona matematica originale ignorando o disprezzando il grande patrimonio di idee e di esperienze che ci è stato trasmesso attraverso millenni di ricerca matematica. D'altra parte non si possono apprezzare adeguatamente le scoperte dei più grandi matematici del passato senza pensare ai più recenti originali sviluppi delle loro idee. In fondo possiamo dire che l'innovazione è fondata sulla tradizione, ma la tradizione è resa più apprezzabile dalle nuove idee e dalle nuove scoperte.

Da questo punto di vista chi scrive la storia della matematica deve collegare il pensiero dei diversi matematici alla cultura e alla vita del loro tempo senza attribuire loro delle idee emerse in tempi successivi, ma non deve ignorare il fatto che se un matematico antico interessa ancora ciò avviene perché le sue idee si rivelano ancora importanti per la nostra cultura.

Passando ai rapporti tra la matematica e la filosofia, vorrei segnalare il problema antico, ma sempre attuale, della natura degli enti matematici. Molto sinteticamente si può forse dire che i matematici e i filosofi che hanno meditato sulla natura della matematica potrebbero all'incirca dividersi in due grandi scuole: la scuola dei realisti che attribuiscono agli enti matematici una loro realtà indipendente dalle parole e dalle formule con cui vengono descritti, quella dei nominalisti per i quali non esistono enti matematici ma solo un linguaggio matematico obbediente a certe regole formali. Non posso approfondire i termini di questa disputa millenaria; noterò solo che le due scuole hanno contribuito e contribuiscono ancora allo sviluppo della nostra scienza, che procede sia attraverso l'intuizione delle realtà matematiche, sia attraverso l'analisi critica del linguaggio matematico. Inoltre è da notare che quando si parla di concreti risultati matematici, vi è una piena possibilità di comprensione tra i seguaci impliciti o espliciti delle due scuole.

Concludendo direi che proprio la ricchezza del pensiero matematico finisce con l'essere la ragione principale delle difficoltà che si incontrano quando si cerca di divulgarlo.

Per affrontare queste difficoltà credo che occorrano le due virtù fondamentali dello scienziato, l'umiltà e la speranza. Occorre riconoscere che ognuno di noi ha una conoscenza assai parziale della matematica ed una ancora più ridotta degli altri rami del sapere umano ad essa collegati. Nello stesso tempo dobbiamo avere la speranza che una comunicazione anche limitata del pensiero matematico possa arricchire tutta la cultura.

In particolare i rapporti tra la matematica e le scienze sperimentali possono costituire un esempio importante di collaborazione interdisciplinare fondata sul rispetto della dignità e dell'autonomia di ogni forma del sapere umano, nella speranza di realizzare quell'armonia necessaria a far crescere nell'umanità la saggezza di cui vi è tanto bisogno.

INDICE

<u>26 Ottobre</u>