ISSN 0393-0998

Ottobre 1999
Supplemento al n. 10

Period. mensile spedizione in A.P.
art. 2 comma 20/c legge 662/96
Filiale di Bologna

Anno XXVI

# NOTIZIARIO

DELLA

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

## VENTESIMO CONVEGNO NAZIONALE UMI-CIIM SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

## «LA MATEMATICA E LE ALTRE SCIENZE: MODELLI, APPLICAZIONI, STRUMENTI DIDATTICI»

**ORVIETO (TR), 22-23-24 OTTOBRE 1998**
**a cura di Giuseppe Anichini e Bruno D'Amore**



EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Stampa:* Tecnoprint s.n.c., Via del Legatore 3, 40138 Bologna (Italia)

# INDICE

## GRUPPI DI LAVORO







## COMUNICAZIONI

XX CONGRESSO NAZIONALE U.M.I. - C.I.I.M.
SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

## LA MATEMATICA E LE ALTRE SCIENZE: modelli, applicazioni, strumenti didattici

Orvieto, 22, 23, 24 ottobre 1998

In data 22 - 24 ottobre 1998 si è svolto presso il Centro Congressi di Orvieto il *XX Congresso Nazionale sull'insegnamento della Matematica:* **LA MATEMATICA E LE ALTRE SCIENZE: modelli, applicazioni, strumenti didattici.**

Il Congresso è stato organizzato dalla C.I.I.M., commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana per l'insegnamento della Matematica.

La C.I.I.M. è attualmente presieduta dal prof. Ferdinando Arzarello (Univ. di Torino) ed è formata dai professori: Giuseppe Anichini (Univ. di Firenze), Anna Maria Arpinati (IRRSAE Emilia Romagna), Aldo Brigaglia (Univ. di Palermo), Lucia Ciarrapico (M.P.I.), Bruno D'Amore (Univ. di Bologna), Mario Marchi (Univ. di Brescia), Roberto Tortora (Univ. di Napoli).

Nella C.I.I.M., che ha progettato il Congresso di Orvieto, faceva parte anche il prof. Francesco Speranza, recentemente scomparso. Ancor oggi i colleghi della commissione, l'Unione Mateamtica Italiana e tutti i partecipanti al Convegno lo vogliono ricordare con profonda stima e commozione.

Il Convegno è stato organizzato con notevole impegno e con eccellenti risultati: la C.I.I.M. si è potuta avvalere del grande lavoro e del prezioso contributo della prof. Francesca Conti e di altri colleghi dell'Università di Perugia.

Il programma del Convegno è pubblicato in questo supplemento del Notiziario: da esso possiamo vedere che sono state tenute 6 conferenze generali che hanno avuto una grandissima partecipazione.

Sono state anche seguitissime le Tavole rotonde sul "documento dei saggi" e sul "Matematica: linguaggio della scienza e della tecnologia" e la presentazione delle "Olimpiadi della Matematica" con successivi cortometraggio sull'orientamento scolastico (a cura del prof. Franco Conti).

I partecipanti hanno poi apprezzato particolarmente quello che è stato presentato nell'ambito dei "Gruppi di lavoro" e delle "Comunicazioni".

Purtroppo per una delle conferenze, e per qualche altro intervento, non è stato possibile pubblicare qui il testo: tutto il resto, dalle Tavole rotonde alle comunicazioni ed ai Gruppi di lavoro, ha qui una sua traccia. La CIIM ringrazia di questo tutti i relatori che hanno collaborato alla pubblicazione del presente fascicolo.

Una delle conferenze generali è stata tenuta, con particolare successo, in teleconferenza con studenti ed insegnanti di Matematica di 6 scuole secondarie equidistribuite sul territorio nazionale.

Per tre delle conferenze generali la CIIM aveva organizzato una giornata di preparazione, nel giugno 1998, con alcuni insegnanti di scuola secondaria delle due provincie dell'Umbria. Questi insegnanti hanno successivamente "preparato" gli alunni delle loro classi alla conferenza proponendo loro alcuni problemi, suggeriti dai relatori delle conferenze, che gli allievi hanno poi portato all'attenzione del convegno (e di ciò si può trovare traccia nelle "Comunicazioni").

Questa iniziativa, proposta per la prima volta nell'ambito di questo tipo di congresso, ha avuto un grande successo da parte degli studenti, dei loro insegnanti (e Presidi) e varrà forse la pena di riproporlo in futuro.

Il coinvolgimento diretto degli studenti e degli insegnanti potrà essere una delle leve che stimola ad una maggiore conoscenza della Matematica, delle sue applicazioni e della sua travolgente vitalità.

Giuseppe Anichini, Bruno D'Amore



## PROGRAMMA

Giovedì, 22 ottobre 1998

- saluti delle Autorità e del Presidente dell'U.M.I.
- Prof. Vinicio Villani (Univ. Pisa), *Modellizzazioni Matematiche: dal conto della spesa alle dimensioni dell'Universo.*
- Prof. Silvano Milani (Univ. Milano), *Possiamo rappresentare matematicamente l'adolescenza?*
- Gruppi di lavoro
- *Le olimpiadi della Matematica* a cura dei Professori Claudio Bernadi (Univ. "La Sapienza" - Roma) e Franco Conti (Scuola Normale - Pisa). Proiezioni dei cortometraggi "Esporre la matematica", "Orientamento scolastico" a cura del prof. Franco Conti.

Venerdì, 23 ottobre 1999

- Prof. Albrecht Beutelspacher (Univ. Giessen), *Crittologia: l'arte e la scienza dei segreti.*
- Prof. Carlo Dapueto (Univ. Genova), *Le applicazioni della matematica nei curricoli: finalità modalità, discipline e contesti coinvolti.*
- Prof. Franco Conti (Scuola Normale - Pisa), *Matematica ed ecologia.*
- Comunicazioni
- Dibattito sul tema: "Luci ed ombre nel futuro dell'educazione matematica"

Sabato, 24 ottobre 1999

- Tavola rotonda su: "La matematica: linguaggio della scienza e della tecnologia"
- Prof. Giorgio Israel (Univ. Roma), *Mille lenti per osservare il mondo: ottant'anni di modellistica matematica*

## SALUTO DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Il Presidente dell'UMI non ha potuto partecipare al Congresso per motivi di salute. Il saluto al Congresso è stato portato dal Segretario dell'Unione, prof.Giuseppe Anichini.*

Il XX Congresso Nazionale sull'Insegnamento della Matematica, organizzato dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (C.I.I.M.), commissione permanente dell'Unione, conferma l'impegno, da sempre, dell'UMI nel promuovere e stimolare lo studio e l'approfondimento delle varie tematiche collegate alla didattica della Matematica in ogni ordine di Scuola. E' questo un momento, storico - politico, in cui la richiesta dello "strumento Matematica" è particolarmente pressante dal mondo delle applicazioni, dal mondo universitario e dal mondo del cittadino comune, sempre più deciso a non subire passivamente l'immersione ormai continua nelle innovazioni tecnologiche della realtà di oggi.

Corrispondere a questo impegno costituirà un punto significativo non solo per l'UMI ma per la Scuola e per l'intero Paese: è dunque particolarmente vitale auspicare che la necessità di tali richieste venga riconosciuta da tutti coloro che hanno responsabilità di Governo della Scuola italiana.

Un primo passo in questa direzione può essere già quello di intensificare le iniziative, tradizionali e più recenti, volte al miglioramento della preparazione matematica degli studenti e dei cittadini innalzando la qualità dell'insegnamento di questa disciplina. Il raggiungimento degli obiettivi dell'UNESCO, che ha dichiarato il 2000 "anno mondiale della Matematica", sarà, ne siamo certi, una spinta fondamentale per far arrivare all'opinione comune la percezione del ruolo che la Matematica occupa oggi all'interno della sfida tecnologica e della cultura più in generale.

Due parole adesso sui temi del Congresso di quest'anno.

Possiamo subito dire che la scelta delle tematiche che sono state poste al centro dei lavori del Congresso si sposa felicemente con quanto appena detto. L'argomento scelto dalla C.I.I.M. evidenzia infatti già quella che è la prerogativa principale della Matematica ovvero il suo rapporto con tutte le altre discipline. Se è universalmente noto infatti il fatto che della Matematica fanno uno strumento ineliminabile discipline quali la Fisica, la Biologia, l'Economia, la Chimica e l'Ingegneria, è altrettanto vero, oggi, che lo stesso tipo di richiesta viene fatta anche da Medicina, da Agraria, dalle Biotecnologie e da altre discipline fino alle Scienze Giuridiche. E' stata proprio infatti la richiesta di Matematica per quest'ultima disciplina, finora considerata ai suoi antipodi, che i partecipanti al XV Congresso UMI di Padova (nel 1995), hanno potuto sentire dalla viva voce del Rettore di quell'Ateneo, uomo di Giurisprudenza.

Val anche la pena di ricordare che, in assenza di Premi Nobel per laMatematica, si possono annoverare, nell'ultimo decennio, ben 5 massimi riconoscimenti dati a matematici, anche se, ufficialmente, per "la Chimica" o per "l'Economia".

Il modello matematico sarà dunque l'anello di congiunzione fra il mondo reale, ovvero il mondo dei problemi concreti, e la teoria astratta: sperimentatore -- e chiameremo così il fisico, lo statistico, l'agrario, ecc.. -- affronta il problema e si trova di fronte a grafici, tabelle, dati numerici che dovranno essere "ripuliti" per essere "letti"; a questo punto è il matematico che interviene (e può essere lo stesso sperimentatore se in possesso di una buona base matematica) per dire se il problema ha senso, se ha soluzione, se quest'ultima è unica, se possiamo permetterci di scegliere (in modo "ottimale") una soluzione fra più soluzioni e così via. Successivamente la risposta del matematico deve essere "riletta" nell'ambito del problema che l'aveva stimolata e, successivamente, dovrà essere confrontata con la sua ammissibilità.

E' in questa ottica che gli insegnanti di discipline matematiche dovranno avvicinare le tematiche disciplinare ai loro allievi: pensando non solo a coloro che faranno ricerca matematica -- i possessori del "sacro fuoco" matematico sempre ci saranno ed a qualunque impostazione saranno reattivi -- ma a coloro che l'opinione pubblica vede in futuro come economisti, medici, bancari, biologi, ecc...

Ed è qui che emerge la grande responsabilità che investirà i colleghi insegnanti di Matematica: essi dovranno far contemperare l'aspetto della "Matematica Queen of Sciences" con l'altro aspetto, che abbiamo visto poche righe fa essere altrettanto vitale, di "Matematica Servant of Sciences". Ciò impone di dover collegare aree diverse, linguaggi diversi e solo l'aspetto modellistico potrà, in parte, attenuare queste difficoltà. Per questo, nell'ambito di questo convegno, la *Tavola rotonda* sul *Linguaggio della Matematica nelle altre Scienze* appare come una delle iniziative particolarmente convincenti.

Gli organizzatori del Congresso hanno cercato, con felice intuizione, di allargare gli usuali confini tematici coinvolgendo scienziati d'altre discipline e forti utilizzatori dello strumento matematico; essi sono qui con i matematici dell'Università e, fatto forse innovativo, insieme a molti, moltissimi docenti di scuola secondaria. Ancor più significativo è il fatto che, a memoria di chi scrive, per la prima volta gli studenti di scuola superiore sono personalmente implicati: molti, e da ogni parte del nostro Paese, per teleconferenza; altri qui ad Orvieto in prima persona.

Di ciò, ovvero del sicuro successo di una tale iniziativa, va dato atto al gruppo degli organizzatori coordinati magistralmente dalla Prof. Francesca Conti. Essi hanno saputo dare, al di là dell'impeccabile organizzazione, anche quel tocco in più -- aiutati, bisogna dirlo, dalla scelta particolarmente felice della città e del luogo del Congresso -- che renderà questi giorni altamente proficui per tutti i partecipanti.

Credo infine di poter interpretare il pensiero del Presidente dell'Unione, prof. Alberto Conte e dei colleghi impegnati nelle attività dell'UMI, nel ringraziare sentitamente la Prof. Conti, i colleghi del comitato organizzatore, le autorità di Orvieto, per quanto sarà fatto, in questi giorni, a favore della Matematica e degli insegnanti di tale disciplina.

# RELAZIONI

# CODICI SEGRETI

Albrecht Beutelspacher

## 1. Introduzione

La crittologia o crittografia (dal greco κρψπτοσ = segreto, λογοσ = parola, γραφειν = scrivere) è l'arte e la scienza di scrivere segreti.

La crittologia ha due scopi, la *segretezza*, cioè la garanzia che un messaggio non possa essere *letto* da persone non autorizzate, e *l'autenticità*, cioè la garanzia che un messaggio non possa essere *cambiato* da persone non autorizzate. Mentre la segretezza ha costituito lo scopo della crittologia fin dall'inizio, cioè da più di 2000 anni fa, l'autenticità è uno scopo abbastanza nuovo, ma è uno strumento molto importante nelle applicazioni moderne.

Il cifrare ha avuto sempre moltissime applicazioni, come, ad esempio il nascondere i messaggi diplomatici; ma anche il cellulare cifra le parole e non è possibile immaginare il pay-TV senza metodi per cifrare. Metodi di autenticità giocano un ruolo importante sia nel pagamento elettronico, che nel telefonino o nel bancomat.

Chiaramente sono stati usati meccanismi tradizionali di tipo fisico o organizzativo per ottenere la sicurezza, ad esempio le casseforti, il controllo occulto delle persone, il principio dei quattro occhi, .... In particolare sono stati inventati mezzi per la sicurezza delle banconote.

Chiediamoci perchè si usano meccanismi della crittologia e non altri meccanismi. Ci sono almeno due risposte: Nella crittologia, essendo una parte della matematica, si può dimostrare logicamente la sicurezza di un algoritmo. Questa proprietà ha un valore principalmente teorico, in quanto si conoscono pochissimi algoritmi la cui sicurezza è dimostrabile. La seconda risposta, molto importante per la pratica, ẽ che nella crittografia si può aumentare la sicurezza di un meccanismo in modo arbitrario.

## 2. La crittologia classica

La situazione più semplice è che due persone A e B vogliano parlare in segreto, ma che ci sia pure un avversario cattivo che vuole sentire i loro messaggi.

Lo scopo del trasmettitore A è quello di trasformare il messaggio in modo che l'avversario non riesca a capire, ma il ricevitore B possa capire facilmente. (Non è difficile trasformare il messaggio in modo che nessuno possa capire.)

* Math. Institut, Arndtstr. 2, D-35392 Giessen,
albrecht.beutelspacher@math.uni-giessen.de
http://www.uni-giessen.de/beutelspacher

La crittologia è un'arte molto antica; infatti tra i metodi crittologici usati nel passato troviamo la scitala lacedemonica, la griglia di Polibio e gli alfabeti di Giulio Cesare.

Osservando il codice di Cesare vediamo una cosa molto importante, precisamente la variabilità dell'alfabeto cifrante. Infatti, l'alfabeto cifrante si ottiene dall'alfabeto normale „spostandolo" di alcune posizioni. Un testo cifrato si ottiene sostituendo ad ogni lettera dell'alfabeto in chiaro la lettera dell'alfabeto cifrante sotto di essa. Lo „spostamento" eseguito è la *chiave* dell'algoritmo.

La chiave è il segreto noto esclusivamente al mittente e al destinatario, che, usandola, sono in grado di proteggere la loro comunicazione da tutti gli altri. È chiaro che la chiave deve essere trasmessa prima che il messaggio stesso possa essere trasmesso.

Già al nostro livello di discussione è possibile dire se un algoritmo sia sicuro o no. Se il nemico riesce a decrittare il testo oscuro senza conoscere la chiave, l'algoritmo è cattivo. Se invece nessun nemico può avere successo, l'algoritmo è sicuro.

Distinguiamo codici *monoalfabetici* e *polialfabetici*. Il codice di Cesare è un tipico esempio di algoritmo monoalfabetico; in generale, un algoritmo monoalfabetico è una permutazione delle lettere dell'alfabeto. Quindi, ci sono precisamente 26! (circa $10^{26}$) codici monoalfabetici. Ma essi danno solo poco sicurezza, perchè possono essere forzati facilmente.

Il seguente crittogramma è stato ottenuto con un algoritmo monoalfabetico. Il lettore è invitato a decifrarlo:

A B C B   D C   D B E B.

La crittologia fece un passo molto importante nel 1500 circa, con l'invenzione dei cosiddetti codici *polialfabetici*, ad opera dell'italiano Gerolamo Cardano, del tedesco Tritemio e del francese Blaise de Vigenère. L'idea era di usare non un solo alfabeto cifrante, ma molti. La chiave non è una sola lettera, ma una parola, le cui lettere individuano gli alfabeti da usare.

Descriviamo nei dettagli un codice polialfabetico che ha avuto molto successo in passato: il codice di Vigenère. Esso usa una tavola, nota come *quadrato di Vigenère*, formata da 26 righe date dai 26 alfabeti di Cesare, le righe appaiono in ordine naturale.Ad ogni alfabeto viene dato il nome della prima lettera che in esso compare.

Mittente e destinatario hanno una chiave segreta in comune che è una parola, ad esempio la parola VIA. Per cifrare un testo in chiaro, si scrive la parola chiave sul testo in chiaro, tante volte quante sono necessarie per avere una sequenza VIAVIAV... lunga quanto il testo in chiaro. Si cifra ogni lettera del testo con l'alfabeto di Cesare che comincia con la lettera della parola chiave che compare sopra ad essa.

Nel nostro esempio la prima, la quarta, la settima, ... lettera del testo sono cifrate con l'alfabeto di Cesare che comincia con V, e così via.

Il metodo descritto può diventare anche numerico nel modo seguente. Ogni lettera dell'alfabeto viene sostituita da un numero, così A=0, B=1, ..., Z =25.



Per cifrare una lettera si calcola la somma modulo 26 dei numeri corrispondenti ad essa ed alla lettera della parola chiave corrispondente.

Con la parola *crittoanalisi* indichiamo tutti i metodi che possono permettere di leggere un messaggio cifrato senza conoscere la chiave usata, cioè di „rompere" o „forzare" un codice.

Ci sono due modi che permettono di forzare il codice di Cesare facilmente.

Il primo è il metodo esaustivo, che consiste nel provare tutte le chiavi possibili, che in un codice di Cesare sono solo 26.

L'altro metodo è basato su una analisi statistica del testo cifrato. Si trovano le lettere più frequenti del testo cifrato. Esse corrispondono alle lettere più frequenti della lingua italiana, cioè E, I, A, O. Così si determina l'alfabeto di Cesare che è stato usato e si può risalire al testo in chiaro.

Anche i codici polialfabetici possono essere forzati. Il passo più importante è quello di calcolare il numero delle lettere della parola chiave. Se si riesce, poi forzare il codice diventa una cosa abbastanza facile.

Se come chiave non usiamo una parola (corta), ma una sequenza casuale di lettere, otteniamo un codice insuperabile. Se non parliamo di lettere, ma di bit casuali, il codice ottenuto si chiama *one-time pad*.

### 3. La crittologia moderna

Nell'anno 1976 avvenne una rivoluzione nella crittologia. Due giovani americani, Diffie ed Hellman, si chiesero se fosse possibile una comunicazione segreta senza una chiave segreta comune. Hanno provato che è necessario un segreto, ma non comune. Questo è stato l'anno di nascita della crittologia moderna, detta *a chiave pubblica*. Due anni dopo, Rivest, Shamir ed Adleman hanno inventato il primo algoritmo a chiave pubblica, l'algoritmo RSA. Questo algoritmo è basato sulla teoria dei numeri ed in particolare sul teorema di Eulero.

Alla fine del loro lavoro Diffie ed Hellman presentarono un algoritmo molto intelligente per lo scambio delle chiavi, algoritmo del quale ora parleremo.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto dei mezzi che permettono a due persone di scambiarsi messaggi segreti, ma che richiedono che i due abbiano già una chiave segreta comune. La trasmissione di tale chiave segreta costituisce un grande problema, che non può essere risolto totalmente con metodi della crittografia classica.

La crittografia moderna risolve questo problema eliminando la trasmissione di un segreto. Si immagini che due persone senza aver mai comunicato prima, scambiando notizie davanti agli occhi di tutti, possano costruire un loro segreto.

Ciò è realizzabile usando la teoria dei numeri. Vediamo più in particolare un metodo di realizzare questo scopo: il *metodo di Diffie ed Hellman*.

Fissiamo un numero primo p e l'insieme $Z_p = \{0,1,\ldots,p-1\}$ di interi minori di p. Definiamo in $Z_p$ una operazione di moltiplicazione come segue: Il prodotto di due numeri a, b di $Z_p$ è ab, se ab < p, mentre è il resto della divisione di ab per p, se ab ≥ p. La moltiplicazione così definita gode ancora di tutte le proprietà della moltiplicazione negli interi.

In particolare è possibile definire ancora la funzione esponenziale, cioè la funzione $x \mapsto g^x$ mod p, essendo g un numero fissato.

È bene mettere in evidenza che, mentre è molto facile calcolare un $y=g^x$ mod p, è praticamente impossibile, dato y, determinare x, se p è abbastanza grande, avente cioè 100 o 200 cifre decimali. Si è soliti chiamare una funzione con questa proprietà *funzione unidirezionale.*

Il metodo di Diffie ed Hellman, che ora descriveremo, sfrutta proprio questa proprietà della funzione esponenziale in $Z_p$.

Supponiamo che un gruppo di persone si vogliano scambiare, a due a due, messaggi segreti. Prima di tutto vengono fissati due numeri, un numero primo p ed un intero g, con 1 < g < p, che possono essere gli stessi per tutte le persone del gruppo.

Due persone A e B di tale gruppo, per calcolare una chiave segreta comune, procedono nel modo seguente. A sceglie un numero random a e calcola $\alpha=g^a$ mod p; contemporaneamente B sceglie un numero b e calcola $\beta= g^b$ mod p. A e B inviano l'un l'altro le informazioni $\alpha$ e $\beta$. Infine A calcola $\beta^a$ mod p e B calcola $\alpha^b$ mod p.

Poichè $\beta^a$ mod p = $g^{ba}$ mod p = $g^{ab}$ mod p = $\alpha^b$ mod p, A e B hanno una chiave segreta comune k = $\beta^a$ mod p, che può essere usato come chiave segreta di un algoritmo simmetrico.

I lettori incuriositi alle tecniche crittografiche, sia classiche che moderne, possono soddisfare la loro curiosità consultando [BB].

**Bibliografia**


[BB] Berardi, L., Beutelspacher, A.: Crittologia. FrancoAngeli 1966.

[S] Sgarro, A.: Crittografia. Muzzio (Padova) 1986.

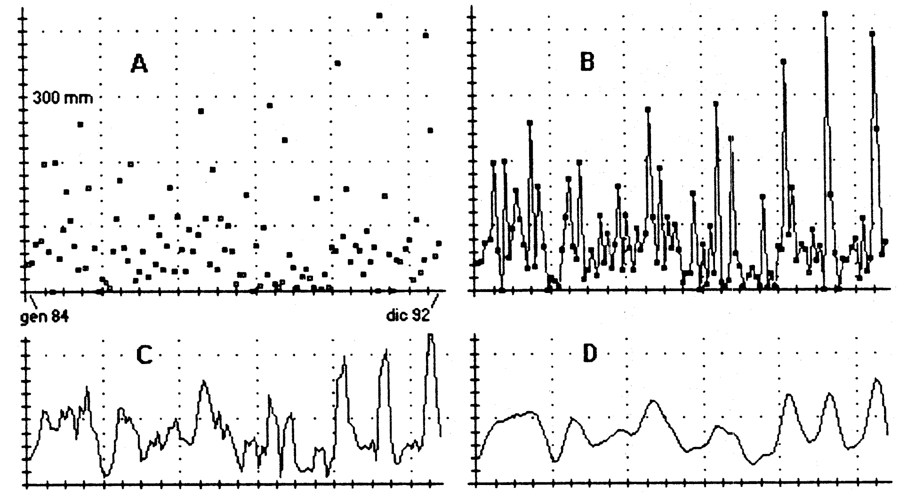



# LE APPLICAZIONI DELLA MATEMATICA NEI CURRICULI:
## FINALITÀ, MODALITÀ, DISCIPLINE E CONTESTI COINVOLTI

Carlo Dapueto*

**01** In questo intervento, attraverso esempi riferiti ad aree matematiche differenti e a interazioni con diverse aree disciplinari, cercherò di mettere a fuoco i principali aspetti della problematica annunciata nel titolo.

**02** Il primo esempio è introdotto dalla figura seguente:



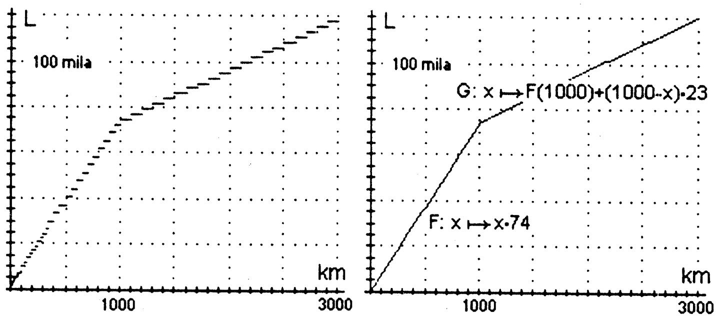

In **A** sono rappresentati i millimetri mensili di pioggia a Genova in un certo arco di anni. In **B**, per migliorare la "lettura" della evoluzione del fenomeno, si sono congiunti i punti mediante segmenti. In **C**, per "interpretare" meglio i dati (individuare tendenze, ciclicità, ...), si sono rappresentate le loro medie mobili: al posto di x(i) si è considerato M(x(i-1), x(i), x(i+1)). **D** è stato ottenuto iterando 5 volte questo procedimento. A-D sono tutti **modelli descrittivi**, più o meno astratti, dello stesso fenomeno.

**03** Nella successiva figura, a sinistra, sono rappresentate le tariffe ferroviarie (di 2a classe) in vigore in Italia all'inizio del '96. A destra la funzione a scalini è stata approssimata con una funzione continua lineare a tratti. Il modello grafico (a sinistra) mi ha consentito di individuare la regolarità dell'andamento. Il modello analitico ottenuto (a destra) non solo costituisce una **modellizzazione concisa** del tarif-

* Dipartimento di Matematica dell'Univeristà di Genova

fario, ma rivela la **logica soggiacente** alla definizione delle tariffe: quest'ultimo modello matematico è in realtà il tariffario iniziale, che poi è stato discretizzato per motivi contabili e di comunicazione.

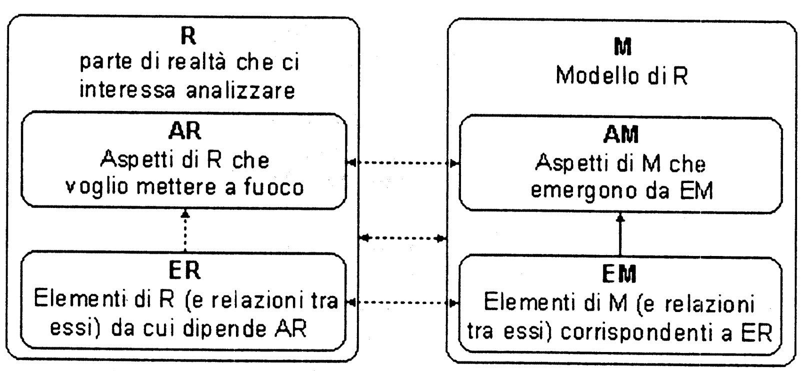
In altre parole, con il modello "descrittivo" abbiamo esplorato il "modello normativo", ossia la **matematica incorporata** nel tarriffario.




**04** La sovrapposizione di aspetti **normativi** e **descrittivi** è tipica dei rapporti tra matematica e altre discipline: economia, fisica (con alcune specificità), informatica, scienze naturali, ... .

Dagli esempi introduttivi emergono anche alcuni aspetti del ruolo del **computer** nelle attività di matematizzazione (facilitare la rappresentazione e/o i calcoli, la verifica e correzione del modello approssimante, ...).

**05** Concetto chiave nei rapporti tra matematica e altre discipline è quello di **modello**, inteso non come particolarizzazione/esemplificazione (i "campioni", la struttura dei numeri interi come modello della teoria dei gruppi, ...), ma in quello, duale, di astrazione/idealizzazione (le riproduzioni in scala, la teoria dei gruppi come modello che astrae aspetti che accomunano molte strutture matematiche, ...), schematizzabile nel modo seguente:




Nel caso della modellizzazione a destra nella figura in 03, R è il tariffario, AR è il modo in cui il prezzo cresce al crescere della percorrenza, gli elementi ER che abbiamo individuato come significativi nel determinare AR sono costituiti dalle in-

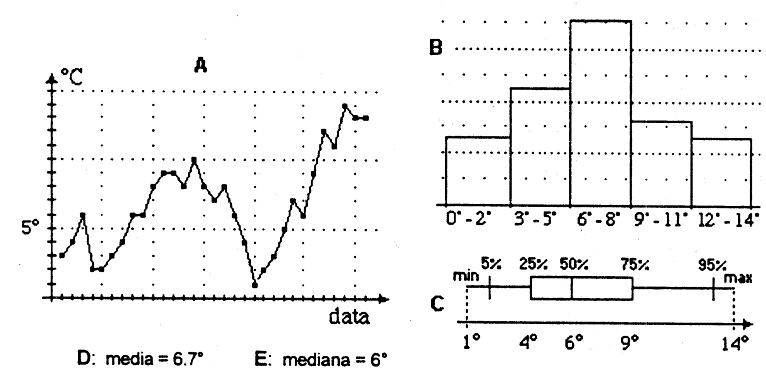


clinazioni dei tratti rettilinei lungo cui tendono a disporsi i segmentini che costituiscono la rappresentazione grafica del tarriffario; ad esse abbiamo associato come EM le pendenze 74 e 23. AM è la funzione che a x associa F(x) se $x \le 1000$, G(x) altrimenti. Le frecce sono tratteggiate in quanto sono frutto di semplificazioni o approssimazioni (nella scelta di ER abbiamo trascurato l'articolazione in scaglioni del tariffario, nella valutazione degli EM abbiamo fatto delle approssimazioni); EM→AM non è tratteggiata: la funzione dipende esattamente dalle pendenze 74 e 23.

Nel caso della "regola grammaticale" «per formare la 1ª persona dell'imperfetto applica la riscrittura *-are* → *-avo*» si tratta di un modello (che utilizziamo per orientarci nella comunicazione verbale) che ha come R il comportamento linguistico degli italiani. La scelta delle parti finali dei verbi e dei loro cambiamenti come ER è una semplificazione: le eccezioni (fare →facevo) testimoniano il fatto che si sono trascurati altri aspetti, ad esempio legati all'origine delle parole (fare segue la seconda coniugazione come il latino facere).

Anche vari schemi di ragionamento diffusi nell'ambiente scolastico, come «X "sbaglia i calcoli", quindi non è portato per la matematica», sono dei modelli. In questo caso la scelta della destrezza nei calcoli come elemento caratterizzante la bravura in matematica non è tanto frutto di una approssimazione o semplificazione, quanto di una profonda incomprensione della natura della matematica.

**06** Non esiste **il** modello **migliore**:




A-E sono modelli diversi dello stesso fenomeno (il regime termico in un certo mese di una certa località). Il modello A consente di ricostruire l'andamento temporale. B perde la storia ma evidenzia la distribuzione delle temperature e permette di confrontarla con quella di altri mesi o località. Il box-plot C è più compatto e include una quantificazione della dispersione delle temperature, ma perde alcune delle informazioni presenti in B. I modelli D ed E sono molto più sintetici, facilitano il confronto con altri mesi o altre località, ma perdono ogni informazione sia sulla storia che sulla distribuzione.

**07** Una **disciplina** è caratterizzata essenzialmente dall'area fenomenologica per la quale mette a punto modelli (e linguaggi e teorie per elaborare questi modelli).

La **matematica**, anche se per lungo tempo si è presentata soprattutto come linguaggio della fisica (le definizioni e le dimostrazioni nella geometria di Euclide erano basate su concetti e argomentazioni di tipo fisico, i concetti di funzione e di continuità inizialmente sono stati lasciati alla intuizione fisica, ...), oggi ha la specificità di caratterizzarsi (e di articolarsi internamente) non per gli ambiti applicativi ma essenzialmente per la tipologia degli strumenti di modellizzazione che mette a punto. E più delle altre discipline presenta attività di modellizzazione *interna*: il concetto di "gruppo" è un modello (M) che ha come realtà (R) strutture matematiche, la "logica" mette a punto modelli che hanno come realtà metodi e linguaggi matematici, ... . Sta in questa astrattezza la potenza applicativa della matematica.

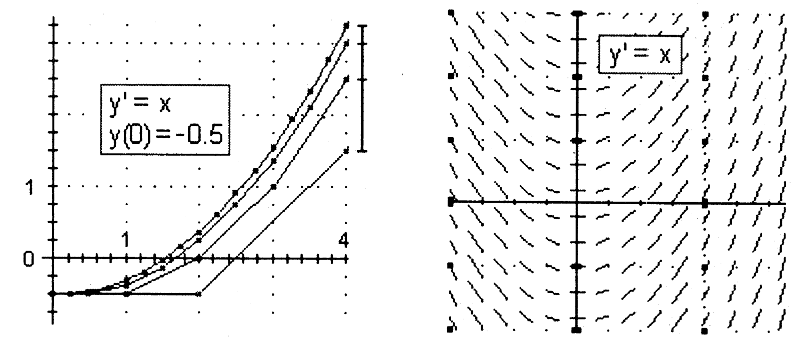
Che cosa facciamo percepire, nell'**insegnamento**, di tali intrecci e tali differenziazioni?

**08** I concetti matematici sono in genere presentati come **cose** da studiare piuttosto che come **modelli** (interni o esterni). Quando si fa riferimento a dei **contesti** ciò avviene quasi solo nell'ambito di problemi stereotipati, in cui la matematizzazione (in particolare l'associazione ER→EM) è caricaturale (le situazioni sono solo messaggi per evocare problemi formalizzati, gli oggetti reali sono nomi a cui associare in base all'esperienza scolastica, senza una riflessione contestuale, oggetti matematici). A volte, nel motivare l'introduzione di un nuovo argomento matematico, si premette l'illustrazione, esplicitamente semplificata, di un problema "reale", ma in genere è tràscurata la fase iniziale della modellizzazione (la delimitazione di AR).

Mentre l'insegnante di matematica tende a strumentalizzare i contesti per fare della "matematica", quello di **altre materie** tende a far usare *acriticamente* tecniche e concetti matematici, sviluppando un ricettario che ad ogni problema (studiato) associa un procedimento matematico ad hoc, spesso *sproporzionato* rispetto alle esigenze. Entrambi, in genere, fanno matematica decontestualizzata, depurata da intuizioni e prototipi di matematizzazione che possano aiutare l'alunno nella gestione del **transfer** dei concetti. Ed entrambi fanno una *propria* matematica, con linguaggi, procedure, forme di presentazione spesso conflittuali: la matematica dell'insegnante di matematica, la matematica dell'insegnante di economia, quella dell'insegnante di elettronica, ... e quella dell'insegnante di matematica quando insegna fisica.

**09** Approfondisco queste considerazioni con qualche esempio riferito alla scuola superiore.





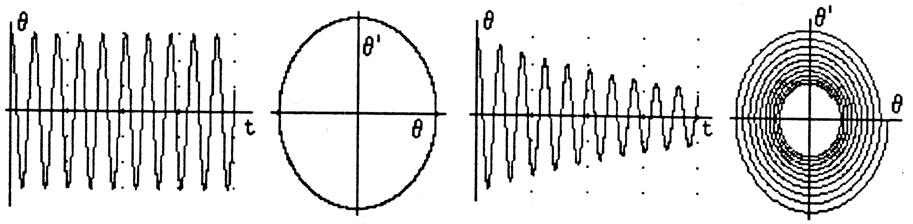

La figura precedente, a sinistra, illustra, in un caso elementare, l'applicazione del metodo di Eulero per risolvere **equazioni differenziali** (che consiste nell'approssimare la soluzione con una funzione continua lineare a tratti). Con un opportuno programma è facile studiare (graficamente e/o numericamente) la convergenza della soluzione approssimata all'aumentare del numero dei sottointervalli. A destra è raffigurato il campo direzionale, anch'esso rappresentabile con un semplice programma. L'analisi del campo direzionale consente di studiare esistenza e unicità delle soluzioni, individuare le biforcazioni, ... .

Il concetto di derivata storicamente è nato, nell'ambito della matematizzazione della fisica, non a sè, ma come elemento costitutivo delle equazioni differenziali. Nel liceo scientifico è in terza, all'inizio dell'insegnamento della fisica, che si incontrano le prime equazioni differenziali, anche se non vengono individuate come tali. Poi, dopo un lungo letargo, in quinta ricompaiono (solo) le derivate, nelle ore di matematica, per studiare funzioni! Negli isituti tecnici, invece, si imparano meccanicamente un po' di formulette e procedimenti più o meno laboriosi per risolvere alcune particolari classi di equazioni differenziali.

L'idea di modello differenziale, fondamentale nella storia e nel ruolo della matematica, rimane così oscurata. Le motivazioni? Per i licei: non c'è il tempo per studiare le equazioni differenziali. Per gli istituti tecnici: i concetti sono difficili, e le formule risolutive devono impararle per le altre materie. Occorrerebbe, invece, mettere a fuoco e delimitare il ruolo delle **tecniche**: che cosa è delegabile al computer (o alla consultazione di un manuale)? che cosa è essenziale per imparare a scegliere e usare criticamente le tecniche? vi sono tecniche più "trasparenti" e/o che si integrano meglio con la costruzione/comprensione dei concetti?

Riflettere su che cosa si può fare (risoluzione di singole equazioni, sperimentazioni e congetture generali, ...) con il semplice metodo di Eulero (o metodi simili) è uno dei possibili punti di partenza per sviluppare considerazioni su questi problemi. Le conclusioni potrebbero divergere da quelle della commissione dell'U.M.I. sul nuovo "**syllabus**", che, per combattere l'immagine della matematica come insieme di tante cose da studiare con tante tecniche, ha lanciato un messaggio del tipo: «insegnare poche "cose" di base; sarà poi l'università a innestare su queste lo studio dei "concetti" più significativi»; l'avvio ai modelli differenziali e stocastici sarebbe un lusso, in questa logica che, di fatto, trascura gran parte delle riflessioni degli ultimi decenni sui processi mentali attraverso cui si costruiscono i concetti matematici.

**10** Un altro esempio. Lo studio sperimentale (con una doppia applicazione del metodo di Eulero o di un metodo simile) della equazione differenziale del 2° ordine che modellizza il comportamento di un pendolo senza (a sinistra) e con (a destra) smorzamento.




Questi grafici, ottenuti mediante un metodo "approssimato", rappresentano le soluzioni "esatte" per casi in cui il pendolo viene rilasciato da un angolo $\theta$ di 30°; per il caso senza smorzamento, il diagramma $\theta$-$\theta'$ consente di individuare chiaramente la peiodicità. Con l'usuale metodo simbolico, basato sull'ipotesi delle piccole oscillazioni, si ottiene "esattamente" una "approssimazione" della soluzione, ma non se ne valuta la precisione, e in genere non si spiega come dalla periodicità di questa si possa dedurre quella della soluzione giusta. Non è detto che un approccio numerico sia meno rigoroso di un approccio simbolico!

La rappresentazione grafica, e il metodo stesso di approssimazione numerica, la possibilità di vedere facilmente che cosa accade variando qualche parametro, ... (per questo e altri fenomeni, di meccanica, termodinamica, elettronica, ...) mettono bene in luce la natura "concettuale" della modellizzazione matematica attraverso cui si articola la fisica classica.

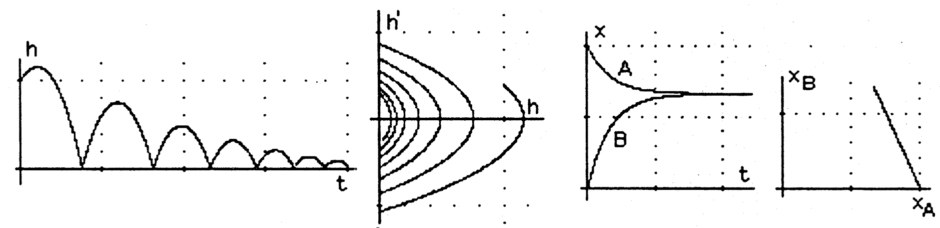
Si parla di **modelli formali** (o empirici) quando M viene costruito preoccupandosi solo del fatto che vi sia una *analogia* di comportamento tra AM e AR. Si parla di **modelli concettuali** quando invece i parametri EM del modello vengono scelti e messi in relazione tra loro in modo da riprodurre il modo in cui i fattori ER determinano il comportamento AR.

Il ruolo della matematica nell'**insegnamento della fisica** viene invece spesso mistificato, proponendo modellizzazioni "formali" nei casi in cui sarebbe più significativo un approccio "concettuale", come quando la messa a fuoco di una legge fisica viene banalizzata alla rappresentazione grafica di qualche dato sperimentale e alla ricerca di una funzione approssimante. Può capitare di far scoprire agli alunni per questa via (con il "metodo sperimentale") la legge della dilatazione termica, mentre la temperatura è stata "definita" come grandezza in relazione lineare con la lunghezza della colonnina di mercurio!

Il rapporto tra aspetti *normativi* e aspetti *descrittivi* (vedi 02-04) offrirebbe invece numerosi spunti didattici per uno sviluppo interattivo di concetti fisici e concetti matematici (sia di analisi che di geometria).



**11** Sono modelli normativi anche quelli che regolano il funzionamento dei videogiochi: è mediante l'incorporamento di matematica che essi *simulano la realtà*. Si pensi più in generale alle applicazioni software (grafiche, musicali, ...) e agli automatismi di tipo elettronico (che sono ormai praticamente tutti hardware+software). Scorpire come funzionano, analizzarne i limiti, ... comporta un intreccio tra la messa a punto di modelli descrittivi e la scoperta dei modelli normativi. Sotto a sinsitra è riprodotto lo studio del modello differenziale di una palla che rimbalza. Le interazioni, in questi contesti, riguardano, naturalmente, anche l'**informatica**.

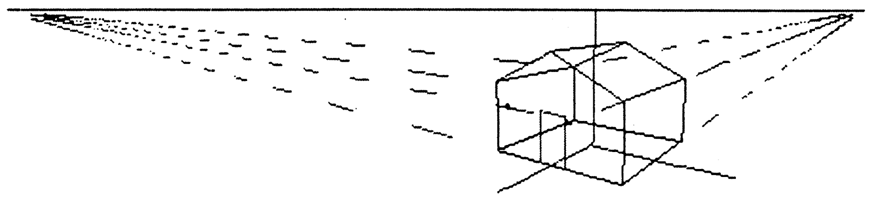



**12** La parte destra della figura precedente è lo studio della modellizzazione differenziale di «A e B vanno uno incontro all'altro con velocità proporzionale alla distanza tra loro, con coefficienti di proporzionalità 1 e 2 rispettivamente». A e B si incontrano (in un punto che dista dalla posizione iniziale di A un terzo della distanza iniziale tra A e B)?

Nel modello A e B non si incontrano, così come, nei modelli matematici, l'oggetto tolto dal frigo non raggiunge mai la temperatura ambiente, l'isotopo C-14 non sparisce dal fossile organico, ... . Il confronto tra "**in teoria**" e "**in pratica**" è un altro aspetto tipico dei rapporti tra matematica e altre discipline. Ma questo esempio permette di accennare anche ad un'altra problematica: quella del ruolo svolto dalla idealizzazione matematica nell'evoluzione del pensiero scientifico e filosofico. Qui abbiamo a che fare con il problema del *continuo*, sia spaziale che temporale, e con quello dell'*infinito*.

Quanto, l'insegnante di matematica-fisica e quello di **filosofia**, sfruttano le occasioni di confronto che la storia del pensiero (e la vita stessa dei filosofi-matematici-scienziati che hanno fatto questa storia) offre loro? E quale responsabilità ha l'insegnante di matematica che sfrutta l'"ignorante" Zenone, che non conosceva le serie, per motivare l'introduzione dei "potenti" strumenti dell'analisi, quando i suoi paradossi non ponevano solo problemi di convergenza (per altro alla portata della teoria geometrica delle proporzioni del pensiero greco dell'epoca), ma affrontavano problematiche gnoseologiche quali la natura dello spazio e del tempo (continua o non, archimedea o non, ...)? Quanto vengono esplicitati i rapporti tra matematica e fisica, evidenziate le differenze, messo a fuoco, ad esempio, il ruolo ambiguo che la variabile **tempo** assume implicitamente in varie *attività geometriche* (la confusione tra il movimento della fisica e quello delle trasformazioni geometriche era lecita nella geometria-fisica di Euclide, non lo è più nella matematica dei nostri giorni, basata su una distinzione tra modelli e realtà)?

**13** Non c'è solo la fisica. La figura seguente introduce i rapporti con il **disegno**.



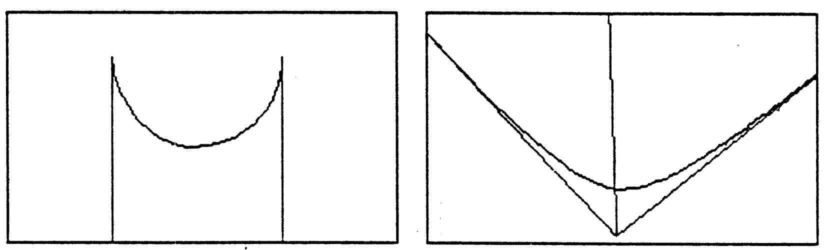
Il problema della *rappresentazione prospettica* è stato un altro momento importante nell'evoluzione del pensiero matematico. E nella storia del pensiero scientifico hanno svolto un ruolo importante non solo i matematici-filosofi naturali, ma anche i matematici-artisti.

Perchè con l'insegnamento geometrico non sviluppare una maggiore consapevolezza sulle tecniche di disegno apprese in altre materie? Perchè non sfruttare il software grafico per fare esplorazioni geometriche? Perchè non cogliere le occasioni che questo contesto offre per dare un respiro maggiore alla problematica dei concetti di limite e di infinito?

Osserviamo la figura seguente. Si tratta di due visioni dello stesso oggetto, ottenute con un semplice programma di grafica 3D. È un ramo di iperbole nel piano x,y del sistema tracciato.

A sinistra l'iperbole appare circolare in quanto è vista con uno sguardo orizzontale e parrallelo alla bisettrice dell'angolo x,y. L'origine degli assi diventa un punto all'infinito, gli assi x e y diventano paralleli, i punti all'infinito loro direzioni diventano gli estremi del semicerchio.

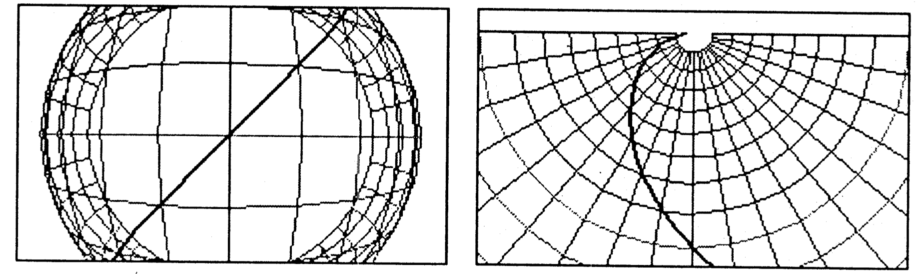
Lo studio delle **coniche** in questo contesto può assumere motivazioni e operatività nuove.



Lo studio delle **coniche** in questo contesto può assumere motivazioni e operatività nuove.

**14** La **cartografia**, argomento "freddo" di *scienze*, è un'altra tematica che ha appassionato l'umanità e ha accompagnato lo sviluppo della matematica (sia della geometria che di concetti come quello di logaritmo). La problematica delle rotte, quella della interpretazione delle informazioni deducibili da una rappresentazione cartografica, l'uso di software per esplorare il globo da diversi punti di vista (sotto sono riprodotte due visioni di un emisfero con la rotta y =x, x longitudine, y latitudine), la relatività del concetto "rettilineo", l'esistenza di diversi modelli di "spazio", ... offrono spunti per ricche e motivate attività didattiche.

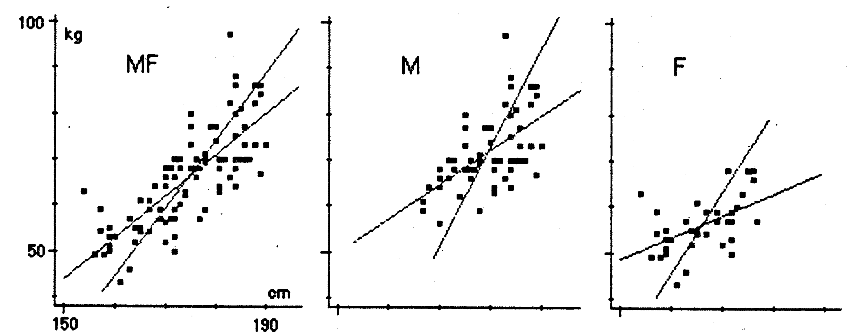




**15** L'ultimo esempio fa riferimento agli impieghi della **statistica**. Già in 02 e 06 abbiamo considerato modellizzazioni statistiche. La statistica, e la probabilità, possono svolgere un ruolo importante nell'educazione alla matematizzazione:

- da una parte, al livello degli studi pre-universitari, i problemi statistici non sono "interni": viene presentata una realtà (più o meno pre-modellizzata) di cui occorre costruire un modello matematico e la soluzione del problema in genere passa attraverso forme di ragionamento che intrecciano considerazioni formali e riferimenti diretti o metaforici a contesti;
- dall'altra la statistica consente attività di modellizzazione significative utilizzando concetti e tecniche matematiche relativamente elementari, facilitando la messa a fuoco della problematica della modellizzazione (natura e limiti dei rapporti tra M e R).

L'esempio sotto raffigurato si riferisce alla rappresentazione di pesi e altezze degli studenti di un corso universitario. La nuvoletta allungata obliquamente fa supporre che vi sia un'alta correlazione tra peso e altezza; il calcolo fornisce il valore 0.78. Ma se ci si restringe alla popolazione femminile si trova il valore molto più basso 0.52 (un'ingannevole intuizione farebbe invece supporre che, restringendosi a un campione più omogeneo, la correlazione dovrebbe aumentare). La rappresentazione grafica delle sottopopolazioni maschile e femminile mette in luce come il fenomeno sia dovuto all'unione di due sottopopolazioni omogenee e con caratteristiche diverse l'una dall'altra: le due nuvolette sono più tozze della nuvola unione (e la coppia delle rette di regressione per M e F è più divaricata che per MF).




Quest'esempio offre lo spunto per qualche ulteriore considerazione:

- l'importanza di individuare **situazioni prototipo**, semplici ma significative, che l'alunno possa poi richiamre mentalmente per orientarsi nelle attività di matematizzazione (come associare relazioni matematiche ad aspetti del fenomeno, tener conto dei **limiti** dei modelli, ...);
- l'importanza e la potenza dei linguaggi **grafici** e delle metafore **geometriche**, sempre più usati nelle applicazioni ma piuttosto trascurati nell'insegnamento della matematica, mentre (vedi 09) consentirebbero in molti casi approcci ad argomenti importanti (per la cultura di base) che sono concettualmente, ma non "tecnicamente", alla portata degli alunni.

**16** Concludendo, il messaggio che ho cercato di lanciare può essere così sintetizzato. L'insegnamento della matematica ha in comune con quello delle altre materie la questione della modellizzazione, sia in generale che in relazione a contesti e/o concetti specifici; su questo terreno si possono trovare forme di collaborazione che consentano di ottimizzare le attività didattiche, di motivare e dare agli alunni una visione meno scolastica delle discipline, di educarli alla gestione del transfer delle conoscenze da un contesto all'altro, da un ambito formale a un ambito applicativo e viceversa. Se non ci si sporcano le mani con i contesti, non si può comprendere la natura astratta della matematica.

*Riferimenti*

Blum, W. & Niss, M.:1991, Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects, *Educational Studies in Mathematics*, v. 22

Dapueto, C. & Parenti, L.:1999, Contributions and Obstacles of Contexts in the Development of Mathematical Knowledge, *Educational Studies in Mathematics* [to appear]

Israel, G.: 1996, *La visione matematica della realtà*, Il Mulino, Bologna

Norman, D.A.:1995, *Le cose che ci fanno intelligenti*, Feltrinelli



# MILLE LENTI PER OSSERVARE IL MONDO: OTTANT'ANNI DI MODELLISTICA MATEMATICA

Giorgio Israel*

La costruzione di modelli matematici per la descrizione dei fenomeni è una prassi recente, mai impiegata prima del Novecento. Un modo semplice di convincersene è di mettere a confronto due brani divisi da più di due secoli e mezzo.

Quarant'anni fa John von Neumann, uno dei massimi scienziati del nostro secolo, indicava la modellizzazione come il nucleo del fare scienza e ne definiva così le caratteristiche: «... le scienze non cercano di spiegare, a malapena tentano di interpretare, ma fanno soprattutto dei modelli. Per modello si intende un costrutto matematico che, con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali, descrive dei fenomeni osservati. La giustificazione di un siffatto costrutto matematico è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni — cioè descriva i fenomeni in un'area ragionevolmente ampia. Inoltre, esso deve soddisfare certi criteri estetici — cioè, in relazione con la quantità di descrizione che fornisce, deve essere piuttosto semplice.»

Quindi, la scienza non vuole *spiegare* l'essenza intima dei fenomeni, non è alla ricerca della *verità*, non è *specchio* dei fenomeni; ma si limita a fornire delle immagini matematiche — i modelli — che vanno valutate sulla base di criteri di efficacia, in quanto permettono di prevedere certi effetti o di farsi delle idee qualitative parziali dei fatti.

Leggiamo ora questo brano: «Il compito principale della filosofia della natura è quello di argomentare a partire dai fenomeni senza immaginare ipotesi, e di dedurre cause a partire da effetti, fino a che giungiamo alla Causa Prima, che certamente non è meccanica; ed è suo compito non soltanto di dispiegare il meccanismo del mondo, ma fondalmente di risolvere queste e simili questioni. Che cosa c'è in luoghi che sono quasi completamente vuoti di materia, e donde deriva che il sole e i pianeti gravitano gli uni verso gli altri, senza che vi sia tra loro nessuna materia densa? Donde viene che la Natura non fa nulla invano; e da dove trae origine tutto quell'ordine e tutta quella bellezza che vediamo nel mondo? A qual fine esistono le comete, e donde viene che i pianeti si muovano tutti in un unico e medesimo modo in orbite concentriche, mentre le comete si muovano in ogni sorta di modi in orbite molto eccentriche; e che cosa impedisce alle stelle fisse di precipitare le une sulle altre? Come avviene che i corpi degli animali siano congegnati con tante arte, e quale è lo scopo delle loro numerose parti? È possibile che l'occhio sia stato costruito senza conoscenza d'ottica, e l'orecchio d'acustica? Come avviene che i movimenti del corpo derivano dalla volontà, e donde viene l'istinto degli animali? ... E una volta che siano state stabilite con esattezza tutte queste cose, non risulta con evidenza dai fenomeni che esiste un Essere incorporeo, vivente, intelligente,

* Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"

onnipresente, il quale nello spazio infinito come nel Suo sensorio, vede intimamente le cose stesse e le percepisce completamente, e le capisce interamente in virtù della loro presenza immediata a Lui stesso? [...] E sebbene ogni vero passo fatto in questa filosofia non ci porti immediatamente alla conoscenza delle Prima Causa, tuttavia ci avvicina ad essa, e per questo motivo va tenuto in grande considerazione.»

Queste frasi sono tratte dall'Ottica di Isaac Newton ed è facile convincersi che esse delineano un'immagine della scienza — filosofia naturale, nel linguaggio dell'epoca — opposta a quello illustrata da von Neumann. Per Newton, il criterio direttivo non è l'utilità ma la *verità*, la *spiegazione* delle cause, fino a giungere alla Causa Prima. L'analisi scientifica ricerca cause a partire da effetti senza «fingere ipotesi», fisiche o metafisiche che siano, ovvero senza ricorrere a costruzioni concettuali *ad hoc*, prive di una relazione con i fatti. Il famoso «Hypotheses non fingo» di Newton potrebbe essere parafrasato dicendo: «io non costruisco modelli»... non ricorro a immagini o costrutti arbitrari, bensì ricerco la verità intima dei fatti. Per circa tre secoli questo è stato il credo della scienza, in particolare del suo nucleo, la fisica-matematica. Esso ha ruotato attorno all'idea di Galileo secondo cui il libro della natura è scritto da Dio in lingua matematica. Se la natura è strutturata matematicamente, la matematica non è un mero strumento descrittivo — un arsenale di modelli — ma esprime l'intima essenza dei fenomeni.

Abbiamo detto che questa visione è stata abbandonata nel nostro secolo. Ma con quanta riluttanza! Ancora Einstein affermava che «abbiamo il diritto di essere convinti che la natura è la realizzazione di ciò che può essere immaginato di più semplice dal punto di vista matematico». E la ricerca di un insieme di leggi unitarie che *spieghino* il meccanismo del mondo sembra ancora essere l'aspirazione di ogni fisico teorico. Tuttavia, malgrado queste nostalgie, la scienza contemporanea sempre più è dedita alla costruzione di modelli, di *modelli matematici*.

Un modello matematico è uno schema concettuale volto a rappresentare un insieme di fenomeni nel linguaggio della matematica. Il modello, in quanto non è specchio del fenomeno, non ambisce ad esserne l'unica rappresentazione possibile: non esiste una corrispondenza biunivoca fra modelli e fenomeni. Lo stesso fenomeno può essere rappresentato mediante più modelli fra i quali si può scegliere secondo criteri di efficacia, ma che non sono necessariamente in competizione, potendo offrire prospettive diverse e compatibili fra di loro. Viceversa, uno stesso modello può rappresentare fenomeni diversi, fra i quali istituisce una sorta di "omologia" strutturale. Questo aspetto identifica un approccio caratteristico della modellistica matematica, e cioè il metodo dell'*analogia matematica*. Esso consiste nell'identificare aspetti comuni fra fenomeni anche lontani fra di loro e scoprire collegamenti spesso inattesi. Se uno di questi fenomeni è suscettibile di una descrizione matematica efficace, essa può essere considerata come un *modello matematico* di tutti gli altri fenomeni analoghi (od "omologhi"). Ad esempio, nella moderna dinamica non lineare si è pervenuti ad una trattazione unificata di fenomeni di turbolenza idrodinamica, di cinetica chimica, del comportamento di certi circuiti elettronici della radiotecnica, e di molti altri processi: il modello matematico più soddisfacente è ricavato dalla descrizione di certi processi oscillatorii che trovano la



loro manifestazione più evidente nei detti circuiti elettronici.

In definitiva, un modello matematico è un frammento di matematica che serve a rappresentare un fenomeno, senza che questa rappresentazione sia unica: lo stesso frammento di matematica può esser atto a descrivere più fenomeni indipendenti. Un singolo fenomeno può essere osservato con tante lenti (o modelli) e la stessa lente dar conto di fenomeni diversi e offrirne la stessa immagine.

Abbiamo usato il termine ambiguo di *rappresentazione*, perché un modello può avere una funzione *descrittiva* oppure una funzione *prescrittiva*. Ad esempio, un modello dei fenomeni meteorologici è descrittivo, mentre un modello del traffico automobilistico o un modello di allocazione di risorse scarse fra consumatori, sono modelli prescrittivi o di *controllo*. Qui non si mira alla descrizione, bensì alla determinazione delle procedure mediante cui conseguire un fine: nel nostro caso, realizzare uno scorrimento fluido e veloce del traffico e una distribuzione delle risorse "ottimale" secondo criteri di equità o efficienza. Tuttavia questi due punti di vista possono coesistere. Ad esempio, l'influsso sempre più evidente delle attività umane sui fenomeni meteorologici induce ad abbandonare l'approccio puramente descrittivo, per valutare gli effetti di tale influsso al fine di contrastarne gli aspetti negativi. Il numero crescente di modelli prescrittivi o normativi è un'ulteriore prova del carattere originale della modellistica come prassi di ricerca rispetto all'approccio quasi esclusivamente descrittivo-esplicativo della scienza classica.

A queste caratteristiche della modellizzazione matematica ne va aggiunta un'altra che costituisce una grande novità: l'applicazione ai fenomeni biologici, sociali, economici, psicologici, ecc. Prima del nostro secolo, l'uso della matematica in questi contesti "non fisici" era stato fortemente osteggiato. A partire dagli anni venti, l'applicazione della matematica alla biologia, prima episodica, si sviluppa impetuosamente in tre filoni di ricerca: la *dinamica delle popolazioni*; la *genetica delle popolazioni* (che contribuisce alla sintesi fra mendelismo e darwinismo); la *teoria matematica delle epidemie* (che fornisce uno strumento per la previsione quantitativa della diffusione delle malattie contagiose); l'elaborazione di modelli matematici della fisiologia e della patologia degli organi umani. Il ventennio 1920-40 è stato definito come il "golden age", l'età d'oro della biologia matematica. Un'esplosione analoga avviene nel campo socio-economico, dove i tentativi ottocenteschi più o meno abortiti di Léon Walras e Vilfredo Pareto di fondare una scienza economico-matematica, vengono ripresi dai matematici Abraham Wald e John von Neumann e poi ripensati nel nuovo contesto della *teoria dei giochi*.

È naturale chiedersi perché siano cadute le due barriere che si frapponevano allo sviluppo dell'approccio modellistico: la visione realista e oggettivista dei fenomeni, la diffidenza per la matematizzazione dei fenomeni non fisici.

Una delle cause risiede nei processi che modificano la fisica agli inizi del secolo. Difatti, le ricerche nella sfera atomica e subatomica spingono la fisica ad abbandonare il realismo, a chiedersi sempre meno cosa siano gli oggetti di cui si occupa bastandole di fornirne una rappresentazione formale coerente ed efficace: proprio in questo contesto si diffonde il termine "modello", in riferimento ai "*modelli dell'atomo*" che mirano a rappresentarne le proprietà senza pretendere di rifletterne la struttura reale.

Un altro fattore è legato allo sviluppo della tecnologia (ovvero della tecnica fondata sulla scienza) che impone un rapporto sempre più stretto della matematica con le applicazioni, le quali non si lasciano racchiudere nei confini tradizionali della fisica, anche quando riguardano tematiche strettamente fisiche. Tali sono le tematiche legate ai fenomeni a regime turbolento; e quelle suggerite dai nuovi sviluppi tecnologici, come la radio, i circuiti elettrici non convenzionali, gli apparecchi in cui intervengono servomeccanismi, il volo aereo. I modelli matematici elaborati per trattare queste tematiche — che ricorrono alla teoria delle equazioni differenziali non lineari — suggeriscono applicazioni e connessioni impensate: in particolare, ai fenomeni ciclici che si presentano in economia e in biologia.

Una simile varietà ed eterogeneità di temi non rende facile l'inserimento dei nuovi sviluppi della modellistica nella struttura rigida della scienza classica. Il loro studio è spesso promosso da studiosi ai margini della comunità scientifica ufficiale, ma comprendenti (o sostenuti da) alcune figure di prestigio. Un esempio di studioso tanto ricco di idee fertili quanto eclettico nell'approccio e isolato dalla comunità scientifica ufficiale, è dato da Alfred J. Lotka, funzionario di una compagnia di assicurazioni di New York, che scrisse negli anni venti un volume (*Elements of mathematical biology*) misconosciuto all'epoca ma che ebbe poi un grande influsso nella formazione di uno dei maggiori matematici applicati del secolo, Norbert Wiener. Un altro grande scienziato che si impegnò nel nuovo fronte della matematica applicata e della modellistica fu il tedesco Theodore von Kármán (poi emigrato negli Stati Uniti presso il California Institute of Technology). Mentre il celebre fisico-matematico italiano Tullio Levi-Civita fu uno dei principali fautori del nuovo corso.

È impossibile fare un elenco degli innumerevoli problemi applicativi che stimolano l'espansione della modellistica matematica negli anni della Seconda Guerra Mondiale. Ricordiamo alla rinfusa: meteorologia, questioni di allocazione ottimale delle risorse (logistica militare, organizzazione del Piano Marshall, pianificazione e programmazione economica, gestione industriale), problemi di aerodinamica e di balistica (ottimizzazione del tiro contraereo, modelli della bomba atomica e termonucleare, missilistica), questioni di tecnologia industriale (estrazione del petrolio, organizzazione razionale della produzione). Le applicazioni della matematica sono tante che il diffondersi, fra i matematici degli anni cinquanta, di un approccio tendente all'astrazione e alla visione pura della ricerca — promosso dal collettivo di matematici francesi raccolti sotto lo pseudonimo di Nicolas Bourbaki — rappresenta soltanto una parentesi, per quanto influente. La modellistica non si limita tuttavia agli aspetti tecnologici ed industriali ora accennati. Essa riprende i temi della modellistica biologica ed economico-sociale degli anni venti: dopo una pausa di qualche decennio, la dinamica delle popolazioni e l'epidemiologia ritornano al centro degli interessi e conoscono, negli anni settanta, uno sviluppo impressionante; e, a partire dagli anni cinquanta, l'economia matematica si concentra di nuovo sullo studio della teoria dell'equilibrio economico, mentre riprende vigore l'interesse per la teoria dei giochi, i cui fondamenti erano stati codificati negli anni quaranta in un celebre libro di Von Neumann e Morgenstern. In anni più recenti, lo studio matematico dei problemi meteorologici ha condotto alla scoperta di un fenomeno — il cosidetto "caos deterministico" — da taluni considerato come una rivoluzione concettuale di grande portata. Lo studio dei fenomeni "caotici", così come quello dei fenomeni "complessi", si ricollega all'interesse per i processi turbolenti e ha indotto un radicale mutamento nella visione matematica dei fenomeni: all'antica convinzione di un mondo strutturato in forme semplici ed ordinate, che si rifletterebbero nelle strutture chiare ed armoniose della matematica, si sostituisce l'idea di un'irriducibile complessità e di un intreccio straordinariamente complicato di relazioni che può essere soltanto rappresentato nell'ambito della "nuova" matematica del caos o delle strutture frattali o descritto mediante la teoria delle probabilità.



Un fattore di importanza cruciale nello sviluppo della modellistica matematica è rappresentato dal calcolatore e dal suo uso sempre più diffuso nella ricerca. A partire dagli anni ottanta, la costruzione di macchine sempre più potenti, veloci e maneggevoli ha condotto a un'esplosione del calcolo numerico. Inoltre, l'introduzione della grafica su calcolatore e la sostituzione della rappresentazione numerica con la rappresentazione geometrica delle soluzioni dei sistemi studiati, permette una valutazione qualitativa diretta del comportamento delle soluzioni stesse. Ciò mette capo a un radicale mutamento nella prassi della ricerca. L'analisi numerica non è più un supporto per lo studio delle soluzioni laddove esse non sono direttamente esplicitabili con gli strumenti dell'analisi ordinaria, ma diviene uno strumento di simulazione del comportamento dei sistemi matematici studiati e, di riflesso, dei sistemi reali che essi pretendono di rappresentare. Mediante il calcolatore diviene quindi possibile *simulare* il comportamento di un sistema reale, nella speranza, almeno in certi casi, di sostituire questo approccio con la verifica empirica diretta.

Un altro aspetto che caratterizza la prassi modellistica è dato dal progressivo abbandono di un principio fondamentale della scienza classica: l'idea della *semplicità della natura*. Esso ha radici lontane ma è nell'opera di Galileo Galilei che si connette con l'idea che il mondo ha una struttura matematica semplice. Abbiamo già osservato che il fascino che questo principio ha esercitato sulle menti degli scienziati è testimoniato dalla sua persistenza. Il principio della semplicità della natura ebbe una traduzione matematica verso la fine del Settecento soprattutto ad opera di J. L. Lagrange. L'idea consisteva nell'ammettere che, in un'equazione differenziale rappresentativa di un processo reale il contributo della parte lineare delle funzioni in gioco sia quello che esprime gli aspetti caratterizzanti la dinamica del processo stesso. Pertanto a quelle funzioni può sostituirsi la loro componente lineare senza danno. Quel che si trascura (la parte non lineare) rappresenta aspetti del processo che sono soltanto "perturbazioni" del processo fondamentale: la loro omissione fornisce una descrizione lievemente alterata che non modifica le caratteristiche fondamentali di quella "vera". *Linearizzare* l'equazione differenziale (e quindi il processo) significa ricorrere a una descrizione più semplice, in cui perdiamo soltanto aspetti marginali. In cambio, guadagniamo in semplicità, perché potremo trattare matematicamente il processo in modo più agevole. Insomma, la *linearizzazione* rappresenta il procedimento matematico con cui si attinge all'essenza di un processo fisico e si svelano le intime strutture *semplici* che lo governano.

È chiaro che questo approccio ha senso se e soltanto se è vera l'ipotesi che la soppressione dei termini non lineari dell'equazione equivale a trascurare perturbazioni secondarie. Questa ipotesi è falsa, almeno in linea di principio. Tuttavia, la fisico-matematica l'ha considerata come un'evidenza per un almeno un secolo, fornendo così una prova del fatto che la scienza è governata da ipotesi metafisiche nelle sue scelte concettuali e che essa era accettata non perché ne fosse provata l'aderenza con i fatti, ma perché esprimeva la fede nell'idea della semplicità della natura.

Agli inizi del nostro secolo, ci si è resi conto che il metodo della linearizzazione poteva condurre a gravi errori e non possedeva alcun fondamento oggettivo. In molti casi importanti proprio la componente non lineare conteneva gli aspetti significativi del fenomeno. Lo sviluppo della modellistica matematica è legato all'affermarsi di un paradigma della *non linearità* in opposizione a quello tradizionale della linearità, e questa contrapposizione corrisponde all'affermarsi dell'idea che i processi naturali non sono in generale semplici, bensì *complessi*: la semplicità (e quindi la linearità) diventa l'eccezione, la *complessità* (ovvero la non linearità) la regola.

Il ruolo della modellistica nell'affermarsi del paradigma della non linearità e della complessità può essere inteso se si tiene conto del fatto che il dogma della linearità dominava non soltanto la fisica classica ma anche quella più recente: la meccanica quantistica è strutturata attorno allo schema dell'oscillatore lineare e, come è stato detto, rappresenta l'apoteosi del paradigma lineare, per l'uso sistematico che in essa si fa della teoria degli operatori lineari in uno spazio di Hilbert. L'attenzione per la non linearità e la complessità emerge quindi entro ambiti non convenzionali della fisica e della tecnologia (teoria delle oscillazioni nella meccanica applicata, problemi di turbolenza, radiotecnica, processi di autoregolazione, fenomeni di biforcazione) e nelle applicazioni della matematica alle scienze biologiche ed economico-sociali. Va sottolineato, al riguardo, il ruolo di punta assunto dalla scienza russa nel costituirsi del paradigma della non linearità, fin dagli inizi del secolo, sotto l'impulso di un'importante tradizione nel campo dell'ingegneria, delle scienze applicate e della meccanica.

Per illustrare meglio questi temi conviene riferirsi all'evoluzione del concetto di oscillazione nei primi decenni del secolo. È superfluo insistere sulla centralità di questa nozione: innumerevoli fenomeni oscillatori e periodici si trovano in natura e nei processi artificiali, dalle vibrazioni meccaniche ai cicli economici, dall'acustica alla dinamica delle popolazioni, dalla contrazione del cuore ai cicli di riproduzione delle piante. Ove si tenga conto che uno strumento fondamentale della matematica, la trasformata di Fourier, permette di decomporre ogni evoluzione nella somma di contributi periodici, è facile intendere che i fenomeni oscillatori hanno un ruolo di straordinaria generalità nella descrizione matematica dei fenomeni. La struttura matematica più semplice per la descrizione di un fenomeno oscillatorio è data dall'oscillatore armonico lineare. Tuttavia, molti processi oscillatori periodici non sono riconducibili a questo modello. Ad esempio, esso è inadeguato a descrivere un meccanismo antico come l'orologio, in quanto non rende conto della sua capacità



di stabilire in modo "automatico" un bilancio fra immissione e dissipazione di energia: l'orologio — come tanti altri dispositivi o processi naturali — "autoregola" le sue oscillazioni mediante un meccanismo di *retroazione* (o *feedback*). A questo tipo di oscillazioni si addice la denominazione di "auto-oscillazioni" e la loro descrizione più appropriata è data un modello matematico non lineare che è una variante di un'equazione introdotta dal radiofisico olandese B. L. Van de Pol nel 1926, per rappresentare il comportamento di circuiti elettrici in cui sono inseriti triodi o tubi a neon e che fu da lui applicata con successo alla descrizione di fenomeni come il battito cardiaco. L'equazione di Van der Pol aprì la strada allo studio di molti processi auto-oscillatori con retroazione.

Quanto precede vale a illustrare il profondo mutamento che ha subito il rapporto fra matematica e tecnologia nel nostro secolo. La considerazione del più semplice sistema non lineare mostra l'emergere di comportamenti non riconducibili alla somma del comportamento delle singole parti. In un sistema a due sole componenti, se esiste una relazione di retroazione della prima componente sulla seconda, è impossibile descrivere il comportamento dell'insieme come risultato del comportamento delle due componenti. Ciò testimonia di un legame preciso fra complessità, non linearità e taluni processi tecnologici non tradizionali come i processi di retroazione, i quali sono legati all'introduzione di dispositivi di autoregolazione nelle macchine.

Al riguardo, occorre osservare che la concezione classica delle macchine è fondata su un principio riduzionistico che può essere espresso nell'aforisma: «*il tutto è la somma delle parti*». Una macchina le cui componenti sono connesse da una concatenazione causale lineare, in cui ogni elemento agisce sul successivo secondo uno schema senza diramazioni o retroazioni, può essere ricondotta a questo principio. Quest'ultimo esprime il paradigma meccanicista della fisica classica, secondo cui ogni sistema non è altro che l'aggregato di parti elementari e la descrizione dell'evoluzione dell'insieme si ottiene come risultante della descrizione dell'evoluzione delle componenti elementari. Tuttavia, lo schema della concatenazione causale di componenti isolate o isolabili si è rivelato inadeguato di fronte alle nuove concezioni tecnologiche. La tematica che per prima entra in contraddizione con questo paradigma è quella della retroazione e dei servomeccanismi. Norbert Wiener, alla fine degli anni quaranta, sulla base degli sviluppi della tecnologia dei calcolatori, della teoria dell'informazione e delle macchine automatiche, propose i concetti di retroazione, di cibernetica e di informazione come centrali anche in contesti molto più vasti di quello strettamente tecnologico. Non minore importanza ebbero, in questa direzione, la teoria dell'informazione di Claude Shannon e la teoria dei giochi di von Neumann.

Tuttavia, l'insufficienza del riduzionismo meccanicistico si manifesta a un livello più profondo. La tecnologia moderna pone problemi assai più complessi della descrizione di un dispositivo isolato o di una singola macchina: ci si trova di fronte a *sistemi*, in cui intervengono livelli diversi fra loro e spesso neppure riducibili a fattori puramente fisici. Non si tratta soltanto dei problemi posti da tecnologie come quella aereospaziale, in cui intervengono problematiche meccaniche, elettroniche, chimiche e anche biologiche. Si tratta di problemi come quelli della regolazione del traffico o dei problemi delle file d'attesa, per non parlare della trattazione scientifica dei problemi economici, produttivi, finanziari, sociali. Qui interviene una molteplicità di livelli che richiedono le competenze di specialisti che nel passato operavano in sfere separate: il biologo, lo psicologo, l'economista, il programmatore, ecc. Inoltre, la modellizzazione matematica di questi processi non richiede un approccio descrittivo ma talvolta deve esplicitamente negarlo per determinare le condizioni sotto le quali il processo può assumere un comportamento ottimale. Nel vasto dominio dei modelli di controllo la matematica è chiamata a giocare un ruolo inedito.

In definitiva, la tecnologia del Novecento determina l'abbandono del rapporto esclusivo fra matematica e fisica, e del nucleo costitutivo di tale rapporto, il riduzionismo meccanicistico. Resta aperto il problema se la matematica — per tanti aspetti profondamente plasmata dal rapporto con la fisica — abbia subito un'evoluzione tale da fondare un nuovo rapporto costitutivo con le scienze non fisiche, libero da ogni residuo del meccanicismo causale lineare, e quindi adeguato a riflettere la specificità dei problemi biologici, sociali o economici. Difatti, come ha osservato il teorico dei sistemi L. von Bertalanffy, molti approcci modellistici o sistemistici appaiono più come *estensioni* e *sostituzioni* della visione meccanicista e quindi, mentre offrono un potenziamento indiscutibilmente efficace dell'analisi matematica dei fenomeni fisici, non sempre può dirsi la stessa cosa in ambiti in cui si richiede una visione originale.

Queste osservazioni appaiono pertinenti ove si tenti di valutare lo stato presente della modellistica matematica. Naturalmente, una siffatta valutazione è molto complessa e deve essere fatta con gran prudenza. Ma non è difficile constatare che le applicazioni della matematica a questioni che possono essere viste come un'estensione di problematiche fisiche in cui persiste un'approccio di tipo meccanicistico, sono chiaramente efficaci, e riconosciute come tali dalla comunità scientifica: nessuno mette in discussione la straordinaria efficacia della matematica nella teoria della turbolenza. Ben diverso è il discorso per le applicazioni alle scienze biologiche ed economico-sociali, per non parlare della psicologia, della psicoanalisi, delle scienze del comportamento.

Fuori dall'ambito fisico, il discrimine sembra essere fra modelli descrittivi o modelli normativi: i primi sono in genere i più deludenti. È difficile negare l'efficacia dei modelli di allocazione delle risorse o della cosidetta "activity analysis", dei modelli dei processi produttivi nell'industria o della dinamica dei capitali finanziari. Invece, i modelli di equilibrio economico generale appaiono particolarmente mediocri. I primi confezionano un'immagine artificiale e semplificata della realtà, in una prospettiva normativa, mentre i secondi hanno un fine descrittivo che deve tener conto della complessità del processo economico e, di fatto, riduce tale complessità, in modo quasi caricaturale, a uno schema meccanico semplificato del modello.

Un esempio più chiaro è dato dai modelli matematici degli ecosistemi. È noto che la crescita in laboratorio di alcune specie animali di prede e predatori coesistenti, corrisponde discretamente alla dinamica descritta dalle equazioni di Volterra. Altrettanto dicasi nel caso di un ecosistema ipersemplificato, come un terreno



agricolo gestito con metodi industriali. In entrambi i casi si tratta di situazioni *artificiali*, ridotte a uno schema semplificato di tipo meccanico. Ma non appena si affronti il problema della *descrizione* di un ecosistema reale complesso (come l'ecosistema di una foresta pluviale) i risultati di tutti i modelli noti divergono dalle osservazioni empiriche in modo sconcertante. Particolarmente significative, al riguardo, sono le ricerche condotte da R. M. May negli anni settanta circa la relazione fra stabilità e complessità negli ecosistemi. Il problema che si poneva May era il seguente: può dirsi che, alla luce dei modelli matematici di Volterra e delle loro generalizzazioni, un *aumento di complessità* dell'ecosistema (ovvero un incremento del numero delle specie e delle loro interazioni) conduca a un suo *aumento di stabilità* (nel senso che la sua struttura resiste alle perturbazioni esterne)? Gli ecologi sono orientati verso una risposta affermativa, sulla base dei fenomeni noti e studiati. May ha mostrato invece che i modelli matematici conducono a una risposta opposta: *quanto più il modello è complesso tanto più è instabile*. Questa gravissima incoerenza fra modelli e osservazioni empiriche è un problema tuttora irrisolto.

Una situazione analoga si presenta nella modellizzazione matematica dell'AIDS, la quale non sembra avviata a riscuotere i successi della modellizzazione matematica di epidemie "semplici", come la peste, il colera o certe malattie veneree, in cui il meccanismo di diffusione è riducibile a uno schema fisico del tipo "teoria cinetica dei gas". Qui la estrema complessità della malattia, il quadro troppo complicato e dai contorni mal definiti dei suoi meccanismi di trasmissione, per non parlare delle idee assai incerte circa il suo tempo d'incubazione (o di latenza), hanno condotto allo sviluppo di una modellistica tanto vasta quanto di utilità e validità incerta. In un recente congresso, negli USA, modellisti matematici, biologi e medici si sono confrontati su questo tema e il dibattito si è trasformato in un dialogo di sordi: i secondi manifestavano il loro scetticismo e non si dichiaravano disposti a fornire i dati empirici in mancanza di una prova dell'utilità dei modelli; mentre i primi dichiaravano di non poter far molto in assenza di un panorama quantitativo più chiaro e di una conoscenza più profonda dei meccanismi biologici della malattia.

Agli inizi della grande ripresa degli studi biomatematici, nel 1976, i matematici G. Oster e J. Guckenheimer osservavano: «I sistemi biologici tendono ad essere molto più complessi dei sistemi studiati in fisica o in chimica. Nell'analisi dei modelli ci si trova di frequente di fronte a due alternative: o il ricorso alla forza bruta della simulazione mediante il calcolatore, oppure la riduzione del modello mediante approssimazioni talmente draconiane che esso perde di interesse dal punto di vista biologico. Né l'una né l'altra di queste due alternative è seducente. In effetti, è raro il poter perseguire la prima delle due alternative nella maggior parte delle situazioni che si presentano in ecologia, perché raramente disponiamo di dati sufficienti allo scopo di convalidare un modello dal punto di vista quantitativo. È questa una situazione del tutto diversa da quella che si presenta nelle scienze fisiche, dove piccole differenze permettono spesso di scegliere fra diverse teorie in competizione. La situazione è talmente difficile che molti ecologisti mettono seriamente in dubbio la possibilità che la matematica possa giocare un ruolo di qualsiasi utilità in biologia. Vi sono persone che dicono che non esiste un solo progresso nel campo della biologia che possa essere attribuito alle teorie matematiche. Essi dicono che quando entrano in gioco i sistemi complessi il linguaggio appropriato è l'inglese e non quello della matematica.»

Queste conclusioni pessimistiche non hanno frenato l'esplosione della biomatematica nel ventennio 1974-1994, durante il quale l'editore Springer ha pubblicato la serie di volumi *Lecture Notes in Biomathematics*. Nel n° 100 del 1994, chiudendo la pubblicazione della serie, l'"editor" S. A. Levin tracciava un bilancio "bittersweet", "dolce-amaro": la disciplina è talmente esplosa, osservava Levin, che questa serie di volumi non serve più. Nessuno è più interessato a panorami di sintesi generale, ognuno si scavato la sua nicchia specialistica dentro la quale trivella in profondità e nel più completo disinteresse per quel che succede anche immediatamente accanto a lui. Così, proprio mentre il numero dei ricercatori aumentava esponenzialmente, la serie di volumi doveva chiudere per crisi economica, perché nessuno comperava più i volumi! Insomma, le domande di Oster e Guckenheimer, alla fine del secondo ventennio "d'oro" della biomatematica non hanno trovato risposta: sono state semplicemente accantonate in quanto prive di interesse per una ricerca sorda ai problemi di orientamento generale.

Un discorso analogo potrebbe essere fatto per l'economia matematica. Mi limiterò a dire che, in analogia con quanto accadde per le ricerche di May in biomatematica, i risultati matematici ottenuti nella teoria dell'equilibrio economico negli anni settanta e ottanta ebbero un impatto devastante per la teoria medesima. A tal punto, che molti ricercatori di punta, come il matematico Steven Smale, abbandonarono questo settore di ricerca. Tuttavia, l'elaborazione di modelli è andata avanti e va avanti come una macchina impazzita, senza tener conto del carattere critico o negativo di certi risultati, trovando alimento e giustificazioni soltanto all'interno di sé stessa.

Quanto precede permette di concludere che il panorama generale della modellistica matematica, alla fine del millennio, si presenta con dei forti chiaroscuri — o, per dirla con Levin, ha un sapore agrodolce.

La matematica appare sempre più come uno strumento pervasivo, come la via obbligata per ogni analisi dei fenomeni che ambisca a definirsi "scientifica". La scienza appare sempre più pervasa da un ideale di tipo "*panmatematico*" che sembra riproporre l'idea galileiana secondo cui la natura è scritta in linguaggio matematico, anche se — come si è detto — senza ambizioni di realismo e sostituendo al dogma della semplicità l'idea della complessità. Tuttavia, mentre le rappresentazioni matematiche della complessità sembrano rispondere abbastanza bene alla complessità dei fenomeni fisici, i livelli di complessità che si presentano nei fenomeni biologici e, ancor più, in quelli economici, sociali e psicologici, rappresentano una sfida straordinariamente ardua e del tutto aperta per l'analisi scientifica formale.

In questa situazione, la modellistica matematica, in quanto attività multiforme, dispersa in una pleiade di settori e priva di criteri unificanti sul piano dei concetti e dei metodi, propone sfide affascinanti e presenta rischi seri. La sfida affascinante consiste chiaramente nell'estensione del metodo matematico a settori che gli sembravano preclusi. I rischi sono connessi proprio a questa estensione: nella misura in cui non poggia su solidi criteri di controllo obbiettivi, la modellistica apre la



strada all'arbitrario, si avvicina proprio alla prassi di quelle scienze verbali e informali di cui la scienza ha criticato tanto il carattere incerto, opinabile, inverificabile. Molto spesso il modello rassomiglia a un "*racconto*", a una narrazione, e se può averne tutto il fascino rischia anche di condividerne il soggettivismo e l'arbitrarietà.

Vorrei concludere osservando che, in questo contesto di sfide affascinanti e rischiose, proprio *i matematici hanno un ruolo importante da giocare*. Infatti, la parcellizzazione della modellistica conduce i suoi protagonisti ad un atteggiamento sempre più pragmatico nei confronti della matematica, al limite del praticismo più strumentale. Il biologo, l'economista, l'ingegnere aspirano sempre più a confezionarsi da soli e a far uso indipendente di una *matematica "alla carta"*, ovvero espressamente adattata ai loro specifici scopi; e manifestano insofferenza nei confronti degli standards di rigore richiesti dalla "matematica dei matematici". Questa tendenza presenta un duplice rischio, i cui primi effetti sono già evidenti: da un lato, il deperimento del ruolo e dell'influsso della matematica, come l'abbiamo conosciuta finora, a profitto di una matematica molto più pratica e "pronta all'uso" (con il conseguente rischio di un declino della ricerca matematica e della sua marginalizzazione); d'altro lato, una caduta di livello degli standards di rigore della modellistica, che può divenire persino drammatica.

A fronte di questa situazione, la risposta dei matematici non può essere quella di limitarsi a una sorta di rivendicazione di primogenitura oppure a un'affermazione di principio degli standards di rigore della propria disciplina. Si sa che le rivendicazioni dei nobili in declino o i proclami finiscono sempre nel nulla, soprattutto quando si mettono di traverso a correnti più o meno inarrestabili. L'unico atteggiamento ragionevole consiste nel non isolarsi dalle nuove tendenze della matematica applicata e nell'influire attivamente sul corso di queste correnti. Ovvero nell'*intervenire* in queste tendenze portandovi un *atteggiamento critico e rigoroso*. In concreto, il mondo della matematica — *che si tratti di quello della ricerca come di quello dell'insegnamento* — deve far propri certi temi: occorre che i metodi di programmazione e la teoria dei giochi, l'analisi matematica dei processi genetici e l'analisi dei mercati finanziari, l'epidemiologia o la dinamica delle popolazioni non siano più materie estranee al corpo della matematica, ma anzi che dal mondo della matematica parta l'impulso a svilupparne lo studio, secondo criteri scientifici. Occorre che i matematici siano in prima linea negli sviluppi della modellistica, per trattarli con il rigore e lo spirito critico che già tanti anni fa venne indicato da Federigo Enriques, proprio trattando dei temi analoghi che si ponevano a quel tempo. Nel campo dell'insegnamento, la rivendicazione da parte del mondo matematico di un ruolo primario nel campo delle tematiche applicative significa difendere il ruolo di una visione *culturale* e *critica* nell'apprendimento, spesso messa in discussione dalla tendenza a correre in modo scomposto e superficiale dietro alle mode.

Riferimenti bibliografici— P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *L'ordre dans le chaos, Vers une approche déterministe de la turbulence*, Paris, Hermann, 1984; L. von Bertalanffy, *General System Theory*, New York, 1968; L. Glass, M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos, The Rythms of Life*, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1988; J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations,* *Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, New York-Berlin, Springer-Verlag, 1983; B. Ingrao, G. Israel, *La Mano Invisibile, L'equilibrio economico nella storia della scienza*, Roma-Bari, Laterza, 1987, 1996; G. Israel, *La visione matematica della realtà, Introduzione ai temi e alla storia della modellistica matematica*, Roma-Bari, Laterza, 1996, 1997; G. Israel, A. Millán Gasca, *Il mondo come gioco matematico. John von Neumann, scienziato del Novecento*, Roma, La Nuova Italia Scientifica, 1995; S. A. Levin (ed.), *Frontiers in Mathematical Biology*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1994; A. J. Lotka, *Elements of Physical Biology*, Baltimore, 1925 (nuova ed. col titolo *Elements of Mathematical Biology*, New York, Dover, 1956); B. Mandelbrot, *Les objets fractals, Forme, hasard et dimension*, Paris, Flammarion, 1984; R. M. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton, Princeton University Press, 1973; J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 1944; V. Volterra, U. D'Ancona, *Les associations biologiques étudiées au point de vue mathématique*, Paris, Hermann, 1935 (ed. ital. a cura di G. Israel, *Le associazioni biologiche dal punto di vista matematico*, Roma, Teknos, 1995); N. Wiener, *Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine*, Cambridge, Mass., Mit Press, 1948.



## POSSIAMO RAPPRESENATARE MATEMATICAMENTE L'ADOLESCENZA?

di Silvano Milani
*(Istituto di Statistica Medica e Biometria - Università di Milano)*

### Premessa

Per l'adulto contemporaneo, almeno di quello che vive nelle società industrializzate, il fenomeno adolescenza si associa ai concetti di *metamorfosi* e *crisi*. L'adolescenza è pertanto oggetto di attenzione, non sempre esente da timori e da opportunismi, da parte di una schiera di *-ologi*, *-isti* e *-atri*. La complessità biologica e psicologica della transizione verso l'età adulta sembra poter essere meglio evocata dalla metafora dell'artista che espressa dal linguaggio formale dello scienziato. La visione *olistica* del primo ha di certo un fascino maggiore di quello della rappresentazione *riduzionistica* del secondo. Tuttavia, mentre il medesimo quadro, o il medesimo film o il medesimo brano di musica o di poesia sono variamente percepiti da soggetti diversi e persino dallo stesso soggetto in momenti diversi, una formula chimica o matematica o una legge fisica hanno significato univoco, purché chi le esprime e chi le interpreta condividano la conoscenza dei segni e delle regole del linguaggio.

Per Galileo, il gran libro dell'Universo è scritto in linguaggio matematico che, nell'immaginario collettivo, è sinonimo di rigore, aridità, astrazione, indiscutibilità ed antonimo di vita, variabilità, concretezza, opinabilità. Nel corso della nostra formazione scolastica ci siamo abituati a considerare affini la matematica (disciplina essenzialmente *deduttiva*) e la fisica (disciplina essenzialmente *induttiva*). Meno abituati siamo all'idea che tutti i fenomeni che possono essere misurati possono anche essere rappresentati da modelli espressi con il formalismo matematico.

### Quali caratteristiche dell'adolescenza possono essere espresse in linguaggio matematico?

La caratteristica più evidente del periodo adolescenziale è il rapido cambiamento che ragazzi e ragazze manifestano nelle dimensioni, nella forma, nelle abilità fisiche ed intellettuali, e nelle attitudini psicologiche. Appare inoltre evidente che la transizione verso lo stato adulto avviene con tempi e modalità differenti da individuo a individuo, da popolazione a popolazione, da epoca ad epoca. La peculiarità del fenomeno crescita ha fatto convergere gli interessi di studiosi di differente estrazione (pediatri, medici dello sport, biologi umani, antropologi fisici, psicologi) sino a formare, dalla fine degli anni Cinquanta, una nuova disciplina intrinsecamente interdisciplinare (se mi si passa l'ossimoro) che ha preso nome di Auxologia, e la cui anima è stata ed è tuttora il professor James Mourylian Tanner (Camberley (UK), 1920 - ), straordinaria figura di pediatra e studioso. Nello sviluppo dell'auxologia ha avuto ed ha un ruolo essenziale la bio-statistica, il cui oggetto di studio è la valutazione quantitativa dei fenomeni biologici (con particolare riferimento a quelli di interesse medico) e la formulazione di modelli espressi in forme matematiche e capaci di descrivere tali fenomeni non solo negli aspetti invarianti (del resto assai rari in ambito biologico) ma soprattutto nella loro variabilità.

Per quel che riguarda l'oggetto di questa esposizione i fenomeni più facilmente misurabili sono quelli concernenti l'accrescimento somatico e a questi modelli si farà cenno nel prosieguo.

## I cicli della *crescita* somatica e la *velocità di crescita*.

Si è soliti pensare che il processo di crescita somatica nell'uomo sia costituito da 3 grandi cicli: l'infanzia (dalla nascita sino a 2 o più anni di vita), la fanciullezza (dalla fine dell'infanzia sino all'inizio della pubertà), e la pubertà (che termina con lo stato adulto). In modo molto schematico si può affermare che questi cicli sono controllati da differenti ormoni: l'ormone tiroideo (TT4) nell'infanzia, cui si aggiunge l'ormone della crescita (GH) durante la fanciullezza, cui si aggiungono gli estrogeni (nelle ragazze) o il testosterone (nei ragazzi) durante l'adolescenza. Un ciclo comincia o termina quando si raggiunge un minimo nella *velocità di crescita*.

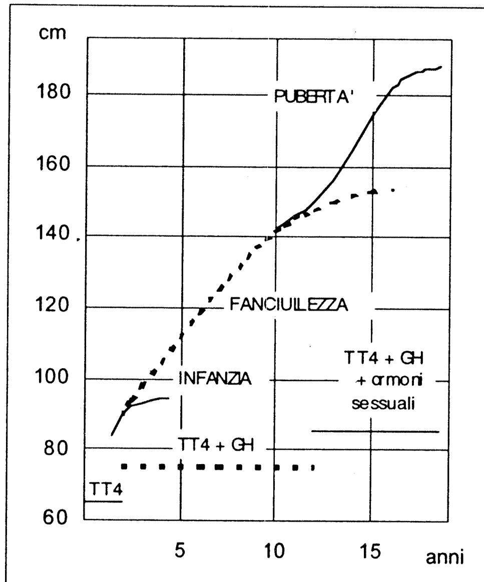



Figura 1

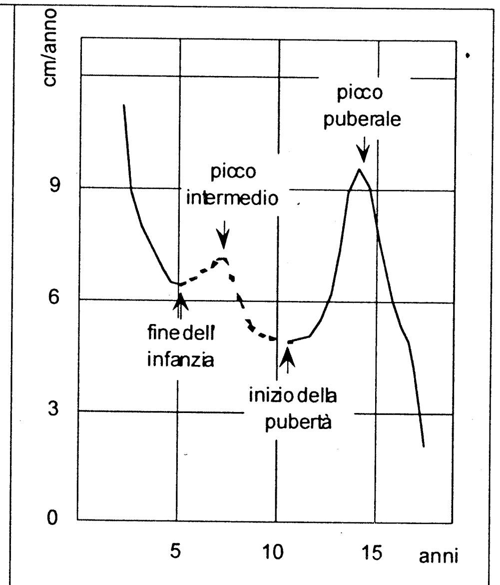



Figura 2

Le figure 1 e 2 danno una visione molto idealizzata dell'andamento della crescita. Quando si riportano in grafico dati reali, l'andamento appare molto diverso. Ciò emerge in modo chiaro se consideriamo il *profilo* di crescita staturale del figlio di de Montbeillard, che venne misurata ogni 6 mesi tra il 1759 e il 1777 (tale profilo è il primo esempio di misure staturali ripetute sullo stesso soggetto). I cicli di accrescimento non son ben distinguibili né nel profilo di crescita né in quello delle velocità di crescita ricavate da misure contigue. L'andamento alquanto irregolare del profilo della velocità di crescita è in gran parte dovuto agli errori di misura che sono relativamente grandi rispetto ai modesti incrementi staturali che si osservano a distanza di 6 mesi. Se le velocità sono derivate da misure prese a distanza di un anno, il loro profilo diventa assai più regolare, e consente di distinguere agevolmente l'infanzia dalla pubertà.



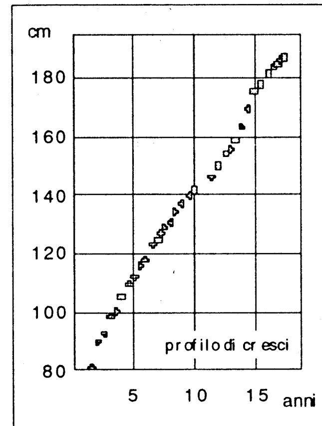



Figura 3

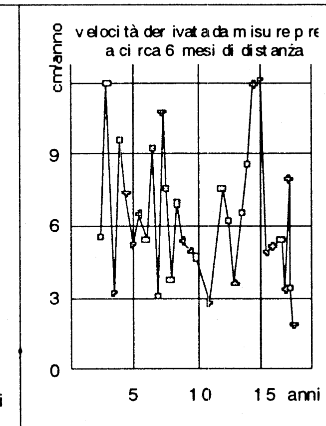



Figura 4

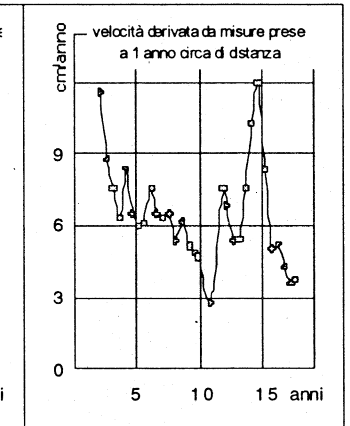



Figura 5

## Esempi di modelli matematici per la crescita somatica

Il valore di statura y(t) osservato all'età t può essere espresso come somma del valore assunto da una funzione matematica dell'età $f\{t, parametri\}$ e di un termine $\varepsilon(t)$ che esprime la differenza tra il valore osservato all'età t ed il valore assunto dalla funzione a quell'età:

$$y(t) = f\,\{t, \mathit{parametri}\} + \varepsilon(t)$$

La forma della funzione dipende sia dalla sua struttura (ad es. logaritmica, esponenziale, logistica) sia dai valori assunti dai suoi parametri. Il termine $\varepsilon(t)$, detto termine casuale, include sia l'errore di misura sia l'espressione della variabilità biologica, che è l'effetto cumulativo delle fluttuazioni dell'ambiente esterno e interno (di temperatura, luce solare, dieta, attività fisica, stato di salute, e dei loro effetti sul sistema endocrino), che tendono a spostare il valore della statura raggiunto ad una certa età da quello che la ragazza o il ragazzo avrebbero espresso in assenza di tali variazioni, (il cosiddetto potenziale genetico).

Uno dei criteri di scelta della funzione adatta per descrivere l'accrescimento somatico consiste nel basarsi su quanto si è ricavato dall'osservazione di un gran numero di profili di crescita. Si cercano quindi funzioni *continue* che abbiano le seguenti caratteristiche:

- un asintoto obliquo per descrivere la crescita staturale alla fine dell'infanzia;
- due flessi per descrivere lo scatto di crescita intermedio e quello puberale;
- un asintoto orizzontale per descrivere la statura adulta.

Una delle funzioni di crescita più complicate (ben 9 parametri!) è formata da tre componenti logistiche ($C_0$, $C_1$, $C_2$) corrispondenti ai tre cicli di crescita, e prende il nome di tripla logistica (Bock e Thissen 1980):

$$\textit{crescita:}\ f(t) = \frac{\mu_0}{1+exp[-\beta_0(t-\tau_0)]} + \frac{\mu_1-\mu_0}{1+exp[-\beta_1(t-\tau_1)]} + \frac{\mu_2-\mu_1}{1+exp[-\beta_2(t-\tau_2)]} = C_0 + C_1 + C_2$$

*velocità:* $$f'(t) = \frac{\beta_0 C_0 (\mu_0 - C_0)}{\mu_0} + \frac{\mu_1 C_1 (\mu_1 - \mu_0 - C_1)}{\mu_1 - \mu_0} + \frac{\mu_2 C_2 (\mu_2 - \mu_1 - C_2)}{\mu_2 - \mu_1}$$

in questa funzione, la cui forma è illustrata nelle figure 6 e 7,

- $\mu_0$ e $\mu_1$-$\mu_0$ sono i contributi delle componenti infanzia e fanciullezza alla statura finale ($\mu_2$);
- $\beta_0$, $\beta_1$ e $\beta_2$ sono le costanti di velocità per i 3 cicli di crescita;
- $\tau_0$, $\tau_1$ e $\tau_2$ sono le età al picco per le 3 componenti di velocità.

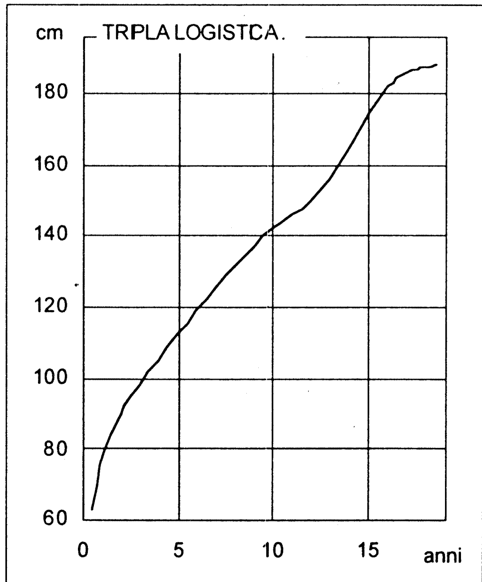



Figura 6

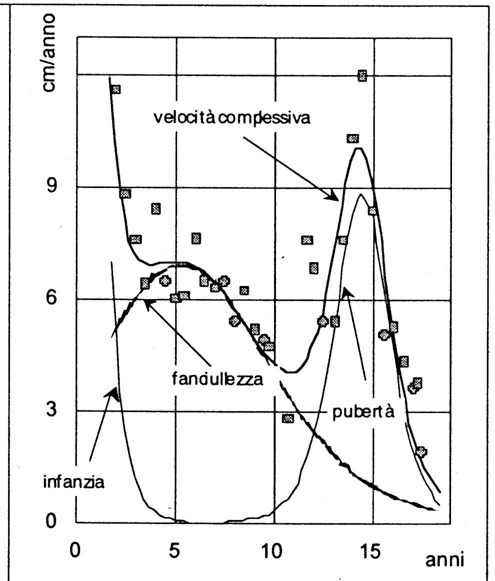



Figura 7

Una funzione assai utilizzata per descrivere la crescita somatica è quella proposta da Preece e Baines (1978) che ignora, nella sua struttura, sia la componente infanzia sia lo scatto di crescita intermedio ed include 5 parametri soltanto:

*crescita:* $$f(t) = \mu_2 - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{exp[\beta_1 (t-\tau)] + exp[\beta_2 (t-\tau)]} = \mu_2 - \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{C_1 + C_2}$$

*velocità:* $$f'(t) = \frac{2(\mu_2 - \mu_1) \times \beta_1 C_1}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{2(\mu_2 - \mu_1) \times \beta_2 C_2}{(C_1 + C_2)^2}$$

in tale funzione, che mira soprattutto a descrivere il periodo adolescenziale (fig. 8 e 9),

- $\tau$ è l'età al picco di velocità della componente di crescita puberale;
- $\mu_1$ e $\mu_2$ sono la statura all'età $\tau$ e la statura finale;
- $\beta_1$ e $\beta_2$ sono le constanti di velocità per i cicli fanciullezza e pubertà.



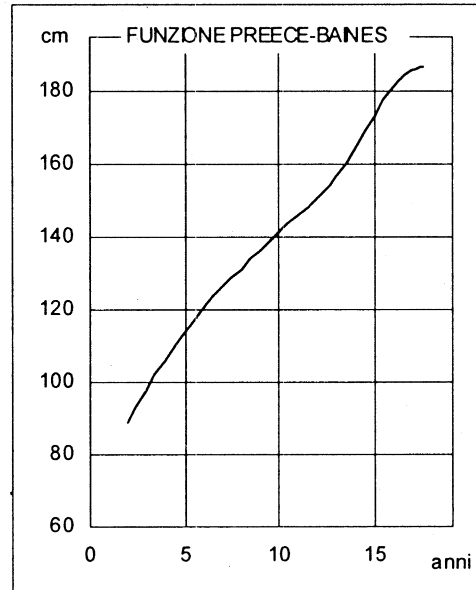



Figura 8

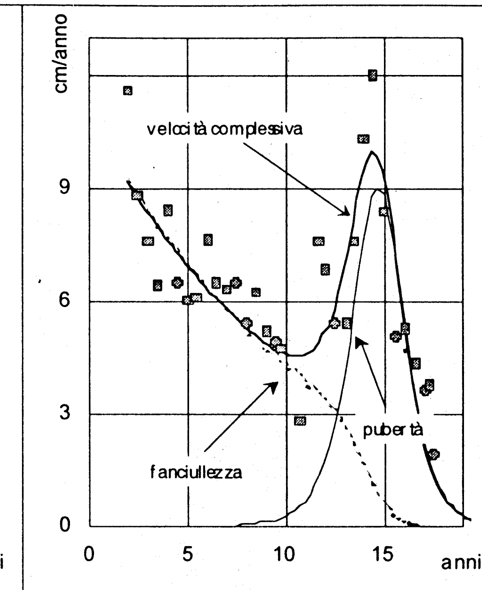



Figura 9

Al variare del valore dei loro parametri tali funzioni sono in grado di descrivere andamenti differenti dell'accrescimento somatico, come quelli delle femmine e dei maschi (fig. 10 e 11).

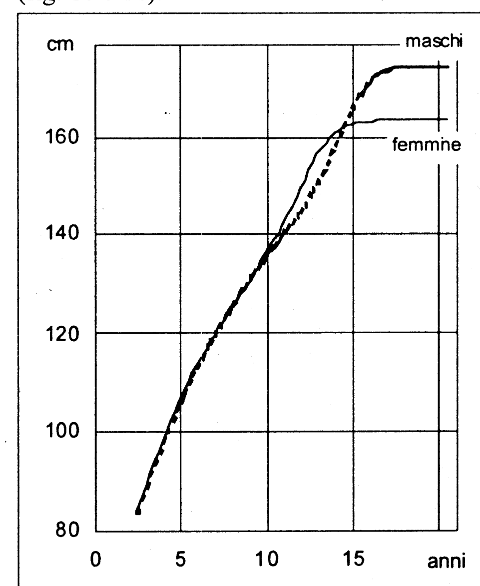



Figura 10

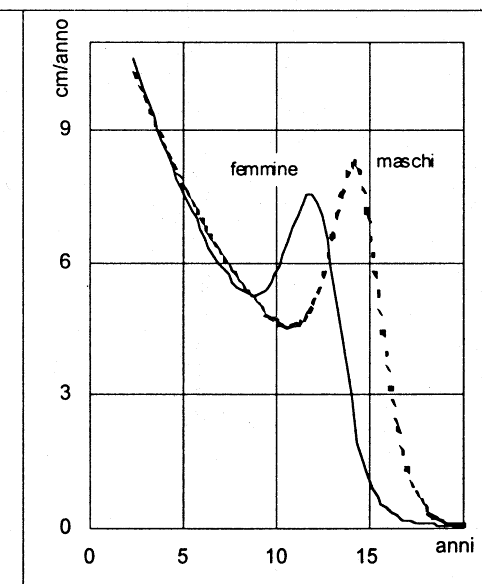



Figura 11

### *ALCUNI SUGGERIMENTI PER UN LAVORO DI RICERCA NELLA CLASSE*

*COMPRENSIONE DEL TESTO 1*
Qual è il significato etimologico dei termini *metamorfosi* e *crisi*?
Chi sono gli *-ologi*, gli *-isti* e gli *-atri* che si interessano dell'adolescenza?
Qual è il significato dei termini *olistico* e *riduzionistico*?
Qual è il significato dei termini *induttivo* e *deduttivo*

### *TEMA A*

Che cosa vi evocano i versi?

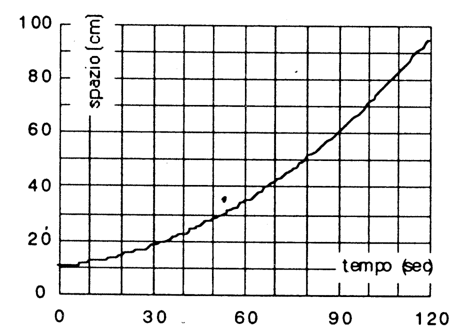
*I feel stupid and contagious*
*A mulatto and albino*
*A mosquito, my libido*
*A denial, a denial, a denial.*
(Kurt Cobain, Smells like teen spirit, 1991)

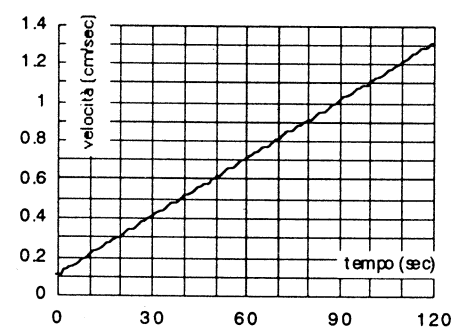
*I'm not like them, but I can pretend*
*The sun is gone, but I have a light*
*The day is done, but I'm having fun*
*I think I'm dumb or maybe just happy*
(Kurt Cobain, Dumb, 1993)

Sia per il tema A sia per il tema B indicate
a) quali sono i motivi delle differenze tra le risposte che avete dato.
b) quali sono i motivi delle differenze tra le risposte date da voi e quelle date dai vostri insegnanti.

### *TEMA B*

Sapete interpretare i due grafici qui mostrati?




Qual è la distanza dal punto di partenza dopo 90 secondi?
Qual è la velocità al 90° secondo?
La velocità è costante tra 0 e 120 secondi?
Cosa rappresenta la pendenza del grafico 1?
E quella del grafico 2?



### *TEMA C*

Ricercate analogie e differenze tra le affermazioni di uno dei padri del metodo scientifico ed il creatore dell'investigatore scientifico.

*PAROLA DI GALILEO*
*La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.*
Galileo Galilei, Il Saggiatore (1623).

*PAROLA DI SHERLOCK HOLMES*
*While the individual man is an insoluble puzzle, in the aggregate he becomes a mathematical certainty. You can, for example, never foretell what any one man will do, but you can say with precision what an average number will be up to. Individuals vary, but percentages remain constant. So says the statistician.*
Sir Arthur Conan Doyle, The sign of four (1890).

### *TEMA D*

| età | statura | età | statura | età | statura | età | statura | età | statura |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 51.4 | 4.00 | 105.2 | 7.50 | 128.9 | 12.67 | 154.1 | 16.62 | 183.3 |
| 0.50 | 65.0 | 4.58 | 109.5 | 8.00 | 130.8 | 13.00 | 155.3 | 17.01 | 184.6 |
| 1.00 | 73.1 | 5.00 | 111.7 | 8.50 | 134.3 | 13.50 | 158.6 | 17.11 | 185.4 |
| 1.50 | 81.2 | 5.58 | 115.5 | 9.00 | 137.0 | 14.00 | 162.9 | 17.43 | 186.5 |
| 2.00 | 90.0 | 6.00 | 117.8 | 9.62 | 140.1 | 14.53 | 169.2 | 17.59 | 186.8 |
| 2.50 | 92.8 | 6.55 | 122.9 | 10.00 | 141.9 | 15.01 | 175.0 | | |
| 3.00 | 98.8 | 7.00 | 124.3 | 11.50 | 146.1 | 15.52 | 177.5 | | |
| 3.50 | 100.4 | 7.25 | 127.0 | 12.00 | 149.9 | 16.27 | 181.4 | | |

Questa tabella riporta i valori della statura (cm) del figlio di de Montbeillard, rilevata alle varie età (anni e centesimi di anno).
a) Provate a ricostruire le figure 3, 4 e 5.
b) Come sono state calcolate le velocità di crescita in figura 4?
c) Come sono state calcolate le velocità di crescita in figura 5?

*TEMA E*

a) Analizzate la forma delle funzioni logaritmica, esponenziale e logistica e ricercate quali fenomeni fisici o biologici possono descrivere.
b) Per quale motivo le tre componenti della funzione tripla-logistica, pur avendo identica struttura, hanno forme così differenti?
c) Per quale motivo le due componenti della funzione di Preece e Baines, pur avendo identica struttura, hanno forme così differenti?
d) Quali parametri interpretano in maggior misura il differente andamento della crescita somatica delle femmine e dei maschi.
e) Uno stesso fenomeno può essere descritto da funzioni matematiche caratterizzate da differente struttura: discutete le implicazioni di questo fatto.

### *ALCUNI SUGGERIMENTI BIBLIOGRAFICI*


Per gli aspetti concettuali (e non tecnici) dei modelli in fisica (e non solo):

LAWRENCE KRAUSS. **Paura della Fisica.** Edizione italiana a cura di Alberta Rebaglia (1994). Raffaello Cortina Editore.

Per i vari aspetti dell'auxologia, inclusi quelli qui brevemente illustrati:

AAVV. **Human Growth, a comprehensive treatise** (2ª edizione). A cura di F. Falkner e J.M. Tanner (1986). Plenum Press (New York).

AAVV. **Auxologia normale e patologica**. A cura di I.Nicoletti (1994). Edizioni Centro Studi Auxologici (Firenze)

AAVV. **Essays on Auxology presented to James Mourilyan Tanner by former colleagues and fellows**. A cura di R.Hauspie, G.Lindgren, F.Falkner (1995). Castlemead Publications (Welwin Garden City - Hartfordshire.

Per le funzioni di crescita qui presentate:

PREECE M.A., BAINES M.K. A new family of mathematical models describing the human growth curve. *Annals of Human Biology*, **7**, 507-528 (1978).

BOCK R.D., THISSEN D.M. Statistical problems of fitting individual growth curves. In "*Human Physical Growth and Maturation: Methodologies and Factors*". A cura di F.E. Johnston, A.F. Roche, C. Susanne (1980). Plenum Press (New York); pp. 265-301.




# Modellizzazioni matematiche: dal conto della spesa alle dimensioni dell'universo

Vinicio Villani

## PREMESSA

Nel maggio '98, in vista della relazione che avrei tenuto di lì a qualche mese a questo convegno, ho inviato agli organizzatori una breve traccia delle problematiche che contavo di affrontare. Nella mia lettera di trasmissione esprimevo poi la speranza che le "provocazioni" contenute nella traccia potessero fornire a qualche insegnante di scuola secondaria lo spunto per un lavoro da proporre ai suoi allievi, onde offrire una testimonianza diretta di ciò che è possibile fare con un po' di impegno e di creatività nell'ambito delle modellizzazioni matematiche, nonostante tutte le difficoltà e le carenze della struttura scolastica italiana. In effetti la "provocazione" è stata raccolta al di là delle mie aspettative da due classi del Liceo Scientifico di Perugia, la 5ª B e la 5ª H (insegnanti le Proff. C. Angiolini e F. Menconi). Così nel corso di questo convegno avremo modo di sentire dalla viva voce degli studenti una presentazione del lavoro che essi hanno fatto a partire da uno dei problemi da me proposti.

A questo punto mi sembra opportuno riportare integralmente la traccia che avevo redatto nel maggio '98. Farò seguire brevi cenni su come io stesso avrei affrontato i problemi proposti, usando solo strumenti matematici elementari, alla portata degli studenti di scuola secondaria. Va da sé che le mie "soluzioni" (ma sarebbe più appropriato dire: le mie "modellizzazioni") non sono le uniche possibili, né che pretendono di essere le migliori possibili.

### 1. LA TRACCIA

Fin dai primi anni della scuola elementare agli allievi vengono proposti problemi di matematizzazione del tipo seguente:

PROBLEMA 1. *La mamma compra* 3 *kg di mele. Sapendo che* 1 *kg di mele costa* 1600 *lire, quanto spende la mamma?*

Il procedimento risolutivo si basa su un ragionamento di proporzionalità diretta, per cui la risposta attesa è: 4800 lire.

Cosa cambierebbe nel problema precedente, se ne lasciassimo inalterata la struttura, modificando però l'ordine di grandezza della quantità di mele che la mamma intende comprare, per es. 30 kg?

Da un punto di vista strettamente matematico non cambierebbe nulla, ma ora lo schema della proporzionalità diretta sarebbe assai meno aderente alla situazione reale. Infatti probabilmente nessuna mamma acquisterebbe 30 kg di mele al dettaglio.

Preferirebbe invece comprare da un grossista due cassette di mele da 15 kg ciascuna ad un prezzo inferiore. Ma a questo punto, per valutare la convenienza o meno dell'unico acquisto all'ingrosso rispetto ad una serie di acquisti al dettaglio, la modellizzazione matematica si complica. Oltre al nuovo prezzo della merce (mele più cassetta) entrano in gioco altri parametri. Per esempio occorre conoscere l'incidenza della tara (peso delle due cassette), le spese sostenute per recarsi in macchina al mercato rionale, nonché le eventuali spese per il parcheggio. Se poi le mele non vengono consumate in un tempo ragionevolmente breve, vanno considerati almeno altri due fattori:

– la quantità di "scarto" dovuta al deterioramento di una parte delle mele;

– la variazione del prezzo delle mele al dettaglio, durante il periodo che va dal momento dell'acquisto all'ingrosso, fino al momento dell'esaurirsi della provvista.

Infine, se il problema si riferisce all'acquisto di una partita di 30 000 kg di mele da parte di un negoziante, non sarebbero più trascurabili ulteriori parametri, quali l'immobilizzo del capitale per l'acquisto dell'intera partita, le spese per l'immagazzinamento in celle frigorifere, ecc.

Ecco dunque che da un semplice problemino di scuola elementare si può passare a problemi via via più articolati e più realistici, ma pur sempre proponibili nella scuola dell'obbligo.

Naturalmente il valore formativo di un percorso didattico di questo tipo sta soprattutto in un coinvolgimento attivo degli allievi nelle varie fasi della matematizzazione e in particolare:

– nell'individuazione dei parametri ritenuti rilevanti;

– nell'elaborazione di una "formula" (o di un "diagramma di flusso" o di un "programma al calcolatore") che, a partire dai parametri presi in considerazione, consenta di risolvere il problema;

– nel reperimento di dati numerici (per quanto possibile realistici) onde rendere il problema più aderente alla realtà;

– in un riesame critico del procedimento seguito: per esempio andrebbe valutata la maggiore o minore incidenza di questo o quello dei parametri presi in considerazione, ai fini del risultato complessivo.

Le occasioni per proporre e analizzare situazioni sucettibili di modellizzazioni matematiche non mancano davvero, a tutti i livelli scolastici. Tanto per accennare ad un problema che si colloca in certo senso agli antipodi dei problemi di vita quotidiana, mi limito a citare il seguente:

PROBLEMA 2. *Stimare il numero complessivo degli atomi che formano l'intero universo (o meglio: la parte dell'universo da noi attualmente conosciuta).*

Spinto da curiosità personale, mi sono rivolto ad un collega fisico che mi ha fornito i dati sperimentali sui quali ho potuto poi basare i miei calcoli. Non anticipo il risultato perché conto di parlarne ad Orvieto, ma mi farebbe piacere poter confrontare in tale



occasione la mia schematizzazione del problema con quelle proposte da parte di altri partecipanti al convegno, e soprattutto da parte di giovani studenti che vi si volessero cimentare.

Allo scopo di rendere per quanto possibile interattiva la mia relazione ad Orvieto, propongo qui di seguito altri due problemi, enunciati in termini intenzionalmente generici, che sono suscettibili di modellizzazioni matematiche elementari ma a mio avviso non prive di interesse. Spero vivamente – lo ripeto – che qualche studente o gruppo di studenti accolga la sfida, ci pensi su e mi mandi le sue riflessioni prima dell'inizio del convegno di Orvieto.

PROBLEMA 3. *Un giovane ventenne è abituato a fumare un pacchetto di sigarette al giorno. Decide improvvisamente di smettere di fumare e di mettere da parte giorno dopo giorno i soldi così risparmiati. A quanto ammonterà il suo capitale dopo* 50 *anni (ossia quando egli avrà raggiunto l'età di* 70 *anni)?*

Nota. Si tratta di individuare i principali parametri in gioco, attribuendo ad essi valori numerici ragionevoli, e di sviluppare i calcoli. Si tenga presente che "mettere da parte i soldi" non significa necessariamente "lasciarli sotto un mattone".

PROBLEMA 4. *È ben noto che ci si abbronza più velocemente per effetto dei raggi solari (ultravioletti) quando il sole è alto nel cielo, o quando ci si trova ad alta quota. È possibile stimare l'intensità dei raggi solari (ultravioletti) a cui sarebbe esposto un astronauta che orbita al di fuori dell'atmosfera terrestre se non fosse opportunamente protetto dalla sua tuta, sulla base di opportune misure effettuate sulla terra, per esempio in una località balneare della Versilia?*

Nota. Quante e quali misure sarebbero necessarie? Si tenga presente che per affrontare il problema non occorre conoscere le unità di misura usate dai fisici per valutare l'intensità dei raggi solari. In questo problema si chiede solo di escogitare un metodo atto a confrontare l'intensità dei raggi solari misurabili al livello del mare con la loro intensità nello spazio, al di fuori dell'atmosfera terrestre.

La traccia si concludeva qui, con l'indicazione del mio recapito. Poiché nella traccia avevo già esemplificato alcune possibili modellizzazioni collegate al problema 1, passo a parlare ora dei problemi rimanenti.

## 2. MODELLIZZAZIONE DEL PROBLEMA 2 (NUMERO DI ATOMI DELL'UNIVERSO)

La stima che sto per proporre si basa su alcuni dati sperimentali che mi sono stati forniti dall'amico fisico di cui parlavo nella traccia, e che possono essere così sintetizzati:

– La materia che costituisce l'universo è formata in prevalenza da atomi di idrogeno.

– 1 grammo di idrogeno consta di circa $6 \cdot 10^{23}$ atomi (Numero di Avogadro)

– La massa del Sole è di circa $2 \cdot 10^{33}$ grammi

– In una galassia "normale" il numero delle stelle (mediamente assimilabili al Sole) è dell'ordine di grandezza di $10^{11}$

– Si stima che nell'universo attualmente conosciuto il numero delle galassie sia dell'ordine di $10^{12}$.

Quindi il numero complessivo di atomi presenti nell'intero universo (da noi conosciuto) può essere stimato in:

$$(6 \cdot 10^{23}) \cdot (2 \cdot 10^{33}) \cdot 10^{11} \cdot 10^{12}$$

Approssimando poi il prodotto $6 \cdot 2$ con 10, la stima diventa:

$$10^{1+23+33+11+12} = 10^{80}.$$

Riferimento bibliografico: Per maggiori dettagli e commenti rinvio al mio articolo: *"Una lettura sempre attuale: L'Arenario di Archimede"*, pubblicato sulla rivista Archimede, 1996, pagg. 138-144.

Nota. Un metodo alternativo per calcolare il numero di atomi dell'universo poteva essere il seguente: Si parte sempre dalla stima del numero di atomi che costituiscono il Sole (vedi sopra); è noto che il Sole è l'unica stella nel raggio di 4 anni luce; si ipotizza che la distribuzione delle stelle nell'universo sia press'a poco uniforme, nel senso che "ammassi" stellari e zone quasi "vuote" si alternano ovunque nello spazio con una certa regolarità; in base a questa ipotesi, il numero complessivo delle stelle nell'universo sarà grosso modo pari al rapporto fra il volume di una sfera delle dimensioni dell'universo (raggio dell'ordine di grandezza di 12 miliardi di anni luce) e il volume della sfera con centro nel sole e raggio di 4 anni luce. Effettuando i calcoli, si giunge ad una stima un po' superiore per il numero degli atomi dell'universo: circa $10^{85}$. La discordanza tra le due stime si spiega col fatto che il Sole si trova in un ammasso stellare relativamente "denso" (la Via Lattea) mentre molte altre parti dell'universo sono ben più "vuote".

Commento. Ordini di grandezza del tipo $10^{80}$ o $10^{85}$ sfuggono alla nostra capacità di comprensione. In genere, se si chiede ad un interlocutore di stimare su base puramente intuitiva il numero degli atomi dell'universo, si ricevono risposte con ordini di grandezza enormemente sovrastimati, del tipo $10^{1000}$, proprio per la difficoltà di attribuire un qualsiasi significato concreto a numeri tanto grandi.

### 3. MODELLIZZAZIONE DEL PROBLEMA 3 (RISPARMIO DEL FUMATORE PENTITO)

Prima di affrontare i calcoli, è opportuno premettere due precisazioni:

1. In ambito economico è praticamente impossibile fare previsioni attendibili su periodi così lunghi come quello ipotizzato nel problema. Quindi la soluzione (di tipo deterministico) che sto per proporre va considerata più come un'esercitazione



matematica che non come una modellizzazione realistica del problema. L'approccio degli studenti del liceo scientifico di Perugia è stato più articolato, in quanto essi hanno preso in considerazione anche parametri aleatori.

2. Occorre distinguere fra crescita del capitale in termini puramente monetari (a quante lire ammonterà il capitale tra 50 anni) e crescita del capitale in termini di potere d'acquisto (che cosa si potrà comperare con quel capitale tra 50 anni). Comincerò col trattare il problema da un punto di vista puramente monetario. Le ipotesi semplificative (deterministiche) di partenza saranno:

– Risparmio annuo, al termine del primo anno: $K \simeq 1\,800\,000$ lire

– Interesse del capitale investito: tasso fisso del 10% annuo.

– Inflazione stimata (supposta costante nel tempo): 3% annuo.

Si noti che in base all'ipotesi sull'inflazione, anche l'importo risparmiato annualmente aumenterà di anno in anno, sia pure solo in termini monetari, del 3%.

In definitiva, si ha a che fare con un problema di capitalizzazione composta, schematizzabile con una tabella del tipo:

| Anno di riferimento | Risparmio di quell'anno | Importo risultante al 50 – esimo anno |
|---|---|---|
| 1° | $K$ | $K \cdot 1,10^{49}$ |
| 2° | $K \cdot 1,03$ | $K \cdot 1,03 \cdot 1,10^{48}$ |
| ... | ... | ... |
| 49° | $K \cdot 1,03^{48}$ | $K \cdot 1,03^{48} \cdot 1,10$ |
| 50° | $K \cdot 1,03^{49}$ | $K \cdot 1,03^{49}$ |

La somma dei 50 addendi dell'ultima colonna dà l'ammontare complessivo del capitale, comprensivo degli interessi maturati al termine dei 50 anni (ho evitato di usare il termine tecnico "montante", in quanto si tratta di una parola poco usata nel linguaggio corrente). Tale somma è esprimibile con la formula:

$$K \cdot \sum_{i=0}^{49} 1,03^i \cdot 1,10^{49-i} =$$

$$= K \cdot 1,10^{49} \cdot \sum_{i=0}^{49} \left(\frac{1,03}{1,10}\right)^i =$$

$$= K \cdot 1,10^{49} \cdot \frac{1 - (\frac{1,03}{1,10})^{50}}{1 - \frac{1,03}{1,10}}.$$

Infine, sostituendo i valori numerici e arrotondando opportunamente i fattori, risulta che in termini monetari il capitale, comprensivo degli interessi, al termine del cinquantesimo anno ammonterà a circa:

$$1\,800\,000 \cdot 107 \cdot 15 \simeq 2\,890\,000\,000 \ \ (lire).$$

Quanto al potere d'acquisto reale, tenuto conto dell'ipotesi che la moneta si deprezzi mediamente del 3% annuo, occorre però dividere l'importo or ora calcolato per $1,03^{50}$, col che si ottiene un importo più ridotto: circa 660 000 000 di lire, intese "col potere d'acquisto di oggi".

Commento. Al di là della formulazione quasi scherzosa del problema e della difficoltà di fare previsioni a lungo termine, una schematizzazione analoga può essere utile per rendersi conto della maggiore o minore convenienza (o non convenienza) di stipulare in età giovanile un contratto con una società di assicurazioni, nella prospettiva di poter disporre a settant'anni di un determinato gruzzolo o di una pensione integrativa.

## 4. MODELLIZZAZIONE DEL PROBLEMA 4 (INTENSITÀ DEI RAGGI SOLARI AL DI FUORI DELL'ATMOSFERA)

Per semplicità possiamo supporre l'atmosfera formata da un unico strato orizzontale omogeneo di spessore $h$. Per una schematizzazione più realistica occorrerebbe considerare piuttosto una serie di strati tra loro disomogenei, ma al fine di quanto segue ciò è irrilevante.

Alle nostre latitudini, il sole non si trova mai allo zenith, ma nelle ore centrali delle giornate estive la sua altezza sull'orizzonte raggiunge e supera i 60°. Supponiamo quindi di misurare – standocene tranquillamente nella nostra località al livello del mare – l'intensità dei raggi solari (di un determinato tipo di radiazione, per esempio: raggi ultravioletti) quando il sole si trova proprio a 60° di altezza. Allora il percorso dei raggi solari entro lo strato dell'atmosfera (di spessore $h$) fino a giungere al livello del mare, avrà lunghezza $h/\text{sen } 60°$.

Quanto più il sole è basso sull'orizzonte, tanto maggiore è la lunghezza del percorso dei raggi solari entro l'atmosfera per giungere al livello del mare. Un semplice calcolo di trigonometria consente di stabilire che quando l'altezza del sole è di circa 25°40′ sull'orizzonte, il percorso dei raggi solari entro l'atmosfera ha lunghezza doppia rispetto al caso di 60°. Supponiamo ora di misurare l'intensità dei raggi solari (dello stesso tipo, e nelle stesse condizioni di limpidità dell'atmosfera) nel momento in cui il sole si trova in questa nuova posizione (ossia a 25°40′ sull'orizzonte).

Introduciamo le seguenti notazioni:

$I_0$ = intensità dei raggi solari al di fuori dell'atmosfera
$I_1$ = intensità dei raggi solari col sole a 60°
$I_2$ = intensità dei raggi solari col sole a 25°40′.

Chiaramente $I_0$ è la nostra incognita, mentre $I_1$ e $I_2$ sono quantità note, nel senso che possono essere misurate senza spostarci dal nostro punto di osservazione.



Introduciamo infine un'incognita ausiliaria $m$, ponendo:

$$(*) \qquad I_1 = mI_0.$$

Potremmo chiamare $m$ il "fattore di attenuazione dell'intensità dei raggi solari" per effetto dell'atmosfera, quando il sole è a 60°.

Immaginiamo ora di suddividere il percorso di lunghezza doppia (quello che i raggi solari devono compiere nell'atmosfera quando il sole è a 25°40′) in due tratti uguali, ciascuno dei quali avrà dunque lunghezza pari a quella dell'intero percorso col sole a 60°. Nel primo tratto l'intensità $I_0$ si ridurrà pertanto secondo il fattore moltiplicativo $m$ (passando da $I_0$ "in entrata"ad $I_1$ "in uscita"); nel secondo tratto l'intensità "in entrata" (che ora sarà $I_1$) si ridurrà ulteriormente secondo lo stesso fattore moltiplicativo $m$ (passando da $I_1$ "in entrata" ad $I_2$ "in uscita". In formule, quando il sole è a 25°40′:

$$(**) \qquad I_2 = mI_1 = m^2 I_0.$$

Dividendo membro a membro (**) per (*) ne segue:

$$(***) \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{m^2 I_0}{m I_0} = m.$$

Infine, risolvendo (**) rispetto ad $I_0$ e sostituendovi l'espressione di $m$ data dalla (***) si ottiene:

$$I_0 = \frac{I_1}{m} = \frac{I_1^2}{I_2}.$$

Commento. Non dispongo di rilevamenti sperimentali per le intensità $I_1$ e $I_2$. Quindi non sono in grado di dedurne il valore numerico del fattore di attenuazione $m$. Una stima molto grossolana mi induce a congetturare che, per i raggi ultravioletti, $I_2$ potrebbe essere circa un decimo di $I_1$. In tal caso l'intensità $I_0$ degli stessi raggi al di fuori dell'atmosfera risulterebbe circa dieci volte superiore all'intensità $I_1$ misurata al livello del mare quando il sole si trova ad un'altezza di 60° sull'orizzonte.

## 5. RIFLESSIONI FINALI

Pur essendo io un convinto fautore dell'inserimento di esempi di modellizzazioni nell'insegnamento-apprendimento della matematica a tutti i livelli scolastici, devo riconoscere che questo approccio può comportare delle difficoltà. Mi sembra quindi opportuno concludere questa relazione elencando, sia pure in forma schematica, quelli che a mio avviso sono i principali "pro" e "contro" di un percorso didattico basato su attività di modellizzazione.

"PRO". Le attività di modellizzazione matematica:

– Interessano e coinvolgono gli allievi in misura notevolmente superiore alle trattazioni teoriche slegate dalle loro possibili applicazioni.

– Promuovono una partecipazione attiva degli allievi nella ricerca di dati mancanti, nella costruzione di una pluralità di possibili modelli, nell'interpretazione dei risultati ottenuti.

– Fanno toccare con mano l'utilità concettuale (prima ancora che strumentale) della matematica, intesa come un potente mezzo di indagine che ci consente di allargare il campo delle nostre conoscenze nel tempo e nello spazio.

– Favoriscono i collegamenti interdisciplinari.

– Stimolano allievi e docenti ad affrontare il "rischio" connaturato con l'esame di situazioni di cui non c'è o non si conosce ancora "la risposta giusta".

"CONTRO". Le attività di modellizzazione matematica:

– Richiedono molto tempo.

– Rischiano di essere frammentarie.

– Presuppongono una buona conoscenza del contesto entro il quale si situa il problema da modellizzare (e il farsi carico di ciò non può essere demandato per intero al docente di matematica).

– Presuppongono una buona conoscenza preventiva di una pluralità di strumenti matematici, tra i quali scegliere quelli più adatti ad una matematizzazione del problema specifico in esame.

– Possono far sorgere difficoltà all'atto di valutare i contributi dei singoli allievi ad un progetto collettivo.

Probabilmente, come spesso accade quando si confrontano tesi contrapposte, il giusto punto di equilibrio sta nel mezzo: le modellizzazioni matematiche rappresentano una componente importante, ma non l'unica, da tenere presente nell'insegnamento-apprendimento della nostra disciplina.



# DIBATTITI

# La matematica: linguaggio della scienza e della tecnologia

Sunto dell'intervento del prof. Claudio Beccari
Politecnico di Torino
Corso Duca degli Abruzzi,24 10129 TORINO
e-mail: beccari@polito.it

1. Linguaggio della scienza e della tecnologia Non c'è dubbio che la matematica sia il linguaggio della scienza e della tecnologia, ma queste discipline, pur non potendone fare a meno, hanno dovuto sviluppare un dialetto particolare codificato nella norma ISO-31/XI "Mathematical sign and symbols for use in the physical sciences and technology" e adattato all'italiano mediante la norma CNR-UNI- 10002 "Segni e simboli matematici per le scienze fisiche e tecniche". Per la fisica in senso stretto esistono poi le raccomandazioni emanate dalla International Union of Pure and Applied Physics intitolate "Symbols, units and nomenclature in physics". Non nascondo che dette norme sono sconosciute alla maggior parte degli scienziati fisici e tecnologi, anche se sono spesso osservate in modo *naturale*.

   La loro ragion d'essere nasce dal fatto che la matematica usata nelle scienze fisiche e tecniche riguarda relazioni fra grandezze, le quali, come è noto, non sono semplici variabili matematiche, ma sono gruppi composti di due elementi, dei quali uno è la misura e l'altro è l'unità di misura; le operazioni che possono essere eseguite su questi gruppi seguono certe regole più restrittive di quelle che si applicano normalmente in matematica.

   L'ignoranza degli italiani in generale a proposito di questo fatto, e di alcuni italiani fisici e tecnologi in particolare, fa sì che ogni giorno siamo esposti a "errori di ortografia metrologica" senza che ce ne accorgiamo o che eleviamo anche la più piccola e timida protesta.

2. Esempi di applicazione della matematica nelle scienze o nella tecnologia E' molto difficile fare esempi di applicazione della matematica alle scienze, non parliamo della tecnologia; i programmi delle scuole secondarie sono congegnati in modo tale che quando sono disponibili le conoscenze in una delle due discipline, non lo sono ancora nell'altra. Forse negli istituti tecnici le cose sono un po' diverse, ma non credo che lo siano in modo così sostanziale.

   Credo però che i seguenti due esempi siano sviluppabili in ogni tipo di scuola secondaria:

   (a) Minimizzazione o massimizzazione di una funzione lineare con vincoli lineari; l'esempio potrebbe essere limitato a due variabili, prendendo spunto da qualche esempio di carattee economico; per esempio: il profitto p della produzione di due tipi di tessuti dipende dalla quantità prodotta di ciascuno di essi, soggetto al vincolo di non superare la quantità disponibile di filati e di fare la produzione minima richiesta per ogni tessuto; in formule

$$p = ax_1 + bx_2 \qquad [p] = \pounds; [a, b] = \pounds/\mathrm{m}; [x_1, x_2] = \mathrm{m}$$

è il profitto da massimizzare;

$$\begin{array}{ll} c_1x_1 + c_2x_2 \leq C & [C, D, E] = \mathrm{g} \\ d_1x_1 + d_2x_2 \leq D & [c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2] = \mathrm{g/m} \\ e_1x_1 + e_2x_2 \leq E & \end{array}$$

sono le quote di tre filati da non superare;

$$\begin{array}{ll} x_1 \geq Q_1 & [Q_1, Q_2] = \mathrm{m} \\ x_2 \geq Q_2 & \end{array}$$

sono le quote di produzione da rispettare.

In questo modo l'interpretazione dello spazio bidimensionale, delle sue rette e dei suoi semispazi possono essere spiegati bene e si possono introdurre i primi elementi di geometria analitica con una motivazione applicativa che non è strettamente matematica.

(b) Considerazioni energetiche: nei programmi di fisica si parla tanto di energia, ma poi all'atto pratico la si dà un po' per scontata. Finché si parla di lavoro meccanico e di energia meccanica sembra che tutto debba essere chiaro; quando si esce nel dominio elettrico il concetto di energia diventa nebuloso. Ciò nonostante gli allievi sono anche disposti a ricevere come verità rivelata che l'energia E accumulata in una bobina di induttanza L e percorsa dalla corrente i vale

$$E = 0,5Li^2$$

Non ritengo che nemmeno al liceo classico si debba dare questo come una verità rivelata, ma penso che si possa fare lo sforzo di "calcolare un integrale" come area di un triangolo rettangolo. Piuttosto qui vorrei spingermi verso un altro punto della fisica che resta misterioso, ma che può dare lo spunto per un'altra applicazione della matematica: il calcolo dell'energia accumulata in un sistema di due induttori accoppiati e della relazione che deve intercorrere fra i valori delle due autoinduttanze e della mutua induttanza affinché, detta energia sia non negativa. L'energia accumulata vale

$$E = 0,5L_1i_1^2 + 0,5L_2i_2^2 + Mi_1i_2$$



Poiché, detta energia deve essere non negativa per qualunque valore delle correnti $i_1$ e $i_2$ (positivo, negativo o nullo) e per qualunque valore della mutua induttanza $M$ (positiva, negativa o nulla; $L_1$ e $L_2$ sono positive per conto loro), si ricava la condizione

$$M^2 \leq L_1L_2$$

Non c'è bisogno di passare alle derivate (cosa per altro possibile al liceo scientifico), né alle forme quadratiche associate a matrici simmetriche definite semipositive (che esula dal programma di ogni scuola secondaria), basta semplicemente introdurre il concetto del completamento del quadrato:

$$E = 0,5\left[\sqrt{L_1}i_1 + \left(M/\sqrt{L_1}\right)i_2\right]^2 + \left[L_2 - (M^2/L_1)\right]i_2^2$$

per dedurre la condizione cercata con ragionamenti banali ma istruttivi.

3. Problemi concreti e matematica All'inizio il problema concreto di misurare i campi dopo le alluvioni del Nilo produsse la nascita della geometria (misurazione della terra); poi le varie branche della matematica si svilupparono talvolta autonomamente, talvolta sotto la spinta della necessità di risolvere problemi concreti. E' naturale che sia così e che le varie discipline si influenzino a vicenda e non restino a formare compartimenti stagni.

   Però è un peccato che solitamente questi cenni storici vengano totalmente trascurati; l'insegnamento della matematica è una buona occasione per sviluppare anche la storia del pensiero scientifico (matematico in particolare), cosa che a sua volta può rendere lo studio della matematica più attraente. Come sono nate le varie notazioni numeriche? Come facevano gli antichi romani a eseguire i loro calcoli? E come facevano gli antichi greci o i fenici o gli altri medio orientali? Le basi di numerazione: la base 20 dei Maya, la base 60 dei Babilonesi, la notazione biquinaria che cosa erano e/o che cosa sono oggi? E' vero che gli antichi sapevano che la terra era rotonda? E come avevano fatto a determinarne il raggio? Come avevano determinato p? E il teorema di Pitagora? Euclide fra le tante cose è considerato il padre dell'algoritmo di Euclide; che cosa è? E' vero che serve anche oggi per operare anche su altre quantità diverse dai numeri interi? Chi ha trovato il metodo per determinare in modo relativamente semplice i numeri primi e in che cosa consiste questo metodo? Come facevano gli astronomi antichi a determinare la posizione e il moto delle stelle? Conoscevano veramente la trigonometria? Chi ha sviluppato i metodi per risolvere i sistemi (lineari) di equazioni? Come sono state trovate le formule risolutive delle equazioni di secondo grado quando ancora non esisteva l'algebra? Cardano e Tartaglia? Fibonacci e la prolificazione dei conigli? Come facevano gli antichi a determinare i volumi dei solidi regolari e/o di alcune loro sezioni? A chi è venuta l'idea del differenziale e della quantità arbitrariamente piccola? Perché Leibnitz è conosciuto e studiato come filosofo quando ha fatto tanto nel campo della matematica? Che cosa ha fatto? Le domande potrebbero continuare a lungo, ma ognuna di queste domande può dare spunto a lezioni interessanti e capaci di stimolare gli allievi per approfondire e conoscere di più, riducendo grandemente l'atteggiamento del "ma tanto a che cosa serve? Io voglio fare lettere moderne; non userò mai questa roba."

Certamente la fisica e le tecniche hanno richiesto l'uso di sofisticati strumenti matematici già sviluppati, come pure hanno dato lo spunto per lo sviluppo di nuovi metodi e nuove teorie.

Nel campo della tecnologia fino a non molti anni fa gli scienziati tecnologi si adoperavano per individuare modelli adeguati per descrivere i loro sistemi e cercavano soluzioni chiuse "analitiche" che spesso li portavano ad invadere il dominio tradizionale dei matematici o dei "fisici-matematici".

Ora molto spesso i modelli sono numerici e le soluzioni sono algoritmiche, per loro natura approssimate; il genere di problemi che si possono affrontare e risolvere con questo approccio sono di complessità enormemente superiore a quelli che si potevano affrontare in forma analitica, anche se richiedono l'uso di elaboratori più o meno potenti. La disponibilità di queste macchine e la loro facilità d'uso ha spostato completamente i campi di ricerca (almeno nelle facoltà di ingegneria) verso problemi decisamente più complessi di una volta, ma la qualità e l'eleganza della matematica ne ha sofferto non poco.

Penso che trascorso questo periodo di transizione si possa arrivare nel campo tecnologico ad una migliore utilizzazione del "calcolo numerico" e ad ulteriori sviluppi della teoria e dei metodi da usarsi in questo dominio.

Nello stesso tempo i programmi oggi disponibili anche per l'uso nelle scuole secondarie possono dare lo spunto per impostare la soluzione algoritmica di alcuni problemi; è una buona occasione per insegnare non l'informatica, ma l'uso del calcolatore e per avvicinarsi ai problemi reali che si incontrano nel mondo di oggi.



# L'USO DI MODELLI IN ALCUNI INSEGNAMENTI UNIVERSITARI DI MATEMATICA

Lorenzo Peccati[1]

## 0. Introduzione

Ringrazio gli organizzatori per avermi offerto quest'occasione per discutere alcuni punti che mi stanno a cuore sull'insegnamento della matematica. Non è sempre facile trovare tanti colleghi (forse) interessati e tempo adeguato per riflettere sul nostro lavoro (per me quasi) quotidiano.

Molte cose che dirò sono frutto di esperienza didattica, piuttosto variegata, e non son sicuro siano interessanti per insegnamenti universitari di matematica in altri tipi di *curriculum*. Se lo fossero, ovviamente, tanto di guadagnato.

Forse sarò un po' provocatorio, ma credo sia utile esercitare la nobile arte (della provocazione) in occasioni come questa. Non serve a nulla continuare a dirci che siamo bravi, anzi bravissimi.

## 1. Le occasioni d'insegnamento

Riferisco subito su *quali* tipi di insegnamento universitario mi hanno consentito l'accumulazione d'esperienza, indicando così l'area minima di interesse dell'esperienza.

Dividerei le occasioni d'insegnamento che ho avuto in due gruppi:

(A) - corsi per studenti di Facoltà non scientifiche (Economia a Parma, Brescia, Torino, in "Bocconi", Scienze Politiche in Statale a Milano, programmi *Master in Business Administration* alla SAA di Torino, corsi di diploma in amministrazione, sempre in SAA, ancora *MBA* a San Diego, Vienna, Budapest);

(B) - corsi per studenti di Facoltà scientifiche (Matematica a Torino negli anni 76-82 e 86-93), dottorato di ricerca in "Matematica per le decisioni economiche", DEA all'École Normale Supérieure di Cachan).

Nei due tipi di esperienza, almeno parzialmente, i problemi didattici incontrati sono stati di natura diversa, ma l'uso di modelli accomuna le soluzioni trovate.

[1] Ordinario di "Matematica per le applicazioni economiche e finanziarie", IMQ - Università "Bocconi", via Sarfatti, 25 - 20136 MILANO, tel.: 02-58365135, *fax*: 02-58365130, *e-mail*: lorenzo.peccati@uni-bocconi.it

## 2. Problemi didattici incontrati

I problemi didattici più seri incontrati nei corsi di tipo (A) (Matematica in *curriculum* non matematici) sono legati a:

- percepita estraneità della matematica nel *curriculum*;
- dubbio sull'utilità della matematica per quel tipo di programma (attenzione che oltre il 90% degli studenti d'una Facoltà di Economia seguono corsi di laurea di tipo aziendale, nei quali l'Economia matematica non c'è e non serve e in cui la Finanza, se c'è, è ben lungi dall'essere "matematica"!);
- manca nello studente una qualunque forma d'interesse per la disciplina, normalmente (in passato) imposta per legge, ora oggetto di negoziazione nel riassetto conseguente all'introduzione del sistema dei crediti.

Le conseguenze sono piuttosto ovvie:

- difficoltà didattiche;
- elevato numero di bocciature/ritiri;
- pessimi risultati nella formazione di gran parte degli studenti.
- pressioni più o meno ferme sui docenti da parte di presidi, colleghi, economisti-tutori, studenti;
- ricorrere di idee da pelle d'oca del tipo: "Se insegnate matematica così e con questi risultati e se è così difficile trovare docenti diversi, ci pensiamo noi (aziendalisti/economisti): vi prestiamo nostri studenti, che hanno fatto il *PhD* all'estero e che - dunque - matematica la sanno, e possono tenere loro, almeno in parte, gli insegnamenti di Matematica generale".

Per gli insegnamenti di tipo (B) (per matematici, soprattutto del Corso di laurea in Matematica) è emblematico questo dialogo immaginario:
Studente di matematica: "A che serve tutta questa matematica che imparo? Solo per reinsegnarne pari pari la parte meno nobile in un liceo?"
Docente di matematica (esistente e non unico: potrei riferire gustosi episodi) :"Per la Matematica la domanda che tu fai non ha addirittura senso: la Matematica ha senso in sé, punto e basta!". Poi, magari si cita Dieudonné e l'*honneur de l'esprit humain*.
Il problema posto dallo studente, a mio avviso, non è estraneo alla forte contrazione dimensionale di molti Corsi di laurea in Matematica (oltre l'effetto generale di origine demografica), l'atteggiamento mentale sottostante al secondo può essere condiviso o meno da chi insegna in Corsi di laurea in Matematica, ma presenta risvolti piuttosto gravi per le Facoltà non scientifiche quando i matematici sono chiamati a insegnare, con conseguenti scelte di contenuti e di taglio, guarda caso attività cruciali in questi anni proprio in conseguenza del passaggio all'autonomia.



## 3. Elementi collaterali (ma non tanto)

Fanno parte del problema anche alcuni altri aspetti, che brevemente rammento:

- Mai come oggi la matematica, e della matematica fine, è praticamente usata nelle aziende (basti pensare al *boom* della Finanza matematica che risale a un articolo controverso di Black e Scholes di 25 anni fa). Nonostante questo, mai come oggi si cerca di espellere o schiacciare la matematica nei *curriculum* preparatori per i giovani destinati alle aziende.
- Sempre di più si chiede ai *curriculum* universitari anche di "servire a qualcosa", di avere qualche chiara valenza professionale. Un *curriculum* serissimo, ma incentrato sulla mera "formazione della testa", ha enormi problemi di mercato: sono leciti il rammarico, la disperazione, lo sdegno e quant'altro uno si sente, ma non è lecito ficcare la testa sotto la sabbia e fare gli struzzi. L'autonomia universitaria e, quindi, l'Università del 2000 è anche ciò.
- Come insegnare matematica, almeno in *curriculum* non matematici, è un problema planetario. Basta leggere un po' di materiale della Mathematical Association of America per vedere i problemi USA (e non solo USA) in questo settore.
- La percezione del problema della didattica della matematica è comunque ormai "storica": credo che, probabilmente con le lingue straniere, la nostra sia la disciplina in cui massimamente si sono spese energie per studiare la didattica e non so se il rapporto benefici/costi a tutt'oggi sia del tutto soddisfacente. Credo che i nostri colleghi linuisti siano messi meglio, forse anche perché, soprattutto nei confronti dell'inglese, è veramente massiccio l'insieme di stimoli motivanti che colpiscono gli allievi.
- Innovare nell'insegnamento della matematica non sembra sempre del tutto facile. In questo periodo ho riflettuto molto su due osservazioni, spigolate leggendo riviste nostre: (1) *Sull'eternità della matematica* - Noi matematici siamo gli unici che potremmo intenderci molto facilmente con i nostri antenati matematici di - mettiamo - 2000 anni fa. In Matematica si fa come nelle famiglie d'una volta: non si butta via niente. E possiamo, in parte, andarne orgogliosi. (2) *Sull'eternità della didattica della matematica* - Possibile che insegnare matematica all'università oggi si possa fare con lo stesso stile con cui si insegnava matematica un secolo fa? Possibile che, per es., i *computer* siano stati in grado di modificare radicalmente mille aspetti della nostra vita, ma che non tocchino minimamente come posso insegnare matematica ai miei studenti?

## 4. I modelli come strumento didattico

Per insegnare matematica, uso ormai da anni (direi una ventina) uno schema didattico cui confesso d'essermi affezionato:

I. Parto da un problema, tipicamente economico o aziendale;

II. Costruisco un modellino che lo traduce e che naturalmente richiede un certo strumento matematico;

III. Faccio notare che ci servirebbe quello strumento matematico (p. es. un teorema);

IV. Enuncio il teorema e, se del caso, lo dimostro;

V. Faccio un po' d'osservazioni sulla rilevanza del teorema per il problema economico o aziendale di partenza;

VI. (Magari) aggiungo un esempio collegato con l'applicazione.

Il risultato del giochetto è usualmente positivo in termini d'interesse destato e di efficacia espositiva, ma naturalmente non è sempre facile trovare subito l'applicazione appropriata e riuscire a contenere il tutto nei tempi permessi dal calendario del corso. E' però ovvio che il lato positivo della ventina d'anni d'applicazione è uno *stock* imponente di modelli *prêt-à-porter*. Naturalmente la prova scritta d'esame richiede al candidato di ripercorrere su un problemino almeno alcuni dei sei passi fatidici I-VI. Tempo di preparazione d'una prova d'esame un'ora, tempo di correzione della stessa al massimo 60", fattibile quindi "sull'unghia" iniziando l'orale il giorno stesso della prova scritta: si tratta di considerazioni irrilevanti per chi è avvezzo a piccoli corsi e a ritmi d'esame umani. Si tratta di informazioni cruciali per la gestione di appelli grossi (3-400 persone) da ripetersi dieci volte l'anno (se va bene).

**5. Risultati di massima (come li percepisco)**

Con riferimento agli insegnamenti di tipo (A) (matematica per non matematici) posso onestamente vantare:

(a) - Interesse anche da parte di studenti che istintivamente amano poco la matematica, che sono normalmente il 90%.

(b) - Avvio all'integrazione tra le conoscenze matematiche e le altre, in modo da fare entrare la matematica nella "scatola dei ferri" del laureato, insieme con altri oggetti provenienti da altre discipline (non sono convinto che il rigore mentale cui la matematica dovrebbe condurre e che in sé già sarebbe un buon obiettivo sia di fatto conseguito/conseguibile: se va bene accettano che in matematica si ragiona con rigore, ma il problema non è "ragionare in matematica", bensì "ragionare" e basta).

(c) - Fornire abilità che hanno anche valore professionale diretto.

(d) - Insegnare un po' del processo di astrazione che sta alla base anche dell'uso pratico della matematica: i risultati si vedono poi quando si preparano tesi di laurea.

(e) - Con riferimento alla mia università rammento che il corso di "Matematica per le applicazioni economiche e finanziarie" (la Matematica 2 obbligatoria per tutti e introdotta in forza del riordinamento della Facoltà di Economia della Commissione Sdralevich), realizzato con le modalità I-VI sopra descritte, è stato giudicato dalla gran parte degli studenti "difficile, ma niente affatto estraneo al *curriculum*", magari col commento rivelatore "... peccato che sia un corso di matematica", ciò a differenza del corso di "Matematica generale", tenuto in maniera tradizionale da insegnanti ampiamente sperimentati, ma giudicato "corpo estraneo" rispetto al *curriculum*..



(f) - Sempre in "Bocconi", il corso opzionale più frequentato è un corso di matematica incentrato su modelli di strumenti e mercati finanziari. Origina circa 30 tesi di laurea l'anno.

Per tutti gli insegnamenti, sia (A) sia (B):

- Possibilità immediata di integrazione del lavoro svolto in matematica con l'uso di strumenti di elaborazione elettronica.

Per gli insegnamenti di tipo (B):

- Aiutare a conoscere tutte le valenze degli investimenti fatti in conoscenze: conoscere valenze in più è talora straordinariamente importante.

**6. Problemi di attuazione (come ora li vedo)**

Mi rendo perfettamente conto che il tutto è ben lontano dall'essere a costo zero e quindi sciorino una lista (in)completa delle difficoltà che ho finora incontrato nell'applicazione pratica dell'approccio, sia personalmente, sia chiedendo ai collaboratori di aderire al progetto didattico.

- Approccio non molto consueto per non pochi matematici.
- Approccio didattico diverso da quello che è stato usato per insegnare la matematica a noi, ai nostri tempi.
- Fa perdere tempo.
- Non è facile trovare materiale adeguato di supporto.
- Occorre sapere un po' di altre cose, oltre la matematica.
- Richiede una certa manutenzione, anche dopo che s'è fatto la prima volta "il grande passo".
- Fa perdere tempo e impedisce di sviscerare a fondo alcuni aspetti "matematici" degli argomenti.
- Richiede capacità di coinvolgimento e talora scatta la sindrome di Giovanna D'Arco ("Ragazzi, sono costretto/a a insegnarvi così queste cose in un modo in cui non credo. Soffiate per favore sulla legna per far bruciare velocemente il rogo, così poi ci facciamo una bella disequazione, con moduli, seni e coseni e - magari - se mi ci metto, anche un parametro, proprio come quella che le Voci mi dicono capiterà agli esami!").

- Non è sempre immediatamente ben accettato dagli studenti abituati all'insegnamento tradizionale e focalizzati su "Non m'interessa che tu mi voglia insegnare la Matematica, ciò che mi devi insegnare è a superare l'esame di Matematica!", una specie di sindrome di Stoccolma applicata alla nostra materia. Tipico dell'esame di patente: alla scuola-guida non s'impara affatto a guidare, ma a passare l'esame di guida.
- Per motivi di tempo richiede di contenere molti approfondimenti, giudicati "belli" o addirittura "quasi irrinunciabili" per fare altre cose. Ho sentito Vestali della tradizione (ad onor del vero, maschi) dichiarare che il livello (elevato secondo gli *standard* tradizionali) della lezione è un valore in sé e non è scambiabile con nient'altro (foss'anche un miglioramento nella qualità dei risultati didattici).



## LA MATEMATICA: LINGUAGGIO DELLA SCIENZA E DELLA TECNOLOGIA

Sintesi dell'intervento di Carla Rossi[1]

Probabilmente nessuno di quanti operano in settori scientifici o tecnologici mette in dubbio che la matematica costituisca un potente linguaggio per il loro campo di interesse, ma, probabilmente, non tutti condividono lo stesso concetto di "linguaggio matematico". Lasciando agli altri interventi il compito di illustrare il proprio punto di vista, mi limiterò ad abbozzare il mio, precisando che non si tratta di un concetto statico, ma piuttosto di idee basate sull'eperienza personale di lavoro scientifico e didattico, ma anche sulle diverse e positive esperienze vissute dall'altra parte della cattedra, fin dai tempi della scuola secondaria.
Quando penso al linguaggio matematico ho in mente una situazione problematica, un problema da risolvere, non necessariamente di tipo "applicativo", o un fenomeno da descrivere o interpretare, e allora immagino quali strumenti matematici possano permettermi di svolgere al meglio le seguenti attività:

- descrivere il problema o il fenomeno di interesse evidenziando gli aspetti significativi e trascurando eventuali dettagli irrilevanti;
- prevederne i diversi aspetti, legami, svolgimenti;
- interpretarli;
- effettuare confronti utili e significativi con altre situazioni analoghe o con dati empirici.

Essenzialmente ricerco nell'utilizzo del linguaggio matematico una capacità di descrizione e semplificazione di realtà complesse in grado di meglio evidenziare aspetti strutturali importanti e trascurare invece quegli aspetti secondari o di minore interesse, che possono complicarne la comprensione.
Questo approccio porta inevitabilmente ad assumere come concetto fondamentale di base quello di "modello matematico", che si può utilmente assimilare ad uno schizzo della realtà, tipo siluette, che conserva gli aspetti necessari per riconoscere una forma ma ne trascura molti dettagli, e non ad una foto sfocata, che conserva tutti i dettagli in modo confuso ed impreciso, ostacolando il riconoscimento dell'immagine.

### *Un primo esempio di modello matematico: la geometria euclidea del piano.*

La geometria euclidea del piano è uno dei primi modelli matematici che gli alunni trattano, anche se nessuno, in genere, spiega loro che di un modello si tratta, nato

[1] Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

per risolvere alcuni ben precisi problemi "pratici" e sviluppatosi poi in modo autonomo, come accade generalmente in tutti i casi analoghi.
Tutto nasceva all'origine in Egitto dalla necessità di riperimetrare i campi dopo le inondazioni, in modo da conservare la proprietà di ognuno in modo equo. Lo studio delle prime proprietà delle aree dei poligoni deriva da questa necessità pratica. Quindi i poligoni piani sono essenzialmente i modelli dei campi e degli appezzamenti di terreno. Come in tutti i modelli si trascurano degli aspetti secondari, come la sfericità della terra e eventuali variazioni altimetriche dei terreni, che fanno sì che i reali appezzamenti non siano in realtà piani. La loro dimensione, piccola rispetto alla sfera terrestre rende però trascurabile l'errore dovuto all'approssimazione piana, come sono pure trascurabili le variazioni altimetriche, piccole ripetto alle altre due dimensioni considerate.
Già questo esempio contiene tutti gli aspetti concettuali rilevanti del tema che stiamo trattando: la complessità dei fenomeni reali, la semplificazione e la generalizzazione introdotta da un modello matematico, lo sviluppo del linguaggio matematico, che procede anche autonomamente a partire dal problema di interesse, la necessità dell'approssimazione, lo studio degli errori e dell'accuratezza, il problema della misura.

### *Un secondo esempio: i modelli "data driven" o modelli statistici.*

E' molto facile proporre esempi di modelli "data driven", espressione che potremmo tradurre "suggeriti dai dati", basti immaginare di esprimere, mediante regressione lineare, l'altezza di un alunno in funzione del peso o viceversa, l'altezza di un alunno in funzione dell'altezza del padre, o della madre, e così via. E' importante ricordare che molti modelli della meccanica classica, che vengono attualmente assunti come modelli matematici al pari della geometria euclidea nell'esempio precedente, come il modello di caduta dei gravi o delle piccole oscillazioni del pendolo, sono nati come modelli data driven per la descrizione di dati provenienti da osservazioni "casuali" effettuate da Galileo. E' importante osservare come un modello matematico preveda una fase di costruzione di tipo induttivo, a partire da osservazioni (dati osservazionali), che porta a modelli data driven, e una fase deduttiva di derivazione di conseguenze e previsioni che, se si rivelano conformi a nuovi dati raccolti ad hoc (dati sperimentali), permettono la generalizzazione del modello stesso dalla situazione particolare, legata al primo insieme di dati, a tutti i casi analoghi, ovvero la possibilità di considerare il modello come modello matematico rappresentativo della situazione o del fenomeno di interesse.
Nelle diverse fasi di costruzione di un modello data driven è importante chiedersi sempre: che cosa interessa prevedere, che cosa possiamo misurare, che cosa possiamo trascurare, come confrontare le previsioni con i dati sperimentali, come possiamo migliorare un modello inadeguato.

E' importante sottolineare che spesso il linguaggio matematico si sviluppa a partire da spunti derivanti da uno specifico problema fino alla definizione di un modello,



che poi continua a svilupparsi in modo autonomo, a prescindere dalle necessità applicative. Accade anche il viceversa, ovvero sviluppi puramente teorici possono trovare interessanti applicazioni successivamente nei campi più svariati. Possiamo dire che esiste un circolo virtuoso fra spunti applicativi e ricerca teorica, ma solo pochi matematici sono in grado di sviluppare adeguatamente entrambi gli aspetti.
Diciamo che il passaggio dallo spunto applicativo alla teoria presuppone un passaggio induttivo, che è quanto può essere esemplificato dai modelli data driven, lo sviluppo successivo della teoria è, invece, principalmente di tipo deduttivo e mirato ad "estrarre" dal modello matematico, definibile attraverso proprietà generali e assiomi, tutte le possibili conseguenze di interesse, da confrontare, eventualmente, ma non necessariamente con conseguenze osservabili (dati).

# GRUPPI DI LAVORO

# STRUMENTI PER LA COSTRUZIONE DEL SAPERE E APPRENDIMENTO MATEMATICO

Margherita Fasano - Francesco Casella - Rosanna Cimadomo

L'apprendimento matematico, come gli altri apprendimenti, risente attualmente dell'influenza esercitata dall'irrompere crescente di nuove applicazioni tecnologiche nei diversi ambiti socio-culturali ed economici.
Tale fenomeno induce dei cambiamenti anche in ambito scolastico, con ripercussioni sulla professionalità dei docenti e sulla formazione degli alunni. Una delle risorse tecnologiche che oggi sembra soddisfare maggiormente le esigenze di motivazione ad un apprendimento significativo, consapevole e operativo, è la multimedialità informatica e telematica. La progettazione e la realizzazione di un prodotto multimediale prevede quattro momenti fondamentali:
l'individuazione dell'idea da sviluppare;
la progettazione delle pagine-videate;
l'implementazione;
la validazione.
In questo contesto, ci interessa focalizzare l'attenzione sui modelli e sui processi di apprendimento che entrano in gioco, dal punto di vista didattico e formativo, durante lo svolgimento delle attività relative al primo di questi momenti.
Individuata l'idea sulla quale lavorare, è necessario selezionare i contenuti e i materiali
utili allo scopo e organizzarli in modo da evidenziarne tutte le possibili relazioni che intercorrono tra essi. Lo strumento che si dimostra molto funzionale per questo tipo di lavoro è la mappa concettuale, la cui costruzione favorisce la consapevolezza del processo di sistematizzazione progressiva delle proprie conoscenze.
Infatti, essa comporta da un lato la ricerca e l'individuazione dei nodi (concetti fondamentali) e dei relativi legami, dall'altro, una rappresentazione grafica che ne evidenzi la struttura concettuale gerarchica e reticolare. Inoltre, fatto non secondario, la ricerca delle parole legame sollecita lo sviluppo di competenze logiche e linguistiche, che richiedono capacità di analisi, di sintesi e di ricchezza lessicale. Ciò permette di rafforzare l'osmosi tra i processi procedurali e relazionali della nostra mente, che sono alla base della costruzione della conoscenza.
Il processo di organizzazione e di costruzione del proprio sapere è altresì stimolato dal confronto tra diverse produzioni di mappe concettuali all'interno della classe. Se la finalità è quella di arrivare alla realizzazione di un prodotto multimediale condiviso, questo è un passaggio metodologico molto importante, perché è dal confronto che può scaturire l'esigenza di rivedere la propria mappa per apportarvi modifiche.
Il ripetersi dei momenti di organizzazione e di riorganizzazione grafica, linguistica e logica concorrono alla costruzione del nuovo sapere.

Per dare maggiore pregnanza e significatività a quanto detto, oltre che a contestualizzare da un punto di vista più inerente alla matematica, è stata progettata un'attività così articolata:
questionario (10');
navigazione in un ipermedia (15');
costruzione di una mappa concettuale su contenuto matematico (30');
confronto elaborati (15');
confronto con elaborati prodotti da alunni sullo stesso tema (15');
cenni sulle rimanenti fasi di produzione e realizzazione di un ipermedia (15');
individuazione delle caratteristiche del modello di apprendimento applicato (10');
riflessioni sulle ricadute didattico-formative dal punto di vista matematico (15');
discussione.

Questa esperienza di messa in situazione, sia pur nella sua limitatezza temporale, ha permesso di pervenire ad alcune considerazioni generali, che possono essere così sintetizzate nello schema seguente:



Effetti didattico-formativi della costruzione della mappa concettuale

| Che cosa fa l'alunno | Obiettivi del docente |
|---|---|
| costruzione mappa concettuale | sviluppo capacità di rappresentazione grafica |
| scelta delle parole legame | sviluppo correttezza e sinteticità del linguaggio |
| confronto e discussione dei propri elaborati | sviluppo capacità argomentative e rispetto del punto di vista altrui |
| autocorrezione dei propri elaborati | autoregolazione dell'apprendimento |

L'uso regolare, e non soltanto episodico, delle mappe concettuali nell'attività didattica può fornire al docente una sorta di monitoraggio dello sviluppo cognitivo dell'alunno.
Un successivo approfondimento di questi punti ha portato ad ulteriori riflessioni sulle motivazioni didattiche che sollecitano l'utilizzo di questo strumento di organizzazione del sapere.
In particolare, è stato visto come:
- sistematizzazione (finale) di argomenti / concetti già studiati con il docente;
- progressiva sistematizzazione di argomenti /concetti previsti nell'arco dell'anno;
- occasione di sintesi di contenuti e di visioni storico-culturali dello sviluppo del pensiero matematico;
- strumento per rappresentare ipotesi e fasi di ricerca attinenti a problematiche di interesse comune alla classe o al gruppo.

# GEOMETRIA ED ELEMENTI ASTRONOMICI NELLO SPAZIO APERTO

Nicoletta Lanciano* - Adriana Pierotti*

Vengono illustrate e poi sperimentate le particolarità di un laboratorio che si svolge anche nello spazio aperto, quindi nello spazio grande e non solo in uno spazio piccolo come quello dell'aula, e non solo con un lavoro realizzato su superfici piatte quali fogli e lavagne; un lavoro in cui è presente il cielo e dunque la possibilità di alzare lo sguardo; in cui è presente lo spazio "vero", in cui agiscono i nostri corpi, con tre dimensioni e questo non viene solo immaginato ed evocato anche attraverso lo spazio virtuale e tecnologico.

La conoscenza dello spazio e del tempo, d'altra parte, trovano la loro genesi, come altre capacità mentali, nell'esperienza corporea: la mente come realtà dinamica investe l'intera dimensione della fisicità. La dimensione spaziale inizia fin dalle prime esperienze del bambino nel primo anno di vita, periodo in cui comincia a maturare quel confine all'onnipotenza che, rappresentato dalla superficie cutanea, è vissuto anche come limite fisico al di là del quale ha inizio la realtà esterna. (Gaddini, Godelli, Winnicott)

Il movimento corporeo, l'azione concreta contribuiscono, in un contesto stimolante e gratificante, a far emergere un'immagine di sé positiva. Muoversi per osservare, cercare modalità di lettura e decodificazione di una situazione reale, sono azioni che comportano un atteggiamento emozionale che "apre" alle conoscenze e non obbliga a misurarsi con consegne che richiedono, talvolta, concetti troppo astratti. Le simbolizzazioni di ordine spaziale e temporale che derivano da tali attività, hanno, pertanto, una genesi ancorata alla realtà. Inoltre, l'apprendimento attraverso la mediazione del movimento del proprio corpo contribuisce a costruire un'immagine dinamica del sé in relazione complessa con lo spazio, la luce, le ombre, gli oggetti.

Il lavoro che si svolge all'aperto mira ad ampliare lo spazio vissuto, percorso, osservato, descritto, per permettere allo sguardo di andare lontano, fino al Sole e per permettere un movimento del corpo che conduce ad osservare sperimentando le differenze causate dall'assumere diversi punti di vista, dallo stare in quiete e in movimento rispetto agli stessi oggetti e agli stessi fenomeni.

Le esperienze in spazi grandi, strutturati, rappresentativi dal punto di vista architettonico o naturale, per l'apprendimento della geometria, tendono a legare la dimensione spaziale esperita attraverso azioni dinamiche ad una dimensione temporale che si innesta nel momento conoscitivo della fase concreta (ombre, riflessi di luce, spostamento del sole e orientamento) e nella successiva rielaborazione dell'esperienza. Il movimento svolge allora un duplice ruolo nei processi di apprendimento: in relazione alla **spazialità,** coordinamento di mutamenti di posizione; in relazione al **tempo,** coordinazione di movimenti e velocità in uno spazio. Infatti la dimensione temporale si sviluppa quando il "sé" si riconosce in uno spazio esperito e si sente protagonista delle esperienze vissute, della loro successione temporale e può cogliere i mutamenti che avvengono nella realtà esterna.

Nelle esperienze di attività di studio in grandi spazi, il ruolo dell'insegnante si esprime su due piani. Quello delle consegne e quello successivo del lavoro di rielaborazione: nell'uno e nell'altro caso la sua strategia comunicativa mira a realizzare, per mezzo di operazioni/azioni, una lettura geometrico/matematica e/o astronomica del luogo. Si favorisce, così, la maturazione di conoscenze attraverso modalità operative che facilitano l'interazione col gruppo e valorizzano la sensibilità percettiva del singolo che è presente con il proprio vissuto.

La mediazione corporea nello studio della geometria fa leva anche sul valore della percezione per decodificare le caratteristiche, le qualità di uno spazio tridimensionale, da cui ricavare immagini mentali ad esso relative.

Tale elaborazione trova nei linguaggi, gestuale, verbale, iconico, grafico, sonoro, un aspetto privilegiato del momento relazionale e del confronto. I linguaggi costituiscono pertanto il legame tra le esperienze e la possibilità di essere evocate e rappresentate, confrontate, analizzate e fissate nel presente. Permettono, cioè, di sovrapporre al momento dell'esperienza il mondo dei segni che sono punto di unione del pensiero con il mondo esterno e dal quale può muovere ogni forma di creatività.

Poiché tra le cause di alcuni errori tipici degli allievi in geometria, vi è la consuetudine a lavorare prevalentemente con i piani a giacitura orizzontale e verticale, riteniamo opportuno sperimentare situazioni di tipo più articolato e vario. Concetti legati a "orizzontale" e "verticale", come anche a "parallelo" e "proporzionale" assumono, visti in un contesto più ampio e inusuale, maggiore precisione e la novità del contesto medesimo induce un'attenzione rinnovata e una feconda possibilità di scoperte, anche per gli adulti.

Nel laboratorio sono proposte alcune attività relative ai percorsi, all'orientamento spazio-temporale e alle relazioni di luce/ombra col Sole. In particolare viene esplorato lo spazio d'ombra, le sue sezioni su diversi piani e il legame con gli angoli formati con la direzione dei raggi del Sole in cui sono evidenti le proprietà delle similitudini e si riscoprono applicati in grande i Teoremi di Talete.

*Indicazioni bibliografiche*

- Lanciano N., 1997, "Geometria fuori dell'aula: difficoltà, caratteristiche, peculiarità", Atti del II Internuclei CNR scuola dell'obbligo, a cura di L. Grugnetti, p 145-148
- Filippone M.A. et al, 1998, A scuola di Luna, Macro edizioni
- Lanciano N. et al, Geometria in città, pubblicazioni a cura del Centro Ugo Morin, G.Battagin ed, 1988
- Lanciano N., 1998, "La classe ne suffit pas: le choix des espaces pour la formation des enseignants", XX JIES Chamonix 24-26 marzo, Atti p 255-260

* (Gruppo di ricerca CNR - Università, Roma "La Sapienza")

# LEGAMI FRA MATEMATICA E FISICA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Anna Maria Arpinati - Maria Grazia Masi

I lavori presentati nel nostro gruppo sono stati scelti per documentare la possibilità effettiva di realizzare con studenti di scuola media attività che rendono evidenti i forti legami esistenti fra la matematica e le scienze sperimentali. I casi trattati illustrano il legame fra un'attività di fisica che consiste nel realizzare un esperimento col metodo scientifico e nel ricavare misure corredate dagli errori di misura, e un'attività di matematica che consiste nell'individuare una relazione espressa sotto forma di formula.

Dal punto di vista dell'attività fisica, ignorare gli errori di misura significa compiere un errore concettuale grave, già fin troppo diffuso, che è quello di ritenere che le misure siano esatte, quando è vero il contrario: le misure sono tutte affette da errore. Scegliendo di tener conto dell'errore di misura ci si libera inoltre dalla fastidiosa necessità di prevedere ed evitare tutte le situazioni sperimentali che ci fanno dire "questo dato sperimentale non torna", "questo punto sperimentale non sta sulla retta, come dovrebbe", e così via; se si tiene conto degli errori di misura tutto diventa spiegabile ai ragazzi e non c'è più nessun imprevisto da temere.

Con gli errori di misura si realizza anche il primo legame con nozioni di matematica o statistica come "media", "scarto", "scarto medio", "probabilità"; inoltre diventa essenziale saper applicare ciò che abbiamo imparato nelle ore di matematica sugli arrotondamenti; infine si conferma l'importanza di saper eseguire velocemente le quattro operazioni, perché ci saranno molti calcoli elementari da fare quando si tratterà di mettere in pratica la propagazione dell'errore (trovare l'errore sul risultato di un'operazione quando i due numeri coinvolti sono misure con errore).

L'attività matematica di gran lunga più interessante riguarda senz'altro l'individuazione di una relazione sotto forma di formula. I dati raccolti sperimentalmente sotto forma di tabella costituiscono la forma iniziale di tale relazione. Per ottenere la formula è necessario realizzare una prima trsformazione dalla forma "tabella" alla forma "grafico", trasformazione ben accettata dai ragazzi perché è facile e simpatica: tutti imparano a riportare in grafico una tabella. Invece il passo successivo, cioè ricavare la formula dal grafico, è facile solo quando il grafico è una retta.
Nel caso in cui il grafico non sia interpretabile come retta entro gli errori sperimentali, occorre affrontare un problema di matematica che rende questi casi assai più complicati: il metodo del "cambiamento di variabile". Cosa succede al grafico se opero un cambiamento di variabile nella formula? Aver capito questo rende un alunno delle me-



die molto adatto non solo a rispondere sperimentalmente ai più comuni problemi di fisica che possono capitare durante la scuola media inferiore (e superiore), ma anche a capire velocemente questioni matematiche difficili per ragazzi non allenati.

Dal punto di vista della didattica si propongono le considerazioni seguenti.

- Fare dell'attività sperimentale non significa automaticamente seguire il metodo scientifico; per poter affermare di aver seguito il metodo scientifico occorre che su un dato oggetto di studio sia stata posta una domanda, sia stata data una ipotesi di risposta e che questa sia stata verificata. La domanda può essere tale che la verifica della risposta non comporti un'attività sperimentale. I lavori proposti sono lavori sperimentali, condotti seguendo il metodo scientifico:
  - si inizia con la descrizione di un contesto fisico e si coinvolge la classe nelle prime osservazioni che si possono fare su di esso
  - si introducono i concetti e le grandezze eventualmente non ancora conosciute dalla classe (massa, temperatura, ... , lunghezza, allungamento, ...)
  - si fanno emergere i problemi stimolando la formulazione di domande
  - si sceglie una domanda alla quale si pensa di saper indicare risposte plausibili e controllabili
  - si raccolgono le ipotesi di risposta e si cerca di organizzare un sistema di controllo
  - si prepara un progetto di verifica sperimentale
  - si realizza il progetto, con le eventuali modifiche che si rendano necessarie nel corso del lavoro
  - si traggono le conclusioni
  - si scrive la relazione, documentando l'attività svolta.
- Per quanto riguarda l'errore di misura, è possibile operare correttamente adottando scelte di contenuto e metodologiche del tutto compatibili con il livello di conoscenze degli studenti di scuola media inferiore. Per ulteriori informazioni sull'errore di misura si può consultare il volumetto di Vespi[1]. Per conoscere i dettagli di un metodo lungamente sperimentato (per oltre dieci anni) per introdurre l'errore di misura in prima media si può vedere l'articolo di Masi[2].
- Per quanto riguarda il calcolo degli errori, quando questi cominciano a sembrare ripetitivi e noiosi si può utilizzare l'eventuale laboratorio di informatica e le eventuali conoscenze dei ragazzi sulla programmazione (è sufficiente un livello veramente minimo anche solo di BASIC) per preparare un mini-programma che calcola me-

---

[1] A. Vespi, "Misurare è facile?", Ed. Loescher.

[2] M. G. Masi, Il programma di Scienze (e Matematica) nella scuola media ... e io", La fisica nella scuola, anno XXIX, n. 3 Supplemento, p. 41 - 56.

die o che esegue altri calcoli elementari che non si ha più voglia di ripetere, con grande soddisfazione dei ragazzi che cominciano a intravedere che anche a scuola le cose possono essere collegate; quello che si impara in un campo può aiutarci in un altro campo.

- Per quanto riguarda i prerequisiti sulle relazioni, occorre che la classe abbia affrontato l'argomento molto tempo prima del suo utilizzo in questi lavori sperimentali. Occorre che i ragazzi:
  - abbiano chiaro il concetto di relazione, che non facciano confusione fra la relazione (una) e le sue rappresentazioni (in certi casi, molte: elenco di coppie, rappresentazione di Eulero-Ven, tabella ad una o a doppia entrata, grafico, formula, ...)
  - si siano esercitati parecchio sulla determinazione delle ultime tre forme nominate sopra per la rappresentazione di una stessa relazione

  Per esperimenti da scuola media inferiore è sufficiente trattare bene:
  - i seguenti tre tipi di rette: crescente non passante per l'origine ($y = a x + b$), crescente passante per l'origine ($y = kx$), decrescente non passante per l'origine ($y = a - bx$)
  - la parabola ($y = kx^2$) e curve "simili" ($y = kx^3$, $y = kx^4$, ecc.)
  - l'iperbole ($y = k / x$) e curve "simili" ($y = k / x^2$, $y = k / x^3$, ecc.)
  - la radice quadrata e curve simili (indici 2, 3, ...)
- Per quanto riguarda il metodo del "cambiamento di variabile", non tutti gli studenti saranno disposti a seguirci su questa strada, a meno che non abbiamo previsto un tempo ragionevolmente lungo perché tutti possano rendersi conto con calma di quel che si può scoprire in questo campo: si tratta in fondo di poche cose, che però devono essere eseguite senza fretta e ripetute in numerosi esempi. Nei casi in questione, il cambiamento di variabile serve a distinguere una curva dalle sue "simili".

I lavori proposti sono tre, su due argomenti: "il riscaldamento di una massa d'acqua" e "l'allungamento di una molla". Tutti i lavori sono stati già realizzati nel modo descritto in classi di scuola media inferiore di Bologna e provincia.

Il primo lavoro presenta un'esperienza realizzata con alunni di seconda media; vengono descritti i prerequisiti, la modalità di esecuzione e i risultati ottenuti con una classe.

Il secondo lavoro consiste in una lezione teorico-pratica sul secondo argomento. Nella prima fase vengono illustrati i prerequisiti necessari alla classe; nella seconda fase viene affrontato l'argomento secondo le modalità caratteristiche del metodo sperimentale, viene presentato il problema e si passa all'esecuzione dell'esperimento da parte del gruppo di docenti presenti.



Per quanto riguarda il terzo lavoro, sul secondo argomento, viene distribuita una relazione contenente la descrizione di un problema più complesso e la traccia per l'esecuzione nelle classi.

Si può richiedere il materiale cartaceo utilizzato in occasione del lavoro del nostro gruppo alla dott.ssa Arpinati presso l'IRRSAE-Emilia Romagna[3].

Lavori analoghi a questi proposti (tantissimi altri se ne possono fare), se trattati con la necessaria calma (e basterebbe farne bene uno all'anno o un paio nel corso della scuola media), fanno capire ai ragazzi quanto è importante ciò che si impara a matematica, quanto questa disciplina influenza e determina il progresso di tutte le discipline sperimentali, che senza il suo apporto si sarebbero da tempo arrestate ad un livello elementare.

---

[3] Anna Maria Arpinati, presso IRRSAE-Emilia Romagna: lucidi sul primo lavoro, lucidi sul secondo lavoro, relazione sul terzo lavoro.

# L'INSEGNAMENTO DELLA LOGICA: METODI E STRUMENTI

Roberto Tortora[1]

Il gruppo di lavoro è stato coordinato in collaborazione con gli insegnanti Aldo Casolaro, Lucia Anna D'Ambrosio, Giulio De Cunto, Giuseppe Del Vecchio, Carmen De Micco, Giuseppe Montella e Fernando Montera, tutti appartenenti al Nucleo di Ricerca Didattica di Napoli, sezione Scuola Media. Al gruppo hanno partecipato in totale una ventina di insegnanti.

In primo luogo è stato posto sul tappeto il problema dell'insegnamento della Logica nella scuola media, esaminando le varie questioni e le varie difficoltà che esso presenta. Si è osservato, tenendo anche conto delle indicazioni dei programmi ufficiali, che la logica, disciplina di carattere trasversale, non va svolta come un capitolo separato del programma di matematica, ma piuttosto deve informare di sé ogni argomento, di matematica e non solo, allo scopo di stimolare negli studenti un uso attento e consapevole del linguaggio e una progressiva capacità critica nel capire e produrre una argomentazione.

Ma numerosi problemi sono di ostacolo al raggiungimento di tali obiettivi, fra i quali soprattutto la inadeguatezza della maggior parte dei libri di testo e la diffusa impreparazione degli insegnanti su questo argomento. Il problema è particolarmente sentito a livello di scuola media inferiore, dove fra l'altro gli insegnanti in proporzione elevata non sono laureati in matematica.

Per la logica particolarmente importante è la necessità di conciliare le conoscenze intuitive già possedute dagli alunni con le formulazioni più astratte a cui è necessario gradualmente accedere. C'è il rischio di provocare danni se si pretende semplicemente di sostituire le conoscenze intuitive con una serie di regole formali poco comprensibili, ed è un rischio particolarmente elevato laddove l'insegnante non abbia adeguate conoscenze di logica o sufficiente sensibilità verso le problematiche educative.

Una serie di ostacoli particolari sono stati messi in luce, che si oppongono alla comprensione delle nozioni basilari della logica e al passaggio da un livello intuitivo ad un livello di consapevolezza nell'uso del linguaggio. Tali ostacoli sono spesso riscontrabili anche tra gli adulti e tra gli stessi insegnanti. Fra questi:

a) la difficoltà a riconoscere e distinguere le nozioni di proposizione e di frase, con la connessa esigenza di collegarsi con le classificazioni in uso nella grammatica italiana;

b) l'uso corretto delle parole "vero" e "falso" e la distinzione tra verità di un'affermazione e correttezza di un ragionamento;

[1] Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", Università "Federico II" di Napoli.



c) la difficoltà ad accettare il carattere verofunzionale dei connettivi come radicale semplificazione rispetto alla lingua comune e in particolare la difficoltà ad attribuire un valore di verità netto (vero/falso) alle proposizioni composte;

d) le difficoltà collegate al concetto di negazione, come la necessità di distinguere la negazione da nozioni come "opposto" e "contrario" e la confusione che si determina tra "falsità" e "negazione", che rispecchia fra l'altro l'analoga situazione che in aritmetica, in connessione con gli usi del segno "meno", porta a confondere "negativo" con "opposto";

e) la difficoltà a riconoscere i quantificatori nelle parole spesso ambigue usate nella lingua (l'articolo indeterminativo e pronome indefinito "uno" ne è un esempio).

Per un lavoro a scuola che affronti tali ostacoli, si possono identificare alcuni obiettivi:

1. Non contrapporre la logica matematica a quella quotidiana, ma far apprezzare attraverso svariati esempi come la prima sia un raffinamento della seconda.

2. Segnalare analogie e differenze di uso, ogni volta che capita, tra connettivi e quantificatori nel linguaggio ordinario e in quello formalizzato.

3. Confrontare le regole descrittive del linguaggio presenti nella grammatica italiana (e inglese, e latina, ecc.) con quelle della logica matematica.

4. Addestrare all'uso del linguaggio matematico come si fa con una lingua qualunque, privilegiando una visione della matematica come costituita da un contenuto più un linguaggio per esprimerlo, anziché come uno strumento con regole procedurali.

5. Dare ampio spazio all'attività argomentativa e dimostrativa, in tutte le parti della matematica e non solo in geometria, e lasciare libertà di congetturare e costruire argomentazioni, piuttosto che proporre dimostrazioni già confezionate da memorizzare.

6. Utilizzare lo strumento della logica in ambito matematico, ma anche nelle scienze, nelle altre materie, nel quotidiano.

Si ritiene inoltre di fondamentale importanza il collegamento che un'attività di tipo logico-linguistico permette di stabilire tra materie diverse. Tale valenza interdisciplinare può risultare preziosa anche in vista della generale ristrutturazione che si prospetta per la Scuola Media in Italia.

Nell'ambito del gruppo di lavoro è stato presentato un progetto di percorso didattico, che è allo studio nel Nucleo di Ricerca di Napoli. Sono stati descritti i materiali finora prodotti e le caratteristiche di quelli ancora in preparazione. Le attività sono pensate per una prima media, ma possono essere svolte anche in anni successivi: in ogni caso si configurano come un primo intervento. Si parte da un questionario da sottoporre agli studenti all'inizio, con lo scopo di individuare le loro conoscenze e intuizioni preesistenti. Esso contiene 6 quesiti, di cui il primo mira a evidenziare i concetti di proposizione e di verità, e gli altri cinque vertono sui connettivi negazione, congiunzione, disgiunzione.

Sono poi distribuite in sequenza una serie di schede che presentano un contesto di storie sempre più articolate. Il lavoro con tali schede conduce via via gli studenti ad assimilare il concetto di proposizione, confrontando fra l'altro il punto di vista della matematica con quello della grammatica italiana, a comprendere la relatività delle nozioni di vero e falso e la loro dipendenza dal contesto e dall'interpretazione. L'idea è che ogni frase assertiva, per la quale ha senso chiedersi se è vera o falsa, è una proposizione, e può essere elemento di un ragionamento. Si tenga presente che invece su molti testi scolastici si tende a riservare questa denominazione soltanto a quelle asserzioni cui è assegnato un valore di verità certo ed uguale per tutti: ciò restringe enormemente e irragionevolmente il campo di utilizzazione della logica.

Nelle schede viene costruita una situazione artificiale che trae spunto dall'isola dei Cavalieri e dei Furfanti di Smullyan, ampliando tale ambientazione e diversificandola in varie scene. Un tale contesto artificiale sembra più adeguato, almeno nella fase iniziale, per concentrare l'attenzione sulle "regole del gioco"; inoltre il riferimento a cavalieri e furfanti consente di ridurre il grado di astrazione insito nelle nozioni di vero e di falso, spostando l'attenzione su giudizi da esprimere su una situazione di fatto e sul comportamento dei personaggi.

Il percorso prevede poi altre schede che trattano i connettivi (congiunzione, disgiunzione e negazione), mirando alla costruzione entro certi limiti spontanea delle loro tavole di verità Alla fine è prevista la somministrazione di un questionario simile a quello iniziale, avente lo scopo di valutare l'incremento delle conoscenze raggiunto.

Particolare attenzione è rivolta alla metodologia di lavoro. L'insegnante è piuttosto un coordinatore dell'attività che non un trasmettitore del sapere. Sono previste attività guidate (produzione di disegni da parte degli alunni, compilazione e raccolta di schede, verbalizzazioni, discussioni di gruppo). Ciò consente fra l'altro di seguire singolarmente gli alunni, e di favorirne il processo di apprendimento. Importante è la dimensione di gioco prevista in molti momenti della attività. Esso ha una doppia valenza didattica: contiene significativi aspetti cognitivi, logici, linguistici, che possono essere sfruttati per introdurre, arricchire, precisare nozioni della matematica, della lingua italiana e di altre materie; ed è prezioso sotto il profilo della motivazione: un'attività avvertita come piacevole crea in classe un clima favorevole all'apprendimento, condizione indispensabile per qualunque impresa didattica efficace.

Un'altra parte della discussione del gruppo di lavoro è stata dedicata al collegamento tra logica e informatica. Si è notato in primo luogo che la logica appare propedeutica alla comprensione delle regole di un linguaggio di programmazione, ed è anzi alle esigenze dell'informatica che si deve probabilmente la diffusione della logica nei programmi delle nostre scuole. Ma il discorso si è poi orientato, inversamente, sui possibili impieghi del mezzo informatico per l'acquisizione di concetti di logica, o infine sui modi per confrontare gli aspetti logici della matematica e della lingua e quelli propri dell'informatica, in maniera che dalla loro interazione venga un rinforzo alla comprensione di entrambi.



Nella scuola dell'obbligo l'informatica e la logica sono trattate spesso con finalità e metodologie diverse. L'informatica è vista come disciplina a sé stante, e per tale motivo non si attribuisce la necessaria importanza ai processi logici contenuti nei diversi linguaggi di programmazione. Il suo insegnamento si riduce all'aspetto formale, all'acquisizione di istruzioni, procedure, standard operativi e specifiche sintassi, e si trascurano sia gli aspetti logici, insiti nei linguaggi di programmazione, sia i contenuti disciplinari individuabili in specifici software (database, foglio di calcolo, Logo, ecc.).

Sono stati a questo punto presentati alcuni esempi di impiego di strumenti informatici e multimediali semplici, ma dalle notevoli potenzialità didattiche, quali il foglio elettronico, il database e la produzione di ipertesti o ipermedia. Partendo dalla semplicità organizzativa di un database o sfruttando la potenzialità operativa del foglio elettronico o ancora lavorando sull'entusiasmo che la multimedialità suscita negli allievi è possibile non solo individuare lo sviluppo dei processi logici che sono specifici dell'informatica e della logica, ma favorire anche il potenziamento delle capacità di osservazione, organizzazione, analisi e rielaborazione personale.

1. La logica e il foglio elettronico (F.E.).

Gli studenti, già in possesso di minime conoscenze sul F.E., sono invitati a stabilire se relazioni di uguaglianza o disuguaglianza tra due espressioni numeriche, impostate con il F.E., sono vere, o ancora quale particolare valore numerico bisogna attribuire ad una variabile, affinché una relazione di uguaglianza o disuguaglianza tra due espressioni numeriche sia soddisfatta. In questa prima fase viene analizzato il valore di verità di una relazione matematica; in modo analogo sono analizzati i valori di verità di relazioni matematiche composte mediante i connettivi logici "e", "o", "non" ed in parallelo vengono analizzate le istruzioni informatiche "and", "or", "not".

Tale attività, quasi naturalmente, conduce gli studenti all'acquisizione o alla riflessione su molteplici concetti (equazione, disequazione, variabile, funzione) ed inoltre favorisce lo studio delle rappresentazioni grafiche.

Il F.E. è diverso da un rigido software didattico preconfezionato, in quanto è flessibile e modificabile. Infatti, in qualsiasi momento, possono essere cambiate sia l'impostazione dell'attività sia il contenuto degli esercizi per finalizzarli alle esigenze della classe. Esso consente inoltre agli studenti di acquisire conoscenze informatiche specifiche (le funzioni del F.E.) che potranno riutilizzare in altri contesti.

2. La logica e il database.

L'attività proposta sul database parte da diverse raccolte di dati (proprietà delle figure geometriche, multipli, caratteristiche di minerali, dati anagrafici) sui quali si è operato con dei filtri logici; in altri termini si sono utilizzati i connettivi logici presenti nel database per filtrare e selezionare le informazioni raccolte. Tale lavoro induce ad una riflessione e ad un approfondimento sulla logica, rappresenta una reale applicazione dei contenuti logici a situazioni concrete e, con l'individuazione di analogie e differenze tra le diverse informazioni raccolte, si presta ad operazioni di classificazione e selezione.

3. Logica e ipermedialità.

Viene infine presentato un ipermedia realizzato in una terza media. Si parte raccogliendo in schede con diversi media le informazioni relative a ciascun alunno. Gli studenti con facilità e piacere lavorano alla creazione dell'ipertesto in quanto l'attività multimediale li sollecita ed entusiasma. Al termine di questa fase di lavoro l'ipertesto propone le schede nell'ordine in cui erano state inserite (ordinamento fisico). Sorge quindi naturale negli allievi l'istanza di individuare esclusivamente le schede rispondenti a precise caratteristiche (filtro logico). Questo consente di avviare un discorso sulla logica in ambiente multimediale ed offre lo spunto per costruire, utilizzando istruzioni informatiche di tipo logico, un filtro di lettura delle schede compilate (aspetto logico).

**Bibliografia**


Barra, M. e Zanardo, A. (a cura di): 1988, La Logica Matematica nella Didattica, atti degli incontri di Logica Matematica, vol. 5, Roma.

Iacomella, A., Letizia, A. e Marchini, C.: 1997, 'Il progetto europeo sulla dispersione scolastica: un'occasione di ricerca didattica.', Ed. Salentina, Galatina (LE).

Marchini, C.: 1989, 'Logica proposizionale nella scuola', *La Matematica e la sua didattica*, **3**(2), 28-37.

Navarra, G.: 1993, 'Itinerari attraverso la logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative', *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, **16**, 731-756.

Smullyan, R.: 1981, Qual è il titolo di questo libro? L'enigma di Dracula ed altri indovinelli logici - Zanichelli, Bologna.

Tortora, R.: 1996, 'Matematica, linguaggio e gioco: un'esperienza interdisciplinare' - in *Cento anni di matematica,* atti del Convegno "Mathesis Centenario 1895-1995" - Palombi, Roma, 417-425.

Tortora, R.: 1998, 'Logica e linguaggio' - Atti del IV Corso MPI in Didattica della Matematica, Lucca, 1997 - Matteoni, Lucca.

Varga, T.: 1993, Fondamenti di logica per insegnanti - Boringhieri, Torino.




## FLESSIBILITÀ DI CABRI: APPLICAZIONI (IN)USUALI


Coordinatori:
A. Anzalone - D. Formica - C. Milone - A. Petrone – N.R.D. Catania


Il gruppo ha evidenziato l'utilizzo di Cabri in campi diversi da quelli tradizionali per verificarne la validità didattica. I temi trattati hanno riguardato la valenza cognitiva delle funzioni di Cabri e le ambiguità connesse a certe costruzioni con riga e compasso, il suo utilizzo come laboratorio virtuale per la rilevazione e l'elaborazione di dati sperimentali, la simulazione di fenomeni fisici e l'applicazione nell'educazione tecnica e artistica.

Nella didattica della geometria è possibile utilizzare Cabri oltre che per l'eliminazione di stereotipi e la "scoperta" di proprietà di una figura geometrica, anche sfruttando la **valenza cognitiva delle sue funzioni per: a)** verificare la correttezza di determinate costruzioni con riga e compasso [6]. Il fatto che Cabri non disegna archi, ma archi di circonferenza può essere considerato positivo in quanto in costruzioni con riga e compasso disegnare solo archi di circonferenza è riduttivo per la visione della figura da costruire e condizionato da informazioni inconsce; **b)** sancire la genericità degli oggetti geometrici [6]. Il fatto che Cabri pretende che sia dichiarata l'intersezione di due oggetti, perché tale intersezione sia utilizzabile in successive costruzioni può essere considerato valido dal punto di vista concettuale, in quanto serve a sottolineare la genericità della posizione degli oggetti geometrici e delle loro eventuali misure. Con Cabri è anche possibile **svolgere una funzione di controllo utilizzabile in diversi contesti: a)** per validare determinate definizioni dei libri di testo. Accettando la definizione di trapezio isoscele che si trova più comunemente sui libri di testo e disegnando con Cabri un trapezio isoscele secondo le indicazioni date dalla definizione, otteniamo non **solo** un trapezio isoscele, ma anche un parallelogramma. Il fatto di dover risolvere questa situazione ambigua ci porta ad ulteriori considerazioni riguardanti oltre che le relazioni fra trapezio isoscele e parallelogramma, anche altre definizioni di trapezio isoscele e di trapezio [5]. **b)** per validare una "figura geometrica" ovvero per ribadire la differenza fra disegno e costruzione geometrica. Il Cabri ci aiuta a "vedere" al di là di ciò che "si vede" con gli occhi, cioè a notare la differenza fra ciò che "è" e ciò che "appare. La validazione può essere effettuata con Cabri, attraverso la funzione di trascinamento [1] [2]. Questo tipo di funzione di controllo può essere sfruttato anche per *****) distinguere fra le proprietà di una figura quelle che la caratterizzano univocamente [3]. ******) discutere su definizioni dei libri di testo per rilevare se ci sono condizioni sovrabbondanti. *******) smascherare paradossi geometrici [4] [7].

Nell'ambito dell'utilizzo di Cabri per la rilevazione e l'elaborazione di dati sperimentali, lo studio che si vuole fare è di tipo quantitativo, quindi da una prima osservazione del fenomeno si passa poi alla rilevazione di dati per mezzo di tabelle, alla loro elaborazione e infine ad una rappresentazione grafica del fenomeno studiato. “Cabrì II” ci da la possibilità di mettere in atto una tale applicazione didattica, grazie soprattutto all'introduzione di nuove procedure, quale l'animazione semplice e multipla, la possibilità di rilevare e tabulare automaticamente i dati relativi al movimento di un oggetto e la capacità di trasportare i dati rilevati sugli assi cartesiani per una rappresentazione grafica. Gli studenti quindi hanno la possibilità di configurare un modello, simulare l'esperimento e dedurne i dati sia qualitativi sia quantitativi. I fenomeni studiati sono in particolare il moto uniforme e il moto uniformemente accelerato con la possibilità di estensione anche al moto armonico. L'ambiente di simulazione è un laboratorio, costituito da un tavolo, sul quale è vincolato a scorrere un carrello (nel caso del moto uniforme) e da un piano inclinato (nel caso del moto accelerato); per ogni esperimento è necessario simulare il trascorrere del tempo mediante un segnatempo e una lavagna visualizza i valori numerici dei dati. Nella fase di osservazione, mediante la procedura “animazione multipla” si può dare un impulso al carrello, avviare contemporaneamente il segnatempo in modo da vedere apparire sulla lavagna i dati relativi a spazio e tempo e i risultati relativi al tipo di simulazione effettuata. Nella fase di rilevazione dei dati, si introduce una tabella e si attiva la procedura per tabulare i dati relativi a spazio e tempo, in modo che una volta eseguita nuovamente la simulazione verranno riportati su di essa tutti i valori relativi all'esperimento. Nella fase di rappresentazione grafica, si introduce una coppia di assi cartesiani e si riportano i dati spazio-tempo su di essi in modo da ottenere, con la ripetizione dell'esperimento, il grafico del moto, che darà come risultato una retta o una parabola a secondo del tipo di simulazione.

Il software grafico “Cabri-Géomètre” è stato utilizzato come supporto didattico per l’apprendimento dei metodi di rappresentazione grafica degli oggetti reali, tradizionalmente affrontati, alla Scuola Secondaria di 1° grado, dagli insegnanti di Educazione Tecnica ed Educazione Artistica. Gli studenti della Media, spesso al loro primo impatto con lo studio sistematico di tali metodi, incontrano difficoltà nell’acquisizione delle abilità grafiche necessarie per realizzare l’immagine bidimensionale (sul foglio da disegno) di un solido, non riuscendo a rendere graficamente ciò che vedono; infatti, come è noto, la prospettiva non è del tutto naturale per i ragazzi e anche nella Storia dell’Arte il disegno prospettico è una “conquista” relativamente recente. Si è pensato, così, di utilizzare “Cabri-Géomètre” nello studio delle scienze figurative per creare un “ambiente” difficilmente riproducibile con altri mezzi, in cui, eseguendo delle costruzioni ben precise, si ottiene il disegno di un oggetto, la visione del quale può essere modificata spostando un punto, per effetto della funzione “trascinamento”. Il movimento, che è una componente essenziale del significato di una figura di Cabri, per cogliere le proprietà geometriche caratterizzanti, in Educazione Tecnica rappresenta uno strumento mediante il quale si riescono a realizzare delle unità didattiche che si trovano, in un itinerario unitario, a metà strada tra la percezione della realtà e la concettualizzazione. Infatti, il software non può sostituire le attività pratiche che l’alunno, soprattutto in questa fascia d’età, deve fare, ma si integra con queste e ne completa alcuni aspetti. Le seguenti tre proposte didattiche possono essere viste come momenti successivi di una stessa attività, che si prefigge come obiettivo la capacità di utilizzare le tecniche del disegno prospettico per realizzare sul piano la rappresentazione di una casa, proprio di quello stereotipo che compare in molte creazioni grafiche degli alunni della scuola dell’obbligo. Gli esempi proposti sono: 1*) Proiezione ortogonale su tre piani di proiezioni di una figura piana (un pentagono). 2) Proiezione ortogonale di una figura solida (una casa con la base parallela al piano orizzontale). 3) Prospettiva accidentale di una casa.* I primi due possono considerarsi come prerequisiti per la terza attività, infatti, per effettuare l’immagine prospettica di un oggetto è necessario tracciare le figure preparatorie, cioè la pianta ed i prospetti. Il lavoro è finalizzato al raggiungimento dei seguenti obiettivi: a) acquisizione delle tecniche di costruzioni del disegno prospettico; b) capacità di individuare i legami tra i vari elementi delle figure preparatorie e dell’immagine prospettica; c) acquisizione della consapevolezza che un oggetto può avere rappresentazioni diverse a seconda del punto di vista da cui si osserva; d) acquisizione della capacità di rappresentazione degli oggetti reali mediante disegni; e) conoscenza e capacità di confrontare diversi tipi di prospettiva.

Per quanto riguarda la simulazione di alcuni fenomeni fisici, nella costruzione delle varie applicazioni, ci si è avvalsi, oltre che delle principali innovazioni di Cabri II, in particolare l’animazione, anche di macro costruite per l'occasione e il cui utilizzo ha snellito le costruzioni stesse. La più significativa di tali macro è la "commutazione" la quale consente di selezionare, in maniera alternativa, due punti, fisicamente distinti ma occupanti la stessa posizione, su ciascuno dei quali può essere impostata una costruzione diversa. Le applicazioni presentate sono delle proposte di simulazione di alcuni processi fisici, i quali, quasi tutti, coinvolgono oggetti in movimento, costruite con la chiara consapevolezza dei limiti impliciti nelle simulazioni ma anche con l'intento di indagare e sfruttare le potenzialità di Cabri II. Le costruzioni proposte sono: 1) Motore a quattro tempi. 2) Verifica dell'equazione delle lenti sottili. 3) Generatore di Van de Graaff. 4) Barra mobile in un campo magnetico uniforme (Induzione elettromagnetica). 5) Spira mobile in un campo magnetico uniforme (Induzione elettromagnetica). 6) Magnete mobile nelle vicinanze di una spira (Induzione elettromagnetica). 7) Spira ruotante in un campo magnetico uniforme (Induzione elettromagnetica). 8) Carica e scarica di un condensatore. In alcune applicazioni (Equazione delle lenti sottili, Spira ruotante in un campo magnetico uniforme, Carica e scarica di un condensatore) oltre alla simulazione del processo fisico, viene effettuata una verifica delle leggi che governano il fenomeno stesso con la rappresentazione grafica delle varie grandezze coinvolte.

**Bibliografia**

[1] Colette Laborde, *"Cabri-Géometrè ou un nouveau rapport à la géométrie"*, XVII Convegno UMI-CIIM, NUMI, Suppl. al n.8-9, 1995, 59.74.

[2] Mariotti M. A., *"Costruzioni in geometria: alcune riflessioni"*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 19B, n.3, giugno 1996.

[3] Elena Lanzi e Angela Pesci, *"Un'analisi a priori dell'utilizzo di Cabri nella scelta di proprietà per definire figure: il caso del rettangolo"*, Atti del 2° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Università di Parma 1997.

[4] Italo Ghersi, *"Matematica dilettevole e curiosa"*, Hoepli, pp. 561/569

[5] Michele Cipolla, *"Matematica ricreativa"*, pag.524, in Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi, vol. III, parte II

[6] Carmela Milone, *"Strategie 'anche informatiche' per superare ostacoli di apprendimento della geometria"*, Bollettino Mathesis della sezione di Catania, 12 gennaio 1998, anno III, numero1

[7] Carmela Milone, *"Paradossi geometrici"*, Bollettino di Cabrirrsae, giugno 1998, N.16

[8] R. Arnheim - *Arte e percezione visiva* - Feltrinelli, Milano 1977

[9] E.. Panofsky - *La prospettiva come "forma simbolica"*- Feltrinelli, Milano 1990

[10] S. Malara - *Disegno geometrico* - Zanichelli

[11] F. Speranza P. Vigo - *Spazi dell'Arte, spazio della Matematica* - Atti convegno "Arte e Matemetica" 1997

[12] M.A. Mariotti - *Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore: il contributo di Cabri-Géometrè* - L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate -Vol. 21B - N.3 ñ giugno 1998

[13] F. Curti - *L'Omologia* - CABRIRRSAE -N.12 - giugno 1997



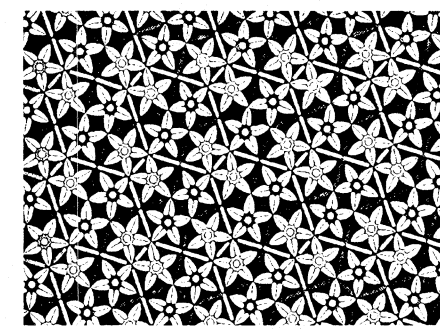
GRUPPO DI LAVORO SCUOLA MEDIA-BIENNIO SUPERIORI

## MATEMATICA ED ESPRESSIONE ARTISTICA

## TASSELLAZIONI PENTAGONALI

Coordinatore: P. Vighi[1]

Prima di iniziare i lavori di gruppo si è illustrato, attraverso numerosi esempi, come scoprire o ritrovare concetti matematici nelle opere dell'artista olandese M. C. Escher (1898-1972) e si è discusso sulle possibili implicazioni didattiche. In particolare, si è visto come sia possibile accostare all'espressione artistica la matematica, mostrandola come strumento per organizzare, razionalizzare l'osservazione o la realizzazione di disegni basati su tassellazioni. Successivamente i partecipanti (che erano all'incirca cinquanta) si sono divisi in gruppi (uno formato da insegnanti di scuola media inferiore, tutti gli altri da insegnanti di scuola superiore). È stata consegnata loro una fotocopia del disegno N. 132 di Escher, ad inchiostro ed acquerello, eseguito a Baarn nel 1967 (che fu poi utilizzato per realizzare una delle colonne piastrellate del Nuovo Liceo della città), sviluppato a partire da un articolo di F.Haag del 1923 su suddivisioni regolari del piano mediante pentagoni ed esagoni. Ovviamente la fotocopia era in bianco e nero ed andava così perduta una variabile, il colore (bianco, nero, rosso e azzurro) che avrebbe consentito un'ulteriore analisi in termini di simmetria.



La figura è una riproduzione del disegno citato. Ciò che colpisce a prima vista sono gli esagoni intrecciati, alcuni con contorno scuro (rosso), altri con contorno chiaro (azzurro), che compongono il disegno, ma osservando più attentamente si vede che ciascuno di essi è formato da quattro pentagoni congruenti, irregolari, ma con un asse di simmetria, con alcuni angoli retti, gli angoli rimanenti che misurano 120°, con quat-tro lati congruenti ecc.

Allo scopo di far osservare queste ed altre particolarità e di far scoprire proprietà geometriche della tassellazione, ho approntato le due schede seguenti, ed ho consegnato a ciascun gruppo l'una o l'altra, da utilizzare come traccia di lavoro. Ho così "posto in situazione" gli insegnanti, in condizioni analoghe a quelle in cui avrebbero potuto trovarsi i loro allievi.

La Scheda 1, forse più adatta nella scuola media inferiore, propone innanzitutto una riflessione sulle tassellazioni pentagonali, sul fatto che pentagoni regolari non possono ricoprire senza buchi né sovrapposizioni un piano e, in particolare, sul pentagono utilizzato dall'artista (punti 1,2,3). Per riprodurre fedelmente quel tipo di pentagono occorre osservarne lati e angoli, misurarli, ... La costruzione diventa poi più complessa se si usano solo riga non

[1] Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma.

graduata e compasso (punti 4, 5); anziché usare questi strumenti, si può proporre di eseguire una costruzione al computer, mediante il programma Cabri-Géomètre. Un'idea può essere quella di disegnare innanzitutto un esagono regolare (che ha angoli di 120°) da cui ricavare un pentagono simile a quello di Escher. Per ottenere il disegno richiesto occorre in ogni caso far ricorso alle conoscenze geometriche e ad alcuni elementari teoremi di geometria. Una volta disegnato il pentagono sullo schermo, si può ricostruire la maglia del disegno usando opportunamente le funzioni "copia" e "incolla".
La scheda chiede infine di individuare prima "elemento-base" e poi "elemento minimo" del disegno e di descriverlo in termini di trasformazioni geometriche (punti 6,7,8).

**SCHEDA 1**

1) Con quali tipi di poligoni regolari è possibile tassellare il piano ?
2) È possibile tassellare il piano con pentagoni regolari ? Perché ?
   E con pentagoni irregolari ? Se sì, fai qualche esempio.
3) Osserva il disegno di Escher: come vedi, l'artista l'ha realizzato basandosi su di una tassellazione a pentagoni. Perché pentagoni di questo tipo tassellano il piano ? Che caratteristiche hanno ?
4) Dopo aver individuato le caratteristiche geometriche del pentagono su cui si basa la tassellazione, disegnane uno tu usando riga, compasso e goniometro.
5) Sapresti ripetere la costruzione precedente usando solo riga e compasso ?
6) Fai una copia su lucido del "motivo-base", cioè dello "stampino pentagonale con un fiore all'interno" mediante il quale probabilmente il disegno è stato realizzato. Quali movimenti del motivo-base consentono di ricostruire (senza badare ai colori) l'intero disegno ? Descrivili prima liberamente e poi cercando di utilizzare il linguaggio delle trasformazioni geometriche.
7) Il pentagono presenta delle simmetrie ? Se sì, quali ?
   È possibile individuare un motivo-base più piccolo del pentagono a partire dal quale ricostruire l'intero disegno ?
8) Quali movimenti occorre far compiere all'elemento minimo (individuato nel punto precedente) per ricostruire il disegno ? Descrivili utilizzando il linguaggio delle trasformazioni geometriche.

La Scheda 2 presuppone che lo studente abbia già lavorato sulle tassellazioni viste sia come coperture del piano mediante poligoni (punti 1,2) che come decorazioni a cui soggiacciono reticoli (punto 3). Seguendo le indicazioni di lavoro si scopre che i tasselli sono quadrati i cui centri sono punti in cui convergono gli angoli retti di quattro distinti pentagoni. I lati che individuano tali angoli secano ciascun quadrato in quattro parti congruenti, una qualunque di esse è l'elemento minimo (punto 4). A partire da questo disegno, piegando opportunamente il foglio, si può perciò costruire un quadrato. Dopo aver individuato la struttura su cui si basa il disegno ed il gruppo di trasformazioni soggiacente (punti 3, 4,5), è possibile scrivere nel piano cartesiano le equazioni del generatore del gruppo (punto 6): $x' = -y$, $y' = x$.



**SCHEDA 2**

1) Osserva attentamente il seguente disegno e, senza badare ai colori, individua il "motivo-base" (minimo) mediante il quale è stato realizzato. Fanne una copia su lucido e controlla se si tratta effettivamente di un motivo che consente di ricostruire l'intero disegno.
2) Descrivi quali "movimenti" occorre far compiere al motivo-base per ricostruire l'intero disegno. Ripeti la descrizione utilizzando il vocabolario delle trasformazioni geometriche.
3) Come sai, ad ogni tassellazione regolare del piano soggiace un reticolo, che è individuato da due vettori-traslazione. In questo caso quali possono essere i due vettori di base del reticolo ? (Suggerimento: scegli un motivo-base ed individua le traslazioni che fanno passare da questo a quelli "circostanti" e con le stesse caratteristiche). Che tassellazione di base hai individuato ?
4) Il tassello che hai trovato è l'elemento minimo, cioè il più piccolo elemento possibile utilizzando il quale sia possibile ricostruire il disegno ? (Suggerimento: la parte interna al tassello presenta delle simmetrie ? può essere ulteriormente suddivisa in parti congruenti ?...)
5) Quali movimenti occorre far compiere all'elemento minimo per ricostruire il disegno ? Descrivili utilizzando il linguaggio delle trasformazioni geometriche.
6) Scrivi, in un sistema di riferimento cartesiano, le equazioni delle trasformazioni che, applicate al motivo-base, consentono di tassellare il piano.

BIBLIOGRAFIA


B.Ernst, The magic mirror of M.C.Escher, BallantineBooks, New York, 1976.
M.C.Escher, The grafic work of M.C.Escher, BallantineBooks, New York, 1971.
M.C.Escher, Grafica e disegni, Benedikt Taschen, 1990.
M.Gilardi, I "pattern design" e i loro gruppi, Periodico di Matematiche, 2-3, 1987, pp. 57-65.
M.Gilardi, Le strutture algebriche: applicazioni all'arte e alla musica, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, vol. 14, 11/12, 1992, pp. 1121-1162.
F.Hernández Rojo, L'influenza dell'Alhambra nell'opera di Escher, Bollettino dei docenti di matematica 36, Repubblica e Cantone del Ticino, mag 1998, pp. 35-52.
J.L.Locher (a cura di), Il mondo di Escher, Garzanti, 1978.
A.Sartore Dan, I disegni periodici in geometria, Edizioni Centro Studi Erickson, Trento, 1998.
D.Schattschneider, Visioni della simmetria, Zanichelli, 1992.
F. Speranza, Il valore conoscitivo della geometria, Periodico di Matematiche, 4, 1994, pp. 5-18.
P.Vighi, Dalle opere di Escher alle trasformazioni geometriche: Comportamenti degli allievi nella presentazione di un itinerario didattico, Didattica, N.1, III, 1996, pp.75-85.
P. Vighi, La matematica nelle opere di M.C.Escher, in "Arte e matematica: un sorprendente binomio" Atti Convegno Nazionale Mathesis, Vasto (Ch) 14-16 marzo 1997, pp. 289-295.
H.Weyl, La simmetria, Feltrinelli, 1962.

## UN SOFTWARE PER UNA TEORIA

Nucleo di Ricerca Didattica di Pisa
(responsabile M. A. Mariotti[1])

Abstract. This paper aims to present geometrical constructions in a software environment as a specific context, within which the sense of theory may emerge. The theoretical meaning of geometrical construction is not spontaneous, but can emerge form the activities that pupils perform. The idea of construction evolves into the idea of theorem, passing through the need of justifying towards the idea of validating within a geometrical system. Our results confirm that the specificity of the Cabri environment is determinant in order to make the sense of justification evolve from an empirical verification towards a theoretical proof. Protocols' analysis show the possible evolution of a justification in a proof as well as the fact that this evolution is not expected to be simple and spontaneous.

### Introdurre i ragazzi alla dimostrazione

Obiettivo di questo contributo è la presentazione di un progetto di ricerca-innovazione al quale da alcuni anni lavora il Nucleo di Ricerca Didattica di Pisa. Nella sperimentazione sono state coinvolte alcune classi del primo biennio dalla scuola superiore, Liceo Scientifico e Liceo Classico[2].

Un approccio deduttivo alla geometria consiste nella costruzione di un sistema di proprietà geometriche tra loro correlate in modo coerente; in particolare, consiste nella differenziazione tra assiomi e teoremi: i primi, da considerare come primitivi e spesso corredati da ampie giustificazioni di plausibilità, i secondi invece che richiedono una *dimostrazione*. In altre parole la Geometria viene a costituirsi come sistema: si basa su assunti primitivi (assiomi) e si allarga a nuove conoscenze attraverso il metodo della 'dimostrazione', che permette di assumere nuovi enunciati a patto che siano logicamente legati con i precedenti.

Il metodo deduttivo messo a punto negli elementi di Euclide è giunto a noi con intatta potenza e rappresenta il punto di partenza di un metodo caratteristico dell'esposizione scientifica e matematica in particolare. Seppure dobbiamo nettamente distinguere tra processi euristici di costruzione del sapere e processi di sistemazione rigorosa di questo sapere, dobbiamo risconoscere che il metodo deduttivo è da sempre un elemento integrante del sapere matematico. Il trascurare questo aspetto significa impoverire, se non addirittura snaturare, la matematica. E' per questo motivo che riteniamo importante cercare una via per rendere gli studenti

---

[1] Dipartimento di Matematica- Università di Pisa, e-mail: mariotti@dm.unipi.it

[2] Il Prof. P. Nardini segue la sperimentazione al Liceo Scientifico "A. Vallisneri" di Lucca; la Prof. D. Venturi segue la sperimentazione al Liceo Scientifico di Forte dei Marmi, la Prof. M.P. Galli segue la sperimentazione al Liceo Classico di Viareggio.



partecipi di quella che pensiamo sia un'attività fondamentale - anche se non l'unica! - del mondo matematico.

Certo è esperienza comune di chi insegna la difficoltà che i ragazzi incontrano di fronte ai primi teoremi e alla richiesta di fornire una 'dimostrazione'; ma la presenza di tali difficoltà non ci sembra possa essere un motivo sufficiente per privare gli allievi di questa esperienza, con in più il risultato di stravolgere, almeno in parte, la natura del sapere matematico.

Tra coloro che si occupano di didattica si è ampiamente discusso sull'opportunità o meno di un approccio deduttivo alla geometria e alla matematica in genere. Non possiamo entrare nella discussione di questo problema, per la quale rimandiamo a [5][6], ci limiteremo ad illustrare in che senso il nostro progetto avanzi una proposta di soluzione a questo problema: in particolare cercheremo di chiarire il ruolo che gioca il contesto fornito dal software Cabri nella costruzione del significato di teorema in geometria.

### Geometria intuitiva e geometria deduttiva

Quando i ragazzi terminano la scuola media e passano alla scuola secondaria superiore hanno acquisito un certo bagaglio di conoscenze geometriche; secondo un approccio cosiddetto intuitivo, i ragazzi hanno scoperto (osservando) un certo numero di "fatti", che di solito risultano possedere un alto grado di 'evidenza' e che comunque una volta acquisiti assumono un carattere assoluto di verità.

Questo non significa che spesso l'insegnante non abbia accompagnato la presentazione di proprietà geometriche con giustificazioni, ma lo scopo di tali giustificazioni è sempre stato quello di convincere i ragazzi della loro verità e della loro evidenza, non certo quello di introdurre gli allievi ad un metodo deduttivo. D'altra parte, non mai è stato richiesto ai ragazzi di giustificare le proprie conoscenze, al più ci si è limitati a verificare che tali conoscenze siano state acquisite. Sorge allora un problema didattico fondamentale, che può avere valenza assai generale:

*come trattare la delicata relazione tra la base di conoscenze geometriche che i ragazzi hanno e un approccio a queste conoscenze secondo una prospettiva teorica?*

Quando si voglia trattare con un sistema deduttivo, due sono gli aspetti rilevanti tra loro interconnessi; da un lato, l'idea di **dimostrazione**, dall'altro, l'idea di **teoria** (intendendo con questo termine un qualsiasi sistema teorico, che può avere sia carattere globale che locale rispetto ad un corpus di conoscenze matematiche). La dimostrazione prende senso dalla teoria e viceversa; cosicché un approccio deduttivo presenta due tipi di problemi di senso tra loro correlati:

*il senso della dimostrazione e il senso della teoria.*

## Intuizione e deduzione nell'educazione geometrica

Uno dei punti cruciali del confronto tra approccio intuitivo ed approccio deduttivo in geometria è il ruolo giocato dal "giustificare", ovvero dallo spiegare, argomentare, sostenere, verificare ...

Quando si segua un approccio 'intuitivo', di solito non si richiede gli allievi di giustificare le proprie conoscenze, esse sono immediate, evidenti, vere senza alcune dubbio: intuitive [3].

Un'intuizione per sua natura contrasta con l'idea stessa di giustificazione: non appena qualcosa diventa evidente cessa ogni necessità di darne una motivazione, che per questo può anche essere cancellata. Di conseguenza, l'enfasi posta sull'intuizione può costituire addirittura un ostacolo alla comprensione del senso stesso di dimostrazione. D'altra parte, un approccio deduttivo è certamente radicato nella pratica della giustificazione, ma giustificare e dimostrare sono processi di natura assai diversa e di tale diversità gli allievi dovranno prendere coscienza [1], [2].

La nostra proposta offre un tentativo di soluzione di questi problemi e l'elemento chiave è costituito dall'utilizzazione del micromondo Cabri-Géomètre, come particolare ambiente che offre una mediazione per la costruzione del significato di Teorema Matematico [5].

## Costruzioni geometriche in ambiente Cabri

Una costruzione geometrica ha un significato teorico che va al di là della sua controparte concreta costituita dal disegno realizzato sul foglio: ad ogni costruzione geometrica corrisponde un teorema che ne dimosra la correttezza. La relazione tra costruzioni e toeremi della geometria che ne foniscono una valdazione è certamente complessa e non immediata [4], ma l'obiettivo del progetto consiste prorprio nello sviluppare il senso teorico di una costruzione e così facendo sviluppare più in generale il significato di teorema e di teoria. A questo scopo uno strumento fondamentale di mediazione è fornito dal software Cabri géomètre.

Tale micromondo dinamico incarna il sistema di relazioni proprio della geometria Euclidea ed in particolare della geometria 'riga e compasso', e in effetti il micromondo si presenta come ambiente grafico nel quale oltre ai comendi di disegno puro sono disponibili comandi specifici corrispondenti alle operzanioni base eseguibili con riga e compasso. Due sono gli aspetti principali che caratterizzano l'ambiente: disegnare figure con i comendi disponibili nei vari menu e utilizzare la funzione trascinamento che permette di trsformare la figura disegnata, facendo variare gli elementi base e mentendo le relazioni geometriche stabilite attraveso l'uso dei comandi.

Il significato di una "figura di Cabri" consiste allora nel concepire una figura in termini delle proprietà geometriche che la definiscono e nello stesso tempo accettare la funzione trascinamento come elemento di definizione intrinseco della figura.

In questo senso un compito di costruzione può considerarsi risolto se e solo se la figura di Cabri che si ottiene sullo schermo passa il test del trascinamento. D'altra parte se una figura di Cabri fornisce una soluzione ad un poblema di costruzione



significa che esiste un teorema che ne stabilisce la correttezza: *giustificare* una costruzione corrisponde a dimostrare un teorema.

Il nostro progetto dunque [4], [5] ha come obiettivo introdurre l'idea di costruzione geometrica e sviluppare da essa l'idea di teorema, passando dalla necessità di giustificare all'idea di dimostrare una costruzione all'interno di una teoria. Il punto cruciale sta nel fatto che ciò che deve essere validato è proprio il processo di costruzione e non il prodotto di tale costruzione.

*Quando si usa la funzione di trascinamento:*
*perché certe costruzioni si mantengono e altre no?*

Rispondere a questa domanda significa andare oltre l'accettazione della funzione di trascinamento come mezzo di verifica, significa spostare l'attenzione dalla verifica per trascinamento alla giustificazione di tale verifica.

## Lo sviluppo del significato di dimostrazione

Una volta stabilito ed accettato il significato di costruzione per una figura di Cabri, anche il significato di *giustificazione* ci si aspetta che evolva; l'evoluzione dovrà riguardare gli aspetti seguenti:

- la necessità di giustificare
- l'idea che una giustificazione deve essere fornita all'interno di una particolare teoria

Come già osservato il software Cabri incorpora la Geometria Euclidea nel senso che l'uso dei comandi corrisponde alla disponibilità del sistema completo di assiomi Euclidei, anzi se il menu è completo oltre agli assiomi disponiamo anche di qualche teorema da essi deducibile; ad esempio al comando "bisettrice" corrisponderà il teorema che stabilisce l'esistenza della bisettrice di un angolo.

Il fatto che la teoria sia immediatamente disponibile nella sua interezza presenta alcune difficoltà, quando si voglia introdurre gli allievi all'idea di teoria; infatti, quando si ha di fronte il menu completo, appare particolarmente complesso controllare di volta in volta cosa della teoria è disponibile e cosa non lo è. La scelta didattica che è stata fatta nel progetto consiste nell'adattare il menu disponibile alle nostre particolari esigenze: gli allievi sono stati resi partecipi della costuzione dell'assiomatica e dei corrispondenti comandi che, a partire da un menu completamente vuoto, vengono introdotti mano a mano che gli elementi della teoria si arricchisce. In questo modo il sistema teorico ed il corrispondente menu del software si costruisce lentamente: passo passo la complessità si accresce in modo che sia controllabile dagli allievi.

L'analisi condotta sui protocolli deli allievi delle classi sperimentali ha confermato le ipotesi principali del nostro progetto [6], mostrando l'evoluzione del significato di cotruzione geometrica: da una prima idea di processo concreto per ottenere un disegno, a procedura teoerica che ha la sua giustificazione all'interno di un particolare sistema di proprietà. Un ruolo fondamentale è svolto dal contesto specifico offerto dal micromondo Cabri: la mediazione offerta dai comandi e dalla funzione trascinamento permette l'emergere e lo svilupparsi del significato di teoria e di dimostrazione.

References

[1] Balacheff, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Ed. Stud. in Math.* Vol. 18, n. 2, p. 147-76.

[2] Duval, R. (1992-93), Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?, in *Petit x*, n. 31, pp. 37-61.

[3] Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, Reidel

[4] Mariotti, M.A. (1996), Costruzioni in geometria, su *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* **19B**, n. 3, pp. 261-88.

[5] Mariotti M.A., Bartolini M, Boero P., Ferri F. & Garuti R. (1997), Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th PME Conference,* Lathi.

[6] Mariotti, M.A. (1998), Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore, in corso di pubblicazione su *L'ins. della mat. e delle Sci. int.* **21B**, pp. 209-252.



# L'OMOLOGIA TRA MATEMATICA E DISEGNO SUPPORTATA DAL SOFTWARE CABRI

di Lamberti Laura* - Bonarelli Roberta*

La rappresentazione sul quadro di una prospettività spaziale, determina una corrispondenza piana l'**omologia**; essa riveste notevole importanza, in particolare, per il legame fra la geometria piana e quella dello spazio tridimensionale, fondamentale per la rappresentazione; allo stesso tempo si presta ad essere trattata sia nella forma grafico-sintetica propria del disegno che in quella teorico-analitica propria della matematica. E' pertanto utile per lo studente, sia ritrovare nelle varie rappresentazioni una procedura comune che faccia riferimento alle proprietà dell'omologia stessa, sia abituarsi a pensare "in tre dimensioni" mentre disegna "in due", per non perdere di vista l'origine spaziale della rappresentazione stessa.

La formazione dell'ombra di un oggetto offre uno spunto semplice ed intuitivo per introdurre in un biennio alcuni concetti riguardanti la prospettività e l'omologia. Infatti l'ombra di una figura piana su di un altro piano è un esempio di prospettività; la rappresentazione sul quadro di tale prospettività determina una corrispondenza omologica fra gli oggetti rappresentati. Supponiamo, per esempio, di avere una finestra rettangolare, con una grata, in una data parete, una lampada non appartenente alla parete e l'ombra che si produce sul pavimento.

Semplifichiamo e schematizziamo tale situazione reale mediante un modello geometrico e chiamiamo **F** la finestra, **F'** la sua ombra, $\pi$ la parete, $\alpha$ il pavimento e **S** la sorgente luminosa. Mediante un **ribaltamento** (che non è altro che una prospettività di centro improprio con direzione perpendicolare al piano bisettore i due piani ) possiamo riportare sul piano $\pi$, detto **quadro**, sia l'ombra che il punto S; si viene così a determinare una corrispondenza fra i due piani coincidenti, $\pi$ ed $\alpha$ ed, in particolare, fra i punti della finestra F e della sua ombra ribaltata che per semplicità continuiamo a chiamare F'.

Si possono fare diverse osservazioni: la corrispondenza che ad ogni punto di F associa la sua ombra su F' è biunivoca e trasforma rette in rette (collineazione), c'è un punto **O** proiezione di S sul quadro, centro di un fascio di rette congiungenti punti corrispondenti e pertanto unite, c'è una retta **u** proiezione della retta intersezione fra $\alpha$ e $\pi$ che coincide con se stessa e pertanto luogo di infiniti punti uniti in cui si tagliano rette corrispondenti: tale corrispondenza è un'**omologia piana**.

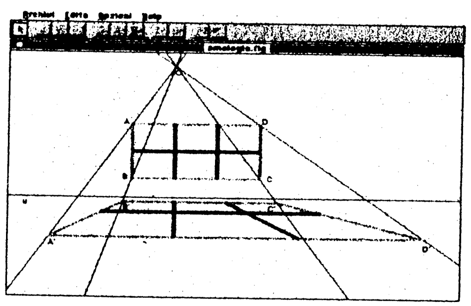
Una proprietà fondamentale dell'omologia, utile per la costruzione di figure, è che *due punti corrispondenti sono allineati con il centro e due rette corrispondenti si*

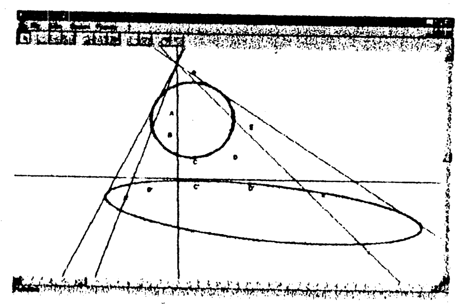
*ITG "Pacinotti" di Bologna.

*tagliano sull'asse*. Si può dimostrare che un'omologia è univocamente determinata dal centro, dall'asse e da due elementi distinti corrispondenti, pertanto la costruzione di un'omologia sia con carta e matita che con del software, per esempio Cabri, può essere determinata conoscendo soltanto queste poche informazioni, basta assegnare una retta u (asse), un punto O (centro), una coppia di punti corrispondenti A ed A' e, per ogni punto B della figura, si ripete la stessa procedura per determinare il corrispondente B':

- si traccia la retta b passante per O e per B, si traccia la retta r passante per A e per B,
- si determina l'intersezione H fra la retta r e l'asse u, si traccia la retta r' per H e per A',
- si determina l'intersezione B' fra b ed r'.

Tramite Cabri è possibile inoltre memorizzare questa procedura mediante una *macro*. Come esempio, vengono mostrate le immagini omologiche del modello geometrico di una finestra con grata e di una circonferenza:





Come caso particolare si può considerare quello in cui la sorgente luminosa si allontana sempre più: il sole, ci offre un ottimo esempio per immaginare tale realtà. Si tratta ancora di un'omologia, in cui però il centro è diventato un punto improprio e le rette contenenti punti corrispondenti sono parallele; in tal caso si ha **l'omologia affine** o **affinità omologica**. In particolare se i raggi proiettanti appartengono ad un piano perpendicolare al piano della figura si parla di **affinità omologica ortogonale** e, se le distanze dall'asse di due punti corrispondenti sono uguali di **simmetria assiale**.

Supponiamo poi di avere la solita finestra F nella parete $\pi$, la sorgente luminosa puntiforme esterna ad essa e l'ombra che si produce, anziché sul pavimento, sulla parete opposta $\alpha$, parallela al piano $\pi$. Questa volta, essendo i piani paralleli, per riportare le due immagini sullo stesso piano, effettuiamo una traslazione che porti il piano $\alpha$ a sovrapporsi al quadro $\pi$ e, nella stessa direzione, proiettiamo anche la sorgente S su $\pi$. Anche la traslazione di un piano $\alpha$ può essere pensata come una proiezione su $\pi$ da



un punto all'infinito individuato dalla direzione della traslazione stessa. In questo caso la omologia avrà l'asse improprio e pertanto rette corrispondenti sono parallele. Siamo di fronte all'**omotetia**. Come caso particolare dell'omotetia si può considerare quello in cui una coppia di punti corrispondenti si trova ad una stessa distanza dal centro, ma da parti opposte, in tal caso si tratta di **una simmetria centrale**.

Infine come ultimo caso, se centro ed asse sono entrambi impropri, l'omologia si riduce ad una **traslazione**.

In ognuno dei casi analizzati, il fatto che asse o centro siano elementi propri od impropri, si ripercuote sul comportamento di punti e rette corrispondenti, infatti se il centro è improprio, le rette che contengono punti corrispondenti sono parallele, come avviene nell'affinità omologica e nella traslazione, così come se l'asse è improprio, le rette corrispondenti sono parallele, come accade nell' omotetia e ancora nella traslazione. Quanto detto, oltre a fornire un valido aiuto per la costruzione della figura immagine, può essere utile anche per fare il percorso a ritroso, rappresentabile con un diagramma di flusso, e scoprire l'eventuale trasformazione geometrica che lega due figure date. Tutto ciò mette in risalto come la maggior parte delle trasformazioni che si incontrano in un biennio di media superiore siano casi particolari dell'omologia.

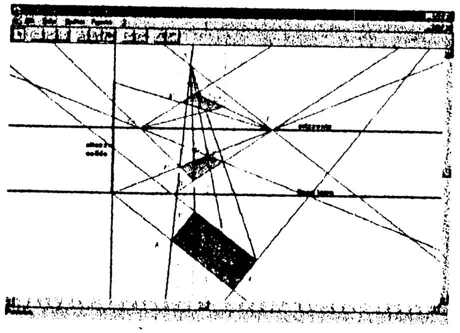
Un altro aspetto sicuramente interessante delle trasformazioni geometriche è legato allo studio degli **invarianti** sia perché consente di individuare proprietà *uguali* fra figure *diverse*, sia perché permette di sostituire figure complesse ad altre più semplici. In tal senso può essere fornita una tabella a doppia entrata con le varie trasformazioni omologiche e gli invarianti più importanti che si possono individuare facendo analizzare ai ragazzi figure omologiche mediante Cabri: la dinamicità del software fornisce infatti una certa immediatezza per tale ricerca.

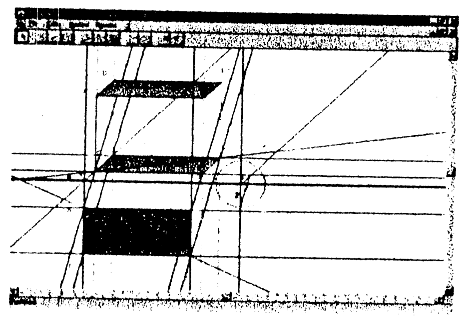
## L'OMOLOGIA NELLA PROSPETTIVA E NELL'ASSONOMETRIA

I principi della corrispondenza omologica possono essere individuati e applicati anche nella prospettiva. In particolare essa si presta alla rappresentazione di figure prismatiche rette. In tal, caso tra la proiezione ortogonale della base ribaltata sul quadro e la stessa in prospettiva, intercorre un'**omologia** avente per centro il ribaltamento del punto di vista sul quadro, per asse la linea di terra e per elementi corrispondenti una retta già definita in prospettiva (perché di essa si ricavano facilmente traccia e fuga) e la stessa ribaltata.

La base inferiore e quella superiore del prisma, tra di loro parallele e orizzontali, si corrispondono in una **affinità ortogonale** che ha per asse la linea dell'orizzonte, il centro improprio con direzione verticale e per coppia di elementi corrispondenti, gli spigoli orizzontali di una faccia laterale. Determinata quindi un'unica volta l'altezza del solido, è possibile ricavare l'intera base superiore.

Semplificando molto il problema, tra l'**assonometria** di una figura piana (per esempio la base di un parallelepipedo) e il suo ribaltamento sul quadro, sussiste una corrispondenza omologica di tipo **affine**. Supponendo di aver fissato convenzionalmente la direzione degli assi cartesiani ed il rapporto tra le grandezze sugli stessi, la congiungente i due punti corrispondenti determina la direzione del centro improprio dell'affinità, mentre l'asse è la linea d'intersezione dei due piani. Inoltre la corrispondenza, che lega le due basi di tale solido, è una **traslazione** con direzione verticale. Il riconoscere quindi queste proprietà omologiche permette spesso di semplificare la costruzione dell'intera figura. La costruzione delle stesse, affidata a Cabri, permette di ricavare intuitivamente una serie di situazioni differenti variando gli oggetti base e analizzarne i risultati grafici.






*Bibliografia essenziale*:

- Texas Instruments - Guida a Cabri Geomètre 2
- Università "La Sapienza" - Pacchetti formativi per didattica disegno negli ITG-MPI
- M.Villa - Elementi di geometria proiettiva grafica - ed. Cedam
- Lombardo Radice- Il metodo matematico- ed. Principato




# L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA DELLO SPAZIO. LA SFERA.


G. Barbi - F. Casolaro - E. Castagnola
A. Di Gennaro - V. Facchini - F. Gialanella
A. Lanzillo - A. Morelli - A. Olivello
A. Rotunno - N. Tedesco - A. Trampetti


Il Nucleo di Ricerca Didattica dell'Università di Napoli sta lavorando per la realizzazione di un modulo sulla sfera, articolato in varie unità didattiche. L'obiettivo finale è la costruzione di un ipertesto di agevole consultazione, eventualmente con l'uso dei nuovi software facilmente reperibili.

Le unità didattiche in cui si articola il modulo sono:

*a*) La geometria sferica.
*b*) La trigonometria sferica.
*c*) La sfera e le geometrie non euclidee.
*d*) La sfera e le carte geografiche.
*e*) Problemi di misura relativi alla sfera.
*f*) La geometria dei vettori in relazione alla sfera.
*g*) La sfera nei testi scolastici.
*h*) La sfera nella storia.

La presentazione di tali unità didattiche, con alcune proposte di lavoro e di discussione, è avvenuta utilizzando come supporto visivo un software, realizzato nell'ambito del gruppo, per la rappresentazione di proprietà della sfera, in particolare quelle concernenti proiezioni e sezioni.

A Orvieto, nell'ambito dei lavori di gruppo, sono state proposte e illustrate alcune di queste unità. In riferimento alla prima ci si è soffermati, fra l'altro, sulle proprietà degli archi di circonferenze massime di essere linee di minimo cammino (geodetiche). Si è visto come la questione si collega alla proprietà delle lunule di avere l'arco di raggio maggiore di lunghezza minore rispetto a quella dell'arco di raggio minore. In particolare è stata studiata la funzione che fornisce la lunghezza dell'arco di circonferenza che congiunge due punti in funzione del raggio. Inoltre si è visto come i teoremi che riguardano i triedri e, in generale, gli angoloidi diventano proprietà dei triangoli e dei poligoni sferici (relazioni fra lati ed angoli).

In relazione al punto *b*) si è proposta la formula fondamentale della trigonometria sferica utilizzando un'impostazione analitica basata sulla formula che fornisce il coseno dell'angolo di due rette mediante i loro coseni direttori.

Per quanto riguarda il collegamento della sfera con le geometrie non euclidee, si sono richiamati i concetti fondamentali riguardanti l'impostazione assiomatica della geometria, in particolare il concetto di sistema assiomatico e di modello. Si è presentato inizialmente un modello di geometria fondata solamente sugli assiomi di incidenza, considerando come rette le circonferenze sulla sfera passanti tutte per uno stesso punto e private proprio di tale punto. In seguito sono state introdotte le relazioni di ordinamento e di congruenza, seguendo un'assiomatica a base metrica, fino ad arrivare alla cosiddetta geometria neutrale (o assoluta). La sfera è stata utilizzata come tramite per dimostrare l'isomorfismo tra i vari modelli di geometria iperbolica, utilizzando, in particolare, le proprietà della proiezione stereografica. Infine la sfera ha fornito un modello di geometria ellittica con l'interpretazione del "punto" come coppia di punti diametralmente opposti (antipodali).

L'unità didattica sulle carte geografiche si è prestata particolarmente per collegamenti interdisciplinari (storia, scienze della terra, geografia). Sono state proposte e discusse le proprietà della proiezione stereografica di una sfera: angoli corrispondenti hanno uguali ampiezze, una circonferenza viene trasformata in una circonferenza. Insieme a questo tipo di proiezione sono state considerate anche altri tipi di proiezioni (ortografiche, di sviluppo, modificate). Si sono chiarite le proprietà caratteristiche di ciascuna di esse (isogonia, equidistanza, equivalenza) utilizzate nella realizzazione di carte geografiche rispondenti a diverse esigenze.

Non tutte le unità didattiche di cui è composto il modulo sono state illustrate, per dare maggiore spazio agli interventi dei partecipanti al lavoro di gruppo, tra i quali è da segnalare quello del Prof. Franco Eugeni, che ha illustrato le formule per il calcolo dell'area e del volume di un'ipersfera.



# COMPUTER E MODELLIZZAZIONE MATEMATICA

Laura Capelli* - Stefania Delucchi*
Sabina Ghio* - Simonetta Greco*

Il lavoro di gruppo si è sviluppato su tre temi, modelli differenziali, modelli probabilistici e visione, con attività volte a stimolare riflessioni su: # gli intrecci con altre discipline che il tema consente, # la significatività didattica dell'impiego del computer, # i problemi didattici di sfasamento/duplicazione di argomenti nei rapporti tra matematica e altre materie.

Qui presentiamo, sinteticamente, solo le attività proposte. Per una documentazione più estesa rinviamo a: http://www.dima.unige.it/macosa/umi.

Alcune considerazioni didattiche svolte durante il lavoro di gruppo sono state riprese nella relazione di C.Dapueto, a cui rinviamo.

## 1. Modelli differenziali

*Problema 1.* In un sistema di riferimento piano monometrico, partendo da (1,1), mi muovo in modo da vedere O=(0,0) sulla mia sinistra perpendicolarmente alla mia traiettoria e procedo fino a superare l'asse y e arrivare alla distanza 0.5 da esso.

# Come modellizzare la situazione al fine di individuare la traiettoria?

Si può usare $y'=-1/(y/x)$ (infatti OP ha pendenza y/x, se P è la mia posizione), ovvero $y'=-x/y$, che è definita anche per $x=0$, e $y(1)=1$. È facile intuire che la traiettoria è un arco di cerchio, e anche verificare che $y=(2-x^2)^{1/2}$ risolve l'equazione.

# Ma è l'unica? Come trovare la soluzione senza intuizione? Come risolvere problemi simili disponendo del concetto di derivata senza un bagaglio di tecniche simboliche ad hoc?

*Problema 2.* Considera l'equazione y' = 2*sqr(y) (sqr qui indica la radice quadrata) e rappresentane il campo direzionale per -4 <= x <= 4, -2 <= y <= 2. Poi trovane le soluzioni con la condizione y(0)=1 e con la condizione y(0)=1.5.

# Quali problemi $y(x_0)=y_0$ ammettono un'unica soluzione?

Questi problemi sono stati affrontati con un opportuno programma che consente di tracciare il campo direzionale dell'equazione, da cui si può dedurre l'esistenza e unicità della soluzione, e che, con un procedimento semplice e "trasparente" (e di cui è facile

* Gruppo Didattico MaCoSa - Genova

stimare, graficamente e numericamente, la precisione), permette di approssimare la soluzione (una delle soluzioni, in caso di non unicità) con una funzione continua lineare a tratti.

*Problema 3.* Il cambiamento della temperatura T di un corpo immerso in un ambiente a temperatura costante A è proporzionale alla differenza A-T (in intervalli di temperatura non troppo elevati, se il corpo non è troppo esteso, ...). # Come modellizzare la situazione?
# Trova T in funzione del tempo t (t in sec, T in gradi Celsius) nel caso in cui (omettendo le unità di misura) A sia 20, la costante di proporzionalità sia 0.005 e T(0) sia 50.

Questo problema, di cui è facile (a livello adulto, considerando y(t)=T(t)-A e risolvendo y'=...) trovare la soluzione esatta $T(t) = A+(T(0)-A)*e^{-kt}$, è stato studiato col programma utilizzato per i problemi precedenti, il grafico ottenuto è stato confrontato, sempre mediante computer, con il grafico della soluzione esatta.

Poi, attraverso una esecuzione animata, si è visto come con opportuno software sia facile, a partire da dei rilevamenti sperimentali su un corpo che si raffredda, rappresentati graficamente con dei rettangolini, ricavare sperimentalmente il valore di k (i dati si riferivano al raffreddamento della colonnina di mercurio di un termometro, per la quale si è ottenuto k=0.006).

*Problema 4.* A e B si stanno muovendo uno verso l'altro con velocità di intensità proporzionale alla distanza tra loro; il coefficiente di propozionalità per A è 1 $sec^{-1}$; per B è il doppio. # Se in un certo istante hanno distanza 10 m, in che posizione tendono a incontrarsi? # Si incontrano effettivamente?

A partire da questo problema si è visto come i metodi numerici introdotti per il primo problema possono essere estesi al caso dei sistemi differnziali. Questo e il precedente problema hanno dato lo spunto per confrontare i modelli differenziali con le situazioni "reali": nei modelli il corpo non raggiunge mai la temperatura ambiente, A non incontra mai B, ecc., mentre nella realtà la temperatura ha fluttuazioni casuali, A e B hanno dimensioni finite, ecc. per cui non si hanno andamenti asintotici.

*Problema 5.* Un pendolo semplice di massa M è sottoposto alla forza di richiamo F di intensità -M*G*sin(A) se G è la accelerazione di gravità e A è l'angolo formato con la verticale. # Se il pendolo è lungo 1 m, qual è il periodo se viene rilasciato dalla posizione iniziale di 45 gradi? (ipotizziamo mancanza di attrito) # Man mano che si riduce la posizione iniziale, il periodo tende a stabilizzarsi su un certo valore? quale? # Se si suppone che ci sia smorzamento, è possibile che non ci sia neanche una oscillazione? # Che relazione di scala (lineare, quadratica, ...) c'è tra lunghezza del pendolo e periodo (senza ipotesi di piccole oscillazioni)?



Il problema è stato affrontato con lo stesso programma impiegato per il problema 4 (una equazione del secondo ordine equivale a un sistema di due equazioni del primo ordine). Si è visto come un approccio numerico-grafico mediante computer consente di affrontare, in modo operativo e dinamico, problemi difficili da affrontare con tecniche simboliche.

## 2. Modelli probabilistici

Molti fenomeni hanno andamento Gaussiano. Perché? Una interpretazione possibile fa riferimento al Teorema Limite Centrale, che qui esprimiamo in modo informale: se una variabile casuale Y è determinata dal contributo additivo di N variabili casuali comunque distribuite $X_1,..., X_N$ ($Y = X_1+...+X_N$) tra loro indipendenti, se N è sufficientemente grande e se l'azione di ciascuna delle $X_i$ è piccola rispetto alla azione complessiva, allora Y ha distribuzione che non differisce in modo significativo da una distribuzione normale.

Il teorema è assai difficile da dimostrare (usualmente non viene dimostrato neanche nei corsi universitari - al più se ne dimostra una versione debole, che non consente l'interpretazione dei fenomeni ad andamento gaussiano).
# Proviamo a congetturarlo al calcolatore.

Si è generato un file contenente 1000 valori consecutivi assunti dalla variabile U definita come somma di più di una ventina di variabili ottenute come funzioni di RND (il generatore di numeri pseudocasuali). Si è generato anche un file contenente 1000 valori assunti da V=U^3, essendo U definita come sopra. I file sono poi stati analizzati con una applicazione statistica. Si è osservato che mentre i primi dati hanno un andamento approssimativamente gaussiano (e la cosa è stata confermata mediante la sovrapposizione del grafico di una funzione densità gaussiana), ciò non accade per i secondi.
# Perché? Se una "popolazione" di fagioli ha lunghezza che varia in modo gaussiano, il volume avrà anch'esso andamento gaussiano? (supponiamo che i fagioli abbiano tutti la stessa forma).

Questo problema ha offerto anche spunti di discussione su come nell'insegnamento le modellizzazioni statistiche e probabilistiche siano spesso presentate in modo stereotipato.

## 3. La visione

Quale uso del computer per fare la geometria e in quali rapporti con quello che se ne fa in altre materie che hanno a che fare con la geometria? Qual è il ruolo dell'insegnamento della matematica?

Per avviare una discussione di questi problemi si sono proposte alcune attività con un semplice programma per la rappresentazione (piana) di figure tridimensionali: la comprensione/interpretazione di esso (che fa semplicemente delle intersezioni tra rette-raggi visivi e un piano-finestra, operando prima qualche rototraslazione per facilitare i calcoli) può motivare lo studio di argomenti geometrici ed algebrici, il suo uso consente di sperimentare facilmente svariati punti di vista e di mettere a fuoco i concetti matematici che stanno alla base delle rappresentazioni prospettiche, può offrire spunti per altri argomenti matematici: limiti (il punto a cui tende la traversina del binario), coniche (che possono assumere l'aspetto di coniche di altro tipo: dal cerchio che può vedersi come ellisse alla parabola che può apparire come un cerchio), ...

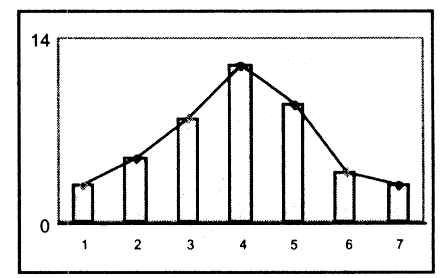


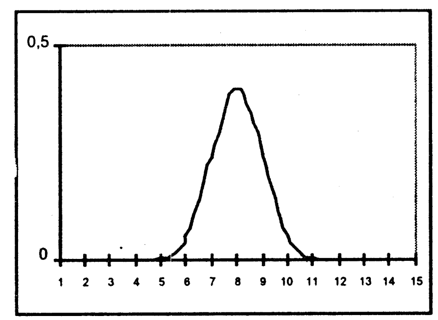
## STRUMENTI STATISTICI PER DESCRIVERE LA REALTÀ

M. Batini – G. Olivieri

Obiettivo delle attività era quello di discutere di strumenti statistici utili per valutare e confrontare prove di una stessa disciplina o situazioni simili riferibili a realtà diverse.

Si supponga di correggere una prova dei nostri allievi e di rappresentarne graficamente i risultati: si hanno in genere istogrammi di altezza decrescente, partendo dai valori centrali verso i valori estremi. Se invece di un istogramma per descrivere l'andamento dei nostri dati si utilizzassero poligoni di frequenze, la spezzata risulterebbe avere un andamento simile ad una campana.



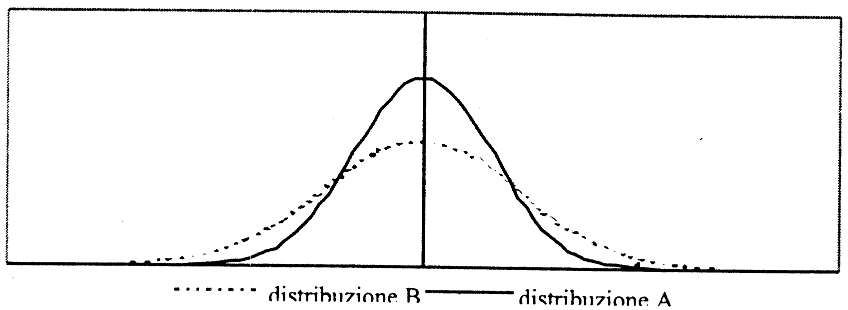

Se avessimo invece somministrato la nostra prova ad un gruppo più ampio di allievi (per esempio i ragazzi di tutte le scuole di una determinata provincia), i tratti della poligonale avrebbero un andamento che si adatterebbe ancor meglio al modello teorico della *curva normale*. Alla nostra distribuzione si possono comunque applicare le proprietà della distribuzione normale, in modo da trarre utili considerazioni per una valutazione più precisa dei risultati.

E' spesso utile usare la distribuzione normale standardizzata, nella quale la variabile aleatoria $z$ misura gli scarti dalla media, in unità s. Le procedure di standardizzazione sono utilizzate quando interessa concentrare l'attenzione su particolari aspetti di un fenomeno.
Se per esempio volessimo confrontare i singoli risultati relativi a due test, sarebbe necessario eliminare la *dispersione* dovuta a quei fattori che possono aver concorso a determinare risultati a volte assai diversi fra loro, quali le diverse difficoltà delle prove, i risultati medi diversi (dovuti a differenti punteggi massimi o a cause accidentali, tra le quali una particolare difficoltà di alcune domande), ecc.
Lo scarto quadratico medio ha la stessa unità di misura dei dati della distribuzione e questo consente di ottenere un numero puro, "pesando" lo scarto di ogni singolo

dato dalla media aritmetica rispetto allo scarto quadratico medio, introducendo una nuova variabile $z$ così definita:

$$z = \frac{x_j - \bar{x}}{\sigma}$$

Questo rapporto, che è un numero puro, permette il confronto di risultati o dati relativi a prove o esperimenti diversi. Il confronto fra indici così ottenuti si basa sul presupposto che più un dato è "distante" dalla media aritmetica, più il suo scarto è "grande" e di conseguenza "maggiore" è il valore del numero $z$.
Supponiamo di avere due distribuzioni del tipo "a campana", aventi la stessa media aritmetica.




Il confronto fra le due curve, evidenzia il fatto che la distribuzione, che ha uno scarto quadratico medio minore, è meno dispersa rispetto al valore medio. Allora a parità di ascissa, cioè di scarto dalla rispettiva media, un dato della distribuzione $A$ ha un rapporto con il relativo scarto quadratico medio più alto rispetto all'altro, cioè un valore più alto della corrispondente variabile $z$. Ciò evidenzia una migliore posizione relativa di quel dato all'interno della corrispondente distribuzione.

In tabella sono riportati i dati relativi agli indicatori di due diverse prove, $A$ e $B$:

| | punteggio massimo | media | varianza |
|---|---|---|---|
| Test A | 60 | 28 | 16,54 |
| Test B | 90 | 43 | 22,15 |

Supponiamo che un alunno abbia ottenuto un punteggio di 34 nel primo test e di 43 nel secondo; per valutare in quale delle due prove un alunno ha ottenuto i risultati migliori, basta calcolare i relativi "punti" $z$. Nel caso specifico i valori risultano $z_1$ =1,48 e $z_2$= 1,70. Poiché l'indice del secondo test risulta maggiore, si può concludere che in esso l'alunno ha ottenuto nell'ambito della classe un risultato migliore che non nel primo test.



I punti z possono inoltre essere utilizzati per l'assegnazione dei voti, utilizzando il seguente modello di calcolo :

$v = \bar{v} + z \cdot k$ .

In questo modello il valore $\bar{v}$ corrisponde al voto *che l'insegnante stabilisce essere un punto equo di riferimento per quella prova, in corrispondenza del punteggio medio.*
Se per la media e per $k$ si prendono effettivamente i valori medi e lo scarto quadratico medio, si otterranno gli effettivi voti realmente ottenuti nella prova, se invece, per motivi inerenti la difficoltà o meno del compito o a causa di forte dispersione, si prendono valori dettati da altre considerazioni di ordine didattico, si otterranno dei voti, che comunque rispetteranno la scala di valori fra i punteggi effettivi ottenuti dagli alunni.

I punti $z$ possono anche essere utilizzati per confrontare situazioni di ammissione alla maturità in due diverse sezioni, appartenenti ad una stessa commissione.
Si abbia per esempio la seguente situazione di ammissione in cui sono riportati i voti nelle singole discipline e il voto medio di ammissione per due alunni, che presentano votazioni simili in sezioni diverse.

| | Italiano | Storia | Inglese / Francese | Matematica | Geografia | Ragioneria | Tecnica | Diritto | Sc. Finanze | **Media generale** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| quinta A | 9 | 8 | 7 | 9 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | **8,31** |
| punti z | 2,37 | 1,24 | 1,37 | 2,17 | 2,00 | 1,65 | 2,48 | 1,81 | 1,81 | 2,28 |
| quinta C | 9 | 9 | 8 | 9 | 9 | 8 | 9 | 8 | 8 | **8,39** |
| punti z | 1,91 | 1,52 | 2,08 | 2,04 | 1,69 | 2,03 | 2,41 | 1,62 | 2,00 | 2,17 |

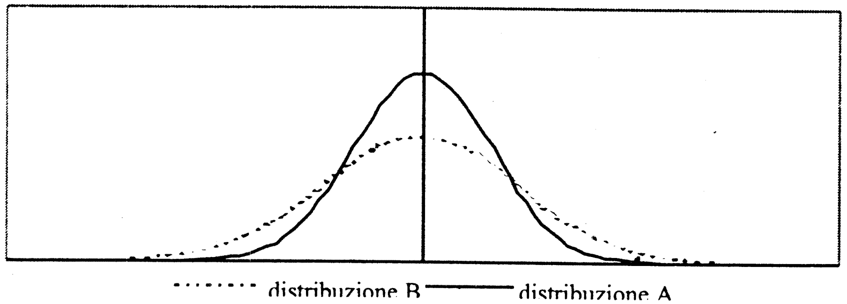
Confrontando i voti simili fra i due alunni, si evince la diversa posizione degli stessi all'interno della classe. Per esempio, ambedue gli alunni hanno 9 in italiano, ma l'alunno della sezione $A$ ha un punto $z$ superiore a quello della sezione $C$. Ciò significa che all'interno della sua classe è un alunno con una posizione migliore rispetto ai suoi compagni. Così il voto 8 in geografia nella sezione $A$ indica una posizione di quell'alunno superiore al 9 in geografia del compagno della sezione $C$.

Queste valutazioni possono essere ottenute in modo semplice e rapido utilizzando un foglio elettronico, per esempio Excel.

dato dalla media aritmetica rispetto allo scarto quadratico medio, introducendo una nuova variabile $z$ così definita:

$$z = \frac{x_j - \bar{x}}{\sigma}$$

Questo rapporto, che è un numero puro, permette il confronto di risultati o dati relativi a prove o esperimenti diversi. Il confronto fra indici così ottenuti si basa sul presupposto che più un dato è "distante" dalla media aritmetica, più il suo scarto è "grande" e di conseguenza "maggiore" è il valore del numero $z$.
Supponiamo di avere due distribuzioni del tipo "a campana", aventi la stessa media aritmetica.




Il confronto fra le due curve, evidenzia il fatto che la distribuzione, che ha uno scarto quadratico medio minore, è meno dispersa rispetto al valore medio. Allora a parità di ascissa, cioè di scarto dalla rispettiva media, un dato della distribuzione $A$ ha un rapporto con il relativo scarto quadratico medio più alto rispetto all'altro, cioè un valore più alto della corrispondente variabile $z$. Ciò evidenzia una migliore posizione relativa di quel dato all'interno della corrispondente distribuzione.

In tabella sono riportati i dati relativi agli indicatori di due diverse prove, $A$ e $B$:

| | punteggio massimo | media | varianza |
|---|---|---|---|
| Test A | 60 | 28 | 16,54 |
| Test B | 90 | 43 | 22,15 |

Supponiamo che un alunno abbia ottenuto un punteggio di 34 nel primo test e di 43 nel secondo; per valutare in quale delle due prove un alunno ha ottenuto i risultati migliori, basta calcolare i relativi "punti" $z$. Nel caso specifico i valori risultano $z_1$ =1,48 e $z_2$= 1,70. Poiché l'indice del secondo test risulta maggiore, si può concludere che in esso l'alunno ha ottenuto nell'ambito della classe un risultato migliore che non nel primo test.



I punti z possono inoltre essere utilizzati per l'assegnazione dei voti, utilizzando il seguente modello di calcolo :

$v = \bar{v} + z \cdot k$ .

In questo modello il valore $\bar{v}$ corrisponde al voto *che l'insegnante stabilisce essere un punto equo di riferimento per quella prova, in corrispondenza del punteggio medio.*
Se per la media e per $k$ si prendono effettivamente i valori medi e lo scarto quadratico medio, si otterranno gli effettivi voti realmente ottenuti nella prova, se invece, per motivi inerenti la difficoltà o meno del compito o a causa di forte dispersione, si prendono valori dettati da altre considerazioni di ordine didattico, si otterranno dei voti, che comunque rispetteranno la scala di valori fra i punteggi effettivi ottenuti dagli alunni.

I punti $z$ possono anche essere utilizzati per confrontare situazioni di ammissione alla maturità in due diverse sezioni, appartenenti ad una stessa commissione.
Si abbia per esempio la seguente situazione di ammissione in cui sono riportati i voti nelle singole discipline e il voto medio di ammissione per due alunni, che presentano votazioni simili in sezioni diverse.

| | Italiano | Storia | Inglese / Francese | Matematica | Geografia | Ragioneria | Tecnica | Diritto | Sc. Finanze | **Media generale** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| quinta A | 9 | 8 | 7 | 9 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | **8,31** |
| punti z | 2,37 | 1,24 | 1,37 | 2,17 | 2,00 | 1,65 | 2,48 | 1,81 | 1,81 | 2,28 |
| quinta C | 9 | 9 | 8 | 9 | 9 | 8 | 9 | 8 | 8 | **8,39** |
| punti z | 1,91 | 1,52 | 2,08 | 2,04 | 1,69 | 2,03 | 2,41 | 1,62 | 2,00 | 2,17 |

Confrontando i voti simili fra i due alunni, si evince la diversa posizione degli stessi all'interno della classe. Per esempio, ambedue gli alunni hanno 9 in italiano, ma l'alunno della sezione $A$ ha un punto $z$ superiore a quello della sezione $C$. Ciò significa che all'interno della sua classe è un alunno con una posizione migliore rispetto ai suoi compagni. Così il voto 8 in geografia nella sezione $A$ indica una posizione di quell'alunno superiore al 9 in geografia del compagno della sezione $C$.

Queste valutazioni possono essere ottenute in modo semplice e rapido utilizzando un foglio elettronico, per esempio Excel.

Se ci si abitua a tabellare i risultati delle prove, alla fine dell'anno sarà inoltre possibile avere sott'occhio la posizione di ogni singolo alunno e, attraverso l'analisi dei punti $z$, la sua evoluzione all'interno della classe nel corso dell'anno.

**Bibliografia**


M. Batini - G. Olivieri, *Descrivere la realtà: i metodi della Statistica*, La lente di ingrandimento 3, Pitagora Ed. Bologna – via del Legatore 3

W. Maraschini - M. Palma, *Format, Pro* (ITC Mercurio), Paravia Ed.

C. Coggi – L. Calonghi, *Elementi per la statistica per la ricerca scolastica*, Giunti Lisciani Ed.




# PROBABILITÀ CONDIZIONALE, PROBLEMI DI STRATEGIA, GIOCHI ALEATORI: LA MEDIAZIONE DEI GRAFI AD ALBERO


Coordinatori: Angela Pesci - Maria Reggiani
Dipartimento di Matematica - Università di Pavia


L'obiettivo del lavoro è quello di mettere in rilievo come la rappresentazione attraverso un grafo ad albero di esperimenti con eventi casuali composti possa costituire uno strumento molto efficace nella interpretazione e nella soluzione di alcune situazioni aleatorie.
Dopo aver precisato la modalità di costruzione di un grafo ad albero nel caso di eventi composti ed averne sottolineato il legame con la teoria di riferimento (Pesci,1994) si è anche messa in risalto la possibilità dell'utilizzo del grafo quando sia necessario ricorrere al teorema di Bayes.
Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono una partizione dell'insieme E (sono cioè le alternative possibili di un esperimento) ed A è un sottoinsieme di E, è noto che si può scrivere

$$P(A)=P(A/E_1).P(E_1)+\ldots+P(A/E_n).P(E_n) \qquad (*)$$

Interpretando l'insieme A come evento possibile e $E_1, \ldots, E_n$ come le sue possibili cause, ci si può chiedere, ammesso che sia verificato A, con quale probabilità sia dovuto ad esempio alla "causa" $E_1$. Ci si può chiedere cioè di calcolare $P(E_1/A)$ che, per definizione di probabilità condizionale si può scrivere così:

$$P(E_1/A)=\frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)}=\frac{P(A/E_1)\cdot P(E_1)}{P(A/E_1)\cdot P(E_1)+\ldots+P(A/E_n)\cdot P(E_n)}$$

La seconda uguaglianza tiene conto di (*).

L'ultima formula è nota come formula di Bayes o della "probabilità delle cause" e ad essa si ricorre con il dettaglio precisato dalla formula stessa.
Attraverso il grafo ad albero la situazione sembra semplificarsi, perché con questa rappresentazione è molto spontaneo costruire direttamente le probabilità di eventi intersezione (che si ottengono moltiplicando probabilità "lungo i rami"), utilizzando implicitamente le probabilità condizionali (cioè le probabilità assegnate sui vari rami).
In altre parole con il grafo ad albero si utilizza direttamente l'uguaglianza:

$$P(E_1/A)=\frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)}$$

senza esplicitare formalmente il secondo membro ma desumendolo direttamente dal grafo.

A partire da queste premesse si sono presentati, risolti insieme e discussi i seguenti quattro problemi, due dei quali sono temi assegnati agli esami di maturità scientifica (sperimentazione Piano Nazionale Informatica) negli scorsi anni, gli altri sono tratti da testi indicati in bibliografia. In particolare si sono confrontate soluzioni che utilizzano lo strumento risolutivo presentato con altri tipi di soluzioni proposte dai partecipanti al gruppo.

1. Ci sono due urne, ciascuna contiene palline bianche e palline nere, in numero sconosciuto. Un prigioniero deve estrarre a caso due palline, con reimbussolamento; se entrambe sono bianche, egli sarà libero.
   Quale procedimento risulterà per lui più vantaggioso, fra i due seguenti?
   a) scegliere a caso un'urna, estrarre, reimbussolare, scegliere di nuovo a caso un'urna ed estrarre di nuovo.
   b) scegliere a caso un'urna, estrarre, reimbussolare e, dalla medesima urna scelta (a caso) estrarre di nuovo.

*(Pintacuda, 1983, pagg. 28-29)*

1. Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati A, B e C assumono la loro decisione indipendentemente. A e B hanno probabilità p ($0<p<1$) di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato C decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta.

   a) Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto.
   b) Supponendo di sostituire il giurato C con un altro giurato D che ha probabilità $p' \neq p$ ($0<p'<1$) di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se $p' > \frac{1}{2}$.
   c) Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati indipendentemente tra di loro, dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi:

   $E_1 = \{$ la giuria composta da A,B e C ne assolve due su tre $\}$
   $E_2 = \{$ la giuria composta da A,B e D ne assolve tre su tre $\}$
   $E_3 = \{$ la giuria composta da A,B e D assolve almeno un imputato $\}$

   In particolare per $p=\frac{3}{4}$ si determini il valore di p' (probabilità che il giurato D decida per l'assoluzione) in modo che $P(E_1)=P(E_2)$.

*(Maturità Scientifica Sperimentale P.N.I. 1993)*



3. Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco: Paolo colpisce il centro del bersaglio nel 75% dei casi, Giovanni nell'80%.
   Decidono di fare una gara osservando le seguenti regole:
   - lanceranno una moneta per decidere chi tirerà per primo: se esce testa sarà Paolo, se esce croce sarà Giovanni;
   - tireranno a turno e vincerà chi per primo farà centro.

   a) Calcolare la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro;
   b) calcolare la probabilità che Paolo vinca entro il quarto tiro;
   c) se in un certo tiro fissato, ad esempio il quindicesimo, si ottiene centro per la prima volta, calcolare la probabilità che a tirare sia stato Paolo;
   d) calcolare la probabilità che Paolo vinca all'ennesimo tiro se ad iniziare è stato Giovanni.

*(Maturità Scientifica Sperimentale P.N.I. 1996)*

4. Pietro lancia un dado; se fa 6 ha vinto, altrimenti lo passa ad Anna; a sua volta Anna se fa 6 ha vinto, altrimenti lo ripassa a Pietro, e così di seguito; vince il primo che fa 6.
   Che probabilità ha Pietro di vincere il gioco?

*(Pintacuda, 1981, pagg. 77-78)*

La soluzione di quest'ultimo esercizio con i grafi ad albero richiede qualche ulteriore precisazione. Infatti se si disegna il grafo si osserva che, dopo che Pietro ed Anna hanno entrambi ottenuto un punteggio diverso da 6, ci si ritrova alla situazione di partenza. Si può allora notare che indicata con p(v) la probabilità che Pietro vinca si ha:

$$p(v) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot p(v)$$

Da questa equazione si ricava $p(v)=\frac{6}{11}$.

Allo stesso risultato si perviene, ovviamente, calcolando la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$, che si è condotti a scrivere se si immagina di "continuare" il grafo.

**Riferimenti bibliografici**

AA.VV., 1977, *Matematica come Scoperta, guida al progetto di insegnamento della matematica*, vol.1, D'Anna, Firenze

Pesci A.,1994, Tree graphs.Visual aids in casual compound events, *Da Ponte J. P., Matos J. F., eds., Proceedings of PME XVIII, University of Lisbon,* vol. IV, 25-32

Pintacuda N.,1981, *Insegnare la probabilità*, Muzzio, Padova

Pintacuda N., 1983, *Primo corso di probabilità*, Muzzio , Padova

Prodi G., 1975, *Matematica come scoperta*, vol.1, D'Anna, Firenze

# CALCOLO COMBINATORIO, CALCOLO DELLE PROBABILITÀ, CURVA "A CAMPANA", "PICCOLO TEOREMA" DI FERMAT E ENTROPIA

Mario Barra

Non "ho spazio" e quindi cercherò di tagliare[1] e riassumere.
Il coefficiente di $a^4b^3c^2d$ nello sviluppo di $(a+b+c+d)^{10}$ è dato dagli anagrammi[2] (permutazioni) della parola aaaabbbccd=$a^4b^3c^2d$ che sono $\frac{10!}{4!3!2!}$.
Vediamo come si ottiene tale numero.

Gli anagrammi di una parola con n lettere <u>distinte</u> sono n!. Si vede facilmente con i diagrammi ad albero (una ideografia fondamentale): un vertice con n rami al termine di ciascuno dei quali ne escono n-1, poi n-2... per indicare anche il numero delle n estrazioni differenti, senza reimbussolamento, di n palline distinte. E se le lettere non sono <u>distinte</u>?
Non conosco gli anagrammi della parola **mamma** ma so che sono la metà di quelli di **mamme** perché ogni anagramma della prima parola è collegato a due anagrammi della seconda. Ad esempio da **ammma** possono derivare **ammme** e **emmma**, sostituendo nelle stesse posizioni delle due **a** i due anagrammi di **ae**. E gli anagrammi di **ammme**? Sono la sesta parte di quelli di **amdre** (o di **madre** che, come già visto, sono 5!) perché ogni anagramma di **ammme** può essere collegato ai 3!=6 anàgrammi di **amdre** che si ottengono sostituendo nelle posizioni delle tre **m** i 3! anagrammi di **mdr**.
Mettendo tutto insieme si ottengono i $\frac{5!}{3!2!}$ anagrammi di **mamma**, e quindi anche il coefficiente di $a^2m^3$ (o di $a^3m^2$) in $(a+m)^5$). Sarebbero 5! se le lettere fossero tutte distinte, essendoci 3 **m** e 2 **a**, si divide per 3! e 2!.

### Piccolo teorema di Fermat

Le parole distinte di **p** lettere che si possono costruire con un alfabeto che ne contiene **n** sono $n^p$ (n scelte, p volte). Fra queste quelle con un solo anagramma sono formate da tutte lettere uguali, e sono n. Fra le rimanenti $n^p$ - n, ne prendo una, e, indicando con $n_i$ il numero delle **i** che contiene, la considero assieme ai suoi

---

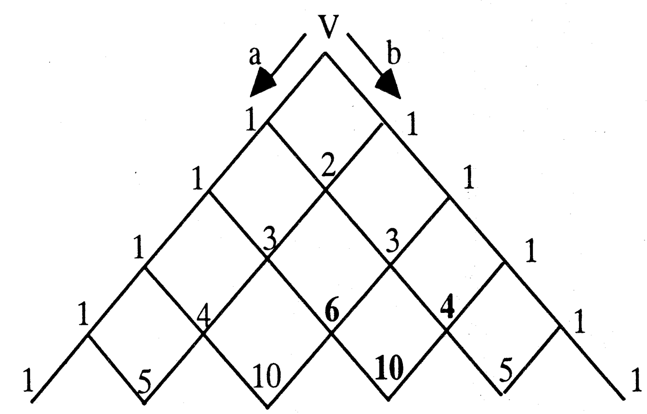
[1]Rispetto a ciò che è stato presentato al Convegno, viene omessa, ad esempio, la parte storica e quella relativa alla somma di variabili aleatorie discrete e continue.
[2]Ad esempio l'anagramma "babbadacca" è il prodotto ottenuto prendendo in (a+b+c+d)(a+b+c+d) ... (a+b+c+d)= $(a+b+c+d)^{10}$, b dalla prima parentesi, a dalla seconda,..., d dalla sesta,..., c dall'ottava,..., a dalla decima.



$\frac{p!}{n_a!n_b!\ldots n_i!\ldots}$ anagrammi, numero, che se p è primo, è un suo multiplo, perché $n_i$ è minore di p per ogni i e dunque p non si semplifica. Escludendo anche questi anagrammi, si continua a prendere una parola nell'insieme rimanente, associandola ogni volta ai suoi anagrammi e tenendo conto che il loro numero è comunque un multiplo di p, fino a considerare tutte le $n^p$ - n parole. Sommando e mettendo in evidenza queste p in ogni addendo, segue il fondamentale "Piccolo Teorema di Fermat" sugli interi:

$$n^p - n = pk \quad \forall\ p \text{ primo}, \forall\ n.$$

In altro modo, il piccolo teorema di Fermat, per p=2, lo otteniamo attraverso i coefficienti di $(a+b)^p$ elencati nel "Triangolo Aritmetico". Tale triangolo si può derivare da una ideografia[3] che può rappresentare una città triangolare reticolata e con un vertice V "in alto", dove ci si muove fra i nodi con dei passi verso il basso secondo le direzioni dei 2 lati che escono da V. I passi da una parte servono per contare il numero delle **a** e dall'altra quello delle **b**.




Qui ogni nodo può essere raggiunto solo dai due nodi immediatamente sovrastanti e quindi il numero dei percorsi che porta ad un nodo è la somma del numero dei percorsi che portano ai due nodi dai quali si può provenire. Stesso discorso per indicare, ad esempio, che lanciando 5 monete, si ottengono 3 teste e 2 croci (in 10=4+6 modi) solo se, con 4 di queste, si sono ottenute 2 teste e 2 croci oppure 3 teste e una croce, che si ottengono rispettivamente in 6 e 4 modi. E' per questo che

---

[3]Questa ideografia è stata usata ad esempio da Polya e da de Finetti. In: Castelnuovo E., Barra M., *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino, 1976, si parla di un ubriaco che ad ogni bivio può andare, con uguale probabilità, a destra ed a sinistra. Ci sono anche le foto di 2 apparecchi didattici differenti, con i quali si ottengono delle concretizzazioni delle distribuzioni binomiali, attraverso dei pallini di piombo.

# CALCOLO COMBINATORIO, CALCOLO DELLE PROBABILITÀ, CURVA "A CAMPANA", "PICCOLO TEOREMA" DI FERMAT E ENTROPIA

Mario Barra

Non "ho spazio" e quindi cercherò di tagliare[1] e riassumere.

Il coefficiente di $a^4b^3c^2d$ nello sviluppo di $(a+b+c+d)^{10}$ è dato dagli anagrammi[2] (permutazioni) della parola aaaabbbccd=$a^4b^3c^2d$ che sono $\frac{10!}{4!3!2!}$.

Vediamo come si ottiene tale numero.

Gli anagrammi di una parola con n lettere <u>distinte</u> sono n!. Si vede facilmente con i diagrammi ad albero (una ideografia fondamentale): un vertice con n rami al termine di ciascuno dei quali ne escono n-1, poi n-2... per indicare anche il numero delle n estrazioni differenti, senza reimbussolamento, di n palline distinte. E se le lettere non sono <u>distinte</u>?

Non conosco gli anagrammi della parola **mamma** ma so che sono la metà di quelli di **mamme** perché ogni anagramma della prima parola è collegato a due anagrammi della seconda. Ad esempio da **ammma** possono derivare **ammme** e **emmma**, sostituendo nelle stesse posizioni delle due **a** i due anagrammi di **ae**. E gli anagrammi di **ammme**? Sono la sesta parte di quelli di **amdre** (o di **madre** che, come già visto, sono 5!) perché ogni anagramma di **ammme** può essere collegato ai 3!=6 anagrammi di **amdre** che si ottengono sostituendo nelle posizioni delle tre **m** i 3! anagrammi di **mdr**.

Mettendo tutto insieme si ottengono i $\frac{5!}{3!2!}$ anagrammi di **mamma**, e quindi anche il coefficiente di $a^2m^3$ (o di $a^3m^2$) in $(a+m)^5$). Sarebbero 5! se le lettere fossero tutte distinte, essendoci 3 **m** e 2 **a**, si divide per 3! e 2!.

### Piccolo teorema di Fermat

Le parole distinte di **p** lettere che si possono costruire con un alfabeto che ne contiene **n** sono $n^p$ (n scelte, p volte). Fra queste quelle con un solo anagramma sono formate da tutte lettere uguali, e sono n. Fra le rimanenti $n^p$ - n, ne prendo una, e, indicando con $n_i$ il numero delle **i** che contiene, la considero assieme ai suoi

[1]Rispetto a ciò che è stato presentato al Convegno, viene omessa, ad esempio, la parte storica e quella relativa alla somma di variabili aleatorie discrete e continue.

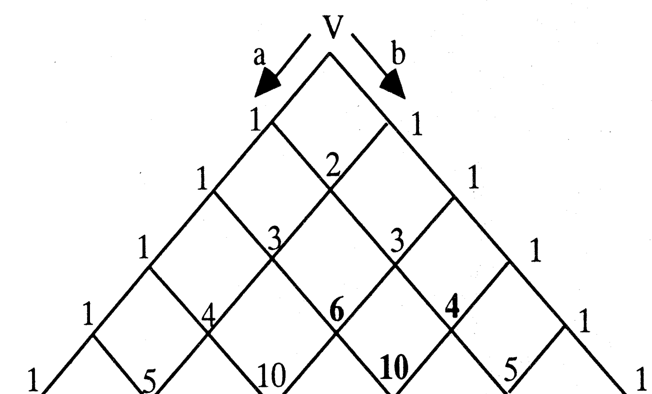
[2]Ad esempio l'anagramma "babbadacca" è il prodotto ottenuto prendendo in $(a+b+c+d)(a+b+c+d)\ \ldots\ (a+b+c+d)=$ $(a+b+c+d)^{10}$, b dalla prima parentesi, a dalla seconda,..., d dalla sesta,..., c dall'ottava,..., a dalla decima.



$\frac{p!}{n_a!n_b!\ldots n_i!\ldots}$ anagrammi, numero, che se p è primo, è un suo multiplo, perché $n_i$ è minore di p per ogni i e dunque p non si semplifica. Escludendo anche questi anagrammi, si continua a prendere una parola nell'insieme rimanente, associandola ogni volta ai suoi anagrammi e tenendo conto che il loro numero è comunque un multiplo di p, fino a considerare tutte le $n^p$ - n parole. Sommando e mettendo in evidenza queste p in ogni addendo, segue il fondamentale "Piccolo Teorema di Fermat" sugli interi:

$$\mathbf{n^p - n = pk\ \ \forall\ p\ primo,\ \forall\ n.}$$

In altro modo, il piccolo teorema di Fermat, per p=2, lo otteniamo attraverso i coefficienti di $(a+b)^p$ elencati nel "Triangolo Aritmetico". Tale triangolo si può derivare da una ideografia[3] che può rappresentare una città triangolare reticolata e con un vertice V "in alto", dove ci si muove fra i nodi con dei passi verso il basso secondo le direzioni dei 2 lati che escono da V. I passi da una parte servono per contare il numero delle **a** e dall'altra quello delle **b**.




Qui ogni nodo può essere raggiunto solo dai due nodi immediatamente sovrastanti e quindi il numero dei percorsi che porta ad un nodo è la somma del numero dei percorsi che portano ai due nodi dai quali si può provenire. Stesso discorso per indicare, ad esempio, che lanciando 5 monete, si ottengono 3 teste e 2 croci (in 10=4+6 modi) solo se, con 4 di queste, si sono ottenute 2 teste e 2 croci oppure 3 teste e una croce, che si ottengono rispettivamente in 6 e 4 modi. E' per questo che

[3]Questa ideografia è stata usata ad esempio da Polya e da de Finetti. In: Castelnuovo E., Barra M., *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino, 1976, si parla di un ubriaco che ad ogni bivio può andare, con uguale probabilità, a destra ed a sinistra. Ci sono anche le foto di 2 apparecchi didattici differenti, con i quali si ottengono delle concretizzazioni delle distribuzioni binomiali, attraverso dei pallini di piombo.

l'andamento è "a campana": si eredita tale andamento dalla riga precedente. E il traffico è maggiore al centro perché ci sono più modi per raggiungerlo.

Si può così tradurre graficamente e con un linguaggio semplice, i coefficienti binomiali e alcune loro proprietà: nello sviluppo di $(a+b)^5$, $a^3b^2$ deriva soltanto da $a^2b^2$ oppure da $a^3b$ nello sviluppo di $(a+b)^4$ e quindi il coefficiente del primo è la somma di quelli dei secondi. Tale numero, pari a $\frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{2}$, rappresenta dunque tutti i modi per ottenere $a^3b^2$ in $(a+b)^5$, cioè anche tutti gli anagrammi di $aaabb=a^3b^2$.

Sommando tutti i coefficienti di questa riga (base) si ha $(1+1)^5$ che si esprime in generale anche dicendo che, poiché ogni percorso dà origine a 2 percorsi, il loro totale ogni volta raddoppia. Quindi dopo 5 passi è $2^5$.

Inoltre, se, in $(a+b)^n$, $a+b=1$, si ottiene un processo binomiale, cioè una distribuzione di probabilità binomiale per ogni n determinato. Se la probabilità di ogni evento è **a** (e quindi $b=1-a$ è la probabilità dell'evento contrario), quella che, su 5 eventi indipendenti, se ne realizzino 3, è $\binom{5}{3} a^3b^2$.

Infine 5 è primo e tutti i coefficienti della $5^a$ base, escluse le 2 unità ai vertici, sono multipli di 5 (non semplificabile, come già detto, in $\frac{5!}{h!(5-h)!}$ ) e quindi: $2^5-2=5k$ e in generale, dopo p passi, p primo: $2^p-2=pk$.

E in $(a+b+c)^7$ ? Si tratta di un "Tetraedro Aritmetico" reticolato con un vertice V "in alto" dove ci si muove con dei passi verso il basso secondo le direzioni dei 3 spigoli che escono da V. Qui ogni numero, che rappresenta quanti sono i modi per raggiungere un nodo di una base, è la somma dei 3 numeri nei 3 nodi ad esso collegati nella base precedente. Questo perché solo da questi si può provenire per raggiungerlo o perché ad esempio, nello sviluppo di $(a+b+c)^7$, $a^2b^2c^3$ può derivare soltanto da $ab^2c^3$, da $a^2bc^3$ oppure da $a^2b^2c^2$ che appartengono allo sviluppo di $(a+b+c)^6$.
Dunque il coefficiente del primo è la somma dei 3 coefficienti dei secondi: è un coefficiente trinomiale che rappresenta anche i $\frac{7!}{2!2!3!}$ anagrammi di $aabbccc=a^2b^2c^3$. Il significato probabilistico (corrispondente a quanto visto per n=2) si ha nel caso delle estrazioni con reimbussolamento da un'urna con palline di 3 colori A, B, C, il cui numero sul totale è rispettivamente a, b, c: la probabilità di estrarre 7 palline nella composizione AABBCCC, in qualsiasi ordine (anagramma), è $\frac{7!}{2!2!3!} a^2b^2c^3$.

Anche qui dopo p passi, p primo, e escludendo i vertici della base: $3^p-3=pk$.



Generalizzando in $(a_1+a_2+\cdots a_n)^p$ si può pensare ad un "Ipertetraedro Aritmetico" a **n** dimensioni, reticolato e con un vertice V "in alto", dove ci si muove con dei passi verso il basso secondo le direzioni degli **n** spigoli che escono da V. Qui, analogamente, si può ragionare in termini di numero di percorsi per raggiungere un nodo, di coefficienti multinomiali o, più semplicemente, di anagrammi con il loro significato probabilistico nel caso di un'urna con palline di n colori.

Dopo p passi, si hanno in totale $n^p$ percorsi che raggiungono i nodi della base p-esima. Fra questi, gli n vertici si raggiungono in un sol modo, mentre il totale dei percorsi per arrivare a ciascuno degli altri, si ottiene in ogni caso con un calcolo ove, se p è primo, ... non si semplifica ... donde:

$$\mathbf{n^p - n = pk \quad \forall\ p\ primo,\ \forall\ n.}$$

## Statistica di Maxwell - Boltzmann e Entropia

Quanto considerato è analogo al modello statistico della termodinamica.

Dovendo considerare al tempo t un gas composto da un gran numero **p** di particelle, dovremmo conoscere le tre coordinate di posizione x , y , z e le tre componenti $v_x$ , $v_y$ , $v_z$ della velocità di ogni particella, al tempo t. Le 6**p** quantità ora nominate determinerebbero la configurazione, o stato termodinamico del gas al tempo t. Le variabili variano, con t, con continuità, ma ragioni pratiche e teoriche (Principio di Indeterminazione di Heisenberg) non permettono di distinguere, l'una dall'altra, due configurazioni molto prossime nei valori assunti da queste. Si considera allora un numero di configurazioni non continuo, ma discreto, nel senso che tutte le molecole vengono raggruppate in **n** "scatole ideali", di uno spazio a 6 dimensioni, in ciascuna delle quali si considerano quelle molecole che hanno posizioni e velocità, in qualche modo, simili.
Nel modello probabilistico, ogni stato termodinamico è riassumibile così da un modo per riempire le n scatole con p particelle, supponendo che ciascuna possa andare indifferentemente in una qualsiasi delle scatole, indipendentemente dalle altre, con probabilità 1/n. Ciò che conta sapere della configurazione al tempo t è il numero di molecole nelle varie scatole.

Ad esempio se le particelle sono 7 {abcdefg} e le scatole sono 3 {ABC}, quale è la probabilità p(E) dell'evento E=(2,2,3) che rappresenta lo stato S con 2 particelle in A, 2 in B e 3 in C?

Indicando sotto ciascuna delle particelle la scatola che la contiene, la seguente distribuzione è favorevole ad E

a b c d e f g
A A B B C C C

E tutti i casi favorevoli sono dati dagli anagrammi di AABBCCC che sono $\frac{7!}{2!2!3!}$, mentre i casi possibili sono $3^7$ perché ogni particella ha 3 scelte.

Infine se un sistema S di particelle è l'unione di 2 sotto-insiemi $S_1$ e $S_2$, data l'indipendenza, la probabilità di trovare $S_1$ in un certo stato e $S_2$ in un altro, è uguale al prodotto delle probabilità. Poiché invece l'entropia è la somma delle entropie allora, se questa è funzione della probabilità, tale funzione deve essere il logaritmo[4] che è maggiore dove è più grande il numero di anagrammi.

Così, il senso dell'affermazione che per un sistema isolato l'entropia non può che aumentare si precisa nella tendenza di un sistema isolato a evolvere verso stati termodinamici più probabili che, nel modello del "tetraedro aritmetico" si realizza verso il centro della base, dove tutte le scatole hanno "lo stesso numero" di particelle[5], e dove "il traffico è maggiore" con un andamento "a campana".

[4]Il logaritmo del prodotto è la somma dei logaritmi e il logaritmo è l'unica funzione che gode di questa proprietà.

[5]Con, al più, una unità di differenza, per questioni di divisibilità.



# MATLAB PER LA MATEMATICA E LE APPLICAZIONI

P. Boieri - N. Blunda - M. Gobetto - D. Lorenzi - M. Pavesi

Il software Matlab è nato come strumento per il calcolo numerico e riveste oggi un ruolo importante sia a livello universitario sia a livello aziendale nel campo della matematica applicata e della modelizzazione; la presenza di alcuni pacchetti aggiuntivi (detti toolbox) rende Matlab particolarmente utile e facile da usare nelle applicazioni ingegneristiche, quali, ad esempio, la teoria dei segnali e quella dei sistemi.

Negli ultimi anni Matlab si sta imponendo anche pacchetto applicativo per il calcolo numerico e numerosi testi di questa materia sono accompagnati da esempi ed esercizi che lo studente deve svolgere utilizzando Matlab.

Il gruppo di lavoro *Matlab per la matematica e le applicazioni* si presenta innanzitutto come un'occasione per conoscere questo software; dopo la presentazione del gruppo di lavoro e un'introduzione generale sui contenuti, tenuta dal coordinatore prof. Paolo Boieri, il prof. Nicolò Blunda ha svolto un'analisi a livello introduttivo per fornire una conoscenza di base del programma e delle sue potenzialità a chi lo esamina per la prima volta.

In particolare, è stata sottolineata l'integrazione tra l'ambiente di calcolo, il processore simbolico, l'ambiente grafico e il linguaggio di programmazione (di tipo tradizionale, imperativo); questa integrazione rappresenta un'assoluta peculiarità di questo software e contribuisce molto a farne uno strumento completo ma di utilizzo amichevole.

In Matlab può essere utilizzata anche la programmazione a oggetti; al fine di mostrare come sia possibile creare degli applicativi interattivi per Windows, la dott. Marialuisa Gobetto ha fornito alcuni elementi di questo linguaggio visuale *object-oriented.*

La seconda parte dell'attività è stata dedicata alla presentazione di un lavoro svolto con Matlab: si tratta di due tesi di laurea in Matematica (relatori i prof. Andrea Bacciotti e Paolo Boieri) della dott. Marialuisa Gobetto e della dott. Daniela Lorenzi, che forniscono un'introduzione di alcuni aspetti della teoria dei sistemi continui e discreti per studenti della scuola superiore organizzata in forma ipertestuale.

Si mira a presentare i concetti di base di questa disciplina, interpretando alcune situazioni note allo studente (quali i sistemi oscillanti o i circuiti RLC) dal punto di vista della teoria dei sistemi; non si entra nel dettaglio delle tecniche matematiche, ma si utilizza Matlab sia come strumento di calcolo sia come visualizzatore.

Lo studio viene condotto attraverso l'uso di schede, mediante le quali lo studente può familiarizzarsi con i contenuti proposti in maniera semplice ed intuitiva, potendo fare continuo riferimento ad esempi grafici ed animazioni: su questi egli può in ogni momento intervenire modificando i parametri in gioco e, di conseguenza, i comportamenti degli enti descritti; le caratteristiche di forte interattività di Matlab si rivelano essenziali nella progettazione di tutto il pacchetto e in particolare della interfaccia con l'utente.

Dopo questa presentazione si è aperto un ampio (e animato) dibattito che ha toccato vari aspetti e ha rappresentato un interessante momento di confronto delle esperienze acquisite dai docenti presenti.
Il primo aspetto, molto sentito dai partecipanti, è stato quello della situazione attuale dell'insegnamento dell'informatica e in particolare del linguaggio di programmazione; alcuni docenti hanno sostenuto la validità dell'impostazione comunemente adottata dal PNI in poi, mentre altri hanno esposto i risultati non sempre positivi dell'introduzione e dell'utilizzo del Pascal,
Si è posto quindi il problema dell'utilizzo di Matlab come linguaggio di programmazione in tutto l'arco della scuola superiore e come strumento di esplorazione didattica della matematica. Tra i docenti di Matematica degli Istituti Tecnici, si è evidenziata l'opportunità di raccordare l'uso "generale" di Matlab nei primi anni con quello specialistico che se ne fa negli ultimi anni, principalmente da parte di docenti ingegneri nelle già citate applicazioni di teoria dei controlli, di teoria dei sistemi, delle reti e così via.
Da parte di chi già lo utilizza è stato sottolineato che la sintassi del programma, basata sul concetto di *array* (insieme ordinato di valori), dopo un breve apprendistato si rivela immediatamente fruibile sia da parte del docente meno esperto sia, come dimostrano le esperienze in classe, da parte dello studente meno abile.
Più impegnativo appare senza dubbio l'utilizzo della programmazione a oggetti che può essere visto come il punto di arrivo del percorso di autoistruzione dell'insegnante e del percorso didattico degli studenti più dotati.
L'interesse per Matlab è in costante crescita tra i docenti di Matematica anche del biennio e si stanno realizzando varie iniziative; la prof. Maura Pavesi ha esposto un breve resoconto del corso di aggiornamento (21 ore) tenuto, durante l'anno scolastico 1997/98, ad insegnanti delle provincie di Parma e Reggio Emilia, dal quale è emersa la volontà di molti docenti di contribuire all'adattamento del software alle esigenze della didattica.
Il gruppo EduMatlab (composto dai relatori del gruppo di lavoro e da M. Sala) si occupa da due anni dello studio delle potenzialità didattiche di Matlab e della relativa sperimentazione sul campo, nell'intenzione di combinare il necessario controllo teorico dello strumento con l'applicazione diretta alla realtà scolastica; chi vuole essere informato sulle iniziative del gruppo o presentare le sue esperienze può contattare il coordinatore del gruppo P. Boieri all'indirizzo email: boieri@polito.it.



## MATEMATICA E ALTRE DISCIPLINE: ESPERIENZE A CONFRONTO

Giuseppe Bruzzaniti* - Carlo Dapueto*

In un momento in cui si delineano nuove forme organizzative del sistema scolastico, e, in particolare, la possibilità di riorganizzazione autonoma dei curricoli scolastici, affinché questi processi non si sviluppino seguendo solo logiche di ottimizzazione temporale o miopi obiettivi di "mercato" (la "caccia" all'utente) è opportuno che, nelle varie scuole, vengano esplicitati e confrontati i modelli educativi e le immagini delle diverse discipline presenti tra gli insegnanti e a cui si intendono riferire gli obiettivi didattici. Nel gruppo di lavoro da noi coordinato abbiamo proposto uno **spazio di discussione** su questa problematica, tenendo conto del punto di vista particolare degli obiettivi (culturali e operativi) legati alla matematica. Per una documentazione più estesa rispetto a questa breve sintesi, rinviamo a: http://www.dima.unige.it/macosa/umi.

Qui riproduciamo (**A**) una "traccia per una discussione tra insegnanti di matematica e insegnanti di altre materie" e (**B**) una "traccia per riflessioni/relazioni rivolta a studenti che stanno finendo le superiori".Nel gruppo si è discusso come avremmo risposto noi matematici e come secondo noi avrebbero risposto colleghi delle altre materie e alunni.

**- A -**

(**1**) La *differenziazione tra matematica e scienze sperimentali* (al livello di: attività dei singoli ricercatori, fondazione delle discipline, organizzazione della ricerca, riviste, ...) è avvenuta in tempi relativamente recenti (XIX secolo). Quali suggerimenti didattici e spunti per possibili attività interdisciplinari può offrire questa constatazione?

(**2**.1) È pensabile creare dei collegamenti tra le varie discipline in modo da sviluppare determinati *argomenti in contemporanea*? Quali ostacoli si possono presentare?

(**2**.2) Sono presenti *sfasamenti tra i programmi* delle varie discipline?

(**3**.1) Ci sono *concetti matematici* che gli *insegnanti di matematica* dovrebbero *anticipare*? In che modo (formalizzato o intuitivo, interno o contestualizzato, ...)?

(**3**.2) Ci sono concetti matematici che gli *insegnanti delle altre discipline* potrebbero *posticipare* utilizzando approcci diversi per introdurre argomenti che di solito presentano impiegando strumenti matematici non ancora sviluppati dai colleghi di matematica?

(**3**.3) Ci sono *strumenti matematici* usabili "*a scatola nera*"? Sono utili (quali?) forme di riflessione sul rapporto tra natura dello strumento matematico e area in cui è utilizzato?

* Gruppo didattico MaCoSa - Genova

(**4**.1) Quali *difficoltà concettuali* tipiche nell'uso della matematica da parte degli alunni sono riscontrate dagli insegnanti delle "altre materie" e a cosa vengono attribuite?

(**4**.2) Secondo voi, gli *studenti* hanno *atteggiamenti diversi* nei confronti della "matematica"dell'insegnante di matematica e nei confronti di "quella" proposta degli insegnanti delle altre materie? Queste eventuali differenze a che cosa sono dovute?

(**5**.1) Ci sono *concetti e metodi comuni* tra la disciplina X e la matematica? Ci sono concetti nella disciplina X che *richiamano* concetti matematici? Nell'insegnamento della matematica vengono richiamati (per esempi o per motivazioni) argomenti della disciplina X? [X è una generica disciplina non matematica]

(**5**.2) I riferimenti (reciproci: dei matematici nei confronti delle altre materie e viceversa) alla disciplina degli altri sono sempre *corretti* culturalmente e *coerenti con l'impostazione data dai colleghi*?

(**6**.1) Nelle *cattedre pluridisciplinari* (come "matematica e fisica") la gestione didattica è "schizofrenica", viene privilegiata una materia rispetto all'altra (da che cosa eventualmente dipende la scelta?), ... o vengono sfruttate le potenzialità di interazione che il pluri-insegnamento offre (come?)?

(**6**.2) Quale visione della matematica dovrebbe guidare la programmazione dell'insegnamento della matematica (ad esempio è corretto o riduttivo o troppo elevato il riferimento alla matematica come linguaggio per le altre scienze?) e quanto questa dovrebbe essere esplicitata nell'insegnamento? Nella pratica didattica si tiene conto di questi aspetti o il principale punto di riferimento sono i libri di testo, le tradizioni consolidate, ... ?

**- B -**

(**1**) Nel corso di studi che stai seguendo si fa riferimento alla matematica non solo nell'ambito delle "ore di matematica" ma anche in diverse altre materie: *tecnico-scientifiche* (fisica, chimica, elettrotecnica, scienze bilogiche e naturali - dalla genetica alla geografia astronomica -, informatica, ...), *economiche* (materie commerciali, finanziarie, di economia aziendale, ...), *grafico-artistiche* (disegno, storia dell'arte - dalla prospettiva alle forme architettoniche -, ...), *umanistiche* (filosofia - i filosofi che si occupano di numeri, spazio, infinito, ...), ... , in forme e pesi diversi a seconda del tipo di scuola e degli interessi dei docenti coinvolti. Ti sembra che nelle diverse "ore" (eventualmente condotte dallo stesso insegnante) si parli della stessa "matematica"? Trovi analogie o differenze sostanziali tra i modi in cui concetti e metodi matematici sono presentati (come sono introdotti, come ne è esemplificato o giustificato l'uso, ...), tra i procedimenti e i modi di lavorare che dovete seguire (come usare formule e regole, e quali; quanto giustificare i passaggi; come costruire o leggere un grafico; come utilizzare calcolatrice o computer; ...)?

(**2**) Vi sono diverse materie che utilizzano concetti e tecniche matematiche. Ti sembra che i programmi scolastici (li conosci?) e/o la organizzazione delle attività didattiche siano tali da consentire un buon coordinamento tra lo sviluppo degli argomenti matematici nelle ore di matematica e il loro utilizzo nelle altre ore?



(**3**) Ti è mai capitato di utilizzare extrascolasticamente le conoscenze matematiche (diverse dalle quattro operazioni usate nel calcolo di costi, tempi, ...) sviluppate a scuola? Se sì, in quali contesti?

(**4**) Da solo (cioè senza lo stimolo dell'insegnante) ti sei mai posto problemi o ti sono mai sorte curiosità come le seguenti? # quale matematica serve per realizzare al computer il dinosauro o l'uomo virtuale che compare in un film? # quali metodi matematici si utilizzano per stabilire l'esito, positivo o negativo, della sperimentazione di un certo farmaco? # quanta matematica è "incorporata" in una automobile?

(**5**) Sulla base delle tue esperienze, quali sono, secondo te, le principali finalità dell'insegnamento delle matematica così come viene attualmente sviluppato nella scuola? Concordi con esse o, secondo te, dovrebbero essere altre le finalità dello studio della matematica?

(**6**) Se trovi/non trovi difficoltà e provi antipatia/simpatia per la matematica, a che cosa attribuisci ciò? (individua i fattori non solo negli altri o nelle situazioni esterne, ma anche in te stesso, nei tuoi atteggiamenti verso ceti tipi di attività, verso il lavoro creativo e quello ripetitivo, ...)

# COMUNICAZIONI

# TO SMOKE OR NOT TO SMOKE...? THAT'S A MONEY QUESTION!

Classi V (B,H) Liceo Scientifico G. Galilei di Perugia [1]

Docenti di matematica: C. Angioletti - F. Menconi

Il lavoro prende spunto da un'attività di risoluzione di un problema proposto dal prof. Villani in occasione del Convegno:

**"Stimare a quanto ammonterà, dopo 50 anni, il capitale di un fumatore che, decidendo di smettere di fumare a venti anni, voglia investire il denaro di un pacchetto al giorno così risparmiato".**

La situazione problematica, apparentemente banale, si è rivelata di non facile risoluzione per la difficoltà di tenere sotto controllo le variabili economiche coinvolte. La complessa ricerca di percorsi "ragionevoli" per tempi così lunghi (50 anni!!!) e la variabilità "capricciosa" dei mercati finanziari non consentivano di procedere con i consueti modelli deterministici di capitalizzazione composta, secondo la nota legge

$$S_n = S_0(1+i)^n \qquad (1)$$

dove $S_0$ è il capitale iniziale, $S_n$ il capitale al tempo n ed **i** l'interesse pattuito al momento dell'investimento. Se si fosse potuto applicare questo modello, l'investimento avrebbe prodotto una crescita esponenziale dell'investimento (v.fig1); invece, nella realtà, la variabilità di **i** determina un "rumore di fondo" che deforma l'andamento di $S_t$ in una spezzata ... stocastica (v.fig.2).

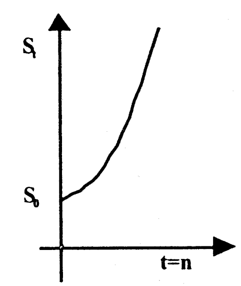



**Fig.1 - Andamento di $S_n$ per n=t e t∈R**

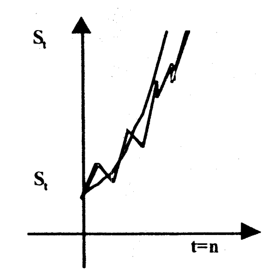



**Fig.2 - Andamento stocastico di $S_n$**

La legge (1) può essere allora modificata in una legge stocastica ricorsiva del tipo:

---

[1] Liceo Scientifico G.Galilei, via XIV Settembre 79, 06100 PERUGIA, tel/fax 075/5002069.

$$S_{n+1} = S_n(1 + \mu + \sigma\varepsilon) \qquad (2)$$

dove $\sigma$ è lo scarto quadratico medio della distribuzione di media $\mu$ ed $\varepsilon$ è un "numero casuale" di media 0 e varianza 1.

L'impostazione data permette di valutare l'ammontare di uno dei tanti possibili montanti che potrebbero essere accumulati nel periodo indicato, ma non il valore degli stessi, in quanto essa coglie solo gli aspetti matematico-finanziari del problema e non quelli economici; la scelta è stata dettata dalla incapacità di individuare parametri oggettivi in grado di quantificare l'inflazione.

Tutte queste considerazioni sono state il frutto di consulenze dirette e indirette, di analisi di procedure e formule specifiche, di elaborazioni informatiche; il lungo itinerario didattico ci ha portato a contatto con lo sconosciuto mondo finanziario e assicurativo, con la ricerca matematica, con i fenomeni aleatori, fino alla costruzione di un modello di simulazione della realtà.

Abbiamo posto le seguenti ipotesi:

1. il costo di un pacchetto viene fissato all'inizio e mai variato, non tenendo conto dell'inflazione;
2. i soldi giornalmente risparmiati vengono mensilmente versati in un c.c. bancario e lì rimangono per cinque anni prima di essere reinvestiti (per avere a disposizione portafogli di una certa consistenza);
3. gli investimenti, pur annuali, vengono comunque "quantizzati" in quinquenni (per esigenze di programmazione);
4. il risparmio conseguente al mancato uso di materiale accessorio come accendini, fiammiferi, caramelle, ... visite mediche (!!!), non viene preso in considerazione;
5. i tipi di investimenti considerati sono: finanziari (azioni, bilanciati, obbligazioni), previdenziali (fondi di investimento) e immobiliari (terreni agricoli e edificabili);
6. i rendimenti degli investimenti finanziari e previdenziali sono al netto delle spese e variano casualmente ogni anno secondo il rischio $\sigma$ e il numero casuale $\varepsilon$ di una distribuzione normale standardizzata ($S_{n+1}=S_n(1+\mu+\sigma\varepsilon)$);
7. la rivalutazione di ciascun tipo di immobile varia casualmente ogni anno secondo il rischio $\sigma$ e il numero casuale $\tau$ di una distribuzione uniforme compreso tra -1 ed 1 ($S_{n+1}=S_n(1+\mu+\sigma\tau)$);
8. i valori di $\mu$ e $\sigma$ sono fissati secondo stime ragionevoli (ai primi di ottobre 1998) per ciascun tipo di investimento;
9. un terreno agricolo può diventare edificabile con probabilità $p<0,2$ (e rivalutarsi quindi enormemente ).

L'algoritmo di calcolo è stato implementato su cartelle di fogli elettronici di Excel (una cartella per ogni ipotesi di investimento) ed è preceduto da una simpatica presentazione multimediale in PowerPoint con rime e animazioni.



Il lavoro è stato realizzato in circa un mese, impegnando, approssimativamente, 15 ore di attività curriculare, 20 ore di attività extracurriculare, 5 ore di libera attività destinata ai contatti esterni (banche, assicurazioni, esperti finanziari,..), alcune ripartite tra le due classi ed altre impiegate congiuntamente. Le nostre insegnanti di matematica ci hanno aiutato ad organizzare le varie fasi del lavoro, a definire le modalità di elaborazione dei dati e a strutturare l'algoritmo di calcolo, che noi ragazzi abbiamo concretizzato attraverso il software prodotto.

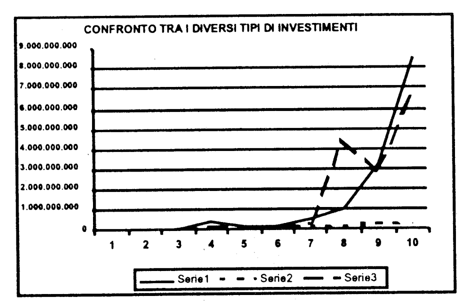
Il lavoro, pur intenso perché concentrato in un intervallo di tempo limitato, non è stato particolarmente impegnativo, perché ci ha incuriosito ed entusiasmato; non è frequente, nella usuale prassi didattica, poter affrontare e risolvere matematicamente problematiche riscontrabili nella vita quotidiana.

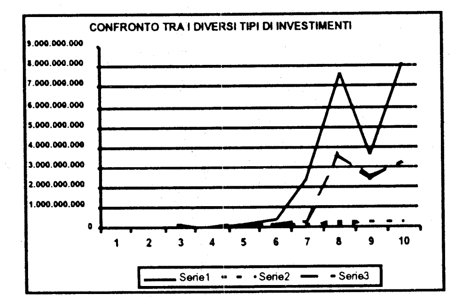
L'originalità di quanto elaborato non sta tanto nella capacità di calcolare il capitale finale dell'ex-fumatore, quanto nella potenzialità di determinare "molti possibili" capitali finali, grazie alle immediate capacità di ricalcolo che ha la struttura di Excel. Alla fine non si giunge ad un risultato, ma ad una serie di risultati in funzione della variabilità di $\sigma\varepsilon$

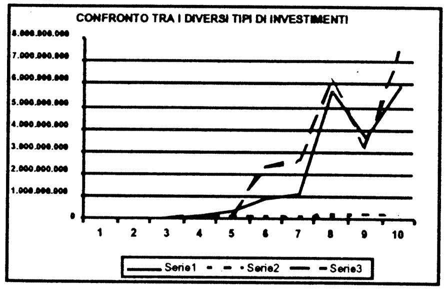
A titolo di esempio prendiamo in considerazione tre tipi di investimenti:

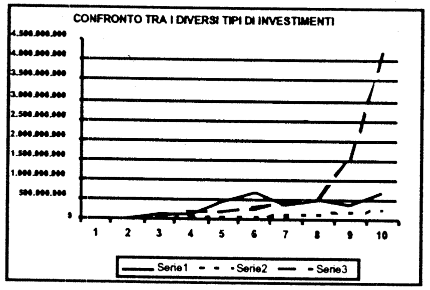
A - investimenti di solo tipo azionario
B - investimenti di solo tipo obbligazionario
C - investimenti di vario tipo.

Da questi possiamo ottenere rispettivamente tre serie di dati quinquennali (serie1, serie2, serie3), di cui riportiamo nelle figure che seguono i relativi andamenti:






Dal confronto tra i vari andamenti emerge chiaramente quanto diversi siano i rischi ed i guadagni nelle varie ipotesi di investimento e quanto variabile potrà rivelarsi il futuro. Dove il rischio è maggiore (azioni) si hanno possibilità di grandi guadagni (ma anche di grandi perdite!!), mentre dove il rischio è minore (obbligazioni, assicurazioni) non si può sperare in grandi guadagni. Nel caso di investimenti immobiliari, il rischio non è elevato (mal che vada, il terreno agricolo rimane agricolo e non perde di valore) e la rivalutazione del capitale potrebbe essere molto elevata (con un po' di fortuna, il terreno agricolo potrebbe diventare edificabile!).

Il ricalcolo del numero casuale e permette di visualizzare, con la sola pressione del tasto funzione F9 di Excel, la diversa performance dei vari investimenti proposti.



# UN APPROCCIO ALLA MODELLIZZAZIONE MATEMATICA I PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

P. Brandi* - A. Salvadori*

I ragazzi che si apprestano ad intraprendere gli studi universitari in una facoltà scientifica[1] devono superare un notevole *gap* per affrontare i corsi di Matematica. Troppo spesso la Matematica è considerata (da studenti e docenti) solo un "efficace strumento di selezione" e ... purtroppo sempre più spesso lo diventa. In alcuni corsi di laurea è proprio il difficile approccio con i corsi di Matematica a determinare l'abbandono degli studi nel primo biennio. Per una ricerca dettagliata sul difficile raccordo fra gli studi medi e quelli universitari si veda [1].

A nostro avviso, al di là delle eventuali carenze di tipo tecnico sulla preparazione di base, la ragione principale di questa difficoltà è di carattere metodologico. Gli studenti non sono coscienti del ruolo chiave svolto dalla Matematica nella vita di tutti i giorni e di conseguenza ignorano il ruolo effettivo di questa disciplina nel loro futuro curriculum.

Noi docenti e/o matematici di professione spesso ci troviamo in difficoltà di fronte a domande del tipo: a che mi serve? E ci trinceriamo dietro l'alibi della validità formativa. Ma la Matematica è molto di più di ... un mezzo per imparare a ragionare! Ed è ora che ci sforziamo a trovare il modo di comunicarlo ai nostri studenti.

Una indagine recente [2] sembra convalidare questa nostra analisi. Infatti un'alta percentuale degli allievi intervistati ritiene che *la Matematica serve di più a fare conti per arrivare alla soluzione di un esercizio che per la "vita reale"*. Precisamente, la percentuale dei ragazzi che ritengono la disciplina attinente alla realtà è molto alta nelle scuole elementari (80%) ma scende al 10% nelle medie inferiori e ben al 5% in quelle superiori!

Inoltre alla domanda "Ti piace la Matematica?" la percentuale di risposte affermative nel triennio della scuola superiore è così diversificata: 40% - 50% nei licei classici e scientifico-pedagogici, 60% nei licei scientifici e 80% negli istituti tecnici. Se non sorprende il maggior gradimento della Matematica nei licei scientifici rispetto a scuole ad indirizzo umanistico, certo fa pensare che essa sia ben inferiore a quella degli istituti tecnici. Che non sia determinante proprio il "diverso ruolo" che gioca tale disciplina in questi ultimi (come strumento di supporto alle materie professionali)?

---

* Università degli Studi di Perugia

[1] Economia e Commercio, Farmacia, Ingegneria, Medicina e Chirurgia, Medicina Veterinaria, Scienze Agrarie, Scienze dell'Informazione, Scienze MM., FF. e NN., Scienze Statistiche, etc...

Questa difficoltà non è solo italiana. Studi statistici e ricerche ad hoc sono attive in vari paesi Europei e negli Stati Uniti. In particolare, il Calculus Reform Project (attivo negli Stati Uniti dal 1986) [5] pone come obiettivo primario quello di ancorare l'insegnamento della Matematica alla vita reale. "...*non un semplice corso con applicazioni ma un corso che trae ispirazione dalla vita quotidiana}*... Gli studenti dovrebbero comprendere che *stanno imparando ad usare strumenti per risolvere problemi interessanti* e non che *stanno affrontando problemi per imparare ad usare gli strumenti*".(!)

Questa esigenza è oggi particolarmente sentita perchè la diffusione e l'affermarsi di strumenti di calcolo sempre più potenti e sofisticati ha dato un forte impulso allo sviluppo di modelli matematici anche in discipline non "tradizionali". D'altro canto gli stessi strumenti informatici possono offrire un valido supporto alla didattica, sia sul fronte della simulazione e rappresentazione di vari fenomeni, sia come mezzo per liberarsi dal mero calcolo e dedicare più tempo al ragionamento.

E' quindi opportuno che sin dalle scuole medie gli studenti prendano coscienza delle potenzialità della Matematica come strumento quotidiano di rappresentazione di molteplici aspetti della realtà.

Osserviamo infine che la comprensione dei concetti matematici (anche i più astratti) si acquista lavorando su problemi concreti, come conferma la nostra esperienza con le matricole di vari corsi di laurea.

Alla luce di questa premessa, presentiamo qui una *proposta concreta* di percorso didattico relativa alla problematica dell'ottimizzazione.

Abbiamo scelto questo argomento per almeno tre motivi: i problemi di massimo e minimo sono un efficace strumento di formalizzazione (e soluzione) di questioni inerenti una vasta gamma di discipline, coinvolgono concetti e tecniche di vari gradi di difficoltà e possono quindi essere proposti o ri-proposti a diversi livelli, infine trovano spazio nei programmi di tutti gli istituti superiori.

In altri termini, i problemi di ottimizzazione si prestano bene ad una didattica della Matematica che trae origine dalla vita reale, ma che non tralascia aspetti del rigore e dell'astrazione, altrettanto importanti dal punto di vista formativo.

Il percorso didattico che qui proponiamo è stato argomento di studio di un gruppo di lavoro nell'ambito del II Ciclo di Incontri di formazione organizzati dal Progetto Didattico[2] *Ingresso soft delle matricole ai corsi di Matematica nelle Facoltà scientifiche* del Dipatimento di Matematica ed Informatica dell'Università di Perugia nell'a.a. 1997-98 [4] ed è stato tema di sperimentazione didattica in due licei scientifici della regione Umbria. Tale sperimetazione proseguirà anche in altri Istituti Superiori nell'a.a. 1998-99.

In estrema sintesi, la nostra proposta è la seguente.

[2] Vedi la voce Progetto Didattico nel sito internet\ http: //www.dipmat.unipg.it



Segnaliamo che sono in via di definizione alcuni quaderni didattici (corredati da software) che illustrano in dettaglio il percorso didattico e le relative schede. Non appena disponibili saranno reperibili presso il sito internet del Progetto Didattico.

## Percorso didattico

Proporre e discutere insieme ai ragazzi alcuni problemi della vita reale in cui siano coinvolte quantità da ottimizzare (ad esempio una buona scelta si può trovare in [3,4]). Da questi problemi scaturisce, in modo naturale, l'esigenza di introdurre i concetti di massimo e minimo. La formalizzazione degli stessi e lo sviluppo della relativa teoria (vedi scheda n.2) può quindi proseguire gradualmente, anche in fasi successive, avendo sempre in mente però il filo conduttore: la modellizzazione di un problema concreto in termini matematici (vedi scheda n.1).

In questo modo l'allievo recepisce l'insegnamento come scoperta dinamica e diviene parte attiva nella evoluzione dell'argomento.

Parallelamante allo sviluppo della teoria, si tornerà alla formalizzazione e quindi alla soluzione dei vari problemi, via via che gli stumenti introdotti saranno sufficienti allo scopo. A questo proposito sarà opportuno scegliere problemi (quelli proposti all'inizio) di vario grado di difficoltà, avendo l'accortezza di inserirne alcuni di immediata risoluzione, così da evitare di dilazionare troppo a lungo le risposte alle questioni poste.

La fase finale di ciascun esercizio sarà dedicata ad una riflessione sulla *significatività delle soluzioni* così da abituare gli studenti a non accontentarsi passivamente di aver ottenuto "qualcosa". E' importante proporre anché problemi privi di soluzione o che ne ammettono infinite per stimolare un apprendimento attivo e dinamico che metta costantemente in dicussione teoria ed applicazioni.

Desideriamo infine segnalare che questa problematica si presta a vari possibili percorsi di approfondimento, anche in direzione di una astrazione maggiore. Due di essi sono illustrati nella scheda n.3.

### Scheda n. 1
### Come affrontare i problemi di ottimizzazione

Stabilire quale sia la quantità da ottimizzare.

Individuare dati ed incognite.

Fare uno schema delle relazioni note (riduzione delle variabili).

Scegliere l'incognita e il suo universo.

Formalizzare la funzione da ottimizzare.

Discutere l'esistenza di soluzioni.

Unicità della soluzione.

Calcolo delle soluzioni (esatto e/o approssimato).

Significatività del risultato ottenuto.

Scheda n. 2

**La matematica dei problemi di ottimizzazione**

Massimo e minimo di un insieme

Esistenza: C.N. (limitatezza) e C.S.

Unicità

Calcolo: esatto e/o approssimato

Massimo e minimo di una funzione

Esistenza: C.N. (limitatezza, massimi e minimi locali) C.S. (Teorema di Weierstass)

Unicità

Calcolo esatto: criteri per la ricerca di massimi e minimi locali

Calcolo approssimato: localizzazione delle soluzioni ed algoritmi per la determinazione degli zeri dell'equazione $f'(x)=0$

Scheda n. 3

**Possibili sviluppi del tema "ottimizzazione"**

(A) Introduzione dei concetti di estremo superiore ed inferiore come estensione secondo Dedekind di quelli di massimo e minimo.

Motivazioni: studio di alcuni processi che conducono a successioni monotone. Alcuni esempi: la rettificazione della circonferenza, l'algoritmo di Erone per il calcolo della diagonale di un quadrato, il calcolo dell'area del settore parabolico mediante il metodo di esaustione, i numeri di Fibonacci, i frattali di Koch e Sierpinski.

Interesse didattico: presentazione degli algoritmi di sup ed inf come percorso di pre-limite (consigliato anche nelle scuole ove non si introduce il calcolo infinitesimale).

(B) Relazione d'ordine ed insiemi ordinati.

Motivazioni: esempi di insiemi ordinati della vita quotidiana come l'elenco alfabetico, l'albero delle directories di un computer, etc....



Interesse didattico: la formalizzazione dei concetti di max e min (sup ed inf) negli insiemi ordinati. Riscoperta delle relazioni d'ordine come strumento di modellizzazione matematica della vita reale.

Alcuni esempi di raccordo con argomenti noti: mcm e MCD come sup ed inf rispetto la relazione d'ordine di divisibilità; intersezione ed unione di insiemi come sup ed inf rispetto la relazione di inclusione.

**Referenze**

[1] G.Accascina, *La strage degli innocenti. Problemi di raccordo in Matematica tra scuola e università*, Centro R.D. Ugo Morin, (1998), Ed. G. Battagin

[2] C.Beninato - D.Cariolo - A.Grifeo, *Un'indagine sull'impatto emotivo e formativo dell'insegnamneto della matematica nella scuola*, Atti Convegno Nazionale Mathesis - L'Aquila (1998);

[3] P.Brandi - A.Salvadori, *Percorsi di Analisi Matematica*, Libreria Athena Ed. - Perugia (1997);

4] P.Brandi - A.Salvadori, *La didattica dei problemi di ottimizzazione*, Atti II Ciclo di Incontri di Formazione - Perugia 1997-1999, in corso di preparazione;

[5] P.Johnson - M.K.Heid - B.Edwards - N.Bohidar, *Seventeen major calculus reform projects: a guide to choosing a reform calculus curriculum* (1996)

# METODI E STRUMENTI INNOVATIVI PER LA FORMAZIONE SCIENTIFICA.*

R. Cavaliere - A. Cavallone - M. Marsella - V. Martuscelli
S. Miranda - S. Salerno

Consorzio Centro di Ricerca in Matematica Pura ed Applicata
c/o DIIMA Università degli studi di Salerno
via Ponte don Melillo 84084 Fisciano (SA)

**Abstract**

In questo lavoro viene presentato un approccio IT based per lo sviluppo di strumenti innovativi di divulgazione scientifica. L'idea di base, è di far coesistere in un unico prodotto due aspetti fondamentali dell'elaborazione automatica: le computazioni scientifico-matematiche e la presentazione delle informazioni e dei risultati all'utente in modo amichevole, attraverso un'interfaccia avanzata con caratteristiche multimediali interattive. Un tutoring siffatto rappresenterebbe una notevole innovazione nella didattica assistita dal Computer, che non solo permetta l'approfondimento delle conoscenze teoriche, ma che preveda anche una sessione attiva mediante simulazione, in modo tale da permettere di comprendere appieno tutte le caratteristiche del modello di studio.

Con questo lavoro si è realizzato lo scheletro di uno strumento innovativo per la didattica delle materie scientifiche. Per mostrarne un'efficace applicazione è stato scelto un semplice argomento: la tassellatura del piano, e quindi le trasformazioni geometriche.

## Introduzione

Lo sviluppo rapido delle tecnologie più avanzate implica che il ruolo della matematica diventi sempre più importante nella ricerca e nello sviluppo di una società industriale. Esse permettono la realizzazione di complessi «sistemi intelligenti» capaci di interagire con l'utente in maniera diretta e quindi tale da ottenere risultati ottimali nella diffusione della cultura scientifica, ma sono ancora rari gli applicativi davvero innovativi per la didattica assistita dal computer.

La nostra idea è appunto quella di affiancare un potente sistema di presentazione delle informazioni con un altrettanto potente motore per computazioni scientifico/matematiche. In tale contesto siamo anche in grado di definire e realizzare un sistema di simulazione grazie al quale l'utente può seguire l'evoluzione del sistema modellato e valutarne in tempo reale le conseguenze derivanti dalla variazione di alcuni parametri coinvolti.

* Questo lavoro è stato realizzato con il parziale supporto del CNR, progetto «Didattica Matematica assistita dal computer».



## Stato dell'arte

Ormai sono presenti sul mercato numerosi prodotti multimediali di ottima fattura, che hanno un ottimo effetto fin quando si rimane nel contesto di materie non prettamente scientifiche. In tali casi, però, l'utente rimane uno spettatore passivo e quindi il livello di apprendimento rimane ancorato al grado di assimilazione delle informazioni ricevute passivamente.

Il risultato delle nostre ricerche è un prodotto che soddisfa le seguenti caratteristiche:

( deve essere in grado di presentare gli argomenti scientifici in maniera differenziata a seconda della tipologia di utente;
( deve poter offrire all'utente una partecipazione attiva;
( deve stimolare l'ingresso, al mondo scientifico, anche al semplice autodidatta;
( deve essere in grado di abbattere le barriere alla divulgazione della cultura scientifica.

Esso è incentrato su una sessione sperimentale per la simulazione interattiva di processi o fenomeni naturali. In sostanza è stato realizzato un «simulatore» grazie al quale è possibile descrivere ed analizzare, dal punto di vista matematico/concettuale alcuni fenomeni naturali.

## La piattaforma di sviluppo.

Dalle considerazioni appena svolte si deduce che è fondamentale la scelta dei due sistemi di sviluppo software per la realizzare di un siffatto applicativo multimediale. Per quanto concerne la creazione delle GUI è stato scelto un software per la creazione di applicativi multimediali interattivi: Toolbook; per quanto concerne il motore per le computazioni matematiche è stato scelto Mathematica3.0™, che soddisfa appieno le caratteristiche di un Computer Algebra System.

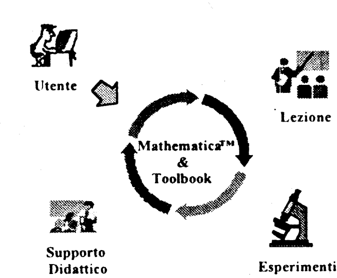



**Figura 1** Schema riassuntivo del tutorial realizzato.

## Un esempio di simulazione mediante l'uso di modelli matematici: la cristallografia

La ripetizione ritmica e continua di un medesimo motivo è la più semplice forma che si può individuare nell'arte ornamentale e può essere definita divisione regolare del piano o tassellatura del piano. Nella tassellatura un unico motivo detto "pattern" viene ripetuto con continuità, applicando ad esso trasformazioni isometriche.

Tramite l'azione di un'isometria sulla mattonella base, si ottengono copie delle figure geometriche da cui eravamo partiti, ma in differenti posizioni nel piano. Si ottiene una «tassellatura regolare» se l'unione di tutte queste figure ricopre tutto il piano e se esse, pur non essendo sovrapposte, combaciano lungo un lato in modo da non lasciare "buchi".

## Descrizione dell'esperimento

Per realizzare una tassellatura regolare del piano gli elementi essenziali sono i poligoni regolari ed i movimenti rigidi. Nella sessione di simulazione bisognerà scegliere un poligono tra quelli messi a disposizione ed un movimento rigido da far agire sulla figura geometrica. La scelta del poligono è ristretta solo al caso di triangoli equilateri, quadrati ed esagoni, aventi dimensioni scelte a piacere, perché essi sono gli unici a permettere una tassellatura regolare del piano. A questo punto, per tassellare il piano, è necessario scegliere l'appropriato movimento rigido. Tra quelli a disposizione vi sono: *traslazioni* e *rotazioni*, le simmetrie non vengono considerate perché esse possono essere trattate come composizione di traslazioni e rotazioni.
Di seguito è mostrata la finestra principale, in cui l'utente può cambiare alcuni paramenti e visualizzare graficamente i risultati della sessione di simulazione.

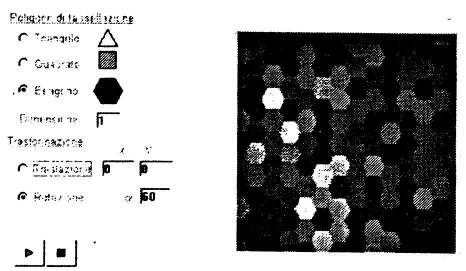


**Figura 2** Tassellatura esagonale. In questa figura viene visualizzato il risultato di una tassellatura regolare del piano effettuata utilizzando esagoni regolari e rotazioni di 60°.

## Conclusioni

In questo lavoro abbiamo presentato una metodologia innovativa per la divulgazione scientifica affiancando un potente sistema di presentazione multimediale a Mathematica 3.0, rendendo possibile la realizzazione di complessi esperimenti scientifici interattivi. Tramite lo strumento realizzato è possibile non solo fornire informazioni e nozioni, ma anche verificare direttamente la capacità di



apprendimento dell'utente modificando l'esposizione dei contenuti multimediali sulla base del suo skill.

Quindi, l'integrazione realizzata rappresenta uno strumento didattico di sicuro interesse per la comunità scientifica.

## Bibliografia


M. Jaglon – **Le isometrie**, *Zanichelli, Bologna*

G. Gargiulo, A. Gisolfi, P. Ritrovato, R. Ruocco, S. Salerno, - **A System for Scientific Experiment Simulation**, *Research Centre for Pure and Applied Mathematics.*

R. M. Cagné, L.J. Briggs, **Principles of instructional design.** *Holt, Rinehart & Winston, London 1970*

R.Kempa, **La valutazione nell'insegnamento scientifico.** *Zanichelli, Bologna, 1987*

D.B.Wagner, **Power programming with Mathematica: The Kernel**, *McGraw-Hill, 1996*

R.Maeder, **The Mathematica Programmer**, *AP Professional, 1994*

**MathLink for Windows, Developer's Guide**, *Version3, Revision 5, September 25, 1996*

Microsoft Visual Basic – **Manuale del programmatore**, *Microsoft Corporation*

V. Martuscelli, M. Panella – **Un ipertesto per lo studio delle trasformazioni geometriche**, *Tesi di Laurea*

Cavallone – **Strumenti automatici per l'apprendimento dell'algebra lineare basati su Mathematica™**, *Tesi di Laurea*

R. Cavaliere, A. Cavallone, V. Martuscelli, S. Salerno – **Developing Tools for Teaching Mathematics using Mathematics 3.0**, *«1997 Mathematica Developer Conference» – Urbana-Champaign, Illinois, 1997*

# IL PROCEDIMENTO DI ANALISI-SINTESI E LA SUA VISUALIZZAZIONE: UNA GUIDA ATTRAVERSO LA MATEMATICA, LE SCIENZE, L'ARTE

Fausto Clavarino[1] - Annamaria Somaglia[2]

La sempre crescente complessità delle materie che gli studenti debbono affrontare nella scuola secondaria dovrebbe orientare i docenti verso un insegnamento che fornisca strumenti e contenuti fondamentali, cioè conduca gli studenti ad ***apprendere ad apprendere*** e si fondi su ***contenuti essenziali***.

B.Bellanova scrive, a proposito del controllo da parte dello studente del proprio apprendimento che "Solo attraverso la riflessione sulle proprie procedure apprenditive l'alunno può acquisire le competenze procedurali necessarie per utilizzare quelle stesse procedure o inventarne altre idonee alla soluzione delle situazioni-problema in cui si verrà a trovare.." (*Bellanova B. Baraldi E. 98, p65*). Tale punto di vista implica, ad un primo livello di astrazione, una riflessione sui percorsi stessi all'interno di ciascuna materia. In particolare per la matematica è significativo guardare alla dimostrazione: G.Harel e L.Sowder, presentando uno schema molto articolato delle sue fasi di apprendimento, segnalano anche "il piano della consapevolezza" (*Harel G. Sowder L., 97*) il livello nel quale lo studente guarda "dall'esterno" ciò che ha studiato, mettendo a fuoco i procedimenti utilizzati: sarà così in grado di applicarli in situazioni analoghe.

Nell'attuale dibattito sui contenuti essenziali per la formazione scolastica sembra acquistare importanza la ricerca di "nuclei concettuali fondanti" ai quali ancorare percorsi didattici culturalmente significativi (*M.P.I. 97 e 98*)

Ambedue le esigenze riportano l'attenzione su un insegnamento a ***carattere interdisciplinare che suggerisca "economie" sia sui metodi che sui contenuti***; per entrambi gli aspetti la matematica può giocare un ruolo importante.

Cogliendo alcune caratteristiche di lavori a carattere interdisciplinare nella IV serie del Periodico di matematiche e in recenti esempi per la scuola secondaria superiore, troviamo che si può guardare alla interdisciplinarità come integrazione delle varie discipline che concorrono per lo studio di un testo/argomento *matematico (L.Grugnetti -F. Jacquet,96, J.P.Guichard-J.P.Sicre, 88*) oppure si può "vedere" la matematica all'interno delle varie discipline (*M.Emmer, 89, W.S.Peters, 89, J.Guichard, 88*) o addirittura cercare i procedimenti logici che sottendono alle varie discipline come suggerisce F.Speranza (*Speranza, F., 90*). Notiamo anche che: - la storia, presentando casi reali di scambi e legami tra vari settori disciplinari, si rivela essere un utile strumento, (guardando ai metodi comuni tra discipline diverse, anche se la matematica ha un

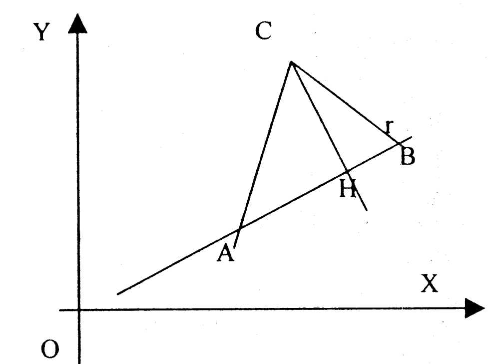
[1] Studente della Facoltà di Farmacia, Università di Genova

[2] Docente del Liceo scient. c/o Convitto Naz."C.Colombo" Genova e del G.R.E.M.G.



ruolo chiave, tutte le discipline coinvolte si chiariscono reciprocamente, (la visualizzazione di idee matematiche è un efficace mezzo per apprendere, ma soprattutto è un mezzo di comunicazione facilmente comprensibile in settori disciplinari diversi.

Descriviamo qui una esperienza attuata in una classe quarta di liceo scientifico a programma tradizionale da uno degli autori dell'articolo, concordando i tempi di lavoro con gli insegnanti di scienze e disegno. Partendo dallo studio della semplice simmetria assiale in M.C. Escher, la cui ricerca artistica si prefigura in modo evidente come interdisciplinare, attraverso lo studio delle trasformazioni in matematica, si è lavorato sulla simmetria in musica (G.S.Bach) con la rappresentazione della frequenza suggerita da B. Scimemi ('83) e nelle scienze conducendo lo studente verso una "visualizzazione" in senso astratto della simmetria. Si è successivamente introdotta la procedura di analisi-sintesi, metodo logico comune a più discipline, ma complesso dal punto di vista dell'apprendimento. Si arriva infine a vedere come anche il metodo di analisi-sintesi appartenga alla matematica (*Furinghetti F., Somaglia A, 97*) e alle scienze (chimica) (*Streitwieser A. et alii, 95*) e si contribuisce a chiarire il ruolo della matematica in rapporto alle altre discipline. Presentiamo un esempio del tipo di esercizi svolti in geometria analitica: **"Dati i punti A(2,1) B(5,2) C(4,5) determinare l'area del tr.ABC."**



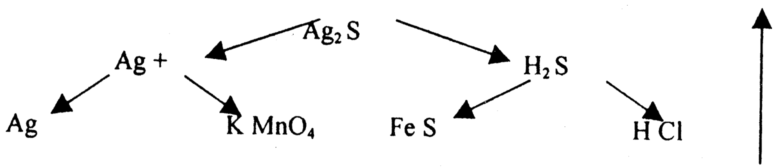

Partendo dalla tesi con un percorso a ritroso gli studenti arrivano alla ipotesi:

A(ABC) = ½ AB    CH
↓    ↓
d(A,B) d(C,BA)
↓
r(B,A)

ricostruiscono poi la soluzione seguendo lo schema dal basso verso l'alto.
(*da Somaglia A., 98*)

Un esempio degli esercizi di chimica presentati a confronto con la matematica è: ***"Dati: acido cloridrico, argento metallico, ossido di calcio, permanganato di potassio, solfato ferrico, solfuro ferroso solido, zinco metallico: precipitare solfuro d'argento."***

Partendo dal solfuro d'argento per ogni composto si cercano i possibili reattivi da cui può essere ottenuto




Percorrendo la strada in senso inverso, possiamo ricostruire la nostra reazione:
$3Ag+KMnO_4+2H_2O \text{ ---> } 3Ag^++MnO_2+K^++4OH^-$; $FeS+2HCl \text{ ---> } H_2S+FeCl_2$
$2Ag^++H_2S \text{ ---> } Ag_2S + H^+$

Nell'attuare l'esperienza si è cioè confidato nel fatto ***che l'immagine di un "fatto matematico"*** corrisponda ad afferrare connessioni tra i concetti, secondo la psicologia della Gestalt, che, attraverso la ***simmetria***, gli studenti avrebbero compreso e "visto" più facilmente la ***procedura di analisi-sintesi*** come metodo comune a discipline diverse.

In particolare in matematica la dimostrazione per analisi-sintesi (si *veda Somaglia, A., '98*) ha trovato nel lavoro descritto un valido supporto: prima nella sua visualizzazione, poi nella descrizione della procedura di andata/ritorno nei diversi ambiti presi in esame. Ciò sembra in accordo con quanto espresso da G.Lolli: egli chiarisce come talvolta la "modellizzazione" di una situazione fornisca anche la comprensione, la soluzione e la spiegazione del problema e in generale afferma che la visualizzazione è un supporto alla definizione/descrizione di una struttura e può aiutare la fase della spiegazione della dimostrazione (*Lolli,G., 95*).

**Bibliografia**


Bellanova,B.,Baraldi,E.,98, *"Programmare l'apprendimento: dai concetti alle mappe concettuali"* Modena,1998.

Furinghetti,F.,Somaglia,A.,97 *"Storia della matematica in classe"* in L'Educazione matematica, a. XVIII, s. V, v.2,n°1, 1997, 26-46.





Emmer,M.89 *"Art and Mathematics: an interdisciplinary model for Mathematics Education"* Blum, W. et alii ed. "Applications and modelling in learning and teaching mathematics", 1989, 213-218.

Guichard,J,88, *"Math-Philo:Pascal et l'infini en terminale littéraire"* Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, Bullettin Inter-Irem Epistémologie, 1988,153-172.

Guichard,J.P.,Sicre,J.P,88, *"Activités interdisciplinaires en premier cycle à propos d'un mathématicien français du 16-ème siècle: François Viete"* in Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, Bullettin Inter-Irem Epistémologie, 1988, 249-270.

Grugnetti,L.,Jaquet,F.96 *"Senior secondary school practices"* in International handbook of mathematics education, Bishop, A. J. et alii ed., Dordrecht,1996, p.615-645.

Harel,G.,Sowder,L.97, *"Students' Proof schemes"*, framework

Lolli,G.,95 *"Visione e logica della dimostrazione"* A. Brigaglia e M.Emmer dossier, Lettera Pristem, v.18,X-XX.

M.P.I.,97, *"Documenti commissione dei quaranta"* ipert. a cura di R.Maragliano, D.M.n°50, 21/1/97 e n°84, 5/2/97.

M.P.I.98, *"I contenuti essenziali per la formazione di base"* doc. a cura di Maragliano,R. et alii

Peters,W.S.,89, *"Visualisation of mathematical aspects in interdisciplinary teaching"* in Blum, W. et alii ed. "Applications and modelling in learning and teaching mathematics" 1989, 230-237.

Scimemi,B.,83, *"Musica, aritmetica e buon temperamento"* Archimede,a.35, 3-20,1983.

Somaglia,A.,98, *"Analisi-sintesi:un resoconto di esperienze didattiche"* in Conferenze e Seminari Mathesis Subalpina (a cura E.Gallo L.Giacardi C.S.Roero) Torino,1998,16-27.

Speranza, F.,90, *"Matematica e scienze: quale distinzione, quale integrazione?"* in L'Educazione matematica, s. III, a. XI, v. I, suppl. al n∞2, 1990, 47-54.

Streitwieser A. Heathchock CH. Kosower E.M,95, *"Chimica organica"* ed.ital.Edises, 1995

# LA SIMMETRIA ED I CRISTALLI
# UNA ESPERIENZA DIDATTICA

Livia Favia*

Lo studio delle forme dei cristalli ha attirato l'attenzione dell'uomo fin dalla antichità ed ha contribuito alla generalizzazione ed estensione del concetto stesso di simmetria. Lo studio delle simmetrie dei cristalli inoltre ha portato ad affrontare questioni gruppali tridimensionali, anche prima che la nozione di gruppo venisse chiaramente formulata. Dal momento che le simmetrie dei cristalli spiegano anche particolari proprietà fisico-chimiche sperimentalmente osservabili e tecnologicamente utili, lo studio dei cristalli funge da raccordo tra la Matematica e altre discipline quali la Biologia, la Fisica, la Chimica e la Scienza dei Materiali.
In questo articolo viene presentata una esperienza didattica condotta in una classe seconda di un Istituto Professionale incentrata sul tema dei gruppi di trasformazioni isometriche nello spazio.
Per permettere agli studenti di operare con strumenti appropriati a livello di indagine sensoriale fantastica e logica, l'esperienza didattica consta di due momenti: quello del *riferimento alla realtà* - che evita la costruzione di giochi formali ed educa alla ricerca della plausibilità nell'enunciare congetture ed ipotesi - costituito dalla osservazione e dalla analisi delle simmetrie multilaterali che si presentano nelle sostanze cristalline e quello del *fondamento logico* costituito appunto dallo studio delle trasformazioni isometriche dello spazio.
L'esame della struttura dei solidi cristallini fà emergere la proprietà distintiva dello stato cristallino che è la ripetizione regolare di un motivo costituito da atomi molecole o ioni. Il motivo si ripete ad intervalli regolari lungo tre direzioni non complanari, in una decomposizione dello spazio secondo parallelepipedi congruenti ( celle elementari): se si considerano gli atomi come punti disposti in modo regolare, questi ultimi costituiscono dal punto di vista geometrico un reticolo tridimensionale.
Sono state presentate tre schede di lavoro che hanno guidato gli alunni alla individuazione del gruppo di trasformazione ammissibile dai reticoli cristallini.
La *prima scheda* ha guidato gli studenti a decomporre la struttura di alcuni solidi cristallini (salgemma, pirite, grafite, diamante, galena) in celle e successivamente ad individuare le traslazioni che consentono di 'ricostruire' i reticoli a partire da una di esse: i reticoli cristallini hanno alcune simmetrie 'ovvie', ossia le traslazioni nelle tre direzioni fondamentali. La scheda ha suggerito agli alunni di ricalcare su carta trasparente la cella elementare e di 'riempire' lo spazio con essa, disegnando un punto in corrispondenza di ogni vertice: ciò ha consentito di individuare le traslazioni che portano un atomo a 'ricoprire' tutte le posizioni occupate da atomi dello stesso elemento (equivalente) (fig.1). Gli studenti hanno potuto

* I.P.S.S. "S. De Lilla" BARI



'vedere' molti casi di composizione di traslazioni e ipotizzare che ogni traslazione sia generata dalla composizione delle traslazioni fondamentali lungo le direzioni non complanari individuate dai parametri della cella elementare. L'ipotesi da essi formulata - successivamente convalidata - è che la composizione determini una struttura di gruppo finito sulle traslazioni ammissibili dal reticolo cristallino.

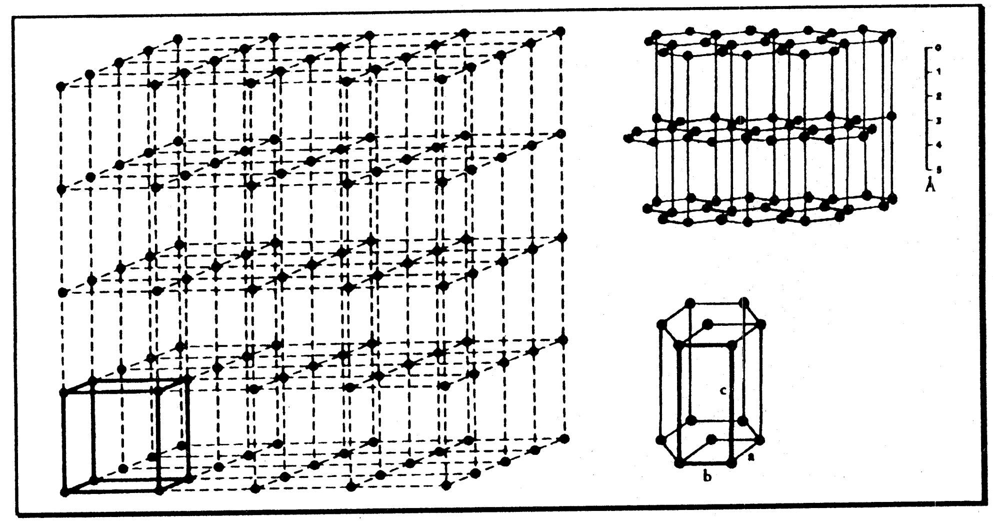


*fig.1: reticolo e cella elementare (grafite, salgemma)*

I reticoli cristallini oltre alle simmetrie 'ovvie', che sono le traslazioni nelle tre direzioni fondamentali, ne hanno altre. Per esempio un reticolo costituito da cubi ha tutte le simmetrie di un cubo: varie riflessioni e rotazioni. Le simmetrie rotazionali di un reticolo si possono trovare osservando solo le simmetrie che ne fissano l'origine: queste formano il gruppo puntuale del reticolo. I reticoli spaziali possono avere simmetrie di rotazione di ordine 2, 3, 4, 6, ma non di altri valori: in particolare non possono avere simmetria di rotazione di ordine 5 (restrizione cristallografica).Ogni reticolo spaziale ammette un gruppo finito di rotazione. Esistono 32 gruppi finiti di rotazione ammissibili dai reticoli cristallini, che offrono un esempio reale di gruppo di trasformazioni isometriche dello spazio.
La *seconda scheda* ha guidato gli studenti ad individuare le rotazioni che riportano in sé la cella elementare delle strutture cristalline esaminate. La scheda suggerisce agli alunni di costruire un modello fisico di cella elementare e di individuare le rotazioni assiali di ampiezza multipla di p, p/2, p/3 e 2p /3 che portano un atomo a 'ricoprire' tutte le posizioni occupate da atomi dello stesso elemento (equivalente). Gli studenti hanno potuto 'vedere' molti casi di composizione di rotazioni assiali ad assi incidenti e ipotizzare che la composizione di due rotazioni si può ottenere con una terza rotazione (teorema di Eulero). L'ipotesi da essi formulata - successivamente convalidata - è che la composizione determini una struttura di gruppo finito sulle rotazioni ammissibili dall'intero reticolo cristalli-

no. La scheda ha confermato l'individuazione dei gruppi di operatori di simmetria rotazionale ammissibili dai reticoli cristallini (fig.2).
Alcuni caratteri esterni osservabili nei solidi cristallini come la forma dei frammenti, la trasparenza e la durezza dipendono dalla simmetria reticolare.
L'accrescimento e la sfaldatura dei singoli campioni cristallini avvengono secondo forme poliedriche che hanno *almeno* gli stessi elementi di simmetria ammessi dal relativo reticolo cristallino: i singoli frammenti di un cristallo assumono forme poliedriche derivate per troncamento da una forma più semplice (primaria).

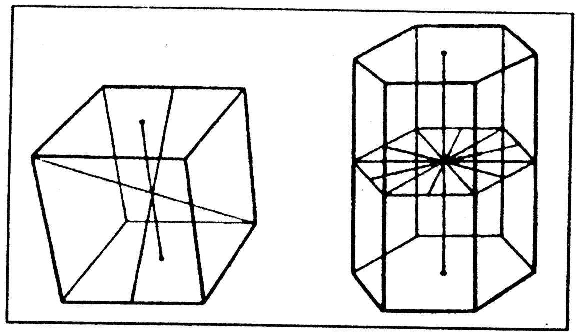


fig. 2: assi di simmetria rotazionale ammissibili da un reticolo cristallino (grafite, galena)

La *terza scheda* ha guidato gli studenti ad individuare in diversi campioni di una stessa sostanza cristallina con differenti morfologie (galena, diamante, pirite) l'esistenza dello stesso gruppo di simmetria rotazionale ammissibile dal relativo reticolo cristallino. L'ipotesi da essi formulata - successivamente confermata - è che alcuni poliedri regolari (come il cubo e l'ottaedro, il pentagonododecaedro e l'icosaedro) hanno lo stesso gruppo di simmetria rotazionale (fig.3). La scheda ha confermato questa ipotesi, spiegando alcuni fenomeni, come la rifrangenza e la piezoelettricità, alla luce delle simmetrie multilaterali osservate nei cristalli.

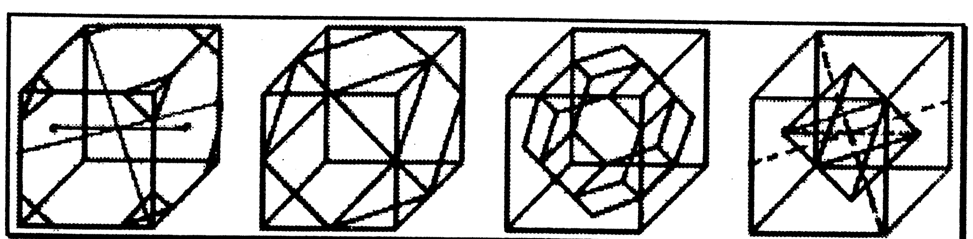


*fig.3: forme cubiche ed ottaedriche del cristallo di galena*

Questa esperienza ha consentito agli alunni di 'vedere' esempi reali di gruppi di



trasformazioni spaziali presenti in natura e di osservarne e spiegarne gli effetti concreti sulle proprietà fisiche ed ottiche dei singoli campioni, consentendo di creare relazioni cognitive con le nozioni apprese in discipline apparentemente distanti come la Matematica e le Scienze della Terra, ancora prima che la nozione di gruppo fosse stata formalmente introdotta, ripercorrendo così l'iter storico che ha portato alla scoperta e definizione dei gruppi di trasformazioni isometriche dello spazio.

BIBLIOGRAFIA

1) Bolognesi M., Coda A., Giacovazzo C., Gilli G., Scordari F., Viterbo D., *"Introduzione alla Cristallografia Moderna"*, Ed. Fratelli Laterza, Bari, 1985.
2) Cascarano G., Favia L., Giacovazzo C. *"Sirpow.91 - a direct-methods package optimized for powder data"* in "Journal Applied Crystallography", 1992 25, pp.310-317, International Union of Cristallography, 1992.
3) Hilbert D., Cohn-Vossen S., "Geometria intuitiva", Ed. Bollati Boringhieri, Torino, 1991.
4) Marchi M. *"La Geometria dello Spazio"* in "L'insegnamento della Geometria Quaderno 19/2 M.P.I.-U.M.I", pp.144-186, Liceo Vallisneri, Lucca, 1997.
5) Segre B. *"La simmetria e la scienza"* in "Insiemi Gruppi Strutture", Le Scienze, quaderno n. 92, pp. 16-22, Ed. La Nuova Italia, Firenze,1996.
6) Stewart I., Golubitsky M. *"Terribili Simmetrie"*, Ed. Bollati Boringhieri, Torino, 1995.

## UN'ESPERIENZA PLURIENNALE DI COLLABORAZIONE CULTURALE E DIDATTICA TRA MATEMATICA ED ALTRE SCIENZE

(Fiorella Menconi, Liceo Scientifico G.Galilei di Perugia[1])

L'esperienza che è stata svolta negli anni scolastici 1996/97, 1997/98 con ragazzi di quinta classe del Liceo Scientifico G.Galilei di Perugia, frutto della mia collaborazione con l'insegnante di Scienze (prof.ssa Francesca Vergine), si poneva l'obiettivo fondamentale di **approfondire argomenti di interesse scientifico pluridisciplinare attraverso la ricerca, la rielaborazione e la ricostruzione ipertestuale e multimediale delle informazioni**

Il tema da sviluppare, le modalità da seguire e le tecnologie informatiche da utilizzare sono state scelte con gli allievi, giungendo a due ipertesti multimediali realizzati in ToolBook 4.0:

1. **Uno studio dei sistemi caotici,** (A.s.96/97) costituito da un file .tbk e da altri 20 file tra animazioni, video e audio, per un totale di circa 90 Mb di spazio su disco.
2. **Sessualità: percorso per un processo di crescita consapevole. Indagine sulle problematiche relazionali dell'universo giovanile,** (A.s. 97/98) costituito da un file .tbk e da altri 43 file tra animazioni, video e audio, per un totale di circa 230 Mb di spazio su disco.

I lavori, pur partendo dalle stesse motivazioni culturali e didattiche, sono tuttavia diversi. Il primo, che ha preso vita dalla curiosità e dall'inventiva dei ragazzi, è frutto di una faticosa ricerca di contenuti, immagini e collegamenti non facilmente reperibili e interpretabili, data la complessità degli argomenti e la carenza di informazioni comprensibili ad un livello elementare. Il secondo lavoro è invece frutto della volontà di riorganizzare una serie di importanti risultati ricavati in anni di ricerca psicologica, sanitaria e sociale da parte degli operatori socio-sanitari del Consultorio Giovani della USL n°2 di Perugia in collaborazione con gli insegnanti di scienze di tutta la scuola; il legame con la matematica è qui soprattutto strumentale: l'informatica e la statistica sono stati importanti strumenti di lettura e di organizzazione delle informazioni

Comunque entrambi mostrano come vario possa essere il rapporto e la collaborazione tra docenti di matematica e di altre scienze, non limitandosi all'ovvia interdisciplinarietà dei propri contenuti, ma estendendosi anche all'impiego delle proprie competenze professionali in attività di interesse pluridisciplinare.

**"Uno studio dei sistemi caotici"** ha permesso agli allievi di avventurarsi nell'affascinante mondo matematico delle funzioni ricorsive e dei frattali per capire come esso riesca a dare un'interpretazione a fenomeni "caotici" di vario genere, come l'evoluzione delle condizioni meteorologiche, la conformazione delle linee costiere, l'evoluzione di sistemi dinamici: tutti fenomeni che non sono facilmente interpretabili con il determinismo della scienza classica.

Dopo una serie di pagine introduttive con "effetti speciali" di vario genere, il book si sviluppa in tre percorsi principali, logicamente collegabili tra loro attraverso links reversibili (dalle pagine di questi percorsi si può accedere a campi di approfondimento, a video, ad animazioni, semplicemente attraverso "button" e "hotword" del ToolBook):

1. **La geometria frattale**, in cui si indaga sull'origine e gli sviluppi delle figure frattali attraverso lo studio matematico della famosa curva di N.F.H. von Koch (1870-1924) e attraverso il concetto di autosomiglianza delle variazioni di scala.
2. **Gli insiemi di Julia**, in cui a partire dalle applicazioni iterative complesse della teoria di Gaston Julia (1893-1978), si è studiata la possibilità di creare figure fantastiche attraverso la rappresentazione grafica di una semplice applicazione complessa, dovuta a Benoit Mandelbrot, che ben si presta a descrivere il comportamento caotico, irregolare, imprevedibile, autosomigliante di molti fenomeni reali. Associando opportuni colori a comportamenti somiglianti, si ottiene attraverso il computer (implementando in TurboPascal il relativo algoritmo di costruzione) una figura suggestiva con parti "connesse" dello stesso colore e parti "polverizzate" dai colori poco distinguibili; ingrandendo quest'ultime, appaiono altre figure connesse con confini polverizzati che riproducono le stesse forme delle figure originarie, così di seguito...all'infinito. Lungo i confini è difficile distinguere i colori dei punti, il cui comportamento è dunque non prevedibile, perché dominato dal caos.
3. **L'attrattore di Lorenz**, in cui si è cercato di interpretare il comportamento caotico di un sistema dinamico e di affrontare il concetto di attrattore, distinguendo l'attrattore prevedibile da quello non prevedibile di cui l'attrattore di Lorenz è un esempio. Studiando l'imprevedibilità delle condizioni meteorologiche, Edward N. Lorenz giunse a matematizzare il comportamento aleatorio di queste ultime e a capire il meccanismo che dava luogo all'aleatorietà osservata: il cosiddetto "effetto farfalla", generato dalle innumerevoli fluttuazioni microscopiche determinabili attraverso processi di "stiramento" e di "piegatura" di un attrattore caotico. La teoria del caos applicata agli inizi degli anni '80 allo studio dei sistemi fisiologici, ha portato ad associare il caos alle funzioni biologiche; fenomeni caotici sono osservabili in molte manifestazioni naturali inorganiche ed organiche (ammonite, cuore, intestino,..).

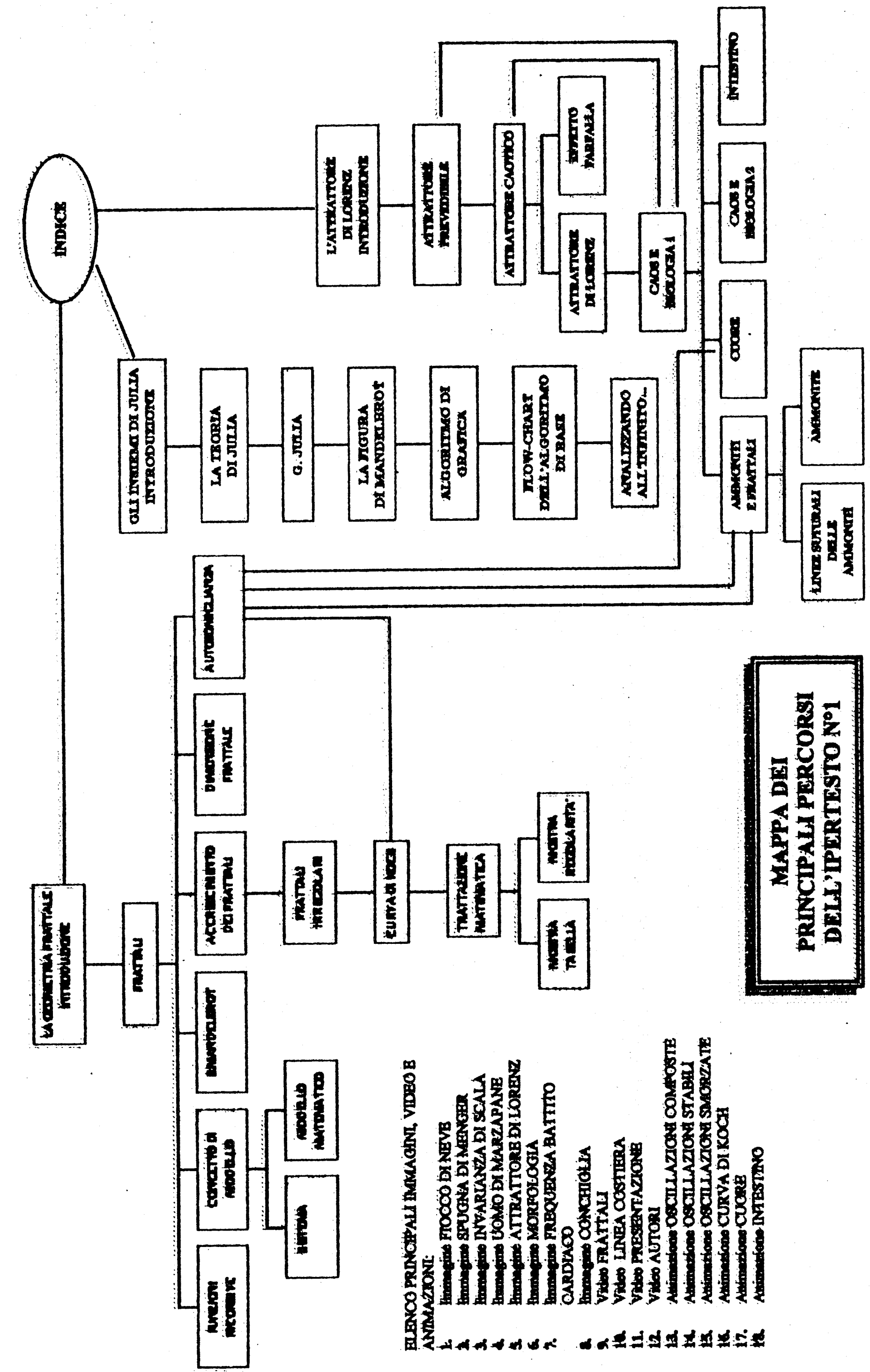
L'ipermedia **"Sessualità: percorso per un processo di crescita consapevole"** si differenzia notevolmente dal precedente, perché la sua struttura non si articola in percorsi predefiniti, ma in una rete di collegamenti attraverso cui è possibile costruire ogni volta dei percorsi di ricerca; sono comunque presenti, nella pagina iniziale, delle tematiche orientative **(La difesa, Anatomia, Riproduzione,**

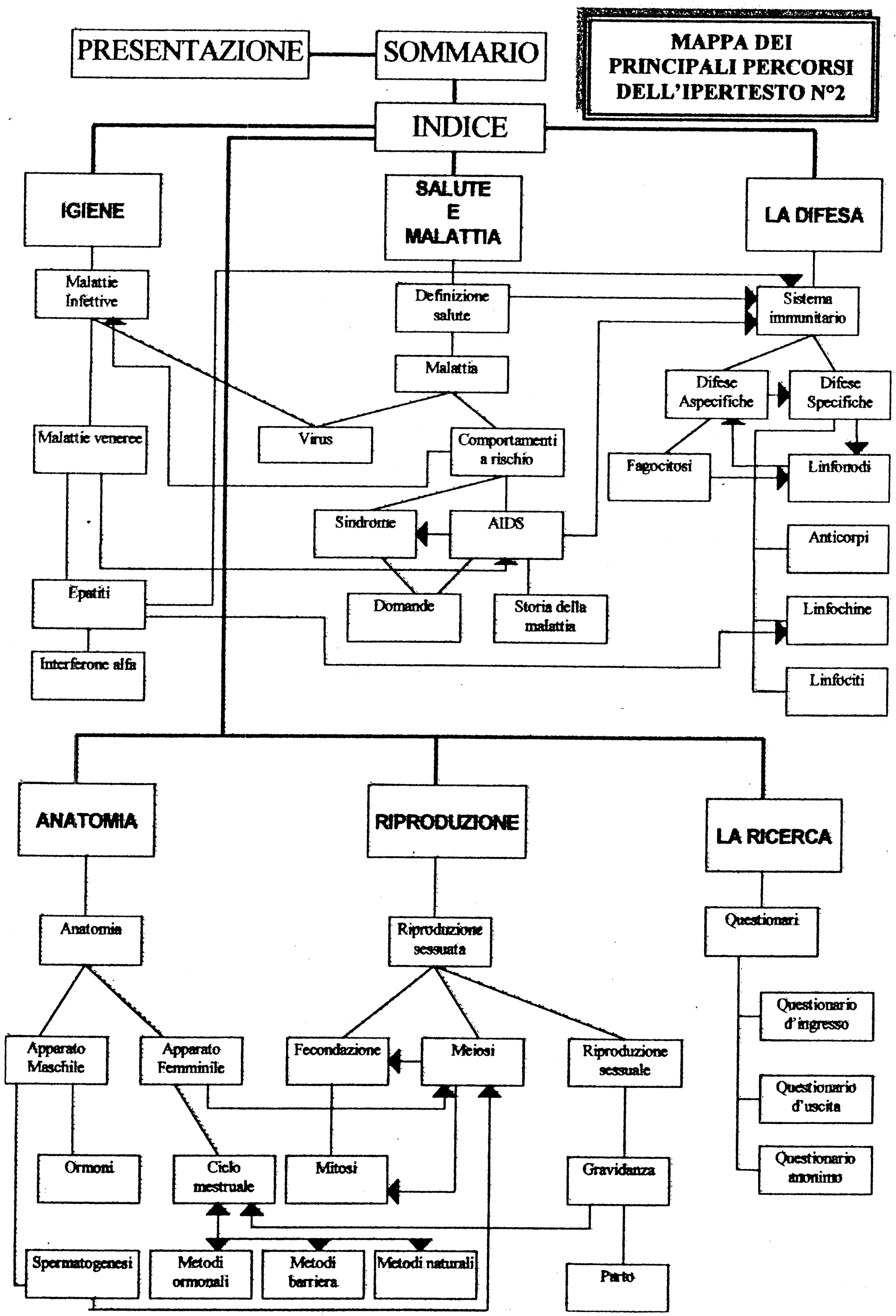
[1] Liceo Scientifico G.Galilei, via XIV Settembre 79, 06100 PERUGIA, tel/fax: 075/5720971

**La ricerca, Igiene, Salute e malattia)** che guidano il lettore nella scelta e nella ricerca degli approfondimenti desiderati. Nei vari percorsi sono presenti trattazioni scientifiche, risultati statistici dei questionari somministrati a genitori ed alunni, opinioni morali e psicologiche, il tutto veicolato attraverso una vera propria multimedialità di testi, immagini, animazioni, suoni e collegamenti. Anche qui sono presenti dei video speciali in cui emerge la creativa personalità dei ragazzi nel ruolo di autori-registi.

Le "mappe" che seguono permettono di orientarsi nei rispettivi ipertesti.










## UNA FORMULA CHE CAMBIA IL MONDO

Maria Rosaria* - Giuseppina Casapulla*

La seguente esperienza didattica e stata realizzata una prima volta nel corso dell'anno scolastico 1996/ 97 da un gruppo di allievi del secondo liceo corso B ed una seconda volta, in forma diversa nelle classi del secondo liceo (sez. E e sez. B), del Liceo classico "P. Giannone" di Caserta ed ha avuto come tema: *La teoria della relatività*.

Prendendo spunto dal testo di Harald Fritzch - una formula cambia il mondo - che narra la storia di un docente di Fisica teorica dell'università di Berna che, recandosi al Trinity College di Cambridge per conoscere i luoghi in cui Newton aveva compiuto i suoi studi, immagina di dialogare e discutere su alcuni temi della suddetta teoria, è nata l'idea di coinvolgere gli allievi in una rappresentazione sul tema della Relatività. Gli alunni hanno accolto con entusiasmo quest'invito, consapevoli anche del lavoro e dell'impegno loro richiesti, anche se solo una parte degli allievi, quelli più volenterosi ed interessati, si e attivamente impegnata. L'obiettivo primario è consistito nel portare a conoscenza degli allievi alcuni temi fondamentali della relatività, che, pur non facendo parte dei temi ministeriali, noi riteniamo di fondamentale importanza per comprendere l'evoluzione dei processi della Fisica moderna. L'esperimento ha riscosso, entrambe le volte, notevole successo ed i giovani hanno mostrato una partecipazione costruttiva ed entusiastica. Siamo intervenute più volte, offrendo delucidazioni, ove venissero richieste, e chiarificando qualche concetto a quei ragazzi che avessero evidenziato una qualche impasse nella rielaborazione delle informazioni acquisite attraverso la lettura del testo di Fritzch. Abbiamo tuttavia lasciato libertà di percorso, rispettando le scelte di ciascuno, purché si mantenessero in linea con gli obiettivi preposti e rivelassero consequenzialità.

La prima volta che l'esperienza è stata realizzata, gli allievi hanno scelto di rappresentare i dialoghi del libro quasi integralmente, solo esplicitando, chiarendo ed approfondendo i concetti necessari a far risultare la relatività comprensibile a tutti, anche ai compagni che non avevano attivamente partecipato al lavoro. La rappresentazione è avvenuta alla presenza sia dei compagni di classe che di altre classi parallele, del preside e di alcuni docenti.

Il lavoro di sintesi fatto, invece, nell'anno scolastico 97/98 e durato circa tre mesi, gli allievi hanno scelto di rimaneggiare il testo dando, così, un tocco di originalità al lavoro. Hanno, inoltre, preparato una scenografia, realizzato un breve copione e prodotto una videocassetta. dopo aver, ovviamente, rappresentato la storia in classe.

---

* Liceo classico "P.Giannone"- Caserta

alla presenza di tutti gli allievi delle due sezione, del Preside e di diversi docenti dell'istituto. A livello di risultato finale possiamo sottolineare come l'esperimento sia risultato del tutto soddisfacente in quanto ha dato la possibilità ai ragazzi coinvolti di conoscere un tema della Fisica di gran fascino ed interesse che in altro modo non e possibile trattare, soprattutto per motivi di tempo. Inoltre nel fare questo lavoro, cosa non trascurabile, i ragazzi hanno appreso divertendosi, confrontandosi e alla fine hanno trasmesso il loro entusiasmo a tutti i compagni, docenti e Preside.

LICEO GINNASIO "P.GIANNONE" CASERTA
ANNO SCOLASTICO 1997/98

COPIONE
Il seguente copione e stato realizzato dagli alunni delle classi II B e II E, utilizzando i testi seguenti
1)-Una formula cambia il mondo-di Harald Fritzch-Ed:Bollati Boringhieri
2)-Dalla meccanica alla costruzione della materia-di Caforio Ferilli-Ed:Le Monnier-

TITOLO: UNA FORMULA CAMBIA IL MONDO

Personaggi principali
1) INTERLOCUTORE A: la ragazza intelligente
2) INTERLOCUTORE B: la ragazza poco intelligente
3) ADRIAN HALLER: docente di fisica teorica allíuniversità di Berna
4) ISAAC NEWTON: "padre" della fisica classica
5) ALBERT EINSTEIN: "padre" della fisica moderna

Testo
A: $E=mc^2$
B: Cosa? E che lingua e questa? Arabo?!
A: Come al solito ... E' un'equazione questa. L'avrai capito, almeno spero!!
B: Be diciamo...
A: Questa equazione non è una semplice formula matematica, ma e un simbolo della nostra epoca, un simbolo che ha segnato la nostra vita e la politica mondiale.
B: Ma... A cosa ti riferisci?
A: Questa non è altro che la ben nota formula di Albert Einstein, che esprime la relazione tra l'energia e la massa di un oggetto materiale, in cui il tramite e dato dalla velocità della luce 300.000 Km/s.
B: Ma... Allora sarebbe utile per calcolare il rapporto tra energia e massa?



-Escono i due interlocutori, A e B, ed intervengono i due narratori-

Nar 1: Verso la fine del mese di luglio il professor Adrian Haller, docente di fisica teorica all'università di Berna, dovendosi recare negli U.S.A., per una conferenza, decise di trascorrere del tempo da alcuni amici a Londra. Il giorno stesso del suo arrivo si recò a visitare l'abbazia di Westminster, in particolare la tomba di Newton sulla quale lesse....

*La stesura integrale del copione, la videocassetta relativa allla drammatizzazione del testo, e la documentazione inerente alle attività svolte sono agli atti del LICEO GINNASIO "P.GIANNONE" CASERTA.*

## PROBLEMI DI MINIMO CAMMINO E DI MINIMO TEMPO PRESENTATI CON L'AIUTO DEL SOFTWARE MATEMATICO

di Luigi Tomasi[1]

L'insegnamento della matematica soffre, quasi a tutti i livelli, di un eccesso di formalismo e di astrattezza. Si arriva spesso all'astrazione e alla presentazione di una teoria prima che gli studenti abbiamo messo in atto i relativi processi di apprendimento, creando quindi incomprensione e difficoltà a vedere in contesti concreti gli argomenti matematici studiati. Inoltre le teorie matematiche non vengono quasi mai presentate inquadrandole storicamente o riconducendole alle principali applicazioni nel contesto delle quali sono nate. I libri di testo, salvo rare eccezioni, non contengono tali aspetti. I problemi sono quasi tutti presentati in forma chiusa e già formalizzati e quindi, in un certo senso, "sterilizzati", privi della ricchezza che essi hanno quando sono allo "stato nascente". Interi capitoli dei libri di testo sono privi di una qualunque applicazione dei contenuti di matematica nel contesto dove sono nati o nelle scienze dove vengono applicati.

In questa comunicazione vengono presentati alcuni problemi classici della fisica-matematica che sono ben noti, ma che con l'aiuto delle tecnologie attuali (software di geometria dinamica, software matematico in genere, ...) possono assumere una valenza diversa da quella che hanno oggi nell'insegnamento. Il gruppo di problemi, provenienti dalla meccanica e dall'ottica, porta in modo naturale allo studio di alcune questioni di minimo ed in particolare allo studio delle brachistocrone, o percorsi di minimo tempo, la più famosa delle quali è la cicloide, che risponde al problema posto nel 1696 da Johann Bernoulli sul cammino di minimo tempo per spostarsi da un punto ad un altro, posto a quota più bassa.

Si tratta di problemi di forte suggestione anche per gli allievi del liceo, perché si scopre, come in tante altre questioni offerte dalla scienza fisica, che la Natura segue un principio di minimo e, in un certo senso, "sa fare le derivate". La struttura matematica di questi problemi offre quindi una prova che "il grandissimo libro dell'Universo è scritto in lingua matematica...", per citare il celebre passo di Galileo. Tali problemi sono stati studiati in un periodo storico di impetuoso sviluppo della matematica, in stretto collegamento con la scienza fisica (Galileo, Fermat, Cartesio, Newton, Bernoulli, ....), periodo che merita di essere studiato anche al liceo.

Nell'insegnamento, abbiamo oggi a disposizione notevolissimi strumenti software di tipo matematico, per visualizzare e illustrare in modo dinamico tali problemi, favorendo in questo modo l'apprendimento e l'insegnamento, rendendoli più efficaci. Per i problemi indicati di seguito sono stati usati i software *Cabri-géomètre* e *Mathematica*.

### 1. Il problema della riflessione (di Erone)

*Assegnati due punti A, B e una retta r nello stesso piano, con i puntida una stessa parte rispetto alla retta. Sulla retta r, trovare un punto X tale che la somma delle sue distanze dai punti dati sia minima.*

[1] Liceo Scientifico Statale "Galileo Galilei" Adria (Rovigo)



Nella soluzione del problema ci facciamo aiutare dal software *Cabri-géomètre*. La soluzione è ottenuta usando una simmetria assiale di uno dei due punti, ad esempio $B$ rispetto alla retta $r$. Ovviamente questo problema geometrico equivale al problema della riflessione della luce su uno specchio piano. Il punto per il quale la somma delle distanze è minima è il punto di incidenza di un raggio di luce che si riflette nel punto $T$ e che passa per il secondo punto $B$. Quindi l'angolo di incidenza deve essere uguale all'angolo di riflessione. Polya[2] attribuisce tale soluzione ad Erone di Alessandria.

Possiamo anche ottenere il punto $T$, la soluzione del problema di minimo, come punto di contatto tra un'ellisse di fuochi $A$ e $B$ e la retta $r$ , o per mezzo di due raggi luminosi ugualmente inclinati rispetto alla retta $r$. Consideriamo le ellissi con gli stessi fuochi, ed il punto $X$ di intersezione tra un'ellisse e la retta $r$. La somma $AX + BX$ sarà minima quando l'ellisse è tangente. Il punto di tangenza chiamiamolo $T$. Quanto visto ci fa riscoprire una delle proprietà dell'ellisse:
*le due rette congiungenti i due fuochi di un'ellisse con un punto dell'ellisse, formano angoli uguali con la tangente all'ellisse nel punto dove si incontrano (riflessione su uno specchio ellittico).*

Possiamo anche dire che ogni raggio luminoso proveniente da un fuoco di uno specchio ellittico è riflesso nell'altro fuoco.

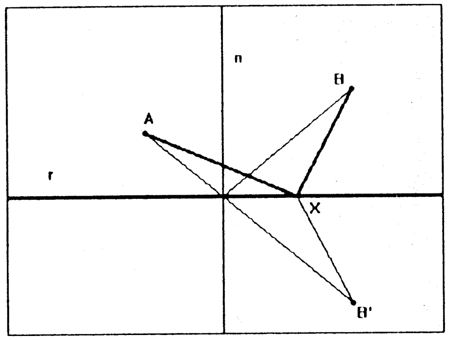



Figura 1. Occorre trovare un punto X modo che $AX + XB$ sia minima

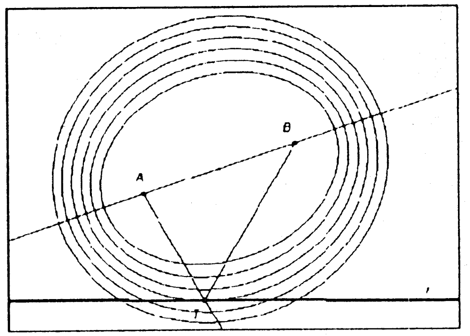



Figura 2. Ellissi confocali ed ellisse tangente che rende minima la somma.

[2] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning.* Vol. I. *Induction and Analogy in Mathematics,* Princeton University Press, 1954.

## 2. Il problema della rifrazione (o di Fermat)

Partiamo da un altro problema di ottica: perché un bastoncino immerso nell'acqua appare spezzato? Il problema si riconduce alla legge della rifrazione della luce, scoperta da Snellius circa nel 1621 e pubblicata da Cartesio. Qualche tempo dopo fu ritrovata da Fermat. La luce, passando dal punto $A$ che sta nell'acqua all'occhio posto nel punto $B$ fuori dell'acqua, descrive una linea spezzata con un punto angoloso alla superficie dell'acqua. La linea retta che congiunge $A$ con $B$ è il cammino più breve, ma la luce non segue questo percorso. Il problema della rifrazione può essere riformulato come segue:
*Assegnati nello stesso piano due punti $A$ e $B$ e una retta $r$ che separa $A$ da $B$, e due velocità $u$ e $v$ nei due semipiani (che simulano due diversi mezzi in cui si propaga la luce), trovare il percorso di minimo tempo per andare da $A$ a $B$.*

Sia $X$ un punto appartenente alla retta $r$. Ovviamente, è più veloce scegliere una linea retta per andare da $A$ a $X$ e lo stesso per andare da $X$ a $B$. Il problema consiste nel trovare sulla retta $r$ un punto $X$ tale che il tempo:

$$\Delta t = \frac{AX}{u} + \frac{XB}{v}$$

sia minimo.

Risolvere questo problema senza il calcolo differenziale non è facile. Polya, nell'opera citata, propone un'analogia meccanica, basato su un sistema di due pesi $P$ e $Q$, diversi tra loro, collegati tramite due carrucole, con il filo vincolato, tramite un anello, a spostarsi su un'asta rigida orizzontale. Lasciando libero questo dispositivo e attendendo la posizione di equilibrio, in cui l'energia potenziale è minima, si trova che deve verificarsi la seguente relazione:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{u}{v} = \frac{q}{p} \,.$$

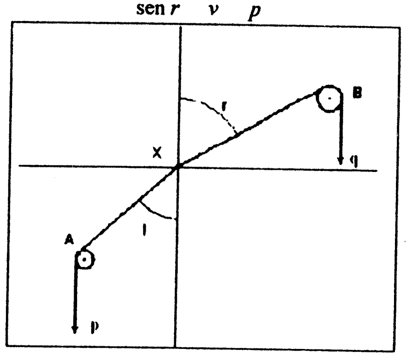



Figura 3. Analogia meccanica per la rifrazione.

Quest'ultima è la condizione di minimo. L'interpretazione ottica, a partire dall'analogia meccanica, è evidente. Il "principio di minimo tempo" di Fermat porta dunque alla legge di Snell e Cartesio. La precedente figura ricorda il passaggio della luce dall'acqua all'aria.



## 3. Il problema della brachistocrona di Johann Bernoulli

Sulla base della legge della rifrazione si può presentare, anche al liceo, il seguente problema posto come sfida nel 1696 da Johann Bernoulli:

*Una sferetta parte dalla quiete da un punto A e si muove su una guida priva di attrito verso un punto B che sta più in basso, non sulla stessa retta verticale. Che forma deve avere la guida perché la sferetta impieghi il minimo tempo a scendere?*

Johann Bernoulli immaginò una curva arbitraria nel piano verticale che discende dal punto $A$ al punto $B$. Di tali curve ne esistono infinite. Disegniamo una qualunque curva che scenda da $A$ a $B$ in un sistema di coordinate cartesiane. Scegliamo il punto iniziale $A$ come punto origine degli assi e l'asse delle $y$ orientato verso il basso. Consideriamo un punto materiale che sta scendendo verso il basso in un dato istante. Esso avrà una certa velocità $v$ e le sue coordinate saranno $(x, y)$. Si deve verificare la relazione:

$$v^2 = 2gy \,.$$

Tale formula si può ricavare dal principio di conservazione dell'energia. Quindi, qualunque sia la curva congiungente $A$ con $B$, la velocità dell'oggetto dipende soltanto da $y$, ovvero da quanto il corpo è sceso in verticale, secondo la formula:

$$v = \sqrt{2gy} \,.$$

Qual è il significato di questa formula? Per spiegarlo disegniamo delle linee orizzontali (vedi figura seguente) che dividono il piano in cui il punto materiale scende in strati orizzontali. Il punto materiale che sta scendendo incontra questi strati uno dopo l'altro. La sua velocità non dipende dal cammino che esso fa, ma dipende solo dallo strato che sta attraversando; la sua velocità varia da strato a strato. Si tratta della stessa situazione che si verifica quando la luce del sole arriva verso di noi attraversando diversi strati d'aria ognuno dei quali ha una diversa densità. Quindi la velocità della luce varia da strato a strato subendo successive rifrazioni.

*Quindi il problema meccanico proposto ammette una reinterpretazione ottica.*

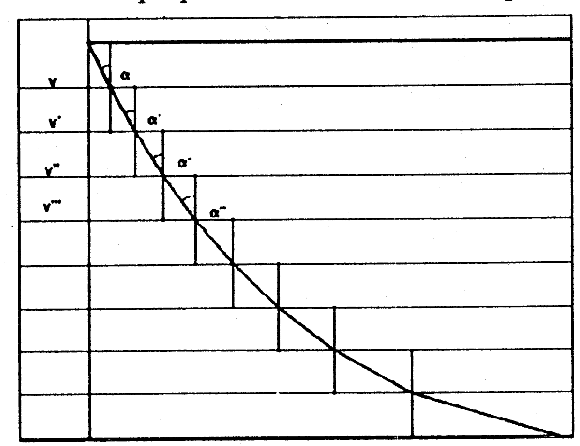



Figura 4. Il procedimento di Bernoulli per trovare la brachistocrona.

Vediamo ora la figura seguente in un nuovo contesto. Noi osserviamo questa figura come la rappresentazione di un mezzo otticamente non omogeneo.

Questo mezzo è stratificato e la velocità della luce nello strato orizzontale di profondità $y$ è

$$v = \sqrt{2gy}\,.$$

La velocità $v$ dunque varia a seconda dello strato. Immaginiamo diversi strati di un mezzo trasparente - immaginiamo più lastre di vetro sovrapposte - ognuno dei quali otticamente differente dagli strati vicini. Sia $v$, $v'$, $v''$, $v'''$, ..... la velocità della luce negli strati successivi, e supponiamo che la luce li attraversi successivamente formando gli angoli $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$,.... con la verticale rispettivamente. Per la legge di Snell, si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{v'} = \frac{\operatorname{sen}\alpha''}{v''} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'''}{v'''} = \dots\dots\dots$$

Ora possiamo ritornare ad un mezzo consistente di strati molto sottili in cui $v$ vari con continuità in funzione della y, supponendo che lo spessore degli strati diventi infinitesimo. Vediamo allora che deve essere

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \text{costante}$$

lungo il cammino della luce.

Sia $\beta$ l'angolo formato dalla tangente alla curva con l'orizzontale. Allora:

$$\alpha + \beta = 90°$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\beta$$

e così

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}\,.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$y(1 + y'^2) = c$$

dove c è una costante positiva. Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale del primo ordine per la brachistocrona. Risolvendola si trova che la brachistocrona è una cicloide passante per i due punti e non la linea retta come si può ingenuamente pensare.



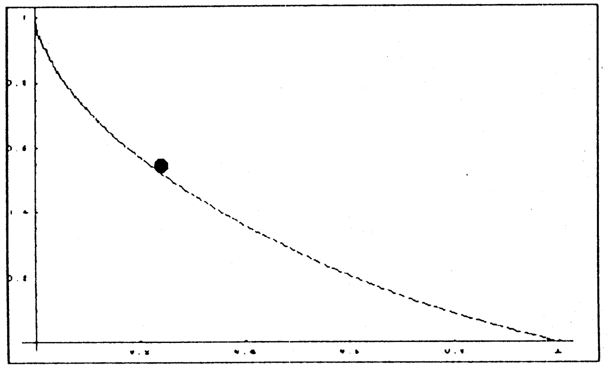


Figura 5. La brachistocrona di Johann Bernoulli (cicloide).

Il software matematico ci può aiutare a ripercorrere il ragionamento proposto da J. Bernoulli e comprendere cosa succede, tramite un'analogia ottica, con successive rifrazioni della luce, fino ad arrivare alla equazione differenziale ricavata sopra, alla cicloide e alle sue mirabili proprietà. I problemi proposti, rivisti con l'aiuto del software di geometria dinamica o con altri software matematici, ci permettono di comprendere, in un caso storico molto significativo, come dalla scienza fisica si sia arrivati allo studio di alcuni problemi di minimo, rendendo più motivante lo studio della matematica ed in particolare di alcuni problemi che si ricollegano direttamente allo sviluppo storico dell'ottica e della meccanica.

**Bibliografia**


1. F. Conti, *Calculus,* McGraw Hill Italia, Milano 1992;
2. R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?,* Boringhieri, Torino;
3. G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning.* Vol. I, *Induction and Analogy in Mathematics,* Princeton University Press, 1954;
4. W. Duham, *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica,* Zanichelli, Bologna 1992;
5. P. Boieri, *Fare geometria con Cabri,* Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", 1996.

# ELENCO DEI PARTECIPANTI

## PARTECIPANTI

ACCASCINA GIUSEPPE (ROMA), AGNELLI PAOLA (CASTIGLION FIORENTINO-AR), ALECCI ANTONIA (CESENA), ALIQUO' MARIA (ROMA), AMANTI PAOLA (ALLERONA SCALO-TR), AMBROGLINI ANNARELLA, AMICO LIVIA (GENOVA), ANDREIS SILVIA, ANDRIANI MARIA FELICIA (SALSOMAGGIORE TERME-PR), ANDRIANO VALERIA (TORINO), ANGEMI DIEGO, ANGIOLETTI CINZIA (PERUGIA), ANGIOLI DONATA (AREZZO), ANICHINI GIUSEPPE (FIRENZE), ANTOLINI ORIETTA (ORVIETO-TR), ANTONIAZZI STEFANO (LANCENIGO-TV), ANZALONE ANTONINO (ADRANO-CT), APPOLLONI ANGELA (FOLIGNO-PG), ARCHETTI ADRIA (ROMA), AREZZO DOMENICO (GENOVA), ARGENTINI IVANO (TERNI), ARMIENTO SUSANNA (ROMA), ARPINATI ANNA MARIA (BOLOGNA), ARZARELLO FERDINANDO (TORINO), ASCHIERI IGINO, ASCOLI BARTOLI MARIATERESA (ROMA), ATTIOLI SERENA (ORVIETO-TR), BALDONI CORRADO (GUBBIO-PG), BALESTRA MONICA (TERNI), BARBANERA ANTONIO (TERNI), BARGELLI SERGIO, BARLOTTI ADRIANO (FIRENZE), BARRA MARIO (ROMA), BARTOLOMI ROBERTA (TERNI), BASILE ELEONORA (ROMA), BASILISSI VALERIA (PERUGIA), BASSI MARINELLA (UDINE), BASSO SAVIO MILENA (PADOVA), BATINI MARIA (ROMA), BATTAGLINI DANIELA (MONTEFIASCONE-VT), BAZZA PATRIZIA (PORTOGRUARO-VE), BENAGLIA LUCIO (MILANO), BENEDETTI NELLA (ROMA), BENINATO CARMELA (CATANIA), BERHE TESHOME, BERNARDI CLAUDIO (ROMA), BERSIANI FABIO MARIA (PERUGIA), BETTELLI SUSANNA (UMBERTIDE-PG), BETTINI GIULIANA, BEUTELSPACHER ALBRECHT (GIESSEN-GERMANIA), BIAGINI FRANCESCO (CITTA' DI CASTELLO-PG), BINDO TIZIANA (GROTTAGLIE-TA), BITTO DIANA (UDINE), BLUNDA NICOLO' (FIERA DI PRIMIERO-TN), BOCCHINI ANNA (FOLIGNO-PG), BOIERI PAOLO (TORINO), BONARELLI ROBERTA (BOLOGNA), BONETTI ESTER, BORSARI VITTORINA (MODENA), BORSETTO GINA (MONSELICE-PD), BRANDI PRIMO (PERUGIA), BRIGAGLIA ALDO (PALERMO), BROLESE FABIO, BRUNELLI DANIELA (TODI-PG), BRUNETTI GIACOMO, BRUNO FLORA (ORVIETO-TR), BRUSCA SIMONETTA, BRUSCHI GIULIA (GENOVA), BRUZZANITI GIUSEPPE (GENOVA), BUCONI SIMONETTA, BURRACCIONI LUCIA, BUZZI MARIA VITTORIA (TERNI), CALVANI MARCO (CODROIPO-UD), CAMAIANI FRANCESCA BETTIN (ORVIETO-TR), CAMERA GRAZIELLA (GENOVA), CANDONE TERESA (GIAVENO-TO), CAPELLI LAURA (GENOVA), CAPITANUCCI

PAOLA, CAPRONI FRANCA, CARIGNANO ILARIO (PINEROLO-TO), CAROLLA GUIDO (LECCE), CARROZZA PATRIZIA, CASASOLE BRUNELLA (ORVIETO-TR), CASELLA FRANCESCO (POTENZA), CASOLARO FERDINANDO (NAPOLI), CASOLARO ALDO (NAPOLI), CASTAGNOLA ERCOLE (MARINA DI MINTURNO-LT), CATANESE GIULIANA (UDINE), CAVALLUZZO MARISA, CAZZANELLI MARTA (POVO-TRENTO), CEBAVOLO ANNA, CECCA RITA (GIOVE-TR), CECCHETTI MARIA ANGELA (BASSANO DEL GRAPPA-VI), CENTOMINI ANNA RITA, CEPPITELLI RITA (PERUGIA), CERAVOLO ANNA, CEROCCHI ELISA (GUIDONIA-RM), CHIMETTO MARIA ANGELA (VICENZA), CIANNI ANNA MARIA, CIARRAPICO LUCIA (ROMA), CICHERO ANNA (GENOVA), CIMADOMO MARIA ROSANNA (POTENZA), CINELLI CHIARA (PERUGIA), CITRINI CLAUDIO (MILANO), CLAVARINO CLAUDIO, COLAMEDICI EMILIA (ROMA), COMPAGNONE SILVIA (PIOMBINO-LI), CONTESSA MARIA (PALERMO), CONTI ANNA (PISA), CONTI FRANCO (PISA), CONTI GEORGIA (ROMA), CONTI GEROLAMA (VITERBO), CONTI CANDORI FRANCESCA (PERUGIA), CORTI BEATRICE (CANTU'-CO), COSTANTINI ANTONIETTA (FOLIGNO-PG), COTONESCHI STEFANIA (FIRENZE), COVARELLI ALDO, COZZA LETIZIA (VITERBO), CRISTINA PAOLA, CROCETTI CARLO (FABRIANO-AN), CUPINI ALESSIA (ROMA), CUSTODI MARIA ASSUNTA (ORVIETO-TR), D'ALESSANDRO ROSSANA (COSENZA), D'AMBROSIO LUCIA ANNA (BISCEGLIE-BA), D'AMORE BRUNO (BOLOGNA), D'ANGELO MARGHERITA (NAPOLI), D'APRILE MARGHERITA (RENDE-CS), DALE' MARINA (BRESCIA), DAMIANI ANNAMARIA MAROTTA, DANE' CRISTIANO (TORINO), DAPUETO CARLO (GENOVA), DE CAVE GIUSEPPE, DE COL ANNA, DE CUNTO GIULIO (PIETRELCINA-BN), DE MARCHIS PAOLO, DE MICCO CARMELA (NAPOLI), DE VITA MAURO (ROMA), DEIRINO CESARE (GIAVENO-TO), DEL GIUDICE VALERIA (TORINO), DEL VECCHIO GIUSEPPE (MARANO), DELFRATE MARIAGRAZIA (S.SECONDO-PG), DELL'UOMO MARIA (ORVIETO-TR), DELUCCHI STEFANIA, DEMARTIN ELENA, DESTITO VITTORIA (CIVITAVECCHIA-RM), DI CARLO ALBA (TORINO), DI CARLO VANDA (ORVIETO-TR), DI CESARE VITTORIO (L'AQUILA), DI FRANCESCO CONCETTA (ORVIETO-TR), DI LORENZO GIUSEPPE, DI MOLA SANTE, DI NALLO ROBERTO (UMBERTIDE-PG), DI ROSA MARIA (ORVIETO-TR), DI SORBO DOMENICA (CAIAZZO-CE), DI STEFANO CARMELO (GELA-CT), DI VINCENZO MADDALENA (MILANO), DINI LUCIA, DIODATI ANNA, DONAGGIO DANIELA (ALTE DI MONTECCHIO-VI), DUZIONI ALBAROSA (MILANO), EUGENI FRANCO (TERAMO), EVANGELISTI DANIELA, FACCHINI VALERIA (NAPOLI), FAGGIANO LUCIANO, FAGIANI



SIMONETTA (TERNI), FAINA PAOLA (PERUGIA), FANELLI MARIA GRAZIA, FANTINI LOREDANA (FABRIANO-AN), FANUCCI FRANCESCA (GUBBIO-PG), FARNETI GLORIA (GUBBIO-PG), FASANO MARGHERITA (POTENZA), FATTORI ROSARIA, FAVIA LIVIA (BARI), FAZI GIOVANNI, FELICIOTTI ANNA MARIA (ALLERONA-TR), FELTRIN MARIA GEMMA (MIRANO-VE), FERRARESI CRISTINA (SAN GIOVANNI IN PERSICETO-BO), FERRARI MARIO (PAVIA), FERRERA GIUSEPPE (GENOVA), FERRINI GIANFRANCO (PERUGIA), FIORI CARLA (MODENA), FIORUCCI SERGIO (GUALDO TADINO-PG), FIORUCCI ADA, FORGIA DANIELA, FORMICA DOMENICA (CATANIA), FORTINI STEFANIA (TERNI), FREDDI FABIOLA, FRELICCA ANNA ROSA (SFERRACAVALLO-ORVIETO-TR), FRUGANTI MARIA ANTONIETTA, GABELLINI GIORGIO, GALASSI M.PAOLA (ROMA), GALLI MARIA PIA (VIAREGGIO-LU), GALLINO MARIA LUISA (SAMPIERDARENA-GE), GALLO ELISA (TORINO), GARASSINO MARIA CRISTINA (TORINO), GARBUIO CLAUDIA, GARIBALDI ANGIOLETTI, GATTESCHI GIANLUCA (GRUGLIASCO-TO), GECELE AFRA (VICENZA), GENTILI STEFANIA, GERMANI LAURA (VALDAGNO-VI), GHIO SABINA (GENOVA), GIACOMUCCI MARIA CHIARA (NOCERA UMBRA-PG), GIALANELLA FRANCESCA (POZZUOLI-NA), GIAMBELLUCA GIULIANO (BERGAMO), GIAMMEI FRANCESCA (OSTIA LIDO-RM), GIAPPICCHELLI MARIELLA (UMBERTIDE-PG), GIORGI STEFANIA (TARQUINIA-VT), GIULIANO ALBO CRISTINA (IVREA-TO), GOBBATO SARA (MIRANO-VE), GOBETTO MARIA LUISA, GORI COCCHIERI CANDIDA (PERUGIA), GOVONI PAOLO (SAN GIOVANNI IN PERSICETO-BO), GRANDE DOMENICA, GRASSI GRAZIA (S.LAZZARO DI SAVENA-BO), GRASSINI ANDREINA (ORVIETO-TR), GRECO SIMONETTA, GUARATO PIERGIORGIO (VALDAGNO-VI), GUERCIO FRANCESCA, GUERRIERO ANNA MARIA (ROMA), IADEROSA ROSA (CESANO BOSCONE-MI), IANNELLI MIMMO (POVO-TN), INDOVINA GRAZIA (PALERMO), ITALIA GIAN BATTISTA, JACONA DOROTEA (CATANIA), JOO CARLA (PAVIA), LA TORRE ANNA (ROMA), LAGANA' GAETANO, LAMBERTI LAURA (BOLOGNA), LANFRANCHI SIMONA, LANZILLO ANDREA (GIUGLIANO-NA), LARDANI GRAZIELLA (TERNI), LAURENTI MARIA CRISTINA (ORVIETO-TR), LAZZARO CATERINA, LEMUT ENRICA (GENOVA), LIBIANO MARIA CONCETTA (GELA-CT), LIGOURAS PANAGIOTE (MOCI), LISTANTI LAURA, LIVORNI F.LAURA (L'AQUILA), LO CICERO ANGELA, LOMBARDI VANNA MARIA (ROMA), LOMBARDI WALTER (ORVIETO-TR), LONGO MASSIMO (CHARVENSOD-AO), LORENZI DANIELA, LUCANTONI MARCO (ORVIETO-TR), LUCCHI MAURO (FOLIGNO-PG), MACCAGLIA ALESSANDRA (TERNI), MACERA MARIA ROSARIA (CASERTA), MAFFEI

PRUDENZA (BARI), MAFFINI ACHILLE (VIADANA-MN), MAGNANI CARLA (ROMA), MALACARNE ENRICO (LIVORNO), MALARA NICOLINA ANTONIA (MODENA), MAMBRINI MARIA ASSUNTA, MAMMANA CARMELO (CATANIA), MAMMI ANTONIO (OSTIA-RM), MAMODE SILVIA, MANDORLA LORIANA (CITTA' DI CASTELLO-PG), MANIGLIA GIUSEPPA (CIVITAVECCHIA-RM), MARCHETTI PAOLA (LANGHIRANO-PR), MARCHI MARIO (BRESCIA), MARCHILI GIULIANA, MARCHIOLI GIULIANA (ROMA), MARCHIONI ANNA ROSA (VICENZA), MARCOVICH ELISABETTA (TRIESTE), MARELLI ALDO, MARGIOTTA GIOVANNI (ROMA), MARIANTONI M.CRISTINA (S.SISTO), MARINUCCI M. LETIZIA (CITTA' DI CASTELLO-PG), MARIOTTI ALESSANDRA (PISA), MARONE SILVIA, MAROSCIA PAOLO (ROMA), MARRICCHI MADDALENA (CASTELVISCARDO-TR), MARTIN CRISTINA (TORINO), MARTINELLI MARINA, MARZIALE MARIA LUISA (PADOVA), MARZIALI M.LUISA, MASCIOLI FLAVIA, MASI FRANCA, MASI MARIA GRAZIA, MASIN DANIELA (POSSAGNO-TV), MASSARUCCI MARA (TERNI), MASSI GABRIELLA, MATEROZZOLI ALESSANDRA (ROMA), MAZZEROLI CLARA (CASTEL GIORGIO-TR), MELONI CARLA, MENCARONI M.SERENA, MENCONI FIORELLA (PERUGIA), MENICHETTI CONCETTINA, MENOTTI LORETTA (TERNI), MERELLO ANGELA (GENOVA), MEZZETTI EMILIA (TRIESTE), MICALE BIAGIO (S.GIOVANNI LA PUNTA-CT), MICHELINI ROBERTA (PERUGIA), MICHELOTTI VENE' MARGHERITA (PARMA), MILANI SILVANO (MILANO), MILLETTI MARIA CINZIA (CITTA' DELLA PIEVE-PG), MILONE CARMELA (CATANIA), MIRANDA SERGIO (FISCIANO-SA), MOCIO ANNA MARIA, MONARI TERESA (MILANO), MONTANARI GISELLA (PIACENZA), MONTELLA GIUSEPPE (QUAGLIANO-NA), MONTERA FERNANDO (AVERSA-CE), MORELLI ALDO (NAPOLI), MORRI SILVANA (GENOVA), MORTARI MARIA (TERNI), MOSCA MIRANDA (TORINO), MOSCATELLI ANTONIO (CITTA' DI CASTELLO-PG), MOSCINI LOREDANA, MOSCUCCI MANUELA (SIENA), MOTTERAN MARGHERITA (MESTRE-VE), MUNZI MARCELLA, MUTI GIULIANA (UMBERTIDE-PG), NALDI CARLO (TORINO), NAPOLITANO BEATRICE, NARDI JANNA (PESARO), NARDINI PAOLO (LUCCA), NERI ANNA GRAZIA (MODENA), NISTRI MONICA (MILANO), NOE' FRANCA (BOLOGNA), NOLLI NICOLETTA (CREMONA), NOTARI NADIA (ALLERONA SCALO-TR), OLIVELLO ANTONIETTA (NAPOLI), OLIVIERI GIOVANNI (ROMA), ORLANDI CINZIA (CITTA' DELLA PIEVE-PG), ORLANDONI AURELIA (CASALECCHIO DI RENO-BO), PACI ANGELO (FOLIGNO-PG), PAGLIACCI MARIA GIOIA (ASSISI-PG), PALOMBI FERNANDO, PAOLATI SARA (GRUGLIASCO-TO), PAPALINI STEFANIA



(PERUGIA), PARDUCCI MARIA LUCIA, PASCHINI LIDIA (MERATE-CO), PASQUALI COLUZZIDARIO (ROMA), PASSAQUALE GIOSUE', PASTICCI FABIO, PATERNOSTER FLORIANA (PESARO), PAVERANI ENRICO (ROMA), PAVESI MAURA, PECCATI LORENZO (TORINO), PEDEMONTE ORIETTA (GENOVA), PELLEGRINI MARIO, PELLEGRINI GIOVANNA, PELLEGRINO CONSOLATO (MODENA), PENNISI MARIO (CATANIA), PERCARIO ZELINDA (GROSSETO), PEROTTI ANNA RITA (MILANO), PERUZZI FRANCESCA, PESCI ANGELA (PAVIA), PETRELLI LILIANA, PETRONE ALDO (CATANIA), PETRONE MARIA GRAZIA, PETRONE MARIA, PETTINELLI ADELINA, PEZZINI PIERLUIGI (TORINO), PIAZZA ROSANNA (ROMA), PICA ADELIA (TERNI), PICCHIO MARIA GIULIANA (FOLIGNO-PG), PICCIONE MARIA (SIENA), PICOTTI MARIA LORENA (PERUGIA), PIETRANERA ILEANA (CIVITAVECCHIA-RM), PIETRANGIOLILLO GIUSEPPE (ALLERONA-TR), PIRAINO MICHELE (VIBO VALENTIA), PISANI PAOLA, PIVETTA MANUELA (CREMONA), PIZZI SUSANNA (PERUGIA), PLUCHINO SALVATORE (CATANIA), POLIDORI AURORA (PERUGIA), PONTORNO ENRICO (ODERZO-TV), PONZIANI BRUNA (LECCO), PRESTIA GIUSEPPE (VIBO VALENTIA), PROTA CONCETTA, PROVENZANI GABRIELLA (TODI-PG), PUCCI SABRINA (UMBERTIDE-PG), QUONDAMCARLO MARCO (TERNI), RADICCHI SABRINA, RAIMONDI GIUSEPPE (VITERBO), RAMUNNO CLARA (TERNI), RASPA M.RITA, RATINI MARIO (UMBERTIDE-PG), RAVALLESE ANTONELLA (MILANO), REGGIANI MARIA (PAVIA), RELLINI ENZO (ORVIETO-TR), RENZI MARISA (TERNI), REPOLA BOATTO ADELE (ANCONA), RICCI SILVANO (TODI-PG), RIDOLFI MARIO (TIVOLI-RM), RIDOLFI IRMA, RIPAMONTI CRISTINA (TARQUINIA-VT), RIVA ANNA (MILANO), RIZZATO ANGELA (ESTE-PD), RIZZETTO SILVESTRO (PORTOGRUARO-VE), ROLLE FRANCESCA, RONCHI PALMIRA (BARI), ROSATI MARIO (PADOVA), ROSCIARELLI RENATO (ALLERONA-TR), ROSSETTI ROBERTO (MARSCIANO-PG), ROSSI CARLA (ROMA), ROSSINI DORIANA (SENIGALLIA-AN), ROTA ROSARIA (ROMA), RUBBIONI PAOLA (PERUGIA), RUGANTI RICCARDO (PISTOIA), SACCARDO CRISTINA (VICENZA), SACCHI VITTORIO (VIMERCATE-MI), SACENTI MALVINA (S.GIOVANNI PERSICETO-BO), SALVADORI ANNA (PERUGIA), SANDRINI VALERIA (VICENZA), SANGESI VIRGINIETTA, SANTANCINI MARIA (PERUGIA), SANTI MORENA, SAVARINO LUIGINO (TORINO), SAVIO TIZIANA (TORINO), SCADUTO VINCENZA (VIMERCATE-MI), SCARNATI ANNA (COSENZA), SCHIAVON AMABILE (MESTRE-VE), SCIMEMI BENEDETTO (PADOVA), SCORRINO ROSELLA (MONTEFIASCONE-VT), SCORSIPA VALERIO (PERUGIA), SCORZINO ROSELLA, SENSI COSTAN-

TINO (ALLERONA-TR), SENSINI ALBA, SENSINI PATRIZIA (NARNI SCALO-TR), SEPPOLINI PAOLA, SERAFINI LIA (TERNI), SERVI GRAZIA (RENDE-CS), SGARRONI M. ANTONIETTA (ORVIETO-TR), SGUERSO CRISTINA (SAVONA), SILVESTRI MASSIMO (ROMA), SINIBALDI FAUSTA (ROMA), SIRCHIO ROSSELLA (PERUGIA), SITA' ADA (TORINO), SOLLEVANTI ROSALIA (PERUGIA), SOMAGLIA ANNAMARIA (GENOVA), SPADONI SAVINA (ORVIETO-TR), SPERANZA CATERINA (ROMA), STANZANI CLAUDIO (TERNI), STAROPOLI FRANCESCO (VIBO VALENTIA), STELLA RENATA, STORIANI LAURETTA, SUPPA ALBERTA (PARMA), TACCONI UGO (CITTA' DELLA PIEVE-PG), TALIA LEO, TARTAGLIA ADELIA (CORI-LT), TARTAGLIONE ANGELA (TIVOLI-RM), TASSONE VITO (VIBO VALENTIA), TAZZA ANGELA, TAZZA CATERINA (TERNI), TEGON ANTONIO (MESTRE-VE), TEMPESTA PIERO (ORVIETO-TR), TESTA CLAUDIA (TORINO), TESTA GIULIANO (VICENZA), TILI MARIA LUISA (SPELLO-PG), TINI ILIANA (ASSISI-PG), TOLOT LUCIA (CONEGLIANO-TV), TOMASI LUIGI (ADRIA-RO), TOMASSI ELISA, TORTORA ROBERTO (NAPOLI), TOSTA CLAUDIA, TOTONELLI GIANFRANCO (VITERBO), TRABUCCO ANNA MARIA (PERUGIA), TRAMPETTI ANNA LAURA (NAPOLI), TRAVERSINI FRANCA, TROVATI GRAZIELLA (TODI-PG), TUCCARI LORENZO (CATANIA), TULIPANI LOREDANA, UBALDI SIMONETTA (SPOLETO-PG), UGHI EMANUELA (PERUGIA), VACCARO VIRGINIA, VALIGI FRANCESCA (PERUGIA), VASELLI LORETTA (MARSCIANO-PG), VECCHIOLI GIUSEPPE (CITTA' DELLA PIEVE-PG), VECCIA FILOMENA, VENTURI DANIELA (FORTE DEI MARMI-LU), VENTURI MARINA, VERGARI FAUSTO, VEZZULI ALESSANDRO (ERBA-CO), VIGHI PAOLA (PARMA), VIGNANELLI MARIA RITA (ORVIETO-TR), VIGNOLI GIOVANNI, VIKOLER LETI MARIA (ROMA), VILLANI VINICIO (PISA), VITALI STEFANO, VOLPINI MARIA, ZAPPITELLO VANDINO, ZENOBI CARLA (SASSOFERRATO-AN), ZERBOLA MARCO, ZICARI FRANCESCA (SPOLETO-PG), ZINCANI RENATO, ZIRILLI GIUSEPPE (PERUGIA), ZOCCANTE SERGIO (VICENZA).