ISSN 0393-0998

Maggio 1991
Supplemento al n. 5

Period. mensile
sped. in abb. post. gruppo III/70

Anno XVIII

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

QUATTORDICESIMO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

LA PRIMA EDUCAZIONE MATEMATICA

CALAGONONE (NUORO), 25-26-27 OTTOBRE 1990
A cura di S. Pluchino

Direttore Responsabile:
PIER LUIGI PAPINI

Comitato di Redazione:
GIUSEPPE ANICHINI (Vicedirettore)
LEONEDE DE MICHELE
RICCARDO RICCI

Ufficio di Presidenza dell'U.M.I. (1991-1994):

Presidente	Alessandro Figà-Talamanca
Vice Presidente	Maurizio Cornalba
Segretario	Giuseppe Anichini
Amministratore-Tesoriere	Enrico Obrecht

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci e non è in vendita.

Fascicolo monografico stampato con un contributo finanziario del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (fondi 40%) nonchè del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint • Via del Legatore 3 • 40138 Bologna (Italia)

Maggio 1991
Supplemento al n. 5

XIV CONVEGNO NAZIONALE
SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

LA PRIMA EDUCAZIONE MATEMATICA

Calagonone (Nuòro), 25-26-27 ottobre 1990
Hotel Palmasera

PROGRAMMA

Giovedì, 25 ottobre 1990

ore 9 - Apertura del Convegno
ore 9,15 - L. Caprio Preden, Vice Direttore Generale per l'istruzione elementare: "La scuola elementare oggi: problemi e prospettive".
ore 10,30 - V. Villani, Università di Pisa: "La matematica: aspetti culturali e abilità tecniche".
ore 11,30 - F. Arzarello, Università di Torino: "Logica e informatica".

* * *

ore 15,30 - Tavola rotonda: "La formazione degli insegnanti elementari: formazione universitaria e formazione in servizio".
Relatori:
M. Bartolini Bussi, Università di Modena
L. Guasti, Università di Parma
M. Laeng, Università "La Sapienza" di Roma
G. Luzzatto, Università di Genova
Coordina: C. Mammana, Presidente C.I.I.M.

ore 17,45 - Dibattito e comunicazioni sull'insegnamento della matematica nella scuola elementare.

Venerdì, 26 ottobre 1990

ore 9 - O. Montaldo, Università di Cagliari: "Qualche riflessione a dieci anni dalla fondazione del C.R.S.E.M.".
- M. Polo, Università di Cagliari: "L'attività del C.R.S.E.M. per la scuola elementare".

ore 11 - P. Quattrocchi, Università di Modena: "Il ruolo della Geometria".

ore 12 - Dibattito.

* * *

ore 15,30 - L. Cannizzaro, Università "La Sapienza" di Roma: "La prima educazione matematica nel settore aritmetico".

ore 16,45 - Dibattito e comunicazioni sull'insegnamento della matematica nella scuola elementare.

Sabato, 27 ottobre 1990

ore 9 - C. Caredda, Università di Cagliari: " Probabilità e statistica".

ore 10,15 - M. Pellerey, Pontificio Ateneo Salesiano di Roma: "Lo sviluppo delle conoscenze e delle competenze matematiche nella scuola di base: il ruolo della scuola elementare secondo i programmi vigenti".

ore 11,15 - Dibattito conclusivo.

PARTECIPANTI

Abbondio Domenica (Briot - Bs) - Alberti M. Luisa (Quartu S.Elena - Ca) - Allerhand Anna (Roma) - Andreoli A. Maria (Modena) - Arca Giuseppe (Cagliari) - Arzarello Ferdinando (Torino) - Atzeni Luigi (Cagliari) - Azzali Evi (Udine) - Balbi Luciana (Muggia - Ts) - Barbanera Antonio (Terni) - Barbarossa Irene (Roma) - Bardone Luigi (Pavia) - Barone Lorenzo (Lecce) - Bartolini Maria (Modena) - Basso Milena (Piombino dese - Pd) - Bazan M.Chiara (Castelfranco Veneto - Tv) - Bernardi Claudio (Roma) - Bocchieri Rosa (Lido di Ostia - Roma) - Boero Paolo (Genova) - Boffa Michele (Savona) - Bonotto Cinzia (Padova) - Bortone Carlo (Lecce) - Boscu Rossana (Cagliari) - Bozzolo Clara (Lugano) - Braccu Pina (Cagliari) - Bussi Giovanni (Modena) - Caddeo Paola (Cagliari) - Calisti Santa (Milano) - Calvisi Antonietta (Cagliari) - Calzedda Camboni Rosalia (Sassari) - Candela Innocente (Bari) - Cannizzaro Lucilla (Roma) - Capelli Luciana (Oristano) - Caprio Preden Luisa (Roma) - Caredda Carla (Cagliari) -Cicери Carlo (Savona) - Cocco Rosalba (Selargius - Ca) - Colombetti Sonia (Pisa) - Conti Anna (Pisa) - Corda Rosalba (Nuoro) - Corrias Lucia (Nuoro) - Cossa Marinella (Santa Giusta) - Costa Angela (Timotine - Bs) - Deiana Rosalba (Sassari)- Deidda Carmine (Orosei - Nu) - Deidda Gianpiero (Orosei - Nu) - Deidda Pinella (Orosei - Nu) - Dellungo M. Grazia (None - To) - Deplano Sandro (Cagliari) - Demuro M. Paola (Nuoro) - Digregorio Salvatore (Rende - Cs) - Egano Marina (Cadoneghe - Pa) - Faggiano Luciano (Bari) - Fancello Giovanna (Dorgali - Nu) - Fasola M.Grazia (Crevoladossola - No) - Fasoli Annamaria (Valeggia sul mare - Sa) - Ferro Ruggero (Padova) - Figa' Talamanca Sandro (Roma) - Fiori Gabriella (Sassari) - Foresti Alida (Bonate sopra - Bg) - Formica Domenica (Catania) - Franchi Giorgio (Modena) - Frigiolini Gianni (Cagliari) - Furcas M. Luisa (Dorgali - Nu) - Furinghetti Fulvia (Genova) - Gallo Elisa (Torino) - Garau Graziettina (Serramanna - Ca) - Giannone Alberto - Giua Franco (Sinnai - Ca) - Golzio Enrica (Mocalieri - To) - Grugnetti Lucia (Cagliari) - Guasti Lucio (Parma) - Iacomella Alba (Lecce) - Iesu M. Nunzia (Cagliari) - Indovina Grazia (Palermo) - Iurcotta Annamaria (Trieste) - Laeng Mauro (Roma) - Lai Bruna (Nuoro) - Larocca Mira (Cagliari) - Lenzi Domenico (Lecce) - Lizzio Angelo (Catania) - Loche - Loi Antonietta (Sinnai - Ca) - Lombardo Enzo (Roma) - Luzzatto Giunio (Genova) - Macioccu Angelica (Olbia - Ss) - Maddalosso Mirella (Padova) - Mammana Carmelo (Catania) - Mannai Piergiorgio (Napoli) - Marasso Olga (Torino) - Marchini Carlo (Lecce) - Marchionna Ermanno (Milano) - Marogna Marta (Sassari) - Marongiu M. Laura (Oristano) - Marteddu Nicolina (Orosei - Nu) - Mascia Luigia (Pirri - Ca) - Mazza Erminia (Cagliari) - Mazza M. Bonaria (Quartu - Ca) - Melis Cecilia (Cagliari) - Meloni Bianca Maria (Cagliari) - Moni Pasqualina (Orosei - Nu) - Monni Annalisa (Nuoro) - Montagna Mariella (Casteggio - Pv) - Montaldo Oscar (Cagliari) - Montixi Giovanna Paola (Cagliari) - Morini Carlo (Ferrara) - Mulargia Annamaria (Cagliari) - Mura Franco (Sassari) - Mureddu Torres Cesare (Mexico,d.f.) - Murgia Anna (Nuoro) - Muvoli Arcangelo (Ancona) - Onnis M. Teresa (Cagliari) - Pallotta Mario (Nuoro) - Panebianco Carmela (Catania) - Parmeggiani Gaetano (Bologna) - Pellegrino Consolato (Modena) - Pellerey Michele (Roma) - Pesci Angela (Pavia)- Pettinau Massetti

Anna (Cagliari) - Pilotto Renata (Cadoneghe - Pd) - Pinna Antonia (Sassari) - Piochi Brunetto (Siena) - Pira M. Carmela (Dorgali - Nu) - Pittaru A. Maria (Trieste) - Plazzi Piero (Cagliari) - Poddighe Luciuana (Dorgali - Nu) - Polo Maria (Cagliari) - Puxeddu Sofia (Cagliari) - Quattrocchi Pasquale (Modena) - Racugno Walter (Cagliari) - Rambaldi Giacomo (Savona) - Reggiani Maria (Pavia) - Rohr Ferruccio (Roma) - Sacco M. Piera (Torino) - Sala Loredana (Domodossola - No) - Salvalaggio Paola (Camposanpiero - Pd) - Sanna Bruno (Orosei - Nu) - Sanna Iosto (Nuoro) - Sanna Salvatore (Sassari) - Scimemi Benedetto (Padova) - Sforzini Maria (Pavia) - Sini Anna (Sassari) - Sini Salvatore (Sassari) - Soma Margherita (Nuoro) - Spagnolo Filippo (Palermo) - Speranza Francesco (Parma) - Spilimbergo Francesca (Oderzo-Tv) - Staderini Giuseppina (Firenze) - Staropoli Francesco (Tropea - Cs) - Tibiletti Cesarina (MIlano) - Ticca Francesco (Dorgali - Nu) - Turacchi Romana (Carbonia - Ca) - Uda Marinella (Oristano) - Uselli Elsa (Selargius - Ca - Ca) - Vacca Tomasa (Guspini) - Veccia Filomena (San Nicola La Strada - Ce) - Vene' Margherita (Parma) - Vighi Paola (Parma) - Villa Caterina (Bonate Sopra - Ca) - Villani Vinicio (Pisa) - Villasanta Angela (Monserrato - Ca) - Villasanta Anna (Monserrato - Ca) - Viola M. Luisa (Cagliari) - Visentini Alba (Nuoro) - Zacco Maria (Torino) - Zicarelli Emilia (Guardia Piazza - Cs) - Zireddu Costantina (Zeddiani - Or) - Zumpano Daniela (Rogliano - Cs) .

RELAZIONI

ASPETTI CULTURALI E ABILITA' TECNICHE DELLA MATEMATICA

Vinicio Villani (Pisa)

Una parte non trascurabile dell'opinione pubblica ritiene che il valore culturale e formativo della matematica sia assai scarso o addirittura nullo. Questo modo di vedere le cose, portato alle sue estreme conseguenze, può essere sintetizzato in maniera provocatoria ma efficace con un'affermazione del tipo: "Il valore delle conoscenze matematiche di un allievo è quantificabile in termini monetari, prendendo come termine di paragone il costo di una calcolatrice tascabile che sappia fare lo stesso genere di calcoli dell'allievo". Da questo punto di vista, dunque, al giorno d'oggi il "valore" delle conoscenze matematiche di un allievo della scuola elementare, della scuola media, della scuola secondaria superiore, si aggirerebbe rispettivamente intorno alle 5000 lire, alle 30000 lire, alle 200000 lire.

La stessa provocazione può essere poi estesa alla professionalità matematica dei docenti: basta moltiplicare gli importi precedenti per il numero di allievi delle classi nelle quali i docenti operano.

Noi sappiamo bene che le cose non stanno così. Ma quali argomenti possiamo addurre, per cercare di convincere chi la pensa diversamente? Ecco alcuni punti che mi sembrano particolarmente significativi, pur senza alcuna pretesa di esaustività.

Per usare uno strumento di calcolo (ma anche per fare matematica con carta e matita) occorre essere capaci di:

1. Scegliere lo schema di calcolo appropriato per il problema che si intende affrontare.
2. Tradurre lo schema di calcolo in una sequenza di passi operativi (algoritmi, istruzioni per una calcolatrice, calcoli effettivi).
3. Interpretare i risultati ottenuti e valutarne la sensatezza.

Inoltre, non tutta la matematica è riconducibile a tecniche di calcolo di tipo algoritmico. Esulano per es. da questo ambito:

4. Una riflessione sulla logica di funzionamento delle calcolatrici stesse.
5. La comprensione del concetto di "infinito".
6. L'intuizione spaziale.
7. La capacità di comportarsi razionalmente in situazioni di incertezza.

Qualche commento relativo ai punti elencati.

1. La distinzione tra la fase di "scelta dello schema di calcolo" e quella di "esecuzione del calcolo" è espressa in maniera particolarmente efficace in un passo del rapporto Cockcroft, dove si afferma: "L'abilità di eseguire una particolare operazione numerica e l'abilità di sapere quando fare uso di essa non sono la stessa cosa, ed entrambe sono importanti."

Chi poi volesse stabilire una gerarchia tra queste due abilità dovrebbe tenere presente che, mentre l'esecuzione di un calcolo anche complicato può essere tranquillamente affidata ad una qualsiasi calcolatrice tascabile, la scelta delle operazioni da usare per risolvere un dato problema è - almeno per ora - una prerogativa specificamente umana, e quindi di valore culturale nettamente superiore rispetto alla pur importante padronanza delle tecniche di calcolo.

Da questa prima constatazione scaturiscono alcune notevoli implicazioni didattiche:

- A qualsiasi livello di scolarità sarebbe riduttivo finalizzare l'attività didattica esclusivamente all'acquisizione di una buona padronanza degli algoritmi di calcolo.
- I nuovi programmi di tutti gli ordini scolastici suggeriscono di proporre agli allievi, accanto agli indispensabili esercizi di consolidamento delle conoscenze, anche situazioni problematiche aperte, per es. problemi non completamente formalizzati, problemi con dati mancanti o sovrabbondanti, problemi con più soluzioni, ecc. Il valore formativo di siffatte situazioni problematiche sta proprio nello sforzo di comprensione, di schematizzazione, di scelta di una strategia risolutiva.
- Per evidenziare meglio la distinzione tra le due fasi di progettazione e di esecuzione, gli allievi andrebbero abituati a descrivere sempre accuratamente (a parole, o mediante formule, o diagrammi, o istruzioni per una macchina calcolatrice) la strategia risolutiva prescelta, prima di iniziare a fare i calcoli.

2. Il passaggio da uno "schema di calcolo" ad una "sequenza di passi operativi" è indubbiamente la parte più tecnica dell'attività matematica. Ma sarebbe profondamente sbagliato sottovalutare l'importanza di questo aspetto. E' ben vero che l'esecuzione di un calcolo complicato può essere affidata ad una macchina calcolatrice, ma proprio la facilità dell'esecuzione del calcolo da parte della macchina esige la massima attenzione nella sua impostazione: si pensi per es. alle convenzioni circa l'ordine di precedenza delle operazioni e all'uso delle parentesi o del segno di uguaglianza, che possono differire notevolmente a seconda dei tipi di calcolatrici usate. Si pensi poi alle difficoltà che sorgono quando si ha a che fare con casi "eccezionali" (divisione per zero, problemi con infinite soluzioni, ecc.). Si pensi infine alle questioni di arrotondamento, di troncamento e di scelta delle cifre significative del risultato quando si approssima un numero scritto sotto forma di frazione o un numero irrazionale con una sua espressione decimale finita.

Solo una buona familiarità con tutte queste problematiche, familiarità che si acquisisce attraverso un allenamento sistematico e prolungato nel tempo, consente di dominare le molteplici situazioni che possono presentarsi.

E anche in questo caso le implicazioni didattiche sono abbastanza evidenti: una certa abilità nell'esecuzione mentale o con carta e matita di semplici calcoli aritmetici o algebrici è indispensabile per rendersi conto delle regole del gioco. Un peso eccessivo dato all'esecuzione manuale di calcoli complicati, ripetitivi e fine solo a se stessi sarebbe del tutto fuori luogo.

3. L'interpretazione dei risultati ottenuti rappresenta, o almeno dovrebbe rappresentare, la fase culminante della risoluzione di un qualsiasi problema. Invece il più delle volte le risposte degli allievi si arrestano alla sola esecuzione dei calcoli: non vengono precisate le unità di misura usate, né si controlla la sensatezza dell'ordine di grandezza dei risultati, né ci si preoccupa di scartare eventuali soluzioni magari matematicamente corrette ma non significative in un determinato contesto o di individuare le cause per cui in certi casi non vi sono soluzioni, o ve ne sono varie, ecc. Si viene a perdere così il senso più profondo dell'attività di matematizzazione, che consiste appunto nel partire da un problema reale, schematizzarlo opportunamente (in termini aritmetici, o algebrici, o geometrici) effettuare i calcoli per determinare le eventuali soluzioni, e infine ritornare al problema dato per stabilire se, e in quale misura, le soluzioni trovate sono adeguate alla situazione reale di partenza.

Chi non fosse ancora persuaso dell'importanza di quest'ultima fase rifletta sulle numerose situazioni, anche del tutto elementari, nelle quali la schematizzazione matematica adottata dà luogo a risultati difformi da quelli che ci si aspetterebbe di trovare per il problema reale: per es. soluzioni non intere in contesti dove hanno senso solo numeri interi, soluzioni negative in contesti dove si parla di lunghezze di segmenti, valori teorici di una probabilità che sono in disaccordo con i risultati di una serie di prove sperimentali. Non sarebbe didatticamente opportuno ignorare questi conflitti; molto meglio farli emergere e discuterne apertamente con gli allievi, in vista di superare poi le apparenti contraddizioni mediante ricorso a schematizzazioni più raffinate. Solo così si possono mantenere ben saldi i legami tra matematica e realtà.

4. Non tutti gli insegnanti consentono l'uso delle macchine calcolatrici nelle loro classi. Anche coloro che lo consentono, raramente si preoccupano di richiamare l'attenzione degli allievi sulla logica del loro funzionamento. Eppure un confronto fra i diversi tipi di calcolatrici presenti in classe sarebbe un'ottima occasione per far toccare con mano l'importanza delle notazioni e delle convenzioni matematiche, ma al tempo stesso la loro arbitrarietà. Penso per es. al già menzionato uso delle parentesi o del segno di uguaglianza, oppure alla distinzione tra divisione "intera" e divisione "nel campo dei numeri reali". Queste riflessioni potrebbero poi essere estese ad un interessante confronto fra il modo di operare degli strumenti di calcolo elettronico e quello della mente umana, evidenziando analogie e differenze, aspetti sintattici e aspetti semantici, procedimenti algoritmici e ragionamenti sintetici, ambiguità del linguaggio naturale ed esigenze di formalizzazione e di rigore.

5. I moderni strumenti di calcolo hanno enormemente ampliato l'ambito dei

numeri concretamente utilizzabili nei calcoli: anche la calcolatrice più rudimentale è capace di eseguire con grande rapidità e precisione addizioni o moltiplicazioni tra numeri interi o decimali con molte cifre. Tuttavia i numeri che una macchina è in grado di riconoscere e di usare formano pur sempre un insieme finito. Il concetto di "insieme infinito" sembra essere (almeno per ora) una prerogativa della mente umana. Ecco quindi un altro tema affascinante, fonte di notevoli spunti didattici.

- Si facciano riflettere gli allievi sulla potenza concettuale del sistema di notazione posizionale per i numeri interi o decimali limitati. Un numero finito di regole è sufficiente per descrivere gli algoritmi di scrittura, di confronto, di calcolo con tutti questi numeri: si tratta dunque di algoritmi applicabili ad un'infinità di casi.

- Si pensi poi alla semplice dimostrazione, proponibile già a livello di scuola media, del fatto che esistono infiniti numeri primi. Una macchina è capace di scrivere l'elenco di tutti i numeri primi minori di mille, o di un milione, o magari di un miliardo; non è invece capace di decidere se un siffatto elenco terminerà ad un certo punto oppure se proseguirà illimitatamente. Solo grazie ad un ragionamento per assurdo la mente umana è in grado di dirimere la questione.

- Si pensi ancora alla scoperta dei numeri irrazionali o alla possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di due segmenti di lunghezze diverse: si tratta di risultati non desumibili dall'esperienza fisica, che quindi evidenziano la peculiarità delle costruzioni mentali della matematica e la loro autonomia nei confronti delle scienze sperimentali.

6. Sia l'uso tradizionale del disegno, sia la visualizzazione grafica sullo schermo di un elaboratore danno luogo ad immagini bidimensionali, e lo stesso avviene sulla retina dei nostri occhi. La realtà in cui ci troviamo immersi è invece tridimensionale. La ginnastica mentale del passaggio da situazioni tridimensionali a rappresentazioni piane, e viceversa, va curata fin dai primi anni di scolarità, non solo attraverso il disegno, ma altresì con attività di descrizione e di ricostruzione di solidi a partire dai loro sviluppi piani, con una riflessione sulle leggi della prospettiva, con l'introduzione di opportuni sistemi di riferimento (cartesiani e polari) atti a localizzare la posizione degli oggetti dello spazio.

7. Anche la capacità di comportarsi razionalmente in situazioni di incertezza va acquisita fin dai primi anni di scolarità. Quasi tutte le circostanze della vita reale presentano un certo margine di aleatorietà: è importante rendersi conto del fatto che, almeno entro certi limiti, questa aleatorietà può essere quantificata. Al giorno d'oggi è assai facile manipolare grandi quantità di dati per ricavarne statistiche di ogni tipo. Spesso non è altrettanto facile comprendere e interpretare le informazioni che tali statistiche ci forniscono, eppure molte decisioni economiche, sociali, politiche, individuali e collettive, si basano su di esse. Al di là dell'acquisizione delle tecniche di calcolo di medie o di percentuali, la scuola è dunque tenuta a fornire gli strumenti concettuali essenziali per dominare con senso critico questo tipo di informazioni.

Non mi dilungo oltre con queste esemplificazioni. Spero che il senso delle considerazioni fin qui svolte sia sufficientemente chiaro: la cultura matematica non può essere identificata in nessun modo e a nessun livello scolastico con la semplice padronanza di questa o quella tecnica di calcolo. Ciò era vero anche nel passato, ma è ancora più vero oggi, data la possibilità di demandare l'esecuzione materiale dei calcoli più noiosi e ripetitivi alle macchine. Nondimeno, oggi come nel passato, l'acquisizione di una buona cultura matematica passa anche attraverso una adeguata padronanza delle tecniche di calcolo, padronanza che non deve essere fine a se stessa, ma riferita costantemente ad un opportuno contesto entro il quale le specifiche abilità di calcolo acquistano un senso. Si tratta insomma di un delicato equilibrio tra i due aspetti: culturale e tecnico. Mi sembra interessante al riguardo un confronto con quanto avviene da sempre nell'ambito dell'insegnamento-apprendimento di una lingua: è indispensabile conoscere un certo numero di parole, occorre poi conoscere ortografia, grammatica e sintassi; ma lo scopo ultimo di tutte queste acquisizioni è quello di riuscire a comunicare le proprie idee e di comprendere quelle altrui. Ebbene, nello insegnamento-apprendimento della matematica si deve tendere ad un obiettivo analogo (e sottolineo ancora una volta che mi riferisco indistintamente a tutti i livelli scolastici): la padronanza delle tecniche di calcolo va vista come uno strumento indispensabile per la lettura e l'interpretazione quantitativa della realtà nei suoi vari aspetti: fisico, biologico, economico, sociale, ecc.

Un insegnamento della matematica coerente con una siffatta impostazione implica un coinvolgimento attivo degli allievi, con particolare attenzione alle problematiche che risultano di volta in volta più significative per essi.

In questo ordine di idee acquista particolare importanza l'abilità di passare da un tipo di linguaggio ad un altro: per es. da un enunciato verbale ad una rappresentazione grafica, ad una formula, ad un diagramma, ad un algoritmo, e viceversa. E in proposito non posso fare a meno di esprimere la mia preoccupazione per un possibile pericolo insito nella recente riforma strutturale della scuola elementare: sarebbe deleterio se la suddivisione delle competenze tra gli insegnanti ai quali è affidata una stessa classe portasse alla creazione di compartimenti stagni, o comunque rendesse più difficile una proficua interazione della matematica col linguaggio naturale, col disegno, con le attività di natura sperimentale.

Concludo con due ulteriori considerazioni di carattere più generale.

Innanzitutto ancora qualche parola sul valore formativo di un'impostazione ipotetico-deduttiva dell'insegnamento della matematica. Sono convinto che, a livello di scuola secondaria superiore, si debba affrontare il problema di una sistemazione razionale delle nozioni precedentemente apprese; ben venga quindi una riflessione sul ruolo dei termini primitivi, degli assiomi, delle definizioni, dei teoremi con le relative dimostrazioni. Sono assai meno convinto della validità di un certo tipo di insegnamento, che limita questa impostazione alla sola geometria piana, dando quasi l'impressione che nel campo dell'aritmetica, dell'algebra, della probabilità, della stessa geometria solida, e più in generale in ogni altra scienza opportunamente formalizzata non sia possibile, né necessario, procedere in modo altrettanto rigoroso. Sono poi molto perplesso sul valore culturale di un'attività scolastica incentrata sullo studio di dimostrazioni di teoremi per lo più banali o intuitivamente evidenti, come normalmente avviene nell'ambito della geometria piana. Non contesto certo il fatto che in una trattazione sistematica ed esaustiva di una teoria matematica anche questo sia necessario. Affermo però che spesso per gli allievi, ancora inesperti, la vera difficoltà consiste proprio nel capire cosa si debba dimostrare, e perché si debba procedere proprio nel modo voluto dall'insegnante o dal libro di testo. Se questo scoglio non viene superato, gli allievi tendono ad assumere un atteggiamento passivo, riducendo il loro apprendimento della matematica ad un fatto di memorizzazione, più che di comprensione: esattamente l'opposto dell'obiettivo che ci si proponeva di raggiungere! In definitiva, se vogliamo insegnare a ragionare correttamente, dobbiamo preoccuparci sempre di motivare le esigenze di rigore, piuttosto che imporlo d'autorità.

Nel preparare la presente relazione sono stato a lungo incerto se limitarmi ad esaminare le problematiche connesse con l'insegnamento-apprendimento della matematica in ambito scolastico, o se focalizzare piuttosto l'attenzione sugli aspetti culturali e sulle abilità tecniche della matematica, con riferimento all'età adulta e alla vita professionale di quanti non sono essi stessi matematici. Alla fine ho optato per la prima alternativa nella convinzione che, a differenza di quanto avviene per molti altri settori (dalla musica alla letteratura o all'economia) nel caso della matematica la cultura di un individuo si plasma essenzialmente solo a livello scolastico. Questa constatazione mette anche in risalto la particolare responsabilità che compete a quanti insegnano la nostra disciplina. Induce allo stesso tempo ad una riflessione sugli esiti, a lungo termine, delle acquisizioni scolastiche della matematica. La conoscenza di particolari abilità tecniche è probabilmente destinata ad essere dimenticata in un tempo più o meno breve da parte di chi, terminati gli studi, non avrà più occasione di servirsene con una certa frequenza, nella propria attività professionale. E' lecito sperare invece che certi atteggiamenti mentali di fondo, quali la capacità di comprendere e schematizzare una situazione problematica, di intuire e di ragionare correttamente, di generalizzare e di astrarre, di usare un manuale per reperire autonomamente le informazioni necessarie per un determinato fine, ecc., se debitamente acquisiti e interiorizzati in età scolare, possano rimanere patrimonio culturale permanente degli individui, con riflessi positivi anche al di là dello specifico campo della matematica.

Da molti anni si discute di queste tematiche e all'apparenza vi è tra gli "addetti ai lavori" un accordo generale circa gli obiettivi basilari dell'insegnamento della matematica. Ma la scuola nel suo complesso stenta ad adeguarsi e continua a privilegiare - nell'insegnamento e soprattutto nella fase di verifica e valutazione degli allievi - le attività più ripetitive e mnemoniche, forse indispensabili per talune professioni prima dell'avvento dei mezzi di calcolo elettronico, certo di modesta rilevanza al giorno d'oggi. Questo stato di cose spiega, almeno in parte, il persistere di quei giudizi stereotipati dell'opinione pubblica circa lo scarso valore culturale e formativo della nostra disciplina, ai quali mi riferivo all'inizio dell'esposizione.

Un rinnovamento autentico e sostanziale dell'insegnamento non può limitarsi ad una semplice revisione dei contenuti, ma deve partire da un ripensamento di fondo circa il ruolo della matematica nella nostra società. Ciò esige un impegno assiduo e a lungo termine da parte di ogni singolo insegnante. E' indubbio titolo di merito del Nucleo di Ricerca Didattica di Cagliari che oggi ospita il nostro convegno, avere perseguito in tutti questi dieci anni di attività gli obiettivi di rinnovamento dell'insegnamento della matematica, con costanza e determinazione, coinvolgendo un così notevole numero di insegnanti di tutti gli ordini scolastici.

LOGICA E INFORMATICA

Ferdinando Arzarello (Torino)

La relazione va intesa come un commento ai lavori elencati in Appendice, i quali rappresentano la produzione più significativa dei Nuclei di ricerca didattica italiani nei settori della logica e dell'informatica, al livello della scuola elementare.

Naturalmente, la responsabilità di quanto affermato in seguito è interamente dell'estensore della relazione e non dei singoli Nuclei eventualmente citati.

1. I punti innovativi dei Nuovi programmi.

E' utile ricordare i punti più significativi dei nuovi programmi per la scuola elementare (d'ora in avanti indicati con NP), che riguardano Logica e Informatica.

Da una lato, una posizione importante hanno gli algoritmi: si parla esplicitamente della loro valenza formativa e il fatto stesso di usare tale parola, ben più impegnativa che non ad es. il termine operazione, mette in rilievo il contesto ampio in cui collocarsi. Non solo l'aritmetica quindi, ma anche campi non strettamente numerici (geometria, ritmi, vita quotidiana, ecc.), nè soltanto meccanismi appresi meccanicamente, ma una loro costruzione meditata, che porti a una comprensione più approfondita dei processi da essi governati.

D'altro canto, posizione privilegiata in tutti i processi logici ha nei NP il linguaggio naturale. Se ne indicano esplicitamente la ricchezza e le potenzialità logiche; nella parte che i NP dedicano alla lingua si dice che "la lingua è strumento del pensiero, non solo perché lo traduce in parole (permettendo all'individuo di parlare con se stesso, cioè di ragionare) ma anche perché sollecita e agevola lo sviluppo dei processi mentali che organizzano, in varie forme, i dati dell'esperienza".

Emerge dai due punti la necessità di proporre agli alunni la logica non come puro gioco formale e avulso dal reale, ma quale strumento che si confronta di continuo con il significato delle cose: il riferimento al linguaggio naturale rappresenta l'indispensabile ancoraggio alla realtà, sulla quale si interviene operativamente, mediante algoritmi.

Si ha quindi una critica implicita (che era di fatto esplicita in una prima stesura dei NP, ma poi venne "censurata" per ragioni varie) alla presentazione di una logica snaturata a puro gioco formale, come avveniva (avviene?) in tanti libri di "insiemistica" per la scuola (non solo elementare). Il linguaggio logico-insiemistico (ma senza formalismi bloccanti) può essere uno strumento di sistemazione e comprensione di concetti matematici già maturi (ad es., la classificazione dei quadrilateri, oppure le classificazioni nel dominio dei naturali, ecc.), non un avvio ai medesimi. In altre parole, la logica non deve diventare oggetto di insegnamento esplicito, ma essere uno strumento che aiuta nella riflessione sugli oggetti e sui concetti matematici costruiti. Essa permetterà quindi una crescente precisione e completezza di linguaggio, a partire dalle basi naturali stesse della lingua e non in contrapposizione ad essa: ad es. sviluppando i ragionamenti fatti naturalmente dagli alunni in contesti significativi si esplicitano contenuti logici interessanti.

La logica dei NP va imparata quale strumento per parlare, argomentare, sistemare in matematica, e quindi nel suo concreto operare come tale, più che come un insieme statico di regole e di proprietà di cui non si coglie l'utilità altro che per risolvere problemini 'ad hoc'. Come tale, essa coinvolge in modo prevalente, oltre che ovvi aspetti cognitivi, soprattutto le capacità metacognitive degli alunni, il cui ruolo per una costruzione attiva della matematica è stato messo sempre più in evidenza dalle ricerche degli ultimi anni: la riflessione e l'organizzazione delle conoscenze costruite, la comprensione profonda dei procedimenti di calcolo in senso lato sono rappresentanti tipici di queste capacità.

La logica inoltre coinvolge un importante aspetto epistemologico della matematica, cioè il fatto che la matematica non è solo costituita di asserzioni e di calcoli ma anche (in gran parte) di giustificazioni e di argomentazioni per tali asserzioni e calcoli. La logica è lo strumento principale attraverso il quale queste ultime sono rese esplicite e coscienti. Essa favorisce il passaggio da una situazione di conoscenza a un controllo cosciente di tale conoscenza (a livello metacognitivo ed epistemologico).

Venendo alla parte più propositiva dei NP, è bene ricordare, per memoria del lettore, i campi di problemi e gli argomenti di Logica e Informatica ivi elencati esplicitamente:

- regolarità e ritmi;
- classificazioni con attributi, inclusioni, seriazioni, ...;
- rappresentazioni logico-insiemistiche come linguaggio in contesti significativi (matematica, scienze, lingua);
- tutti, qualcuno, uguaglianza;
- la combinatoria, quale campo di problemi con forte valenza logica;
- algoritmi numerici e non;
- diagrammi di flusso e processi.

Per completezza, è bene notare che questi argomenti si agganciano perfettamente ai corrispondenti temi della scuola media (Programmi del 79).

Va inoltre osservato che il tema della combinatoria, così ignorato in tutta la nostra scuola (dalle elementari all'Università) è un suggerimento fortemente innovativo; si noti che solo qui si parla di campo di problemi, vale a dire di conoscenze e algoritmi organicamente collegati in riferimento a una classe di problemi simili (in analogia per es. con il campo dei problemi additivi). Torneremo su questo importante argomento.

2. Quello che i Nuclei fanno

L'attività di sperimentazione (e aggiornamento) dei nuclei in campo logico-informatico può essere suddivisa in due grandi gruppi. Il primo, che chiamerò 'standard', riguarda circa i due terzi dei lavori.

Questi affrontano, conformemente ai metodi suggeriti dai NP, cui si accennava prima, argomenti logici quali:

A) ricerca di regolarità;
B) classificazioni, seriazioni, ...;
C) uso interattivo del computer
(quasi esclusivamente ambienti Logo);
D) informatica "povera";
E) calcolatrici tascabili.

Si tratta di tracce didattiche (alcune ampiamente sviluppate), cui l'insegnante interessato potrà attingere usufruendo della bibliografia dell'appendice. Più che per gli argomenti, che, penso, facciano ormai parte del repertorio di ogni serio insegnante preparato sui nuovi programmi, le suggerisco per la metodologia che mi pare esemplare rispetto allo spirito dei NP, cui si accennava sopra. In particolare, merita di sottolineare che in tutte le proposte dei nuclei (in forma più o meno accentuata) la logica è sempre intesa:

- come strumento di riflessione e sistemazione delle discipline (geometria e aritmetica);
- come strumento di pensiero nella risoluzione di problemi.

Tutti i nuclei hanno fatto proprio l'invito igienico di Mario Ferrari ad una **cura disintossicante dall'insiemistica e dalle tavole di verità**. Il motto lapidario del nostro ineffabile amico dovrebbe essere fatto proprio da tutti gli insegnanti italiani e in particolare da quegli Enti che, come gli IRRSAE, sono preposti al loro aggiornamento sui NP. Spero che almeno questo messaggio, espresso nel linguaggio brutale e senza sfumature della propaganda, giunga da questo convegno a tutti gli interessati. Dico questo non tanto per i colleghi dei Nuclei, che sono stati tra i critici più agguerriti agli eccessi della cosiddetta "matematica moderna" ma per gli altri colleghi in generale, perché, dal poco che vedo nelle varie scuole elementari in cui capito, mi pare che il messaggio dei NP in questo senso, che è chiarissimo, sia stato molte volte travisato, proponendo proprio il contrario di quanto essi dicono.

Un piccolo commento generale sui materiali di tipo informatico è che l'uso interattivo del personal è basato quasi esclusivamente su esperienze Logo (alcune anche adatte alla scuola media). Ciò costituisce oggettivamente un limite, al di là della bontà delle proposte, per nuclei di *ricerca* didattica; si spera che negli anni futuri si possa superare tale limite.

Un secondo blocco di proposte dei nuclei (un terzo circa del totale) riguarda temi che, sia per il contenuto, sia per la metodologia, si presentano fortemente innovativi, ricchi di stimoli e di problemi didattici, molti dei quali ancora ben lungi dall'essere risolti. Essi costituiscono, in un certo senso, un approfondimento problematico delle proposte più innovative dei NP, ricordate all'inizio.

Da questo secondo blocco emerge un filone di ricerca già sgrossato, nonché altri temi, appena sbozzati, che solo futuri lavori potranno delineare nella loro complessità.

L'interesse sta non solo nella loro novità ma anche nel proporre campi di lavoro con gli alunni che, facendo logica, li coinvolgono complessivamente e non settorialmente nel processo di apprendimento della matematica.

Il filone principale riguarda i complessi rapporti tra lingua naturale e logica in contesti vari.

Il problema di fondo è presto detto, ma di difficile soluzione. E' noto come i connettivi e i quantificatori così come sono definiti in logica matematica si accordano solo parzialmente e a volte non si accordano affatto con i molteplici significati assunti dagli omonimi connettivi e quantificatori del linguaggio naturale. In generale, si può affermare che la logica necessaria per parlare di matematica (aritmetica, geometria, ecc.) fa uso di modelli concettuali che sono frutto di trasformazioni e ristrutturazioni complesse e che quindi sono lontani dai modelli naturali, così come la somma e il prodotto dell'aritmetica sono lontani (anche se in minor misura) dalle nozioni che loro corrispondono nel linguaggio naturale.

In altre parole, da un lato, la logica matematica è la collezione dei modelli concettuali di tipo logico utilizzati di fatto da parte del matematico per sistemare la sua disciplina. D'altro lato, la logica dell'uomo della strada è meno specifica e precisa di quella dei matematici, ma anche terribilmente più complessa e meno chiara; il linguaggio naturale può infatti esprimere categorie e godere di proprietà strutturali che la logica matematica non riesce (ancora) a spiegare o ad avere in modo soddisfacente (esempi: logiche temporali, modali, non commutatività di alcuni connettivi proposizionali, ecc.).

L'asserto dei nuovi programmi sulla ricchezza del linguaggio naturale e sulla sua adeguatezza a rispondere alle esigenze di sistemazione del pensiero matematico a livello di scuola elementare, più volte ricordato, ha un duplice significato: in primo luogo, rassicurantemente, dice che il linguaggio naturale ha sufficienti capacità espressive per esprimere i ragionamenti della matematica (nella scuola elementare); d'altra parte, il linguaggio naturale è addirittura troppo ricco per quanto riguarda la matematica.

Si ha, in certo senso, un fenomeno opposto a quello che si presenta in aritmetica o geometria; mentre in questi casi il linguaggio naturale fornisce modelli concettuali elementari e primitivi, che vengono successivamente arricchiti con trasformazioni e adattamenti -fino a sintetizzare in forme compatte e algoritmicamente efficienti quanto espresso dai precedenti modelli- nel caso della logica la sintesi e l'efficienza algoritmica è conseguita a costo di gravi sacrifici rispetto alle potenzialità espresse dai modelli elementari intuitivi.

Detto in un altro modo: mentre la matematica arricchisce e chiarisce (sia pure con modifiche profonde) tutti i modelli concettuali intuitivi propri del linguaggio naturale e integrati nella cultura dell'uomo medio, che vengono utilizzati nelle situazioni problematiche di carattere aritmetico, la logica matematica invece chiarisce solo alcuni frammenti dei modelli utilizzati in situazioni problematiche di tipo logico dall'uomo della strada (precisamente quelli che saranno utilizzati in matematica).

Ciò pone un problema didattico diverso rispetto all'insegnamento dell'aritmetica (e della geometria). Infatti, per queste un itinerario ragionevole può, ad es., essere "dal mondo reale ai modelli matematici", in quanto progetti didattici che puntino alla "matematizzazione" scatenano un concorso di forze e di intenti tra il modello concettuale intuitivo e la matematica formale (il buon senso va d'accordo con la matematica e il pensiero formale). Non così per la logica matematica: molte situazioni logiche del mondo reale possono essere fonte di modelli concettuali intuitivi così complessi che risulteranno poi sistemabili con difficoltà a livello. Di qui il senso di frustrazione che si ha quando invece si fa finta di niente e si costringono tali modelli complessi nella gabbia dei calcoli logici usuali, oppure quando si studiano situazioni innaturali che però corrispondono esattamente a tale gabbia.

L'insegnante di logica matematica, dalle elementari all'Università, si imbatte in questo dilemma: la logica è necessaria per sistemare e parlare di matematica, ma d'altra parte, come l'aritmetica elementare e a differenza dei logaritmi o del calcolo differenziale, fa parte, in un'accezione molto più vasta e meno precisa del termine, anche del comune patrimonio culturale di base, del quale non si può non tenere conto nell'insegnamento. Tale patrimonio, però, è in un certo senso troppo ricco per la logica matematica (mentre è inadeguato per l'aritmetica): la logica del bambino è immensamente più ricca della logica matematica (di nuovo a differenza dell'aritmetica), anche se naturalmente egli non ha coscienza di questo.

Qui nascono due problemi didattici:

a) eccessiva banalità di situazioni innaturali che propongono un modello concettuale povero, sottodimensionato rispetto alle capacità logiche degli allievi (es.: blocchi logici);

b) non utilizzo della logica matematica nel suo contesto naturale, cioè come strumento per parlare di matematica (ovvero di aritmetica, geometria, ecc.), per argomentare, per dimostrare, in situazioni problematiche ricche e dinamiche.

Si presenta quindi un <u>dilemma didattico</u> non indifferente (che io chiamo di <u>don Ferrante</u>):

logica ricca sì, ma non matematica, da un lato;

logica matematica sì, ma povera, dall'altro.

Che fare per evitare il dilemma?

Dalle ricerche dei nuclei emergono sostanzialmente due risposte, la prima con un programma più esigente (o <u>ristretto</u>, secondo i punti di vista), la seconda con un programma più <u>rilassato</u>. Con la prima, si cercano situazioni problematiche di tipo logico-matematico in cui la logica soggiacente sia ricca ma coerente con la logica (della) matematica. In tutte le proposte, si cercano di evitare le banalità e le innaturalezze, entrambe avvertite dagli allievi: la situazione deve davvero stimolare e sfidare gli allievi, altrimenti difficilmente produrrà nuove conoscenze. Le proposte, nel primo caso devono superare un doppio esame, uno di interesse (deve essere stimolante per il vissuto e le conoscenze dell'allievo, ma anche importante per il curriculum dell'insegnante) e uno di coerenza (in senso lato) con la logica matematica (le categorie e le proprietà logiche toccate devono cioè essere coerenti con le omologhe della logica matematica).

Nel secondo caso, non è necessario il secondo test.

In entrambi i casi l'obiettivo è la presa di coscienza e la sistemazione di concetti logici di fatto usati dagli allievi, mentre lavorano a queste situazioni problematiche e quindi il passaggio dai modelli concettuali intuitivi a modelli formali più precisi, eventualmente tramite opportune rappresentazioni.

Il problema didattico di fondo è sempre di evitare la "formalizzazione selvaggia", che fa usare sempre meno i modelli concettuali agli allievi ma li spinge verso procedimenti formali puri, cortocircuitando la comprensione e il controllo semantico della situazione. Al contrario, si cerca di sviluppare in loro le capacità ad argomentare in matematica, il che può essere conseguito solo con un processo educativo nel lungo termine.

Così, nell'ambito, del filone più ristretto, si mettono in piedi ambienti logici vari (il concetto è discusso in Arzarello, cfr. bibliografia) in cui studiare alcuni connettivi e quantificatori propri della logica matematica, oppure si affronta il problema delle definizione in geometria (si cfr. le voci in bibliografia coll'indicazione [RIS]).

Il secondo filone, più rilassato, risulta particolarmente stimolante in quanto presenta situazioni in cui si analizzano, utilizzano, progettano processi (ad es., iterativi e ricorsivi), dispositivi a contenuto tecnologico (meccanico, elettronico, ecc.: macchine, utensili, giochi,...) (cfr. in bibliografia le voci coll'indicazione [RIL]). Qui l'ambiente logico è costituito dai dispositivi stessi con le loro regole di funzionamento e di uso.

3. Quello che bisognerebbe fare

I temi più scottanti della ricerca didattica nel settore della logica matematica sono bene illustrati dai lavori commentati per ultimi nel paragrafo precedente; va' da sè che gli argomenti 'standard' sono forse ancora più importanti, in quanto costituiscono un terreno sicuro su cui lavorare con gli alunni. Se però si intende la *ricerca* didattica come studio dei problemi dell'apprendimento, mi pare ovvio che le questioni affrontate per ultime costituiscano un terreno fondamentale di lavoro, anche perché inestricabilmente coinvolte con problemi più generali che riguardano l'apprendimento di tutta la matematica.

L'approfondimento dei temi epistemologici e didattici sopra affrontati mi pare quindi fondamentale. In particolare sottopongo agli studiosi (me compreso) i seguenti compiti:

1. Logiche non-classiche (ad es., quelle temporali, modali, ecc.): quale è o ha da essere la loro fruibilità didattica? Al momento è come se si provasse un lucreziano "horror vacui" per questi mondi non classici, soprattutto studiati dai filosofi, più che dai matematici.

2. Ambienti e giochi logici (per chi lavora secondo il programma ristretto, di cui al paragrafo precedente): la critica più forte a questi progetti è che sono di difficile "validazione", vale a dire il controllo semantico su quanto avviene non è dentro la situazione stessa ma è mutuato da un atteggiamento esterno alla situazione, probabilmente di carattere metacognitivo.

3. Logiche operative (per chi lavora secondo il programma rilassato, di cui al paragrafo precedente): le situazioni didattiche non si prestano alla critica precedente (vale a dire, di solito si ha validazione), ma ad un'altra critica, meno forte ma concettualmente rilevante, cioè che la matematizzazione di tali situazioni (ovvero, il loro col-

legamento con la rete costruita del sapere matematico) sembra necessariamente presentare un momento essenziale senza validazione.

In realtà, i due problemi precedenti sono collegati e non ancora risolti; la loro risoluzione comporterebbe il superamento del "dilemma di don Ferrnate", che mi pare il problema cruciale, al momento. Esso infatti contiene come sottoproblemi le seguenti questioni:

4. Aspetti metacognitivi dell'apprendimento logico: come, dove avviene e quali abilità sono coinvolte?

5. Algoritmi e cultura tecnologica: quali i loro rapporti da un punto di vista didattico, oltre che epistemologico?

6. Che cosa ha da essere un campo di problemi per la logica?

(Al momento, nessuna proposta si presenta come tale; si confronti la situazione ben diversa che si ha in aritmetica).

Un'ulteriore domanda che i lavori dei nuclei lasciano senza risposta (ma forse non è loro compito darla) è:

7. Informatica: in quale modo? che cosa? qual è il ruolo degli ambienti informatici nell'educazione matematica? (non solo del LOGO; ad es. particolarmente significativi mi paiono, anche a livello di scuola elementare, i calcolatori tascabili che permettono il calcolo simbolico, tipo le Galaxy della Texas).

Rimane infine un grosso buco da colmare.

8. La combinatoria come campo di problemi logici, salvo pochi interessanti esempi, è ancora tutta da fare.

Che cosa si aspetta? Chi è esperto nel ramo e ha interessi didattici ha un interessante tema su cui lavorare! Attenzione: non si tratta solo di fare un elenco di problemi interessanti; ciò che manca è una progressione, un collegamento organico di problemi e di algoritmi, che facciano della combinatoria un campo di problemi per la logica, secondo i dettami dei NP! Chi ha idee in merito, mi scriva; se non altro si potrà cominciare col fare una banca-dati di problemi interessanti, il che è già meglio di niente!

BIBLIOGRAFIA

L'elenco contiene i lavori dei vari Nuclei, ordinati per sede, attinenti la logica nella scuola elementare. Accanto ad ogni lavoro compare una lettera che, qualora non sia già chiaro dal titolo, indica i temi preminentemente trattati nel lavoro. Le lettere seguono la classificazione delle pp. 3-4, 7:

A) ricerca di regolarità;
B) classificazioni, seriazioni,...;
C) uso interattivo del computer
(quasi esclusivamente ambienti Logo);
D) informatica "povera";
E) calcolatrici tascabili;
RIS) ipotesi ristretta (p.7);

RIL) ipotesi rilassata (p.7);
G) generale.

La responsabilità della classificazione è dell'autore della relazione, mentre i Nuclei rimangono gli unici responsabili di quanto asserito nei lavori citati.

[Abbreviazione: IV IE = IV incontro internuclei della scuola elementare, ecc.]

CAGLIARI

C. Caredda, *L'insegnamento della logica nella scuola elementare*, Scuola viva, SEI, XXIII (1), 1987. [G]

C. Caredda, M. Polo, *Insegnare matematica*, Lisciani e Giunti, 1987 ss. [G]

P. Canu, N. Tuberoso, *Prerequisiti per l'attività psico-motoria: riflessione su di un corso di aggiornamento per docenti di scuola materna ed elementare*, L'Educazione Matematica, vol.1, 1986. [G]

CALABRIA

E. Zicarelli, D. Zumpano, *Alfabetizzazione informatica nella scuola elementare*. [C]

GENOVA

A. Carlucci, E. Scali, *Sviluppo del ragionamento ipotetico e risoluzione di problemi*, IV IE, Torino 1989. [RIS]

A. Ferrara, E. Lemut, *Metodologie e strumenti di analisi delle logiche incorporate in dispositivi automatici*, IV IE, Torino 1989. [RIL,E]

E. Ferrero, *Sull'insegnamento-apprendimento di alcuni connettivi*, IV IE, Torino 1989. [RIL]

A. Rondini, *Problemi di gestione in classe della costruzione e della rappresentazione di alcuni nessi logici*, IV IE, Torino 1989. [RIL]

LECCE

C. Marchini, *Le sostituzioni e la didattica della matematica*, Boll. UMI (7) 4-A (1990), 145-153. [RIS]

AA.VV., *Computer perché*, Introduzione alle nuove tecnologie nella scuola, CIDI di Lecce, 1990.

MODENA

S. Guidi, *Il logo e le trasformazioni*, L'Educazione Matematica, Suppl. VI-2, 1985, 59-69. [C]

S. Guidi, N.A. Malara, *Simulazione su elaboratore del dispositivo di Galton mediante linguaggio logo*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol.8, n.5, 1985, 59-88.

G. Navarra, *Una storia di alberi e case. Verbali immaginari di un consiglio comunale e di come esso risolse in modo assai logico i problemi derivanti dal lascito di un filantropo*, V IE, Salsomaggiore 1990. [B]

C. Pellegrino, *La tela di Arithmos*. [C]

PAVIA

L. Bazzini, *Sviluppo di abilità logiche attraverso la scoperta di regolarità*, in: IV IE, Torino 1989. [A]

L. Bazzini, M.G. Grossi, *Abilità di carattere logico e aritmetico: quale bagaglio all'inizio della scuola elementare*, in: La Matematica e la sua didattica. [A,B]

M. Ferrari (a cura di), *Logica e Informatica*, in: Collana di formazione professionale 3, del Centro Ugo Morin, Paderno del Grappa, 1989. [G]

M. Torciani, *L'informatica nella scuola elementare* (classi 2, 3, 4, 5), IMSI, vol 11, n.i 1, 3, 5, 11, 1988. [C,D]

PALERMO

C. Mostacci, F. Spagnolo, *Quale ruolo per l'area logico-matematica nelle situazioni di svantaggio socio-economico-culturale nella scuola elementare*, 1988. [B]

ROMA

C. Bernardi et al., *Logica*, materiale per l'IRRSAE Lazio. [G]

C. Bernardi et al., *Informatica*, materiale per l'IRRSAE Lazio. [G]

C. Bernardi, *L'insegnamento della logica*, Atti Convegno "Il piacere della matematica", Siena 1988. [G]

C. Bernardi, P. Pagli, *Matematica fra logica e magia*, Atti Convegno "Cultura, matematica e didattica" (in ricordo di Campedelli), Firenze. [G]

M.L. Bigiaretti, *Gatto più gatto meno*, quaderno di lavoro per il primo ciclo elementare, Nicola Milano ed., Bologna 1988.

L. Cannizzaro, *La logica nella scuola elementare*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol 11, n.9, 1988, 811-842. [G]

I. Sacchetti, *Dal gioco all'informatica*, ERI, Torino, 1988. [D]

R. Gentile, M. Fasano, L. Ragusa Gilli, *Il maestro e l'informatica*, La Nuova Italia, Firenze 1986. [D,G]

F. Rohr, *La combinatoria nella scuola elementare*, Riforma della scuola, n.10, 1979.

POTENZA

M. Fasano, *Aspetti dichiarativi e procedurali nell'attività di risoluzione di problemi.* [D]

SIENA

B. Piochi, *Approccio alla logica nel primo ciclo.* [A,B]

TORINO

F. Arzarello, *Logica matematica: dinamicità e contesto*, Cooperazione educativa, XXXVIII (4), 1989, 19-30. [G]

F. Arzarello et al., *Logica e Informatica*, in: Matematica, materiale per l'IRRSAE Piemonte, SEI, 1988, 103-138. [G]

F. Arzarello et al., *Logica e Informatica*, in: Matematica-dossier, materiale per l'IRRSAE Piemonte, SEI, 1988, 120-160. [G]

F. Arzarello et al., *Il meccano i robot e la logica*, IV IE, Torino, 1989. [RIL]
F. Arzarello, D. Merlo, *Storie di Furfanti e cavalieri: un ambiente logico per il secondo ciclo*, IV IE, Torino, 1989. [RIS]
E. Gallo, *Geometria e logica*, IV IE, Torino 1989 (apparirà su: L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate). [RIS]
E. Gallo, *Un'importante struttura numerica: il gruppo degli interi relativi*, Scuola viva, SEI, XXIII (1), 1987. [G]
E. Gallo et al., *Fare matematica con i bambini*, ed. ATLAS, Bergamo. [G]

QUALCHE RIFLESSIONE A DIECI ANNI DALLA FONDAZIONE DEL C.R.S.E.M.

Oscar Montaldo (Cagliari)

Desidero ringraziare la C.I.I.M. e il suo presidente, prof. Carmelo Mammana, per aver voluto organizzare in Sardegna il XIV Convegno didattico U.M.I. in concomitanza col X anniversario della fondazione del Centro di Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica (C.R.S.E.M.) di Cagliari. E come si conviene in tali circostanze, consentitemi di fare una breve cronistoria dell'attività svolta dal C.R.S.E.M. nei dieci anni della sua esistenza.

Iniziammo ad occuparci di didattica a tutti i livelli scolari nell'ambito della Sezione UMI di Cagliari, nell'anno 1976. In quell'anno, infatti, mandammo , come Sezione UMI, a tutte le scuole dei tre livelli scolari della provincia di Cagliari, dei questionari allo scopo di registrare, attraverso le risposte dei docenti, quali fossero le loro conoscenze circa le innovazioni didattiche di quei tempi e quali le aspirazioni di rinnovare il loro insegnamento.

Ci pervennero oltre un centinaio di questionari compilati e i loro compilatori furono invitati a partecipare ad una riunione allo scopo di gettare le basi per la costruzione di un'Unità di ricerca e sperimentazione didattica della matematica in tutta l'area pre-universitaria.

Chi parla, che presiedeva quella riunione, in qualità di Presidente della Sezione UMI, propose di fondare le ricerche e le sperimentazioni sui cinque punti seguenti, che riporto con le parole di allora:

1) L'insegnamento della matematica deve svolgersi con carattere di continuità e deve avere andamento ricorsivo e a spirale: non cambiano, in generale, gli argomenti che si trattano nei vari livelli scolari, ma è diverso il modo di porgerli. La maggior parte degli argomenti, cioè, possono essere presentati sin dalle scuole primarie in modo semplice e giocoso e poi via via ripresi per approfondimenti, arricchimenti, precisazioni, rappresentazioni simboliche più astratte, formalizzazioni. Tale modo ricorsivo di procedere deve avvenire quando si passa da un livello scolare ad un altro e, nell'ambito di uno stesso livello scolare, da una classe all'altra.

2) Insegnare la matematica avulsa dalla realtà a guisa di un puro esercizio logico-deduttivo, come per tanto tempo è stato fatto, ha significato rendere la matematica una materia difficile e noiosa e pertanto ripudiata dalla maggior parte degli

studenti. Ma basta scorrere la storia di questa disciplina per convincersi che la maggior parte di essa ha avuto l'avvio da esigenze concrete. Pertanto, partendo spesso dalla realtà, la matematica ha utilizzato e utilizza la sua fantasia dell'astrazione e della generalizzazione per costruire organicamente le sue teorie. Seguendo tale processo, la matematica può diventare più interessante; cioè, una partenza dalla realtà, sentita propria dagli allievi, può stimolare, eccitare la loro curiosità, il loro senso della scoperta, dell'esplorazione e far loro acquisire, divertendosi, le conoscenze matematiche. In tal modo si può fare, inoltre, della intelligente interdisciplinarità.

3) Debbono essere abbandonati il metodo del raccontare e la pretesa di sentire l'allievo raccontare fedelmente il raccontato. Occorre coinvolgere, cioè, gli allievi emotivamente nell'apprendimento, in modo da costruire, con il loro costante apporto partendo dal concreto, delle conoscenze che portino, via via a produrre pensiero. In altre parole, l'insegnante ha soprattutto un ruolo di mediazione: egli, piuttosto che trasferire informazioni, deve in prevalenza cercare di mettere l'alunno in grado di elaborare autonomamente le informazioni che riceve.

4) Un buon insegnante deve tener conto delle diversità dello sviluppo mentale dei propri allievi, sviluppare ed esaltare le loro capacità creative, scoprire e valorizzare le loro eventuali propensioni.

5) Non occorre fare imparare troppe cose che poi, tra l'altro, si dimenticano, ma occorre insegnare a saper trarre da esse i legami logici che le collegano.

Questi cinque principi, seguendo i quali si è poi sviluppata la nostra ricerca, sembrano oggi banali, ma allora non lo erano tanto, soprattutto quello della continuità didattica.

Assunsero, il coordinamento generale della ricerca e sperimentazione chi parla, il coordinamento delle tre sezioni (scuola materna ed elementare, scuola media, scuola superiore) le dottoresse Carla Caredda, Lucia Grugnetti e Giulia Caputo rispettivamente.

La dott.essa Caputo lasciò dopo 6 anni la ricerca didattica per dedicarsi ad altro. Subentrò, dopo aver svolto una tesi in didattica della matematica, la dott.essa Maria Polo che collaborò e tutt'ora lo fa, con la dott.essa Caredda.

Alla Polo, che parlerà subito dopo, lascerò il maggior spazio possibile, in quanto ella vi parlerà di alcuni aspetti particolari, più interessanti, dell'attività del C.R.S.E.M. nel campo della scuola elementare, mentre io mi limiterò a qualche breve considerazione di carattere generale.

Tornando alla cronistoria della nostra attività didattica, ricordo che il primo anno fu dedicato alla preparazione e all'organizzazione. Poi si parti' con molto entusiasmo e con una buona partecipazione di insegnanti dei tre livelli scolari.

Nel 1980 l'attività era diventata talmente impegnativa che le modeste possibilità finanziarie della Sezione UMI non erano in grado di soddisfare.

Venne creato allora in quell'anno (1980), il Centro di Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica (C.R.S.E.M.) e fu fondata una rivista: L'Educazione Matematica, che ha festeggiato lo scorso anno il suo decimo anniversario e della quale quest'anno è uscita la III Serie.

L'attività del Centro in questi suoi primi 10 anni di vita è stata notevole. Tra le sue varie iniziative mi piace, in particolare, ricordare i 9 Convegni nazionali tenuti annualmente in aprile su vari argomenti, studiati sempre in modo da tener fede al nostro principio guida relativo alla continuità dell'insegnamento nei vari livelli scolari.

A tali Convegni hanno infatti sempre partecipato docenti elementari, medi e superiori che, salvo il primo anno che si sono incontrati con un certo imbarazzo, hanno poi familiarizzato e tra loro collaborato.

Il X Convegno, che avrebbe dovuto aver luogo quest'anno, è stato gradevolmente assorbito da questo Convegno UMI.

Tracciati molto sinteticamente i motivi che hanno portato alla costituzione del C.R.S.E.M. e l'attività da esso svolta, come si conveniva in occasione del suo decennale, desidero ora dire qualche parola in generale sulla continuità dell'insegnamento, con particolare riferimento alla Scuola materna ed elementare.

Principio, quello della continuità didattica, che mi sta particolarmente a cuore e che è stato, come ho già detto, la nostra bandiera, sventolata, allora nel 1976, forse prematuramente, ma che oggi ha trionfato almeno fino ai bienni superiori. I programmi sperimentali proposti in due versioni 1988 e 1990 da una Commissione ministeriale per i trienni delle scuole superiori, sembrano invece voler interrompere tale continuità.

A tale proposito mi è gradita l'occasione per rivolgere un caldo invito ai presenti e a chi leggerà gli atti di questo Convegno a voler partecipare alla discussione su tali programmi, discussione che ho aperto nel n.2 dell'anno in corso della rivista "L'Educazione Matematica".

Parlerò pertanto soltanto della scuola dell'obbligo, che dovrebbe essere portata sino al sedicesimo anno di età, costituita, come è noto, a parte le classi pre-scolastiche (la scuola materna) da 2+3 classi di scuola elementare, da 3 classi di scuola media e da 2 di scuola superiore.

La scuola dell'obbligo non deve solo insegnare conoscenze e capacità particolari, ma deve perseguire obiettivi educativi che investano l'intera personalità dell'allievo. Essa ha perciò il compito di aiutare i ragazzi ad integrarsi socialmente in modo creativo e critico. Ha il compito, cioè, di formare cittadini capaci di osservare criticamente il loro ambiente sociale e di saper creativamente operare per la sua progressiva trasformazione, come richiesto dai tempi in cui viviamo.

Nell'ultimo cinquantennio, infatti, scienza, tecnologia e un più elevato livello di istruzione hanno contribuito in maniera determinante a rivoluzionare la vita nel mondo occidentale.

Ma ai vantaggi conseguiti che hanno portato ad un più elevato tenore di vita si accompagnano dei fatti negativi che tutti ben conosciamo. Pertanto sin dalla scuola dell'obbligo occorre far riflettere i ragazzi sulla necessità dello sviluppo di una mentalità riparatrice dei danni provocati, che tuttavia conservi e possibilmente migliori il livello di vita conquistato.

Per realizzare tali obiettivi, una scuola dell'obbligo moderna deve promuovere ed incoraggiare lo sviluppo del pensiero autonomo e critico dei ragazzi. E deve farlo sviluppando la personalità, la creatività e l'intelligenza di ciascuno, indipendentemente cioè dai progressi degli altri. Ma contemporaneamente deve cercare di risolvere eventuali ritardi attraverso assistenza supplementare.

Inoltre la Scuola dell'obbligo, sin dalla scuola elementare deve promuovere l'acquisizione dei principali valori di ogni convivenza democratica che oggi vengono molto spesso ignorati da gran parte dei cittadini, cioè il senso di responsabilità, la tolleranza e il rispetto degli altrui diritti e ciò principalmente allo scopo di combattere una civiltà consumistica sempre più proiettata verso l'insensibilità, lo sfruttamento dei più deboli: i bambini in prima linea.

A questo proposito voglio anche ricordare un fenomeno, che non è solo recente, che si presenta spesso nei corridoi e nei cortili di tutte le scuole: il teppismo infantile. Cioè in tutte le scuole esistono ragazzini che seviziano coetanei incapaci di reagire.

A questo fatto insegnanti e genitori solitamente non danno gran peso ritenendolo una fase della crescita e un'esperienza che presto viene dimenticata da chi la subisce. Ma da esperimenti compiuti recentemente è risultato invece che questo particolare tipo di violenza può avere effetti devastanti ben oltre gli anni di scuola, sia per la vittima che per lo stesso ragazzino prepotente.

I genitori, ma anche gli insegnanti devono cercare perciò di prevenire tale forma di violenza.

I tre livelli scolari della scuola dell'obbligo (scuola materna, scuola media, bienni superiori) devono svilupparsi seguendo il concetto di continuità progressiva sequenziale: ogni ciclo, ogni livello scolare deve completare, approfondire ed ampliare il ciclo, il livello precedente nella prospettiva dell'unità globale della istruzione di base.

Pertanto, ogni ciclo o livello, deve svolgere le funzioni specifiche proprie dei diversi gruppi di età.

La continuità del processo educativo tra i diversi gruppi di età deve altresì cercare di eliminare o almeno attenuare i disagi che si avvertono nel passaggio dalla scuola materna, o dall'ambiente familiare, alla scuola primaria e da questa alla scuola media.

Per evitare il più possibile tali problemi, al momento dell'ingresso nella scuola primaria dovrebbero essere sollecitati frequenti contatti tra gli insegnanti delle due scuole: materna ed elementare, allo scopo di scambiarsi informazioni ed esperienze nel rispetto delle specifiche competenze e nell'ambito di un itinerario unitario preventivamente concordato.

Allo stesso modo potrebbero essere attenuati i disagi nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola media, ottenendo in tal modo un effettivo indispensabile coordinamento.

Questi ultimi disagi verranno molto probabilmente superati in futuro con la scomparsa della maestra "mamma" della riforma Casati.

L'obiettivo di realizzare una continuità di apprendimento e di sviluppo dei ragazzi può essere ottenuto soltanto con l'uso di metodologie appropriate di insegnamento: per i più piccoli il gioco mirato, ma non troppo, rimane lo strumento più adeguato di esperienza e di conoscenza. Con "mirato, ma non troppo" intendo dire che la proposta di un gioco dev'essere il più possibile intesa a lanciare, evitando ogni artificiosità, un messaggio, una stimolazione in una certa direzione, ma non deve mai violare la libertà dei bambini nel caso che in quel momento non siano disponibili ad accettarne la proposta, ma intendano loro inventare od anche solo intraprendere un certo gioco.

Infatti l'insegnante deve sempre favorire, come ho già detto, la creatività e la spontaneità dei bambini e trarre esperienza dalle loro potenzialità. Soltanto quando i bambini raggiungono autonomamente uno stadio mentale più avanzato si può passare dal gioco a qualcosa di più.

La scuola materna (3-5 anni) svolge infatti in prevalenza una funzione supplementare all'educazione familiare e talvolta sostitutiva, offrendo soprattutto una prima fase di socializzazione. Le classi pre-scolari hanno inoltre l'obiettivo di facilitare l'ingresso nell'istruzione dell'obbligo preparando i bambini ad una prima esperienza di vita in comune e introducendoli nell'ambiente scolastico senza sottoporli ad un vero e proprio insegnamento; ma prendendo come punto di partenza gli interessi degli stessi bambini, si deve cercare di aiutarli a sviluppare ed integrare le informazioni che a loro giungono dal mondo esterno.

Dunque, fino ad almeno 5 anni di età l'interazione sociale ed il gioco costituiscono i veicoli principali del processo di apprendimento nella scuola materna.

A 5 anni d'età si può, in certi casi, con molte cautele azzardare un processo d'apprendimento non basato esclusivamente sul gioco.

Quanto ho detto e vado dicendo da molti anni per la scuola materna non è in contraddizione, ma anzi trova conferma nella revisione degli Orientamenti dell'attività educativa per la scuola materna statale che una Commissione ministeriale sta operando a partire dal 4/2/1988.

Comunque, in generale, poiché la continuità tra scuola materna ed elementare ha una grande importanza per lo sviluppo armonico del bambino, è consigliabile nel primo anno della scuola primaria, continuare ad usare prevalentemente il gioco come strumento di apprendimento, legando cosi' il primo anno di scuola primaria alla istruzione pre-scolare, tenendo conto che quest'ultima può , per alcuni bambini, essere assente. Nel secondo anno della scuola primaria si può con molte cautele e progressivamente passare a metodologie d'insegnamento collettivo che sostituiscano in parte l'apprendimento attraverso il gioco. In conclusione, l'introduzione nelle prime classi della scuola primaria di principi didattici tesi a sviluppare la personalità del bambino e non già generalmente alla acquisizione di determinate nozioni, favorisce la continuità tra i due livelli: scuola materna ed elementare.

I bambini, come è ben noto, hanno fantasia e creatività notevoli. Una scuola moderna, soprattutto la scuola materna ed elementare che operano nel periodo più fecondo del cervello umano e che incidono notevolmente sul futuro dell'individuo, dovrebbe aiutare e stimolare gli allievi a conservare e a sviluppare tali capacità e dovrebbe contribuire alla formazione di una personalità completa ed equilibrata, conscia di vivere in una società multiculturale ed in continua e rapida evoluzione.

Accanto alle conoscenze di base si deve, cioè, dare molta importanza allo sviluppo di abilità sociali, culturali e creative in un'ottica interdisciplinare, come richiede la società presente e come richiederà ancor più quella futura. Chi mi ha finora ascoltato, se c'è qualcuno che l'ha fatto, potrà essersi domandato come mai in un Convegno di Didattica della Matematica, non abbia mai parlato di questa disciplina, tranne che all'inizio, quando ho illustratol'attività del C.R.S.E.M.. Il fatto è che in una scuola moderna un docente non può e non deve, a mio parere, occuparsi esclusivamente della o delle discipline che insegna, estraniandosi dal mondo che gli sta attorno.

E' meglio, a mio avviso, fare meno grammatica, o meno storia o meno aritmetica e cosi' via, nello spirito del quinto principio richiamato all'inizio, e occuparsi di più della formazione socioculturale dei ragazzi nel senso precedentemente detto.

Le rapide e, per i presenti, scontate considerazioni svolte, presuppongono una scuola ideale.

Ma la scuola reale?

Purtroppo la scuola reale è in genere tutt'altra cosa: la maggior parte dei docenti della scuola media e soprattutto delle scuole superiori si occupa esclusivamente di insegnare le proprie materie e lo fa male seguendo il vecchio sistema delle lezioni formali e delle interrogazioni "botta e risposta".

Tale sistema è quello che comporta certamente meno dispendio di energie.

I docenti che si aggiornano o tentano di farlo si sottopongono a notevoli sacrifici e sono pochi e mal visti dalla gran parte dei colleghi.

Sembrerebbe addirittura, a quanto mi risulta in riferimento alla matematica, che in questi ultimissimi anni si sia quasi voluto cercare di arrestare l'estendersi di un possibile rinnovamento didattico, professato, come ho detto, da un ristretto numero di docenti che tuttavia è andato sia pure lentamente allargandosi, con l'adottare in larga misura i libri di testo più tristemente tradizionali.

Per chi si è occupato per tanti anni con entusiasmo di didattica, la cosa è tutt'altro che incoraggiante. Non ho mai capito il perché si mortifichi in tal modo l'insegnamento che io ritengo la professione più bella del mondo.

Vivere accanto ai bambini, ai ragazzi significa infatti essere più fiduciosi perché essi lo sono, essere più spontanei perché essi lo sono, essere noi stessi perché essi sono se stessi.

Le loro domande, le loro osservazioni ci aprono spesso la mente e il cuore e spronano lo spirito.

La loro compagnia ci fa sentire in definitiva sempre giovani.

Perché maltrattarli allora?

L'ATTIVITA' DEL C.R.S.E.M. PER LA SCUOLA ELEMENTARE

Maria Polo (Cagliari)

Il C.R.S.E.M. (Centro di Ricerca e Sperimentazione dell'Educazione Matematica) diretto dal Prof. Oscar Montaldo, è nato nel 1980 dal desiderio e dalla necessità di istituzionalizzare, e quindi rendere più funzionale alle mutate esigenze del sistema scolastico in senso lato, il complesso di esperienze e di competenze che il Nucleo di Ricerca dell'Università di Cagliari andava maturando dalla sua costituzione nel 1976.

Nello statuto del C.R.S.E.M. si legge, relativamente ai suoi fini: "Il C.R.S.E.M. ha lo scopo di concorrere a sviluppare un'indagine scientifica e sperimentale sull'apprendimento matematico, con riferimento all'aspetto interdisciplinare, ai fini di una formazione dei giovani adeguata alle mutate condizioni socio-economiche e alla dinamica della rapida evoluzione della scienza, della tecnica e dei processi produttivi" (art.1).

Ancora, nell'articolo 2 dello statuto, relativamente alla individuazione di attività funzionali al raggiungimento di tali fini si legge:

"Per il conseguimento dei suoi fini il Centro:

a) promuove e svolge ricerche nell'ambito dell'educazione e dell'apprendimento della matematica a tutti i livelli, dalle Scuole Materne all'Università;

b) realizza sperimentazioni didattiche;

c) mette a disposizione degli enti locali, delle autorità scolastiche, delle università, degli enti gestori della formazione professionale, degli istituti di cultura e delle associazioni interessate italiani e stranieri, i progetti elaborati e le esperienze acquisite;

d) può, in accordo con gli enti locali di cui al punto c), d'intesa con l'autorità scolastica, dar vita, nell'ambito delle proprie competenze, ad attività di formazione permanente dei docenti".

In questa relazione tracciamo un breve consuntivo delle attività, delle iniziative e dei risultati che il C.R.S.E.M. ha realizzato, in questi suoi primi dieci anni di attività, sulla base dei fini che si prefigge, soffermandoci specificatamente su quelle riguardanti la scuola materna ed elementare.

Le iniziative del Centro rivolte a questo livello di scolarità si sono articolate principalmente su tre direzioni:

1) La formazione in servizio e l'aggiornamento degli insegnanti;
2) L'attività di ricerca e sperimentazione;
3) La divulgazione di risultati e informazioni.

Le iniziative relative al punto 1 si sono concretizzate essenzialmente in:

- Attività seminariali
- Collaborazioni ad iniziative promosse dall'IRRSAE, dal CIRD dell'Università di Cagliari, dai Provveditorati, dai Distretti scolastici e da associazioni di insegnanti.
- Organizzazione di incontri e convegni, tra i quali ha avuto ed ha tuttora ruolo preminente il Convegno Nazionale Residenziale organizzato annualmente che ha visto intervenire, sempre contemporaneamente, insegnanti di tutti i livelli di scolarità.

Per l'attività di sperimentazione sono stati messi a punto e sperimentati Curricoli riguardanti la quasi totalità dei temi dell'insegnamento della Matematica per la scuola Materna e per la scuola Elementare, che oggi ritroviamo rispettivamente nella proposta di nuovi Orientamenti per la scuola materna e nei Programmi dell'85 della scuola elementare.

Per l'attività di ricerca su alcuni temi specifici (aritmetica, logica e linguaggio, probabilità, geometria) abbiamo sempre tenuto conto di aspetti e problematiche notevolmente differenziantesi all'interno della Didattica, come disciplina a se stante; tra questi:

analisi di comportamenti spontanei, difficoltà di apprendimento, metodologie di insegnamento.

La divulgazione di risultati e di informazioni è stata realizzata attraverso la partecipazione di diversi soci del Centro a convegni ed incontri nazionali ed internazionali, la divulgazione di rapporti interni, la pubblicazione di articoli su riviste e di volumi guida e monografici per l'insegnamento della Matematica nella scuola Elementare e non ultima come importanza, nella pubblicazione della rivista "L'Educazione Matematica", che è ancora oggi tra le pochissime riviste sull'insegnamento della Matematica, almeno nell'ambito del panorama nazionale, che si rivolga a tutti gli insegnanti dell'arco di studi pre-universitario.

Queste tre direzioni di lavoro sono da noi oggi considerate (a giusta ragione) nettamente distinte; se però teniamo presente la genesi della Didattica come disciplina scientifica, dobbiamo rilevare come solo 15/20 anni fa le stesse venissero portate avanti spesso contemporaneamente, ma soprattutto come fosse meno forte la coscienza dell'esigenza di pensarle separate.

Torneremo su questo punto a conclusione di questa relazione per collegarlo con uno dei più importanti principi della filosofia che il C.R.S.E.M. porta avanti fin dalla sua costituzione che è quello della "continuità". Tale principio raccoglie oggi ampi consensi, anche se solleva notevoli problemi che riguardano il funzionamento stesso del sistema scolastico, la Didattica come disciplina scientifica e quindi di riflesso le future iniziative che il Centro potrà, dovrà e vorrà intraprendere.

Per illustrare le attività del Centro, facendo un breve cenno ai risultati ottenuti nonché alle problematiche aperte, terremo conto del loro sviluppo cronologico, inquadrandole all'interno delle suddivisioni per temi disciplinari, che negli Orientamenti per la scuola materna sono detti "Campi di esperienze educativa" e nei Programmi dell'85 della scuola elementare richiamano i diversi settori della Matematica.

Attività per la scuola materna

Nel n. 1 del 1980 della rivista L'Educazione Matematica il Prof. Montaldo presentando "L'Unità" di Cagliari asseriva:

"... Onde evitare gli eccessi del passato e di oggi, nella preparazione dei curricoli si sono tenute e si tengono sempre presenti le motivazioni logico-culturali, strumentali ed interdisciplinari dell'insegnamento della matematica, opportunamente dosate in misura diversa in riferimento ai vari livelli di scolarità. Il principio ispiratore della ricerca unitaria si basa sulla convinzione che la maggior parte dei concetti che vengono introdotti nell'arco di studi pre-universitario possono avere il loro avvio, in forma di gioco nella scuola materna, e venire consolidati, ampliati ed affinati in un processo di apprendimento a spirale nel quale lo stesso argomento viene proposto in tempi successivi con gradi crescenti di completezza e di rigore ... . Il ruolo della Matematica non viene considerato fine a se stesso: le intersezioni della matematica con le altre discipline, non vuote oggigiorno per molte di esse, rappresentano un arricchimento e compenetrazione culturale di notevole importanza ....".

Questa linea di principi ci ha condotto ad elaborare e sperimentare un curriculum per quella che nello stesso n.1 della rivista chiamavamo "Educazione logico-matematica" che risulta oggi perfettamente in linea con le indicazioni che negli Orientamenti ritroviamo in più "campi di esperienza".

Riprendiamo testualmente alcune parti di tali indicazioni per illustrare i punti caratterizzanti di tale curriculum, i cui contenuti, salvo qualche modifica più che altro formale, sono quelli già esposti sempre nel n.1 della rivista L'Educazione Matematica citato precedentemente.

"... Le tappe evolutive procedono dalla dominanza del "corpo vissuto" alla prevalenza della "discriminazione percettiva del proprio corpo" alla "rappresentazione del proprio corpo in movimento" dando così luogo ad un caratteristico itinerario di sviluppo delle abilità motorie, ... già a tre anni i bambini dispongono di una ricca capacità di comunicazione non verbale ed imparano, in base alla padronanza del proprio corpo a rappresentare simbolicamente la realtà, a trasformarla nella loro mente, ad accorgersi di poter dare ai movimenti dei significati che anche altri possono capire ... . La forma privilegiata di attività motoria è costituita dal gioco che sostanzia e realizza nei fatti il clima ludico della scuola dell'infanzia, adempiendo a rilevanti e significative funzioni di vario genere da quella cognitiva a quella socializzante a quella creativa ... . (dal campo di esperienza: "il corpo e il movimento").

... le principali abilità da far progressivamente acquisire agli alunni possono consistere: * nel prestare attenzione ai discorsi altrui e nel cercare di comprenderli; * nel farsi capire dagli altri ...; * nel descrivere una situazione ad altri; * nel dar conto di una propria esperienza ... . (dal campo di esperienza: "i discorsi e le parole").

... La scuola materna svolge la sua azione in due fondamentali direzioni: * raggruppare e ordinare, contare, misurare ...; * localizzare ... . L'elaborazione e la conquista dei concetti matematici avviene quindi attraverso esperienze reali, potenziali e fantastiche .... L'insegnante, pertanto, potrà avvalersi di un ampio contesto di opportunità per proporre al bambino di svolgere in un contesto per lui significativo, operazioni di matematizzazione a vario livello e guidarlo all'uso di espressioni adeguate di quantificazione, ordinamento e comparazione interagendo attivamente con i suoi processi di argomentazione e sforzandosi di capire la logica che è alla base delle sue risposte .... (dal campo di esperienza: "lo spazio, l'ordine, la misura").

... Le abilità da sviluppare riguardano: l'esplorazione, la manipolazione, l'osservazione con l'impiego di tutti i sensi ... la messa in relazione, in corrispondenza; la costruzione e l'uso di simboli e di elementari strumenti di registrazione; .... (dal campo di esperienza: "le cose, il tempo e la natura").

... E' fondamentale ricordare la rilevanza culturale ed educativa dei linguaggi non verbali .... (dal campo di esperienza: "messaggi, forme e media").

Il curriculum è stato sperimentato in numerose scuole dal 1980 ed è stato integrato a partire dal 1986 da alcune unità didattiche che riguardano la simmetria e il linguaggio dei grafi; alcune esemplificazioni si possono trovare in [8].

Attività per la scuola elementare

Nei numeri 1 e 2 del 1980 della rivista del Centro si può leggere quella che in tale anno costituiva l'ossatura del Curricolo generale per la matematica che avevamo costruito e sperimentato a partire dal 1977. Tale curricolo è stato modificato, nel tempo, in relazione alle indicazioni che sono venute dai risultati della sua sperimentazione in numerose classi: avevamo iniziato nell'anno scolastico 1977/78 con quattro classi di prima che lo hanno sperimentato per tutto il ciclo completo; negli anni scolastici 78/79, 79/80, 80/81, 81/82, in media una decina di classi lo hanno sperimentato nuovamente, ciascuna per tutti e cinque gli anni. Parallelamente a tale sperimentazione sono state condotte ricerche su argomenti specifici, i cui risultati sono andati a modificare via via il curricolo stesso, con indicazioni sia di ordine contenutistico che metodologico. La gran parte di queste indicazioni si trovano nei volumi guida "Insegnare Matematica in ..." [4], [5], [6].

Le esponiamo qui in forma sintetica e riferendole alla articolazione dei "Paragrafi" dei N.P. dell'85.

I problemi

Il paragrafo "problemi" deve essere inteso come fornitore di indicazioni metodologiche più che contenutistiche.

A nostro avviso l'assenza della suddivisione in obiettivi per i due cicli della scuola elementare può essere interpretata come una ulteriore indicazione per considerare il paragrafo "problemi" come un fondamentale strumento per la costruzione di itinerari didattici organicamente articolabili. Il suggerimento di fondare e costruire le nozioni matematiche di base partendo da situazioni della realtà del bambino, oltre che basilare da un punto di vista metodologico, mette in luce il ruolo fondamentale della matematica.

Essa, infatti ha tra i suoi aspetti peculiari quello di essere uno strumento teorico per interpretare e risolvere problemi della realtà; per questo motivo è quindi altrettanto fondamentale la costruzione di attività finalizzate a riconoscere ed utilizzare tale peculiarità.

Aritmetica

Nella elaborazione del curricolo per l'insegnamento della Matematica, precorrendo lo spirito dei N.P., abbiamo dato fondamentale importanza sia all'introduzione e allo sviluppo del concetto di numero nei suoi aspetti ordinale, cardinale e di misura, sia alla metodologia che si avvale dell'utilizzazione di situazioni problematiche quali ambito dell'insorgere di conflitti cognitivi, fase fondamentale di ogni processo di costruzione della conoscenza.

Nei complessi processi di insegnamento/apprendimento di qualunque nozione matematica sono da considerarsi fondamentali le relazioni esistenti fra obiettivi, contenuti, tecniche.

Ci sembra importante perciò da un punto di vista metodologico tendere ad equilibrare il peso di obiettivi, contenuti e tecniche, nell'intento, anche, di evitare alcuni errori commessi nel passato da innovazioni in nome di una "matematica moderna". La complessità del concetto di numero naturale e la conseguente attenzione che deve essere riservata alla costruzione delle attività che ne favoriscono l'acquisizione, sono l'esempio emblematico del paragrafo "aritmetica". E' quindi basilare nella costruzione di un curricolo ricordare che l'acquisizione di molti concetti si realizza solo attraverso processi lunghi e complessi durante tutto l'arco della scuola elementare e perfino oltre.

A proposito di processi di insegnamento/apprendimento a lungo termine, abbiamo condotto una ricerca che riguarda il concetto di frazione partendo dall'ipotesi che "l'aspetto cognitivo del concetto di frazione si attenua nel tempo a favore di quello tecnico-operativo". La ricerca è avvenuta in collaborazione con il gruppo operante nella scuola media e con quello operante nella scuola superiore, coinvolgendo classi di IV elementare, II media, II anno di scuola superiore e i relativi insegnanti. L'analisi dei risultati ha confermato l'ipotesi di partenza, aprendo alcuni interrogativi riguardanti sia l'insegnamento che l'apprendimento del concetto di frazione.

Geometria e misura

L'attività di ricerca nel campo dalla didattica della Geometria è iniziata nel 1979, successivamente ad attività seminariali, di formazione e di aggiornamento. Nel triennio 80/84 è stata condotta una sperimentazione parziale riguardante l'insegnamento della geometria mediante l'utilizzazione delle trasformazioni geometriche. I risultati di tale sperimentazione hanno consentito l'inserimento nel Curricolo di tutti i contenuti di Geometria che si ritrovano nei N.P..

L'utilizzazione delle trasformazioni geometriche consente, secondo noi il riconoscimento, la costruzione e lo studio delle figure attraverso le loro proprietà, indipendentemente dalla posizione occupata, evitando in tal modo quegli errori provenienti da stereotipi che possono essere conseguenza di un insegnamento basato quasi esclusivamente sull'evidenza percettiva.

L'inserimento di tali argomenti tuttavia non cancella l'esigenza di operare, da un punto di vista metodologico, ponendo sempre molta attenzione all'equilibrio da cercare costantemente tra contenuti e tecniche, e più in generale tra significato e significante. Non è certo un gran numero di "esercizi su scheda" sulla simmetria assiale (quasi sempre con assi verticali o orizzontali è quella che si trova nei testi !) che favorirà un insegnamento e un apprendimento di questa trasformazione conforme allo "statuto" che questa ha attualmente all'interno della Matematica!.

Logica

La nostra scelta è stata quella di utilizzare in senso positivo le conoscenze culturali acquisite dagli insegnanti e il rinnovamento del loro metodo di insegnamento, sotto l'influsso della "matematica moderna" per inserire nel Curricolo temi relativi alle interazioni tra linguaggio scientifico e linguaggio naturale.

L'inserimento di tali temi è stato realizzato interpretando l'insegnamento della "Logica" come educazione del pensiero che si fonda sullo sviluppo di un atteggiamento critico nei confronti delle situazioni problematiche.

Nella articolazione delle unità didattiche abbiamo sempre cercato di procedere con cautela ed operare in modo che il bambino, dopo aver osservato ed usufruito della ricchezza e della varietà del linguaggio comune, verificandone talvolta la indeterminazione e l'imprecisione, possa in seguito apprezzare il linguaggio scientifico non in quanto formalismo esteriore ma in quanto mentalità stabilmente acquisita.

A questo proposito è evidente il carattere interdisciplinare matematica-lingua che assumono le attività ed inoltre il ruolo che queste assegnano all'insegnamento elementare come approccio a concetti che i bambini dovranno interiorizzare, sviluppare ed utilizzare sia nello studio della matematica a livelli di scolarità successivi, sia nell'analisi di fenomeni della vita quotidiana.

Probabilità, statistica, informatica

Secondo noi questi tre temi sono da intendersi, a livello di scuola elementare, come potenziali strumenti di educazione al pensiero logico e razionale. Ci sembra molto importante che il bambino impari a comunicare attraverso linguaggi diversi, a conoscere ed apprezzare le rappresentazioni simboliche come efficace strumento di sintesi della comunicazione, a scegliere in modo coerente la più significativa. Infatti sia la costruzione di rappresentazioni simboliche che la loro interpretazione ricoprono un ruolo fondamentale nel preparare il terreno idoneo alla acquisizione di un atteggiamento critico e di analisi della realtà.

Tutti i contenuti che ritroviamo nei N.P. in questo paragrafo sono inseriti organicamente nel curricolo generale da noi sperimentato. Tuttavia, secondo noi, rimangono aperti numerosi interrogativi che riguardano sia l'apprendimento che l'insegnamento di questi tre "contenuti". Quelli riguardanti la Probabilità sono illustrati dalla relazione di C.Caredda sul tema, esposta in questo convegno.

Per quanto riguarda gli altri due i più importanti, a nostro avviso, riguardano da un lato il rapporto che i contenuti "attribuiti" nei N.P. rispettivamente all'informatica e alla statistica hanno con le discipline stesse; dall'altro le metodologie di insegnamento che realmente sono atte a favorire l'apprendimento di questi contenuti.

Conclusione

Le ragioni che stanno alla base della stesura di un programma per l'insegnamento della Matematica, a tutti i livelli di scolarità (e quindi anche della costruzione dei curricula) sono di tre ordini:

- il primo interno alla Matematica, cioè: quale Matematica deve essere insegnata;
- il secondo riguarda i processi di apprendimento dei concetti di matematica da insegnare (o anche che si è deciso di dover insegnare), cioè: come, chi apprende, si costruisce un dato concetto di matematica;
- il terzo riguarda le finalità della scuola, cioè: perché deve essere insegnata la matematica e sulla base di quali domande della società.

Evidentemente questi tre punti si riallacciano con motivazioni e a livelli diversi con le tre direzioni di lavoro del C.R.S.E.M. a cui ho accennato all'inizio di questa relazione.

La loro distinzione caratterizza inoltre possibili settori specifici di ricerca nel campo della didattica della Matematica. Il mio parere è che oggi la Didattica possa e debba affrontarli tutti per approfondire la conoscenza di ciascuno da un punto di vista epistemologico e in conseguenza determinarne meglio le mutue relazioni dialettiche. In un tale lavoro credo che ancora oggi, o forse oggi più di 10 anni fa, abbiano un ruolo importante sia il concetto di "continuità" che quello di "interdisciplinarietà".

"Continuità" intesa sia per quanto riguarda problemi interni alla matematica, sia per quanto riguarda i criteri di impostazione del sistema scolastico nella sua globalità.

"Interdisciplinarietà" intesa come ben illustrava il Prof.Montaldo nel già citato n.1 della rivista del Centro:

"... il problema dell'interdisciplinarietà va affrontato attraverso una approfondita collaborazione, allo stesso livello di competenza è dignità, tra il matematico e gli specialisti delle altre discipline.

In altre parole, occorre stare bene attenti a non farsi travolgere dalla moda della interdisciplinarietà a tutti i costi che può condurre alla confusione dei ruoli anziché chiarire ed arricchire le idee".

BIBLIOGRAFIA

[1] A.A., *Orientamenti delle attività educative per scuola materna statale* da "i Bambini" suppl. al n. 8 settembre 1990, Juvenilia G.E.

[2] C. Caredda, *Educazione logico-matematica (3-7 anni)*, L'Educazione Matematica vol.1, 1980.

[3] C. Caredda - M. Polo, *Educazione logico-matematica 8-13 anni*, L'Educazione Matematica vol.2, 1980.

[4] C. Caredda - M. Polo, *Insegnare Matematica in prima elementare*, Lisciani e Giunti, 1987.

[5] C. Caredda - M. Polo, *Insegnare Matematica in seconda elementare*, Lisciani e Giunti, 1987.

[6] C. Caredda - M. Polo, *Insegnare Matematica in terza elementare*, Lisciani e Giunti, 1989.

[7] O. Montaldo, *L'Unità di Cagliari si presenta*, L'Educazione Matematica, vol.1, 1980.

[8] C. Nocera - M.P. Pinna, *L'Educazione Matematica nella scuola Materna: resoconto di un'esperienza*, L'Educazione Matematica, vol 3, 1988.

[9] M. Pellerey, *L'insegnamento della Matematica*, I Quaderni di Scuola Viva, SEI, 1986.

IL RUOLO DELLA GEOMETRIA

Pasquale Quattrocchi (Modena)

I Nuovi Programmi riconoscono all'insegnamento della matematica nella Scuola Elementare obiettivi di carattere formativo che trascendono, pur senza cancellarli, i tradizionali obiettivi volti a soddisfare esigenze minime *di sopravvivenza*, tanto più irrinunciabili quanto più essenziali. Il più ampio respiro che informa il nuovo programma di matematica consente di recuperare ad una maggiore dignità *tutti* i contenuti dell'insegnamento tradizionale - già esplicitamente dichiarati irrinunciabili -, di arricchirne il significato e di utilizzarne con accresciuta efficacia la valenza formativa certamente idonea a favorire lo sviluppo di quelle capacità intellettuali che sono appunto obiettivo dei Nuovi Programmi. L'aspetto formativo della Matematica non era certo assente nei programmi vecchi, ma nei nuovi è sottolineato con maggior forza e, soprattutto, sono fornite concrete indicazioni e nuovi contenuti a ciò finalizzati. Si tratta di una formazione globale, non solo scientifica, per la quale la Matematica, e, all'interno della Matematica, la Geometria, giocano un ruolo di primaria importanza. Platone (Repubblica) affermava che esiste "una differenza capitale fra chi sia iniziato alla geometria e chi la ignora"; conosciamo l'importanza che i Greci attribuivano alla Geometria e come oggi tutta la Matematica abbia diritto ad ereditare il prestigio da essa goduto nell'antica Grecia; tuttavia non esitiamo a riconoscere, ancora oggi, alla Geometria particolari pregi didattici. "I formalismi algoritmici" dice L.Campedelli [2] "vi hanno scarso peso e meno ancora le operazioni meccaniche di calcolo: così si trova in primo piano l'argomentazione logica, sempre viva e varia, che suscita le capacità di coordinamento delle diverse situazioni, educa a penetrare nei legami tra figure distinte e fra le diverse parti di una stessa figura, e stimola a quel processo creativo che è proprio della matematica, e nel quale convergono riflessione, fantasia e senso della scoperta".

Insomma, anche se non ci sentiamo di tenere fuori dalla porta chi non sa di geometria come avveniva presso l'Accademia di Platone in Atene, tuttavia non nascondiamo una predilezione particolare (e non solo dal punto di vista didattico) per questo ramo della Matematica.

A livello di educazione elementare, il primo compito assegnato dai Nuovi Programmi alla Geometria è quello di favorire l'acquisizione delle *capacità di orientamento, di riconoscimento e di localizzazione di oggetti e di forme* (prendendo come riferimento sia se stessi, sia altre persone e oggetti), in vista di una *progressiva organizzazione dello spazio*}. Quindi Geometria già in prima elementare e Geometria ancorata alla realtà, al mondo che ci circonda, alle esperienze che possono essere (o sono già state) fatte dal bambino.

Il Nucleo di Ricerca Didattica di Bologna riconosce l'importanza di fare geometria fin dalla 1ª classe elementare e di trattarla anche trasversalmente ad altri capitoli di Matematica (per esempio utilizzando il Logo nell'ambito della educazione informatica).

Il Nucleo di Brescia ritiene opportuno per il 1° ciclo "porsi come primo obiettivo il potenziamento della lateralità, attraverso la presa di coscienza dell'esistenza dell'asse corporeo. Se le attività volte a raggiungere questo obiettivo sono ben graduate, il bambino scopre, senza difficoltà, l'esistenza di oggetti o figure con assi di simmetria".

Il Nucleo di Milano si preoccupa di promuovere quelle attività pratiche che consentono la formazione dei concetti logico-matematici mediante un processo di interiorizzazione (è esplicito il riferimento alle "azioni interiorizzate" di Piaget). Dunque particolare attenzione al proprio "schema corporeo in relazione all'ambiente che lo circonda" e orientamento nello spazio circostante.

Il Nucleo di Modena ha messo a punto un "repertorio di esperienze significative per l'insegnamento della matematica da 3 a 6 anni, articolato in diversi settori di attività strettamente disciplinari (contare e misurare; localizzare) e trasversali (progettare e inventare; spiegare)". In ricerche svolte in 1ª e 2ª elementare si sono affrontati "problemi di rappresentazione spaziale (dallo spazio 3d allo spazio 2d : rappresentazione di oggetti di uso comune e di oggetti - figure della matematica), problemi di percezione legati allo studio delle figure piane, problemi di orientamento spaziale (mappe e percorsi)".

Il Nucleo di Parma assegna ad una prima fase dell'insegnamento della Geometria lo studio di fatti spaziali "singoli" ed articola questo studio in due sottofasi: "nella prima non c'è bisogno di particolari competenze linguistiche (riconoscimento di singole figure piane e spaziali, esecuzione di percorsi); nella seconda i bambini debbono essere spronati a parlare (descrizione di forme)".

Il Nucleo di Pavia inizia già in 1ª lo studio dei solidi sfruttando l'osservazione degli oggetti presenti in aula, mentre in 2ª introduce le prime figure piane e la terminologia classica relativa ai solidi (vertici, facce, ...).

Per il Nucleo di Roma lo spazio è da privilegiare al piano ma si ritiene anche che "geometria nel 1° periodo della 1ª elementare è l'incontro con lo spazio grafico del foglio e col gesto dello scrivere, ben diverso dai gesti già noti del disegnare". E' sottolineato con forza "l'uso del corpo" sia come ente che muovendosi nello spazio ne ricava percezioni e stimoli sia come centro di "affettività, emotività, attenzione, concentrazione, ..."; quindi "attenzione al corpo implica scelte sull'alternanza di vari tipi di attività e di situazioni didattiche, sulla valutazione dei tempi da dedicare alle attività, sui modi in cui favorire la concentrazione dei bambini".

Nell'ambito del Seminario Didattico del Dipartimento di Matematica dell'Università di Siena "è stato studiato e sperimentato un approccio a concetti topologici di base, mediante attività spaziali di tipo intuitivo e sintetico; lo scopo è stato quello di favorire l'evoluzione del pensiero logico e del linguaggio all'interno di attività ludiche; l'attività proposta è stata sperimentata anche nella Scuola dell'infanzia".

Per il Nucleo di Torino (diretto da F.Arzarello), che ha lavorato ad un progetto di educazione matematica finalizzato ad allievi con svantaggio socio-culturale, l'approccio alla geometria consiste nel "fare costruire dall'allievo i più importanti oggetti geometrici (figure a tre e due dimensioni), centrando le attività su situazioni problema in cui gli alunni sono « provocati » a risolvere problemi nei quali utilizzano il materiale da loro stessi costruito. L'ora di geometria diventa anche un'ora di attività manuale e intellettuale in cui si sega, inchioda e ragiona (le mani come strumento per ragionare). Si usa il metodo dell'interazione di gruppo, in cui l'insegnante devolve agli allievi stessi la conduzione della situazione didattica nei momenti più creativi, mentre la riprende in mano nei momenti di maggiore sistematicità. Si preferisce l'approccio alla geometria partendo da situazioni tridimensionali e solo successivamente si passa a situazioni bidimensionali".

Per il Nucleo di Torino (diretto da E.Gallo) "la filosofia su cui si fonda tutto il lavoro è di avvicinarsi alla Matematica come campo autonomo della cultura e della conoscenza umana, dando per la sua costruzione motivazioni a lei interne. Quindi: approccio alla disciplina attraverso il suo aspetto problematico (come porsi e come risolvere i problemi in matematica), e successiva sistemazione dei concetti e dei metodi così emersi dal punto di vista della coerenza della disciplina stessa al suo interno. Nell'ottica della matematica « per altro », al Nucleo interessa l'aspetto cognitivo dell'apprendimento della disciplina: cioè l'analisi dei processi cognitivi messi in moto dall'apprendimento della matematica e dei problemi cognitivi relativi a tale apprendimento".

Una utilizzazione sistematica del laboratorio di falegnameria viene fatta anche nella Scuola-Città Pestalozzi di Firenze, scuola sperimentale di antica tradizione: "si fa geometria per il 1^{o} ciclo durante molte attività usuali che si svolgono in classe, in palestra, in giardino, in falegnameria. E' fondamentale un graduale passaggio dal soggettivo all'oggettivo con l'uso sempre più appropriato di termini matematici. La percezione dello spazio è una delle cose più legate a vincoli di soggettività (punto di vista, dimensioni, situazioni emotive, ... ; chi non ha avuto l'esperienza di tornare da adulto in un certo ambiente del vissuto dell'infanzia e trovarlo sorprendentemente più piccolo!)" (S.Anichini [3]).

In effetti "la Geometria si presta in modo egregio ad essere palestra per distaccare la nostra intuizione da una visione soggettiva del mondo "ed al tempo stesso" allena alla schematizzazione, all'astrazione, alla formulazione precisa delle descrizioni degli oggetti, alla enunciazione precisa ed obiettiva delle proprietà di questi "(C.F.Manara [4]).

La Geometria favorisce così, già nella Scuola Elementare, la nascita e l'assimilazione di quel linguaggio che è così intrinsecamente legato alla Matematica da essere talvolta confuso con essa, in una coincidenza forse ineccepibile dal punto di vista logico-formale ma non soddisfacente sotto molti altri aspetti. L'importanza del linguaggio matematico, esplicitamente riconosciuta da molti Nuclei, non va certo sminuita ma non va neanche mitizzata; un linguaggio eccessivamente e precocemente rigoroso rischia di alienare alla Matematica le intelligenze più vive e denuncia spesso gravi carenze culturali dell'insegnante il quale, proprio per ignoranza, rimane irretito in quel linguaggio che è incapace di variare ed adattare al suo insegnamento (schiavo che genera schiavi!).

Riaffiorano dunque i gravissimi problemi della prima formazione degli insegnanti elementari, della formazione e dell'aggiornamento degli insegnanti in servizio; si sono fatti carico di questo secondo problema i Nuclei di Bari, Cagliari, Lecce, Palermo e Trieste oltre tutti quelli citati in precedenza. Pur con differenze, talvolta notevoli, nei tempi e nelle modalità di intervento, tutti i Nuclei hanno affrontato questo problema, dalla cui soluzione dipende la realizzabilità dei Nuovi Programmi.

La recente esperienza del piano pluriennale di aggiornamento sui Nuovi Programmi dimostra inequivocabilmente che, almeno per quanto riguarda la Matematica, i risultati più significativi si sono ottenuti in quelle regioni nelle quali è stata più stretta la collaborazione fra IRRSAE e Nuclei di Ricerca Didattica.

Per quanto concerne la questione circa la priorità didattica fra geometria dello spazio a 3d e geometria dello spazio a 2d, questione già sollevata nei secoli scorsi, L.Campedelli [2] ricorda che "la realizzazione più ovvia dello « spazio », al quale fa riferimento la geometria, si ha nell'ambiente stesso in cui viviamo. E basta saper guardare per cogliere le circostanze, essere colpiti dalle situazioni che appunto consentono di parlare di « caratteri geometrici » in quanto ci circonda. Questo lascerebbe supporre in noi una maggior dimestichezza con lo « spazio » che non con il « piano », e che quello meglio si prestasse come mezzo di *educazione alla visione dei fatti geometrici*.

Ma non è così. Accade anzi il contrario: forse manca l'abitudine al tipo di osservazioni necessario; forse influisce negativamente la convinzione che la geometria si debba cercare nei libri e non intorno a noi; forse la colpa è della scuola. Fattori psicologici, ancestrali orientamenti fanno apparire più spontaneo il passare dal piano allo spazio".

Alcune di queste difficoltà sono state rimosse dai Nuclei anche se le sperimentazioni condotte dal Nucleo di Cagliari "hanno evidenziato problematiche relative all'insegnamento e all'apprendimento di contenuti di geometria dello spazio, legate a difficoltà relative alle rappresentazioni grafiche ed al linguaggio".

A noi sembra, ed in ciò siamo d'accordo con C.F.Manara [4], che il passaggio dal concreto all'astratto non implichi necessariamente un'opzione favorevole allo spazio rispetto al piano; salvaguardate, beninteso, le prime attività finalizzate a promuovere nel bambino la presa di coscienza di quello che lo circonda, con le conseguenti capacità di localizzazione e di spostamento, non necessariamente si devono analizzare i solidi prima delle figure piane. La scelta spetta all'insegnante; riteniamo infatti che l'insegnante sia in grado di rendere maggiormente « concreto » ciò che conosce meglio, indipendentemente dal numero delle sue dimensioni. La concretezza di un oggetto dipende non tanto dalla sua reperibilità in natura quanto dalla sua manipolabilità e soprattutto dalla dimestichezza che si ha con esso; così, se si considera che il « concreto » su cui si richiama l'attenzione del bambino "può anche essere il materiale didattico che egli trova già parzialmente elaborato nel testo che gli sta sotto gli occhi oppure che nasce dai disegni dell'insegnante durante la lezione, allora appare ragionevole che si possa anche partire dalle figure piane (più facilmente rappresentabili dall'insegnante e riproducibili dall'alunno) per la costruzione della geometria. In tal modo il « concreto » che dovrebbe essere il punto di partenza della astrazione scientifica si identificherebbe in gran parte con il materiale iconografico, presentato all'alunno o da lui riprodotto o costruito autonomamente" (C.F.Manara [4]).

La manipolazione degli oggetti (anche assimilabili a figure piane) consente di cogliere in modo immediato alcune loro proprietà, per esempio la loro invarianza rispetto a certi spostamenti. Si apre così il capitolo delle trasformazioni geometriche; la figura viene liberata da una pretesa (o indotta) sua staticità (fra l'altro lontanissima dalla realtà) e sollecitata ad assumere posizioni diverse in base a determinate trasformazioni; quali? La scelta delle trasformazioni definisce la geometria che si vuole studiare; in una tale geometria due figure sono « uguali » quando, nel gruppo di trasformazioni che la definisce, esiste una trasformazione che muta una delle due figure nell'altra. Così, due triangoli che sono *uguali* nella geometria delle similitudini non è detto che lo siano anche nella geometria delle isometrie, mentre due triangoli che sono *uguali* nella geometria delle isometrie sono necessariamente uguali anche nella geometria delle similitudini.

Il concetto di *uguaglianza* quindi non è più sinonimo di *sovrapponibilità*; tale identità è superata ma non sconfessata; essa continua a sussistere nella geometria delle isometrie che è una « sottogeometria » della geometria delle similitudini, la quale è una sottogeometria della geometria affine (in essa tutti i triangoli sono uguali!), e la catena continua ancora.

Ogni gruppo di trasformazioni muta alcune cose e altre lascia invariate (il gruppo delle isometrie conserva le distanze, il gruppo delle similitudini lascia invariate le ampiezze degli angoli, ...); quindi ogni geometria ha i suoi *invarianti*; scoprire quello che rimane invariato in una figura dopo averla sottoposta ad una trasformazione è dunque un esercizio didattico non solo utile al programma che si sta svolgendo ma orientato verso ulteriori sviluppi, verso una visione più profonda e più matura della geometria. Quando è nata questa visione ? Dice in proposito L.Campedelli [2] : "Impossibile fissare una data e fare un nome. La scienza avanza lentamente, molti semi vengono gettati, ma non tutti fioriscono; e, quando c'è fioritura, non sempre supera la sua stagione, poiché non sempre trova terreno a ciò idoneo e coltivatore che tragga dai primi frutti la nuova semente. A poco a poco nasce così un complesso di idee, da principio le une dalle altre disgiunte, che quasi sembrano vagolare per l'aria fino a che non trovano chi sappia afferrarne il significato e coordinarle in un pensiero creatore". Per la visione della geometria alla quale abbiamo accennato questo "accadeva poco più di 100 anni fa (1872) quando il matematico tedesco Felix Klein, allora appena ventitreenne, salendo la cattedra dell'Università di Erlangen, rivelava il frutto delle proprie meditazioni".

Esattamente 100 anni fa è apparsa la prima traduzione italiana, a cura di G.Fano, della celebre memoria di F.Klein (Annali di Matematica pura ed applicata, XVII, sez.II, 1890); quale incidenza ha avuto tale memoria nella scuola secondaria italiana? "Nè le ricerche di Klein sulla geometria basata sul concetto di gruppo di trasformazioni, nè le ricerche di Peano e della sua Scuola sui fondamenti della geometria in cui un ruolo centrale è occupato dalle trasformazioni, hanno influenzato l'insegnamento della geometria in Italia e la nozione di trasformazione non è mai stata introdotta in alcun programma di insegnamento" (C.Mammana, B.Micale [6]) nelle scuole secondarie superiori.

Le cose stanno decisamente meglio per quanto riguarda la scuola media e la scuola elementare; il termine « trasformazione » viene introdotto con una certa timidezza nei programmi della scuola media del '63 : "nella terza classe si cercherà di iniziare gli alunni, ove se ne presenti l'opportunità, alla considerazione di qualche trasformazione geometrica (simmetrie, traslazioni, rotazioni, ...)"; questi suggerimenti, contenuti nella Introduzione al Programma di Matematica, non hanno però alcuno sviluppo nella elencazione dei contenuti. Il concetto di trasformazione trova invece pieno diritto di cittadinanza nei programmi del 1979 e nei Nuovi Programmi della Scuola Elementare.

Accenniamo brevemente ai suggerimenti didattici forniti dai Nuclei su questo tema.

Il Nucleo di Brescia, che ha presentato due itinerari particolareggiati per la geometria e la misura per tutto l'arco della Scuola Elementare, dà molto spazio alle simmetrie (nel piano), alla loro realizzazione, al loro riconoscimento, alla loro rappresentazione grafica, ma ritiene "che la rappresentazione grafica di rotazioni, omotetie e similitudini non debba essere un obiettivo della Scuola Elementare. E' opportuno che tali argomenti siano svolti a un livello molto semplice in modo da porre le basi intuitive per il lavoro che verrà svolto nella scuola media. Il riconoscimento di errori in situazioni di simmetria o di traslazione è argomento facilmente conquistabile perché interessa e entusiasma gli allievi".

Il Nucleo di Cagliari ha studiato, elaborato e sperimentato un curricolo, per l'insegnamento della Matematica nei 5 anni della Scuola Elementare, nel quale le trasformazioni fanno da supporto all'insegnamento della geometria.

Per quanto riguarda le trasformazioni la proposta del Nucleo di Milano è di "privilegiare l'acquisizione di un atteggiamento « Kleiniano », cioè l'abitudine a cercare ciò che resta invariato rispetto ad un certo tipo di trasformazione. In questo modo si estende e si approfondisce il concetto di « uguaglianza »".

Il Nucleo di Modena ha sperimentato, in una ricerca, il tema delle simmetrie già nel 1^{o} ciclo della Scuola Elementare.

Il Nucleo di Parma ritiene "di importanza primaria le trasformazioni: curando in particolare di evidenziare cosa *una singola* trasformazione (e poi *una classe* di trasformazioni) lascia invariato; con questo si prepara, in modo operativo, a organizzare la Geometria secondo l'impostazione gruppale. Le trasformazioni sono essenziali anche per conoscere meglio le figure e le loro classificazioni (la classificazione corrente si basa sull'invarianza per similitudini); senza le trasformazioni gli allievi cadono spesso in gravi errori di classificazione. Le trasformazioni sono utili anche per la ricerca di proprietà di figure, che comunque si ritiene debbano essere cercate in via sperimentale".

Per il Nucleo di Pavia il tema delle trasformazioni è ritenuto una importante innovazione, rispetto alla tradizione, e viene introdotto nel 2^{o} ciclo studiando prima le simmetrie delle figure piane e poi le altre isometrie (traslazioni e rotazioni).

Il Nucleo di Roma porta l'attenzione anche ai "movimenti rigidi nello spazio o su piani qualsiasi dello spazio".

"Simmetrie, rotazioni, isometrie e similitudini" trovano cittadinanza anche nel *Paese della Matematica* di F.Arzarello e nei seminari didattici di E.Gallo.

Il tema delle simmetrie è affrontato, nel Nucleo di Trieste, con l'ausilio di un interessante sussidio didattico - il *simmetroscopio* - basato sull'utilizzazione di specchi semiriflettenti e messo a punto da un insegnante del Nucleo.

Le figure *in movimento*, sottoposte ad un divenire condizionato solo dal particolare tipo di trasformazione considerato, spostano l'attenzione *dall'oggetto* alle *relazioni* fra oggetti. Ci si avvicina così a quella rivoluzione di pensiero che può essere ritenuta alla base delle ultime, grandi, conquiste della matematica. La consapevolezza che la matematica si occupa delle relazioni fra oggetti, prescindendo dalla natura degli oggetti stessi, ha aperto alla matematica nuovi orizzonti e nuovi fertilissimi campi di indagine.

Svincolare i punti e le rette della geometria dalla loro valenza reale non significa rendere meno concreta la geometria e tanto meno svuotarla di contenuto; anzi, semmai, significa proprio il contrario, cioè *arricchirla di nuovi contenuti* senza privarla dei vecchi. Il superamento della necessità di dare un supporto fisico agli enti oggetto dello studio della geometria ha già in sè una valenza positiva di crescita di libertà che spesso, come nel caso in esame, è accompagnata da una crescita di fertilità. *Punto* non è più, come in Euclide, *ciò che non ha parti* e *retta* non è più *la linea che giace ugualmente sui suoi punti*. Con D.Hilbert, sul finire del secolo scorso, è definitivamente sancito il carattere astratto (e quindi *libero* da condizionamenti fisici) dei punti e delle rette: l'insieme dei punti è un insieme di elementi di natura qualsiasi e rette sono sottoinsiemi, dell'insieme dei punti, soddisfacenti ad opportuni assiomi.

Non ha alcuna importanza la natura dei punti o delle rette; è completamente ininfluente la loro rappresentabilità fisica: quello che conta è precisare le relazioni che si vuole intercorrano fra punti e rette, cioè enunciare gli assiomi. In tal modo il concetto classico di *piano*} (che ci ha accompagnato in ogni ordine di scuola) si *dilata* in un concetto più vasto, più *astratto*, nel quale risultano compresi, per esempio, i *piani finiti* (costituiti cioè da un numero finito di punti e da un numero finito di rette) e i piani non immergibili in uno spazio di dimensione 3 (*piani non desarguesiani*). Il nuovo concetto di piano è più astratto di quello classico, non nel senso di « più lontano dalla realtà » ma nel senso di « più generale », e permette pertanto di cogliere un maggior numero di casi « concreti », fornisce un modello unico per una più vasta messe di situazioni particolari.

Almeno in fase di formazione-aggiornamento degli insegnanti bisognerebbe, secondo noi, prestare maggiore attenzione ai fondamenti della Geometria ed alla sua impostazione assiomatica ([4] , [5]).

Proprio "con particolare riguardo agli aspetti fondazionali e critici" i temi di Geometria sono stati trattati dal Nucleo di Lecce; in particolare è stato condotto uno studio sui "problemi connessi con la misura dai punti di vista della matematica, delle scienze sperimentali e del « senso comune »; inoltre sono stati analizzati aspetti attinenti alle misure qualitative, alla probabilità ed alla statistica viste come misure". In un altro studio sono state confrontate "varie modalità teoriche e pratiche usate per definire il concetto di area" e si è approfondito il discorso dal punto di vista matematico.

Abbiamo già ricordato che il Nucleo di Brescia ha messo a punto un itinerario completo (dalla 1ª alla 5ª) sul tema della misura.

Il Nucleo di Milano utilizza l'introduzione della « misura » anche per "attirare l'attenzione sull'« isomorfismo » tra le operazioni materiali operate sulle grandezze e le operazioni sui simboli che le rappresentano".

Una ricerca condotta dal Nucleo di Modena sulla misura nella Scuola Elementare contiene "spunti di riflessione teorica (dai punti di vista disciplinare e storico), l'analisi di alcuni progetti, il confronto tra i due programmi della scuola elementare per la matematica e le scienze e la proposta di un itinerario didattico, sperimentato in una classe terza, nell'ambito di un'attività di laboratorio".

Il Nucleo di Parma conduce lo studio delle grandezze "in modo analogo per quelle geometriche e per quelle fisiche, tenendo distinta la fase « geometrico-fisica » da quella numerica (le misure)".

Abbiamo già detto come ciò che anima la geometria, nel programma di Erlangen, sia la struttura di gruppo. L'importanza di questa struttura algebrica che trascende l'ambito strettamente matematico (si pensi alla chimica, alla cristallografia, alla meccanica quantistica, ...) dovrebbe essere riconosciuta in ogni programma di formazione degli insegnanti. Qui non si vuole sostenere che bisogna parlare di *gruppi* nelle scuole elementari ma che gli insegnanti siano in grado di sapere orientare il loro intervento didattico in modo da favorire la futura conquista di certi concetti estremamente fertili ed importanti, che sono a fondamento delle cose da loro stessi insegnate, delle quali costituiscono l'anima.

In effetti stiamo ribadendo un concetto banalmente fondamentale per ogni attività didattica che abbia un minimo di serietà: la necessità di una idonea cultura per poter padroneggiare la materia che si insegna, per poter apportare tagli od operare approfondimenti finalizzati non al capriccio del momento ma all'economia e soprattutto alla filosofia della materia; ciò è vero per ogni disciplina ma lo è particolarmente per la matematica per la sua specificità culturale e struttura intrinseca. Così, per esempio, sollecitare alla composizione (prodotto operatorio) di certe trasformazioni geometriche, osservarne il risultato, scoprire qualche opportuna proprietà, ... significa avviare il bambino alla futura comprensione del concetto di gruppo; il fatto, poi, che altre attività di carattere più propriamente aritmetico portino al medesimo concetto costituisce per l'insegnante non solo una garanzia dell'importanza del concetto stesso ma anche una utilissima occasione didattica per ampliare il campo esperenziale sottostante. Tutto ciò naturalmente va subordinato all'*interesse* ed all'*entusiasmo* che è indispensabile destare se si vuole veramente coinvolgere l'allievo nel processo educativo, suscitare la sua attiva partecipazione ed innescare quel processo mentale che produce cultura vera (non solo erudizione) ed alimenta l'intelligenza.

Lo studio delle simmetrie assiali e la loro composizione è un argomento che si presta benissimo (si trova il gruppo delle isometrie) a suscitare interesse ed anche meraviglia e quindi nuovo interesse, ed ha anche il pregio di fornire un aggancio con il mondo circostante, con la natura ed anche con l'arte; è un riferimento alla realtà non pretestuoso e forzato ma vero ed immediato; è un riferimento da cogliere non solo per scoprire regolarità o registrare ricorrenze ma anche per educare al bello, alla sua scoperta, alla sua estetica contemplazione, alla sua riproduzione ed infine alla sua invenzione.

Educare alla Matematica dovrebbe essere anche educare al bello: la Matematica, ed in particolare la Geometria, è anche armonia, anche se per essere colta richiede sensi particolarmente addestrati. Educare al gusto del bello, non solo nell'osservazione di ciò che ci circonda ma anche nella contemplazione delle immagini e delle sensazioni destate in noi da un racconto, da una poesia, da un dipinto, da una melodia musicale e, perchè no?, anche da una argomentazione matematica (non è raro veder brillare di gioia gli occhi di alcuni bambini dinanzi a certe regolarità aritmetiche o geometriche ...). Educare al bello non per evadere dalla realtà ma per cogliere di essa gli aspetti più positivi, più nobili, più significativi, quelli capaci di arricchire interiormente e di dare all'uomo un suo proprio intrinseco valore.

Una bella canzone di F.Guccini dice presso a poco così: "agli angoli delle case cerchi il mondo, nei libri e nei poeti cerchi te ... ". La ricerca di sè è un problema vecchio quanto l'uomo ma che puntualmente si ripresenta per ogni uomo; nessun processo educativo può essere innescato prescindendo da questo problema.

Non solo la poesia, ma anche la Matematica, insegnando a contemperare fantasia e ragionamento, libertà e rispetto delle regole, creatività ed obiettività, aiuta l'uomo a trovare se stesso; questo è possibile se della Matematica si riesce a trasmettere la lettera insieme allo spirito: trattare uno solo dei due aspetti significa in un caso trasmettere solo abilità tecniche di calcolo, nell'altro fare filosofia sul vuoto, ragionare del nulla.

Alla ricorrente domanda, suggerita da un consumismo miope ed esasperato, su a cosa serva la matematica molti matematici rispondono orgogliosamente: "non serve a nulla, assolutamente a nulla !". Tale risposta ha un suo fascino ed è molto meno banale di quanto possa a prima vista sembrare ed a noi piace; però anche un'altra risposta ci piace ed è una risposta che non è affatto in contraddizione con la prima, anzi di essa costituisce un aspetto particolare: "la matematica serve a formare l'uomo !".

L'importanza della Scuola cresce nella misura in cui si persegue questo obiettivo; sul grande tema dell'Educazione si gioca non solo la credibilità ma la dignità stessa della Scuola.

Quello che prima dicevamo di tutta la Matematica possiamo riferirlo in particolare alla Geometria: insegnando a contemperare fantasia e ragionamento, libertà e rispetto delle regole, creatività ed obiettività, aiuta l'uomo a trovare se stesso, esalta la sua dignità: "fatti non foste a viver come bruti, ma per seguir virtute e canoscenza".

BIBLIOGRAFIA

[1] Relazioni dei Nuclei di Ricerca Didattica di Bari, Bologna, Brescia, Cagliari, Lecce, Milano, Modena, Palermo, Parma, Pavia, Roma, Torino, Trieste e del Seminario Didattico del Dip. Mat. Univ. Siena.

[2] L. Campedelli, *Cultura matematica e insegnamento elementare*, Feltrinelli (1978).
[3] S. Cotoneschi Anichini, *Comunicazione privata*.
[4] AA.VV., *Per un curricolo continuo di educazione matematica nella scuola dell'obbligo*, Quaderni IRRSAE - Lombardia N.13 (1986).
[5] F. Speranza, D. Medici Caffarra, P. Quattrocchi, *Insegnare la Matematica nella scuola elementare*, Zanichelli (1986).
[6] C. Mammana, B. Micale, *Le trasformazioni geometriche elementari nella storia, nella cultura, nella didattica*, Scuola e Didattica n.12 (1990).
[7] C. Mammana, *Il ruolo della geometria*, 13° Convegno UMI sull'insegnamento della matematica, Suppl. al n.3 del N.U.M.I., marzo 1990.
[8] AA.VV., *Piano poliennale aggiornamento nuovi programmi scuola elementare: MATEMATICA.*, IRRSAE - Emilia Romagna (1987).

LA PRIMA EDUCAZIONE MATEMATICA NEL SETTORE ARITMETICO

Lucilla Cannizzaro (Roma)

In questa relazione ho affrontato il tema della prima educazione matematica nel settore aritmetico seguendo essenzialmente tre punti di vista distinti: il punto di vista **matematico**, quello **cognitivo** e quello proprio **dello sviluppo del curricolo.** Tali punti di vista si intrecciano necessariamente in un discorso educativo generale. Per rendere più agile il discorso sul presente, mi pare opportuno iniziare contrapponendo il passato (**A. Ieri**) al presente (**B. Oggi**).

A. Ieri

Pensiamo alla espressione **Numero nella scuola elementare**, immediatamente prima ed all'inizio degli anni '70. In una prospettiva **cognitiva**, associamo ad essa il concetto di numero naturale sviluppato principalmente attraverso operazioni di carattere logico elementare (individuare, differenziare, raggruppare, classificare e seriare); associamo ad essa una acquisizione significativa attraverso attività manipolative dirette da parte degli alunni spesso fin troppo prolungate; associamo ad essa la preoccupazione di sviluppare aspetti concettuali di base prima della operatività su e con numeri e comunque, spesso, prescindendo da essa. Sottolineo, in particolare, che venivano presupposti, in maniera più o meno esplicita, processi lineari nello sviluppo delle conoscenze.

In una prospettiva **disciplinare** associamo alla nostra espressione le nozioni di insieme, di cardinalità di un insieme, di equipotenza tra insiemi; introduciamo l'addizione facendo riferimento all'unione di insiemi disgiunti; interpretiamo la moltiplicazione come somma ripetuta e come cardinalità del prodotto cartesiano di insiemi (e si potrebbe associare all'elevamento a potenza (a elevato a b) il numero delle funzioni da un insieme di cardinalità b ad un insieme di cardinalità a); privilegiamo l'uso di rappresentazioni grafiche e di simboli attinti dalla teoria degli insiemi.

In una prospettica **curricolare**, riferiamo alla stessa espressione aspetti introduttivi ed attività che investono, sostanzialmente, le prime due classi.

B. Oggi

1. Pluralità (di concezioni, di approcci, di attività, di schemi, di linguaggi).

Oggi, **Numero nella scuola elementare**, richiama subito, dal punto di vista matematico, una pluralità di accezioni, non solo per quanto riguarda i concetti di **numero naturale, numero negativo, frazione**, ma anche, per quanto riguarda la sottrazione e la moltiplicazione. Mi occuperò prima (nel punto a.) delle accezioni di numero naturale e di frazione, poi (nel punto b.) delle accezioni di alcune operazioni elementari. Nessuna delle liste che seguono ha la pretesa di essere esaustiva.

a. Dal punto di vista **matematico** il concetto di **numero naturale** viene visto sotto una pluralità di aspetti in base ai quali si distinguono sul versante educativo:

1. un approccio insiemistico (i numeri sono proprietà di collezioni di oggetti, non hanno una esistenza concreta autonoma; con questo approccio si privilegia l'aspetto cardinale dei numeri);
2. un approccio ordinale che si basa sul concetto di ordine e con cui che privilegia l'attività del contare (contare per contare, non contare oggetti e la costruzione della successione dei numeri naturali nella sua globalità);
3. un approccio ricorsivo che si collega all'esperienza della iterazione, della ripetizione di atti motori, del ritmo come scansione del trascorrere del tempo, della costruzione di contatori interni per i quali la successione **uno, due, tre**, è, come vedremo poi, nello stesso tempo frutto e strumento;
4. un approccio basato sulla misura nel quale non si valuta più la quantità di singoli elementi distinti uno dall'altro, ma si quantifica un confronto tra una grandezza ed una unità di misura omogenea; vengono così poste in evidenza la possibilità e la necessità di fare suddivisioni successive delle due grandezze in gioco;
5. un approccio algebrico che pone l'attenzione sugli aspetti algoritmici e algebrici che coinvolgono le proprietà delle operazioni e i loro comportamenti reciproci.

Gli approcci 1. e 2. si basano su relazioni, mentre 3. e 4. su operazioni e 5. su aspetti legati alla nozione di struttura algebrica.

Questi elementi di pluralità di stampo matematico vanno ad integrarsi con elementi di pluralità nati da riflessioni e ricerche sul versante **cognitivo** e riguardanti aspetti di organizzazione percettiva, motoria e verbale piuttosto che aspetti logici di base. Vediamo qui, in maggiore dettaglio, tre di essi [5].

Il primo elemento (principio dell'ordine stabile) individua un uso particolare della successione verbale dei numeri: i numeri, o meglio, i nomi dei numeri nella loro successione sono usati come indicatori con i quali contraddistinguere gli elementi di una collezione, ma senza alcuna valenza di cardinalità, perché non indicano numerosità; parti iniziali della successione dei numeri (1, 2, 3, 4) o parti di successioni errate ma sempre uguali (2, 3, 8, 5) hanno la stessa funzione e la stessa funzione delle conte per filastrocche; sono un mezzo per tenere conto di una azione che dà una organizzazione ed un ordine ad un insieme sulla base di una sequenza ordinata di suoni.

Il secondo elemento è per così dire di senso opposto. E stabilisce il principio che, rispetto a certi risultati, l'ordine nel quale si identificano gli elementi di un insieme con una sequenza ordinata di nomi (es. numeri) è irrilevante, ovvero, che vi è una identità nel risultato qualunque siano le etichette che si assegnano ai singoli elementi. E questo accade se si tiene conto solo della numerosità degli elementi.

In questa ottica, da un punto di vista cognitivo l'aspetto ordinale del numero precede l'aspetto cardinale, che viene identificato con l'ultima etichetta utilizzata nel contrassegnare gli elementi.

Il terzo aspetto infine, si collega ai precedenti e sottolinea una componente percettiva, o meglio di stabilità percettiva e porta ad associare certi numeri a certe disposizioni spaziali di elementi come, ad esempio, nel domino o nelle carte; la stessa stabilità percettiva è alla base delle capacità di associare numeri e numerali.

Soffermiamoci ora sulle **frazioni**, meglio sull'aspetto di molteplicità legato al concetto di frazione.

In un'ottica **disciplinare frazione, oggi, nella scuola elementare** significa riconoscere, con maggiore chiarezza ed enfasi del passato, accezioni diverse insite nel concetto:

1. frazione come indicatore di una relazione parte-tutto (2 bambini sui 15 della prima classe; 2 doppioni su dieci figurine; 2 casi favorevoli su 6 casi possibili nel lancio di un dado);
2. frazione come rapporto tra due quantità omogenee (nella classe il rapporto tra maschi e femmine è di 3 a 2; in cinque estrazioni senza reimbussolamento ho avuto 2 biglie rosse e 3 nere: quali ipotesi posso fare sulla composizione del sacchetto da cui ho estratto le biglie sapendo che contiene in tutto 5, oppure 6, oppure 15, oppure 12). Si noti che in questo caso il rapporto inverso ha un significato del tutto analogo;
3. frazione come rapporto tra quantità non omogenee (80 chilometri percorsi in due ore significa avere viaggiato alla velocità di 40 chilometri l'ora); in questo caso il rapporto inverso non è usualmente considerato, non ha senso e non ha nome);
4. frazione come quoziente, ovvero, come divisione indicata (è l'accezione classica mediante la quale si amplia l'insieme dei numeri naturali (e interi) nell'insieme dei numeri razionali positivi (e razionali), imponendo che equazioni del tipo $2x = 3$ siano sempre risolubili);
5. frazione (ad esempio, 2/3) come uno dei possibili nomi di una classe di frazioni, la classe di equivalenza corrispondente a $2n/3n$ al variare di n nei naturali;
6. frazione come operatore moltiplicativo (moltiplicare per 2/3 significa sostituire 2 ad ogni gruppo di 3 individuato nel numero, nella grandezza o nell'insieme che rappresenta il moltiplicando);
7. frazione come trascrizione di un numero decimale (0,5 è la frazione 1/2);
8. frazione come elemento di un insieme dotato di una relazione d'ordine (confronto tra frazioni);
9. frazione come punto, come coordinata sulla retta graduata (punti tra due pun-

ti a coordinate intere, ma anche punto tra due punti a coordinate frazionarie; impossibilità di **passare al successore**, situazione tipica dell'insieme dei numeri naturali). E' da notare che in questo punto sono inclusi sia il punto precedente che il punto 5 ma non lo esauriscono;

10. frazione come elemento di una struttura algebrica, con operazioni e loro proprietà (frazioni complementari rispetto all'unità, frazioni inverse rispetto all'unità,..).

b. Il nodo centrale della molteplicità di accezioni e delle specifiche particolarità d'uso legate ai contesti investe anche **le operazioni elementari**: consideriamo rapidamente la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione.

Da un punto di vista **cognitivo** si distinguono, ad esempio, per la sottrazione due accezioni: sottrazione come **sottrarre** o **togliere** e sottrazione come **differenza con** o **cosa manca per** [4].

Si individuano campi concettuali ampi, ad esempio il **campo concettuale delle strutture moltiplicative**, entro cui si distinguono e, nel contempo, si unificano accezioni diverse della stessa operazione, operazioni diverse e situazioni problematiche affrontabili con strategie diverse.

Così la moltiplicazione non è più vista soltanto come somma ripetuta, ma nemmeno soltanto come operazione associata al prodotto cartesiano di insiemi.

La moltiplicazione permette infatti di agire sui dati di un problema con una trasformazione scalare (senza cambiamento delle grandezze in gioco) o, in altri casi, come trasformazione funzionale (con mutamento della grandezza originaria) degli stessi dati [7].

E discorso analogo vale per la divisione.

2. Qualche rischio.

Un primo rischio consiste nel mischiare le carte, ovvero, nell'identificare i piani disciplinare e cognitivo con il piano della gestione del curricolo e della pratica didattica.

Voglio dire che è corretto considerare come fonte di spiegazioni degli errori e delle difficoltà dei ragazzi tanto le differenze disciplinari e cognitive insite e soggiacenti, ad esempio, il concetto di numero naturale quanto gli schemi interpretativi delle strategie di analisi e soluzione dei problemi di tipo moltiplicativo (per rimanere sugli esempi fatti). Non è opportuno considerarle i vari aspetti come singole tappe autonome **da insegnare**; i diversi approcci vanno realizzati attraverso il lavoro su **contesti e modelli concreti** che concorrono alla maturazione delle differenti accezioni dei concetti e quindi della complessità dei concetti stessi; ma non devono diventare oggetto di dichiarazioni esplicite rivolte ai ragazzi.

Un secondo rischio nasce dalla preoccupazione di frastornare i ragazzi con troppi schemi o modelli diversi: si decide allora talvolta di selezionarne solo alcuni o, peggio, si pretende che i ragazzi identifichino troppo presto analogie e differenze.

Uso, qui, il termine **modello** per indicare sia materiali concreti per la manipolazione (BAM, linea dei numeri disegnata per terra, etc.), sia modelli e immagini mentali di riferimento costruiti dai primi con l'ausilio dell'azione, del linguaggio, della grafica, sia ancora gli oggetti matematici ad essi soggiacenti (o nati da essi!) quale ad esempio la retta geometrica con fissato un sistema di riferimento (origine ed unità) per parlare di numeri.

Ogni modello porta con sè la necessità di aggiustamenti e talvolta, insieme a indubbi vantaggi (pratici, generali e didattici), anche veri e propri limitazioni e intralci. Introdurrei a questo proposito un risanato slogan del tipo **Usa e getta!**.

Vediamo due esempi, uno di portata circoscritta (l'operatore frazionario) ed uno di portata più ampia (la retta graduata).

Prendiamo l'operatore frazionario 1/4. Esistono vari modelli con i quali interpretarlo e dai quali estrarlo come concetto generale.

Posso vedere 1/4 come azione concreta da eseguire su un insieme di oggetti, su un quadratino di carta, etc ed allora l'operatore divide il **tutto** in 4 parti e ne prende 1.

Ma posso realizzarlo sul piano del foglio come una particolare proiezione di una retta su di un'altra che contrae, che restringe i segmenti, portando il punto 4 sul punto 1 (ovvero come la trasformazione inversa della dilatazione che porta 1 sul punto 4). Ancora, posso vederlo come una particolare proiezione di una figura piana su un piano parallelo a quello contenente la figura e che porta la figura in una di superficie 1/4 di quella data, facendo così riferimento a cambiamenti di fattori di scala (fig.1).

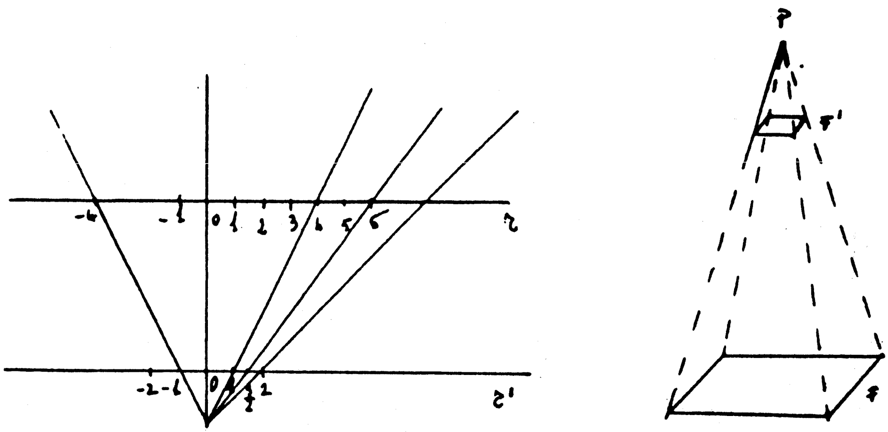


fig. 1

I modelli esaminati non sono né intuitivamente, né didatticamente identici.

Il primo crea problemi (forse salutari, ma sempre problemi) se applicato ad un insieme, per esempio, di sette elementi.

Il terzo crea complicazioni spostando il lavoro unicamente al livello di aree, ovvero grandezze non lineari.

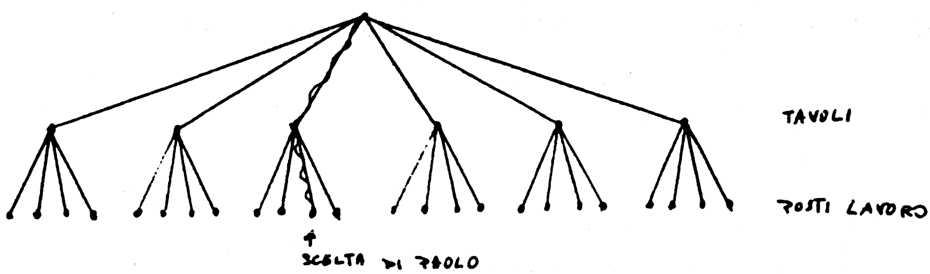
Il secondo ed il terzo rendono più semplice l'introduzione dell'idea di prodotto di due operatori, nel senso di due operatori applicati successivamente, e di operatore frazionario su una frazione.

Ma prendiamo il caso in cui il numero al quale si applica l'operatore sia minore di uno, ad esempio, 1/6.

Nel caso, allora, di (1/6).(1/4) il modello delle proiezioni tra piani fornisce un supporto visivo (a chi ha sviluppato familiarità in tale ambito), ma non è semplice nella pratica perché, in realtà, è un modello tridimensionale sul quale si lavora attraverso un disegno bidimensionale (costruendo così un modello del modello!). Ed il modello delle proiezioni tra rette parallele o coincidenti è ancora troppo laborioso e poco intuitivo. Il modello delle parti di un tutto è decisamente inadeguato.

Consideriamo, però, la seguente situazione.

Vogliamo calcolare la probabilità che Paolo vada a sedersi in un certo posto nel laboratorio di ceramica; nel laboratorio vi sono sei tavoli indipendenti di forma quadrata ed ogni tavolo prevede quattro posti di lavoro. Paolo sceglie per primo e non ha preferenze. Bene, la rappresentazione della situazione con un diagramma ad albero ci fornisce un modello agile, utile e nel quale (1/6).(1/4) risulta intuitivo ed evidente (fig.2).



$(1/6)\cdot(1/4) = 1/24$

fig. 2

Abbandoniamo il problema della rappresentazione dell'operatore per esaminare quello della rappresentazione degli insiemi numerici fondamentali.

Tra i modelli dell'insieme dei numeri naturali e dell'insieme dei numeri razionali, ho scelto di esaminare la retta graduata con le sue trasformazioni geometriche (ritroveremo alcune delle osservazioni fatte per l'operatore 1/4) e gli insiemi con le operazioni su di essi.

Partiamo dal caso della retta graduata (o linea dei numeri) come modello dei numeri interi e delle frazioni.

Il lavoro sulla retta graduata presuppone un uso attivo o passivo dell'unità di misura (operare la graduazione o usarla fatta da altri); mette in risalto la costruzione ricorsiva dei numeri naturali e il loro ordinamento; non serve, per esempio, a spiegare o introdurre il sistema posizionale di scrittura dei numeri. La rappresentazione dei naturali sulla retta graduata crea aspettative per una estensione degli insiemi numerici, apre la strada a battezzare nuovi punti ed a trovare **molte** frazioni tra due frazioni date.

Se ci limitiamo a considerare numeri interi, il modello risulta intuitivo e produttivo per quanto riguarda le operazioni di addizione, di sottrazione e per la proprietà associativa: la prima corrisponde a scorrimenti o a salti unitari nella direzione che va da zero ad uno, la seconda a scorrimenti nella direzione opposta; inoltre, gli scorrimenti o i salti sono associativi.

Ma la più semplice e intuitiva delle operazioni tra frazioni, la addizione, è mal servita da questo come da altri modelli; il carattere intuitivo della somma tra frazioni con uguale denominatore è, in verità, salvato dal modello delle parti di un tutto.

La moltiplicazione è associata a dilatazioni o contrazioni della retta ma, come visto nell'esempio dell'operatore 1/4 (con le due rette portate a coincidere), la carica intuitiva del modello si perde quasi completamente.

Consideriamo, ora, il modello degli insiemi.

Innanzi tutto è un modello per i soli naturali e non si adatta in alcun modo né agli interi negativi né alle frazioni.

Inoltre, la interpretazione del prodotto tra interi come cardinalità del prodotto cartesiano tra due insiemi introduce la considerazione di enti (le coppie ordinate) che spesso non hanno interesse per il problema considerato [1]. Quante caramelle devo prendere se voglio distribuire a cinque bambini due caramelle a testa?

Le coppie (bambino, caramelle) sono prive di un chiaro significato ed è noioso contarle tutte per ottenere la risposta; é più produttivo usare come supporto per il calcolo uno schema a rettangolo.

Il prodotto cartesiano ha senso come modello quando il problema, di per sé, attribuisce un significato alle coppie ordinate. Quante strade diverse posso percorrere per andare da A a B nella situazione illustrata nella figura 3? Su questo esempio torneremo in seguito a proposito dell'importanza del contesto e delle situazioni problematiche.

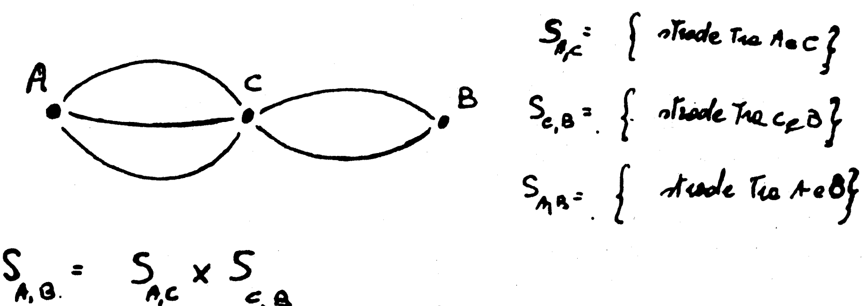


fig. 3

Ma, ancora una volta, è opportuno non confondere piani diversi. La comprensione delle valenze, delle limitazioni, delle specificità dei singoli modelli va affinata attraverso l'uso ed in modo inconsapevole. Una maturazione in tal senso è obiettivo importante per l'educazione matematica: e se è giusto porne le radici nella scuola elementare, sicuramente l'obiettivo non va perseguito in modo esplicito a questo livello scolare.

3. Sulla non linearità dei processi cognitivi.

A questo punto non sorprenderà certo che l'espressione **Numero nella scuola elementare, oggi** venga associata, sul piano cognitivo e di gestione di curricolo, anche alle seguenti ulteriori riflessioni:

1. i processi di acquisizione dei concetti di numero e delle conoscenze sui numeri sono processi complessi e non lineari;
2. è determinante la considerazione di una varietà di contesti particolari d'uso (e questo aspetto è già emerso);
3. è opportuna la manipolazione di una reale molteplicità di materiali, di rappresentazioni iconiche e grafiche, di termini linguistici, di simboli.

Sul valore dei contesti tornerò più tardi a proposito dei problemi, ma, intanto, vediamo un esempio a proposito delle frazioni. La molteplicità di accezioni del concetto di frazione nella scuola elementare è legata alla molteplicità dei contesti d'uso (in ciascuno di essi una singola accezione è strumento e linguaggio intuitivo) ed alla molteplicità delle rappresentazioni iconiche e simboliche che vengono usate.

Se pensiamo la frazione 2/7 (per esempio) come parte di unità, interpretiamo le operazioni concrete e mentali di scomporre una unità in 7 parti uguali e prenderne 2; vediamo la frazione come somma di unità frazionarie con lo stesso denominatore (questa somma ha carattere intuitivo), il che consente i primi confronti fra frazioni.

Purtroppo, si lega così saldamente l'idea di frazione a quella di **parte inferiore all'intero.**

E' preferibile pensare alla frazione come operatore per rendere più facile considerare frazioni maggiori di uno, e poi perché si assimilano gli operatori frazionari agli operatori interi, rendendo possibili alcune scomposizioni moltiplicative di portata intuitiva (operare con 3/4 è operare con 1/4 e poi con 3 o viceversa).

La molteplicità, la complessità e la non linearità nelle quali immergiamo, oggi, il concetto di frazione danno maggior conto della in stabilità tipica delle abilità di lavoro con le frazioni (variazioni di contesto, di accezione, di rappresentazione, di simboli determinano cambiamenti e capovolgimenti di prestazioni). In questa stessa ottica appare accettabile l'ipotesi che un intreccio tardivo delle diverse accezioni blocchi la maturazione del concetto e consenta solo un uso forzato, improduttivo ed ugualmente instabile degli aspetti formali. E' allora interessante proporre di anticipare concetti o singole accezioni di concetti: è il caso della **densità** per le frazioni, introdotta da alcuni ricercatori attraverso esempi concreti quali la dolcificazione del thè, la farcitura di dolci con uvetta passa, l'intensità del gusto di una bibita di succo di arancia ed acqua [6].

Sempre sul piano del **curricolo**, sottolineare la non linearità dei processi cognitivi e l'uso in contesti concreti particolari significa sviluppare il concetto di numero e le proprietà delle operazioni attraverso, e non prima, il loro uso (purché sia significativo per l'allievo); sottolinea, infine, quella distinzione contenuta nei Nuovi Programmi tra obiettivi il cui raggiungimento è misurabile al livello di scuola elementare ed obiettivi il cui raggiungimento è misurabile solo in scolarità successive.

Purtroppo, nei N.P. questa distinzione è troppo fortemente identificata con la distinzione in temi tradizionali (geometria ed aritmetica) e temi nuovi (probabilità, informatica, etc.).

4. Sulle riconcettualizzazioni

Cercherò di chiarire e rendere meno dura questa parola attraverso due esempi esempi tratti dal passaggio dai naturali agli interi (con segno) e dal passaggio dai naturali alle frazioni.

Nel primo caso, i ragazzi quando operano al di fuori di particolari contesti (temperature, biglie perse, denari chiesti in prestito o figurine scambiate), spesso ragionano come se il segno meno fosse elemento accessorio e separato dalla parte numerica vera e propria.

E così, per i ragazzi, -12 è più grande di -3 perché 12 è più grande di 3. La situazione numerica è dominata dai ragazzi solo con il ricorso ad ambiti famigliari, oppure a quello che Davydov descrive come un principio di analogia con caratteristiche già usate di numeri già usati.

L'ambito delle temperature è sostegno opportuno mentre l'ambito di risparmi e debiti o scambi di figurine non lo sono: un debito di venti è più grande di uno di cinque.

L'ambito dei numeri naturali, già noti, fornisce solo teoricamente due indicazioni contrastanti che nella pratica si riducano spesso alla sola indicazione non valida. Dal lavoro già fatto sui numeri naturali riaffiora che 12 è più grande di 3 più facilmente di quanto non riaffiori che dati due numeri possiamo sempre raggiungere il più grande aggiungendo 1 un numero sufficiente di volte al numero più piccolo. Il principio di generalizzazione dell'azione viene applicato al primo caso e determina l'errore ma non viene applicato al secondo caso perché è meno presente nella esperienza dei ragazzi.

Ricollegandoci a quanto detti al punto 2. sui modelli dobbiamo registrare che anche il modello della retta graduata con i negativi interpretati come simmetrici dei positivi rispetto allo zero rinforza l'errore originario.

Passare dei naturali agli interi non è una semplice estensione di un concetto ma una vera e propria riformulazione concettuale.

D'altra parte passare dalla interpretazione di 3-2 come differenza tra 3 e 2 alla sua interpretazione sulla retta graduata come spostamento a partire dal punto 3 di due passi indietro e da quest'ultima alla interpretazione, sempre sulla retta graduata, di 3-2 come la traslazione +3 (ovvero spostamento di tre unità in senso positivo) composta con la traslazione -2 (ovvero spostamento in senso negativo di due) significa passare dal lavoro su numeri al lavoro su operazioni, dal lavoro su punti della retta al lavoro su trasformazioni. Il passaggio non è concettualmente semplice, si tratta di una vera e propria riconcettualizzazione.

E tutto questo senza chiamare in causa esplicitamente la nozione di vettore che richiede una ulteriore riconcettualizzazione.

Se pensiamo una frazione come relazione parte-tutto, le frazioni minori di uno sono viste come parte dell'intero; che significato possiamo allora attribuire ad una parte superiore all'intero?

Sul modello della **torta** per sommare 1/7 a 2/7 basta sommare i numeratori. Così hanno origine errori del tipo: (1/6) + (2/5) ha come risultato 3/6, oppure 3/5, oppure 3/11.

In sostanza, si osserva un fenomeno di stabilità delle caratteristiche dei numeri naturali e di assimilazione di altri insiemi numerici a questi ultimi più vasto e profondo (ed anche in età insospettatamente elevate) di quanto si sia disposti ad ammettere a priori.

Cambiare ottica, abbandonare gli schemi precedenti, abbandonare, negli esempi fatti, le caratteristiche di lavoro con i numeri naturali significa approdare ad un nuovo concetto, identificare nuovi comportamenti, operare nuove classificazioni, stabilire nuove relazioni.

Il passaggio dalla moltiplicazione come somma ripetuta basata sulla attività elementare del contare alla moltiplicazione come operatore che può **far diminuire** e che diviene fulcro del ragionamento proporzionale non può essere ricondotto alla semplice sovrapposizione di concetti precedenti.

E così quando l'adulto individua il più ampio campo concettuale delle strutture moltiplicative come ambiente nel quale unificare moltiplicazione, divisione, frazioni, rapporti, numeri razionali si richiede una vera e propria riconcettualizzazione.

Far maturare aspetti di riconcettualizzazione per le frazioni o per la moltiplicazione significa, dal punto di vista curricolare, affrontare aspetti e problematiche che investono il secondo ciclo della scuola elementare e lo uniscono idealmente e sostanzialmente alla scuola media.

Ma di riconcettualizzazione si può parlare anche all'interno scuola elementare, ad esempio a proposito dell'unità, dell'1 e dello 0. Mi occuperò, qui, dell'unità e dell'1.

Contare è una attività tipica dell'inizio della scuola primaria. Capacità di contare e concetto di unità si evolvono in modo strettamente e mutuamente correlato.

Dal contare oggetti il bambino passa alla capacità di contare numeri considerati come singole entità.

In tale fase l'unità è indivisibile, è identificata con il numero naturale **1** che si può aggiungere o togliere; e questo anche se si comincia a dividere un segmento o un quadrato di cartoncino in due, in tre, etc. parti uguali ed a parlare di metà, o addirittura a prendere tre parti tra le quattro ottenute.

Nella acquisizione del sistema di scrittura decimale i bambini si abituano a considerare unità composte, non atomiche ma costituite da più unità, è questa una prima sistematica anticipazione della moltiplicazione sia pure in un contesto molto particolare.

Più tardi la riconcettualizzazione della moltiplicazione e della divisione come trasformazioni scalari e funzionali coinvolge una ulteriore riconcettualizzazione dell'unità.

Con il lavoro su frazioni, l'unità diviene divisibile e vi sono numeri che esprimono parti di un tutto. Il numero 1 non è più l'elemento atomico, si abbandona il discreto, struttura tipica dei naturali nella quale si passa da un elemento al successivo senza altri elementi dello stessa natura tra i due.

Ampliando l'insieme dei naturali al'insieme delle frazioni, si passa dal predominio del contare sul misurare (il misurare si riduce al contare se ci limitiamo ai naturali) al predominio del misurare sul contare.

Ed un cambio di unità è coinvolto anche quando non si interpreta più la frazione 2/7 come esprimente una relazione parte-tutto, ma come esprimente un confronto tra due quantità di natura diversa, come ad esempio nel caso che si voglia esprimere che su sette numeri telefonici digitati due soli sono risultati liberi e cinque occupati; si è effettuato un conteggio presupponendo due quantità strutturalmente diverse.

Con le attività di misura l'unità, ciò che viene considerato 1, si riveste di criteri di arbitrarietà; l'unità di misura si può scegliere, anche se la scelta non è del tutto libera, perché occorre rispettare un criterio di omogeneità con la grandezza che si vuole misurare.

Ed il risultato della misura è per così dire dimensionato, non ha senso come numero puro, in quanto è necessario mantenere l'indicazione della unità di misura (come del resto nel caso di unità multipla già visto prima).

5. Il problema dei problemi ed il suo intrecciarsi con i punti precedenti.

Come ho già detto le procedure aritmetiche sono sviluppate per generalizzazioni ed integrazioni da esempi e da successioni di azioni. In questa ottica è di importanza estrema tenere conto di una varietà di contesti particolari d'uso, di conoscenze e di competenze sviluppate **localmente**, ovvero, ancorate a particolari aspetti semantici e della interazione tra fare, comunicare, verbalizzare azioni concrete.

La familiarità o la significatività (relativa) del contesto consente al bambino un controllo degli oggetti in campo e delle operazioni con essi, la formulazione di strategie concrete, particolari, ma valide per risolvere problemi e sulle quali innestare processi di graduale generalizzazione per costruire schemi di riferimento (prima concreti e poi, via via, più generalizzabili). Questi schemi risultano una solida base per rappresentazioni mentali efficaci e duttili.

Lo sviluppo del senso del numero, l'apprezzamento dell'ordine di grandezza si evolvono a partire da situazioni problematiche concrete, in singoli contesti: crescono basandosi sulla possibilità di esercitare il controllo della plausibilità dei risultati rispetto al contesto.

I problemi acquistano allora importanza prioritaria proprio come ambiti semantici entro cui lavorare per costruire tappa dopo tappa aspetti concettuali, aspetti simbolici e sintattici.

Non solo, anche il tipo di rappresentazione è scelto in funzione del problema specifico ed ha importanza l'uso simultaneo e locale di più rappresentazioni si potrebbe proporre lo slogan precedente **usa e getta**.

Lo sviluppo di aspetti concettuali non precede l'uso dei concetti, ma è un uso legato a contesti particolari a contribuire allo sviluppo di aspetti concettuali. L'uso in una varietà di contesti concreti significativi fa da ponte tra apprendimento pre ed extra scolastico ed apprendimento scolastico; ancora, è ponte tra aritmetica ed algebra e quindi tra scuola elementare e scuola media.

Fin qui ho accennato all'importanza delle situazioni problematiche. Ora voglio spendere qualche parola sull'importanza di una attenzione didattica dedicata al problema.

E' opportuno considerare il problema in una diversa prospettiva cognitiva. Di fronte ad un problema è necessario chiedersi non più solo cosa si deve fare o cosa necessariamente deve avvenire, ma cosa si può fare; quali strade si possono intraprendere per una soluzione e non quale è la via obbligata da percorrere. Quale strada risolutiva, quale rappresentazione concreta o schema sono suggeriti dal contesto.

E' importante sviluppare un senso, una sensibilità alla struttura del problema. Si potrà, per esempio, fare riconoscere o formulare testi diversi per una stessa strategia risolutiva, oppure, alla fine del secondo ciclo, sospendere talvolta gli aspetti procedurali e di esecuzione per confrontare le strategie risolutive individuate.

Si potrà, in generale, lavorare sulle componenti di un problema (testo, strategia risolutiva e risultato) trattandolo come si trattano le relazioni numeriche e facendo assumere il ruolo di incognita a ciascuna delle componenti.

6. Calcolatrici tascabili, abilità di calcolo e dintorni.

L'uso delle calcolatrici tascabili è a mio avviso da favorire; così come molti altri tipi di ambienti concreti nel quale fare lavorare, i ragazzi regala vantaggi e richiede qualche attenzione.

Innanzi tutto osserviamo che i numeri naturali della macchina non sono tutti i numeri naturali, così come i numeri decimali della macchina non sono i numeri razionali. La prima osservazione è allora che se gli insiemi numerici sui quali lavorano i bambini (i loro insiemi d'uso) sono lacunosi e difettosi, non lo sono meno alcuni insiemi numerici sui quali lavoriamo con vantaggio e soddisfazione noi adulti. Si dovrà, così, accettare con maggiore tolleranza che il bambino ed il ragazzo lavorino, anche a lungo, su insiemi numerici parziali e parzialmente organizzati. Abbiamo, infatti, visto che tali sono gli insiemi dei naturali e dei razionali conosciuti dai ragazzi e costruiti attraverso l'uso.

Per parlare dell'insieme dei numeri naturali non solo esplorato **a pezzi**, ma considerato nella sua globalità è preferibile aspettare la scuola media.

Per superare la fase di esplorazione **a pezzi** dell'insieme dei numeri razionali si aspetterà la scuola secondaria superiore. Per l'insieme dei numeri reali si aspetterà l'università.

Queste considerazioni non tolgono importanza al fatto di lavorare con (e parlare di) alcune frazioni nella scuola elementare, con numeri razionali nella scuola media, con reali nella scuola secondaria. Si potranno, anzi, introdurre numeri non razionali attraverso il modello della retta o l'operazione di estrazione di radice quadrata fin dalla scuola media.

Ma altra questione è la conquista degli insiemi numerici come dati complessivamente e nella loro molteplicità di proprietà (algebriche, di ordine, di densità, di completezza, ...).

Le calcolatrici, con la loro stessa presenza, sottolineano con maggiore evidenza che non in passato il ruolo delle approssimazioni di calcolo.

Un esempio (relativo ai modelli più diffusi):

10000000	+ 0,1	=	10000000
"	+ 0,5	=	"
"	+ 0,9	=	"
"	+ 0,9999999	=	"

Sicuramente l'uso della calcolatrice evita calcoli lunghi, difficili, noiosi; diminuisce le occasioni di errore nell'applicazione di algoritmi soprattutto ad un certo livello di complessità e lunghezza.

Ma, usata in modo intelligente, favorisce e raffina altre capacità di calcolo e rinforza la padronanza del sistema di scrittura posizionale. Sviluppa capacità di controllo sull'ordine di grandezza dei risultati e più in generale sviluppa capacità di calcolo mentale come controllo semantico dei risultati ottenuti dalla macchina; per esempio attraverso quesiti del tipo: è plausibile che 59.750:25 sia 2390?

E' da notare che ,qui, la semantica cui ho fatto riferimento è quella dei numeri stessi: ora il concreto è costituito dai numeri.

L'uso della calcolatrice consente, inoltre, di fare maturare una sensibilità, un **senso** del numero anche su numeri grandi, anche su numeri non interi.

Esempio: partendo da 87 e sottraendo numeri non interi (non necessariamente uguali tra loro) arrivare più vicino possibile a 23 in 4 passi; dopo un primo tentativo correggere la propria risposta in modo da ottenere un risultato migliore. Ecco una possibile risposta:

87 - 14,2 = 72,8
72,8 - 20,5 = 52,3
52,3 - 10,4 = 41,9
41,9 -   8,1 = 33,8

L'uso della calcolatrice sottolinea aspetti inerenti le regole d'uso delle operazioni, ovvero inerenti alla sintassi che le governa. Vediamo su un esempio, il problema della gerarchia delle operazioni e l'uso delle parentesi:

10000000 + (0,9999999 + 0,0000001) è, sulla calcolatrice, diverso da (10000000 + 0,9999999) + 0,0000001: come anticipato, i numeri macchina oltre che lacunosi sono difettosi!

Rivedremo queste somme più tardi per esplicitare un ulteriore anomalia.

Ma riconsideriamo questi pochi spunti riportandoli al discorso sui modelli. Nonostante i guai segnalati ed altri immaginabili le calcolatrici tascabili non sono un modello peggiore di altri: come ogni altro modello, ogni altro concreto presentano difetti. Questi difetti ci appaiono più vistosi perché si vedono concretamente proprio in un modello che ci aspettiamo più vicino agli insiemi numerici come concetto, idea, proprietà, struttura matematica.

Ecco, allora, l'utilizzazione delle calcolatrici in giochi e gare come contesti 'decontestualizzati' da affiancare ad altri contesti proprio per questa vicinanza con i numeri **matematici.**

Si può pensare per esempio, a partite a due con l'esercizio precedente o a gare nelle quali si deve trovare una tra le risposte possibili al quesito di individuare un possibile numero che moltiplicato per 17 dia come risultato un numero interno all'intervallo di estremi 560 e 585; vince chi trova percorsi più brevi nel più breve tempo. Nella figura 4 è riprodotto il lavoro di uno studente con poche possibilità di successo, ovvero con uno scarso senso del numero.

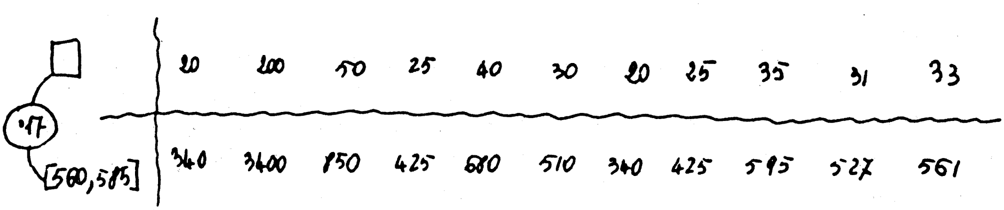


fig. 4

Ma torniamo a considerare gli inconvenienti delle contestualizzazioni dopo l'esempio già visto relativo alla non validità della proprietà associativa della somma nell'insieme dei numeri macchina. Rimaniamo ancora nello stesso insieme numerico riprendendo l'esempio visto:

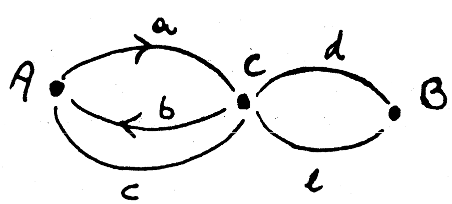
10000000	+ 0,1	=	10000000
"	+ 0,5	=	"
"	+ 0,9	=	"
"	+ 0,9999999	=	"

Questo ci dice che esistono molti numeri **indifferenti localmente** cioè per alcuni numeri; lo 0 rimane l'elemento neutro, l'indifferente universale, valido per ciascun elemento.

Torno a sottolineare che l'insieme dei numeri macchina non è l'insieme dei numeri naturali né si comporta come un sottoinsieme di esso; non è l'insieme dei numeri razionali né si comporta come un sottoinsieme di esso. E' un insieme ibrido, un miscuglio. E' concettualmente molto vicino agli insiemi d'uso (non identificabili con i naturali, né con i razionali, né con loro sottoinsiemi) individuabili nell'azione dei bambini.

Ma sorprese analoghe ci riserva anche la moltiplicazione. La proprietà commutativa a.b= b.a che vale se si tratta di numeri naturali, razionali, etc., in alcuni modelli risulta **localmente falsa**, quindi non vera in generale!

Riprendiamo, per esempio, il caso delle numero di strade possibili da A a B, e del prodotto come cardinalità del prodotto cartesiano di insiemi. E mettiamoci in questa situazione non standard, asimmetrica



$(a,d) \in S_{A,C} \times S_{C,B}$

$(a,d) \notin S_{C,B} \times S_{A,C}$

fig. 5

Nella figura 5 il numero delle coppie di AxB è uguale al numero delle coppie di BxA, ma AxB non è uguale a BxA.

Analogamente comprare tre confezioni di cinque fazzoletti non è sempre uguale a comprarne cinque di tre fazzoletti: la prima soluzione sarà più economica ma garantirà una minore qualità e viceversa per la seconda.

Contesti significativi devono potere dare spazio a tali considerazioni; è da tali occasione che nasce l'idea di numero come indicatore della quantità associata ad un insieme ovvero, come indicatore di quella particolare qualità che è la numerosità degli elementi.

Finisco gettando acqua sul fuoco.

Anche un uso accorto e didatticamente efficace della calcolatrice può fare sorgere qualche problema.

Vediamo questa proposta di lavoro contenuta nell'esempio appena visto.

Dietro di essa è nascosta l'idea che la funzione f: x ----> y

è unica sorgente di tre problemi particolari:

1. dati x ed f trovare y
2. dati y ed f trovare x
3. dati x ed y trovare f

risolubili pigiando gli stessi tasti e nello stesso ordine; la sequenza dei tasti che risolve il problema diretto (1.) è applicabile anche nei casi 2. e 3. ricorrendo però ad una strategia di tipo **indovina e verifica**.

Con l'impostazione detta vengono sicuramente sviluppate capacità algoritmiche e capacità di controllo semantico (plausibilità o anticipazione dell'ordine di grandezza dei risultati), si sviluppa quindi il senso del numero.

Vengono, però, inibite, o quanto meno non valorizzate, capacità di pensiero algebrico; intendo sottolineare che non si richiede, anzi di fatto si impedisce, di invertire le operazioni o gli operatori; la strategia **tenta, calcola e correggi** (per altro interessante) è una strategia rigidamente lineare.

Anche in questo caso lo slogan potrebbe essere **usa e getta**, o, meglio, **usa tenendo a portata di mano l'antidoto!**.

Ringrazio i Nuclei di Ricerca del CNR che mi hanno cortesemente 83 messo a disposizione i loro materiali dalla cui analisi ho tratto spunti e documentazione che sono alla base di questa relazione. Spero di aver tratteggiato un quadro sufficientemente problematizzato ma coerente con lo stato della ricerca condotta dalle varie sedi e con le scelte operate dai vari gruppi nell'impostazione dell'aggiornamento nel Piano Pluriennale.

Invito gli insegnanti che volessero ricevere materiali dai Nuclei a consultare l'amplia bibliografia generale già apparsa negli Atti del convegno UMI 1989 sull'Insegnamento della Matematica [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] Craighero G., *Per una didattica psicologica delle operazioni aritmetiche nei problemi della scuola elementare*, Giunti Barbera, Firenze, 1971.

[2] Behr M.J., Lesh R., Post T.R., Silver E.A., Rational-number concepts, in Lesh R., Landau M., *Acquisition of Mathematics concepts and processes*, Academic Press, 1983, p. 91-126.

[3] Davydov V.V., *Gli aspetti della generalizzazione nell'insegnamento*, Giunti Barbera, Firenze, 1979.

[4] Moser J.M., Alcuni aspetti delle più recenti ricerche sull'apprendimento dei concetti e delle abilità fondamentali della addizione e della sottrazione, in Artusi Chini L. (a cura di) *Numeri ed operazioni nella scuola di base*, Zanichelli, Bologna, 1985, p. 46-60.
[5] Pellerey M., *Oltre gli insiemi*, Tecnodid, 1989.
[6] Streefland L., *Search for the Roots of Ratio: some thoughts on the long term learning process (toward... a theory) Part I: Reflections on the teaching experiments*, Educational Studies in Mathematics, vol.15, n. 4, 1984, p. 327-348
[7] Vergnaud G., *Il campo concettuale delle strutture moltiplicative e i numeri razionali*, in Artusi Chini L. (a cura di) Numeri ed operazioni nella scuola di base, Zanichelli, Bologna, 1985, p. 86-121.
[8] 13° Convegno UMI sull'insegnamento della matematica, Suppl. al n.3 del N.U.M.I., marzo 1990.

PROBABILITA' E STATISTICA

Carla Caredda (Cagliari)

1. La Probabilità e la Statistica nei N.P. della scuola elementare: alcune considerazioni.

A cinque anni dalla pubblicazione dei Nuovi Programmi per la Scuola Elementare e a quattro dalla loro implementazione rileggiamo le indicazioni contenute nei programmi ministeriali relativamente al tema in oggetto:

Importanza educativa notevole va riconosciuta anche a concetti, principi e capacità connessi con la rappresentazione statistica di fatti, fenomeni e processi e con l'elaborazione di giudizi e di previsioni in condizioni di incertezza.

L'introduzione dei primi elementi di probabilità', che può trovar posto alla fine del corso elementare, ha lo scopo di preparare nel bambino un terreno intuitivo su cui si possa, in una fase successiva, fondare l'analisi razionale delle situazioni di incertezza. La classica definizione di probabilità - come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili in situazioni aleatorie simmetriche - non può essere assunta come punto di partenza, ma è piuttosto il punto di arrivo di una ben graduata attività.

Nello sviluppo di questo itinerario può realizzarsi la costruzione e l'analisi di procedimenti e di algoritmi - numerici e non numerici - anche con l'uso iniziale, ma coerente e produttivo, di opportuni strumenti di calcolo e di elaborazione delle informazioni.

Obiettivi del primo e secondo anno

- In situazioni problematiche tratte dalla vita reale e dal gioco, usare in modo significativo e coerente le espressioni: forse, è possibile, è sicuro, non so, è impossibile, ecc.

Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno

- Compiere osservazioni e rilevamenti statistici; tracciare diagrammi a barre, istogrammi, areogrammi., calcolare medie aritmetiche e percentuali, usando, se ritenuto opportuno, calcolatrici tascabili; viceversa, interpretare rappresentazioni e calcoli fatti da altri;

- confrontare in situazioni di gioco (con carte, monete, dati o altro) le probabilità dei vari eventi, mediante l'uso di rappresentazioni opportune;

- rappresentare, elencare e numerare (ad esempio mediante grafi ad albero), tutti i possibili casi in semplici situazioni combinatorie; dedurre alcune elementari valutazioni di probabilità;

I nuovi programmi mettono in rilievo che:

"L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentite".

E più avanti *"Essa tende a sviluppare, in modo specifico, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di esse".*

Con tali premesse è evidente che non potevano essere trascurate discipline quali la Probabilità e la Statistica che seppur "giovani" nella scuola di base, sono infatti comparse per la prima volta nei programmi del '79 per la scuola media, forniscono una chiave di lettura importante e spesso indispensabile, di molti aspetti della complessa realtà del mondo odierno.

C'è inoltre da tener presente l'importanza assunta dalla probabilità e dalla statistica sia nel quadro delle scienze matematiche attuali, sia in quello delle scienze naturali, economiche e sociali.

L'introduzione della Probabilità e della Statistica nella scuola elementare viene generalmente giustificata dalle motivazioni appena dette, ma trova, a mio avviso, una motivazione più profonda nell'aspetto educativo.

Infatti la molteplicità di esperienze e di situazioni cui il bambino è sottoposto, richiede da parte della scuola il massimo impegno perché egli impari a trovare soluzioni e ad accettare più soluzioni nei problemi.

Senza eccedere in forzature nell'insegnamento, è necessario che la scuola si inserisca nello sviluppo del bambino per aiutarlo a superare quelle posizioni di "egocentrismo" che gli impediscono di fare scelte ragionate e di utilizzare al meglio tutte le informazioni indispensabili per una scelta corretta.

Non è da sottovalutare l'aspetto etico-morale dell'approccio educativo alla Statistica e alla Probabilità allorquando il bambino, non solo, deve imparare a leggere in modo corretto le rappresentazioni della realtà, ma anche, quando gli verrà offerta, in futuro, l'opportunità di rappresentare lui stesso la realtà.

L'educazione al pensiero probabilistico consente, inoltre, il superamento della visione binaria delle situazioni: vero - falso, giusto - sbagliato, si - no, per far giungere ad una lettura della realtà più articolata, nel rispetto di maggiori possibilità di scelta.

La Probabilità e la Statistica offrono, quindi, un'ulteriore opportunità educativa che andrà ad integrarsi e ad interagire con tutte le altre opportunità in un quadro armonico di proposte educative presenti nei nuovi programmi.

Dopo cinque anni di lavoro sistematico sul tema, sia con gli insegnanti (per la loro formazione), sia con i bambini, alcune delle perplessità e delle preoccupazioni nate alla pubblicazione dei N.P. hanno assunto dimensioni e caratterizzazioni diverse. L'attività sperimentale ha confermato che l'obiettivo indicato per il primo e secondo anno è raggiungibile solo attraverso un itinerario ben costruito e che, nella nuova programmazione modulare, non presenti scollature tra l'educazione linguistica e quella scientifica.

Quanto alle attività ludiche menzionate nei programmi, quale strumento ottima-le per l'acquisizione di concetti probabilistici, ci pare, riconoscendone in generale la valenza pedagogica e didattica, di poter dire che il loro ruolo è assai delicato, soprattutto se finalizzato alla comprensione della definizione classica di probabilità: l'attesa dei bambini nel gioco è quella di una verifica!

2. L'attività dei nuclei di ricerca

I gruppi di ricerca che a livelli e in momenti diversi si sono occupati dei problemi legati a Probabilità e Statistica e di cui è stato possibile esaminare la documentazione prodotta sono 14.

L'indispensabile lavoro di sintesi effettuato renderà questa rassegna sull'attività svolta dai Nuclei incompleta. In ogni caso, le relazioni presentate al IV Convegno Internuclei per la scuola elementare, svoltosi lo scorso anno a Torino, possono essere un riferimento per chi volesse avere un panorama più analitico e dettagliato della situazione della ricerca in Italia sul Tema Probabilità e Statistica.

I nuclei hanno, prevalentemente, svolto una intensa attività di aggiornamento e/o formazione degli insegnanti.

Tale attività, spesso realizzata in collaborazione con gli IRRSAE delle regioni di residenza dei nuclei, anche in ottemperanza del Piano Pluriennale di Aggiornamento sui N.P. della scuola elementare, è documentata da una copiosa produzione scritta in forma di rapporti interni, di articoli su rivista specializzate e di elementi teorici e considerazioni in libri destinati all'aggiornamento degli insegnanti.

Oltre all'aggiornamento i nuclei di Bologna, Genova, Lecce, Modena, Parma, Pavia, Roma e Trieste hanno curato la stesura di alcuni progetti o itinerari di lavoro che in alcuni casi sono stati o sono in corso di sperimentazione ed in altri, come ad esempio, nel caso del Nucleo di Genova, saranno sperimentati a partire dall'anno scolastico attualmente in corso.

Alcuni nuclei come Parma, Pavia e Trieste hanno privilegiato nella stesura degli itinerari didattici e nelle relative sperimentazioni la statistica descrittiva sia "*perché non richiede necessariamente la capacità di pensare in modo aleatorio*" (Parma) sia come "*occasione per attività interdisciplinari*" (Pavia).

A questo proposito il nucleo di Pavia sottolinea la necessità che l'alunno impari ad acquisire una metodologia di indagine che attraverso la raccolta e l'elaborazione dei dati rappresenti una chiave di lettura della realtà in cui vive, per permettergli, eventualmente, di "intervenire consapevolmente su di essa".

Il nucleo di Trieste ha elaborato, nell'anno scolastico 88/89 un itinerario didattico, tuttora in via di sperimentazione.

Tale itinerario ha avuto origine da un seminario per insegnanti elementari, tenuto dal prof. A. Sgarro (Univ. di Udine), nel quale sono stati trattati elementi di crittografia con lo scopo di utilizzarli in situazioni didattiche di Statistica, fruibili anche a livello di scuola elementare. Su tale itinerario è stata tenuta una comunicazione al IV Internuclei S. E. (Torino 89).

Per quanto riguarda gli itinerari di lavoro relativi alla Probabilità è da segnalare l'attività del nucleo di Modena che ha correlato tale itinerario con attività di combinatoria e che, pur privilegiando la concezione classica, secondo le indicazioni dei N.P., ha curato con attività sporadiche anche l'approccio frequentista e soggettivista.

Tutte le attività sono state elaborate secondo la scelta metodologica dell'approccio per situazioni problematiche. Alcune di queste, inoltre, sono state studiate al fine di proporre questioni di probabilità composta a ragazzi che non avessero ancora incontrato tale argomento nel corso dei loro studi.

Quest'ultima attività è tutt'ora in corso di sperimentazione.

Il nucleo di Roma ha elaborato un progetto, esposto in una comunicazione all'incontro Internuclei S.E. (Torino 89) nel quale, dopo indispensabili analisi e sistemazioni di tipo linguistico, (I ciclo) si profila per il secondo ciclo, un itinerario che parte dalla concezione soggettivista di probabilità, mediante giochi di scommessa, passa alla probabilità in senso frequentista per arrivare alla definizione classica di probabilità.

Anche il nucleo di Genova ha messo a punto una proposta didattica per l'anno 90/91 riguardante prevalentemente la probabilità.

La proposta per il I ciclo suggerisce di partire da riflessioni di tipo linguistico sulla terminologia propria del contenuto probabilità.

Un possibile itinerario di lavoro riguarda il tempo meteorologico e le relative previsioni.

Sopratutto per quanto riguarda il primo ciclo viene data particolare attenzione ai tre momenti: SENSIBILIZZAZIONE, ACQUISIZIONE FORZATA, RIFLESSIONE VERA E PROPRIA.

Nel secondo ciclo, dopo un itinerario ragionato e graduato i bambini dovrebbero essere in grado di capire che *"da un campione di pochi dati si possono ricavare informazioni poco attendibili"*, che *"esistono due modi per fare previsioni: una a priori, rispondente alla concezione classica e una a posteriori di tipo frequentistica"*.

3. Il contributo del Nucleo di Cagliari

I programmi per la S.E. del 1985 raggruppano in un unico tema Probabilita, Statistica, Informatica, tuttavia l'attenzione del Nucleo di Cagliari, incominciata già prima della stesura definitiva dei programmi in questione, risale al 1984 e riguarda in modo specifico il tema Probabilità.

L'interesse marginale alla Statistica da parte del Nucleo è dovuto al fatto che la costruzione di tabelle relative a dati meteorologici, alla frequenza di certe merende piuttosto che di altre, alla composizione familiare relativamente alla fratria, la riproduzione e l'analisi di rappresentazioni quali diagrammi a barre, istogrammi, aerogrammi, ideogrammi era stata ampiamente inserita nella prassi educativa già prima della pubblicazione dei programmi.

Per quanto riguarda la Probabilità si è sentita l'esigenza di provvedere alla formazione degli insegnanti che, in questa area disciplinare dimostravano una preparazione superficiale ed episodica. Preparazione che si presentava insufficiente a due livelli: sul piano culturale individuale, sul piano della trasposizione didattica di questi contenuti.

Per soddisfare questa esigenza sono stati organizzati, sia nell'ambito delle attività del CRSEM, che in collaborazione con l'IRRSAE e con altre associazioni professionali culturali, numerosi seminari che hanno realizzato una preparazione a livello adulto, una informazione di tipo bibliografico e la capacità di tradurre i contenuti in termini operativo-didattici.

Il nucleo di Cagliari oltre all'intensa attività di sostegno culturale e di documentazione bibliografica in favore degli insegnanti, ha elaborato e sperimentato per cinque anni un curriculum didattico pubblicato alcuni mesi fa.

Si sottolinea inoltre che il curriculum rappresenta il risultato di approfondimenti relativi alla disciplina, e perciò l'impianto epistemologico, e di approfondimenti delle diverse teorie dell'apprendimento, oltre che dei rapporti interagenti tra i due aspetti. Nel corso dell'attività sperimentale è stata attivata una precisa e molto spesso faticosa analisi degli "atteggiamenti spontanei" dei bambini davanti a situazioni d'incertezza.

Sarebbe interessante, ma non è questa la sede, approfondire che cosa ciascuno di noi intenda per "atteggiamenti spontanei" del bambino.

Infatti chi è entrato nelle classi per attività di sperimentazione sa bene che questo atteggiamento è difficilmente individuabile, perché è sufficiente, non solo la presenza dell'estraneo, ma anche l'attribuzione di una consegna, sia pure in forma ludica, da parte della stessa insegnante, per suscitare uno stato d'attesa che pregiudica indiscutibilmente ciò che viene comunemente inteso per spontaneità.

Alcune sperimentazioni parziali e l'analisi dei relativi risultati hanno interessato l'obiettivo del primo e del secondo anno, avevano, quindi, uno stretto legame con attività di tipo logico-linguistico.

Le difficoltà riscontrate, peraltro prevedibili e previste, sono state di due ordini differenti: uno relativo all'insegnamento, l'altro all'apprendimento.

Riuscire a trovare situazioni di incertezza che siano accettate ed analizzate dai bambini per giungere ad una classificazione corretta, richiede da parte dell'insegnante, non solo una buona dose di creatività, ma anche la capacità di entrare nel mondo emotivo del bambino e quindi di conoscerlo.

Il bambino, proprio sulla base dei rapporti interattivi che stabilisce con l'insegnate dovrebbe essere in grado di superare l'impasse emozionale ed affettivo per arrivare all'analisi di situazioni aleatorie.

E stato elaborato un itinerario didattico finalizzato a realizzare in tempi più brevi quel processo di decentramento dal proprio io (che avviene generalmente in modo spontaneo e naturale verso gli otto, nove anni) che risulta indispensabile per una corretta analisi di situazioni aleatorie e prima ancora per la loro individuazione.

L'azione educativa deve consentire al bambino di utilizzare le sue esperienze personali e fare in modo che queste non siano le uniche fonti di informazione come invece accade ai bambini di sei, sette anni.

In riferimento all'attività di tipo logico-linguistico elaborata a partire dal I ciclo si sottolinea che l'uso che comunemente si fa dei termini: certo, possibile, probabile, forse, non so, impossibile, ..., non sempre nella lingua parlata è corretto ed appropriato. Ed è per questa ragione, che i bambini trovano difficile, comprendere ed utilizzare in modo significativo e coerente, tali espressioni.

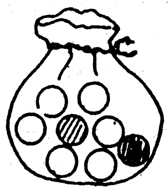
Altre attività, oggetto di sperimentazioni parziali, sono state quelle relative al confronto, prima qualitativo e poi quantitativo di valutazioni di probabilità.

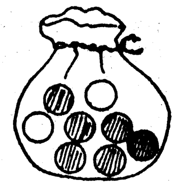
Relativamente a valutazioni di tipo qualitativo, in casi semplici da analizzare, non sono state riscontrate grosse difficoltà.

Ai bambini delle classi sottoposte a sperimentazione è stata offerta l'opportunità di vedere e di manipolare sacchetti e contenitori trasparenti con le relative palline.

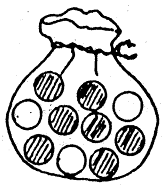
Davanti alle situazioni:

"Da quale sacchetto è più facile estrarre una pallina bianca?"



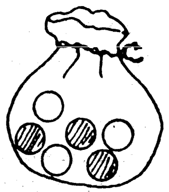


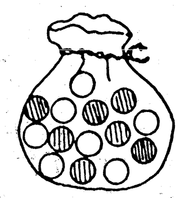
"E più facile estrarre, da questo sacchetto, una pallina bianca o una pallina nera?"



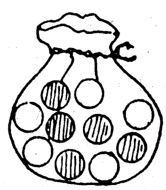
Il bambino di otto-nove anni è in grado, dopo una adeguata educazione, intesa come accettazione di situazioni aleatorie, analisi e sistemazione linguistica, competenza nella risoluzione di problemi, ..., di effettuare valutazioni corrette.

Davanti a situazioni nelle quali la costituzione dei sacchetti è la seguente:





e la domanda è ancora "Da quale sacchetto è più facile estrarre una pallina bianca?" o anche "E più facile l'estrazione di una pallina bianca o di una pallina nera, da questo sacchetto?"



Il bambino non si sente più sicuro, ha delle perplessità si convince che per rispondere "bene", cioè in modo corretto, deve indicare un solo sacchetto o un solo colore.

Una analisi accurata dei risultati di questa sperimentazione ha messo in evidenza che la difficoltà a scegliere, laddove la scelta era indifferente, era presente in bambini poco "educati" ad affrontare problemi a più soluzioni.

Non solo, ma la stessa domanda, se formulata, in un determinato modo, quasi a voler richiedere una scelta, influenza negativamente il bambino che si sente pressato verso una sola scelta.

Un discorso a parte merita la situazione simulata nelle schede di lavoro, che attivano, nel bambino una situazione emozionale ben diversa da quella suscitata dalla situazione concreta.

La situazione del "come se" è il primo passo verso la concettualizzazione astratta, che richiede perciò una migliore padronanza nell'organizzazione del pensiero.

Se si fa riferimento alla teoria piagetiana che sottolinea l'acquisizione del pensiero formale dopo gli undici anni, è ben comprensibile il disagio che, anche la semplice trasposizione su foglio di una situazione, può causare nel bambino.

La rappresentazione del sacchetto, oltre ad avere un assetto statico, cristallizza la percezione del bambino, dando luogo a scelte di tipo visivo e non razionale.

Le conoscenze in campo pedagogico e le sperimentazioni effettuate negli ultimi venti anni in campo psicologico indicano che il percorso da seguire, perché il processo d'insegnamento - apprendimento sia significativo, passa inevitabilmente attraverso l'attività ludica.

I N.P. riconoscono l'importanza del gioco nel processo d'apprendimento e mettono in evidenza il suo valore formativo anche nelle indicazioni didattiche relative ai contenuti Probabilità e Statistica.

Dopo cinque anni di attività sperimentale, che ha coinvolto ogni anno 20 insegnanti e circa 450 bambini, i risultati ottenuti invitano a considerare con particolare attenzione il ruolo del gioco nella educazione al pensiero probabilistico.

I dati emersi sottolineano ancora una volta la assoluta concordanza con le più recenti teorie psicologiche dell'apprendimento, ma denunciano l'inefficacia dello strumento "gioco" in determinate situazioni di valutazione.

Sembra appropriato fare riferimento a situazioni come: "Qual è la probabilità di ottenere 8 nel lancio di due dadi?"

Il bambino che ha ricevuto una adeguata educazione nel calcolo combinatorio ed è stato abituato ad esprimere valutazioni a priori, sa trovare con facilità la risposta.

Quando l'attività ludica viene inserita, disconferma tutte le previsioni ragionate. E non perché questa attività sia stata praticata successivamente alla valutazione a priori, quanto piuttosto perché, pur sistemata prima della previsione, non riesce a confortare la teoria (classica).

I nuovi programmi sottolineano l'opportunità di giungere alla definizione di probabilità in senso classico attraverso l'attività ludica.

Le sperimentazioni effettuate in questi anni dimostrano che la totale divergenza tra valutazione a priori e i risultati effettivamente ottenuti col gioco, disorienta il bambino.

Il lavoro nelle classi ha evidenziato che l'attività ludica dà migliori risultati in un approccio frequentista perché, in qualche misura, riesce a giustificare nella prassi ciò che la concezione classica riesce solo a teorizzare.

Questo tipo di approccio sembra in linea con il naturale processo cognitivo che prevede una fase esecutivo - manipolatoria, una fase rappresentativa per concludersi nella fase teorica.

Non ci si nascondono obiettive difficoltà legate soprattutto al numero eccessivo di prove, che bisognerebbe fare, che vengono ridotte per il calo di interesse e di motivazione, e alle condizioni, inevitabilmente diverse, in cui queste prove vengono effettuate.

Anche un approccio di tipo soggettivista, per il quale è in corso di elaborazione un itinerario didattico, rispetta il processo cognitivo.

Un solido punto di partenza ci è sembrato il gioco delle scommesse che rispetta la fase ludico - manipolatoria.

E ancora allo studio il percorso adatto al raggiungimento della seconda fase.

In ogni caso per affrontare e superare le difficoltà legate all'elaborazione del progetto, che richiede inevitabilmente tempi molto lunghi, è necessario aggiungere quelle relative alla formazione degli insegnanti, che non può essere nè episodica, nè saltuaria.

4. Elenco delle pubblicazioni dei nuclei

Si riportano le pubblicazioni, segnalate dai singoli nuclei, limitandone all'ultimo triennio, al fine di dare un panorama ampio dei "lavori in corso" in Italia, ma anche per rendere un servizio di informazione a insegnanti e/o ad altri nuclei interessati a questa problematica.

Le numerose indicazioni bibliografiche ricevute, che testimoniano l'indiscutibile impegno dei nuclei nella ricerca e nella didattica, riguardano le attività svolte in tutto l'ambito matematico.

Questo fatto mi ha costretto ad una serie di scelte che seguono criteri personali ma sicuramente giustificati.

Sono stati, infatti, chiaramente i contenuti a questa relazione (Probabilità e Statistica nella scuola elementare), oltre a tutti quelli che pur non riferendosi specificatamente a probabilità e statistica, tuttavia, per mia diretta conoscenza trattano, in qualche modo, degli argomenti in questione.

Mi scuso fin da ora se in questa esposizione non ho segnalato il lavoro di qualcuno, ma ciò è imputabile al fatto che pur conoscendo tanti lavori, mi sia concesso di non conoscerli tutti.

L'elenco è suddiviso per località in modo da rendere più agevole il reperimento dei contributi di ciascun nucleo.

BARI:

Candela, Decollanz, Di Comite, Faggiano, Galeone Guido, Pertichino, *Manuale di matematica per la scuola elementare*, Giunti e Lisciani, 1988.

BOLOGNA:

B. D'Amore, *Probabilita e Statistica*, Progetto MA.S.E. Franco Angeli ed., 1987.

M. Picotti, *La Matematica fra i 3 e gli 8 anni*, Apeiron ed., Bologna - Roma, 1988.

F. Agli, A. Martini, *Spazio, Tempo, Eventi*, Armando, Roma, 1989.

B. D'Amore, F. Speranza (a cura di), *Lezioni di Matematica per gli insegnanti della Scuola elementare*, Apeiron, Bologna - Roma, 1989.

AA. VV., *Matematica per il I ciclo*, Anicia, Roma, 1987.

M.L. Caldelli, B. D'Amore, F. Speranza, *Statistica e Probabilità nella scuola dell'infanzia*, E.M. n.3, dic. 1987.

CAGLIARI:

C. Caredda, *Su un'esperienza di educazione al pensiero in situazione di incertezza*, E.M. n.1, 1987.

C. Caredda, M. Polo, *I nuovi programmi della scuola elementare: alcune riflessioni*, E.M. n.3, 1987.

C. Caredda, M. Polo, *Insegnare matematica in prima elementare*, Giunti e Lisciani, 1987.

C. Caredda, M. Polo, *Insegnare matematica in seconda elementare*, Giunti e Lisciani, 1987.

C. Caredda, M. Polo, *Insegnare matematica in terza elementare*, Giunti e Lisciani, 1989.

C. Caredda, M. Polo, *Insegnare matematica in quarta elementare*, Giunti e Lisciani (in corso di stampa).

C. Caredda, M.R. Puxeddu, *Il gioco: ostacolo o facilitazione nella comprensione di concetti probabilistici?*, M.D. Armando ed., n. 2, 1990.

M. Boffa, C. Caredda, *Probabilità e insegnamento elementare*, S.E.I., 1990.

GENOVA:

P. Boero, *Probabilità e Statistica nella scuola elementare: alcune riflessioni in vista della formazione degli insegnanti e delle attività in classe*, IMSI vol.II n.1, 1988.

LECCE:

M. Nortier, *Calcolo combinatorio in IV elementare*, Comunicazione agli internuclei S.E. Salsomaggiore, 1990.

A. Iacomella, C. Marchini, *Riflessioni sul problema della misura*, Periodico di Matematiche (in corso di stampa).

MODENA:

P. Bandieri, *Probabilità: itinerari di lavoro*, L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate (in corso di stampa).

I. Cavani, O. Feste, C. Tioli, *Un'avventura tra probabilità e fiaba*, La scienza la matematica e il loro insegnamento (in corso di stampa).

PARMA:

P. Vighi, M. Venè, P. Avanzini, *La statistica e i mass-media*, M.D. 2, n.2, 1988.

F. Speranza, *Lezioni di Matematica per gli insegnanti di scuola materna*, Apeiron ed., Bologna, 1989.

F. Speranza, *Lezioni di matematica per gli insegnanti di scuola elementare*, Apeiron ed., Bologna, 1989.

PAVIA:

M. Ferrari, *Attività di Statistica in prima elementare*, IMSI vol.11, n.3, 1988.

M. Ferrari, *Attività di Statistica in seconda elementare. Parte Prima*, IMSI vol.11, n.9, 1988.

M. Ferrari, *Attività di Statistica in seconda elementare. Parte Seconda*, IMSI vol.11, n.11, 1988.

M. Ferrari, *Attività di Statistica in III elementare, Parte Prima*, IMSI, vol.13, n.3; Parte Terza vol.13, n.7, 1990.

M. Ferrari (a cura di), *Statistica e Probabilità*, Quaderno n.4 della collana di Formazione professionale, ed Battagin, S.Zenone degli Ezzelini, 1990.

ROMA:

C. Bernardi, L. Cannizzaro, N. Lanciano, P. Mentrasti (a cura di), *Logica Informatica, Probabilità e Statistica*, Quaderni Dell'IRRSAE Lazio, n.5, La Nuova Italia Editrice, Firenze (in corso di stampa).

TORINO:

Gallo, Barbi, Sacco, *Fare matematica con i bambini*, Atlas ed., Bergamo, 1987.

TRIESTE:

L. Balbi, M. Bran, M.C. Marceddu, L. Zucchini, *Alcuni spunti didattici offerti dalla crittografia*, Quad. did. del Dip. di Sc. Mat. Univ. Trieste, n.2, ottobre 1989.

NOTA

Chi desidera avere informazioni sulle attività e sulla produzione, in questo stesso campo, relativamente alla scuola media, può far riferimento alla relazione tenuta da A.Pesci e M.Reggiani al XIII Convegno U.M.I. sull'insegnamento della Matematica dal Tema "I programmi di matematica nella scuola media 10 anni dopo" e i cui atti sono stati pubblicati sul N.U.M.I. suppl. al n.3 Marzo 1990.

BIBLIOGRAFIA

A.A. V.V., *Il gioco. Il gioco in un mondo di simboli*, Armando, Roma.

Boffa M., Caredda C., *Probabilità e insegnamento elementare*, S.E.I., 1990.

Bruner J., Olver S., Greefield P.M., et al., *Studies in cognitive growth*, N.Y. Wiley, 1966.

Caredda C., Puxeddu M.R., *Il gioco: ostacolo o facilitazione nella comprensione di concetti probabilistici?*, M.D. Armando ed., 2, 1990.

Carlson J.S., *The development of probabilistic thinking in children: a comparison of two methods of assessment*, The journal of genetic psichology, 1970, 116, 263-269.

De Finetti B., *Teoria delle probabilità*, Vol. I, Einaudi, 1970.

Fischbein E. et al., *Initiation aux probabilités à l' école élémentaire*, Educational Studies in Mathematics 2, 1969, 16-31.

Goldberg S., *Probability judgments by preschool children: Task conditions and performance*, Child development, 37, 1966, 157-168.

Levi - Strauss, *Il pensiero selvaggio*, Il Saggiatore, 1964.

Piaget J., Inhelder B., *L'immagine mentale nel bambino*, La Nuova Italia, 1974.

Piaget J., Inhelder B., *La genèse de l' idée de hasard chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, 1951.

Yost P.A. et al., *Nonverbal probability judgments by young children*, Child development, 33, 1962, 769-780.

Notiziario della U.M.I., XIII Convegno sull'insegnamento della Matematica: I programmi della scuola media 10 anni dopo.

LO SVILUPPO DELLE CONOSCENZE E DELLE COMPETENZE MATEMATICHE NELLA SCUOLA DI BASE (MATERNA, ELEMENTARE E MEDIA): IL RUOLO DELLA SCUOLA ELEMENTARE SECONDO I PROGRAMMI VIGENTI.

Michele Pellerey (Roma)

1. Continuità e discontinuità nell'educazione matematica di base.

Due questioni sono decisamente previe a ogni discorso in merito allo sviluppo delle conoscenze e delle competenze matematiche nel corso dell'intero arco della scuola di base, intendendo con questa espressione sia la scuola materna (o come taluno preferisce scuola dell'infanzia), sia la scuola elementare, sia la scuola media. La prima concerne la questione della continuità, o della discontinuità, sia istituzionale, sia pedagogico-didattica, sia soggettiva nel processo di apprendimento. La seconda riguarda la concezione del processo di acquisizione delle conoscenze e delle competenze a scuola.

Uno dei rimproveri costanti che viene fatto alle nostre istituzioni scolastiche di base è quello di non favorire, anzi di compromettere la continuità del processo di insegnamento e, parallelamente, di quello di apprendimento, a causa della discontinuità, se non frattura, istituzionale tra i tre ordini di scuola. Gli stessi insegnanti hanno un diverso percorso di formazione iniziale e di assunzione nei tre segmenti scolastici: scuola magistrale, istituto magistrale, laurea; quest'ultimo dato di fatto, però, più che essere un problema è un esplicita, continua e testarda volontà politica di non applicare le leggi del 1974. D'altra parte, e ai nostri fini basti questa evocazione, tale situazione deriva anche da concezioni contrastanti sulla stessa natura e struttura della scuola di base e sull'articolazione che dovrebbe assumere quella dell'obbligo.

Associata alla richiesta di favorire una maggiore continuità nell'organizzazione generale e didattica della scuola sta la richiesta, spesso data per scontata, di una maggiore continuità e contatto fra il mondo della scuola e il mondo esperienziale extrascolastico. Non è né possibile, né, forse, opportuno affrontare qui la questione nella sua generalità; val la pena, tuttavia, ricordare come a questo proposito esistano nelle varie teorie della scuola posizioni assai differenziate. Tra esse, alcune affermano che il ruolo primario della scuola può essere svolto solo se si attua una certa distanziazione dall'immediato e dal vitale, per permettere una congrua riflessione critica e la costruzione di modelli e teorie che permettano di dare senso e significato all'esperienza viva della vita quotidiana. Riprenderemo parzialmente questa tematica, riscontrandone contemporaneamente sia la problematicità, sia l'urgenza.

Il mio approccio non vuole affrontare direttamente nessuna di queste problematiche, in quanto prende esclusivamente in considerazione il processo di costruzione delle conoscenze e delle competenze matematiche che dovrebbe svolgersi, anche in base agli orientamenti e ai programmi ufficiali, nell'arco della scuola di base. Vedremo come questo processo non possa essere solamente descritto assumendo come idea guida quella di continuità. In un reale processo di sviluppo della conoscenza matematica non sono pochi, né di poca importanza, invece, i momenti di discontinuità.

Una delle assunzioni di base che, comunque, dobbiamo contrastare con la massima chiarezza e decisione è quella che considera gli alunni, di qualsiasi età, delle tabulae rasae dal punto di vista matematico. Essa è largamente diffusa non solo nella redazione dei testi scolastici e dei vari materiali didattici, ma anche nelle teorie implicite che guidano l'azione didattica dei docenti. Questi hanno effettivamente l'impressione di dover ricominciare quasi sempre da capo, come se il percorso scolastico precedente non avesse prodotto nessun risultato stabile e affidabile.

Questa assunzione non solo è falsa, ma può condurre a risultati spesso drammaticamente negativi sia nel corso dell'attività didattica, sia, soprattutto, al termine di essa. In effetti è stato anche riscontrato in numerose ricerche come i bambini entrino nella scuola elementare e sviluppino durante lo stesso periodo della scolarità obbligatoria un vasto e ricco insieme di conoscenze relativo al mondo che li circonda, incluso un sistema di conoscenze matematiche di tipo informale. Questo sistema alle volte è più consistente, qualche volta contraddice quanto viene loro insegnato a scuola (Lochhead, 1990, 73).

Accanto all'insieme delle conoscenze matematiche di origine scolastica e al sistema di conoscenze di origine extrascolastica, occorre anche ricordare la concezione che, sotto l'influsso della scuola e del mondo a essa esterno, gli alunni sviluppano circa il senso e la finalità dell'insegnamento della matematica e del suo apprendimento. La ricerca francese utilizza spesso l'espressione di origine pedagogica di contratto didattico, per indicare il mutuo, e tacito, accordo circa gli obblighi reciproci del docente e degli allievi nello svilupparsi dell'azione didattica. Questi obblighi sono una derivazione del senso e delle finalità che l'insegnante attribuisce alla sua azione e delle attese che egli ha nei riguardi dei suoi allievi. Sotto l'influsso delle interazioni che gli allievi hanno con il loro insegnante, tra di loro e con l'ambiente famigliare si sviluppa in essi anche una privata interpretazione di tutto questo, dando luogo a una generale e diffusa assunzione: l'apprendimento della matematica consiste solo nell'acquisizione di un insieme di algoritmi a lungo praticati e che si debbono saper usare velocemente e senza errori (Brown & Campione, 1990, 111). Questa impostazione è spesso ancora più decisa e precisa nei confronti degli alunni che presentano difficoltà o disturbi d'apprendimento. D'altronde anche quando si mira a sviluppare la comprensione di un pezzetto di matematica, questo lo si fà in modo altrettanto spesso isolato dall'insieme e in particolare da un suo uso largo e flessibile. Si origina così quella che è stata chiamata una "conoscenza inerte".

Per questi motivi il nostro discorso prenderà l'avvio richiamando alcune delle principali conclusioni a cui è giunta la ricerca psicopedagogica e didattica nel settore. L'affermazione centrale che dovremo ben chiarire, dato l'elevato grado di plausibilità che la caratterizza, è che ogni nostra conquista conoscitiva debba necessariamente appoggiarsi, se vuol essere significativa e stabile, su quanto possediamo già come conoscenze, anche erronee e inadeguate, e come disposizioni interne in merito.

2. La possibilità e il carattere dell'acquisizione di nuove conoscenze matematiche dipende dalle conoscenze che in tale settore sono già state costruite e padroneggiate.

I bambini, anche della scuola materna o dell'infanzia, e i ragazzi, sia dell'elementare che della media, sviluppano assai presto, sotto l'influsso e della scuola e dell'ambiente di appartenenza, idee personali circa il mondo della matematica, circa i significati delle parole usate; strategie per spiegare come e perché le cose si comportano in un certo modo, per ottenere certi risultati attesi, ecc. Essi cioè costruiscono opinioni, concezioni, teorie ingenue, modelli operativi, significati, spiegazioni relative alle varie aree dell'esperienza scolastica ed extrascolastica. Questo insieme di costrutti interni serve da base per interpretare, accogliere, organizzare le nuove conoscenze, sia quando questo lavoro produce risultati positivi nella crescita del sapere e del saper fare, sia quando, a causa di costruzioni precedenti inadeguate o erronee oppure di strategie di apprendimento non coerenti, esso ha effetti negativi. Si usa riassumere questa constatazione nel dire che la possibilità di acquisire validamente e proficuamente una nuova conoscenza dipende dalla disponibilità nella propria struttura conoscitiva di valide e adeguate conoscenze e disposizioni interne di appoggio.

L'affermazione precedente va posta e compresa in una forma più decisa e precisa di quanto non suggeriscano da un punto di vista metodologico sia i programmi della scuola elementare, sia quelli della scuola media[1]. Essa d'altra parte contrasta con quanto normalmente viene sviluppato nei testi scolastici. Tra le poche forme di attenzione a questo tipo di esigenze, si possono ricordare lo sviluppo di test diagnostici di inizio scuola elementare e media e la presa in considerazione dei cosiddetti prerequisiti. Tuttavia ciò non ha modificato che in minima parte la prassi scolastica in merito.

La ricerca di questi ultimi anni ha progressivamente sempre più sottolineato, particolarmente nel campo dell'apprendimento della matematica, l'approccio che sottolinea il ruolo costruttivo di concetti, principi, procedimenti e strategie da parte degli allievi. Non è una novità sia nel campo della psicologia, che della pedagogia e della didattica: sempre si è evocata la necessità di impegnare attivamente il soggetto nell'acquisizione delle varie conoscenze e competenze. Tuttavia oggi si hanno idee più

---

1. A esempio nel testo dei programmi per la scuola media si legge: "Successiva alla scuola primaria, la scuola media si colloca all'interno del processo unitario di sviluppo della formazione, che si consegue attraverso la continuità dinamica dei contenuti e delle metodologie, nell'arco dell'istruzione obbligatoria; ...".

chiare in proposito.

L.Resnick (1989) rivisitando recentemente il concetto di costruzione della conoscenza, ne ha evidenziato alcune caratteristiche, che è stato possibile descrivere con più precisione sulla base delle indagini promosse nell'ambito della Psicologia cognitiva e che concordano con quanto precedentemente affermato. Un apprendimento efficace dipende dalle intenzioni, dall'autocontrollo, dalle elaborazioni e dalle rappresentazioni costruite da parte del singolo alunno (Ibidem, 2). Questo non vuol dire che tutta la conoscenza vada riscoperta autonomamente: è il processo di costruzione del nuovo sulla base del vecchio, cioè di quello che già si sa e si sa fare, che deve essere attivato. Le vie per far questo sono rese possibili e facilitate da un'azione attenta e intelligente da parte dell'insegnante.

Le strategie di costruzione o di incorporazione stabile e significativa delle nuove conoscenze sono condizionate da quanto, sia di conoscenze dichiarative che di conoscenze procedurali (Gagné, 1989), è già posseduto (Ausubel, 1978). L'apprendimento scolastico risulta così dipendente dalla conoscenza previa (Glaser, 1984) e questo può condizionare in modo pesante ogni intervento didattico.

D'altro canto si ha sempre più il sospetto che l'organizzazione di un processo di apprendimento valido ed efficace non possa passare per un percorso che va dall'acquisizione di elementi staccati di un contenuto al loro collegamento in una unità complessiva. Ausubel (1968) proponeva di passare da una conoscenza più globale e indifferenziata a una differenziazione progressiva, per giungere a una integrazione conciliativa. Un'acquisizione significativa e stabile della conoscenza esige una sua organizzazione interna.

Infine, occorre notare come un pezzo di conoscenza non si sviluppi nel vuoto, bensì in un contesto specifico. L'esercizio che viene attivato per fare proprio tale pezzo di conoscenza si esplica e si raffina in una situazione precisa, le cui variabili hanno una grande influenza nel modellarlo. Per questo si parla di conoscenza situata o contestualizzata (Resnick, 1989, 3).

Da quanto accennato emerge un problema metodologico assai importante: chi più sa in un certo campo, più tende a sapere; chi più ha sviluppato capacità di acquisire nuove conoscenze in un settore, più rapidamente procede sulla via del sapere e del saper fare; chi ha già acquisito una certa autonomia nel regolare le componenti cognitive, affettive e metacognitive della propria condotta in un certo contesto, più sarà in grado di esercitarsi e maturare in questa direzione.

Ne consegue un'esigenza di individualizzazione o di personalizzazione del percorso didattico, cosa più o meno facile nel contesto scolastico ordinario. Tuttavia questo è il cuore di una valida ed efficace azione di insegnamento. Occorre costituire uno spazio di apprendimento che risulti coerente con i diversi stati di conoscenza e i differenti stili di apprendimento, anche se, in vari casi, occorrerà sviluppare situazioni di conflitto o di tensione costruttiva per cambiare, integrandoli in meglio, un'organizzazione concettuale o procedurale inadeguata o uno stile poco produttivo.

Quanto sopra ricordato era già stato evidenziato, per quanto concerne l'acquisizione di specifici contenuti, da D.Ausubel che sintetizzava il tutto nel principio: "Scopri quello che l'allievo conosce già e organizza di conseguenza il tuo insegnamento"

(Ausubel, 1978, 448). Questo adattamento reciproco tra insegnanti e allievi è tanto più importante in quanto gli allievi sono in un periodo di forte evolutività come capita in genere nella scuola dell'obbligo. Alla sua realizzazione pratica concorre in maniera essenziale un'adeguata e coerente organizzazione dell'attività didattica.

3. Conoscenze adeguate e conoscenze inadeguate.

Accanto alla chiara presa di coscienza dell'importanza dei concetti e delle concezioni che gli alunni hanno già sviluppato come risultato delle loro azioni di apprendimento attivate sotto la guida e il sostegno degli insegnanti, negli anni più recenti è stata dedicata una grande attenzione anche ai concetti e alle concezioni, che risultano inadeguati o anche propriamente erronei e del loro effetto ai fini delle prestazioni scolastiche. Per concetto si intende generalmente un insieme organizzato di esperienze e/o di oggetti che possono essere indicati per mezzo di un'etichetta o di una definizione comune. Con il termine concezione ci si riferisce generalmente a un insieme di teorie, credenze, significati e spiegazioni che sono state sviluppate nei riguardi di un certo argomento, attività, disciplina, fenomeno, persona (o persone), ecc. Le concezioni che un bambino ha sviluppato nei riguardi di un argomento o di un'attività matematica possono essere in conflitto con quelle comunemente accettate nell'ambito della matematica. Di qui l'introduzione del termine misconcezioni.

In generale l'impostazione costruttivista implica che ogni attività di apprendimento debba essere impostata a partire dalle preconcezioni (dette anche teorie ingenue, concetti privati, primitive concettuali, ecc.) che l'alunno possiede nei confronti di quell'argomento. Queste preconcezioni, giuste o sbagliate, non solo non possono essere ignorate, ma non possono essere modificate usando un semplice insegnamento diretto.

All'interno di questo quadro di riferimento sono state sviluppate metodologie di ricerca, prima, e di insegnamento, poi, che cercano di risalire dai comportamenti inadeguati, dagli errori sistematici, dalle spiegazioni offerte, alle concezioni private che ciascuno possiede, per poter poi adeguatamente intervenire. Alcuni appoggiano questo tipo di indagini su teorie che indicano nelle intuizioni o nelle costruzioni precedenti la radice di ostacoli di natura epistemologica e didattica a una conquista valida e produttiva di concetti e procedure ulteriori o più complesse. Mariotti (1989) in una relazione tenuta al XIII Convegno dell'UMI-CIIM ne ha accennato efficacemente.

Ai fini del nostro discorso occorre riprendere questo tema e ricordare alcune delle più comuni preconcezioni sviluppate nel corso della scuola di base, e indicare come esse spesso implichino la necessità di promuovere un processo di discontinuizzazione, cioè di conflitto, in quanto occorre in qualche modo smontare un costrutto già operante, per favorire la produzione di un altro più adeguato o più corretto.

4. Numeri naturali, numeri razionali, numeri decimali.

E' assai frequente nelle prove sia scritte che orali ottenere risposte di questo tipo:

a) 0,10 > 0,9   6,12 > 6,5

b) Tra 1,41 e 1,42 non esiste alcun decimale.

c) 1,315 < 1,3
d) 2,3 x 2,3 = 4,9

L'introduzione dei decimali avviene nella nostra scuola elementare assai presto, normalmente nella terza classe, e spesso sulla base di riferimenti alle misure di lunghezza. La ricerca sugli atteggiamenti verso la matematica ha più volte ormai messo in risalto come sia proprio nel periodo in cui si affronta l'introduzione dei numeri decimali e delle operazioni con essi, che si manifestano i primi stati interni di disponibilità negativa verso l'attività matematica (Aiken, 1970; Pellerey, 1980).

Per inciso occorre ricordare come la conquista del numero decimale come nozione matematica vera e propria sia stata storicamente abbastanza tardiva, in quanto è verso il secolo sedicesimo che esso assume tale statuto. Prima si hanno usi parziali per indicare misure frazionarie sia presso gli egiziani che presso i greci, e usi un po' più sistematici a partire dall'introduzione del sistema di scrittura a base decimale. Probabilmente lo sviluppo del concetto di decimale è emerso in stretta connessione con quello di frazione decimale. D'altra parte era proprio dello spirito della matematica greca postpitagorica di appoggiarsi a intuizioni e significati geometrici quando si entrava nel mondo dei numeri non naturali.

La questione centrale è capire qual è la concezione inadeguata di decimale che viene spesso costruita e che è alla base degli errori sopra ricordati; quali ne sono i caratteri e le ragioni sia quanto a metodo di insegnamento, sia quanto a eventuali influenze esterne alla scuola.

Una serie di ipotesi plausibili suggerisce che le varie concezioni sviluppate possano essere più o meno direttamente riconducibili a qualcuno di questi assunti: "i decimali non sono altro che dei numeri naturali ai quali si aggiunge una coda più o meno lunga"; "esistono decimali con la coda lunga uno (decimali del primo ordine), con la coda lunga due (decimali del secondo ordine), ecc."; " i naturali possono essere considerati decimali di ordine zero"; "si possono confrontare e ordinare solo i decimali dello stesso ordine"; "moltiplicando per 10 si passa dai decimali di un ordine a decimali di un ordine superiore, dividendo per 10 si passa a decimale di un ordine inferiore, ecc."; "la parte unitaria si moltiplica per la parte unitaria, la parte decimale per la parte decimale; "in fin dei conti il numero decimale è dato formato di due parti, che si comportano come due numeri diversi"; ... .

Probabilmente entrano in gioco diverse componenti derivanti dalla costruzione didattica precedente. Mariotti (1989) ha ricordato l'influsso che un eccessivo appoggio sull'aspetto insiemistico del numero naturale può aver avuto. Un'altra origine di inadeguatezza può essere costituita da un ricorso non controllato alle misure di lunghezza. Si riscontrano in effetti alcune difficoltà concettuali assai complesse. Qual è il senso della moltiplicazione di un numero decimale per un altro decimale. Infatti, se spesso ai ragazzi appare chiaro che cosa significhi 2,43 m x 4, non altrettanto si può dire per 4 m x 3,43, e ancor meno, se ci si appoggia su questi contesti, 3,143 x 5,8.

Come uscirne? Non sembra possibile pensare di costruire un valido e produttivo concetto di numero decimale appoggiandosi solo agli anni della scuola elementare e tanto meno iniziando, senza un'adeguata preparazione previa, in terza elementare. Nei vari paesi si ritarda tale introduzione fino alla quinta classe e, talora, fino al livello della nostra prima media. Occorre studiare un processo didattico che si dipani nel tempo, affronti numerosi passaggi delicati, veri e propri conflitti cognitivi; che superi alcuni ostacoli epistemologici e didattici assai impegnativi; che giunga a una sistemazione consistente soltanto al livello della scuola media, livello scolastico che si deve fare carico di un sistematico controllo e correzione delle eventuali concezioni inadeguate o erronee ancora presenti. Suggerimenti in questa direzione sono stati offerti in questi anni dalle indagini compiute dai vari nuclei di ricerca che si cono occupati di questo problema. La pratica generalizzata tuttavia rimane assai diversa.

5. Separazione tra le conoscenze concettuali e quelle procedurali: il caso della sottrazione.

Riprendiamo qui il discorso appena accennato sulla concezione algoritmica e chiusa della matematica che sembra costituire una delle basi interpretative delle attività in cui l'alunno è coinvolto. Accanto a questa generale interpretazione del senso e delle finalità dell'apprendimento della matematica occorre ricordare una delle constatazioni più consolidate della ricerca didattica: l'acquisizione di abilità procedurali o algoritmiche rimane inestricabilmente attaccata a conoscenze di tipo procedurale, rimanendo di fatto separata dalle relative conoscenze di tipo concettuale o dichiarativo.

Il caso più studiato riguarda il meccanismo della sottrazione (Resnick, 1982; V.De Carolis - M.Pellerey, 1987). Gli alunni, nonostante abbiano a disposizione nel loro bagaglio di esperienze e di significati acquisiti tramite attività concrete e manipolazione di immagini interne un buon sistema semantico, non riescono a utilizzarlo a sostegno dello sviluppo di procedure scritte né nel saperne spiegare il senso, né nel saper comprendere la ragione dei loro errori e di conseguenza correggerli.

In altre parole, nel caso della sottrazione, anche se i bambini dispongono di numerose esperienze di manipolazione di materiali (a esempio i blocchi aritmetici) e hanno costruito il significato dei meccanismi di calcolo, quando compiono errori nell'esecuzione delle sottrazioni non sono capaci di ricorrere a questi campi semantici, ma si limitano a controllare i loro errori confrontandoli con la memorizzazione che hanno realizzato circa le procedure da seguire.

Questa separazione e incapacità di collegamento non sembra essere legata all'età, bensì al tipo di istruzione ricevuta. Occorre in ultima analisi insegnare loro strategie di controllo semantico delle procedure utilizzate. E ciò risulta possibile tramite metodologie didattiche che puntano sullo sviluppo di conoscenze di tipo strategico, rivolta a sviluppare competenze di controllo del significato e di autoregolazione nel portare a termine attività di tipo algoritmico.

Questa mancanza di controllo semantico favorisce anche la concettualizzazione di procedure che sono del tutto scorrette. Gli errori di queste sottrazioni evocano le più frequenti concezioni inadeguate:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{r} 700 \\ -\ \ 36 \\ \hline 764 \end{array} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{array}{r} 8\,000 \\ -\ \ \ 283 \\ \hline 8\,617 \end{array}$$

Queste concezioni inadeguate risultano assai persistenti e di difficile trasformazione. La pura segnalazione degli errori e anche la semplice spiegazione del loro perché non sembra modificare molto la situazione di fondo. Un iniziale miglioramento nelle prestazioni è seguito abbastanza rapidamente da un ritorno agli errori iniziali. Sembra in effetti manifestarsi uno stato di conoscenze che appoggia le prestazioni a livello superficiale su concettualizzazioni di procedure a livello profondo che si presentano assai resistenti al cambio. Le uniche strade didatticamente efficaci sembrano da una parte basate su quanto sopra ricordato circa lo sviluppo di conoscenze strategiche in merito al controllo semantico delle procedure matematiche, dall'altro sulla costruzione di situazioni didattiche che riescano a provocare conflitti cognitivi abbastanza profondi da raggiungere il livello interiore di concettualizzazione delle procedure risultanti inadeguate.

Mondo dei significati e mondo delle manipolazioni algoritmiche sembrano in genere rimanere fin dall'inizio campi separati della conoscenza matematica. Questa separazione sembra costituire la base di altre e più consistenti incapacità. Quando si introducono le lettere e le manipolazioni del calcolo letterale, le regole di calcolo sembrano venire apprese senza che parallelamente si sviluppi una consistente capacità di risalire dai simboli letterali e relative manipolazioni ai loro possibili o necessari significati e viceversa.

Qualcosa di analogo si rende ancor più evidente quando ci si avvia a introdurre i concetti di variabile e di funzione nella scuola media. I conflitti concettuali e le difficoltà poi si estendono a macchia d'olio. E' esemplare come segnale di questo insoddisfacente stato conoscitivo la sistematica confusione che si verifica quando in fisica si introduce la legge oraria del moto tra diagramma della funzione e traiettoria dell'oggetto.

Per inciso, si può ricordare come il secondo momento cruciale nello sviluppo di un atteggiamento negativo verso la matematica si presenti proprio con l'introduzione del calcolo letterale e soprattutto dell'algebra (Aiken, 1970). D'altra parte sembra sempre più evidente come la naturale curiosità conoscitiva, che nonostante tutti gli influssi socioculturali negativi manifestano ancora i bambini e i ragazzi, progressivamente si attenui e si dissolva quando le mancanze di comprensione concettuale si allargano e si moltiplicano. La motivazione a impegnarsi in qualcosa che ha perso senso e significato non può essere certo superata con minacce o ripetizioni forzate.

Dal punto vista didattico si può ricordare quanto suggerito nel suo intervento durante il precedente Convegno UMI - CIIM da Boero (1989) circa l'evitare l'introduzione di formalismi precoci e l'insegnare a controllare i formalismi che via via gli allievi imparano, attraverso il riferimento ai loro significati nei diversi contesti. Molti ricercatori d'altronde suggeriscono di evitare una costruzione degli algoritmi secondo una rigida successione di abilità prerequisite da padroneggiare prima di procedere oltre, bensì impegnare gli alunni in attività complesse e significative centrate su acquisizioni concettuali, nel corso delle quali sviluppare anche le componenti procedurali implicate (Hatano, 1982; Romberg & Carpenter, 1986).

6. Il caso dei problemi: numeri astratti e numeri concreti.

Utilizzerò in questo caso una vecchia forma linguistica per distinguere i numeri dalle misure: "numeri astratti" e "numeri concreti". Mi sembra che questo modo di esprimersi indichi bene la radice di alcune difficoltà incontrate nella risoluzione dei problemi.

E' spesso affermato sia dalla ricerca epistemologica, sia da quella didattica, sia dai programmi scolastici che lo sviluppo del pensiero matematico è caratterizzato da una maturazione nella capacità di risolvere problemi, più che dall'assorbimento di conoscenze già organizzate e formalizzate.

Non voglio entrare in quest'occasione in merito alle questioni di natura epistemologica e psicologica circa l'identità del pensiero matematico. In effetti esistono posizioni non sempre perfettamente sovrapponibili, se non talora conflittuali. Ciò è dovuto ai diversi approcci filosofici, da una parte, e alle differenti teorie e metodologie di ricerca adottate, dall'altra. Tuttavia, qualunque sia la posizione teorica assunta circa la realtà del pensiero matematico vi è un generale consenso nell'affermare che esso può essere in gran parte caratterizzato come processo di soluzione di problemi. Apprendere la matematica di conseguenza implica non solo acquisire in modo significativo e stabile un certo insieme di conoscenze, ma anche sviluppare, almeno fino a un certo punto, specifiche competenze nel risolvere problemi.

Questo orientamento, sempre presente nella storia del pensiero matematico fin dai tempi dei dialoghi platonici, fu particolarmente stimolato dalla pubblicazione nel 1945 di tre studi classici sul pensiero matematico: il volume di J.Hadarmard (1945) su Psicologia dell'invenzione nel campo matematica; lo studio di M.Wertheimer (1945) sul Pensiero produttivo, in gran parte dedicato al pensiero matematico; e l'opera di G.Polya (1945) How to solve it, tradotto in italiano con Come si risolvono i problemi. Gran parte delle attuali ricerche sui processi di soluzione dei problemi di impostazione cognitivista si rifanno più o meno direttamente a queste opere.

Se consideriamo, però, le situazioni concrete di insegnamento della matematica nella scuola di base, anche di quelle che fanno leva sull'introduzione sistematica di problemi, possiamo notare quanta difficoltà incontrino gli alunni quando passano dal mondo delle operazioni a quello della risoluzione di problemi.

Una delle cause di questa difficoltà sembra emergere da una delle caratteristiche della costruzione delle conoscenze matematiche: la loro collocazione in situazioni o contesti specifici. Nel nostro caso si può ipotizzare, e si hanno molti riscontri empirici in proposito, che i numeri naturali e decimali scritti e le relative operazioni in colonna vengano a costituire a poco a poco sistemi, o frames o schemi per dirla con gli psicologi, che hanno una loro propria specifica identità concettuale ben separata dall'uso dei numeri e delle operazioni "concrete", cioè riferiti a specifici contesti pratici.

In una parola compiere operazioni aritmetiche su numeri "astratti" appartiene a un livello diverso di strutturazione concettuale, rispetto alle stesse operazioni compiute su numeri "concreti". In quest'ultimo caso, infatti, entrano in gioco conoscenze relative al mondo reale e alle transazioni che in esso si compiono. Una consumata esperienza nel trattare liquidi (vino, olio, acque, ecc.) e nella compravendita rende capaci di comprendere il senso dei problemi che ne derivano e di trovare le strategie risolutive più adeguate, non tanto perché si sanno fare meglio le operazioni aritmetiche, ma perché si ha più famigliarità con le situazioni concrete e con le forme e strategie più funzionali per dominarle.

Si ha in questo caso una situazione inversa rispetto a quella esposta nel paragrafo precedente. L'organizzazione della conoscenza di un pezzo di questo mondo e dei problemi di natura matematica in esso presenti facilita l'individuazione di strategie e procedure di calcolo. Questo campo di conoscenze sembra però rimanere separato da quello relativo alle operazioni aritmetiche scritte, campo d'altronde, come sopra ricordato, già attraversato da conflitti, inadeguatezze, separazioni. Riscontri interessanti rispetto a questa divaricazione di piani si sono avuti con le ricerche sulle cosiddette conoscenze matematiche informali folkloristicamente denominate "la matematica della strada", in quanto in gran parte svolte prendendo in considerazione le attività commerciali dei ragazzi di strada del Brasile (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985; Saxe, 1988).

A conferma di questa separazione si hanno i celebri risultati della Terza Valutazione Nazionale del Progresso Educativo svoltasi nel 1983 negli Stati Uniti. Si trattava di un campione stratificato di 45000 soggetti. Ecco un celebre item e relativi risultati:
a) "Un autobus militare porta 36 soldati. Se ci sono 1128 soldati da trasportare al loro campo di addestramento, quanti autobus sono necessari?"

Il 29% circa ha risposto "31 con il resto di 12"; solo il 23% ha dato la risposta esatta "32 autobus".

Il 70% ha eseguito esattamente la divisione, inquadrando il tutto fuori da un contesto di vita reale. Effetto di un tacito contratto didattico?

Queste constatazioni permettono anche di ipotizzare dove risiedano le difficoltà che incontrano sia i ragazzi della scuola media, sia quelli del biennio nella risoluzione dei problemi di fisica o di chimica.

Possiamo qui esemplificare la questione riprendendo un discorso avviato nel XIII Convegno UMI-CIIM da Mariotti (1989). Sembra ormai abbastanza condivisa non solo la constatazione della difficoltà che la costruzione del concetto di rapporto offre ai ragazzi della scuola elementare, e spesso anche della scuola media, ma anche un certo numero di ragioni che la spiegano. Esiste, infatti, una complessità concettuale di natura epistemologica, che esige una transizione o trasformazione cognitiva abbastanza profonda, tale da implicare un'intervento esplicito da parte dell'insegnante, intervento che non può non distendersi nel tempo, superando il confine tra scuola elementare e scuola media. D'altra parte anche da un punto di vista psicologico sono stati evidenziati non pochi ostacoli che la costruzione normalmente portata a termine per i vari insiemi numerici pone allo sviluppo, presa di coscienza e uso significativo del concetto di rapporto, concetto che è alla base degli stessi concetti di decimale, di frazione, di percentuale, di numeri indice, ecc.

Molti dei problemi che vengono proposti già agli alunni della scuola elementare implicano in effetti l'uso del concetto di rapporto e di proporzionalità tra grandezze, qualche volta proponendo anche esplicitamente la stessa rappresentazione frazionaria del rapporto considerato.

"Se un litro di benzina costa 2 000 lire, quanto verranno a costare 15 litri?".

"Se una vettura consuma circa un litro di benzina ogni 15 km, quanti litri avrà consumato dopo 135 km?".

Un bambino, o un ragazzo, che ha già famigliarità con l'uso della vettura di casa, il consumo e il costo della benzina ed ha partecipato a discussioni e calcoli in merito, saprà certamente orientarsi a trovare una soluzione più agevolmente di chi non è famigliare con situazioni di questo tipo. Questo però non implica che sia stata costruita meglio o che venga di fatto utilizzata la relazione di proporzionalità diretta e il concetto di rapporto costante implicato. Esistono, infatti, strategie risolutive di tipo additivo che consentono di raggiungere agevolmente il risultato, anche usando le dita della mano.

Van Hiele (1986) propone come approccio sistematico allo sviluppo e alla presa di coscienza del concetto di rapporto e di proporzionalità un percorso a lungo termine che valorizza l'uso di matrici.

Il problema precedente andrebbe così inizialmente rappresentato mediante matrici di questo tipo:

litri	1	15
lire	2 000	?

oppure

litri	lire
1	2 000
15	?

L'aggancio all'esperienza reale è facilmente offerto da una qualsiasi pompa di benzina che offre la possibilità di controllare, oltre al prezzo unitario della benzina, anche un controllo del crescere del costo del carburante all'aumentare della quantità di benzina introdotta nel serbatoio della vettura.

L'andamento per quantità in litri interi è facilmente rappresentabile:

litri	1	2	3	4	5	...
lire	2 000	4 000	6 000	8 000	10 000	.....

La tabella può facilmente essere estesa a quantità frazionarie o decimali per la quantità espressa in litri. Le lire purtroppo non consentono, almeno per ora, rappresentazioni in numeri decimali.

A esempio il problema riportato da Mariotti (1989) può essere così più facilmente rappresentato, concettualizzato il suo rapporto costante e risolto:

"Una ricetta per dolci prevede 4 uova per 6 hg di farina. Per fare una torta più grande, ho pensato di mettere 5 uova. Quanta farina dovrò usare?"

Uova	1	2	3	4	5	6
Farina hg	1,5	3	4,5	6	7,5	8

La questione si pone quando si arriva nella scuola media a introdurre le proporzioni. La tradizione è abbastanza legata all'uso di espressioni sotto forma di divisioni: a:b = c:d, oppure a/b = c/d. Queste forme portano presto ad alcune difficoltà di calcolo e di comprensione. La suggestione che viene da Van Hiele è di procedere invece nella direzione che valorizza l'uso di matrici di proporzionalità in maniera più sistematica e cosciente, considerando anche semplici operazioni su di esse. Problemi di questo tipo "Due numeri stanno tra loro come 3 sta a 8 e la loro somma è 34. Quali sono i due numeri?" possono essere risolti facilmente per questa strada.

La rappresentazione matriciale è:

$$\begin{matrix} 3 & 8 \\ x & y \end{matrix}$$

La soluzione si trova operando su questa matrice, conoscendo alcune proprietà generali:

$$\begin{matrix} 3 & 8 & 11 \\ x & y & 34 \end{matrix}$$

$$x = (3 \times 34)/11 \qquad y = (8 \times 34)/11$$

La questione didattica è: l'uso sistematico di rappresentazioni e manipolazioni matriciali facilita la comprensione e la risoluzione di problemi di proporzionalità quando si ha a che fare con numeri "concreti"? C'è un certo orientamento favorevole in questa direzione da parte della scuola olandese.

Nella nostra tradizione, invece, le matrici sono praticamente escluse a ogni livello dai programmi scolastici. Esse appaiono invece assai utili anche nello studio delle trasformazioni geometriche, oltre che, com'è ovvio, nel calcolo. La questione si può riallacciare al problema dell'introduzione della geometria orientata e in particolare dei vettori e degli spazi vettoriali. Su questo punto i nostri programmi sono radicalmente differenti da quelli di gran parte della Comunità Europea, il che, a esempio, pone non poche difficoltà ai Licei internazionali. D'altra parte anche nell'introduzione dell'informatica non si può sottovalutare l'importanza della diffusione delle cosiddette tabelle elettroniche.

Diverso sembra essere il caso dei problemi classici di geometria. In essi si ha una certa famigliarità con le figure geometriche da trattare, anche se si manifestano parallelamente al caso aritmetico concettualizzazioni inadeguate o anche completamente erronee. Tra queste si può ricordare la grande confusione che ancora a livello di scuola secondaria superiore si riscontra in merito al concetto di grandezza e di grandezza misurabile.

Se i problemi geometrici sono solo relativi alla ricerca della misura di lunghezze, aree o volumi, entrano in gioco le già ricordate difficoltà di collegare formule espresse letteralmente, e relative manipolazioni, con gli elementi geometrici a cui le lettere fanno riferimento, nonché le spesso collegate difficoltà di concettualizzazione legate ai numeri decimali. Se invece si tratta di risoluzione di problemi che implicano l'applicazione di principi di natura geometrica vera e propria, qui entra in campo lo sviluppo di autentiche capacità euristiche, che a mio giudizio dipendono in gran parte dalla famigliarità da un lato con le figure e le relative proprietà da trattare e dall'altro con una organizzazione dei tipi di problemi per classi di analogia.

Tuttavia qui entrano in gioco questioni sia teoriche, che empiriche assai complesse e non è qui il momento di affrontare più dettagliatamente la questione. Studiare sperimentalmente come si sviluppa la competenza nella soluzione di problemi dal livello del principiante a quello dell'esperto è certamente un'impresa affascinante, che sul piano dell'indagine internazionale sta dando non pochi risultati interessanti.

7. Il quadro di riferimento trovato.

La ricerca di questi ultimi anni ha evidenziato così una duplice distinzione che può aiutare a riassumere alcune delle precedenti affermazioni e a vedere le questioni che dal nostro punto di vista solleva una continuità (e discontinuità) educativa matematica nella scuola di base.

La prima distinzione riguarda i processi di acquisizione delle conoscenze e i relativi risultati in termini di conoscenze stabili e significative. Essi vengono genericamente distinti in formali e informali, a seconda che emergano nel contesto scolastico o in quello extrascolastico. Da questo punto di vista, fatte alcune nobili eccezioni, è ancora assai debole l'attenzione in Italia per uno studio sistematico non solo dei due processi visti in se stessi, ma soprattutto nella loro, se esiste e fin dove esiste, interazione o separazione.

Nei programmi ufficiali, tuttavia, si insiste spesso sulla necessità di tenere presenti le situazioni di vita e le esperienze prescolastiche ed extrascolastiche degli alunni. A esempio nei programmi della scuola elementare si usa spesso l'espressione "in situazioni problematiche tratte dalla vita reale e dal gioco..."; per la scuola media si dice in generale: "... si farà ricorso ad osservazioni, esperimenti, problemi tratti da situazioni concrete. Verrà dato ampio spazio all'attività di matematizzazione intesa come interpretazione matematica della realtà nei suoi vari aspetti (naturali, tecnologici, economici, linguistici, ...) con la diretta partecipazione degli allievi."

L'impressione che si può trarre dall'attività svolta nelle scuole è che si fa leva abbastanza spesso su evocazioni e riferimenti alla realtà concreta, ma da un lato non si tiene conto di che cosa il bambino o il ragazzo abbia interiorizzato dalle sue esperienze reali sia scolastiche, sia extrascolastiche e come questo possa fare riferimento alla costruzione delle conoscenze matematiche, da un altro lato non viene valorizzato quanto insegnato per migliorare la sua capacità interpretativa delle vicende in cui è coinvolto e per operare più coerentemente in esse. La questione è: è questa un reale difetto dell'insegnamento o segnala una tensione o conflitto mai veramente superabile?

La seconda distinzione concerne le componenti conoscitive di tipo concettuale, talvolta dette dichiarative, e quelle di natura procedurale. La distinzione è risultata assai feconda nella ricerca soprattutto quando le due componenti sono state studiate non tanto e solo nell'isolamento ma nella reciproca influenza. Classico è il caso dello studio del ruolo delle conoscenze di tipo concettuale nell'attivazione delle strategie di soluzione dei problemi, oppure sulla natura operativa, e procedurale, di molte definizioni matematiche.

Sotto l'etichetta di conoscenze procedurali, o abilità matematiche, occorre, però, collocare anche le cosiddette conoscenze strategiche e le competenze di natura metacognitiva. Cioè il sapere quando, come e perché usare certe conoscenze o certi procedimenti. Probabilmente sono queste ultime le competenze che possono concorrere in maniera determinante al superamento del diaframma sopra ricordato tra i due campi di conoscenza.

Ne deriva una matrice di questo tipo:

	conoscenze formali	conoscenze informali
Conoscenze concettuali		
Conoscenze procedurali		

Queste distinzioni vanno prese evidentemente con le dovute cautele, poiché gran parte dei concetti matematici possono essere considerati sotto un profilo operatorio, cioè attraverso l'insieme delle operazioni intellettuali (e talora anche pratiche) che li generano.

La questione didattica fondamentale che deriva da questo quadro va evidentemente nella direzione di come sia possibile comporre in un quadro coerente, valido e funzionale i quattro segmenti del sapere matematico che ne emergono, evitando compartimenti stagno e divaricazioni pericolose che vanno nella direzione di abilità apprese senza comprenderne il senso o in quella di acquisizione di concetti e quadri concettuali che non si sa poi come utilizzare; nella prospettiva di un conflitto non costruttivo, bensì distruttivo, tra un saper fare di ordine pratico privo di giustificazioni e una teoria chiusa in se stessa.

8. Il ruolo della scuola elementare.

La scuola elementare, almeno quella che è stata delineata nei programmi di matematica, gioca in questo contesto un ruolo centrale, ruolo qualche volta abbastanza ben enucleato nei suoi termini generali nei vari documenti programmatici (scuola materna, elementare e media), ma in genere assai poco per quanto concerne i campi concettuali più specifici. E' un ruolo di cerniera tra quanto emerso e concettualizzato sotto l'influsso delle esperienze prescolastiche ed extrascolastiche e la prima sistemazione generale e relativo controllo concettuale, che può essere svolto a un suo livello dalla scuola media, ma a un ben diverso livello dal biennio.

La scuola materna sembra emergere da tali documenti come il luogo di un risveglio e prima sollecitazione all'utilizzazione di alcune operazioni cognitive elementari di base; ma anche come lo spazio nel quale possono essere sperimentate e interiorizzate un insieme di attività esplorative, ludiche, di costruzione e di interscambio linguistico, manipolative, di gruppo, ecc., sulle quali fondare il lavoro didattico della scuola elementare.

In quest'ultimo segmento scolastico, invece, si gettano le basi di un'autentica prima intuizione geometrica, cioè di una identificazione delle forme geometriche, delle loro proprietà, della loro collocazione nello spazio, del loro movimento in esso, della loro trasformazione. E' il momento probabilmente privilegiato di un rapporto significativo e costante con la realtà extrascolastica, anche se esso esige momenti di riflessione e di astrazione che allontanano temporaneamente da essa, per ritornarvi con occhi più acuti, attenti e penetranti.

E' il momento dell'introduzione al mondo numerico e al suo ruolo nell'affrontare e risolvere questioni e problemi posti dalla vita quotidiana. L'aritmetica non deve essere però solo strumento di calcolo, ma vero e proprio processo di costruzione di modelli capaci di risolvere intere classi di problemi, modelli operativi compresi nella loro struttura e valenza applicativa. La questione irrisolta dal mio punto di vista è se debba essere privilegiata la costruzione di classi di problemi con analoga struttura matematica o classi di problemi rivolti a affrontare e controllare porzioni di conoscenza della realtà, oppure si debba a poco a poco porre le basi e fornire i supporti per una valida interazione tra di esse. Qui si colloca anche la questione connessa con il formalismo proprio della matematica, del come esso debba essere preso in considerazione al livello di scuola elementare, dei vantaggi e pericoli che esso inevitabilmente comporta, ma per questo rimando al contributo di Lolli (1989) al XII Convegno dell'UMI-CIIM.

Connesso in qualche modo con l'ultima questione accennata è il ruolo dell'insegnamento della logica, probabilità e informatica. Si tratta di considerarli, nell'interpretazione che a mio avviso va data ai programmi ministeriali, strumenti per pensare ai quali il bambino deve venire iniziato, per risvegliare in esso il bisogno di controllare quanto afferma, di argomentare in modo stringente; la capacità di decidere in condizioni di incertezza, di progettare e controllare procedure e strutture conoscitive; ecc.

La scuola elementare è certo la base di quanto verrà poi fatto nella scuola media, ma non il presupposto da dare per scontato, o essere ignorato o condannato: sono i cinque anni nei quali il bambino si apre alle conoscenze, al significato e a una iniziale concezione della matematica e del suo apprendimento. Il suo ruolo è determinante. Ma la scuola media deve controllare, completare, correggere, sistemare, affinare, ecc. questa base di riferimento.

BIBLIOGRAFIA

Aiken R.A., *Attitudes toward Mathematics*, Review of Educational Research, 4, 1970, 551-596.

Ausubel D.P., *Educazione e processi cognitivi*, F. Angeli, Milano, 1978.

Bocro P., *Allievi con difficoltà di apprendimento: che fare*, Notiziario della Unione Matematica Italiana, 3 Suppl., 1990, 63-80.

Brown A.L., Campione J.C., *Interactive Learning Environments and the Teaching of Science and Mathematics*, in: M.Gardner et alii (Eds.), *Toward a Scientific Practice of Science Education*, Hillasdale, L.Erlbaum, 1990, 111-139.

Carraher T.N., Carraher D., Schliemann A.D., *Mathematics in the streets and in schools*, British Journal of Developmental Psychology, 1, 1985, 21-29.
De Carolis V., Pellerey M., *Comportamenti algoritmici inadeguati nell'esecuzione di sottrazioni aritmetiche: un'analisi psicologica*, Orientamenti Pedagogici, 4, 1987, 643-666.
Gagnè E., *Psicologia cognitiva e apprendimento scolastico*, SEI, Torino, 1989.
Glaser R., *Education and Thinking: the Role of Knowledge*, American Psychologist, 39, 1984, 93-104.
Hatano G., *Learning to add and subtract: A Japanese perspective*, in Carpenter T., Moser J., Romberg T. (Eds.), *Learning to add and subtract: A cognitive perspective*, L.Erlbaum, Hillsdale, 1982.
Lochhead J., *Toward a Scientific Practice of Science Education*, in: M.Gardner et alii (Eds.), *Toward a Scientific Practice of Science Education*, L.Erlbaum, Hillsdale, 1990, 69-85.
Lolli G., *Matematica e ragionamento*, Notiziario della Unione Matematica Italiana, 7 Suppl., 1989, 49-77.
Mariotti M.A., *Il ruolo dell'aritmetica*, Notiziario della Unione Matematica Italiana, 3 Suppl., 1990, 15-29.
Pellerey M., *Nascita e sviluppo di un atteggiamento negativo verso la matematica: cause e rimedi*, in C.Cornoldi e A.Pra Baldi (cura di), *Perché il bambino non riesce in matematica?*, Erip., Pordenone, 1980.
Resnick L.B., *Syntax and Semantics in Learning to Subtract*, in T.P. Carpenter, J.M. Moser, T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, L.Erlbaum, Hillsdale, 1982, 137-156.
Resnick L.B., *Knowing, Learning, and Instruction, Essays in Honor of Robert Glaser*, L.Erlbaum, Hillsdale, 1989.
Romberg T.A., Carpenter T.P., *Research on Teaching and Learning Mathematics: Two disciplines of scientific inquiry*, in M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teching*, MacMillan, 3rd Ed., New York, 1986.
Saxe G.B., *Candy selling and math learning*, Educational Researcher, 6, 1988, 14-21.
Van Hiele P.M., *Structure and insight*, A theory of mathematics education, Academic Press, Orlando, 1986.

COMUNICAZIONI

SULLA FORMAZIONE IN SERVIZIO DEGLI INSEGNANTI ELEMENTARI

Francesco Speranza (Università di Parma)

Ci si propone di fare il punto sull'argomento, sopratutto in relazione al Piuano Pluriennale di Aggiornamento.

Si approfondiranno alcuni problemi relativi ai contenuti dei corsi e alle loro connessioni con i nuovi programmi: si affronteranno pure questioni relative all'uso delle nuove tecnologie (sopratutto audiovisive).

PROBLEMI INERENTI A BAMBINI PORTATORI DI HANDICAP

Margherita Vene' Michelotti, Paola Vighi (Università di Parma)

Da tempo siamo a contatto con insegnanti di sostegno, e recentemente ci siamo inseriti in due corsi per la formazione di questi ultimi. Occorre affrontare per rispondere alle esigenze di quei bambini, problemi del tutto nuovi, ai quali la "normale" preparazione degli insegnanti è scarsamente in grado di far fronte.

Forniamo esempi del lavoro svolto finora.

SU UN ADATTAMENTO DEL "MINICOMPUTER" DI PAPY AL SISTEMA DI SCRITTURA BRAILLE PER NON VEDENTI

Domenico Lenzi (Università di Lecce)

Nel convegno nazionale dei Nuclei di Ricerca Didattica in matematica, svoltosi a L'Aquila, veniva lanciato un accorato appello affinché si tenesse in seria considerazione il problema della didattica ai non vedenti. In questa comunicazione, raccogliendo quella pressante raccomandazione, si traccia un itinerario che porta in modo del tutto naturale ed immediato a trasferire in "Braille" la rappresentazione delle cifre numeriche fatta mediante la placca ("minicomputer") di Georges Papy. Ciò permette, eventualmente nell'ambito di un'attività rivolta all'esame di linguaggi non verbali, un primo approccio all'alfabeto Braille anche in una classe normale in cui siano inseriti discenti con problemi di vista, attenuando molte delle difficoltà di ordine psicologico che nascono sopratutto in chi, pur destinato alla cecità, è portato a rifiutare un tipo di didattica differenziata che lo faccia sentire diverso prima del tempo.

SVILUPPO DELLE ABILITA' DI CALCOLO IN BAMBINI CON DIFFICOLTA' DI APPRENDIMENTO

Rosa Bocchieri (Scuola elementare G.B. Grassi, Fiumicino)

Quando l'insegnante si trova di fronte al bambino con difficoltà di apprendimento di solito opera con una scelta tra le alternative seguenti:

- limitare il processo di apprendimento-insegnamento sull'acquisizione di tecniche (lettura e scrittura strumentale, abilità di calcolo) privilegiando un approccio di tipo algoritmico;
- promuovere, attraverso la manipolazione, esperienze di tipo diverso, senza curarsi eccessivamente dell'acquisizione di abilita' personali.

Meno diffuso è l'atteggiamento di chi:

- ritiene opportuno recuperare (per quanto è possibile) le difficoltà di apprendimento usando materiali e strategie messe in atto con bambini normodotati;
- cerca di costruire modelli o schemi mentali senza i quali qualsiasi apprendimento rischia di diventare episodico e labile.

In molti casi per sviluppare soddisfacenti abilità di calcolo è necessario:

- condurre un'analisi del processo di apprendimento di un concetto o di una tecnica per riconoscerne le singole componenti (anche non strettamente numeriche);
- valutare l'incidenza di difficoltà precedentemente accertate.

Consideriamo in particolare il seguente esempio:
l'apprendimento della tecnica relativa all'addizione in colonna.

Si può scomporre l'apprendimento di una pur semplice addizione in colonna nei seguenti elementi:
"incolonnamento", "calcolo", "cambio"; ciascuno di questi elementi diventa quindi l'oggetto di attivita' opportunamente graduate.

L'acquisizione delle abilità relative agli elementi citati è d'altro canto:

- subordinata all'acquisizione di altre abilità (la scrittura posizionale del numero, il concetto di valore, ...);
- strettamente collegata allo sviluppo di alcune capacità di base quali l'ordinamento e la classificazione, l'orientamento spaziale e temporale, ...

Per quanto riguarda la costruzione di percorsi didattici adeguati ai diversi ritmi di apprendimento di bambini in difficoltà, è necessario:

- utilizzare vari materiali, concreti e strutturati, privilegiando quelli di uso quotidiano;
- considerare la manipolazione del materiale come una fase non accessoria del processo di apprendimento;
- associare alle attività precedenti rappresentazioni grafiche di tipo diverso passando da rappresentazioni iconografiche a rappresentazioni simboliche;
- incoraggiare e verificare l'uso delle conoscenze e delle capacità acquisite in ambiti di esperienza diversi.

Alcuni degli aspetti metodologici citati sono usuali per bambini normodotati; l'esperienza condotta sottolinea l'opportunità di riproporli anche con bambini in difficoltà sia pure in tempi diversi e con maggiore attenzione alle singole fasi.

ATTIVITA' GEOMETRICHE TRA NUOVI PROGRAMMI E MATERIALE MONTESSORI

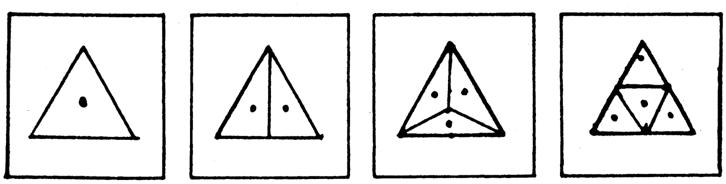
Anna Allerand, Laura Cerquetti (Scuola Montessori, VII Circolo, Roma)

Nella comunicazione si intende sottolineare come l'utilizzazione di materiale strutturato centri il processo di apprendimento sulla autonoma attività del bambino mettendo a sua disposizione un ambiente artificiale nel quale siano possibile esperienze concrete rispetto ai fondamentali processi matematici. Attraverso l'interazione diretta bambino-materiale e la manipolazione concreta, viene stimolata la capacità di cogliere quello che non varia in situazioni percettivamente molto diverse, favorendo i processi di organizzazione del pensiero e di astrazione.

L'utilizzazione di materiale strutturato permette di rispettare i tempi di lavoro dei singoli bambini e quindi di realizzare una reale individualizzazione dell'insegnamento.

Nel corso della relazione sono stati presentati i materiali montessoriani del quadrati e del triangolo divisi. Si tratta di due serie di piastrelle contenenti incastri di ferro estraibili. La serie del quadrato è formata da nove piastrelle che hanno come fondo tutte un quadrato di dieci centimetri di lato. Una delle piastrelle contiene un quadrato intero, le altre contengono il quadrato diviso in due, quattro, otto, sedici pezzi uguali dalle diagonali e dalle mediane.

Analogamente il triangolo diviso è formato da quattro piastrelle che hanno come fondo un triangolo equilatero di dieci centimetri di lato. I pezzi di incastro sono formati da un triangolo equilatero intero, uno diviso in due, uno in tre ed uno in quattro pezzi uguali.



Si è parlato anche del materiale dei triangoli costruttori, formato da scatole contenenti triangoli di legno di varia misura.

Numerosi sono i possibili spunti per utilizzare questi materiali in tipiche attività di manipolazione, costruzione e rappresentazione previste dal Nuovi Programmi: riconoscimento e classificazione di figure, equivalenza tra figure, osservazioni sugli angoli e sulle trasformazioni geometriche.

APPENDICE

Qui di seguito è riportato un aggiornamento, non completo, dei lavori pubblicati dai Nuclei di Ricerca Didattica ed elencati in Appendice al NUMI, suppl.n.3, 1990.

Abbreviazioni

AP : Apeiron, Bologna-Roma.
AR : Archimede, ed. Le Monnier, Firenze.
CE : Computer and education, Pergamon Press Ltd, Great Britain.
DS : Didattica delle scienze, ed. La Scuola, Brescia.
ED : L'educatore, Milano.
EM : L'educazione matematica, Cagliari.
GA : Giornale di astronomia.
IM : L'insegnamento della matematica, Paderno del Grappa.
IMSI : L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.
IN : Insegnare.
MD : La matematica e la sua didattica, A.Armando Ed., Roma.
NS : Nuova secondaria, ed. La Scuola, Brescia.
NUMI: Notiziario U.M.I. .
PM : Periodico di matematiche.
PSP : Problemi e situazioni problematiche.
RD : Ricerche didattiche.
RDM : Ricerche di didattica della matematica, C.N.R., Torino.
RS : Riforma della scuola, Editori Riuniti, Roma.
SC : Le Scienze.
SD : Scuola e didattica, ed. La Scuola, Brescia.
SIM : Scuola italiana moderna, ed. La Scuola, Brescia.
SMI : Le scienze, la matematica e il loro insegnamento. ed. Le Monnier, Firenze
SV : Scuola viva, editrice S.E.I. .
TESD : Temi di epistemologia, scienze e didattica delle scienze, ed. Le Monnier, Firenze.
VS : La vita scolastica, Giunti, Firenze.

Nucleo di Ricerca Didattica di BOLOGNA

Indirizzare le richieste di copie a: Prof. Bruno D'Amore, Dipartimento di Matematica, Università, piazza di Porta San Donato 5, 40127 Bologna.

Plazzi P., *Una applicazione del calcolo all'economia: la competizione oligopolistica*, MD, III, n.3, 1988.

Plazzi P., *Matematica e vita sociale: il teorema di Arrow*, MD, III, n.1, 1989.
D'Amore B., Plazzi P., *La didattica dei connettivi logici: alcune considerazioni*, IMSI, aprile 1990.
D'Amore B., Speranza F. (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica. Spunti didattici*, vol. I, Armando, Roma, 1989.
D'Amore B., *Tra lingua e matematica: esistono basi epistemologiche del rigore?*, MD, II, n.3, 1988.
D'Amore B., *Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia, dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore*, ED, n.4, 1989; ED, n.14/15, 1990.
D'Amore B., *La formalizzazione logica e matematica*, in: AA.VV., *Umanesimo e società in trasformazione*, I Quaderni di cultura del Liceo Ginnasio "L.Galvani", numero speciale del CXXV, Bologna, 1989.
Caldelli M.L., D'Amore B., Giovannoni L., Massa C., Oliva P., Vandelli T., *Proposte di attività informatiche nella scuola media*, LA Nuova Italia, Firenze, 1988.
Caldelli M.L., Oliva P., *Proposta di programma di informatica per la scuola media inferiore in continuità con i programmi della scuola elementare ed il programma sperimetale di matematica per il biennio della scuola superiore*, Scuola & Informatica, La Tartaruga, Roma, n.6, 1989.
Oliva P., *Matematica e Logo: un curriculum per la scuola media inferiore*, MD, IV, n.1, 1990.
Morini E., *Algebra e informatica: il nuovo mondo non è poi tanto distante dal vecchio*, MD, IV, n.1, 1990.
Oliva P., *Fibonacci, la ricorsività, il Logo e altri linguaggi*, Scuola & Informatica, La Tartaruga, Roma, n.1, 1988.
Oliva P., *La notazione di Fibonacci e la risoluzione di alcuni giochi del tipo del Nim: i relativi programmi in Logo*, MD, II, n.2, 1988.
Massa C., Plazzi P., *Le equazioni diofanteee di primo grado: una scheda didattica*, MD, III, n.2, 1989.
Ricci R., *Come scrivere procedimenti: analisi delle risoluzioni di un banale problema*, MD, IV, n.3, 1990 (in corso di stampa).
Ricci R., *Strutture matematiche e Prolog*, MD, V, n.1, 1991 (in corso di stampa).
Ricci R., *Insiemi e Prolog*, MD, V, n.1, 1991 (in corso di stampa).
Ricci R., *Numeri naturali, liste e Prolog*, accettato su MD.
Ricci R., *Rompicapo logici e Prolog*, accettato su MD.
Ricci R., *Una introduzione alle strutture linguistiche di pensiero ricorsivo*, accettato su MD.
Oliva P., *Il Logo ed il simbolismo BNF (generazione casuale di espressioni ed equazioni)*, accettao su MD.
Calò Carducci C., *Topologia*, Faenza ed., Faenza, 1990.
Oliva P., *Isoperimetria ed equiestensione*, Faenza ed., Faenza, 1990.
Picotti M., *Vettori*, Faenza ed., Faenza, 1990.

Nucleo di Ricerca Didattica di FIRENZE

Indirizzare le richieste di copie a: Nucleo di Ricerca Didattica (Prof. M.G. Campedelli), c/o Istituto matematico U.Dini, viale Morgagni 67a, 50134 Firenze.

Bianchini S., Velardi R., *Problemi indeterminati (I parte)*, NS, n.6, 1990.

Bianchini S., Velardi R., *Dalla conoscenza dei contenuti alla rielaborazione e sistemazione della matematica: Alkuwarizmi*, SD, n.12, 1990.

Bianchini S., Velardi R., *Dalla conoscenza dei contenuti alla rielaborazione e sistemazione della matematica: Leonardo Pisano e Maria Grazia Agnesi*, SD, n.14, 1990.

Bianchini S., Velardi R., *Problemi indeterminati (II parte)*, NS, n.8, 1990.

Campedelli M.G., *Matematica e realtà (ovvero: coordinate trilineari e problemi)*, Atti Conv. anniv. Luigi Campedelli, Firenze 31/5-2/6 1988, Firenze, 1989.

Campedelli M.G., *Didattica della geometria: il lungo discorso sul triangolo equilatero*, SD, n.5, 1989.

Campedelli M.G., *Geometria: riflessioni e proposte operative*, SIM, n.9, 1990.

Campedelli M.G. (a cura di), *Una scheda per l'analisi dei testi di matematica del biennio*, NS, n.7, 1990.

Campedelli M.G., *Le frazioni: aspetti storici, culturali, didattici*, SIM, n.15, 1990.

Campedelli M.G., *Divagazioni intorno alle figure simili (I parte)*, SD, n.14, 1990.

Campedelli M.G., *Un cubo ... e tante occasioni per lavorare in classe*, SMI, 1990.

Rabuzzi A., *La logica negli studi preuniversitari*, SMI, n.2, 1990.

Simonetti C., *Cavalieri e Torricelli: intuizioni per un teorema del calcolo integrale*, NS, n.4, 1989.

Simonetti C., *Baschara e la matematica indiana*, SD, n.10, 1990.

Simonetti C., *Le frazioni nell'antico Egitto*, SMI, n.3, 1990.

Nucleo di Ricerca Didattica di GENOVA
Scuola dell'obbligo

Indirizzare le richieste di copie (per materiali non altrimenti reperibili) a: Prof. Paolo Boero, Dipartimento di Matematica, Università, via L.B. Alberti 4, 16132 Genova.

Boero P., *Mathematics and science education, from the age 6 to 14*, Zentrl. fur Did. der Math., n.6, 1990.

Boero P., *On long term development of some general skills in problem solving: a longitudinal, comparative study*, Proceedings P.M.E., XIV, 1990.

Boero P., *L'insegnamento della matematica nel progetto "Bambini, maestri, realtà"*, IMSI, 1990.

Boero P., *I rischi dell'uguaglianza*, VS, XLIV, n.10, 1990.

Boero P, Martinelli A.M., Garuti R., *The figure of the teacher as the promoter and organizer of his students' metacognition*, Proceedings CIEAEM-42, Szczyrk, 1990.

Chiappini G.P., Lemut E., Martinelli A.M., *On the problem solving with the computer: analysis of difficulties and requirements*, Computers in Education, IFIP 1990, Elsevier, 1990.

Ferrari P.L., *Time and hypothetical reasoning in problem solving*, Proceedings P.M.E., XIV, 1990.

Ferrero E., *Strategie di calcolo e significati della sottrazione e della divisione tra 7 e 9 anni*, IMSI, 1990.

Ferrero E., *Una bella spremuta per connettere*, VS, XLIV, n:10, 1990.

Rondini A., *Misure di lunghezze e di angoli nel contesto Sole-Terra ...*, IMSI,12, 1989.

Rondini A., *Alcune competenze che intervengono nella risoluzione dei problemi matematici nella scuola elementare*, IN, 5, 1990.

Rondini A., *Problemi senza dati numerici*, IN, 8/9, 1990.

Nucleo di Ricerca Didattica di GENOVA
Gruppo Ricerca Educazione Matematica

Indirizzare le richieste di copie a: Prof. Fulvia Furinghetti, Dipartimento di Matematica, Università, via L.B. Alberti 4, 16132 Genova.

Fracassina G., Ghio S., *Alcune riflessioni sopra una esperienza di introduzione alla programmazione con calcolatori tascabili programmabili nella Scuola Secondaria Superiore*, in Atti V Incontro Nazionale sulle applicazioni degli elaboratori nella didattica, 1983.

Chiarugi I., Furinghetti F., *La matematica nei bienni: nuovi programmi e vecchi problemi. Presentazione di un questionario di indagine*, in F.Furinghetti (a cura di), *Matematica oggi. Dalle idee alla scuola*, B.Mondadori, Milano, 1990.

Chiarugi I., Fracassina G., Furinghetti F., *Learning difficulties behind the notion of absolute value*, in G.Booker, P.Gobb, T.N.De Mendicuti (editors), Proceedings of the P.M.E. 14, Oaxtepec (Mexico), 3, 1990.

Bottino R.M., Furinghetti F., *Computer science in basic education: curricular issues and school pratice prospects*, in A.McDougall and C.Dowlin (editors), *Computer in Education*, Proceedings of IFIP TC 3 world conference on Computers in Education - WCCE 90, Sydney, Elsevier, Amsterdam, 1990.

Furinghetti F., Paola D., *The construction of a didactic itinerary of calculus strating from the concept images of students (ages 16-19)*, in Proceedings of the 41st CIEAEM's meeting, Bruxelles, 1990.

Bottino R.M., Furinghetti F., *Computer science and mathematics education in upper secondary school*, in Proceedings of the 41st CIEAEM's meeting, Bruxelles, 1990.

Astesiano E., *Sapere di informatica per insegnare l'informatica*, in Furinghetti F. (a cura di), *Matematica oggi. Dalle idee alla scuola*, B.Mondadori, Milano, 1990.

Bottino R.M., Furinghetti F., *A large-scale teachers training programme in informatics: chances and limits*, in R. Winterburn, L. Evans (editors), *Aspects of Educational*

Technology. Vol.XXIV. Realizing human potential, Kogan Page, London.
Forcheri P., Furinghetti F., Molfino M.T., *Teacher training in computer science: an example of realization*, in R. Winterburn, L. Evans (editors), *Aspects of Educational Technology. Vol.XXIV. Realizing human potential*, Kogan Page, London.
Forcheri P., Furinghetti F., Molfino M.T., *Integration of computer Science and Mathematics in upper secondary school: reflections and realizations*, CE, 1990.
Furinghetti F., *Che cosa resta e che cosa dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica*, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce, 1990.
Bottino R.M., Chiarugi I., Furinghetti F., *Teachers' opinions about maths teaching at ages 14-16*, in Proceedings of the 42nd CIEAEM's meeting, Szczyrk (Polonia), 1990.
Cuttica A., Martini D., *I numeri reali nel laboratorio di matematica*, in Atti Conv. "Informatica e didattica", Salerno 28-30/9/1990.
Furinghetti F., *Un quesdtionario per insegnanti di matematica della scuola secondaria superiore*, N.U.M.I. vol. XVI, suppl.7, 1989.
Furinghetti F. (a cura di), *Matematica oggi. Dalle idee alla scuola*, B. Mondadori Editore, 1990.

Nucleo di Ricerca Didattica di MILANO

Indirizzare le richieste di copie agli Autori, Dipartimento di Matematica, via C. Saldini 50, 20133 Milano.

Canetta P., *Problemi non-standard*, Quaderno n.9 Formazione e Aggiornamento CNR-TID.
Lucchini ,G., *Incontri e corrispondenza con Luigi Campedelli*, Atti Convegno Internazionale "Cultura Matematica e Insegnamento", Università di Firenze, 1989.
Manara C.F., *Il pensiero matematico tra la fine dell'800 e l'inizio del '900*, Il pensiero scientifico di Vito Volterra, La Lucerna Ed., Ancona, 1990.

Nucleo di Ricerca Didattica di PARMA

Indirizzare le richieste di copie a: Prof. Francesco Speranza, Dipartimento di Matematica, via dell'Università 12, 43100 Parma.

Speranza F., *La metematica oggi e la componente logico-linguistica*, in "Insegnare Matematica con i nuovi programmi della scuola elementare", a cura di M. Pellerey, Fabbri, Milano, 1986.
Speranza F., *Le radici comuni di lingua e matematica*, in "Insegnare Lingua italiana con i nuovi programmi della scuola elementare", a cura di M.L. Altieri Biagi, Fab-

bri, Milano, 1986.
Medici D., Speranza F., Vighi P., *Sobre la formaciòn de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico*, Ens. de las Ciencias, 4 (1), 1986.
Vighi P., Vené M., *Leibniz e noi. Traccia per una trattazione interdisciplinare di matematica e filosofia*, ED, 3, 1980.
Speranza F., Oleari C., Mazzoni C., Michelotti M., Vighi P., Pattacini S., *Forma e comunicazione*, Videocassetta, Univ. Parma, 1987.
Speranza F., Oleari C., Arduini B., *Dagli oggetti all'algebra*, Videocassetta, Univ. Parma, 1987.
Speranza F., *Nuove proposte per l'insegnamento della Geometria nella scuola elementare*, Scuola Se, f.32, 1987.
Speranza F., *A che cosa serve la filosofia della matematica?*, MD, 1, 1987.
Speranza F., *Riflessioni sulla storia dell'astronomia come evoluzione di modelli matematica*, ED, II, suppl.1, 1987.
Speranza F., *Il metodo delle coordinate: dalla battaglia navale allo spazio infinito*, Scuola Se, f.36/37, 1988.
Speranza F., *Epistemologia e insegnamento della Matematica*, IMSI, 11, 1988.
Speranza F., *Salviamo la geometria!*, MD, 2, 2, 1988.
Speranza F., *La Matematica nel biennio: riflessioni sui nuovi programmi*, IMSI, 12, 1989.
Speranza F., *La razionalizzazione della geometria*, PM, 65, 1989.
Speranza F., *Statistica*, in "Lez. di Mat. per gli ins. di Scuola Materna", Apeiron, Bologna, 1989.
Speranza F., *Affrontare la geometria in modo nuovo*, in "Lez. di Mat. per gli ins. di Scuola Elem.", Apeiron, Bologna, 1989.
Speranza F., *Applicazioni della logica nei nuovi programmi della scuola elementare*, in "Lez. di Mat. per gli ins. di Scuola Elem.", Apeiron, Bologna, 1989.
Speranza F., *Cenno sulle basi della Matematica*, in "Lez. di Mat. per gli ins. di Scuola Elem.", Apeiron, Bologna, 1989.
Speranza F., *Orientamenti metodologico-didattici della Matematica di base per adulti*, in Atti del sem. per docenti dei corsi 150 ore, IRRSAE ER, Bologna, 1989.
Speranza F., *History, Epistemology, Didactics: some noteworthy cases*, in Proc. of the first It.-Germ. Bil. symposium on Did. of Math., a cura di L. Bazzini e H.G. Steiner, Univ. Pavia e CNR, 1989.
Speranza F., *Matematica e linguaggio*, ED, II, 4, 1989.
Speranza F., *Un nuovo linguaggio per un nuovo modo di insegnare la scienza*, in "Gli audiovisivi e l'insegnamento scientifico", a cura di F. Speranza e C. Oleari, Univ. Parma, 1989.
Speranza F., Vighi P., Mazzoni C., *La Matematica nel secondi ciclo: Probabilità e statistica*, La Suola Se, 45, 1989.
Speranza F., Vighi P., Mazzoni C., *La Geometria*, La Scuola Se, 46, 1989.
Speranza F., Vighi P., Mazzoni C., *Aritmetica*, La Scuola Se, 47, 1989.
Speranza F., Vighi P., Mazzoni C., *Problemi*, La Scuola Se, 50/51, 1989.
Vighi P. e altri, *Un test di ingresso per la prima superiore*, PM, VI, vol.65, 2, 1989.

De Flora A., *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia*, Vita d.Infan., 7, 1989.
Speranza F., *L'insegnamento della Geometria secondo il metodo ipotetico-deduttivo*, in Atti del sem. "L'ins. d. Matematica nei nuovi programmi per il biennio della sc. sec. sup.", 1989, IRRSAE Veneto, 1990.
Medici Caffarra D., Mazzoni Del Frate C., *Vari approcci alla costruzione e alla classificazione di figure geometriche*, MD, 2, 4, 1990.
Speranza F., *Nuove prospettive per la Geometria nelle scuole superiori*, NS, 7, 8-9, 1990.
Speranza F., *Situazioni diverse per un'unica operazione: l'addizione e la sottrazione*, La Scuola Se, f.65, 1990.
Speranza F., *Matematica e scienze: quale distinzione, quale integrazione?*, EM, III, suppl.n.2, 1990.
Speranza F., *Controindicazioni al riduzionismo*, MD, 4, n.3, 1990.
De Flora A., *Una valutazione internazionale degli apprendimenti in Matematica e Scienze (IAEP 4)*, Inn. Educ., 3, 1989.
De Flora A., *Alcune riflessioni su un tentativo di analisi dell'insegnamento*, in "Gli audiov. e l'ins. scientifico", a cura di C. Oleari e F. Speranza, Univ. Parma, 1989.

Nucleo di Ricerca Didattica di PISA

Indirizzare le richieste di copie ai singoli Autori: Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, 56100 Pisa.

Villani V., *Similitudine e figure simili*, EM, a.XI (III), vol.1, supp.n.2, 1990.
Villani V., *Quale futuro per la Matematica?*, in "Il piano nazionale per l'informatica: a che punto siamo", a cura del FNISM, Loffredo, Napoli, 1990.
Zan R., *I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare*, Quaderno del Dip. Mat. Univ. Pisa, novembre 1990.
Zan R., *Fattori metacognitivi nell'attività di risoluzione dei problemi*, SD (in corso di stampa).
Mariotti M.A., *Il ruolo dell'aritmetica*, IMSI, vol.13, n.4, 1990.
Pisaneschi P., *Algoritmi ricorsivi e computer*, Didattica delle Scienze e informatica nella scuola, 149, 1990.

Nucleo di Ricerca Didattica di ROMA

Indirizzare le richieste di copie al primo autore presso Dipartimento di matematica, Università "La Sapienza", piazzale Aldo Moro 2, 00185 Roma.

Bernardi C., Cannizzaro L., Lanciano N., Mentrasti P. (a cura di), *La matematica nella Scuola elementare. Geometria*, La Nuova Italia (in corso di stampa).
Bernardi C., Cannizzaro L., Lanciano N., Mentrasti P. (a cura di), *La matematica nella Scuola elementare. Il numero e le abilità numeriche*, La Nuova Italia (in corso di stampa).

Bernardi C., Cannizzaro L., Lanciano N., Mentrasti P. (a cura di), *La matematica nella Scuola elementare. Logica. Informatica. Probabilità e statistica*, La Nuova Italia (in corso di stampa).

Nucleo di Ricerca Didattica di ROMA
Gruppo Ricerca Probabilità e statistica

Indirizzare le richieste di copie al primo autore presso Dipartimento di Metodi e modelli matematici per le scienze applicate, Università "La Sapienza", via Scarpa 10, 00161 Roma.

Cera N., *Il concetto di probabilità: esame dell'evoluzione storica e della sua formalizzazione*, Induzioni (Demografia, probabilità, statistica a scuola), n.0, 1990.

Colagrande V., Di Biase G., *Simulazione su calcolatore di alcuni esempi di applicazione del teorena di Bayes*, PM (in corso di stampa).

Colagrande V., Di Biase G., *Interpretazione dei risultati di un campionamento statistico con approccio bayesiano: simulazione su calcolatore*, Ratio Mathematica, 1, 1990.

Di Bacco M., Lombardo E., *Fatti e congetture*, Ed. La Nuova Italia, Firenze, 1990.

Gilio A., *Aspetti algebrici e geometrici nell'insegnamento della probabilità soggettiva*, AR, 42, 1990.

Maturo A., *Probabilità e statistica con il calcolatore: problematiche di carattere logico ed operativo*, Metron (in corso di stampa).

Rotondo P., *Problemi didattici di un approccio bayesiano alla probabilità a livello di scuola media: esperienze e proposte*, Induzioni (Demografia, probabiiità, statistica a scuola), n.1, 1990 (in corso di stampa).

Scozzafava R., *Il ruolo della probabilità nell'insegnamento secondario*, Atti Conv. Naz. Mathesis, Cattolica, 1982.

Scozzafava R., *Come introdurre alcuni concetti fondamentali di probabilità e statistica nelle scuole secondarie*, PM (VI), 59, 3-4, 1983.

Scozzafava R., *Statistica e Probabilità*, Enciclopedia delle Scienze De Agostini, vol.XIII, Matematica e Fisica, 1984.

Scozzafava R., *Scelte "a caso" e ragionamenti "in media"*, AR, 35, 1983.

Scozzafava R., *La teoria delle decisioni in un gioco infantile*, AR, 35, 1983.

Scozzafava R., *Probabilità e giustizia: dialogo fra un matematico ed un giurista*, PM (VI), 62, 3-4, 1986. Ristampato in "Studi parlamentari e di politica costituzionale", 22, n.84, 1990.

Scozzafava R., *Subjective probability and Bayesian statictics in engineering mathenatics education*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 18, 1987.

Scozzafava R., *Probabilità soggettiva e grandi rischi*, AR, 40, 1980.

Scozzafava R., *Per un insegnamento "fusionista" della prababilità e della statistica nelle scuole secondarie*, Atti Conv. CIDI-IRRSAE su "Matematica oggi: dalle idee alla scuola", Genova 1988 (a cura di F. Furinghetti), Ed.B.Mondadori, Milano, 1990.

Scozzafava R., *A merged approach to stochastics in engineering curricula*, European Journal of Engineering Education, 15, 3, 1990.
Scozzafava R., *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni (Un minicorso con oltre 230 esempi ed esercizi svolti)*, Editoriale Veschi, MASSON, Milano, 1989.
Scozzafava R., *A merged approach to probability and Bayesian statistics*, Medianen (Meddelanden fran Svenska Statistikersamfundets utbildnings-kommitté), n.2, 1989.
Scozzafava R., *Aspetti soggettivi del concetto di indipendenza*, Induzioni (Demografia, probabilità, statistica a scuola), n.0, 1990.
Scozzafava R., *A project of merged approach to the teaching of probability and statistics in the Italian secondary schools*, Proc. 3rd. Intern. Conf. on Teaching Statistics, Dunedin, New Zealand, 1990 (in corso di stampa).
Scozzafava R., *Quale probabilità e statistica nelle scuole secondarie superiori*, Epsilon, Paravia, Torino, 3, 1990 (in corso di stampa).

Nucleo di Ricerca Didattica di TORINO
(Coordinatore Prof. A.R. Scarafiotti)

Indirizzare le richieste di copie a: Prof. Anna Rosa Scarafiotti, Dipartimento di Matematica del Politecnico, corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino.

Di Carclo A., Scarafiotti A., *Elementi di logica in secondaria superiore: perché? ... un'esperienza in prima liceo scientifico*, Atti XII incontro di Logica Matematica, Roma, 1988.
Di Carlo A., Galizia Angeli M.T., *Un test di valutazione per produrre pensiero matematico: Un'esperienza*, EM, a.IX, II, vol.3. 1988.
Di Carlo A., Galizia Angeli M.T., Trentin G., *Come strutturare un contenuto matematico: gli studenti sviluppano un test diagnostico sulle relazioni d'ordine*, MD, III, 2, 1989.
Di Carlo A., Trentin G., *Uso delle reti di Petri nella didattica della matematica*, Atti XII Conv. sull'inseg. della Matem., Sorrento, NUMI, suppl.n.7., 1989.
Mascarello Rodino M., Scarafiotti A.R., *Using computers in calculus examples-classes for engineers*, Proceedings ECM/87, Educational Computing in Mathematics, Edts T.F. Banchoff and oth., North-Holland, Amsterdam, 1988.
Mascarello Rodino M., Scarafiotti A.R., *Computers experiments in teaching discrete dynamical systems at the Politecnic of Turin (Italy)*, Congress Acts "Computational Geometry and Topology and Computation in teching Mathematics", Sevilla, 1987 (in corso di stampa).
Mascarello Rodino M., Scarafiotti A.R., *Experiments in mathematical education at secondary school and Politecnico of Torino (Italy)*, ICME 6, Theme group 2, Working group 2-5, preparatory papers, Budapest, 1988.
Mascarello Rodino M., Scarafiotti A.R., *Cultura e insegnamento: esperinze significative*

appoggiate a metodi e strumenti informatici, presentato al Convegno "Cultura matematica e insegnamento", Firenze, 1988 (in corso di stampa).

Mascarello Rodino M., Scarafiotti A.R., *Approccio all'analisi numerica. Sperimentazioni sui programmi nel triennio degli ITI per periti in informatica*, presentato al XII Convegno sull'insegnamento della matematica "La matematica nella scuola secondaria superiore", Sant'Agnello di Sorrento, NUMI, suppl.n.7, 1989.

Mascarello Rodino M., Scarafiotti A.R., *Scoprire algoritmi: metodi computazionali elementari in vista di un approccio numerico in scuola secondaria superiore*, presentato al X convegno nazionale dei nuclei di ricerca didattica per la scuola media, l'Aquila, 1989, Rapporto interno n.2/1989 del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino.

Scarafiotti A.R., Alotto M., *Experimenta Mathematica*, Levrotto & Bella, Torino,1988.

Mascarello Rodino M., Scarafiotti A.R., *Alla ricerca delle valenze interdisciplinari della matematica attraverso i test di ingresso, dall'Università all'impresa*, IX Convegno didattico Residenziale, Alghero, 1989 (in corso di stampa).

Galizia Angeli M.T., Marconi C., *Il ruolo della matematica nello studio dei circuiti a corrente alternata: un'esperienza didattica interdisciplinare col supporto del personal computer*, IX Convegno didattico Residenziale, Alghero, 1989 (in corso di stampa).

Sargenti A., *Geometria Analitica e Analisi Matematica, un approccio euristico*, NS, n.4, 1989.

Galizia Angeli M.T., Marconi C., *Sui periodi delle composizioni di funzioni trigonometriche: i concetti di m.c.m. e M.C.D.*, AR, 1, 1990.

Cacciabue R.A., Mascarello M., Scarafiotti A.R., *Algoritmi in competizione: esperienze su problemi di analisi numerica elementare nel triennio I.T.I.S.*, MD, IV, 2, 1990.

Cacciabue R.A., Mascarello M., Sargenti A., Scarafiotti A.R., *L'enseignement en spirale: expériences réalisées en mathématique numérique avec des élèves de 16 à 19 ans*, presentato al convegno CIEAEM 41 "Rôle et conception des programmes de mathématique", 23-29 luglio 1989, Bruxelles (in corso di stampa).

Galizia M.T., Marconi C., Mascarello M., Scarafiotti A.R., *Experiences of computer laboratory in mathematics teaching*, NATO Advanced Research Workshop on "Advanced technologies in the teaching of Mathematics and Sciences", Milton Keynes, july 12-14 1990 (in corso di stampa).

Nucleo di Ricerca Didattica di TRIESTE

Indirizzare le richieste di copie al primo autore presso Dipartimento di Matematica, Università di Trieste.

Balbi L., Bran M., Marceddu M.C., Zuccheri L., *Alcuni spunti didattici offerti dalla crittografia*, Quaderni didattici del Dip. Sc. Matem., n.2, ottobre 1989.

Bellen A., *Il trattamento dei dati sperimentali con il metodo dei minimi quadrati*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Bellen A., Zuccheri L., *Problemi di appossimazione nell'uso del computer*, Atti Conv.

"Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Boiti A., *Riflessioni su una semplice funzione: tasto* INT *nei calcolatori tascabili programmabili con* RPN, IMSI, 4, 1986.

Boiti A., *Aritmetica a precisione estesa*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Boiti A., *Un metodo di generazione della spirale esponenziale*, IMSI, 12, (2), 1989.

Boiti A., *Le potenze di una matrice quadrata e il teorema del punto unito: applicazioni*, IMSI, 12, (2), 1989.

Bressan C., Fontana R., Todisco L., Vetere Rossi A., *Probabilità da un punto di vista non assiomatico*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Bressan C., Fontana R., Petrossi f., Todisco L., *Uno sguardo ai nostri ragazzi: statistica in classe con il* LOTUS, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Candusio G., *Applicazioni matematiche e utilizzo del computer in attività interdisciplinari*, IMSI, 12, (2), 1989.

Candussio G., *Prime esperienze di alunni della scuola media con gli elaboratori elettronici*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Casarsa F., *Un metodo di lavoro: una "uscita" nella geometria dello spazio*, Quaderni didattici del Dip. Sc. Matem., n.3, dicembre 1989.

Casarsa F., *L'elogio del finito: La logica come strumento organizzativo della materia. Alcune utilizzazioni degli insiemi finiti*, Quaderni didattici del Dip. Sc. Matem., n.5, maggio 1990.

Dal Maso D., *Applicazioni della matematica a problemi di biologia*, IMSI, 12, (4), 1989.

Felician G., *Trasformazioni elementari sulla retta*, IMSI, 12, (2), 1989.

Fiorucci M., Lunazzi A., *Introduzione alla statistica*, Quaderno n.1 del Nucleo di Ricerca Didattica di Trieste, 1985.

Fontana R., *Dal campione alla popolazione: proposta didattica sulla statistica inferenziale con il* LOTUS, IMSI, 12, (4), 1989.

Giorgolo B., *Simmetroscopio*, Didattica Triestina Ed.

Giorgiolo B., *Ricerca di simbologie comprensibili agli alunni del secondo ciclo atte a strutturare determinate intuizioni logiche*, (in preparazione).

Invernizzi S., *An integral approach to the trigonometric function*, Quad. MAt. Ist. di Mat. Univ. di Trieste, s.II, n.90, 1984.

Invernizzi S., *Introduzione alla computer graphics monocromatica su P.C. ed alcuni esempi didattici*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Inverinizzi S., *Somme di serie divergenti con il computer*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Lunazzi A., *Il computer in classe: un ambiente di lavoro*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Lunazzi A., *Educare al calcolo con i calcolatori*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Markò Trudthoff R., *Tre esempi di itinerari didattici interattivi con il calcolatore*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Markò Trudthoff R., Rocco M., *Principessa: un itinerario didattico interattivi col calcolatore*, Quaderno n.2 del Nucleo di Ricerca Didattica di Trieste, 1985.

Penco A., *La latitudine crescente e le sue applicazioni nella navigazione marittima*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Penco A., *Da π.. alle funzioni circolari*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Penco A., *Proiezioni di un cerchio su un piano. Le coniche*, IMSI, 12, (2), 1989.

Penco A., Zennaro E., *Un'attività didattica multidisciplinare: un approccio alla soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie*, IMSI, 10, 1986.

Petrossi F., *Un ambiente Logo per lo studio delle trasformazioni del piano in sè*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Petrossi F., *Tendenze attuali del Piano Nazionale Informatica*, IMSI, 12, (4), 1989.

Rocco M., *Proposte per l'inserimento del computer nella scuola dell'obbligo*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Rocco M., *Tutti i rettangoli che vuoi*, N.U.M.I., suppl.n.7, luglio 1986.

Rocco M., *I problemi*, nel volume "Aritmetica", della serie per il piano pluriennale di aggiornamento sui nuovi programmi per la scuola elementare (IRRSAE Friuli Venezia Giulia), 1990.

Rocco M., *Un itinerario per la geometria solida nella scuola media*, IMSI, 12, (2), 1989.

Rocco M., Markò R., Bressan C., Vetere Rossi A., Fontana R., Petrossi F., Todisco - L., *Tre proposte didattiche per l'insegnamento di probabilità e statistica con l'utilizzo del computer*, Progetto startegico del C.N.R. Tecnologie e innovazioni didattiche. Innovazioni didattiche per la matematica. Quaderno n.5.

Rocco M., *Modelli di crescita di popolazioni al foglio elettronico*, (in preparazione).

Tironi G., *Recenti sviluppi della logica e della teoria degli insiemi. Un'introduzione alla "costrizione" o "forcing"*, Quaderni didattici del Dip. Sc. Matem., n.7, agosto 1990.

Todisco L., *Probabilità al computer*, IMSI, 12, (2), 1989.

Velicogna G., *Esperienze con la calcolatrice tascabile e con il computer in una realtà scolastica particolare (corso sperimentale per lavoratori)*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Vetere Rossi A., *Semplici esercizi da inserire negli argomenti dei nuovi programmi di matematica del biennio della secondaria*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Vetere Rossi A., *Statistica e spreadsheet*, IMSI, 12, (2), 1989.

Volcic A., *Alcune osservazioni sull'insegnamento della matematica negli Istituti Tecnici Commerciali*, IMSI, 12, (4), 1989.

Volpi G., *Applicazioni della matematica a problemi di natura economica*, IMSI, 12, (4), 1989.

Zennaro E., *Rendez-vous sul mare*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Lignano Sabbiadoro 2-4 maggio 1985.

Zennaro E., *Acciaio che galleggia*, Atti Conv. "Computer e Didattica", Grado 28-30 aprile 1987.

Zennaro E., *L'imbarco e lo sbarco di piccoli pesi su una nave e ... una involuzione sopra una retta*, IMSI, 12, (2), 1989.

Zennaro E., *La risoluzione approssimata di equazioni nonlineari*, Quaderni didattici del Dip. Sc. Matem., n.4, febbraio 1990.

Zuccheri L., *Analisi di alcuni problemi che scaturiscono dall'uso del computer nelle discipline scientifiche: una proposta didattica*, Atti X Conv. UMI-CIIM, NUMI, suppl.n.7, 1986.

Zuccheri L., *Alcune considerazioni sui numeri*, nel volume "Aritmetica", della serie per il piano pluriennale di aggiornamento sui nuovi programmi per la scuola elementare (IRRSAE Friuli Venezia Giulia), 1990.

Zuccheri L., *Alcune considerazioni sull'insegnamento del calcolo delle probabilità nella scuola media inferiore*, IMSI, 12, (4), 1989.

INDICE

Collana di
Quaderni dell'Unione Matematica Italiana

NOVITÀ

Quaderni dell'Unione Matematica Italiana
35

S. Dragomir • J. C. Wood

Sottovarietà minimali
ed
applicazioni armoniche

Pitagora Editrice • Bologna 1989

L. 15.000 • Ai soci UMI sconto 20%

COLLANA DI QUADERNI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

13. F. ACQUISTAPACE, F. BROGLIA, F. LAZZERI: *Topologia delle superficie algebriche in $P_3(C)$*, 1979, pp. II - 171 .... L. 4.000
14. T. MANACORDA: *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, 1979, pp. IV - 112 ... L. 3.500
15. C. CATTANEO: *Teoria macroscopica dei continui relativistici*, 1980, pp. V - 105 .... L. 3.500
16. A. TOGNOLI, A. ZEPPILLI: *Teoremi di approssimazione per gli spazi analitici reali*, 1980, pp. 121 .... L. 3.500
17. AA. VV.: *Ottimizzazione non lineare e applicazioni, a cura di S. Incerti e Treccani (Atti del Convegno Italsiel-UMI, l'Aquila 18 - 20 giugno 1979)*, 1980, pp. XI - 372 .... L.10.000
18. L. SALCE: *Struttura dei p-gruppi abeliani*, 1980, pp. IV - 300 .... L. 8.000
19. S. COEN: *Una introduzione ai dominii di Riemann non ramificati n-dimensionali*, 1980, pp. VI - 222 .... L. 5.000
20. C. CATTANEO: *Elementi di teoria della propagazione ondosa*, 1981, pp. VI - 216 ...... L. 6.000
21. G. GALLAVOTTI: *Aspetti della teoria ergodica, qualitativa e statistica del moto*, 1981, pp. XII - 388 .... L. 8.000
22. A. CONTE: *Introduzione alle varietá algebriche a tre dimensioni*, 1982, pp. 136 .... L. 4.500
24. L. CATTABRIGA: *Alcuni problemi per equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti*, 1983, pp. VIII - 192 .... L. 7.000
25. A. CASSA: *Teoria elementare delle curve algebriche piane e delle superfici di Riemann compatte*, 1983, pp. VIII - 160 .... L.10.000
26. P.M. SOARDI: *Serie di Fourier in piú variabili*, 1984, pp. VIII - 160 .... L. 6.000
27. R. BENEDETTI, M. DEDO': *Una introduzione alla geometria e topologia delle varietá di dimensione tre*, 1984, pp. VIII - 152 .... L. 5.000
28. P. BALDI: *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, 1984, pp. VIII - 312 .... L.10.000
29. P. de LUCIA: *Funzioni finitamente additive a valori in un gruppo topologico*, 1985, pp. VIII - 188 .... L. 7.500
30. R. CONTI: *Processi di controllo lineari in $\mathbb{R}^n$*, 1985, pp. VIII - 192 .... L. 7.500
31. A. BACCIOTTI: *Fondamenti geometrici della teoria della controllabilitá*, 1986, pp. VIII - 184 .... L. 9.000
32. L. PANDOLFI: *Alcuni metodi matematici nella teoria dei sistemi lineari di controllo*, 1986, pp. XII - 296 .... L.15.000
33. S. BENENTI: *Relazioni simplettiche: la trasformazione di Legendre e la teoria di Hamilton-Jacobi*, 1988, pp. XII - 336 .... L.20.000
34. F. BORCEUX: *Fasci, logica e topoi*, 1989, pp. VIII - 300 .... L. 24.000
35. S. DRAGOMIR, J. C. WOOD: *Sottovarietà minimali ed applicazioni armoniche*, 1989, pp. IV - 168 .... L. 15.000

Distribuzione: Libreria Pitagora Editrice - Via Zamboni, 57 - 40127 Bologna
Ai soci UMI sconto del 20% sui prezzi di copertina.