ISSN 0393-0998

Luglio 1989
Supplemento al n. 7

Period. mensile
sped. in abb. post. gruppo III/70

Anno XVI

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DODICESIMO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA:

LA MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

S. AGNELLO DI SORRENTO, 17-18-19 OTTOBRE 1988
A cura di M. Moscucci

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci e non è in vendita.

Fascicolo monografico stampato con un contributo finanziario
del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40127 Bologna (Italia)
Luglio 1989
Supplemento al n. 7

Lucia Ciarrapico Manna

Ispettrice - Sovrintendenza Scolastica - Roma

NUOVI PROGRAMMI DI MATEMATICA PER LA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

Circa tre anni or sono furono elaborati da un comitato, apposi tamente istituito dal Ministro della Pubblica Istruzione, nuovi programmi di matematica per le prime due classi della scuola secondaria superiore.

L'occasione fu offerta dal piano Nazionale per l'Informatica, varato appunto nel 1985, che prevedeva l'introduzione dell'informatica nella scuola, ad iniziare dalle classi del primo biennio della secondaria superiore.

Ai fini della realizzazione di tale progetto fu istituito un comitato tecnico-scientifico -presieduto dal Ministro e di cui facevano e fanno parte, poiché è tuttora in essere, dirigenti ministeriali, docenti universitari, ispettori, esperti - il quale ritenne che l'approccio all'informatica nella scuola, negli indirizzi non specialistici, non dovesse avvenire attraverso l'introduzione di una nuova materia in aggiunta a quelle già esistenti. Il comitato fu dell'avviso che fosse più proficuo mirare "a creare nella scuola un clima culturale volto a percepire informaticamente problematiche vecchie e nuove" e, in tale ottica, propose che l'insegnamento delle basi teoriche dell'informatica venisse inserito all'interno di quello della matematica e della fisica, discipline cui essa deve la sua nascita e il suo sviluppo.

Fu perciò ravvisata la necessità di rivederne i programmi e di definire spazi temporali adeguati alle nuove prospettive.

Il comitato cui fu affidato il compito della revisione dei programmi di matematica delle prime due classi, ritenne, sia per la rapida evoluzione che si è registrata nel pensiero matematico in questi ultimi decenni, sia per la nuova impostazione metodologica che è andata emergendo, che non ci potesse limitare ad un semplice aggiornamento del programma esistente, ma che fosse necessario procedere ad una nuova formulazione.

In linea con la tendenza verso una visione unitaria del biennio, non credette opportuno formulare un programma per ogni ordine di scuola; ne elaborò, perciò, solo due, uno più intenso, diciamo di matematica "forte", ed uno più ristretto, di matematica "debole". I due programmi, come è ben noto, qualitativamente non si differenziano: in quello di matematica "forte" sono compresi alcuni contenuti, il cui svolgimento è rinviato al successivo triennio per l'altro.

I programmi -ne ricordo solo l'impostazione e la struttura perchè preferisco soffermarmi su quelli del triennio dei quali esiste una recente proposta- sono organizzati in una premessa che fissa gli obiettivi da perseguire, e nei contenuti veri e propri. Questi sono raggruppati in cinque temi, ciascuno dei quali ha un commento che ne dà la chiave di lettura e ne indica gli aspetti metodologici. In essi si fa riferimento all'intero biennio senza una scansione annuale che è demandata al consiglio di classe nell'ambito della programmazione annuale dell'attività didattica.

I programmi riscossero l'approvazione del Consiglio Nazionale della Pubblica Istruzione -cui furono sottoposti per un parere-, di quasi tutte le forze politiche (positivi furono i commenti su diversi giornali), di molta parte delle associazioni scientifiche e della classe docente.

Resi familiari ai docenti nell'mabito dell'aggiornamento realizzato in attuazione del PNI, sono stati poi proposti dal Ministero alle scuole sotto forma sperimentale e sono al momento una realtà operante.

L'aggiornamento dei docenti entra con l'anno scolastico 88/89 al suo quarto anno d'attuazione e la sperimentazione dei programmi del biennio, che ha coinvolto un consistente numero di scuole, al suo secondo anno.

Ecco alcune statistiche:

Fare un bilancio della sperimentazione dopo appena un anno di attuazione è difficile. Il breve tempo avuto a disposizione e il fatto che i docenti fossero alla loro prima esperienza informatica - alle prese con una matematica diversa da quella tradizionale, studiata all'università e insegnata nelle scuole- non consente di esprimere un giudizio significativo e scientificamente fondato.

Al momento è allo studio al Ministero la ricerca delle modalità con cui validare la sperimentazione e quindi, indirettamente, l'efficacia dei nuovi programmi. La verifica sarà effettuata al termine del corrente anno scolastico, a conclusione del primo biennio d'attuazione, attraverso un questionario e con altri metodi, che prevedono anche il confronto con gli esiti des le classi tradizionali.

Il problema è certamente complesso, anche perchè, secondo quanto emerge dal più recente dibattito pedagogico internazionale, valutare la qualità della scuola, e quindi anche la qualità di una innovazione, è estremamente difficile. Un bilancio significativo potrà essere fatto solo su tempi lunghi, giudicando l'impatto degli studenti con gli studi successivi, del triennio secondario e universitari.

Pur in mancanza, al momento, di riscontri obiettivi, emergono alcune considerazioni. Si tratta di osservazioni colte al volo in colloqui avuti con un certo numero di docenti sperimentatori.

Si osserva anzitutto un grande entusiasmo e un notevole impegno da parte dei docenti che stanno sperimentando. Si rileva, tuttavia, che le loro opinioni sulle difficoltà incontrate nello svolgimento dei vari argomenti, sulla loro proficuità, sul tempo che richiedono, sono per alcuni aspetti concordi, per altri discordi.

Tutti sono concordi nel dire che gli allievi sembrano aver recepito gli argomenti nuovi in maniera complessivamente positiva. Dicono che non hanno incontrato difficoltà nell'approccio all'informatica, che sono stati in grado di scrivere al termine dell'anno scolastico semplici programmi, che il lavoro operativo alle macchine è risultato estremamente motivante.

Risulta che non vi è ancora un'integrazione completa tra informatica e matematica, ma neppure una separazione netta: tutti i docenti cercano di applicare concetti e procedure informatiche a quegli argomenti di matematica e di fisica che più si prestano. Il computer viene usato generalmente per programmare e di rado e da pochi con software didattico e di simulazione già pronto.

E' anche opinione comune che l'introduzione degli elementi di logica ha migliorato l'acquisizione di capacità di deduzione negli allievi : si fa, dicono i docenti, una migliore geometria. Si osserva, tuttavia, che proprio il tema della geometria è quello su cui c'è la maggiore discordanza d'interpretazione e che appare più frainteso.

Numerosi sono i docenti che dedicano tuttora molto tempo al calcolo letterale, perchè affermano che gli allievi stentano a padroneggiarlo, ma ve ne sono anche di quelli che sono riusciti a ridimensionarlo. Il tema n. 3 è perciò generalmente quello che ha assorbito più ore, mentre per tutti quello meno svolto, da alcuni non iniziato affatto, è il tema della probabilità e statistica.

Vi sono anche docenti che si sono aperti alle nuove metodologie (il lavoro di gruppo, un insegnamento che trae spunto dal problema ecc.), ma sono pochi e vi fanno ricorso solo saltuariamente. Essi affermano di riuscire ad ottenere un maggiore coinvolgimento degli studenti, ma che questo modo di fare matematica richiede molto tempo e non è sempre praticabile.

In generale, comunque, tutti ritengono di aver ottenuto dei buoni risultati e che migliori ne otterranno nel corrente anno e nei prossimi nei quali giocherà a loro favore la maggiore esperienza. L'ottimismo deriva anche dalla constatazione che quest'anno hanno generalmente optato per le classi sperimentali gli alunni che hanno conseguito la licenza media con risultati che si attestano nella fascia medio-alta; gli alunni delle prime classi sperimentali sono, in altri termini, gli ex migliori alunni della scuola media. Evidentemente le famiglie sono divenute consapevoli che la sperimentazione proposta non consiste nel sostituire l'informatica alla matematica e, soprattutto, un'informatica solo operatriva -tale era la convinzione di molti- ma nell'affrontare programmi di matematica che comprendono anche l'informatica e sono di maggiore impegno.

Questa è però un'argomentazione che perderà di significato nel momento in cui il cambiamento dovesse essere istituzionale, con il conseguente totale coinvolgimento degli alunni.

Molti docenti osservano che la mancata piena attuazione nella scuola media dei programmi di matematica entrati in vigore nel '79 rende difficile nel corso del biennio la trattazione dell'intero programma proposto ed il raggiungimento degli obiettivi indicati. In molte scuole medie, infatti, sono svolti solo i temi più tradizionali della matematica, per i quali spesso sono anche disattese le indicazioni metodologiche suggerite nei programmi. Solamente in un limitato numero sono trattati i temi più nuovi (logica, probabilità, statistica, trasformazioni geometriche, ecc.) per i quali un primo approccio -a livello certamente intuitivo come deve essere nella scuola media, è tale da determinare una confidenza con concetti e procedure nuovi- avrebbe facilitato ed accelerato il compito dei docenti nel biennio.

I docenti delle scuole nelle quali si sta sperimentando il programma "forte", in particolare quelli del liceo scientifico, considerano inadeguato lo spazio di cinque ore assegnato. E' bene ricordare che il comitato di redazione dei programmi aveva prospettato la necessità di sei ore per il suo svolgimento.

Il Ministero, tuttavia, tenendo presente che nelle scuole in cui non è al momento previsto istituzionalmente l'inseguimento della fisica nel biennio, vi sarebbe stato già un orario aggiuntivo di tre ore per questa disciplina, propose, per evitare un sovraccarico di orario, la sperimentazione della matematica "forte" con cinque ore.

I docenti insistono per avere sei ore e ritengo che il ministero possa assumere un atteggiamento più flessibile.

Riguardo alla formazione informatica vi sono docenti che ritengono di avere una sufficiente formazione teorica, altri affermano di non avere ancora le idee limpide. Quasi tutti comunque dicono di aver raggiunto dopo un anno di sperimentazione una discreta confidenza con il computer. Vorrebbero, invece, un supplemento di aggiornamento in relazione ai temi nuovi di matematica ed all'integrazione con l'informatica. Ravvisano, inoltre, nella formazione ricevuta una essenziale finalizzazione all'insegnamento nel biennio. In conseguenza rivelano, pur nella massima disponibilità e desiderio di prosecuzione della sperimentazione nel triennio, uno stato d'incertezza, dovuto tra l'altro alla non conoscenza dei programmi del triennio, fatto che influisce psicologicamente in modo negativo sull'attuale loro lavoro didattico.

Al riguardo il Ministero, anche tenendo presente che la sperimentazione nell'a.s. '89/90 approderà nel triennio, ha costituito nel febbraio scorso un comitato, formato da ispettori ministeriali, professori e presidi, pertanto più ristretto del precedente, con il compito di compiere una prima riflessione sui contenuti matematici, informatici e della fisica, da inserire ne triennio sotto forma di progetti sperimentali. Il MInistro ha voluto inviare i programmi elaborati alle principali associazioni scientifiche al fine di acquisire -molto opportunamente secondo il mio modo di vedere- consigli e suggerimenti che potranno rivelarsi preziosi per una messa a punto delle ipotesi formulate, che si farà quanto prima.

La selezione, da parte del comitato, dei temi matematici che devono essere oggetto di studi nel triennio e la definizione delle competenze e delle conoscenze da promuovere negli alunni hanno presentato indubbie difficoltà. Vorrei passare rapidamente in rassegna i criteri indicatori delle scelte operate.

Il primo criterio è stato quello di muoversi in sintonia ed in continuità con i programmi del biennio, sia sotto il profilo della struttura esteriore, sia sotto quello relativo alle indicazioni degli obiettivi, alla scelta dei contenuti ed alla proposta delle metodologie.

Si è osservato, tuttavia, che la specificità dei singoli indirizzi di studio a livello di triennio non consente l'adozione di un unico programma di matematica, e neppure di due, come si è fatto per il biennio. A questo livello di studi la matematica deve avere uno sviluppo differenziato, non in relazione alle finalità generali di formazione o alla metodologia d'insegnamento, ma riguardo a specifici contenuti che devono caratterizzare le diverse preparazioni.

Tuttavia vi è un'esigenza di base unitaria di conoscenze, particolarmente significative sotto il profilo della formazione. Esse vanno attinte sia dalla matematica tradizionale che dalle più recenti conquiste di questa scienza, e devono divenire patrimonio di tutti i giovani, anche di quelli che frequentano scuole tecnico-professionali. Al contempo tutte le scuole -e mi riferisco in particolare a quelle liceali- devono aprirsi alla realtà sociale e tecnologica del nostro tempo.

L'antinomia che è sempre esistita tra formazione matematica nella scuola liceale e quella offerta dalla scuola tecnico-professionale va superata o comunque attenuata. Non si può pensare ad una scuola liceale come ad un laboratorio asettico che non può essere contaminato dal mondo intorno a sé, ad una scuola in cui la scienza ha diritto di entrare, ma in punta di piedi ed ignorando quella che è la sua traduzione operativa. La separazione tra scienza e tecnica si va facendo sempre più sottile, perchè se è vero che la tecnica per svilupparsi ha bisogno della scienza, è altrettanto vero che la stessa tecnica è divenuta impulso al progredire della ricerca scientifica.

Occorre perciò che nelle scuole liceali le discipline scientifiche non siano sganciate dalla realtà, che non si tenga solo conto degli aspetti speculativi, ma anche di quelli applicativi.

Al contempo la scuola tecnica non può mirare ad una formazione meramente professionale. Ogni formazione professionale, oggi come oggi -e proprio l'evoluzione dell'informatica ce lo insegna- deve avere come suo supporto una solida formazione di base, pur se con differente livello di astrazione, coerente con il momento di uscita dagli studi. E' necessario, pertanto, accentuare nelle scuole tecniche e professionali il ruolo delle conoscenze scientifiche, sta sul piano dei contenuti che del metodo, con una concessione funzionale tra momento di apprendimento scientifico e momento di apprendimento tecnico. Oggi, infatti, la maggior parte delle formazioni professionali ha un tempo di obsolescenza breve e che tende sempre più a diminuire. Nel periodo nel quale si svolge la normale carriera professionale di un individuo -all'incirca 450 anni- una preparazione esclusivamente professionale risulta rapidamente inadeguata e solo il possesso di un ampio universo conoscitivo e di un livello di astrazione adeguato al tipo di professione, può ovviare a questo. Una siffatta formazione permette di acquisire una professionalizzazione non statica, ma dinamica, evolutiva, di rapida riconversione.

In breve, occorre rivedere sia la posizione dei tradizionalisti, dei conservatori, di coloro che vogliono costruire l'uomo eterno trascurando l'hic et nunc, sia l'atteggiamento di quanti, preoccupandosi soltanto di adeguare l'istruzione alle richieste della società produttiva, sembrano dimenticare quasi la necessità dello sviluppo armonico della persona e finiscono con l'asservire anche le discipline più formative, qual è ad esempio la matematica, ad un mero utilizzo strumentale per le discipline tecniche.

In tale ottica si è voluto che una parte cospicua di tutti i programmi fosse costituita da un nucleo comune. Nella premessa ai programmi -la stessa per tutti- è scritto che "non possono essere trascurati la concezione della matematica come sistema assiomatico-deduttivo, del cui metodo si avvale ogni scienza che voglia analizzare i propri punti di partenza e saggiare i propri principi; i fondamenti di logica matematica che fanno da sostegno e da base culturale all'attività informatica; i processi induttivi che consentono, attraverso la statistica, di risolvere anche problemi di natura sociale ed economica, acquistando uguale dignità e valore dei tradizionali processi deduttivi".

Pertanto all'interno di tutti i programmi compaiono contenuti di logica e di informatica, di geometria, di algebra, di analisi, di statistica e di probabilità. In tutti i programmi, inoltre anche in quelli degli istituti tecnici e artistici, viene raccomandata la necessità di una riflessione sull'evoluzione storico-epistemologica delle idee matematiche fondamentali e delle sue connessioni con le altre scienze.

Altro criterio-guida nella stesura dei programmi è stato quello di un generale rafforzamento dell'insegnamento della matematica in tutti gli ordini di studi con adeguati spazi temporali, in special modo in quelli nei quali la formazione scientifica assume particolare rilevanza, o perchè le discipline tecniche caratterizzanti l'indirizzo richiedono il possesso di approfonditi strumenti matematici.

In proposito occorre osservare che le indagini statistiche mostrano che il rapporto tra il numero dei giovani che si iscrivono a facoltà scientifiche e il numero di quelli che pervengono alla laurea è alto, in media di 100 a 35/40. Il fenomeno della dispersione universitaria, per usare un termine coniato di recente dal Ministro Galloni a proposito della scuola dell'obbligo, è rilevante. Al momento sembra che il numero dei laureati in facoltà scientifiche sia insufficiente rispetto al fabbisogno nazionale. Risulta che non esiste disoccupazione tra i laureati in ingegneria, che i laureati in matematica ed in fisica sono numericamente inadeguati alle necessità delle scuole che -quanto meno in determinate provincie- sono costrette a far ricorso a studenti universitari per le supplenze brevi. Affermava tempo fa il presidente dell'ISTAT, prof. Rey, che nel 1992, quando saranno abbattute le frontiere professionali tra i paesi della CEE, l'Italia, esporterà medici ed importerà laureati in materie scientifiche.

Una delle cause, forse la principale, determinanti la caduta numerica della popolazione studentesca in questo tipo di facoltà dopo il primo o il secondo anno di studi è il gap tra l'attrezzatura mentale, di contenuti e di metodi, che l'università richiede e quella che la scuola secondaria offre. E di tale situazione non sempre si può far carico ai docenti. Anche il migliore di essi non può raggiungere risultati apprezzabili per un alto numero di alunni e metodologie a parte -con un orario d'insegnamento del tutto inadeguato, non confrontabile con quello di alcun paese europeo ed extraeuropeo, nei quali negli ultimi anni delle scuole ad indirizzo scientifico, la matematica occupa dalle 5 alle 8 ore (e più) settimanali in ciascun anno. In Italia abbiamo, invece, un liceo scientifico nel quale vi sono 9 ore settimanali complessivamente per l'intero ciclo triennale (tre per anno). Né miglior sorte ha la matematica negli altri ordini di scuola fatta eccezione dell'Istituto tecnico per periti informatici e dell'Istituto tecnico per ragionieri programmatori, entrambi di relativa recente istituzione.

E' apparso perciò necessario un rafforzamento dei contenuti, mirato all'allargamento, ma soprattutto all'approfondimento.

Nella scelta di essi si è cercato di contrarre o eliminare quelli poco significativi sotto il profilo di un potenziamento intellettivo e di una formazione critica e comunque che hanno perso di attualità con l'evoluzione della scienza e della tecnica.

Così la trigonometria è ridotta, fatta eccezione di qualche indirizzo, ai concetti essenziali, così nel calcolo, algebrico e infinitesimale, sono privilegiate l'acquisizione dei concetti e la padronanza delle procedure rispetto agli esercizi fini a se stessi, rifuggendo pertanto dall'eccessiva particolarità e complessità, e da tutti quegli artifici che vengono introdotti per superarle. Così l'avvento degli strumenti automatici di calcolo fa perdere di significato alle tavole logaritmiche e trigonometriche ed al regolo calcolatore, il cui uso è pertanto eliminato.

Viceversa sono ripresi ed approfonditi i concetti di logica che devono permeare tutti i capitoli della matematica come strumento di ragionamento e come controllo critico di esso. E' ripresa la trattazione dei capitoli di informatica, già iniziata nel biennio, ad un livello di maggiore formalizzazione; si è invece volutamente tolto nel primo tema il paragrafo "laboratorio di informatica" e le indicazioni relative sono anticipate nella premessa. Ciò per significare che l'informatica come concetti e come principi tende ad acquisire una sua autonomia, mentre come metodo e come strumento non è un capitolo staccato dalla matematica, ma deve strettamente integrarsi con essa ed essere utilizzata nei contenuti via via sviluppati e nei quali il suo contributo può risultate significativo. In conclusione, logica, informatica e matematica devono integrarsi e armonizzarsi pienamente tra loro.

Viene potenziato lo studio dell'analisi, i cui concetti essenziali, come si è detto, sono introdotti in tutti gli ordini di studi. In alcuni indirizzi esso è integrato dagli elementi fondamentali di calcolo numerico, alle cui procedure si raccomanda di fare ricorso, nel calcolo algebrico e nel calcolo infinitesimale, ogni volta che il problema considerato conduca a situazioni complesse, evitando gli inutili artifici dei metodi tradizionali. Insomma si vuole fare una matematica dell'esatto e una matematica dell'approssimato, del continuo e del discreto.

Sono ripresi e sviluppati i temi della probabilità e della statistica, in maniera leggermente differenziata a seconda degli indirizzi. Così, a seconda dell'indirizzo, è posto l'accento su determinati concetti e su particolari argomenti: ad esempio, nell'istituto magistrale, nel quale è eliminata l'attuale trattazione dell'aritmetica razionale, si invita ad una lettura critica dei programmi delle elementari, in funzione dei quali vanno ,studiati i vari concetti matematici, con un'attenzione particolare al concetto di numero (intero, razionale, etc.) e alle relative operazioni; nell'istituto tecnico commerciale sono invece ripresi e approfonditi i temi della matematica finanziaria ed attuariale, cui è aggiunto quello della ricerca operativa. Altre distinzioni compaiono nei programmi degli altri ordini di studio.

In tutti gli indirizzi viene restituito vigore alla geometria riducendone alcuni capitoli, ma ampliandone altri di maggiore valenza formativa.

In generale nel triennio si chiede allo studio della geometria, come del resto a quello degli altri capitoli della matematica, di compiere un salto di qualità.

Se a livello di scuola media l'allievo, attraverso la geometria deve sviluppare soprattutto l'intuizione e occorre perciò fare una geometria percettivo -manipolativa, nel biennio della scuola superiore egli deve scoprire il ragionamento e come questo superi l'intuizione pur senza escluderla, avviandosi al contempo a comprendere le strutture del ragionamento. Lo studente perciò deve non solo saper ripetere correttamente teoremi appresi, ma essere in grado di sviluppare in modo autonomo dei semplici ragionamenti di cui deve comprendere la costruzione (e in ciò la logica gli viene in aiuto). In questo senso appare appropriato fare nel biennio, dunque, una geometria razionale, ma parziale, "locale", che partendo da "fatti geometrici considerati come evidenti e dunque ammessi come veri" sviluppi un segmento di geometria.

Nel triennio il processo va perfezionato e condotto a termine, attraverso l'ulteriore sviluppo dell'intuizione, l'affinamento delle capacità deduttive e l'acquisizione della piena consapevolezza delle strutture del pensiero.

Il tutto va inserito in un processo di generalizzazione che faccia prendere coscienza all'alunno non solo dell'isolato ragionamento, ma della struttura assiomatico-deduttiva della teoria geometrica e della teoria matematica in generale, in cui il punto di partenza prescinde dalla stessa evidenza.

Di qui il riferimento nei programmi alla questione delle parallele e delle geometrie non euclidee come opportuno contro-esempio, ed anche l'invito ad una esemplificazione di geometrie finite.

La presentazione assiomatica della geometria deve essere a mio avviso, dunque, un punto d'arrivo e non di partenza.

E' nel triennio, infine, che deve essere acquisito pienamente il rigore, che certamente non va imposto dal docente, ma conquistato dall'alunno a piccoli passi fino a che ne senta egli stesso l'esigenza: perchè, non dimenti-chiamolo, deve essere l'alunno il protagonista della propria formazione matematica.

Per quanto concerne la metodologia, pur nel necessario pluralismo, si è sentita la necessità di suggerire, in linea con i programmi del biennio, un insegnamento condotto per problemi. Il termine problema va inteso nella sua eccezione più ampia, riferito cioè non solo ai temi relativi a fenomeni naturali, economici, della realtà in genere, ma anche ai problemi chè scaturiscono all'interno della stessa matematica, la cui soluzione ha determinato spesso il progredire di questa scienza.

E' più corretto -per taluni per una necessità di ordine psicologico-didattico, per altri per la natura stessa della matematica- partire dall'analisi del problema e dei suoi dati per giungere alla scoperta delle relazioni matematiche che li sottendono; è più proficuo muovere da situazioni apparentemente diverse per giungere alla scoperta di concetti, idee, strutture unificanti entro cui si collocano tante altre situazioni, piuttosto che presentare delle teorie già sistemate: fare, in altri termini, una matematica costruttiva anziché descrittiva. E' altrettanto importante, tuttavia -è quanto viene sottolineato nella premessa ai programmi- collegare razionalmente le nozioni teoriche via via apprese in un processo di sistemazione dapprima parziale e poi globale, onde evitare l'episodicità e, in ultima analisi, la scarsa incidenza degli apprendimenti. Infatti, se è vero che l'esame del problema può suggerire e far scoprire procedimenti matematici -e in tal senso sviluppa le capacità creative e inventive degli allievi- non è possibile procedere alla matematizzazione di problemi più complessi senza il possesso pieno delle teorie già incontrate.

La portata della proposta metodologica va al di là della stessa matematica, il cui apprendimento certo ne guadagna perchè è metodo che determina motivazione, interesse, consapevolezza; va al di là della stessa matematica perchè i contenuti potranno un domani essere dimenticati, ma rimarranno nell'allievo un atteggiamento mentale e un metodo per affrontare i problemi, di qualunque natura essi siano.

In sintonia con quanto prima detto si è ritenuto infine fondamentale suggerire di dedicare parte dello studio dell'ultimo anno ad un riesame critico e ad una sistemazione logica degli argomenti appresi nell'arco degli studi secondari in modo che l'allievo possa pervenire ad una visione chiara del valore e dell'essenza della matematica.

La conoscenza si realizza attaverso un processo evolutivo poiché la formazione di concetti, l'acquisizione di metodi, l'apprendimento di procedure non avvengono immediatamente ma lentamente, attraverso il ritornare su di essi in modo sempre più approfondito e più allargato.

In questo sviluppo a spirale sono però necessari dei momenti di pausa, ad esempio al termine dello svolgimento di una unità didattica, alla conclusione dell'anno scolastico o di un ciclo di studi, per un ripensamento critico su quanto appreso ed una sistemazione via via più completa della disciplina.

E' necessario, scrive Michele Pellerey in un suo libro (Progettazione didattica, TO, SEI, 1983) "riprendere di tanto in tanto temi e concetti cercando di far emergere quanto è rimasto come sedimentazione a lungo termine delle esperienze di apprendimento precedenti'. Solo così, vorrei aggiungere, si giunge ad una comprensione piena dei concetti, al dominio della trama matematica che li lega, ad un apprendimento che incide significativamente sulle strutture cognitive, intellettive e dell'intera personalità del giovane.

I programmi elaborati riguardano i licei classici e scientifici, l'istituto magistrale, gli istituti tecnici industriali, comemrciale e per geometri, gli istituti d'istruzione artistica (liceo artistico e istituto d'arte). Esistono anche progetti di sperimentazione per la scuola magistrale e per il liceo linguistico, elaborati dalla Direzione Generale per la scuola non statale, i cui programmi di matematica sono in sintonia con quelli delle scuole dianzi elencate. Per gli istituti professionali il problema è, per vari motivi, molto più complesso. Al momento è in corso di studi un progetto di sperimentazione, denominato Progetto '92, che prevede una matematica innovata e rafforzata che si riallaccia per i primi due anni ai noti programmi.

I contenuti dei vari programmi sono presentati, in analogia con quelli del biennio, in blocchi tematici -sei o sette a seconda dell'ordine di scuola -ciascuno dei quali è seguito immediatamente da un commento che propone alcune indicazioni metodologiche. Anche in questi programmi non è prevista una rigida scansione annuale (per alcuni tipi di scuola sono però dati dei suggerimenti di percorsi didattici), che è demandata ai consigli di classe nell'ambito della programmazione. Spetta al docente, e al consiglio di classe per i necessari collegamenti interdisciplinari, definire infatti l'itinerario curriculare da percorrere in coerenza con la situazione in cui operano.

La presentazione della matematica per temi e non secondo una struttura unitaria sta a significare tutta la complessa ricchezza di questa scienza. Ciò non vuol dire che i singoli temi vadano sviluppati per settori separati con la conseguenza di una conoscenza frammentaria ed isolata degli argomenti. La trattazione deve procedere parallelamente, integrando, ma senza confonderli, l'un tema con l'altro, in modo da metterne in luce le reciproche connessioni anche al fine di una loro più completa comprensione.

Il lavoro fatto rappresenta un primo studio, una proposta che può essere modificata e perfezionata.

Ciò che è importante è continuare nel cammino intrapreso, mirando non solo ad adeguare contenuti e metodi dell'insegnamento della matematica alla evoluzione dei tempi, ma anche a restituirle quella dignità che aveva nella scuola tanti anni fa e che ha perduto a causa di un'errata interpretazione del concetto di cultura.

Alla matematica in tutto il mondo è stato riconosciuto un ruolo essenziale nella scuola, tanto che in Francia il liceo più prestigioso e anche più selettivo è quello che conduce al baccalaurèat scientifico e in Inghilterra, nella recentissima proposta di riforma, alla matematica si attribuisce l'importante ruolo di capolista delle discipline di insegnamento fondamentali. E' evidente che l'Italia non deve rimanere il fanalino di coda dei paesi europei.

Questo è un discorso che si fa ormai da tanti anni e ritengo che i tempi siano ormai maturi. Il compito che ci proponiamo è senz'altro arduo, ma penso che esso sia realizzabile se i docenti, il Ministero, le associazioni matematiche -prima fra tutti l'UMI- collaboreranno con spirito costruttivo, impegnandosi in un confronto dialettico ma non polemico, mettendo a disposizione il patrimonio di scienza e di esperienza che possiedono.

Alberto Facchini

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Udine

CONSIDERAZIONI A MARGINE DI UNA INDAGINE SUI LIBRI DI TESTO DI MATEMATICA PER LE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI

Nell'ambito del Progetto strategico del Consiglio Nazionale delle Ricerche "Tecnologie e innovazioni didattiche" venne iniziata tre anni fa, nel 1985, un'indagine sui libri di testo di materie scientifiche per le scuole medie superiori. Oggetto dell'indagine erano i libri di testo di tutte le materie scientifiche "di base", ossia chimica, fisica, matematica, scienze della terra (geografia fisica e geologia) e scienze della vita (biologia e scienze naturali). Per quanto riguarda la matematica l'indagine si è conclusa quest'anno e i risultati sono stati pubblicati nel giugno scorso in un volume curato da P. Quattrocchi e C. Fiori ed edito da Consiglio Nazionale delle Ricerche ("Esame di testi di matematica largamente adottati nelle scuole secondarie superiori - Anno scolastico 1985-86", Modena, 1988).

Non è mia intenzione voler fare qui una relazione sui metodi e sui risultati dell'indagine: non sarebbe compito mio, e poi le relazioni tendono spesso ad essere piuttosto noiose ... .

Desidero invece presentare alcune osservazioni e considerazioni che sono state fatte da me e da altri docenti che hanno collaborato all'indagine. Le opinioni e le osservazioni che presenterò rispecchieranno largamente il mio punto di vista, e quindi si tratterà di opinioni soggettive; tuttavia esse si baseranno sempre sui dati raccolti nel corso dell'indagine, e quindi su dati oggettivi.

L'indagine

Anzitutto è indispensabile che presenti brevemente come si è articolata l'indagine. Si è svolta in due fasi successive. Nella prima fase esaminando un campione rappresentativo di scuole è stato effettuato un censimento dei testi adottati, e sono stati così individuati quali fossero i testi più diffusi. Nella seconda fase questi testi, i più diffusi, sono stati analizzati ciascuno da più docenti, sia universitari che delle scuole superiori, al fine di valutarne i contenuti e l'impostazione didattica. Le valutazioni così ottenute sono state poi "mediate" per poter ottenere per ogni singolo testo un'unica valutazione che, raccogliendo i pareri di numerose persone, fosse la più oggettiva possibile.

Hanno collaborato all'indagine esaminando i testi circa una sessantina di docenti. Sono stati volutamente scelti sia docenti di scuola superiore che docenti universitari (ordinari, associati e ricercatori). In questo modo si sono potuti avere a disposizione diversi tipi di esperienze, sensibilità e punti di vista. E' stata inoltre privilegiata una certa distribuzione geografica dei collaboratori. Si è infatti osservato che i testi maggiormente adottati, ossia le preferenze degli insegnanti nell'adottare un testo piuttosto che un altro, variano considerevolmente da ragione a ragione. Hanno collaborato all'indagine circa sessanta docenti, provenienti soprattutto da Milano, Modena, Padova, Roma, Savona e Udine. Il mio compito era quello di coordinare il gruppo di Padova-Udine. In questo modo ho avuto a disposizione un punto di osservazione abbastanza privilegiato ed ho potuto raccogliere numerose considerazioni sia di altri coordinatori che dei docenti del gruppo da me coordinato.

Il primo fatto che è stato osservato nel corso dell'indagine è la presenza di un numero di titoli di testi adottati largamente eccessivo. Il campione esaminato era composto di 7.621 classi (corrispondenti a circa 190.000 studenti) e si è rilevato che in tale campione erano stati adottati 379 testi di matematica distinti. Nessuno sa esattamente quanti siano i libri di testo di matematica adottati nelle scuole superiori italiane, ma certamente si tratta di un numero esorbitante se nel nostro campione siamo riusciti a contarne 379! Il motivo di tale dispersione è evidente: la matematica viene insegnata nelle scuole di ogni ordine e grado, e se si stimano in circa una decina di milioni gli studenti ci si rende conto di quanto ampio sia il mercato e quindi quanto questo possa invogliare a scrivere e a produrre un gran numero di testi. Il risultato è poi naturalmente una larga dispersione nelle scelte degli insegnanti.

Perchè è stato scelto l'anno scolastico 85/86

I dati a cui mi sono riferito sino ad ora e a cui mi riferirò nel seguito sono relativi all'anno scolastico 1985/86, in quanto è a tale anno scolastico che si riferisce l'indagine svolta nel quadro del progetto strategico del CNR . Il fatto che l'indagine si basi sull'85/86, ossia su un periodo ormai piuttosto lontano nel tempo, può apparire a prima vista insoddisfacente. A mio avviso questo era però inevitabile se si voleva fare un'indagine il più possibile obiettiva ed uniforme.

Non c'era altro modo di procedere se non il "fotografare" la situazione dei libri di testo in un certo istante e poi analizzare la fotografia ottenuta; tenendo presente che il progetto è stato approvato dal CNR nel 1985, si capisce perchè la "fotografia" presa sia relativa all'anno scolastico 85/86. Purtroppo sono stati necessari poi quasi tre anni per analizzare i dati: ho già detto che abbiamo trovato che i testi di matematica adottati erano 379; ci si è subito resi conto che era impossibile recensire e valutare con attenzione tutti questi testi ed è stato così deciso di limitarsi ai circa cinquanta testi più adottati. Dopo aver scelto le modalità con le quali effettuare l'indagine è stato necessario reperire i testi, trovare una sessantina di collaboratori di buona volontà che avessero i requisiti necessari, dare il tempo ad ogni collaboratore di analizzare più testi, mediare le varie valutazioni raccolte per poter arrivare per ciascun testo ad un'unica recensione, ed infine pubblicare i risultati finali. E' facile pertanto rendersi conto di quanto tempo e quanto lavoro sia stato necessario. Ora è vero che ci troviamo di fronte ad una fotografia e ad un'analisi della situazione com'era qualche anno fa, ma non c'era altro modo di procedere se si voleva un'indagine il più possibile accurata.

I testi esaminati

Chi ha scorso i titoli dei 47 testi da noi esaminati, vale a dire i testi più adottati nel campione a nostra disposizione, si è accorto subito che di questi 47 testi più adottati molti possono ormai vantare una veneranda età. Troviamo un libro arrivato alla ventitreesima edizione, un altro alla trentaquattresima, un altro ancora alla trentaseiesima. Si tratta certamente di testi gloriosi, sui quali si sono formati decine e decine di generazioni di studenti, ma è innegabile che si tratti talvolta di testi che mostrano tutti i loro anni. Alcuni hanno un'impostazione risalente a prima della guerra! I non addetti ai lavori credono forse che la matematica sia sempre la stessa da millenni, e ovviamente molto di quello che si insegna alle scuole superiori è noto da parecchio tempo (i babilonesi dell'epoca di Hammurabi sapevano risolvere la equazioni di secondo grado, i primi contributi indiani alle scienze esatte che ci siano giunti ben conservati datano intorno al tre-quattrocento d.C. e contengono ad esempio tavole dei seni). Gli addetti ai lavori sanno invece che in questi ultimi trent'anni si è notevolmente evoluto sia il modo di "fare scuola" in generale, che il modo in cui si insegna la matematica in particolare: la scuola superiore si è trasformata da scuola di élite a scuola di massa, la pedagogia ha cambiato le metodologie dell'insegnamento,e, infine c'è stata la rivoluzione portata dalla calcolatrice tascabile e soprattutto dal personal computer. In realtà non sembra che le adozioni effettuate siano riuscite a stare al passo con questa evoluzione.

Tenendo presente questa lentezza nell'aggiornare la scelta dei testi e a quanti anni fa risalga l'impostazione didattica di alcuni di essi è facile immaginare quale sia l'aspetto principale messo in luce dalla nostra indagine: la trattazione nella maggioranza dei testi da noi esaminati risulta essere sostanzialmente nozionistica, i testi di geometria conservano quasi tutti la trattazione assiomatica tradizionale, gli esercizi tendono ad essere ripetitivi e poco variati, non si parla di algoritmi o di programmazione.

Alcuni parametri per valutare un testo

Nell'esaminare un testo è necessario tenere in considerazione numerosi parametri. E' necessario valutare le modalità di presentazione, i contenuti, la chiarezza delle spiegazioni, come sono state sviluppate la parte teorica, gli esercizi svolti, gli esercizi veri e propri lasciati allo studente. In particolare per quanto riguarda gli esercizi è necessario esaminare quanto essi siano pertinenti, numerosi, vari, graduati. Infine un buon libro di testo non dovrebbe ovviamente contenere troppi errori.

Quella di trovare vari errori non perdonabili è stata invece un po' una sopresa, almeno per me. Su questo punto tornerò comunque nel seguito, facendo anche qualche esempio.

Restiamo per il momento all'aspetto metodologico. Una cosa che è stata riscontrata in alcuni testi è come essi siano organizzati in modo di dare inizialmente delle definizioni non del tutto precise e di riprendere correttamente gli argomenti solo in una seconda fase. Questo avverrebbe per motivi didattici. E' una scelta che lascia perplesso qualcuno. Lo studente tende ad usare il libro di testo non tanto per capire i singoli concetti (il primo impatto con la nuova nozione e quindi la comprensione avviene in generale durante la lezione e dalla viva voce dell'insegnante); lo studente tende piuttosto ad usare il testo come punto di riferimento per consultazioni successive. Ben venga quindi una gradualità nelle spiegazioni date nei testi, ma non diamo allo studente la possibilità di ritornare più volte su concetti inesatti. L'insegnante può durante una spiegazione essere temporaneamente impreciso per motivi didattici, ma il testo, sul quale lo studente sofferma più a lungo l'attenzione e nel quale lo studente cerca delle conferme, non dovrebbe contenere errori "voluti" dall'autore. In un testo ci è capitato ad esempio di trovare una quarantina di pagine dedicate alle funzioni e di non riuscire a capire se si stesse parlando di funzioni parziali (ossia di funzioni definite solo su un sottoinsieme del dominio) o di funzioni totali (cioè definite su tutto il dominio).

Quale uso del testo

Nella scelta e nella valutazione di un testo è molto importante tenere presente quale uso di vuole fare del testo stesso. Come ho già fatto notare, molti studenti, e paradossalmente si tratta proprio dei più bravi, non leggono la parte di teoria. Tutto dipende naturalmente da come l'insegnante organizza il proprio corso, ma usualmente lo studente, almeno quello "bravo", capisce le cose dalla spiegazione dell'insegnante o al più alle prime interrogazioni successive.

Non guarda nemmeno la parte di teoria nel testo se non per una fugace consultazione nei momenti in cui gli serve qualche formula semidimenticata. Il vero utente della parte di teoria è invece il più delle volte lo studente mediocre o addirittura rimandato, che è costretto suo malgrado a rivedersi da solo o con l'ausilio di qualcuno quanto non aveva capito in precedenza.

Io non condanno assolutamente questo modo di usare il testo nella scuola superiore: nella trasmissione delle tecniche e dei metodi del ragionamento logico-matematico, una delle connotazioni fondamentali della nostra specie, la lezione, la figura dell'insengante, la sua preparazione, la sua esperienza, il suo entusiasmo giocano un ruolo di gran lunga superiore a quello delle spiegazioni scritte nel libro. L'insegnante pigro può far leggere in classe il testo, ma questo avverrà a scapito della vivacità della lezione e dell'attenzione degli studenti.

Naturalmente il fatto che alcuni studenti e alcuni docenti usino il libro di testo solo come libro di esercizi o poco più non può e non deve essere un alibi per l'esistenza di libri in cui la parte di teoria è scritta male o carente. Anzi, proprio il fatto che gli studenti mediocri siano utenti della parte di teoria più di quanto lo siano gli studenti migliori dovrebbe spronare a renderla più chiara e semplice possibile, ma corretta.

Gli esercizi continuano a giocare un ruolo determinante nell'apprendimento della matematica. E' il momento in cui lo studente può vedere finalmente se è in grado di applicare da solo quanto ha imparato, di dominarlo. Gli esercizi gli danno modo di consolidare la sua preparazione, conferendogli quella sicurezza che è così importante per poter passare all'apprendimento dei concetti successivi; e inoltre sappiamo tutti che ogni qualvolta lo studente termina un esercizio, controlla il risultato e vede che è giusto, prova quella piccola soddisfazione che può sembrare poca cosa a prima vista, ma che ha una notevole importanza come stimolo e come gratificazione personale.

Naturalmente gli esercizi di matematica sono di più tipi. Ci sono gli esercizi di puro calcolo, ci sono i problemi (che possono eventualmente legare tra loro geometria, algebra, analisi, fisica, economia, statistica, eccetera) ci sono gli esercizi euristici che pongono lo studente in una prospettiva di "ricerca". Sono tutti egualmente importanti. Teniamo presente però alcune cose. Innanzitutto lo studente che esce dalla scuola superiore deve saper fare i conti con equazioni e polinomi e saper usare, ad esempio, le parentesi (all'università arrivano talvolta ragazzi anche abbastanza bravi che per scrivere "meno uno per meno uno" scrivono -1.-1 senza curarsi delle parentesi). A nessuno interessano invece i sistemi che si risolvono con strani artifici. Lo studente dimenticherà rapidamente come sono fatte le formule di Briggs o a cosa servono. Fuori del liceo non gli servità probabilmente mai più il metodo di Tartinville (che purtroppo serve ancora per l'esame di maturità). Un minimo di destrezza con le principali tecniche di calcolo è invece necessaria: questo non è nozionismo o pedanteria. Si ricade qui nel solito problema, che è quello di decidere quale nozione sia più utile di altre. Una delle difficoltà nel programmare una buona educazione matematica a livello di scuola secondaria superiore è proprio quello di riuscire ad essere equilibrati tra utilità, rigore e intuizione.

Gli errori

E veniamo ad un'altra delle cose che è stata messa in luce nel corso dell'indagine: la quantità di errori che si trovano in alcuni testi in commercio. Chi ha scritto libri di matematica, o anche solamente una dispensa, sa quanto sia facile lasciarsi sfuggire delle imprecisioni e fare dei piccoli errori. Questo però non è tollerabile in testi per i quali vengono fatte più riedizioni e più ristampe! E non si creda che gli errori da noi trovati siano piccole sviste, o imprecisioni, o errori di stampa, o che si tratti di quelle "inesattezze volute per fini didattici" di cui parlavo prima. Nel corso dell'indagine qualcuno ha addirittura malignato che forse a volte erano gli stessi autori che non avevano capito il concetto che stavano spiegando. E' molto importante comunque tener presente che fare un lavoro esaustivo alla ricerca di imperfezioni non era e non voleva essere l'oggetto dell'indagine: il nostro obiettivo era quello di analizzare complessivamente il libro e non quello di fare i correttori di bozze.

Farò ora alcuni esempi.

Alcuni errori si trovano nell'uso dei quantificatori. Ecco come vengono presentate in un testo l'unione e l'intersezione degli insiemi A e B:

$$A \cap B = \{x \mid \forall\, x \in A \text{ e } \forall\, x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x \mid \exists\, x \in A \text{ oppure } \exists\, x \in B\}.$$

Non credo siano necessari commenti!

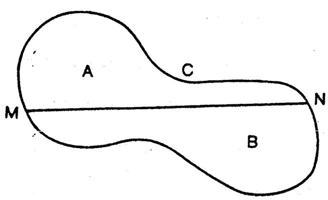
Ecco un altro uso errato dei quantificatori tratto da un testo distinto dal precedente. L'autore sta spiegando che se a è un numero reale > 1, a^n tende ad infinito quando n tende ad infinito. Ecco le sue parole:

"... Ciò si esprime dicendo che le potenze di un numero reale a maggiore di 1, al tendere all"'infinito dell'esponente, tendono all'infinito (o hanno per limite l'infinito) e quindi $\forall\, a \in R$, $a > 1$, $\forall\, n \in Q+$, si scrive

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty\,."$$

ovviamente quel $\forall\, n \in Q+$ non c'entra assolutamente.

Nei libri di geometria si trovano spesso degli errori quando si cerca di usare il linguaggio degli insiemi. Ecco un esempio: l'autore sta considerando la superficie piana disegnata nella figura seguente



ecco allora, dice l'autore, che potremo scrivere

$$\{A\} \cup \{B\} = \{\text{segmento } MN\};$$
$$\{A\} \cap \{B\} = \{C\}.$$

Anche qui non sono necessari commenti. Una proprietà che tende ad essere una delle più sfortunare è la proprietà antisimmetrica. Riporto testualmente come la presenta una autore (grassetto e interpunizione sono quelli del testo):

Antisimmetrica: se la relazione R è vera per la coppia (x, y), allora "non deve" essere "**mai**" vera per la coppia (y, x).

Sinteticamente tale proprietà si può esprimere in due modi:

a) $\forall\, x, y \in A : x R y \Rightarrow y \not R x$

b) $\forall\, x, y \in A : (x R y \text{ et } y R x) \Rightarrow x = y$.

Qui a) e b) non sono equivalenti; b) è la definizione usuale, giusta, mentre a) e la descrizione a parole che la precede sono scorrette.

Nell'esempio che segue l'autore fa uso di una formalizzazione errata:

"Consideriamo la seguente frase della lingua italiana: "L'Asino morde Bruno".

Abbreviamola, usando il simbolo m al posto del predicato "morde", il simbolo B al posto del complemento oggetto "Bruno". Essa perciò si può scrivere in questo modo: "A m B".

Consideriamo altre frasi ed abbreviamole: "L'Asino morde Carlo" diventa "A m C".

"Bruno è figlio di Diego" diventa "B f D".

La scrittura per esteso della formula "(A m C) m B" è "L'asino, che morde Carlo, morde Bruno".

Qual è la scrittura per esteso delle seguenti formule?

a) A m (B f D)

b) B f (C f D)

c) (A m (C f D) m B"

Ovviamente la scriuttura per esteso della formula "(A m C) m B" non è "L'asino, che morde Carlo, morde Bruno", ma è "La proposizione 'L'asino morde Carlo' morde Bruno". E la formula "A m (B f D)" si interpreta come "L'asino morde la proposizione 'Bruno è figlio di Diego' ".

Ecco un paio di "teoremi" di analisi tratti da uno dei testi adottati all'ultimo anno del liceo scientifico:

"Se una funzione univoca ammette un asintoto orizzontale, questo è unico in base al teorema dell'unicità del limite.

Una funzione infinitivoca ha infiniti asintoti orizzontali o nessuno".

("Funzione infinitivoca" vuol dire "funzione che ad ogni valore del dominio associa infiniti valori"). Di controesempi se ne possono fare a bizzeffe.

Quella che segue è una spiegazione incomprensibile di cosa sia l'inverso di una funzione:

"Funzioni inverse.

Se una funzione sotto forma implicita:

$$F\ (x;\ y) = 0$$

può essere esplicitata rispetto alle due variabili e se le due funzioni così ottenute:

$$y = f(x) \qquad e \qquad x = g(y)$$

sono univoche e tali che sussistano le identità:

$$y = f[\, g(y)] \qquad e \qquad x = g[\, f(x)], \qquad (a)$$

tali funzioni, (aspetti diversi di una stessa funzione), si dicono l'una inversa dell'altra e se, in una di esse, la x viene scambiata con la y e viceversa, anche le due funzioni:

$$y = f(x) \qquad e \qquad y = g(x) \qquad (b)$$

sono ancora funzioni inverse.

Due funzioni inverse del tipo (a) hanno diagrammi coincidenti (trattandosi, come abbiamo detto, di due aspetti diversi di una stessa funzione) mentre due funzioni inverse del tipo (b) hanno diagrammi simmetrici rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante":

Concludo questa breve carrellata di esempi con un esercizio che lascia credere che tra due insiemi ci debbano essere sempre delle corrispondenze canoniche, da preferirsi:

"Siano $A = \left\{ \frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}, 3 \right\}$ e $B = \left\{ \frac{3}{2}, 6, 9, 2 \right\}$.

Rappresenta con i diagrammi di Venn i due insiemi e la corrispondenza tra A e B. Scrivere anche la relazione che permette di passare da un elemento a   A al corrispondente elemento b   B".

Ovviamente tra A e B, due insiemi di quattro elementi, ci sono molte corrispondenze, e non una sola. Con un po' di attenzione ci si rende poi conto che gli elementi di B si ottengono moltiplicando per 3 gli elementi di A, e quindi questo era forse ciò che voleva l'autore, ma l'esercizio, in quanto tale, è fuorviante.

Si potrebbero citare molti altri esempi, ma mi fermo qui. Voglio fare solo tre piccole osservazioni conclusive sulla questione degli errori. Primo, non ho voluto dire ovviamente che in tutti i libri più adottati ci siano errori grossolani una pagina sì e una no. Ho inteso piuttosto far notare come le "perle" non manchino. Secondo, gli errori non sono certo l'unico parametro per valutare un libro. Terzo, gli esempi di cui sopra sono stati tratti da testi distinti.

I testi e i nuovi programmi di matematica

E veniamo ad un'altra questione a parer mio piuttosto interessante. In che relazione stanno tra loro i testi di cui abbiamo parlato fino ad ora e i nuovi programmi di matematica? Più precisamente, i testi da noi esaminati possono essere usati da chi segue i nuovi programmi? In verità anche questo problema non era oggetto dell'indagine, ma il titolo di questo mio intervento mi lascia la libertà di poter fare qualche considerazione anche su questo argomento.

Faccio notare comunque che su questo punto la mia è una vera e propria disquisizione accademica: il Consiglio Nazionale della Pubblica Istruzione ha espresso parere favorevole circa i nuovi programmi di matematica per il primo biennio delle scuole secondarie superiore nell'aprile 1986, e quindi non si può pretendere che di essi si tenesse in considerazione nei libri di testo dell'anno scolastico 85/86. Quindi su questo punto non avrebbe senso lanciare accuse né ai testi o ai loro autori né a noi che non abbiamo tenuto conto dei nuovi programmi di matematica nel corso della nostra indagine. La questione è comunque interessante ed attuale e mi sembra opportuno accennarne brevemente.

Ovviamente dal punto di vista dei nuovi programmi i testi da noi esaminati sono complessivamente piuttosto carenti. Vediamo in dettaglio in quali punti si manifesta maggiormente questa carenza.

Abbiamo già visto che gli argomenti di logica sono trattati in modo piuttosto dilettantesco (avevamo parlato prima dell'uso errato dei quantificatori, ma sarebbe possibile citare l'esempio di un testo che dice che "p implica q è vera quando p e q sono vere, ed è falsa quando p è vera e q è falsa" dimenticandosi di tutti gli altri casi possibili). Gli elementi di informatica e il laboratorio di informatica (e quindi ad esempio l'utilizzazione di un linguaggio di programmazione) vengono trattati da pochissimi dei testi esaminati (si potrebbero contare sulle dita di una mano). Gli argomenti nei quali i testi reggono meglio il confronto coi nuovi programmi sono ovviamente quelli nei quali si ha una maggiore coincidenza tra i vecchi programmi e i nuovi: geometria (piano euclideo, piano cartesiano, ecc.) e algebra classica (radicali, sistemi, ecc.). Anche qui però nei nuovi programmi vi sono stati dei notevoli cambiamenti nell'ordine in cui le cose vengono presentate e quindi è molto difficile trovare ad esempio nei testi per il secondo anno del liceo scientifico da noi esaminati quello che fino ad ora si faceva al quarto e che ora si trovano invece nei nuovi programmi del biennio (questo è il caso, tanto per fare un esempio, del seno, coseno, teorema dei seni, teorema del coseno). Abbastanza buona sembra essere invece la situazione per quanto riguarda il calcolo delle probabilità, che almeno è trattato in quasi tutti i testi di matematica da noi incontrati (intendo i testi per il secondo anno dello scientifico che non sono solamente testi di geometria). La statistica descrittiva, prevista dai nuovi programmi e che è così importante nella vita sociale ed economica, tende invece ad essere piuttosto trascurata.

In questa mia brevissima analisi sull'adeguatezza dei libri di testo da noi esaminati rispetto ai nuovi programmi mi sono volutamente limitato all'aspetto macroscopico, ossia ai contenuti. In realtà con i nuovi programmi si intende anche e soprattutto fornire allo studente un approccio nuovo e migliore della matematica, sia per quanto riguarda gli argomenti "nuovi" che quelli tradizionali. Ma non avrebbe senso e sarebbe antipatico voler cercare l'impostazione metodologica auspicata nei nuovi programmi in testi apparsi quando quegli stessi programmi erano ancora allo studio.

Conclusioni

Quella che ho commentato era la situazione nell'anno scolastico 85/86, ossia la situazione nell'anno esaminato dall'indagine da noi effettuata. E quale sarà la situazione oggi, nell'88/89? Ovviamente un'indagine accurata non è disponibile, ma credo che per quanto riguarda i libri di testo la situazione si sia modificata e si stia modificando in modo non trascurabile. Questo avviene sotto tre spinte principali. Primo, la diffusione dell'informatica è ormai capillare e quindi il libro di testo deve contenere oggi le nozioni di base dell'informatica. Come ho detto prima, questo non accade in quasi nessuno dei testi da noi esaminati. Secondo, i nuovi programmi stanno contribuendo a creare una nuova sensibilità presso i docenti, e questo si traduce agli effetti pratici anche nell'esaminare sotto altri aspetti il testo che si intende adottare. Terzo, c'è la spinta delle case editrici: negli ultimi due-tre anni sono apparsi sul mercato numerosi nuovi libri di testo. E benchè, come si è visto, le scelte degli insegnanti tendano ad essere piuttosto conservatrici e i testi più vecchi vengano sostituiti dai nuovi con molta lentezza, proprio la diffusione dell'insegnamento dell'informatica e quindi l'assoluta necessità di adottare un libro di testo comprendente anche, ad esempio, un capitolo relativo all'apprendimento di un linguaggio di programmazione, sta costringendo ed ha costretto negli ultimi tre anni molti docenti a modificare la scelta del testo. Fotografando la situazione nell'anno scolastico 88/89 otterremmo probabilmente un'immagine molto divera da quella dell'85/86. Il materiale da noi raccolto nel corso dell'indagine e le osservazioni che ne scaturiscono consigliano comunque di considerare con molta attenzione e cautelail problema della qualità del testo da adottare.

Carlo Cercignani

Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano

INSEGNARE LA MATEMATICA A CHI NON INTENDE DIVENTARE MATEMATICO: UNA SFIDA PER I DOCENTI DELLA SCUOLA SECONDARIA

Ringrazio la CIIM e, in particolare, il suo Presidente, Professor Scimemi, d'avermi invitato a parlare in questa occasione. Si tratta di un'esperienza nuova per me: ieri ho assistito con interesse ai dibattiti, talvolta anche molto animati, sui problemi della didattica nella Secondaria Superiore. Penso che alla base dei contrasti sia talvolta il diverso modo di concepire la matematica. Ritengo quindi opportuno aprire questa chiacchierata chiedendomi: "Che cos'è la matematica?"

Si tratta certo d'una domanda che, in forma più o meno conscia, si è posta ogni docente di questa materia. E' chiaro, infatti, che, per insegnare in maniera soddisfacente una disciplina, è opportuno chiedersi quali siano la sua natura e il suo ruolo nell'ambito del pensiero scientifico. Su questo tema sono state fatte molte considerazioni, anche da parte di eminenti matematici, e le riflessioni che seguono non hanno alcuna pretesa d'originalità.

Da un lato la matematica appare come un mondo a sé stante, separato dal resto del sapere, ma da un altro come uno specchio e modello di tutti i processi di pensiero, forse di tutta la scienza. Ha sempre avuto e continua ad avere, in maniera sempre crescente, una grande utilità per il genere umano. Si potrebbe spingersi fino al punto di dire che la matematica è stata necessaria al controllo degli eventi naturali e allo sviluppo della cività degli uomini, in quanto ne ha plasmato i modi di pensare.

In effetti, la Storia ci mostra, sulla base di documenti inoppugnabili, che, fin dai tempi più antichi, la matematica è stata coltivata, tenuta in gran conto e insegnata al fine di trasmetterla alle nuove generazioni. E' stata considerata l'espressione più definita del pensiero razionale sul mondo e un monumento al desiderio dell'uomo di sondare le creazioni della propria mente. E' per questo che dopo esserci posta una domanda che sembra presupporre una definizione, ci guarderemo bene dal definire che cosa sia la matematica; non solo perché non si può comprimere in poche parole la definizione d'una materia così vasta e varia, ma anche perché ciò implicherebbe una limitazione del suo dominio, mentre, per sua natura, la matematica può generalizzare ogni schema, cambiarlo e allargarlo, senza che il risultato di queste operazioni cessi di appartenere alla matematica stessa. "In effetti", osservano Marc Kaç e Stanislaw Ulam nel bel libro "Mathematics and Logic", "è forse un aspetto caratteristico della nostra disciplina che essa si sviluppi attraverso un continuo auto-esame con un grado sempre crescente di coscienza della propria struttura; struttura che, però, cambia continuamente e talvolta in maniera così radicale e fondamentale da rendere destinato al fallimento ogni tentativo di definire la matematica che abbia l'intento d'essere completo e conclusivo.

Una questione che si presenta spontanea quando si esamina la natura della matematica è quanto il suo progresso dipenda dall'osservazione del mondo esterno, non solo attraverso i sensi ma anche attraverso strumenti sempre più raffinati, e quanto invece la scelta degli assiomi, definizioni e problemi sia una libera creazione della mente umana, forse influenzata, o anche determinata, dalla struttura fisiologica del cervello. In effetti, se noi osserviamo gli sviluppi registratisi in questo secolo, notiamo che non solo c'è stato un allargamento dell'area coperta dalla matematica, ma addirittura una trasmutazione del suo modo di procedere e dei suoi scopi. Non c'è alcun dubbio che molti trionfi della fisica, dell'astronomia, della biologia e di altre scienze abbiano ricevuto alimento significativo dalla matematica; ma non è nemmeno da dubitare che le consorelle meno astratte abbiano ricambiato il dono, di cui si sono servite liberamente, con una serie di nuovi problemi e sorgenti d'ispirazione. Anche la tecnologia ha avuto un effetto profondo sulla matematica; con lo sviluppo di calcolatori sempre più potenti, ha accresciuto oltre ogni misura il respiro della sperimentazione nell'ambito della matematica stessa, fino a svolgere un ruolo fondamentale nella dimostrazione di teoremi classici (come quello sulla congettura dei quattro colori).

Naturalmente, ci sono matematici che mostrano profonda indignazione davanti a questo inaudito mescolamento della sacra purezza della matematica con la profana materialità d'una macchina calcolatrice. Ma anche qui non c'è niente di nuovo sotto il sole, se dobbiamo dare retta a Plutarco che nella "Vita di Marcello" scrive: "Eudosso ed Archita erano stati gli antesignani di questa famosissima e altamente reputata arte della meccanica, che utilizzarono come illustrazione elegante delle verità geometriche e come mezzo per convalidare sperimentalmente, in maniera da soddisfare i sensi, conclusioni troppo intricate per una dimostrazione con parole e figure. Per risolvere il problema, così spesso utile nel costruire figure geometriche, di trovare i medi, dati i due estremi di una proporzione, ambedue questi matematici fecero ricorso all'aiuto d'uno strumento, sfruttando per i loro scopi certe curve e sezioni di rette. Ma quale fu l'indignazione di Platone a questo riguardo e le sue invettive verso questa mera corruzione e annientamento della sola cosa buona della geometria, che in tal modo voltava ignominiosamente le terga agli oggetti incorporei dell'intelligenza pura per ricorrere ai sensi e chiedere alla materia un aiuto ottenibile solo con la depravazione d'ignobili verifiche; avvenne così che la meccanica si separò dalla geometria e, ripudiata e trascurata dai filosofi, si configurò come un'arte militare".

Contrariamente a un'opinione comune tra le persone prive di una cultura scientifica, la matematica non è un edificio chiuso e perfetto; essa è sì una scienza, ma anche un'arte, in quanto i suoi criteri di giudizio sono, almeno in parte, di tipo estetico. La semplice verità d'una proposizione non è sufficiente a stabilire il suo diritto di cittadinanza nella matematica; si richiedono anche altre qualità, come l'utilità e l'interesse, ma anche l'eleganza. Per quanto quest'ultima qualità abbia carattere soggettivo, è sorprendente constatare la presenza d'un accordo considerevole fra i matematici sui valori estetici di certi risultati.

Sotto un certo aspetto la matematica è diversa dalle altre scienze: non conosce invecchiamento. Una volta dimostrato, un teorema non perde di significato, anche se può diventare un caso particolare d'una verità più generale e la maniera originaria di dimostrarlo nulla più che un pezzo da museo. Così c'è un corpo di materiale matematico che cresce senza richiedere modifiche delle parti più antiche, anche se l'interesse delle diverse questioni studiate in matematica cambia col tempo.

Quello che non è praticamente cambiato è il metodo matematico. Si parte sempre da un piccolo numero di asserzioni, ritenute valide, e si ricavano nuove affermazioni con ragionamento strettamente logico. Perchè, si chiede Poincaré, tutto ciò non si riduce a "una gigantesca tautologia"? Perchè la matematica, per dirla con le parole di Eugene Wigner, è così "irragionevolmente efficace" nelle sue applicazioni alle altre scienze, perchè ottiene così spesso successi spettacolari? Forse questo è dovuto al fatto che, in ultima analisi, il mondo "reale" suggerisce grandi classi di oggetti per il pensiero matematico e i processi di generalizzazione e selezione di nuove strutture non sono interamente arbitrari. Nessun sistema di postulati esce completo e perfetto dalla testa d'un matematico, come Minerva da quella di Giove, ma è il risultato d'un lento studio di qualche dottrina già esistente.

Solo in questo secolo i matematici sono arrivati a delimitare la loro disciplina, in una maniera, però, che appare paradossale: in matematica non si sa di quali cose si parla, ma si conoscono soltanto le affermazioni che si possono fare su di esse. Questo permette d'insegnare la matematica a un calcolatore e di farlo lavorare come un matematico. In effetti, la differenza maggiore tra un bravo matematico e un calcolatore, a cui sia stata insegnata la stessa matematica, è nella capacità d'individuare la pertinenza d'un certo metodo alla soluzione d'un dato problema, cioè, paradossalmente, nelle capacità non puramente logiche del matematico! Ma come è possibile tutto ciò? Lo è perchè, nella fase pre-assiomatica, mentre si lavora con oggetti e concetti indefiniti, questi sono radicati in una evidente realtà fisica (o almeno sensoria). I fenomeni fisici suggeriscono (in qualche caso dettano) gli assiomi di partenza; gli stessi fenomeni ci guidano poi a formulare questioni e teoremi.

Così anche se, come affermava Poincaré, esistere, in matematica, significa essere non contraddittorio, questa esistenza non basta; un concetto, per sopravvivere, dev'essere dotato d'una vitalità non descrivibile in termini puramente logici (per lo meno in maniera indipendente da uno studio logico, ancora non disponibile, della natura e della società umane).

Occorre quindi guardarsi dalle definizioni che tentano di ridurre la matematica alla logica, come quella di Pierce ("La matematica è la scienza che tira conclusioni necessarie") o quella di Bertrand Russell: "La matematica pura è la classe di tutte le proposizioni della forma "p implica q", dove p e q sono proposizioni che contengono una o più variabili, le stesse nelle due proposizioni, e tanto p quanto q non contengono costanti, con l'eccezione delle costanti logiche".

Se questo fosse vero, ci dovremmo chiedere perché tutti quelli che si dedicano alla matematica e non sono privi di logica, non diventano grandi matematici, o, per metterla in termini più provocatori, perchè Bertrand Russell non ha mai scoperto un teorema. Esistono, evidentemente, aspetti non logici, come la scelta d'un artificio, o la trasformazone d'un problema in un altro. La geometria proiettiva e la teoria dei numeri primi sono esempi notevoli di questi aspetti della matematica. Possiamo, a questo proposito, citare le parole di Poincaré, che di teoremi ne scoperse molti: "Che cosa è infatti l'invenzione matematica? Non consiste nell'escogitare nuove combinazioni con entità matematiche già note. In effetti chiunque potrebbe far ciò; e le combinazioni che si potrebbero così formare sarebbero infinite e la maggior parte d'esse senza il minimo interesse. Inventare consiste precisamente nel costruire, non le combinazioni inutili, ma quelle utili; e queste formano una minoranza. Inventare è discernere, selezionare. Le combinazioni sterili non si presenteranno neppure alla mente dell'inventore. Nel campo della sua coscienza compariranno solo le combinazioni realmente utili, alcune delle quali egli scarterà, ma che, nondimeno, hanno qualcosa in comune con quelle utili".

Altrove lo stesso Poincaré afferma: "Diventando rigorosa, la scienza matematica prende un carattere così artificiale, da colpire chiunque; dimentica le sue origini; fa vedere come si risponde alle domande, ma non come e perché vengono poste. Questo mostra che la logica non basta: che la scienza della dimostrazione non esaurisce la scienza e che l'intuizione deve mantenere il suo ruolo come complemento, stavo per dire come contravveleno o antidoto della logica. Ho avuto già occasione d'insistere sullo spazio che l'intuizione dovrebbe avere nell'insegnamento delle scienze matematiche. Senza di esse, le giovani menti non potrebbero cominciare a capire la matematica; non potrebbero imparare ad amarla e vi vedrebbero solo una vana logomachia; soprattutto, senza intuizione non diventerebbero mai capaci di applicare la matematica."

Se si accetta quanto sopra e ci si riflette sopra, si arriva a conclusioni importanti sull'insegnamento della matematica nella Scuola Media Superiore, cioè su un insegnamento rivolto ad allievi che, in linea di massima, non hanno intenzione di diventare matematici a loro volta. Una buona parte della matematica moderna, per quanto importante per i matematici, è del tutto irrilevante per i non matematici, anche per coloro che fanno uso della matematica nel loro lavoro, come i fisici, i biologi, gli ingegneri, gli economisti, i dirigenti d'azienda, i sociologi, ecc.. I matematici puri sottolineano talvolta, e con ragione, gli aspetti artistici della loro ricerca; sarebbe tuttavia un errore invocare solo questi ultimi come motivazione per l'insegnamento di certi capitoli della matematica alla quasi totalità degli allievi della Scuola Media Superiore. Bisogna invece partire dall'idea che alcune parti della matematica, sviluppate o almeno messe in luce in questo secolo, diventeranno, nel Duemila, bagaglio essenziale dell'ingegnere e di altri utilizzatori della matematica, come lo sono divenute alcune nozioni sviluppate nei secoli precedenti.

Forse un po' ingenuamente, partendo da queste idee qualche anno fa scrissi, in collaborazione con mia moglie, un libro di testo per le Scuole Medie Superiori, intitolato "Costruire la matematica" (Zanichelli, 1979), il cui principio informatore era il seguente: da un lato è importante lo sviluppo delle capacità logiche degli allievi, accanto a quelle intuitive e immaginative, dall'altro l'astrazione del ragionamento logico deve essere mitigata da appropriate interpretazioni concrete. La matematica si presta a questo scopo perchè i suoi concetti si possono sempre illustrare e spesso introdurre per mezzo di interpretazioni concrete.

Si scelse quindi d'illustrare i concetti principali dell'algebra e della geometria a partire dalla loro genesi nell'esperienza quotidina per passare poi alla struttura astratta, una volta individuate con chiarezza e precisione alcune proprietà caratteristiche che vengono prese come assiomi. Il vantaggio (e il fascino) di lavorare in questo modo viene scoperto dall'allievo (dopo le prime inevitabili difficoltà di metodo) quando le conclusioni dei ragionamenti portano non solo a trovare la soluzione di determinati problemi, ma anche a scoprire nessi logici tra problemi apparentemente diversi, a superare osservazioni apparentemente paradossali, a interpretare i risultati alla luce dei fatti noti dall'esperienza quotidiana.

Il risultato di questa esperienza è stato un fallimento quasi completo; e non, devo dire, per colpa degli allievi. Nei pochi casi, in cui il libro, a mia conoscenza, è stato adottato (casi che si possono contare sulle dita d'una mano), si è avuto conferma di ciò di cui eravamo convinti: è abbastanza facile che i giovani allievi (particolarmente i migliori, ma non solo quelli) siano interessati a una buona matematica, perchè hanno una mente pronta a porsi domande, perchè hanno fiducia in se stessi, perchè vogliono capire come mai le cose vanno in un certo modo.

Queste osservazioni di carattere generale sono state confermate puntualmente dal fatto che una frazione elevata d'allievi d'un liceo classico, dopo essere stati esposti a cinque anni d'insegnamento sul testo in questione, avrebbero desiderato di portare matematica come materia a scelta all'esame di maturità, se essa non fosse stata, per parecchi anni, proscritta dall'insieme di materie proposte per questo tipo di scuola.

Allora? Pur tenendo conto delle eventuali colpe degli autori e dell'editore, sono giunto, con profondo rincrescimento, a una conclusione, che deve essere tenuta ben presente in ogni tentativo di cambiamento dei programmi: la causa del fallimento sta nel fatto che gli insegnanti non se la sentivano d'utilizzare un testo che avrebbe richiesto molta fatica da parte loro. Una persona non particolarmente gentile verso il proprio prossimo come George Bernard Shaw ripeterebbe a questo punto la sua famosa osservazione che chi sa fare qualcosa, la fa, e chi non sa fare niente si guadagna da vivere insegnando. La battuta, oltre ad essere scortese verso tutto il mio uditorio, è completamente sbagliata: insegnare è molto più difficile che fare. Come esempio scherzoso citerò il fatto che una squadra di calcio ha undici giocatori, ma solo un allenatore. E quest'ultimo viene cambiato più frequentemente dei primi!

Per sgombrare il terreno da ogni equivoco, osserviamo che, purtroppo, un allievo incapace non cesserà d'esserlo grazie alle qualità d'un suo insegnante; per fortuna, avviene anche che un allievo brillante non cessa d'esserlo se ha un insegnante scadente.

Questo ci porta naturalmente al punto successivo: è vero che ci sono allievi privi d'interessi per ogni settore, ma non è di quelli che vogliamo (e possiamo) parlare. Ma se qualcuno è brillante e pieno di risorse fuori della scuola, se, addirittura, è brillante e pieno di risorse in altre materie, allora deve essere possibile catturare il suo interesse anche per la matematica. Naturalmente, rimarranno le simpatie personali per un argomento piuttosto che un altro; ma chi vuole realmente imparare (e una gran parte dei giovani lo vuole) non rimane insensibile agli aspetti creativi e pieni di risvolti applicativi che la matematica può offrire. Credo che tutti, fra voi, abbiano avuto l'esperienza di leggere libri, non solo di matematica, che non lasciano alcuna traccia, che non danno l'impressione di un qualche progresso nel proprio modo di pensare. L'insegnamento ha aspetti analoghi a quelli della lettura d'un libro; si possono "passare" cinque anni su un argomento che si chiama matematica, senza arrivare neanche a sospettare che cosa sia la matematica, o perchè la materia è presentata in una maniera troppo remota dalle proprie esperienze precedenti, o perchè, la noia sovrastante di certi problemi fa pensare che siamo davanti a un nuovo modo di lambiccarsi il cervello che non ha alcun interesse per la propria vita futura.

Questo vale per l'insegnamento di qualsiasi materia. Ma qual è la difficoltà specifica dell'insegnamento della matematica? Da un lato essa presenta uno schema preciso e indubitabile, più d'ogni altra disciplina, dall'altro non sembra avere a che fare con alcunché di preciso, con qualcosa che si vede o si tocca. Se gli antichi filosofi (con Platone in testa) ritennero che le nostre capacità di ragionare da una nostra esistenza anteriore, in cui sapevamo già l'aritmtica e la geometria euclidea (l'algebra e la geometria analitica, per qualche ragione, mancavano) e quindi che bastava risvegliare negli allievi il ricordo di questa conoscenza passata, noi non la pensiamo più così. Riteniamo, infatti, sulla base delle nostre conoscenze biologiche, che il cervello umano, la mente degli uomini, sia costruita in maniera tale da rispondere correttamente a una data situazione (dal punto di vista della sopravvivenza dell'individuo e della specie) anche senza saperne la ragione, anche senza produrre una perfetta argomentazione logica che giustifichi le sue scelte. Così, in un certo periodo della storia del genere umano, si costruivano case e barche, senza sapere esattamente perchè si faceva una cosa piuttosto che un'altra, per non parlare dell'uso dei numeri nella pratica del commercio. Non è certo stato un professore a far notare per primo che due per due fa quattro; e nessuno, al di fuori di un'aula, è disposto a considerare questa affermazione come un enunciato aritmetico piuttosto che un dato di fatto ben corroborato dall'esperienza quotidiana.

Si obietta di solito che la matematica è diversa, ad esempio, dalla fisica: "posso immaginare di abbandonare un oggetto fuori da una finestra senza che questo cada" dice qualcuno "ma non posso immaginare che due per due faccia cinque". Nessuno di noi può; ma perchè? L'unica risposta possibile è che mai nella storia dell'uomo è stato necessario immaginare che due per due non faccia quattro. Un ragionamento non è nient'altro che un esperimento mentale. La cosa importante, per poter ragionare, è avere un quadro mentale sufficientemente preciso delle cose su cui si deve ragionare, in maniera da poter immaginare il problema da risolvere. Presentare una processione interminabile di simboli, parole e regole senza che l'allievo ne abbia compreso il senso è un cattivo modo d'insegnare.

Occorre invece aiutare gli allievi a formarsi un'idea concreta dei problemi e farli giungere a una descrizione astratta e all'uso dei simboli solo quando hanno capito la questione di cui si tratta in termini concreti. Si può poi far notare quanti dettagli degli oggetti che appaiono nel problema concreto da risolvere non entrino affatto nella risoluzione, come lo stesso metodo si applichi a svariati problemi, ecc. così l'allievo può cominciare ad apprezzare l'astrazione come un processo di semplificazione, che tende ad ignorare i dettagli non essenziali.

Imparare qualsiasi cosa, da uno sport alla teoria della relatività, richiede uno sforzo. Insegnare richiede uno sforzo ancora maggiore; non solo occorre padroneggiare la materia che s'insegna, ma occorre rendere l'insegnamento attraente. Ad ogni stadio dell'apprendimento ci dovrebbe essere un richiamo alla curiosità o all'interesse che renda accettabile lo sforzo che vi viene coinvolto.

Quale matematica si deve insegnare? La sola risposta possibile, a mio parere, è questa: argomenti vecchi e nuovi, purché possano risultare di valore per persone che non diventeranno matematici. Tutti gli argomenti di matematica hanno, infatti, per definizione, un interesse intrinseco dal punto di vista matematico e attrarranno il futuro matematico, nel caso, ormai sempre più frequente, che ce ne sia uno nella classe. Si protesta spesso giustamente per i vecchi esercizi d'algebra, che schiavizzano gli allievi al solo scopo di dar una manualità meccanica non accompagnata dal ragionamento; ora questo è assolutamente da condividere quando si parla delle famigerate "frazioni a quattro piani", ma la reazione al vezzo manipolatorio non deve arrivare fino al punto di perdere l'opportunità di far apprendere le manipolazioni dell'algebra, in maniera quasi automatica (dopo opportuna comprensione dei principi che vi stanno alla base); e non mancano certo i modi d'introdurre l'argomento in maniera semplice e interessante. L'interesse si accresce, quando si osa andare oltre gli stretti limiti dei programmi e si fa vedere che non solo i numeri, ma anche le operazioni, i movimenti, le trasformazioni, ecc., hanno un'algebra non molto diversa da quella dei numeri.

Per dare un'idea di come seguendo queste idee, avevamo sviluppato il nostro progetto, descriverò brevemente il contenuto del primo volume, che intendeva coprire il primo biennio dei licei scientifici e degli istituti tecnici.

Dopo un fuggevole cenno ai concetti elementari sugli insiemi, passava a studiare i numeri interi naturali, insegnando a manipolare i simboli su un terreno concreto e a sviluppare dimostrazioni col metodo dell'induzione completa (che non è altro che una formalizzazione dell'espressione intuitiva "e così via!"). Seguiva poi un'introduzione al continuo, illustrato per mezzo d'una linea (non necessariamente retta) e gli spostamenti lungo questa. Gli spostamenti forniscono il primo esempio di "non numero" su cui si possano fare operazioni e mettere in luce una struttura gruppale.

I multipli e sottomultipli di spostamenti portano naturalmente all'idea dei numeri razionali come "operatori" sugli spostamenti e a una nozione intuitiva del prodotto dei razionali. Già da qui si può far balenare l'incompletezza dei razionali come operatori lineari sugli spostamenti.

Seguiva un capitolo sul calcolo letterale, le identità e l'equazioni di primo grado, introdotte per mezzo di giochi o quesiti del tipo "pensa un numero ..." o "un mattone pesa un chilo più mezzo mattone ...".

Il capitolo successivo sui polinomi, i prodotti notevoli, la scomposizione in fattori e le equazioni fratte e letterali era piuttosto tradizionale in maniera da conformarsi ai programmi vigenti.

Si passava poi alle nozioni relative alla retta nel piano introdotte prima in maniera intuitiva, poi mediante opportuni assiomi che portavano alla nozione di piano affine, sviluppato meglio in un successivo capitolo, dove accanto ai grafici si discuteva il teorema di Talete. Questo portava, in maniera naturale ai sistemi lineari di due equazioni e due incognite, discussi prima graficamente, poi algebricamente.

A questo punto seguiva un capitolo, di cui si consigliava normalmente l'omissione, su trasformazioni lineari e matrici (due per due); l'inserimento di questo e altro materiale aveva l'intenzione di suggerire utili ricerche complementari.

Si passava poi alle nozioni di perpendicolarità e distanza e ai teoremi fondamentali della geometria euclidea del piano.

La già notata necessità di ampliare il campo numerico portava a discutere i numeri reali, i radicali, le potenze con base e esponente reale, ecc.. uno studio di grafici, tabelle ed equazioni e una discussione delle aree, basata sulla nozione di limite (che non ritengo opportuno ritardare ad introdurre) concludeva il volume.

Prima di terminare vorrei fare qualche osservazione di carattere generale sull'insegnamento della matematica ai non matematici. Questa è più che mai necessario al giorno d'oggi. Anche se non è una osservazione molto originale, occorre, infatti, notare che la crescente automazione introduce nuove macchine che sostituiscono gli esseri umani in molte loro attività, fisiche o mentali, di tipo ripetitivo. Un'educazione rivolta allo svolgimento di attività ripetitive é, quindi, chiaramente arcaica. Si avrà sempre più bisogno di individui con qualità specificamente umane, come originalità, intuizione, capacità di comprensione e di giudizio, iniziativa. Una società automatizzata avrà un gran bisogno di individui brillanti e fortemente creativi. Nasce allora la questione imbarazzante : che cosa farà una società di questo tipo degli individui di meno brillanti? Non si tratta solo di fornire "panem et circences". Bisogna preoccuparsi dei disordini sociali che potrebbero nascere se una parte significativa della popolazione avesse la sensazione d'essere formata solo da passeggeri dell'astronave Terra e di non contribuire in alcun modo a mantenere quest'ultima in attività. La conoscenza minima per poter avere un lavoro certamente crescerà. Evitare la presenza d'individui culturalmente spostati è un dovere non solo economico-sociale, ma anche di semplice umanità; è un argomento di meditazione per chi insegna ai cittadini di domani.

Forse anche l'attività dell'insegnante cambierà in una società automatizzata. Ci potrebbe essere una fame di programmi d'istruzione, da trasmettere per televisione, registrare in cassetta o su disco. Attualmente l'insegnamento è un'attività mal pagata, ma è stato ipotizzato che, nella società che si sta preparando, i migliori insegnanti potrebbero guadagnare quanto divi del cinema, perchè si dovrà imparare di continuo, e in misura crescente, per tutta la vita. Ci saranno corsi da premio Oscar e corsetti da circuiti di periferia; la varietà di presentazioni potrebbe ampliare di molto le capacità, il sapere e la consapevolezza d'una comunità libera.

Questo ci conduce a un'altra considerazione. Già al giorno d'oggi la scienza entra in tutti gli aspetti della nostra vita, dall'uso di certi farmaci a quello dell'energia nucleare, per non parlare d'argomenti più scottanti come l'aborto e l'eutanasia. L'uomo d'oggi ha un potere d'interferire con l'universo superiore a quello d'ogni suo antenato; è desiderabile, che questo potere sia capito dai più e usato con cognizione di saggezza. Il cittadino di domani avrà bisogno di maggiori conoscenze scientifiche, ma anche di tecniche per arrivare a decisioni razionali in un gran numero di circostanze. In una istruzione così ampia la matematica non può che avere un ruolo molto importante; ma la scelta degli argomenti e il modo d'insegnarla nella Scuola Secondaria Superiore non possono essere quelli basati sull'esigenza di formare futuri matematici.

Adriano Barlotti

Dipartimento di Matematica, Firenze

LA MATEMATICA NELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI: IL RUOLO DELLA GEOMETRIA

Prima di iniziare la trattazione dell'argomento affidatomi desidero ringraziare l'U.M.I., la C.I.I.M. ed in particolare il prof. Benedetto Scimemi che mi ha portato l'invito del Comitato Organizzatore. Un vivo grazie va anche agli organizzatori locali, all'Università di Napoli e a tutti i presenti che si apprestano pazientemente a seguire le mie divagazioni.

Una cosa è certa: io non sono in possesso di una "formula magica" che permetta di sanare i malesseri (forse sarebbe meglio parlare di malanni) che affliggono l'insegnamento nelle scuole secondarie superiori della matematica in generale e della geometria in particolare. O meglio, un rimedio efficace lo potrei proporre, ma certamente non sarà attuato: basterebbe raddoppiare (e in certi casi triplicare) il numero delle ore di lezione dedicate all'insegnamento di questa disciplina. Almeno in qualche paese estero sembra che le cose stiano proprio così e in fondo ciò è giusto. Permettetemi di citare a proposito Galileo (VI, 232): "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara ad intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuto laberinto". Dunque la matematica è una lingua, anzi la lingua base; allora perchè dedicare ad essa meno ore che all'Italiano, al Latino, o ad una lingua straniera? Per una diffusa presentazione della matematica quale disciplina umanistica si veda (9).

Il fatto che le ore a disposizione per la matematica siano poche fa sì che la situazione sia triste, ma ciò non ci deve sgomentare: è stata triste anche in passato eppure il mondo è andato avanti lo stesso. Desidero ricordare a proposito un aneddoto che riprendo da una bella conferenza di Vito Volterra (cfr. (12)).

"In Toscana verso il 1835 un cultore di diritto ecclesiastico (studioso anche di lingue orientali) ed un algebrista chiesero le rispettive cattedre dell'Università.

Nell'assegnarle vennero per errore scambiate; il matematico fu nominato professore di gius canonico ed il giurista ebbe l'algebra. Le proteste degli interessati a nulla valsero perchè i "motupropri" di nomina erano ormai firmati e non si volle mutarli. Il matematico rinunziò, ma il giureconsulto orientalista insegnò algebra ripetendo a memoria il Francoeur, per tutta la vita".

Questo fatto può far sorridere, ma forse non è accaduto qualcosa di simile nei nostri tempi (e non per errore, ma volutamente) quando nelle alte sfere si è deciso di unificare l'insegnamento della matematica e delle scienze nella Scuola Media Inferiore?

Dopo queste divagazioni generali è bene che affronti più direttamente il tema geometria. Quando ho cominciato a pensare alle cose di cui parlare mi sono venuti in mente i testi di alcune conferenze ed articoli recenti sull'argomento ((1), (4), (5), (11)). Comincerò con un breve richiamo ad alcuni di questi.

Il titolo dell'articolo di Speranza è un vero grido di allarme: "Salviamo la Geometria!" Il significato è chiaro, anche se un pignolo potrebbe osservare che coloro che sono in pericolo e devono essere salvati sono molti giovani delle generazioni future che davvero rischiano di arrivare all'Università senza alcuna conoscenza della geometria dello spazio. Mi è giunta la voce (e credo che questa risponda a verità) che il marchingegno della prova scritta "fissa" di matematica nell'esame di maturità scientifica (che porta automaticamente ad escludere tale materia dalle prove orali) è purtroppo un invito per certi insegnanti a saltare completamente lo studio della geometria negli ultimi anni! Ma cercherò di essere ottimista: si parla di nuove riforme e spero che queste migliorino la situazione.

Nel 1970 nel Bollettino U.M.I. è stato tradotto un bell'articolo di E. Artin dedicato all'insegnamento della geometria. In esso con fine umorismo si osserva la presenza di tre posizioni estreme nella didattica della geometria: queste formano i vertici di un triangolo, figura che l'uomo "donato da Dio" per la grande riforma della geometria considerava nefasta e da abolire!

Ma la grande riforma che ha scosso l'insegnamento della geometria in molti paesi è stata presto seguita da una controriforma e da molte parti, iniziando dal Nord America si è cominciato a lanciare il grido "torniamo a Euclide"! Ed ho incontrato molti che si lamentavano per le infelici esperienze fatte passando dai triangoli ai parallelogrammi.

Io credo che quando si fa una riforma nella didattica si dovrebbero sempre tener presenti dei fatti che illustrerò brevemente in forma allegorica paragonando il progresso nella conoscenza ad una passeggiata in montagna.

Un tizio partendo da una località "A" deve raggiungere un'altra località "B". Gli viene consigliato di seguire un vecchio sentiero in uso da tanto tempo e seguendo questo egli vede molte cose nuove e impara a superare gradualmente tanti passaggi non semplici che lo rendono man mano più esperto nel percorrere la strada. Arrivato in fondo alla sua scalata, e probabilmente dopo aver percorso quel tragitto tante altre volte, egli scopre una scorciatoia per andare da "A" a "B". Per percorrere questa scorciatoia occorre attraversare passaggi più arditi e difficili, dei quali egli non si rende ben conto perchè l'esperienza acquisita nell'altra via fa sì che tutto gli sembri facile. E così il nostro Tizio pretende che anche tutti i novellini per andare da "A" a "B" seguano la sua nuova via.

Se poi accade che il nostro Tizio è veramente un "grande" che è capace di affrontare senza alcuna difficoltà anche i passaggi di "sesto grado" egli non riuscirà a capire perchè i poveri diavoli incontrino per la sua scorciatoia degli ostacoli insormontabili.

E' chiaro che in tutte le scuole medie l'insegnamento della matematica deve essere fatto a misura dei "poveri diavoli" e non solo per "genietti" che intendono lavorare con la matematica per il resto della loro vita[1].

---

(1) Ciò naturalmente non deve escludere una particolare considerazione per gli allievi più dotati. Uno dei compiti del buon docente è di cercare di interessare tali allievi e -combattendo con la scarsezza del tempo a disposizione- interessarli in ricerche che li impegnino direttamente. Ma ho già "predicato" su questo argomento e non voglio ripetermi (cfr. anche (9) pp. 5, 6). Uno strumento veramente utile per raggiungere tale scopo è costituito da raccolte di problemi assegnati a gare matematiche. Cfr., per es., (7) e la bibliografia indicata in questa raccolta.

A mio giudizio gli scopi fondamentali dell'insegnamento della geometria nelle superiori sono:

a) rafforzare negli allievi la nozione di dimostrazione a cui sono già stati iniziati nel biennio;

b) formare una buona intuizione dello spazio tridimensionale;

c) sviluppare le facoltà creative mediante un sistematico uso di problemi di tipo geometrico.

Stabiliti questi tre punti che a me sembrano fondamentali devo confessarvi che comincio a sentirmi a disagio! Si tratta ora di stabilire come svilupparli "in classe" e certamente in questa sala ci sono molte persone che lo potrebbero fare molto meglio di me. Ma andrò avanti, richiamando le interessanti esperienze che ho fatto insegnando in un Liceo per alcuni anni, tanto tempo fa, intorno al 1952-54 e alcune informazioni raccolte di recente. Le ricerche sui testi di matematica raccolte da P. Quattrocchi e C. Fiori (cfr. (8)) mi hanno informato che esistono ancora libri di geometria; e fra questi alcuni sembrano essere buoni. Non figura nella raccolta il testo che usavo, il "Rosati e Benedetti": questo era già scomparso dalla circolazione più di 10 anni fa quando ho cercato invano di comprarne una copia da collocare accanto alla vecchia che cominciava ad essere logora. L'impostazione che seguivo era quindi assiomatica e specialmente all'inizio, in IV Ginnasio era opportuna qualche semplificazione. Seguivo allora il "criterio" che vado ad enunciare e che mi sembra accettabile anche dopo l'esperienza di tanti anni.

Nel portare avanti lo sviluppo della teoria evitare certe dimostrazioni faticose e pedanti (ma necessarie!) che servono per dimostrare cose che agli allievi sembrano evidenti. Certamente non si deve truffare con un'abile scivolata dicendo "è ovvio che ..." ma dire onestamente "si potrebbe dimostrare che da questi assiomi segue che ...". E' molto raro che gli allievi si lamentino quando c'è qualcosa da saltare e, specialmente se il risultato che si chiede di accettare è "evidente" non avranno difficoltà a recepirlo. (Questo è in fondo il principio di "procedere per segmenti" enunciato ieri dall'Ispettrice L. Ciarrapico). Ma le dimostrazioni che si fanno devono essere condotte in modo pienamente rigoroso. In tal modo si effettua anche un utile esercizio di logica (cfr. (3)).

Poi quando gli studenti arrivavano al Liceo certi argomenti che presentavano il vivo interesse che accompagna la nascita di un concetto matematico (quali ad esempio le misure nel cerchio, la definizione di distanza di due rette sghembe ecc.) venivano sviluppati in modo completo, ed in generale venivano digeriti bene dalla maggioranza.

Oggi alcuni, forse molti, tendono a sostituire la trattazione puramente geometrica con altre che usano tecniche di tipo algebrico. Ma l'uso di tali tecniche (cfr. anche (5)) a mio parere contribuisce meno del "metodo geometrico" alla piena acquisizione dell'intuizione dello spazio.

Il raggiungere questo scopo è veramente importante, ed è opportuno cominciare a muoversi bene in questa direzione molto prima che l'alunno abbia raggiunto le scuole superiori. Di recente ho avuto notizia di un convegno tenutosi in Nord America sul tema "Shaping Space" ("Dare forma allo spazio") nel quale si proponeva di lavorare alla conquista di forme spaziali costruendo poliedri cominciando dalle elementari ed andando avanti fino al "College" (Cfr. (10)). Una delle idee base è di partire dall'osservazione di un oggetto (poliedro), passare poi (con un'astrazione) all'esame della sua struttura fino a giungere ad una classificazione degli oggetti di quel tipo. Un lavoro di questo tipo, metodico e ben organizzato, può certamente contribuire ad una buona formazione dell'intuizione spaziale, che ciascuno, anche l'uomo della strada, dovrebbe possedere (cfr. (6)).

A questo punto sento la necessità di fare alcune osservazioni sui programmi che sono stati annunciati per la secondaria superiore, limitandomi alla parte che riguarda la geometria.

A mio parere il presentare come due cose distinte il "Piano euclideo" e il "Piano cartesiano" può portare a qualche equivoco (specialmente se non si dimostra che sono isomorfi). A mio parere è più naturale introdurre le coordinate cartesiane nel piano euclideo. Così il parlare di studio di "uno" spazio (e non "dello" spazio) può indurre qualche autore di libri di testo a presentare in modo sistematico. A questo proposito desidero ricordare un aneddotto: come studente del I anno di Università seguivo con molto interesse le lezioni. Il prof. Campedelli quando venne il momento di presentarci la Geometria Proiettiva e ci parlò dei "punti all'infinito" si soffermò a dare un consiglio ai futuri insegnanti (era una cosa che Egli faceva spesso e i Suoi consigli erano sempre preziosi): Quando andrete ad insegnare nelle Scuole Medie non lasciatevi mai prendere dalla tentazione, quando spiegherete cosa sono le rette parallele, di parlare di punti all'infinito! C'è il giusto tempo per ogni concetto! Non vorrete certo che a qualche vostro studente capiti di rispondere alla domanda "cosa vuol dire che due rette sono parallele?" come ho sentito fare io mentre presiedevo dagli esami: "Due rette si dicono parallele quando stanno in uno stesso piano e -nelle Scuole Medie- non si incontrano, mentre -all'Università- hanno un punto in comune".

In certe scuole superiori sta entrando l'informatica, non solo come sussidio didattico, ma come oggetto di insegnamento. Gli studenti devono imparare a scrivere "programmi" ben strutturati. Sarebbe veramente opportuno che anche nelle dimostrazioni dei teoremi di geometria venissero abituati ad usare dimostrazioni "strutturate" che hanno certamente il vantaggio di essere più facilmente ricordate dall'alunno (cfr. (2)).

Ho visto con piacere che nel volume (8) sono segnalati errori e imprecisioni che compaiono nei testi esaminati. Purtroppo talvolta capita che uno si trova in mano un testo che contiene una tal quantità di errori che supera il numero delle pagine del volume! No! Non spaventatevi, nessuno di questi è "largamente adottato" e quindi non li troverete fra quelli elencati!

Qualche volta accade che un editore che ha un buon vecchio testo per "rimodernarlo" lo affida ad una persona che lo rovina completamente. E' veramente incredibile come ciò possa accadere. Di recente un vero "classico" è stato interamente massacrato. Riportiamo qui due esempi tratti dall'edizione "rifatta".

a) Una definizione (attribuita ad Euclise). Cerchio è una figura piana interna ad una sola linea chiusa che delimita su tutte le rette condotte da un particolare punto interno alla figura segmenti uguali fra loro.

b) Un assioma dello spazio (euclideo):

8) Ogni coppia di piani si interseca secondo una retta.

Cose di questo genere mi fanno venire il desiderio di avanzare all'U.M.I. una proposta: Istituire un premio annuale (anche solo di 100 lire) a chi scopre nei testi di matematica l'errore più "fantastico" (cioè più "terribile") dell'anno.

Bibliografia

(1) E. ARTIN: I punti di vista estremi sull'insegnamento della geometria, I. Boll. U.M.I. (4), 3 Suppl. al n. 2 (1970) pp. 1-4 (tradotta dal "L'Enseignement Mathématique (2), 9 (1963)).

(2) M. BARLOTTI: Informatica e insegnamento nella scuola secondaria superiore. Archimede, 40 (1988) pp. 120-128.

(3) C. BERNARDI: La logica matematica: metodo e contenuti. Notiz. U.M.I., Suppl. al n. 11 (1987), pp. 22-29.

(4) A. CONTE: Sull'insegnamento della geometria nella Scuola Secondaria Superiore. Notiz. U.M.I., Suppl. ai nn. 8-9 (1979), pp. 83-89.

(5) H. FREUDENTHAL: Allocution du premier Congrés International de l'Enseignement Mathématique. Educ. Studies in Math. 2 (1969), pp. 135-138.

(6) H. FREUDENTHAL: Mathematics as an Educational Task. D. Reidel Dordrecht, 1973.

(7) P. PISANESCHI: Un triennio di gare matematiche (1986-1987-1988). Quaderno Didattico, n. 1 Dipt. di Mat., Università di Pisa (1988).

(8) P. QUATTROCCHI e C. FIORI: Esame di testi di matematica largamente adottati nelle scuole secondarie superiori (Anno Scolastico 1985-86). Pubblicazione del Progetto Strategico C.N.R. "Tecnologie e innovazioni didattiche", Modena 1988.

(9) B. SEGRE: La matematica nel progresso scientifico e culturale della nazione. Archimede 19 (1967), pp. 1-6.

(10) M. SENECHAL and G. FLECK (Editors): Shaping Space: A Polyhedral Approach, Birkhäuser, Boston, Basel 1988.

(11) F. SPERANZA: Salviamo la Geometria! La matematica e la sua didattica 2 (1988) pp. 6-13.

(12) V. VOLTERRA: Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX. Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, Roma (1908), v. I, p. 57.

Gabriele Lolli

Università di Torino

MATEMATICA E RAGIONAMENTO

La tecnica del calcolo sembra essere, in rapporto
alla sapienza, molto superiore alle altre tecniche.
Archita

- What did you think when your equation was shot to blazes?
- Ah, that remains to be seen. I am a mathematician, sir.
I never permit myself to think.
John Dickson Carr

Il tema puo' essere svolto in vari modi, a seconda dell'esperienza e delle competenze di chi rifletta sull'argomento. Si potrebbe ad esempio vedere come non esista un ragionamento efficace e soddisfacente, in qualunque campo, che non sia un ragionamento matematico o con forti sostegni matematici; si rischierebbe pero' di cadere in un trionfalismo fuori luogo, dal momento che abbiamo un mucchio di problemi da risolvere all'interno. Di fronte a una ricerca matematica in pieno sviluppo e allargamento, la didattica continua a soffrire di indecisioni e ambiguita' di fondo, e a essere la spina nel fianco della comunita' matematica. Svolgeremo percio' il nostro tema in una direzione che possa offrire spunti di riflessione su questioni fondamentali.

Tra matematici, sembra naturale leggere la congiunzione nel titolo come una uguaglianza:

matematica = ragionamento

ma ci sono altri, dai filosofi agli psicologi agli sperimentali, che hanno delle mire sul ragionamento, e vorrebbero appropriarsene. Il ragionamento e' pur sempre, nella nostra tradizione, la facolta' umana piu' alta: l'uomo e' un animale razionale.

Cosi' non e' inusuale ad esempio trovare sbandierata l'uguaglianza

ragionamento = logica

con argomenti anche plausibili, basati sulla definizione e sulla storia di quest'ultima disciplina. Le due uguaglianze portano poi, se si assume la proprieta' transitiva, a quella tra matematica e logica. Si tratta di una identificazione semplicistica, che puo' operare qualche allettante tentazione nel momento in cui ci si chiede come far posto all'insegnamento della logica nel *curriculum* tradizionale, ma che e' invece fonte di dannosa confusione per entrambe le discipline. Anche perche' l'identificazione tra matematica e logica e' invece spesso usato in modo polemico proprio per la svalutazione calcolistico-meccanica del pensiero matematico.

Uno degli ostacoli maggiori che si incontrano nell'insegnamento della matematica sembra essere proprio quello della logica. Nell'insegnare la matematica si lamenta la difficolta' dovuta al fatto che i discenti "sono incapaci di sostenere il grado di concentrazione richiesto per seguire una anche solo moderatamente complessa sequenza di inferenze"[1]. Chissa' se e' vero che questa e' la difficolta' dell'insegnare matematica; certo lungo questa linea si potrebbe pensare alla logica come un necessario addestramento preliminare, ma non sembra questo, giustamente, l'intendimento del legislatore. Contro una impostazione propedeutica si possono esprimere serie perplessita' teoriche: una scuola importante di psicologia evolutiva ha legato la maturazione logica alla identificazione di specifiche strutture matematiche e molti psicologi potrebbero sostenere che e' proprio la pretesa di far seguire una logica innaturale, la logica formale, che e' la fonte della estraneita' del ragionamento matematico al pensiero comune.

Una eccessiva identificazione di matematica e logica favorisce l'immagine del matematico della citazione di sopra, all'estremo della negazione del pensiero, perche' la logica di cui si parla e'

[1] D. Gale e L. Shapley, *Amer. Math. Monthly*, gennaio 1962.

inevitabilmente quella formale; paradossalmente la situazione si rovescia allora del tutto: matematica e ragionamento sono addirittura disgiunti.

Di fatto nel corso della storia matematica e logica sono state antagoniste e concorrenziali nei riguardi dei diritti accampabili sul ragionamento, e si sono alternate nella supremazia; gli echi di queste dispute sono ancora operanti nella coscienza comune, e l'improvvisa loro cancellazione a favore addirittura di una coincidenza non puo' che lasciare perplesse le persone intellettualmente oneste.

Le nostre opinioni sono la traccia di idee che si sono stratificate nel corso delle epoche storiche, ciascuna con un significato, una motivazione particolare, nel momento in cui si e' imposta; di queste si e' perduta consapevolezza, e tutte le opinioni sono appiattite una sull'altra. Allo scopo di dipanare alcuni degli ingarbugliati elementi delle equazioni di sopra, puo' essere utile passare brevemente in rassegna la storia dei rapporti di matematica e logica, mediati dal ragionamento. Puo' essere comunque utile, perche' nella storia del pensiero si ritrova sempre con una certa soddisfazione riconosciuto un ruolo fondamentale alla matematica, a differenza della situazione di minorita' culturale in cui si ha l'impressione di trovarsi oggi; puo' darsi che in ogni tempo la vita sia stata dura per i matematici, ma almeno a parole i riconoscimenti si sono sprecati, nelle parole pesanti dei filosofi che hanno fatto la cultura; non fa male all'immagine rileggersi quelle lodi. Ma bisogna anche fare lo sforzo di capire cosa volevano dire, per valutare se siano ancora valide o non debbano essere rimeritate.

Matematica e logica nella storia

Nella civilta' greca e' fuori discussione lo stretto legame tra matematica e ragione, anche se non e' facile riscostruirne la storia; non e' chiaro in che misura il metodo assiomatico derivi da una interazione con la dialettica; certo le dimostrazioni per assurdo sembrano essersi sviluppate e imposte nel quinto secolo a. C. in ambiente eleatico, nell'ambito di un uso generale della ragione in funzione di questioni di etica e di diritto. Ma fatto si e' che i geometri hanno perfezionato e codificato il metodo dimostrativo, fino a diventare loro il paradigma a cui fare riferimento[2].

---

[2] Platone, *Repubblica, passim.*

> Vedi dunque, amico mio, come davvero questa scienza rischia di essere per noi necessaria, se, com'e' evidente, costringe l'anima a servirsi delle pure attivita' intellettive per cogliere quella che e' la verita' in se'.

La matematica per Platone e' la prova che e' possibile una "conoscenza discorsiva" di cose "che si possono cogliere soltanto con il pensiero, ma che non e' possibile toccare in alcun altro modo". La matematica a cui Platone fa riferimento non e' quella empirica e meccanica, pur presente nel mondo greco, ma quella matura della sistemazione assiomatica, che proprio la *sponsorship* di Platone aiuta pesantemente ad imporsi.

> Coloro che si occupano di geometria, di aritmetica e di altre questioni del genere, suppongono il pari e il dispari, le figure, tre specie di angoli e altre cose simili, a seconda dell'oggetto della propria ricerca, e, ammesse per conosciute queste cose, le assumono a ipotesi e ritengono di non doverne dare piu' ragione ne' a se' ne' agli altri, come se fossero principi assiomatici per tutti, e, partendo da questi, passano a trattare tutto il resto deducendo cosi' di conseguenza in conseguenza quella conclusione in virtu' della quale avevano preso le mosse.

La conoscenza discorsiva e' superiore all'opinione, ma si colloca in posizione intermedia tra questa e la pura intellezione. Perche'

> se si prende per principio una cosa che non si conosce, e la proposizione finale e quelle intermedie si tesson con un filo sconosciuto, puo' essere benissimo che il tutto torni, ma come di qui potra' mai nascere una scienza?

Per Platone la pura intellezione e' l'obiettivo della dialettica, la ricerca che non "assume le ipotesi" ma partendo da esse prosegue all'insu' la indagine dei principi. Aristotele e' ancor meno sensibile alla priorita' della matematica, al contrario per lui aritmetica e geometria sono due tra le tante scienze il cui oggetto e' lo studio dell'essere, ed il loro metodo e' subordinato a quello che e' in generale il metodo per la descrizione necessaria delle determinazioni dell'essere, che e' la logica.

Quando si costituisce una comunita' matematica, nel terzo secolo, con criteri e standard condivisi di accettazione dei teoremi, ed e' sfumata tra i matematici attivi la influenza della preoccupazione platonica e aristotelica con l'Essere, assume un ruolo preminente la strutturazione della dimostrazione. Noi siamo abituati a identificare la matematica greca con la descrizione della sistemazione euclidea espressa dalle parole di Platone sopra riportate, ma questo perche' siamo abituati nella nostra cultura a leggere i filosofi, e non i matematici. Tra i matematici viene elaborata una sofisticata nozione di dimostrazione, molto piu' articolata nella sua strutturazione complessiva, che non e' la strutturazione dei passi puramente deduttivi; questi anzi come e' noto sono lasciati in ombra (mentre sono essenziali invece per la funzione che ha la logica in Aristotele)[3].

> Il cosiddetto "tesoro dell'Analisi" e', per dirla in breve, uno speciale corpo di dottrina preparato per l'uso di coloro che, avendo finito gli ordinari Elementi, desiderano acquistare la capacita' di risolvere problemi che possono essere loro posti, che coinvolgano la costruzione di linee, ed e' utile per questo solo. E' il lavoro di tre uomini, Euclide l'autore degli Elementi, Apollonio di Perga e Aristeo il vecchio, e procede per via di analisi e sintesi. L'analisi prende quello che e' cercato come se fosse ammesso e passa da esso attraverso le sue successive conseguenze a qualcosa che e' ammesso come il risultato di una sintesi: giacche' in analisi noi assumiamo quello che e' cercato come se fosse gia' fatto, e indaghiamo da cosa e' che risulta, e di nuovo quale e' la causa antecedente, e cosi' via, rintracciando i nostri passi noi veniamo su qualche cosa di gia' noto o che appartiene alla classe dei principi primi, e tale metodo noi lo chiamiamo analisi, nel senso di essere una soluzione all'indietro. Ma nella sintesi, rovesciando il processo, noi prendiamo come gia' fatto quello a cui si e' infine arrivati nella analisi e, riaggiustando nel loro ordine naturale come conseguenze quelle che prima apparivano antecedenti, e successivamente connettendo i passi tra di loro, arriviamo alla fine a costruire cio' che era cercato; e questo noi chiamiamo sintesi.

La dimostrazione deduttiva e' solo una parte della complessa presentazione di un teorema[4].

> Ogni problema e ogni teorema che e' completo con tutte le sue parti a posto contiene in se' i seguenti elementi: enunciazione, dispiegamento, definizione o specificazione, costruzione o macchinario, prova, conclusione. L'enunciazione stabilisce quello che e' dato e quello che e' cercato... lo spiegamento segnala e isola quello che e' dato, e lo adatta per il suo uso nella indagine. La definizione o specificazione isola e afferma isolatamente quello che e' cercato. La costruzione o macchinario aggiunge quello che e' mancante al dato per il raggiungimento dell'obiettivo. La prova tira la necessaria inferenza ragionando scientificamente da fatti riconosciuti. La conclusione torna di nuovo alla enunciazione, confermando quello che e' stato dimostrato... essenziali e sempre presenti sono enunciazione, prova e conclusione.

Il delicato equilibrio delle varie parti si rompe presto, se mai e' esistito, e forse in verita' e' sempre stato soltanto una aspirazione, in una divisione tra il momento conoscitivo e quello della dimostrazione che sanziona la accettabilita' della proposizione da parte della comunita' matematica. Archimede torna a utilizzare metodi meccanici, come strumento euristico di conoscenza[5].

> E' piu' facile fornire la dimostrazione, dopo aver preliminarmente acquisito una certa conoscenza dell'oggetto della ricerca per mezzo di questo metodo, che mettersi a ricercare privi di ogni conoscenza.

In nessun caso rinuncia pero' alla dimostrazione, e al consenso dei colleghi matematici; si preoccupa della loro opinione quanto alla accettabilita' del postulato che porta il suo nome e che gli serve per le dimostrazioni. Ma se la dimostrazione e' solo la parte che fornisce l'inserimento in un quadro assiomatico alla Euclide, la dimostrazione non da' conoscenza. In altri termini, semplificando, il pensiero

[3] Pappo, *cit.* da Sir Thomas L. Heath nella sua edizione di Euclide, Dover, New York, 1965, vol. I, pp. 138-142.

[4] Proclo, ivi, pag. 129.

[5] Citato da G. Cambiano, Archimede e la crescita della geometria, in G. Giannantoni e M. Vegetti (a cura di), *La scienza ellenistica*, Bibliopolis, Napoli, 1984, pp. 130-49.

creativo non e' quello codificato dalla dimostrazione. In seguito si rovesceranno le cose, assegnando alla dimostrazione deduttiva una funzione di conoscenza.

Con la fine della fioritura del centro di Alessandria, la matematica cessa di svilupparsi e quindi di esercitare una influenza sulla cultura, al punto di essere dimenticata nei sommovimenti dello sfascio dell'impero romano e del medioevo; secoli non bui sotto tutti gli aspetti, al contrario proprio la logica godra' dopo il dodicesimo secolo del suo periodo d'oro. E' una logica piu' a misura d'uomo; nel contesto della teologia cristiana, la logica si sgancia dalla ontologia aristotelica, cosi' come dalla indagine etica, entrambe garantite dalla religione, e si esalta l'aspetto dell'arte di argomentare, non solo in funzione dei valori, ma nella vita di tutti i giorni. La logica del medioevo e' soprattutto scienza del linguaggio, ed e' il luogo dove si coltiva esplicitamente e si codifica l'arte del ragionamento, attraverso le *quaestiones* e le *disputationes*. Un'arte che diventa il banco di prova della ragione, anche se qualcuno, che pure ne e' entusiasta, lamenta sia troppo chiusa in se stessa[6]. Alla lunga la mancanza di un oggetto specifico trainante di ricerca fa si' che le tecniche di ragionamento si riducano a cataloghi onnicomprensivi, come quello di Lullo, mentre la funzione della logica e' sempre piu' solo quella di padroneggiare il linguaggio al fine di evitare insidie ed errori.

Trasmessa in questa forma, non sorprende che l'uomo del Rinascimento volga le spalle alla logica, attirato da obiettivi piu' coraggiosi e nobili. La critica alla logica ricapitola la critica a un'epoca. Nello spirito del Rinascimento, la logica deve seguire processi naturali, non astratti e rigidamente codificati. Secondo Descartes, solo episodicamente accade che raggiungiamo una conclusione certa esclusivamente in virtu' della forma, senza una considerazione chiara e diretta dell'oggetto. La deduzione e' un processo secondario, in quanto anche l'intelletto piu' limitato non puo' fallire in essa; le catene di sillogismi a cui vogliono limitarsi i logici hanno poco valore nella acquisizione di conos-

---

[6] Cosi' ad esempio Giovanni di Salisbury dopo un primo soggiorno a Parigi, nel secondo, nel 1148, osserva che "l'esperienza mi ha insegnato una conclusione manifesta, che, mentre la dialettica fa avanzare gli altri studi, cosi', se invece resta chiusa in se' essa rimane senza vita e spoglia, e non fa avanzare l'anima verso i frutti della filosofia, se non quelli concepiti altrove", citato da W. and M. Kneale, *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1962, pp. 225-6.

cenza. Ed ecco che ci si rivolge alla matematica, come rinnovato modello di *ars inveniendi*, mentre la logica nella tradizione *soft* di Port Royal[7] si contanima definitivamente di psicologismo: l'arte di distinguere il vero dal falso *a posteriori* nelle operazioni della mente[8].

Descartes propone dunque un nuovo modello, ispirato alla matematica[9]:

> Quelle lunghe catene di ragioni, tutte semplici e facili, di cui i geometri sono abituati a servisi per pervenire alle loro dimostrazioni piu' difficili, mi avevano dato occasione di immaginare che tutte le cose che possono cadere sotto la conoscenza dell'uomo si raggiungono nello stesso modo, e che purche' ci si astenga dall'accettarne alcuna per vera quando non lo e', e che si rispetti sempre l'ordine che ci vuole per dedurle le une dalle altre, non possono essercene di cosi' lontane che alla fine non le si raggiunga, ne' di cosi' nascoste che alla fine non le si scopra. E non mi dovetti scervellare per scoprire da quali si dovesse partire, perche' sapevo gia' che si trattava delle piu' semplici e piu' facili da conoscere; e considerando che tra tutti coloro che finora hanno ricercato la verita' nelle scienze, solo i matematici hanno potuto trovare qualche dimostrazione, vale a dire delle ragioni certe ed evidenti, io non avevo alcun dubbio che quelle fossero le stesse che essi avevano esaminato; non che ne sperassi alcuna altra utilita', se non che esse avrebbero abituato il mio spirito a nutrirsi di verita', e a non accontentarsi di nessuna falsa ragione...
> E vedendo anzi come i loro oggetti essendo differenti,esse riescono ad accordarsi in quanto non considerano altro che le diverse proporzioni o rapporti che scoprono, io pensai che era meglio che considerassi solo quelle proporzioni in generale, e senza supporle che in quegli oggetti che potevano rendere piu' facile la mia conoscenza... io pensai che per meglio considerarle in particolare io le dovevo rappresentare come linee, per il fatto che non conoscevo nulla di piu' semplice ne' di piu' facile a rappresentare alla mia immaginazione e ai miei sensi; ma che per trattenerle o considerarne diverse insieme, bisognava che le rappresentassi con qualche cifra, le piu' corte possibili... [e usandolo il metodo, in pochi mesi tante scoperte, cominciando dalle piu' semplici e generali, ogni verita' essendo una regola che sevica a trovarne altre...].

Descartes e' un punto cruciale, in quanto in lui (&Co, non dimentichiamo ad esempio Pascal) troviamo gli elementi decisivi del nuovo scenario, sviluppati o in germe, lucidi o ambigui, definitivi o caduchi che siano: 1) la rivalutazione della geometria, o della matematica in generale, come unico campo in cui sia possibile, o sia stato possibile l'avanzamento della conoscenza; 2) la attribuzione di questa qualita' alla dimostrazione, ma, si noti, alla parte che nei greci era solo la verifica finale, non all'analisi, apparentemente sottovalutata perche' troppo condizionata dalle figure; 3) la proposta di un modello di lunghe catene di passi semplici, processo linearizzato rispetto a quello dell'analisi, e scomposto in passi di indubitabile chiarezza; 4) la natura di questi piccoli passi, che non sono generali come i sillogismi, non sono logici, ma specificamente fondati su di un oggetto intuitivamente colto; 5) la possibilita' di una estensione di questo metodo al di fuori della matematica tradizionale, per il raggiungimento di

[7] P. Nicole, A. Arnaud, *Logique ou l'art de penser*, 1662.

[8] Junguis, citato da J. Bochenski, *Logica Formale*, Einaudi, Torino, 1972, pag. 337.

[9] Descartes, *Discours de la Méthode*, in *Oeuvres et lettres*, Edition de la Pleiade, Gallimard, Paris, 1953, pp.129 sgg.

qualsiasi forma di conoscenza.

Leibniz e' una eccezione nella difesa della logica, o una alternativa utopica, che sappiamo per certi versi profetica; ma, chiuso tra Lullo e l'alchimia, soccombe allo spirito dei tempi. Anche i suoi eredi, in filosofia, si lasciano influenzare dalle tendenze dominanti, rinunciano al progetto della *characteristica universalis* e riconoscono che solo la matematica e' la scienza dove impariamo ad usare con profitto le facolta' dell'anima nella ricerca della verita'[10].

All'Illuminismo viene trasmessa, e da esso accolta, l'idea della distinzione tra una logica naturale, fatta delle regole prescritte da Dio all'intelletto, e una logica artificiale, che mirava alla chiarificazione e allo sviluppo di quella naturale. Lo studio della logica al piu' doveva servire a trasformare in un abito la disposizione naturale originaria. Se e' vero che tutti ragionano correttamente anche senza lo studio della logica, al massimo si arriva a riconoscere che possono esserci tremendi miglioramenti nelle capacita' naturali[11]. Piu' frequentemente la fiducia nella logica naturale non lascia neanche spazio allo studio artificiale[12].

> L'uomo prima conosce, e poi e' in grado di dimostrare sillogisticamente. Sicche' il sillogismo viene dopo la conoscenza, e percio' esso serve all'uomo poco o nulla... Ci sono molti uomini che ragionano in modo estremamente chiaro e corretto, ma non sanno fare un sillogismo.

Questa posizione e' quella che sara' recepita nel manifesto dell'Illuminismo, nelle parole di d'Alembert[13]:

> Gli uomini, traendo profitto dall'ampliamento della sfera delle loro idee, dovuto ai loro stessi sforzi o all'aiuto dei loro simili, ritennero uitle ridurre ad un'arte anche l'apprendimento delle conoscenze e la comunicazione reciproca del pensiero: arte che fu trovata, e fu definita *logica*. Essa insegna a disporre le idee nell'ordine piu' naturale, a collegarle tra loro nel modo piu' immediato, a scomporre quelle che racchiudono troppe idee semplici, a considerarle sotto tutti i punti di vista, e finalmente a presentarle agli altri in una forma che le renda facilmente assimilabili. In cio' consiste la scienza del ragionamento, giustamente stimata la chiave di tutte le nostre conoscenze. Ma non bisogna credere che essa occupi il primo posto nell'ordine dell'invenzione. L'arte di ragionare e' un dono spontaneo della natura alle buone teste; e si puo' ben dire che i libri che ne trattano sono utili soltanto a coloro che possono fare a mano di leg-

[10] In particolare assume questa posizione il seguace piu' importante, in filosofia, di Leibniz, Ch. Wolff, citato da F. Barone, *Logica formale e trascendentale I*, Edizioni di Filosofia, Torino, 1957, pag. 93. Wolff raccomandava lo studio intenso della matematica accompagnato da una riflessione profonda sulle operazioni della mente come introduzione alla filosofia.

[11] Cosi' ad esempio J. G. H. Feder, riportato da Barone, *cit.*, pag. 100.

[12] J. Locke, *Saggio sull'intelletto umano*, IV, 17, 4-6.

[13] J.-B. Le Rond d'Alembert, Discours Préliminaire, citato da d'Alembert - Diderot, *La filosofia dell'Enclycopédie* (a cura di P. Casini), Laterza, Bari, 1966, pp. 67-69.

> gerli. Ragionamenti giusti se ne fecero in quantita' assai prima che la logica, ridotta in regole, insegnasse a distinguere quelli erronei, oppure a velarli sotto forme sottili e sofistiche.

Lo stesso atteggiamento, tramandato nella tradizione empirista, si ritrova nell' Ottocento, giu' fino a Whewell[14]:

> Lo studio della matematica e lo studio della logica possono essere considerati, rispettivamente, come un insegnamento del ragionamento attraverso la pratica e attraverso le regole,

ed e' inutile dire quale e' piu' efficace. La distinzione e' diventata un classico, ed e' ripetuta ancora oggi[15]: la logica non fa che codificare forme di ragionamento spontanee, o naturali, che meglio si imparano con la pratica, anzi sarebbe un errore sostituire alla pratica necessaria la pedissequa applicazione di regole astratte. Si puo' notare che cosi' si ammette comunque una equivalenza di contenuto, a parte la distinzione sulla efficacia, precedenza e naturalita' o meno delle diverse manifestazioni. Ma vediamo se la contrapposizione e' fondata, o se non e' una di quelle posizioni che assumono autorita' solo a forza di ripetizione. Vediamo quindi che tipo di ragionamento si ha presente quando si parla di matematica.

La polemica contro la logica in nome di una capacita' naturale, esemplificata dalla matematica, e' paradossale se si guarda al modello di ragionamento matematico a cui fa riferimento. Il modello risale a Descartes, e risente sia delle ambiguita' cartesiane, sia delle deformazioni successive. Descartes a parole celebra la geometria, di fatto si ispira all'algebra, alle catene di calcoli; in lui la considerazione chiara e diretta dell'oggetto sostiene i singoli passi, ma questa intuizione si perde sia con lo sbiadirsi della originale e personale filosofia di Descartes sia per la sempre maggiore influenza dell'aspetto algebrico e sia infine per lo sviluppo astratto che proprio nel settore della algebra si manifesta piu' consapevolmente.

I calcoli algebrici sono trasformazioni di equazioni con le leggi dell'entita'; non sono sillogismi ma hanno anche esse un carattere di generalita' e di formalismo che ricorda i passaggi logici;

---

[14] W. Whewell, *Principi dell'educazione universitaria inglese*, 1838.

[15] Ad esempio da H. Freudenthal, Logic as a subject or as an attitude, XIII Incontro di Logica Matematica, Roma, aprile 1988.

quanto piu' quel modello e' confermato e accettato dai matematici per la sua analogia con il calcolo algebrico, tanto piu' esso assume un carattere formale. D'altra parte l'algebra stessa, in parte sviluppando le intuizioni di Descartes, di Leibniz e di altri, in parte per sviluppi interni, si orienta a diventare una scienza sganciata dallo studio della quantita' e del numero, invero sganciata da qualsiasi interpretazione privilegiata che possa servire come intuizione diretta di un oggetto specifico. Ci si convince che dal calcolo algebrico si puo' passare a un *calculus qualitatum*[16]

> respingendo in primo luogo l'idea della quantita', perche' essa e' troppo particolare. Sostituirai al suo posto le qualita', le affezioni, le cose, le verita', le idee e tutto cio', infine, che puo' essere trattato, combinato, connesso, separato e mutato nelle forme piu' varie.

Dalla possibilita' di trattare matematicamente gli oggetti piu' svariati, non tradizionalmente matematici, si passa al riconoscimento che *nessun* oggetto e' come tale l'oggetto della matematica. La trattazione matematica e' resa possibile da caratteristiche molto generali e diffuse che non sono tipiche di una varieta' limitata di oggetti ma si manifestano nella nostra manipolazione di questi, nel nostro modo di ragionare su di essi. Non si crede piu' che solo numeri e figure permettano ragionamenti rigorosi, il rigore e la correttezza sono invece proprieta' del discorso.

Man mano che i matematici scoprono la possibilita' di diverse interpretazioni per le loro teorie, l'algebra diventa sempre piu' la scienza dei segni, giustificata e fondata non dal tipo di oggetti ma dalla dipendenza logica dalle leggi postulate. La dimostrazione cartesiana si configura cosi' di nuovo come dimostrazione logica, sia pure con regole che non sono sillogismi, ma trasformazioni di equazioni: altrettanto vuote e forse ancora piu' apparentemente banali. Se si guarda cosa dice lo stesso d'Alembert della dimostrazione matematica quando fa le sue osservazioni sulla logica, si vede che non ne esce un modello esaltante[17]:

> Se si esamina una serie di proposizioni matematiche dedotte le une dalle altre in guisa che due proposizioni risultino immediatamente contigue, senza passaggi intermedi, ci si avvedra' che tutte quante sono null'altro che la prima proposizione, la quale, per cosi' dire, si sfigura progressivamente e gradualmente nel passaggio da ciascuna proposizione alla successiva, acquistando forme differenti ma senza risultare tuttavia realmente modificata [ogni stadio e' destinato a trasmettere le stesse idee].

Un esito come si vede difficilmente compatibile con la esaltazione della naturalita' delle forme di

[16] J. H. Lambert, *De universaliori calculi idea disquisitio*, Leipzig, 1767, citato da Barone, *cit.*, pag. 63.

[17] d'Alembert, *cit.*

ragionamento che si manifesterebbero, e in modo esclusivo, nella matematica[18]. Il risultato e' l'idea della matematica come calcolo privo di pensiero, identificato anche con le deduzioni formali. Quando anche le leggi logiche diventeranno equazioni, con l'algebra della logica, si arrivera' alla completa identificazione della dimostrazione matematica con la deduzione logica, in forma matematica.

Metodo assiomatico e logica formale

Quando la logica diventa matematica non migliorano affatto i suoi rapporti con il ragionamento matematico. La matematizzazione della logica viene intesa inizialmente come una rigorizzazione del pensiero secondo aspetti estrinseci della matematica stessa; questi si esprimono in esigenze di chiarezza e precisione soddisfatte dal simbolismo e dalla assiomatizzazione algebrica. La matematizzazione della logica si identifica inizialmente con la formalizzazione in questo senso riduttivo, e cosi' non se ne capisce la necessita' se non come estremo scimmiottamento di certe soluzioni che in matematica sono adottate solo quando internamente necessarie.

Tuttavia un motivo profondo e corretto per un incontro su basi nuove tra logica e matematica ci sarebbe, lo si vede emergere dallo sviluppo storico, anche se di dovra' attendere per una chiarificazione teorica posteriore. Con l'evoluzione delle teorie algebriche astratte la fondazione della matematica, che abiamo visto spostarsi nelle leggi postulate e nella deduzione da esse, non ha altro luogo se non quello mentale dove radicarsi. Il ritrovamento delle stesse strutture algebriche emerse dalla generalizzazione di quelle numeriche nelle strutture a cui si perviene formalizzando le piu' semplici "leggi del pensiero" mette in luce un legame non estrinseco tra i prodotti della matematica e certi prerequisiti del lavoro mentale. Il legame si puo' sfruttare in due sensi, e Boole infatti propone le sue strutture come un utile modello matematico per lo studio della mente, in senso generale ed ambizioso. Poiche' non si poteva negare che la trasformazione in calcolo delle leggi del pensiero fosse una conquista della matematica, la matematica veniva a inglobare proprio quelle leggi del pensiero su cui si pensava che la matematica stessa dovesse basarsi come fondazione.

[18] d'Alembert accetta il modello per tutti gli uomini, un po' come caso estremo, lasciando solo spazio per accorpamenti e velocizzazioni alle caratteristiche individuali diversamente provviste dalla natura.

Ma nella direzione opposta la logica matematica almeno inizialmente non apporta nulla di nuovo, dal punto di vista di leggi del pensiero, alla matematica[19]. Anzi, la sua forza sta nella capacita' di esprimere in una forma semplice e in un calcolo in verita' maneggevole le leggi logiche fondamentali, quelle che erano state individuate fin dal tempo di Aristotele, e che per questo apparivano fondamentali, per la loro antichita' e priorita'. La prova di aver colto le "leggi del pensiero" era data dal fatto che quelle erano le leggi classiche della logica, la logica degli antichi.

Per parte sua la matematica ha tutto da perdere, anche in fatto di immagine, dalla identificazione con la logica. Se la dimostrazione matematica e' quella logica, la matematica non contribuisce nulla al pensiero, ed e' la logica che vince. L'opera dei primi logici matematici fa vedere praticamente come la formalizzazione delle teorie stabilizzate sia possibile, un fatto importante di cui tenere conto e cercare di spiegare. Essa introduce anche e trasmette pero', come sua spiegazione, l'idea che la dimostrazione formalizzata sia adeguata al pensiero. Ma i matematici non si riconoscono in quel tipo di logica, le violente polemiche di Poincaré contro la logistica sono significative; non saranno solo i filosofi idealisti a negare dignita' di pensiero alla logica formale.

Il discorso matematico si e' enormemente arricchito nello sviluppo dell' Analisi e in generale della considerazione dell'infinito; tale sviluppo non ha influenzato il paradigma della dimostrazione perche' non ne rispettava i canoni cartesiani e veniva accettato come euristica o temporanea felice pazzia, con la coscienza infelice di dovervi porre rimedio. Ci si poteva vantare dei successi pratici, non del ragionamento.

Non solo quelle poche e povere regole di inferenza non corrispondevano alla ricchezza dell'argomentazione; di piu', proprio nella formulazione matematica apparivano ulteriormente ridotte e semplificate; mettevano in evidenza un aspetto di calcolo meccanico che non pareva poter esaurire il discorso matematico, che lo chiudeva in catene.

Si arriva a una posizione di stallo, e questa e' la situazione in cui ci troviamo ancora oggi,

[19] Questa affermazione e' esagerata e sbagliata, si riferisce alla impressione che si poteva avere dall'esterno; di fatto l'analisi del linguaggio e del discorso fa progressi decisivi, ad esempio anche solo nella estensione dei giudizi di base da quelli del tipo soggetto-predicato a quelli che coinvolgono relazioni generali; lo stesso dicasi per l'uso dei quantificatori.

dal punto di vista delle opzioni culturali che si offrono, ed e' una situazione assai spiacevole. Le uniche proposte precise sono inaccettabili perche' contraddicono la pratica, e piu' della pratica la consapevolezza profonda di chiunque conosca la matematica, ma le alternative non riescono a esprimere una posizione complessiva coerente e convincente. Non possiamo sposare le posizioni anarchiche che dicono che la matematica e' una ricerca empirica dove la dimostrazione non ha nessun posto privilegiato; non possiamo accettare la visione platonica di un universo di insiemi infiniti (provare a farlo con gli studenti); ne' ci si puo' accontentare di giustapporre una matematica geometrico-intuitiva a una calcolistica, magari facendola corrispondere a tipi di intelligenza diversa, o a predisposizioni naturali diverse, vuoi piu' analitiche vuoi piu' intuitive. Eppure queste soltanto sembrano le alternative in circolazione. Per uscirne in modo pulito dobbiamo rispondere ad alcune domande:

- quale e' la funzione della dimostrazione
- quale di conseguenza la sua struttura
- se sia necessaria la strutturazione logica
- se questo implichi la formalizzazione
- quale rapporto ci sia tra i testi formali e il ragionamento matematico
- e se non di identita' quali siano gli aspetti di un ragionamento matematico che non e' logico, e in che senso.

Una risposta complessiva a queste domande richiederebbe un lungo discorso, che dobbiamo accontentarci di accennare, o di offrire senza tutte le necessarie pezze di appoggio[20].

La precisazione definitiva dello *status* delle teorie matematiche e' stata raggiunta con la rivalutazione e riformulazione del metodo assiomatico, compiuta alla fine del secolo scorso nell'ambito delle ricerche geometriche e algebriche. La coscienza di questa grande acquisizione del pensiero scientifico moderno e' comune a tutti i grandi matematici del tempo, Poincaré, Hilbert, Enriques, ed e' espressa lucidamente ed enfaticamente da Enriques nella sua storia della logica[21]. Il punto di arrivo si riassume nella formula del metodo ipotetico-deduttivo: gli assiomi stabiliscono tutte e sole le relazioni rilevanti tra gli enti in essi menzionati dai termini primitivi; al di fuori dei mutui rapporti fissati dagli assiomi i termini non hanno significato alcuno e sono passibili di diverse interpretazioni, fatte salve

[20] Una piu' ampia discussione di questi temi, insieme a una esposizione dei rapporti storici e teorici tra matematica e logica, dal punto di vista della dimostrazione, si trova in G. Lolli, *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna, 1988.

[21] F. Enriques, *Per la storia della logica*, Zanichelli, Bologna, 1922 (ristampa anastatica 1987).

soltanto le relazioni postulate dagli assiomi. I teoremi sono le proposizioni che sono conseguenza di questi assiomi, nel senso di essere veri in tutte le interpretazioni in cui gli assiomi sono veri.

Sembra una banalita', e' quello che tutti si insegna e si ripete, ma spesso senza rendersi conto delle conseguenze. La prima e' che al cuore della matematica sta la relazione di conseguenza sopra descritta tra assiomi e teoremi; la relazione e' caratterizzata dal fatto che gli assiomi non hanno un significato; anche se fosse possibile assegnarne loro uno solo, sulla base delle condizioni imposte dagli assiomi, la relazione di conseguenza non e' mai basata su di una sola interpretazione; essa prescinde da quante ce ne siano, purche' le si considerino tutte. Questa relazione di conseguenza, che caratterizza i teoremi matematici, e che impone dei vincoli al modo in cui la si puo' stabilire, e' quella che in verita' e' anche l'oggetto di studio generale della logica, o almeno e' quella che la logica contemporanea ha posto al centro della sua attenzione; e infatti si chiama conseguenza logica. La logica contemporanea si caratterizza per questo oggetto di studio, a differenza di altri che in altri periodi sono stati caratterizzanti, dallo studio dell'essere a quello del pensiero, dallo studio della verita' a quello del linguaggio.

Lo studio della relazione di conseguenza logica ha permesso di chiarirne la natura: non e' una cosa vaga, per cui di fronte a una affermazione qualunque di sussistenza di tale relazione non si sappia da che parte girarsi per verificarla, nella potenziale infinita' delle interpretazioni; non e' neanche purtroppo decidibile, non permette in senso forte il *calculemus* di Leibniz, perche', non esiste un algoritmo che in ogni caso permetta di decidere meccanicamente se sussiste o meno; ma e', in termini tecnici della teoria della computabilita', semidecidibile. Un processo di generazione meccanica di tutti gli esempi della relazione, di tutte le coppie della relazione, puo' essere realizato da vari tipi di algoritmi computazionalmente equivalenti, e tra questi in particolare da quelli che si configurano come calcoli deduttivi, che permettono cioe' di dedurre i teoremi dagli assiomi in uno dei sistemi logici classici. Questi sistemi sono dimostrati *completi* proprio in questo senso, che tutti i casi di conseguenza logica sono ottenibili come derivazioni della conclusione dalle premesse nei sistemi in questione. I sistemi logici sono anche detti calcoli perche' hanno l'aspetto di un calcolo.

E non deve sorprendere che le regole che permettono di costruire le derivazioni con cui si riconosce la relazione di conseguenza logica siano semplici. Infatti sono inevitabilmente formali, oppure non sono: le regole non possono basarsi su alcun significato delle parole, perche' queste non devono averne, bisogna prescindere da tutti i significati; e se si prescinde dal significato, o da ogni significato possibile, resta solo la forma sintattica. Le trasformazioni possibili non sono trasformazioni di conoscenze in senso intuitivo, ma solo trasformazioni sintattiche; esse dipendono, nel loro numero, dall'alfabeto, dal numero delle particelle logiche come connettivi e quantificatori; ma sono in numero finito e ciascuna inevitabilmente molto semplice, meccanica, che e' sinonimo di sintattica.

Vediamo cosi' anche perche' la logica di cui stiamo parlando, quella che stabilisce la relazione di conseguenza logica, non puo' che essere formale; non per una scelta filosofica, non perche'i simboli artificiali siano di aiuto alla chiarezza e alla precisione, non perche' corrispondano in modo univoco alle idee piu' semplici e non analizzabili (come pensava Peano sulla scorta di una tradizione che fondeva i contributi di Pascal e di Leibniz)[22]. Enriques rifiutava il formalismo della logica matematica perche' queste erano allora le sue giustificazioni. Una piu' precisa e aggiornata consapevolezza richiedeva la chiarificazione di diverse nozioni sintattiche e semantiche, come quella di interpretazione di un formalismo, e la loro precisa distinzione; ma le vere giustificazioni discendono proprio dalla corretta impostazione della matematica descritta da Enriques: il formalismo e' implicito nel metodo assiomatico, anche se si usa il linguaggio naturale, perche' si usa in realta' un linguaggio spogliato di significato[23]. Si da' al piu' la scelta tra un discorso in linguaggio naturale, nel corso del quale si deve continuamente ripetere che si prescinde dai significati usuali, e l'uso di un linguaggio artificiale che aiuta a rendere automatico questo fatto, magari a scapito di altre condizioni psicologicamente importanti.

Detto questo, e riconosciuta la funzione essenziale della dimostrazione, intesa come deriva-

[22] E' possibile sostenere i vantaggi di linguaggi artificiali simbolici che abbiano pero' un contenuto, un significato precisi. Un esempio sotto gli occhi di tutti e' il linguaggio della segnaletica stradale. Tali linguaggi simbolici non sono pero' formali, e non sono matematici a meno che non si prescinda dal loro significato.

[23] E' nota la battuta attribuita a Hilbert, secondo cui "punti", "rette" e "piani" negli assiomi della geometria euclidea potrebbero essere sostituiti da "sedie", "tavoli" e "bicchieri"; ma si intende naturalmente che non si vuole con cio' parlare di sedie, tavoli e bicchieri.

zione in un calcolo logico, non si e' autorizzati a trarne corollari illegittimi. In particolare questo non significa che 1) l'unico modo di esibire la sussistenza della relazione di conseguenza logica sia quella di scrivere una derivazione formale, ne' significa che 2) il ragionamento matematico sia formale.

Per quel che riguarda il primo punto, occorre osservare che c'e' un rapporto di scambio tra semplicita' e lunghezza, che sono inversamente proporzionali; i calcoli logici privilegiano la semplicita' dei singoli passi scaricando la complessita' sulla lunghezza. Di qui vengono i problemi di verificabilita' e visualizzabilita', che sono ampiamenti discussi oggi nella filosofia della matematica, connessi alla lunghezza e alla mancanza di senso. I problemi della verifica delle dimostrazioni, la verifica della correttezza di un lungo testo che si presenta come derivazione, sono importanti e complessi; ma una cosa occorre avere bene a mente, per non impegolarsi in dispute inconcludenti, e cioe' che quei lunghi testi formali non pretendono di rappresentare il percorso del pensiero. Se non sembrano aver senso e' perche' non devono avere senso. Tanto e' vero che per la loro natura, prima che per la loro complessita', sono in linea di principio meglio affidati, per la verifica, a un elaboratore non umano.

Non c'e' nessuna ragione perche' la relazione di conseguenza logica, che si riferisce alla totalita' delle possibili interpretazioni di un insieme di simboli, abbia qualcosa a che fare con le operazioni con cui funziona il nostro cervello. E' certo una grande conquista l'aver scoperto un modo oggettivo, verificabile e comunicabile per testimoniare la sussistenza di tale relazione; ma i segni che certificano la relazione, scomponendola in una serie di passaggi, perche' dovrebbero corrispondere ai movimenti del pensiero? Solo per il fatto che tali segni si chiamano regole logiche, e che la parola logica ci richiama il ragionamento? Qui gioca una pesante eredita' storica da cui tuttavia abbiamo preso le distanze.

Non bisogna dimenticare che lo studio matematico della nozione di conseguenza logica e' stato possibile in quanto la logica stessa e' stata assiomatizzata, e nella trattazione assiomatica della logica, come sottolineava fortemente Hilbert, le particelle logiche stesse sono spogliate del loro significato, cioe' di quello di inferenza logica. Si puo' ammettere che le regole logiche riguardano trasformazioni di parole di linguaggi che, se pure simbolici, sono costruiti ispirandosi ai linguaggi naturali, e quindi a come si parla e come si esprimono le idee: le varie categorie sintattiche, predicati, individui ecc. sono derivate dai linguaggi naturali. Questo argomento pero' e' debole perche' trascura il fatto che i formalismi e i calcoli logici a cui si applica la nozione di conseguenza logica sono molto piu' generali dei linguaggi predicativi. Il legame restante percio' e' molto tenue e indiretto.

Inoltre e' vero che quelle regole sono state trovate pensando a delle forme di ragionamento; abbiamo detto che esprimono le leggi logiche fondamentali individuate dagli antichi. Ma antico vuol anche dire, senza presunzione e senza offesa per gli antichi, superficiale, come e' inevitabile per tutte le prime osservazioni teoriche dell'uomo[24]: i sillogismi aristotelici e le inferenze stoiche sono quelle che piu' facilmente si possono estrarre da una prima riflessione sull'uso della ragione. Proprio per questo non sono le piu' sofisticate, e sono comunque quelle che si notano quando si osserva il ragionamento svolto al livello di una prima maturazione teorica. Non e' un caso che all'inizio si prestino bene alla formalizzazione delle teorie classiche e sperimentate, compiute in un certo senso nel loro sviluppo, sulla base di assiomi ben accettati; Peano nel suo lavoro di formalizzazione si ferma a queste, mentre coloro come Russell che vanno avanti e affrontano i problemi della teoria delle funzioni e degli insiemi si trovano con difficolta' impreviste.

Quelle poche regole trovate dagli antichi, che sono l'ossatura dei calcoli logici, non sono inadeguate, ma non sono inadeguate rispetto alla possibilita' di generare la relazione di conseguenza logica; questo significa che questa relazione e' semplice e basilare, e non c'e' motivo di sorprendersene. Anche la matematica antica, se pure semplice nei teoremi, era matematica allo stesso titolo di quella moderna e quindi la relazione di conseguenza logica c'era gia', anche se non lo si sapeva, o meglio se non si pensava che fosse essa a caratterizzare i teoremi, e si pensava invece che i teoremi descrivessero la geometria del mondo fisico.

La conclusione a cui arriviamo e' questa: che la dimostrazione non deve essere vista come il ragionamento che stabilisce la conclusione del teorema; la dimostrazione e' la certificazione del legame di conseguenza logica tra assiomi e teorema, ed e' l'obiettivo finale della ricerca matematica. Ad essa si puo' arrivare in diversi modi. Solo raramente la si elabora direttamente in un calcolo

[24] E' una lezione che abbiamo imparato da Georg Kreisel, nella sua varia e profonda riflessione sulla logica.

formale, perche' il pensiero non e' logico in questo senso formale. Normalmente non si pensa in un sistema formale; non si pensa attraverso una serie di passaggi ciascuno dei quali stabilisce la relazione di conseguenza logica. Si pensa in riferimento a domini specifici e a interpretazioni specifiche delle parole che si usano, e i singoli passaggi non sono percio' regole logiche nel senso tecnico che abbiamo detto. Senza scomodare le ricerche psicologiche su questo campo, l'introspezione ci assicura che i nostri ragionamenti non si svolgono a un livello astratto, seguito da una applicazione al caso particolare che ci interessa[25]. Al massimo il riferimento a leggi generali viene richiamato come una possibile verifica della correttezza del ragionamento; questo quando il ragionamento e' un caso particolare di uno della massima generalita', ma non e' sempre cosi'. L'idea che anche il pensiero matematico sia logico e' un residuo di quando si pensava che tale pensiero (= dimostrazione) avesse un contenuto specifico, un oggetto specifico a cui si applicavano come caso particolare le leggi logiche generali. Abbiamo visto che tale impostazione portava il modello cartesiano a un ambiguo e insostenibile equilibrio tra algebra e logica; per noi oggi la dimostrazione non puo' che situarsi al livello generale, non e' un caso particolare della logica, e' logica.

Alla dimostrazione si puo' arrivare con dei ragionamenti che assomigliano nella loro scansione a quella che sara' la derivazione finale in un calcolo logico, e per successive approssimazioni, raffinamenti e standardizzazioni conducono a quel testo. Questa e' la strada piu' comune, e forse preferibile, quando e' attuabile, perche' la esibizione esplicita della dimostrazione, o di una strada ben chiara per arrivarci, e' in fondo il modo piu' sicuro per permettere quella opera di verifica oggettiva che e' auspicabile, ed e' resa possibile dalla semplicita' dei passi dei calcoli logici. Ma non e' l'unico modo.

In realta' la maggior parte dei ragionamenti che si svolgono in matematica hanno la caratteristica di tendere a stabilire la esistenza di una dimostrazione in un modo indiretto, spesso a dimostrare la esistenza della dimostrazione senza esibirla.

---

[25] Abbiamo l'impressione che spesso si confonda la regola di particolarizzazione (il passaggio da una affermazione universale a una sua esemplificazione specifica), che e' una regola logica, con l'operazione di interpretazione di una catena inferenziale formale, la sua trasformazione in un discorso significante sul dominio della interpretazione, che e' invece una operazione metateorica.

Ricuperiamo cosi' la antica distinzione di Archimede, in un senso che non e' forse proprio il suo ma che e' l'unico modo di salvare la distinzione tra euristica e dimostrazione: non ci si puo' limitare a giustapporle senza legami, finendo di renderle zoppe e svalutarle entrambe. L'euristica e' pensata normalmente come una ricerca in uno spazio concreto, fisico addirittura, e come tale non e' considerata dimostrazione perche' utilizzerebbe le tecniche di ricerca delle scienze sperimentali. Ma il motivo per cui l'euristica non e' dimostrazione non e' che usa procedimenti di altre discipline. In verita' l'euristica e' una ricerca della dimostrazione nello spazio delle dimostrazioni, ed e' matematica. La dimostrazione si cerca in uno spazio che non e' in principio dato, ma che una volta delimitato, una volta scelta una strategia, e' concreto e richiede pensieri dipendenti dal dominio, e non passi logici. Puo' essere anche un pensiero che si svolge con l'aiuto di strumenti meccanici, soggetti alle relative teorie, salvo in un momento diverso riconoscere quello che e' essenzialmente dipendente da quel dominio e quello che puo' essere generalizzato. Era il caso di Archimede, e' oggi il caso delle dimostrazioni col calcolatore.

La dimostrazione del teorema dei quattro colori offre un esempio di una dimostrazione che non e' possibile toccare con mano, ma la cui esistenza e' considerata provata attraverso un complicato ragionamento in cui oltre alla teoria della calcolabilita', dei linguaggi, della correttezza dei programmi, entrano anche considerazioni di teoria fisica, relative alle macchine reali che eseguono la dimostrazione.

Cosi' e', piu' banalmente, con le dimostrazioni che si svolgono col linguaggio comune: si puo' argomentare sfruttando un significato concreto delle parole e poi con un altro argomento riconoscere l'indipendenza della conclusione da quei significati, senza che necessariamente il ragionamento cosi' come e' appaia un ragionamento caratterizzabile come logico.

Se si accetta questa chiarificazione generale, si apre la strada per iniziare a discutere finalmente del ragionamento matematico, dei tipi di ragionamento che si fanno in matematica; per iniziare innanzi tutto a metterlo in luce, a riconoscerlo e ad apprezzarlo invece che a nasconderlo come uno scheletro nell'armadio, per la paura di non sapere come farlo rientrare in un quadro generale, o temendo di dover cedere la supremazia agli altri scienziati. Non si tratta solo di descriverlo fenomenologicamente restando poi in imbarazzo nel giudicarlo legittimo o meno; abbiamo un criterio per giudicarlo, che e' la sua finalizzazione alla ricerca della dimostrazione.

Le strategie piu' complesse di dimostrazione indiretta di esistenza della dimostrazione sono studiate, al fine di valutarne la correttezza e la efficacia, nella logica contemporanea, e come si puo' immaginare pongono problemi non indifferenti ma estremamente affascinanti. Bisogna tener presente infatti che non ci si puo' accontentare di una qualunque forma di convincimento, soggettivo o intersoggettivo. Tutti i metodi indiretti devono confrontarsi con quello diretto quanto alla affidabilita' e controllabilita' del risultato.

Non si vuole sostenere che non esiste un rapporto di alcun genere tra il ragionamento che porta alla dimostrazione e la dimostrazione, riproponendo in altra forma la giustapposizione tra pensiero e dimostrazione formale come se questa fosse una inutile appendice, solo la posta neutra di un gioco. Non e' solo il fatto che la dimostrazione interagisce, o retroagisce sulla ricerca, guidandola. E' che il pensiero non e' una cosa mistica non controllabile e di cui non si possono dare regole. Anzi il ragionamento contiene *anche* delle parti formali. Il discorso matematico contiene dei segmenti che sono dei pezzi di deduzione formale che si integrano benissimo con quello informale. D'altra parte le applicazioni della matematica piu' semplici e diffuse consistono proprio nello sfruttamento di calcoli, di solito di tipo numerico, ma oggi sappiamo che non c'e' nessuna differenza tra il calcolo numerico e quello logico.

Per evitare concessioni eccessive e sbagliate agli psicologi, riflettiamo un momento su come e' possibile la integrazione di pensiero contenutistico e di tecniche formali. E' una esperienza comune, che non ha nulla di trascendentale, e non deve averlo, ma che e' bene puntualizzare. Pensiamo al caso piu' semplice di modellizzazione matematica di un problema, che porta alla scrittura di una equazione algebrica. Il non matematico, o chi non conosce le tecniche matematiche, e' riluttante a considerare il modello matematico proposto, su cui dovrebbe mettere in funzione le tecniche che non possiede. Le persone come abbiamo detto non sono capaci di seguire catene un po' lunghe di inferenze. La riluttanza ad applicare tali tecniche sta in una paura atavica di non essere capace a seguirle, appunto perche' sono formali. Si resta abbarbicati alla formulazione del problema in termini intuitivi e concreti, perche' con quella formulazione sembra di poter dominare gli elementi in gioco, di capirli.

Mi permetto di raccontare una esperienza che mi e' capitata, e che per me e' stata illuminante, mentre chi insegna ne ha naturalmente ogni giorno di simili, e chi conosce la storia della invenzione del simbolismo matematico, delle variabili, per la scrittura delle equazioni ritrova un fenomeno ben noto. Recentemente nel Consiglio di Amministazione della mia universita' si e' discussa l'opportunita' di cambiare il modo di calcolare le tariffe delle convenzioni con gli enti esterni, in modo che i contributi Gescal ed Enpas sui compensi, invece di venire calcolati alla fine sui compensi lordi, riducendone il netto, venissero calcolati all'inizio e, come spese, addebitate al contraente. Ma tali contributi sono calcolati come percentuali su una quota che dipende dal totale della tariffa della convenzione, che essi stessi contribuiscono a determinare. Una circolarita', di fronte alla quale non solo gli impiegati, ma anche i colleghi del CdA hanno subito come prima reazione sostenuto che era evidentemente impossibile. Avendo sostenuto, quasi per principio, che bastava un po' di matematica, mi sono trovato a dover risolvere il problema, che si riduceva a una semplice equazione di primo grado, con l'incognita dei compensi che si trovava in entrambi i membri, ma con coefficienti diversi, per cui la soluzione era ovvia.

A parte la fama che mi sono fatto con questa mia prima uscita come matematico applicato, nel momento di spiegare la formula risultante ho potuto riscontrare la resistenza alla contemplazione e alla discussione della equazione. Anche solo l'uso come variabili delle iniziali dei dati in questione, compensi, spese, tariffe ecc. preoccupa come un distacco dalla solidita' dei concetti, su cui si sa ragionare, alla astrattezza della formula che non si sa come manipolare. Noi pero' sappiamo, e questo esempio lo conferma, che la solidita' dei concetti puo' diventare un ostacolo, e non lasciar vedere non solo la soluzione, ma neanche la risolubilita' del problema.

Il motivo per cui a un certo punto si deve passare alla versione matematica formale e' che se non ci si libera dal significato delle parole non si riesce a vedere la soluzione del problema. Il significato delle parole diventa a un certo punto un ostacolo allo sviluppo del ragionamento. Nel labirinto del concreto ci si perde. C'e' anche una complessita', una eccessiva ricchezza di determinazioni dei significati intuitivi, che e' la controparte della complessita' della lunghezza delle catene formali. Allora occorre semplificare, isolare quello che e' essenziale e trascurare le altre determinazioni non pertinenti. Questa semplificazione, la individuazione delle caratteristiche essenziali e' un lavoro di assiomatizzazione; a questo punto scatta la tecnica formale, calcolistica o deduttiva. A questo punto occorre sapere fare scattare la macchina, il sistema formale che svolge i calcoli indipendentemente dal pensiero.

Una volta era l'uomo che doveva stravolgere la sua natura piu' spontanea e comportarsi da macchina; naturale o innaturale che sia, sappiamo che e' possibile. La deduzione formale si integra nel complesso della attivita' razionale. La situazione piu' comune e' quella in cui a mente si fanno dei calcoli; gia' da tempo tutti si sono abituati ad allungare la mano verso la calcolatrice e farsi dare le risposte dei calcoli eseguiti dalla macchina; adesso lo si puo' fare anche per i passaggi logici.

Le ricerche sulla dimostrazione automatica, che tendono ad abbandonare il progetto di un dimostratore universale poco efficiente, hanno riscoperto questa forma di ragionamento, che si chiama pomposamente dimostrazione interattiva al calcolatore. Alla macchina si chiede di fare dei pezzi anche impegnativi di dimostrazione, quando si sa che si svolge nell'ambito di una teoria decidibile.

Prima di proseguire l'argomento del ragionamento, facciamo una osservazione, collaterale, ma che si impone dopo aver ricordato la caratterizzazione logica del sistema assiomatico. Mettere al centro dell'attenzione la relazione di conseguenza logica ha dei riflessi, sia pure indiretti e mediati, anche sulla didattica; per lo meno su quello che deve essere l'atteggiamento di fondo per introdurre alla matematica superiore.

L'osservazione, di nuovo quasi banale, e' che in matematica non sono importanti gli enunciati dei teoremi, ma il legame tra assiomi e teoremi. L'osservazione sara' banale ma si tende a dimenticarsene. Ad esempio recentemente Schwartz[26] discutendo il teorema ergodico di Birkhoff, nel quadro di una denuncia del carattere astratto, irreale, di certa matematica, sostiene che non e' il teorema, ma l'ipotesi necessaria perche' il teorema sia applicabile che mostra il perche' la conclusione sia plausibile.

---

[26] J.T.Schwartz, The Pernicious Influence of Mathematics on Science, in M. Kac, G.-C. Rota, J. T. Schwartz, *Discrete Thoughts*, Birkhaüser, Basel, 1986, pp. 19-25.

E' evidente qui come si equivochi sulla funzione di un teorema, che non e' quella di mettere in evidenza la plausibilita' di una conclusione in se', ma il legame tra ipotesi e conclusione.

In un teorema sono importanti le ipotesi (se gli assiomi si aggiungono alle ipotesi specifiche dell'enunciato), cosi' come in un algoritmo e' piu' importante il programma che non i singoli risultati dei calcoli. Le ipotesi e gli assiomi sono importanti perche' nelle applicazioni e' di essi che ci si preoccupa per vedere se sono soddisfatti. Certo se si lavora in una teoria i cui assiomi sono semplici, intuitivi e assimilati quasi a leggi di natura la cui verifica e' scontata (aritmetica, geometria euclidea) non c'e' bisogno di tornare sempre su di essi, e ci si preoccupa soltanto degli enunciati derivabili, ma nella maggior parte delle teorie non e' cosi'. Non bisogna pensare che le teorie classiche possano essere insegnate solo al modo degli antichi; anche li' si puo' e bisogna fare attenzione perche' una modifica delle assunzioni da cui si parte e' sempre possibile. In aritmetica l'assioma sostanzialmente unico a cui ci si riporta sempre e' quello della induzione (allora tra l'altro l'euristica elementare sembra non possa essere che quella della induzione semplice delle scienze sperimentali). Ma se uno vuole ad esempio dimostrare certe proprieta' dei numeri primi usando le classi di resti cambia il riferimento. Questa osservazione ci riporta al discorso principale, quello del ragionamento matematico, perche' l'attenzione agli assiomi e' l'attenzione a quale forma di ragionamento si vuole usare.

Il ragionamento in matematica

A questo punto, sgombrato, si spera, il campo da una serie di equivoci, non e' ancora detto pero' che si possa affermare che la matematica, quella reale, quella della pratica, tutta quella che storicamente si e' manifestata, e' il luogo privilegiato del ragionamento; dobbiamo argomentarlo e illustrarlo con esempi, e con argomenti di plausibilita'.

Solo che adesso ci manca spazio, abbiamo dedicato tutto quello che avevamo a chiarire alcune questioni preliminari, di fondo, e resta solo poco tempo per qualche esempio. Io credo che si possa partire da una osservazione molto generale di questo tipo. Una ragione per cui e' plausibile che la matematica sia il luogo privilegiato del ragionamento, rispetto ad altre aree di ricerca, e' che il suo dominio non e' definito e fissato, non e' dato. Quando si ragiona in un campo come quello legale ad esempio, lo spazio e' dato, ed e' quello delle leggi (se e' anche quello delle consuetudini puo' essere diverso). Ragionare significa allora percorrere dei cammini in questo spazio, e certo si possono dare diverse forme di astuzia, diverse strategie nella ricerca di cammini, i piu' brevi, o al contrario quelli che toccano piu' punti, o quelli che non arrivano da nessuna parte, o la soluzione unica per arrivare a un punto. Ma lo spazio e' fissato[27].

Per un altro esempio, il ragionamento investigativo che e' basato sui fatti, e sulla loro organizzazione, puo' assumere dignita' di ragionamento ammirevole solo quando non e' solo raccolta di fatti, ma e' della forma in cui si congetturano fatti che non si vedono, salvo pero' poi a verificarli con prove; quindi i fatti non si vedono ma sono esistenti.

In certa ricerca scientifica, fisica ad esempio, quando si devono trovare spiegazioni si assiste a una mossa analoga, quella della postulazione o immaginazione di qualche elemento non visibile ma essenziale alla spiegazione, e vincolato dal contesto teorico; questi elementi possono anche restare di tipo teorico, giustificati solo dalla funzione esplicativa che svolgono; e' pur sempre un aspetto inventivo, di invenzione di nozioni.

Questi casi di inventiva rientrano come e' noto, almeno per le scienze fisiche, nella matematizzazione. Sono possibili proprio perche' si svolgono in un contesto matematico. La invenzione di forme di ragionamento nuove e' possibile solo nella matematica perche' qui non e' delimitato *a priori* il campo dell'esistente, e quindi neanche la combinatoria dell'esistente.

La storia della matematica e' caratterizzata da un continuo allargamento. La migliore espressione di questo fatto e' nella definizione data da uno studente[28] delle rette parallele come le rette che nelle scuole medie non si incontrano e che invece all'universita' (e speriamo gia' alla fine del triennio) si incontrano all'infinito. E' una osservazione molto profonda: le rette dello spazio fisico che si studiano nelle medie non si incontrano, per fortuna, perche' sono le rotaie del treno. Ma i matematici

[27] Si potrebbe notare che il concetto stesso di ricerca strategica e' stato matematizzato: e' ovvio il modello matematico dei grafi e dei cammini su grafi (questo aprirebbe il discorso sulla matematizzazione, accennato nel primo capoverso). Anche la ricerca della dimostrazione, nell'euristica in senso lato, o nelle strategie indirette, e' soggetta come abbiamo detto a una impostazione e un controllo matematico.

[28] Raccontata in una relazione al Convegno.

hanno ritenuto di dover ragionare su di esse come se si incontrassero, e hanno aggiunto i punti all'infinito.

La tensione all'ampliamento e' adesso entrata nella matematica contemporanea proprio come sua natura. Facciamo un esempio; una strategia dimostrativa estremamente comune e diffusa e' la seguente: dovendo dimostrare una proprieta' di un insieme di oggetti, si ragiona invece che su di essi sull'insieme dei sottinsiemi finiti, o delle sequenze finite. In un libro di informatica[29] il primo teorema che si incontra, la caratterizzazione dei linguaggi regolari come i linguaggi accettati dagli automi finiti, e' impostata nel seguente modo: gli automi sono definiti come grafi orientati, con gli archi etichettati con simboli dell'alfabeto; la dimostrazione inizia con la introduzione di una nuova nozione, quella dei grafi di transizione, che sono grafi orientati con gli archi etichettati da parole dell'alfabeto, sequenze finite di simboli. I grafi di transizione hanno una funzione ausiliaria nel ragionamento, alla fine si ottiene la dimostrazione del teorema enunciato.

Un altro esempio della stessa strategia e' la definizione di categoria, almeno una delle possibili definizioni, quella che parte dai grafi e sostituisce i cammini agli archi per introdurre i morfismi. Altro esempio ancora: i calcoli logici detti calcoli dei sequenti sono concepiti allo scopo di formalizzare non i singoli passi inferenziali, ma la nozione stessa di derivabilita', sequenze finite di applicazioni di regole in uno dei calcoli usuali alla Hilbert. Altri esempi ciascuno puo' trovare aprendo un qualsiasi libro di algebra, in particolare quelli dedicati alle strutture discrete.

Tutti questi casi come si vede sono dello stesso tipo; hanno a che fare con la induzione sul decorso dei valori, rispetto alla piu' semplice e apparentemente meno misteriosa induzione semplice; resta un fatto che come strategia e' utilissima, altrimenti non la si troverebbe usata tanto di frequente; tecnicamente corrisponde a passare da una logica del primo ordine a quella che e' detta logica del secondo ordine debole (una logica difficile e non assiomatizzabile, quindi con non pochi problemi, a volerli studiare, ma lasciamoli studiare ai logici, se no cosa fanno). La abbiamo presentata come esempio paradigmatico proprio perche' la sua natura di mossa "logica" e' evidente, ma tutta la matematica e' fatta di strategie di questo tipo. Il carattere logico della mossa, nel senso di spostamento in un altro

---

[29] Z. Manna, *Teoria matematica della computazione*, Boringhieri, Torino, 1978, pp. 7 sgg.

spazio di dimostrazioni, e' spesso mascherato dalla formulazione in termini di struttura. La strategia consiste allora nel modificare la struttura in esame, arricchendola o trasformandola in altra, per applicare le proprieta' e le tecniche della nuova struttura[30].

> L'arte della dimostrazione matematica spesso consiste nel trovare una cornice, una scena in cui quello che uno cerca di dimostrare diventa quasi ovvio. La creativita' matematica in gran parte si manifesta nel trovare questi contesti. Qualche volta si trovano nel ricco mondo degli oggetti materiali, qualche volta (e questa e' la forma piu' alta di creativita') uno li inventa.

Questa arte e' quella che e' stata chiamata la strategia delle dimostrazioni impure, quando ci si e' resi conto della sua rilevanza e della sua ubiquita'. La consapevolezza esplicita data a partire dalla applicazione di metodi analitici nella teoria dei numeri o nella combinatoria; poi da Hilbert e' stata identificata in generale nell'uso dell'infinito. La sua presenza e' una costante della matematica, da quando essa almeno ha assunto nella eta' moderna il suo carattere dinamico.

I numeri negativi (definiti misteriosamente come coppie di naturali nella presentazione genetica) sono stati giustificati[31] come espressione di un ragionamento su coppie di quantita' di cui varia la grandezza relativa. La funzione degli immaginari, degli elementi ideali in genere, e' nota. Per le strutture classiche (anelli, corpi) e' ben chiaro come esse corrispondano a diversi tipi di esperienze di calcolo, ma lo stesso vale per altre, per le strutture topologiche per esempio. Abbiamo ricordato prima la sovrapposizione di classi di resti sulla struttura dell'aritmetica. La struttura gruppale nella geometria e' un esempio macroscopico noto a tutti, ed e' inconcepibile che si continuino a contrapporre ideologicamente Hilbert e Dieudonné, quando la strategia deve essere quella di utilizzare in modo dinamico tutte le forme di ragionamento opportune, quando e' necessario e conveniente. Detto molto banalmente, l'arte del pensiero matematico e' soprattutto la capacita' di muoversi a diversi livelli, abilita' resa necessaria, se anche non piacesse, dalla dimostrazione che nessun sistema e' sufficiente a dimostrare tutte le verita' in esso esprimibili.

La centralita' di tale strategia e' confermata dalla sua riscoperta in altri campi non strettamente matematici (si dovrebbe aprire il problema menzionato in apertura del travaso delle forme di

[30] M. Kac - S. M. Ulam, *Mathematics and Logic*, Penguin Books, London, 1979, pag. 69. Kac e Ulam danno poi come esempi il teorema di Wilson e un teorema di Fermat sui numeri primi, dove si utilizzano le classi di resti, come accennato sopra.

[31] Si veda la relazione tenuta al convegno da parte del nucleo di Modena, su storia e didattica della matematica, a proposito di Carnot.

ragionamento inventate dai matematici in altri campi). Le ricerche di Intelligenza Artificiale sul *problem solving* nelle loro sperimentazioni piu' avanzate sono arrivate a questa conclusione, che la soluzione intelligente di un compito si ha quando dallo spazio originario del problema si passa a uno spazio in cui sono presenti le proprieta' invarianti dello spazio originario, non menzionate nelle condizioni iniziali del problema. Ad esempio nei *puzzles* che riguardano la disposizione di pedine su una scacchiera, la scoperta della rilevanza per il problema della considerazione del colore delle caselle e' considerato un *test* della intelligenza della soluzione.

Naturalmente la strategia ha le sue difficolta', che ne rappresentano anche il fascino. La difficolta' consiste nel fatto che ci si sposta da un dominio concreto e familiare a un livello meno semplice, quindi piu' difficile da dominare. L'esempio che abbiamo dato e' significativo, perche' si vede come ci si sposti a lavorare in una logica meno effettiva di quella del primo ordine; da un punto di vista di psicologia evolutiva, e' come quando per la prima volta si passa dalla considerazione di oggetti concreti, a cui pure gia' si applicano operazioni aritmetiche, alla nozione di insieme finito arbitrariamente grande, senza confini superiori.

Una volta spostatisi di livello, le difficolta' permangono finche' non si sia imparato a dominare il nuovo livello, riducendolo a una forma di concretezza paragonabile a quello orginario. Dal punto di vista tecnico logico, questo corrisponde ad assiomatizzare in una logica del primo ordine anche le nuove nozioni astratte. Da un punto di vista matematico, a predisporre tecniche e algoritmi dominabili. E' quello che e' successo, per fare un esempio storicamente importante, con l'infinito, nelle belle parole di Carnot[32]:

> Sono certe idee primitive che lasciano sempre qualche ombra nello spirito, ma le cui prime conseguenze, una volta derivate, aprono un campo vasto e facile da percorrere. Cosi' e' apparsa l'idea dell'infinito, e molti geometri ne hanno fatto l'uso piu' felice, anche se non avevano forse proprio approfondito la nozione. Per parte loro i filosofi non hanno potuto accontentarsi di una idea cosi' vaga: sono voluti risalire ai principi, ma si sono trovati tra loro divisi nelle loro opinioni.

Dopo questa bella risposta indiretta a Platone, a proposito della indagine dei principi, Carnot prosegue a indicare come dalla idea vaga dell'infinito i geometri, Newton in particolare, abbiamo saputo derivare

[32] L. Carnot, *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, Paris, 1797 (Blanchard, Paris, 1970).

regole semplificate, insieme alla dimostrazione, rispetto agli antichi, che le regole stesse portavano in ogni caso alla soluzione corretta (una dimostrazione che il processo di approssimazione da' sempre la soluzione esatta).

In generale il problema dell'infinito potrebbe essere ridiscusso in tutti i suoi aspetti e in tutta la sua storia come un esperimento con certe forme di ragionamento, concernenti inizialmente l'idea di approssimazione con controllo dell'errore (una forma del tutto originale di ragionamento che la matematica ha regalato alla cultura in generale). Nel testo citato, Carnot spiega molto bene come il calcolo infinitesimale sia fondato su un processo di prosecuzione arbitrariamente lunga; ma anche come occorra fissarlo, insieme al risultato, in una descrizione finita per assoggettarlo ad algoritmi. Allora si vede quello che si chiama infinito potenziale trasformato in infinito attuale: il processo e' concepito come terminato, ma se e' terminato e' come se si fosse fermato al finito, a un finito molto grande, ed e' assoggettabile alle regole del finito. Si intuiscono bene i rapporti, teorici e storici, tra il limite e gli infinitesimi, nella versione leibniziane e in quella euleriana.

Anche nella teoria degli insiemi, una operazione fondamentale e critica come quella dell'insieme delle parti deriva dal trattare un processo potenziale come se fosse terminato e compiutamente concluso: dalla definizione esplicita dei singoli sottinsiemi alla totalita' di tutti i sottinsiemi. Lo stesso si vede nella definizione dei numeri reali. Si tende a definire o concepire come esistenti, in una struttura di complessita' superiore, dei corrispettivi di processi sulla struttura di partenza, perche' il ragionamento possa riprendere su di essi il suo carattere finito.

Quello accennato e' un discorso complesso, e forse meglio sarebbe dire un programma di ricerca: fare vedere come le diverse strutture matematiche nascano come esigenza di fornire un quadro di riferimento a certi tipi di ragionamento. La realizzazione chiara e didatticamente utile di questo programma potrebbe essere considerata una piena realizzazione delle prime semplici intuizioni contenute nella scoperta, fatta dall'algebra della logica, della struttura algebrica dell'inferenza logica. L'infinito e' certo il caso limite, con un legame indiretto con il ragionamento, ma pure bisognera' cercare di fargli spazio nell'insegnamento anche se questo non potra' avvenire inizialmente che per accenni e piccole degustazioni.

In conclusione vorremmo osservare che il successo e il prestigio della matematica, che si manifesta anche nella influenza sulla cultura generale, sono forti nelle epoche in cui la matematica inventa nuovi ragionamenti. Il calcolo infinitesimale ne e' stato un esempio, perche' e' quello che di fatto ha sostenuto il ruolo privilegiato della matematica mentre si diffondeva il modello cartesiano. Un esempio attualissimo e' collegato allo sviluppo dei calcolatori. Non e' la capacita' di calcolo che rivela il ruolo centrale della matematica, ma il suo aver fatto passare nella cultura nozioni e concetti nuovi, collegati alla nuova esperienza. Uno tra tutti il concetto preciso e operativo di complessita', che non a caso e' stato assunto addirittura come fondamentale nelle scienze sociali, nella economia, nello studio dei sistemi. Ma abbiamo prima ricordato quello di livelli di realta', dimostrazione interattiva, strategie intelligenti e altri. La matematica inventa nozioni e forme di ragionamento, le passa alle altre scienze, che se ne appropriano e le trasformano anche in argomenti alla moda, mentre dentro alla matematica magari non ci si rende neanche conto di quello che si e' inventato. Speriamo che non si riproduca, come ai tempi del calcolo infinitesimale e del modello cartesiano, una divaricazione tra la matematica e la filosofia della matematica, o la consapevolezza che ne hanno quelli che la fanno e che la insegnano.

Benedetto Scimemi
Dipartimento di Matematica - Padova

6°CONGRESSO INTERNAZIONALE SULL'EDUCAZIONE MATEMATICA (ICME)
RELAZIONE AL 12º CONGRESSO C.I.I.M.-U.M.I. DI SORRENTO

Dal 27 luglio al 3 agosto 1988 si è svolto a Budapest il 6º Congresso Internazionale sull'Educazione Matematica (ICME). I precedenti congressi, con cadenza quadriennale, avevano avuto luogo a Lione, Exeter, Karlsrue, Berkeley ed Adelaide; il prossimo si terrà a Quebec nel 1992. si tratta di iniziative della Commissione Internazionale per l'Insegnamento della Matematica (ICMI), emanazione dell'Unione Matematica Internazionale (IMU). Le analoghe istntuzioni nell'ambito nazionale italiano sono la CIIM e l'UMI.

L'immenso numero di partecipanti e la grande varietà delle provenienze geografiche e nazionali sono da sempre una caratteristica di questi congressi. A Budapest gli iscritti ufficiali erano oltre 2400, con almeno 500 accompagnatori. Dei 74 paesi rappresentati, i gruppi nazionali più numerosi, oltre agli ungheresi (306), erano quelli degli Stati Uniti (380), Gran Bretagna (274), Giappone (228), Australia (113), Francia (112), URSS (90) e Italia (81). E' inoltre tipica di questi incontri un'atmosfera di grande cordialità; più che apprendere o presentare nuove idee, più che assistere a grandi svolte nei metodi e negli orientamenti didattici, i partecipanti si aspettano di scambiarsi esperienze, di comunicare emozioni e di stringere amicizie con i colleghi delle più svariate estrazioni, accomunati dall'entusiasmo per la matematica e per il suo insegnamento. A Budapest, a rendere più piacevole la caleidoscopica manifestazione ha contribuito non poco la bellezza della città, con la sua popolazione civile e ospitale, che sta vivendo un momento di notevole benessere ed è ansiosa di riprendere il ruolo che le compete nella cultura internazionale. La maggior parte dei lavori si è svolta nei locali del Politecnico, che ha sede in una serie di grandi edifici contigui, sulle rive del Danubio. Le sessioni plenarie sono state invece tenute nel Palazzo dei Congressi, un complesso modernissimo, invidiabile per capienza ed efficienza.

I colleghi ungheresi, eredi di un'eccezionale tradizione nel campo della matematica e del suo insegnamento, si sono prodigati con successo in un'organizzazione che richiede lunghi preparativi. La formula organizzativa, già collaudata ad Adelaide, classificava le attività congressuali in varie categorie, che qui cercheremo di descrivere brevemente.

ORGANIZZAZIONE E PROGRAMMA DEL CONGRESSO

Gli iscritti al congresso avevano ricevuto tempestivamente un dettagliato programma. Poiché molte attività erano sovrapposte, ognuno doveva costruirsi un suo itinerario di partecipazione; in particolare, poteva seguire l'attività di un unico gruppo di lavoro oppure spostarsi rapidamente da uno all'altro. I gruppi erano stati costituiti secondo vari criteri.

Gruppi per età scolastica (Action Groups). I primi cinque gruppi (A1, ..., A5) corrispondevano all'incirca a materne, elementari, medie, superiori, università; per esempio, le attività del gruppo A4 si riferivano ai problemi dell'insegnamento nell'età 15-19. Il gruppo A6 si occupava dei problemi della formazione degli insegnanti; il gruppo A7 dell'educazione degli adulti e dell'aggiornamento del personale impiegato in altre professioni. L'attività di ogni gruppo terminava con una seduta conclusiva, in cui si cercava di fare il punto sui principali problemi del settore.

Vedremo più avanti alcune di queste conclusioni relative al gruppo A4, che più ci interessa in questa sede.

Gruppi per grandi temi (Theme Groups). Eccone i titoli:

T1 - La professione dell'insegnante.

T2 - I calcolatori nell'insegnamento.

T3 - L'insegnamento per problemi.

T4 - La valutazione.

T5 - Ricerca didattica e pratica di insegnamento.

T6 - Rapporti tra matematica e altri settori (interdisciplinarità).

T7 - Programmi e curricula per il 2000.

Ogni gruppo era a sua volta suddiviso in sottogruppi. Riferiremo qualche impressione sui lavori del gruppo T2.

Gruppi per argomenti specifici (Topics Groups)

To1 - Films e video-nastri di uso didattico.

To2 - Visualizzazione di problemi e risultati.

To3 - Competizioni matematiche.

To4 - Insegnare agli handicappati (nell'udito, nella vista, ecc.).

To5 - Confronti internazionali (di programmi, metodi, ecc.).

To6 - Probabilità e statistica.

To7 - Le dimostrazioni.

To8 - Problemi di linguaggio.

To10 - Allievi superdotati.

To12 - Giochi e passatempi matematici.

To13 - Le donne nella matematica.

To15 - Teoria della didattica matematica.

To16 - Geometria.

To17 - Fonti bibliografiche.

To18 - Cooperazione tra teoria e pratica di insegnamento.

Come si vede, alcuni argomenti non pretendevano di essere di interesse generale, ed erano stati introdotti per interessamento di singoli gruppi di ricerca o di singole comunità nazionali. Per esempio, To15 e To18 sono temi coltivati da un gruppo internazionale di specialisti, in stretto contatto con l'Institut fur Didaktik der Mathematik di Bielefeld. To10 si riferisce a certe classi speciali che in alcuni paesi -come in Ungheria- vengono formate selezionando molto precocemente alcuni ragazzi di eccezionale talento matematico; da queste classi provengono spesso i vincitori delle Olimpiadi matematiche, argomento principale del tema To3. Il tema To3, che a noi può sembrare curioso, è più giustificato in altri paesi, in cui le statistiche denunciano la scarsa presenza delle donne non solo nella ricerca matematica ma anche nella scuola.

Sessioni plenarie. Si trattava di 5 conferenze tenute, per invito, da persone particolarmente qualificate, su temi di interesse generale. Durante queste sessioni non si svolgeva altra attività congressuale.

La prima conferenza, di Nebres, trattava i problemi dell'insegnamento della matematica in un paese in via di sviluppo, le Filippine, che non può prescindere dalla situazione sociale nelle scelte dei programmi e dei metodi. Si è qui sentito parlare di etno-matematica, un tema spesso ricorrente anche in varie altre sezioni del congresso; si è avuta l'impressione che alcuni paesi vogliano liberarsi da una sorta di imperialismo culturale, inventando anche nell'educazione matematica una loro filosofia autonoma.

La seconda conferenza, di Vergnaud, era dedicata al contributo delle discipline psicologiche nelle questioni di insegnamento e apprendimento matematico; su questi temi, riconosciuti ovunque importanti ma non sempre approfonditi, la scuola francese è da sempre all'avanguardia.

Una terza conferenza, di Lovasz, era dedicata agli aspetti algoritmici della matematica; l'aspetto algoritmico, la cui fortuna ha avuto alti e bassi nella storia della matematica, vive oggi un momento di enorme sviluppo, per la diffusione dei calcolatori; e di ciò è bene che tenga conto anche la scuola.

L'introduzione dei calcolatori nella scuola era oggetto di attenzione anche nella quarta conferenza, in cui Ershov ha fornito un interessante quadro generale sui curricula adottati nell'Unione Societica, che anche recentemente sono stati aggiornati. Si è avuta l'impressione che, con riferimento alla rivoluzione informatica, si cerchi ora di recuperare un certo ritardo.

Infine, il presidente dell'ICMI, J.P. Kahane, ha ricordato la grande figura di G. Polya, il matematico ungherese scomparso nel 1985, all'età di quasi cent'anni; oltre ai suoi importanti contributi alla matematica, è stata ricordata l'enorme influenza da lui esercitata nella didattica della matematica; basti qui citare il suo celebre libro "Come risolvere i problemi matematici". Tradotto in tutte le più importanti lingue del mondo, questo libro ha lanciato il messaggio del problem-solving, cioè il metodo euristico come alternativa alla matematica ipotetico-deduttiva.

Presentazioni nazionali: per illustrare l'organizzazione scolastica nazionale e i principali problemi relativi all'insegnamento della matematica alcuni paesi, come la Bulgaria, l'Argentina e il Malawi, erano stati invitati a predisporre una presentazione orale, talvolta curata personalmente dai responsabili politici della pubblica istruzione. L'Italia, come si dirà poi, ha invece fornito le analoghe informazioni in forma di poster e distribuendo materiale a stampa.

Progetti: in molti paesi esistono da tempo iniziative di vasto respiro, spesso organizzate su scala nazionale (del tipo del noto School Mathematics Project inglese) per un migliore insegnamento della matematica. Alcuni di questi progetti (Shell Center, Open University, ecc.) disponevano di uno stand proprio, in cui erano in mostra materiali in uso, libri e sussidi didattici, anche in forma di laboratorio didattico.

Posters: molte comunicazioni erano affidate a manifesti murali, affissi per lo più nei corridoi del Politecnico. La CIIM ha utilizzato questa forma per la diffusione delle informazioni sul sistema scolastico italiano.

Mostra di prodotti commerciali: libri, riviste, software per uso didattico presentati dalle case editrici e dai produttori o rappresentanti.

Attività ricreativa: visite alla città, escursioni guidate fuori città, pranzi ufficiali, ecc..

Una **Giornata speciale** nel calendario del Congresso è stata dedicata al tema **Matematica e società**. La scelta del tema -come già quello della prima sessione plenaria- conferma l'esigenza di coinvolgere la matematica e il suo insegnamento in temi legati al contesto sociale, all'ambiente: è un tentativo di uscire da una sorta di isolamento culturale, che nel passato ha creato un'immagine spesso deformata della disciplina.

ALCUNE IMPRESSIONI GENERALI

Data la vastità dei temi trattati e l'intensità del programma, è assai difficile fare un quadro complessivo dei lavori: il congresso si presenta come un grande poliedro, di cui ogni partecipante non può vedere che alcune facce. Gli organizzatori hanno promesso di diffondere prestissimo gli Atti ufficiali, ma anche da quelli non sarà facile trarre conclusioni. Le poche considerazioni che seguono sono estratte dalle impressioni di un certo numero di colleghi, ciascuno dei quali avrebbe assai di più da riferire sulle parti del programma che ha seguito da vicino. Dato l'uditorio attuale, ometterò quelle osservazioni che non hanno molto interesse per la scuola secondaria.

Come si è già detto, il 6º ICME è sembrato un momento di riflessione piuttosto che una fucina di idee nuove. I grandi problemi dell'insegnamento non sono stati affrontati in profondità; l'importanza dell'incontro va attribuita piuttosto agli scambi di informazioni, ai contatti ufficiali e personali. In particolare, i paesi in via di sviluppo sono sembrati ansiosi di apprendere ma anche di affermare i loro punti di vista e le loro scelte di politica culturale autonoma, attribuendo all'insegnamento matematico un ruolo importante.

Professionalmente, i congressisti ICME sono tradizionalmente insegnanti secondari o universitari, operatori scolastici e specialisti della ricerca didattica. Negli interventi al congresso di Budapest si è notato un sopravvento di questi ultimi, sicché il discorso talvolta appariva ristretto agli "addetti ai lavori". Anche tra questi però, il congresso non dava un'idea dei reali rapporti di forze, poiché l'organizzazione fa perno tradizionalmente su alcuni gruppi piuttosto che su altri. A questo proposito va segnalato che tutto il congresso, salvo poche eccezioni, si è svolto in lingua inglese; la cosa è di una certa rilevanza se si tiene presente sia la sede di Budapest, sia, soprattutto, il fatto che nei precedenti congressi ICME non era raro sentire interventi in altre lingue (francese, russo, spagnolo, ...).

Gli aspetti psicologici dell'insegnamento e dell'apprendimento hanno ricevuto un'enfasi forse eccessiva: rappresentazioni mentali e strategie, gerarchie dei concetti, problemi di linguaggio, ecc. Le basi teoriche di molte discussioni sono sembrate spesso fragili: il costruttivismo sembra essere il punto di vista imperante.

IMPRESSIONI SU DUE GRUPPI DI LAVORO

A4 - Scuola secondaria superiore (anni 15-19)

Il gruppo di lavoro era suddiviso in cinque sottogruppi:

1) **Contenuti-Programmi.** Questa sezione appariva di grande interesse per farsi un'idea delle innovazioni curriculari e delle tendenze in atto nel proporre nuovi argomenti e nell'escluderne altri. In realtà, il confronto dei programmi è risultato molto difficile, per la grande varietà dei tipi di scuole rappresentate.

In linea di massima, è sembrato che l'Algebra mantenga la sua tradizionale importanza in tutte le scuole, ma l'attenzione si stia spostando dall'abilità manipolativa alla soluzione dei problemi.

La Geometria euclidea è quasi scomparsa, a conferma di una tendenza già da molti anni evidente. Qualcuno ha giustamente lamentato la conseguente perdita di un terreno ideale per esercitare le dimostrazioni; ma esistono molti paesi, di tradizione pragmatica, in cui le dimostrazioni non vengono usualmente presentate in modo esplicito. Una novità interessante si può considerare la rinascita in Francia della geometria descrittiva, una reazione alla formalizzazione della geometria in auge con il Bourbakismo; si recupera cioè quell'intuizione geometrica legata alla visualizzazione, che d'altronde è ben presente in altre sezioni del congresso (To2 e Computer-graphics).

Tra le nuove esigenze sono emerse la matematica discreta e la modellizzazione, cioè la capacità di trasportare in termini matematici i problemi reali.

2) **Ostacoli epistemologici e didattici.** In questa sezione i contributi sono stati molto vari; gli ostacoli considerati spaziavano dallo scarso interesse alle difficoltà logiche. Alcuni hanno sperimentato con successo l'approccio storico, che risulta motivante ma richiede notevole preparazione culturale. Altri studi si riferivano alle difficoltà di apprendimento di certi concetti specifici, ad esempio quello di limite.

3) **Influenze del calcolatore** nell'insegnamento. La sensazione è che la tecnologia si evolva troppo velocemente per consentire alla scuola di prepararsi seriamente al suo uso: i programmi e i metodi esposti non sembrano mai

al passo con le ultime macchine e linguaggi. In generale, si è osservato che le macchine restano sempre sottoutilizzate. Anche in Gran Bretagna, in presenza di una grande dotazione di calcolatori nelle scuole (uno ogni 50 studenti), quasi un terzo dei docenti non ne fa mai uso. Si è notato che l'uso del calcolatore porta a una maggiore personalizzazione dell'insegnamento. Interessante la proposta di usare nelle classi certe nuove calcolatrici tascabili programmabili, con display grafico. Il Giappone, sia pure con una certa freddezza, ha aperto le sue scuole all'uso del calcolatore, moderando quella dichiarata ostilità che era sembrata uno dei momenti più interessanti del precedente congresso ICME di Adelaide. Anche l'Unione Sovietica, come s'è già detto, appare in fase di recupero.

Altre impressioni sull'argomento calcolatore si trovano più avanti (T2).

4) Valutazione. In molti paesi (si pensi al sistema inglese degli o-levels ed A-levels) da anni esistono specialisti e apposite istituzioni che predispongono materiali e metodi per una valutazione obbiettiva e significativa dell'apprendimento matematico, valutazione anche mirata a scopi specifici, come l'ingresso all'Università. In questa sezione si sono discussi questi aspetti, anche con riferimento agli studenti che cambiano scuola o addirittura paese. E' un argomento delicato, che richiede grande professionalità. Purtroppo questa sensibilità non è sviluppata in Italia, dove è normale che uno stesso elaborato riceva giudizi radicalmente opposti da parte di insegnanti diversi. Anche i nostri tentativi di uniformità, per esempio la diffusione su scala nazionale di uno stesso testo d'esame, in assenza di criteri uniformi di valutazione farebbero sorridere gli specialisti stranieri.

5) Formazione degli insegnanti. Purtroppo anche in questo caso la situazione italiana è risultata di retroguardia. In questa sezione sono stati illustrati itinerari formativi per gli insegnanti, che partono dalle scuole secondarie e procedono fino al termine degli studi, facendo intervenire anche discipline psico-pedagogiche, educando alla programmazione di un curriculum, e soprattutto dando ai futuri docenti l'occasione di incontrarsi con vere classi scolastiche, con un apprendistato che in certi paesi è obbligatorio per ottenere il titolo di studio.

T2 USO DEL CALCOLATORE NELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Fin dalla vignetta nel simbolo ufficiale del congresso, il calcolatore si proponeva subito come un protagonista, se non altro come occasione per rinnovare programmi, metodi, addirittura filosofia dell'insegnamento. A posteriori, molte attese risultavano alquanto deluse (opportunamente, già il chairman del tema in A4 aveva distinto tre livelli di discorso sull'uso del calcolatore: teorico, pratico, reale, di cui soltanto l'ultimo ha rilevanza per un vero docente in una vera classe scolastica!).

Il presentatore ufficiale del tema T2 aveva individuato le seguenti specifiche capacità:

a) computazione **grafica**; b) computazione **numerica**; c) computazione **simbolica**; d) **rappresentazione multipla** dell'informazione; e) scienza della **programmazione**.

A sua volta, il gruppo di lavoro aveva suddiviso i suoi compiti nei seguenti sottotemi:

1) Nuovi **argomenti nei programmi** di matematica.

2) Nuovi **approcci algoritmici** negli argomenti di matematica.

3) Nuove tendenze nella **risoluzione dei problemi**.

4) **Manipolazione simbolica**.

Complessivamente, anche in questa occasione, come spesso avviene, si è avvertita una certa distanza (se non spaccatura) tra informatici e matematici. Generalmente, gli insegnanti di informatica non accettano un inglobamento della loro materia nella matematica; e in effetti molti di loro erano addirittura riuniti in altro congresso che si svolgeva in contemporanea in tutt'altro luogo! In tutto il mondo l'integrazione tra informatica e insegnamento con il calcolatore non sembra esser stata sufficientemente studiata, né tantomeno realizzata. Si continua ad argomentare in termini di motivazioni e incentivi, ma non si fanno indagini serie sull'apprendimento con i nuovi mezzi. Il buon proposito di usare il calcolatore induce talvolta qualche docente a perdere il controllo di qualità della matematica affrontata.

I temi c) e 4), che in Italia non sono ancora popolari, si riferiscono al fatto che, ormai da anni, esistono programmi dedicati al trattamento simbolico di vari problemi : la derivazione e l'integrazione indefinita, per esempio, vengono eseguite in forma funzionale, non numerica. Si è visto a Budapest lo stato dell'arte, ma resta difficile prevedere se e quando questi sviluppi prenderanno piede nella didattica.

LA PARTECIPAZIONE ITALIANA

Tenendo conto dell'importanza della nostra ricerca in didattica della matematica, nonché della vicinanza geografica di Budapest, da anni la CIIM si era impegnata affinché la partecipazione dell'Italia al 6º Congresso fosse numerosa e significativa. Per merito di M. Pellerey, del Comitato organizzatore, le notizie sull'ICME si erano diffuse per tempo e una certa influenza era stata esercitata anche sul programma, includendovi una sezione sulla Geometria, settore in cui l'Italia ha una tradizione particolarmente ricca. Con una lettera la CIIM sollecitò la partecipazione attiva dei componenti i nostri Nuclei di ricerca e si adoperò affinché fosse disponibile un notevole aiuto finanziario da parte del CNR. In effetti, il contributo italiano al Congresso è risultato consistente: non è possibile fare qui i nomi dei singoli, ma basterà dire che oltre 50 sono state le comunicazioni ufficiali -in varie forme- dei nostri colleghi. Alcuni di essi avevano anche responsabilità organizzative di intere sezioni o di sottogruppi. Nell'opinione di molti, se si tiene conto del livello della nostra ricerca didattica, il ruolo che l'Italia potrebbe e dovrebbe svolgere in questi congressi è anche maggiore.

Notevole interesse hanno suscitato due iniziative curate direttamente dalla CIIM: un poster murale e un fascicolo di una trentina di pagine, diffuso in oltre mille copie tra i partecipanti: entrambi descrivevano a grandi linee il sistema scolastico italiano, con particolare riguardo alla matematica. Il poster, di circa 6 mq, oltre a qualche diagramma statistico relativo ai vari ordini e rami scolastici, mostrava un elenco dei capitoli che compaiono nei programmi ministeriali e un'antologia delle indicazioni metodologiche. Nel fascicoletto, disponibile in varie lingue, dopo un'introduzione sulla storia dell'organizzazione scolastica, singoli capitoli erano dedicati alle scuole elementari, medie e superiori, con notizie più estese sui programmi e le prove d'esame. Quanto alla ricerca didattica, venivano descritte le principali attività in corso, con nomi e indirizzi di tutti i responsabili locali.

Queste iniziative favoriranno, anche nel futuro, gli scambi internazionali di informazioni sulla scuola, un'esigenza particolarmente sentita nei paesi in via di sviluppo, che guardano spesso all'Italia come riferimento.

Pur compiacendosi di queste iniziative nazionali, che per la prima volta si realizzavano, qualcuno ha auspicato che in un prossimo congresso l'Italia sia presente con un vero stand proprio, in cui l'attività e i materiali prodotti nel nostro paese abbiano adeguata illustrazione.

Come si è detto il 7º Congresso ICME si svolgerà in Canada nel 1992. Anche se la geografia è per noi meno favorevole, la partecipazione italiana dovrà far tesoro delle esperienze di Budapest e puntare ad una maggiore qualificazione e pubblicizzazione. Sarà bene che le istituzioni ed i singoli incomincino a pensarci fin d'ora.

Roberto Dvornicich

Dipartimento di Matematica - Pisa

RELAZIONE SULLE OLIMPIADI DI MATEMATICA

Le Olimpiadi di Matematica del 1988 si sono svolte a Camberra (Australia), con la partecipazione di 49 nazioni. Se si fa eccezione per il Giappone, si può dire che tutti i paesi di qualche tradizione matematica erano presenti alla gara. Nella graduatoria finale, l'Italia si é piazzata al 35° posto, preceduta da Nuova Zelanda, Perù, Marocco, Tunisia, Colombia (per citare degli esempi) oltre che da quasi tutti i paesi europei.

Prima di esaminare i motivi del risultato certamente non brillante della squadra italiana, é utile dare alcuni punti di riferimento.

Innanzitutto gli scopi ufficiali delle Olimpiadi di Matematica, che sono:

1 - scoprire giovani talenti matematici;

2 - confrontare i programmi e l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori dei vari paesi;

3 - favorire gli scambi culturali fra gli studenti e gli insegnanti dei vari paesi.

L'obbiettivo n° 1 sembra raggiunto con sufficiente successo, poiché una statistica (non ufficiale) dimostra che circa il 30-40% degli ex-premiati alle Olimpiadi é oggi attivo nella ricerca in matematica. L'obbiettivo n° 3 é senz'altro lodevole ed é indubbiamente affascinante vedere insieme 300 ragazzi di tutte le razze, accomunati solo dall'amore per la matematica; tuttavia non vorrei soffermarmi su di esso in questa sede. Preferisco invece parlare dell'obbiettivo n° 2, sulla base dell'esperienza fatta nei due anni in cui sono stato accompagnatore della squadra italiana alle Olimpiadi. Innanzitutto: quali sono le conoscenze comuni ai ragazzi di 16-18 anni di tutto il mondo? Un'analisi dei problemi che vengono assegnati alle Olimpiadi e che sono frutto di una mediazione fra i rappresentanti di tutti i paesi, consente di enucleare i seguenti argomenti principali.

- geometria del piano e dello spazio (con una netta prevalenza della prima);
- aritmetica, o teoria elementare dei numeri;
- combinatoria;

- polinomi;
- equazioni funzionali;

Il calcolo delle probabilità, finora quasi assente, sta aquistando sempre maggior credito ed é probabile che vi saranno problemi su questo argomento in un futuro molto prossimo.

E' bene rilevare che questo non significa automaticamente che gli argomenti sopra elencati facciano parte dei programmi delle scuole di tutti i paesi: in primo luogo perché tutti i problemi possono essere risolti con mezzi veramente elementari (anche se richiedono una notevole ingegnosità) e inoltre perché gli studenti selezionati per le Olimpiadi di solito hanno delle conoscenze superiori alla media di tutti gli studenti.

Tuttavia é abbastanza facile rilevare come gli studenti degli altri paesi abbiano, mediamente, maggiori conoscenze di quelli italiani e dedichino alla matematica un tempo nettamente superiore al nostro. Ciò é sicuramente vero per i paesi di quasi tutta l'Europa, sui quali, per minore difficoltà di lingua, ho le informazioni più dettagliate. In particolare, ho notato che moltissimi studenti che partecipano alle Olimpiadi conoscono:

- il principio di induzione e il metodo della discesa infinita;
- le congruenze;
- alcuni elementi di combinatoria;
- alcuni elementi di algebra lineare;
- la disuguaglianza di Couchy;
- i numeri complessi.

Queste considerazioni mi portano a ritenere che i motivi principali del cattivo rendimento dell'Italia alle Olimpiadi siano i seguenti:

a) lo scarso numero di ore dedicato alla matematica nelle scuole secondarie italiane, fenomeno particolarmente grave in una scuola di indirizzo come il liceo scientifico;

b) la mancanza pressocché assoluta di adeguamento dei programmi;

c) l'abbandono in cui sono lasciati gli studenti migliori, che spesso domandano una maggior cultura.

Vorrei chiarire del tutto una questione: non ritengo che i nostri giudizi sulla scuola italiana debbano dipendere dai risultati di una gara, né tantomeno che l'insegnamento debba essere finalizzato a conseguire un risultato di prestigio delle Olimpiadi. Al contrario sono certo che l'uso stesso delle gare presti il fianco a molte critiche. La competizione dovrebbe essere ampiamente analizzata e presa per quello che é, come una gara sportiva, necessariamente legata alla casualità; se vincere é certamente un premio, non vincere non dovrebbe essere una frustrazione. Se rimango favorevole all'uso delle gare matematiche, é perché esse permettono effettivamente di individuare attitudini in ragazzi che non sanno di averle, e tramite l'attrattiva di un viaggio-premio aiutarli a confrontarsi, a studiare della matematica adatta alla loro età (non finalizzata alle gare!), insomma a coltivare in loro l'amore per la matematica. Questa é la mia esperienza condivisa in pieno dagli altri paesi; questo é secondo me il motivo per cui le gare matematiche hanno ragione di esistere. Concludo questa breve relazione indicando quali sono i difetti e le lacune che ho riscontrato negli studenti italiani selezionati dalle gare negli ultimi due anni. Essi sono:

1 - l'assoluta ignoranza dell'aritmetica (osservo, per inciso, che in nessuna proposta di nuovi programmi ho trovato il benché minimo accenno all'aritmetica);

2 - la diminuita dimestichezza con la geometria euclidea e/o con le dimostrazioni rigorose;

3 - una notevole difficoltà di linguaggio, che talvolta impedisce perfino di spiegare le proprie idee originali;

4 - un'attitudine mentale che rimanda, per sistema, all'uso delle formule per la soluzione di tutti i problemi.

Ricordo che questi sono difetti riscontrati in ragazzi particolarmente bravi (alcuni di essi sono oggi studenti della Scuola Normale Superiore di Pisa). Ma proprio per questo penso che una riflessione su di essi sia utile per tutti noi.

M. Teresa Ascoli Bartoli
Dipartimento di Matematica - Roma

ALCUNE CONSIDERAZIONI SUGGERITE DALL'ATTUAZIONE DEL P.N.I.

Premesso che ritengo che il maggior merito del P.N.I. sia quello di aver fornito l'occasione per un rinnovamento, per altro abbastanza timido, del programma di matematica del biennio, mi sembra positivo che in questa operazione si sia tenuto conto dei suggerimenti venuti dalle sperimentazioni dei nuclei di ricerca didattica.

I programmi delle sperimentazioni, infatti, avevano introdotto già da parecchi anni, con diverse scelte nel taglio e nella misura, elementi di logica, di probabilità, di statistica e la presentazione della geometria nello spirito del programma di Erlangen.

Ho pensato perciò che il Piano, così come aveva preso anno dell'esistenza del computer, avesse, con la proposta di programma, codificato uno stato di fatto piuttosto generalizzato e, come un riformista che comincia a vedere la realizzazione delle riforme sognate, pensavo che tutti dovessero esserne felici.

Invece no; parlando con altri colleghi impegnati nel Piano, ho avuto modo di osservare in più d'uno una sensazione di disagio, di confusione, quasi di rigetto. Che cosa è accaduto?

Per molti colleghi il piano ha significato un cambiamento totale su due fronti: quello del programma di matematica e quello dell'introduzione del calcolatore, per cui hanno dovuto affrontare un duplice compito, di cui la parte più nuova è apparsa l'uso del computer.

Di conseguenza, pur lavorando per comprendere lo spirito del programma e il modo migliore di renderlo operativo, hanno concentrato l'interesse sulla macchina. E a questo punto è subentrata la crisi. Molti hanno pensato che tutto si riducesse ad apprendere l'uso di alcuni pacchetti applicativi e quindi, da un lato hanno respinto questo aspetto più decisamente tecnico, dall'altro si sono rifiutati di riversare sugli alunni conoscenze appena acquisite. Altri, invece, influenzati dalla propaganda di alcune case editrici, hanno visto soprattutto l'aspetto tutoriale del computer, utilizzando per lo più software finalizzato o a facilitare lo studio puntando sulla novità dello strumento, oppure a dare una valutazione automatica, non sempre meditata.

In molti casi, quindi, non si sono sentiti soddisfatti di questo uso riduttivo, se non improprio, della macchina; forse hanno avuto la sensazione che il computer portasse ad una meccanizzazione o ad una banalizzazione dell'insegnamento ed hanno avuto anch'essi una reazione di rigetto.

Va invece detto che il computer, per il solo fatto di esistere, ha fatto giustizia di molti luoghi comuni della vecchia didatica, rendendo evidente l'inutilità dell'apprendimento di tecniche ripetitive in confronto alla comprensione dei concetti; inoltre è un validissimo sussidio didattico in quanto costituisce un aiuto appropriato per il calcolo e uno strumento per la rappresentazione concreta di concetti matematici.

Quello che segue è un esempio del modo in cui la trattazione di un argomento classico, interessante dal punto di vista concettuale, riceva maggior evidenza visiva e sia quindi didatticamente più efficace con l'aiuto del computer.

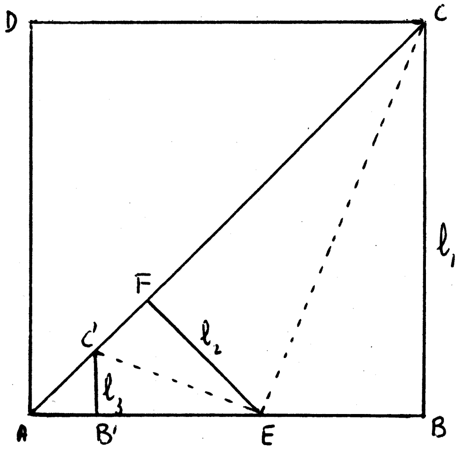
Si tratta della costruzione dei valori approssimati del rapporto tra diagonale e lato del qadrato, realizzata con il metodo delle divisioni successive. L'argomento può essere trattato nel secondo anno del biennio; il momento può essere diverso a seconda del tipo di scuola e del percorso didattico della singola classe.

Nel caso particolare, nel primo anno era stato calcolato il M.C.D. di due numeri naturali col metodo delle divisioni successive, pervenendo poi allo sviluppo di una frazione in frazione continua limitata; si era anche dimostrata, con considerazioni aritmetiche, l'incommensurabilità tra diagonale e lato del quadrato ed erano stati introdotti i numeri reali, facendo largo uso dell'intuizione.

Riprendiamo rapidamente la costruzione classica.

Dato il quadrato ABCD di lato $AB=l_1$, e diagonale $AC=d_1$, si tracci la bisettrice dell'angolo ACB, che incontrerà AB in E e si condca per E la perpendicolare ad AC fino ad incontrarla in F.

Il triangolo rettangolo AFE risulta isoscele e può quindi essere considerato la metà di un quadrato di lato $FE=l_2$ e diagonale $AE=d_2$. Dalla consi derazione di questo triangolo e dall'uguaglianza dei triangoli rettangoli BCE e FCE (hanno uguali l'ipotenusa e gli ancgoli acuti in C) segue AF=FE=EB, per cui si potrà scrivere:



(1) $d_1 = l_1 + l_2$

(2) $l_1 = l_2 + d_2$

Ripetendo, a partire da AFE la costruzione fatta su ABC, si otterrà il triangolo isoscele AB'C', metà di un quadrato di cui chiameremo l_3 il lato B'C' e d_3 la diagonale AC'; si avrà:

(3) $d_2 = l_2 + l_3$

(4) $l_2 = l_3 + d_3$

A questo punto si osserva che si può ripetere la stessa costruzione a partire dal triangolo AB'C' e si potrebbe dire semplicemente "e così via", ma è in questo momento che il computer, permettendo di portare, con un "ingrandimento", il triangolo AB'C' su ABC, dà un'idea concreta della possibilità di continuare indefinitivamente.

Ciascuna delle successive coppie di uguaglianze si otterrà dalla coppia precedente aumentando gli indici di uno:

(5) $d_3 = l_3 + l_4$

(6) $l_3 = l_4 + d_4$

....

....

La (2) e la (3) permettono di scrivere la (4) e la (5)

$l_1 = 2l_2 + l_3$

$l_2 = 2l_3 + l_4$

....

....

In generale si avrà:

$$l_{n-1} = 2l_n + l_{n+1}$$

da cui intanto segue che per ogni n vale la disuguaglianza

$$l_n < 1/2\ l_{n-1}$$

cioè

$$l_n / l_{n-1} < 1/2 \quad .$$

A questo punto si può facilmente continuare la tradizionale dimostrazione dell'incommensurabilità tra diagonale e lato del quadrato, osservando che un loro sottomultiplo comune dovrebbe essere minore di un segmento arbitrariamente scelto. Dal momento che avevamo già dimostrato questa incommensurabilità, ci siamo proposti di calcolare i valori approssimati di d_1/l_1.

Dalla successione di uguaglianze sopra scritte, procedendo in modo analogo a quello già seguito per lo sviluppo di una frazione in frazione continua limitata, abbiamo dedotto:

$$\frac{d_1}{l_1} = 1 + \frac{l_2}{l_1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{l_1}{l_2}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{l_3}{l_2}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{l_2}{l_3}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{l_4}{l_3}}} = \ldots\ldots$$

e abbiamo osservato che questa volta il procedimento non avrà termine.

Abbiamo allora considerato la successione

$$a_1=1;\quad a_2=1+\frac{1}{2};\quad a_3=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}};\quad a_4 = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} \quad ;$$

ottenuta sostituendo 0 al posto dei rapporti l_2/l_1, l_3/l_2, ..., man mano che compaiono.

Abbiamo poi sostituito al posto degli stessi rapporti il valore 1/2 ed abbiamo ottenuto una successione che coincide con la precedente purchè si parta dal secondo termine.

La ricerca di una legge di regolarità che permetta di costruire i termini della successione, ci porta ad un esempio di definizione ricorsiva:

$a_1 = 1;$

$a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$

Il calcolo numerico dei termini, con l'ausilio del computer o di una calcolatrice tascabile, ci permette di verificare o ci suggerisce alcune proprietà delle frazioni continue, in parte già incontrate nello studio di quelle finite. Ci si può limitare a giustificare queste proprietà, eventualmente con considerazioni legate al caso particolare, ma si può anche approfondirle, sia subito con gli allievi più interessati, sia più tardi con tutta la classe.

Anche la ricerca del rapporto tra altezza e lato di un triangolo equilatero, o meglio del rapporto tra diagonale maggiore e lato di un rombo avente un angolo di 60°, ci porta ad una frazione continua illimitata, che approssima $\sqrt{3}$.

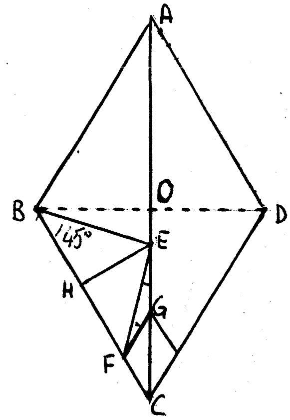
Lo schema è il seguente

$AB = l_1;\ AC = d_1;$

$BF = 2\ EH = EC = a_1;$

$FC = l_2 = FG = GE;$

$GC = d_2;\ AC = AB + EC.$



$d_1 = l_1 + a_1;$ $\qquad d_1 = l_1 + a_1;$

$l_1 = a_1 + l_2;$ $\qquad l_1 = a_1 + l_2;$

$\left.\begin{array}{l} a_1 = l_2 + d_2 \\ d_2 = l_2 + a_2 \end{array}\right\}$ $\qquad a_1 = 2l_2 + a_2;$

$l_2 = a_2 + l_3;$ $\qquad l_2 = a_2 + l_3;$

$\left.\begin{array}{l} a_2 = l_3 + d_3 \\ d_3 = l_3 + a_3 \end{array}\right\}$ $\quad a_2 = 2l_3 + a_3;$

....

....

E infine

$$\frac{d_1}{l_1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

Carlo Lucio Bocchetti

LABORATORIO DI MATEMATICA NEL BIENNIO: UN METODO DI LAVORO

Premessa

Secondo le attese del PNI, il percorso di un docente di matematica 'medio' dovrebbe incominciare con il corso di formazione (120 ore in un anno). Durante e dopo il corso in nostro cerca di innovare la propria didattica sulla base dei nuovi programmi, parallelamente richiede l'autorizzazione a sperimentare, poi, a Settembre dell'anno scolastico successivo, parte con la sperime tazione nelle classi.

Sono molte ormai le sperimentazioni avviate in questo modo, e nella maggior parte dei casi la maggiore difficoltà riscontrata dai docenti sembra essere legata al laboratorio, al modo di gestirlo, all'integrazione tra informatica e matematica e soprattutto alla ricaduta positiva dell'innovazione sul livello cognitivo degli studenti, ricaduta che sembra, almeno nei primi momenti, inferiore alle aspettative.

In effetti gli studenti, all'inizio motivati ed interessati, sembrano seguire senza apparente difficoltà le prime lezioni, e giungono rapidamente alla costruzione di semplici programmi per risolvere i facili problemi posti, ma poi incontrano difficoltà crescenti nel trasferire quanto appreso, nella generalizzazione, nel migliorare la propria capacità di analisi, nell'applicare il metodo top-down a problemi complessi.

Da qui la crisi, il senso di frustrazione e di inadeguatezza provato da molti docenti.

Evidentemente un approccio che parta dall'analisi del problema e termini con la scrittura di un programma funzionante, sebbene apparentemente soddisfacente si rivela inadeguato alle esigenze di formazione informatica di base, e deve essere ulteriormente arriccchito.

In questa breve relazione cercheremo di proporre un approccio all'uso del calcolatore finalizzato appunto alla crescita cognitiva dell'alunno e ad una ricaduta positiva dell'esperienza sull'intero curricolo di matematica.

Impariamo a fare matematica con il calcolatore

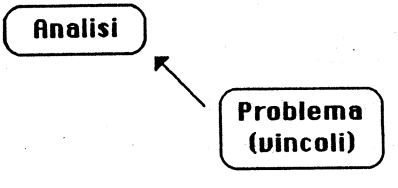
Quando risolviamo un problema matematico con carta e matita, seguiamo un metodo ben preciso che potremmo schematizzare nel seguente modo: leggiamo il testo, cercando di capire le domande poste, ci facciamo un'idea delle possibili strategie risolutive, quindi cerchiamo di organizzare i dati in rapporto alle strategie prescelte, ricavando quelli eventualmente mancanti, annotiamo i passi della risoluzione ed infine scriviamo il risultato, curando che sia proprio quello cercato.

Ad ogni fase di questo percorso sono necessarie determinante risorse per procedere: saper leggere il problema richiede conoscenze di tipo verbale e matematico, scegliere una strategia implica possederne diverse e poter valutare quale è preferibile.

In questo processo l'esperienza costituisce la risorsa più preziosa: questo problema assomiglia a quest'altro che già conosco, questa formula so che può essere applicata in questi modi, questo passaggio, questa operazione sono difficili e posso sbagliarli. Man mano che si risolvono problemi l'esperienza e la conoscenza aumentano, il metodo si affina, le soluzioni diventano più brillanti.

La stessa cosa succede quando cerchiamo di risolvere problemi matematici, con l'importante differenza che, questa volta, possiamo avvalerci di un esecutore automatico, il quale sarà in grado di eseguire i calcoli per noi una volta che saremo stati capaci di programmarlo. E' importante quindi, per utilizzare gli strumenti informatici in matematica, imparare una corretta metodologia di programmazione.

1. L'importanza dell'analisi



Programmare, in Pascal come in qualsiasi altro linguaggio di programmazione, non è difficile, a patto di seguire alcune regole ben precise, la prima delle quali, la più importante, è la seguente:

Prima di scrivere il listato di un programma è necessario avere ben analizzato il problema che intendiamo risolvere.

In genere chi sta imparando a programmare non riesce a resistere alla tentazione di mettersi subito alla tastiera e a scrivere le istru ioni così come vengono, una dopo l'altra. Non vi è nulla di male, ovviamente, nel fare un po' di pratica con l'oggetto computer, ed è naturale che all'inizio la curiosità di provare, di esplorare sia forte. Tuttavia non bisogna mai dimenticare che il calcolatore è un esecutore automatico di istruzioni, e che tutto l'onere di trovare le soluzioni, anche le più semplici, ricade sul programmatore.

Senza una analisi accurata dei termini di un problema, delle variabili occorrenti, delle operazioni da eseguire non è possibile produrre buoni risultati, e provare a scrivere istruzioni cercando una buona soluzione per tentativi ed errori rischia di diventare una cattiva abitudine da cui in seguito non ci si riesce più a liberare.

Poiché uno degli scopi di un corso di alfabetizzazione informatica è quello di fare imparare a servirsi del calcolatore nel modo più semplice ed efficace, proviamo a risolvere insieme un problema.

L'esempio è volutamente banale, e viene proposto proprio per capire i problemi metodologici sottostanti all'apprendimento dell'uso del calcolatore per fare della matematica.

Problema: scrivere il valore dell'area di un rettangolo una volta noti base ed altezza

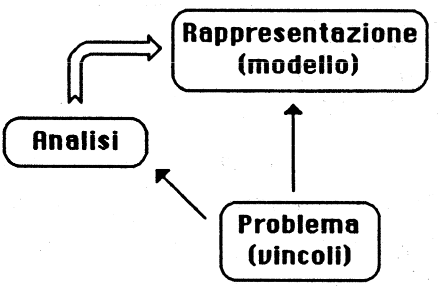
Lo studente sa, perchè il docente spesso glielo ricorda, che deve sempre <u>leggere il testo del problema con attenzione</u> per capire quali prestazioni sono richieste al nostro esecutore. In questo caso il calcolatore dovrà visualizzare un numero, ovvero la misura dell'area del nostro rettangolo. Subito si ricorda che la formula da applicare è la seguente:

Area = Base * Altezza

Il nostro esecutore sa fare le moltiplicazioni di valori già assegnati, ed il problema ci dice che Base ed Altezza sono noti, ma non li specifica. Questo significa che dovranno essere forniti dall'utente, e quindi che il calcolatore dovrà richiederli quando il programma è in esecuzione, con opportune istruzioni read.

In effetti il problema non richiede semplicemente il valore di una particolare area ma un algoritmo in grado di calcolare l'area di qualsiasi rettangolo, ma lo studente si è già dimenticato il consiglio di riflettere con attenzione, e subito dice: "E' facile, lo so fare, adesso scrivo subito il programma".

2. Dall'analisi alla rappresentazione dei dati

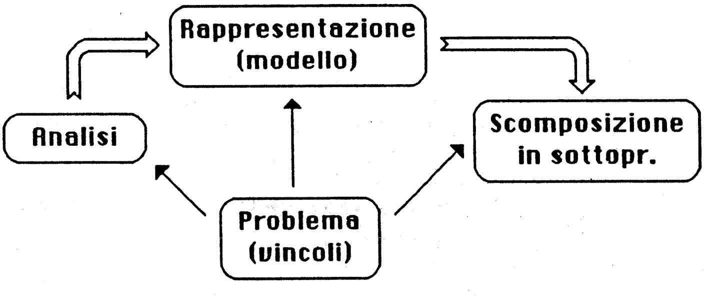


Se lo studente viene invitato a fornire una rappresentazione astratta dei dati, probabilmente arriverà al seguente schema risolutivo:

Dati in ingresso	: valore di Base ed Altezza (2 numeri)
Formula risolutrice	: area = Base * Altezza
Dati in uscita	: valore dell'Area (1 numero)

Avremo due variabili da assegnare, che in Pascal andranno elencate nella parte dichiarativa; per motivi di generalità queste variabili dovrebbero essere di tipo real (numeri reali) poiché il programma deve saper calcolari l'area di un rettangolo di dimensioni, per esempio, 11.6 per 16.22 centimetri, non esprimibili quindi mediante numeri di tipo integer.

3. Il Linguaggio di progetto: la scomposizione del problema in sottoproblemi



Definire la struttura di un programma è una fase molto importante nella programmazione: è a questo livello che un problema, se necessario, viene suddiviso in parti più piccole, in sottoproblemi più elementari e quindi più facilmente risolvibili. Questo modo di procedere viene detto **Top-Down**, che significa dall'alto al basso, dal generale al particolare.

Nel nostro caso il problema è molto semplice, ma dobbiamo lo stesso cercare di darne una rappresentazione in stile top-down, per esempio la seguente, utile per una prima stesura del programma:

```
Program Nome_del_programma
        Dichiarazione variabili

begin
        Introduzione dei dati
        Calcolo e presentazione del risultato
end
```

Il linguaggio utilizzato in precedenza non è ancora il Pascal, ma un linguaggio di progetto: uno strumento importantissimo per costruire algoritmi programmi che poi diventeranno programmi Pascal. Nel linguaggio di progetto le regole sintattiche hanno poca importanza, ciò che conta sono le idee che vengono fissate, e che possono essere espresse anche in italiano, o con formule matematiche o altro ancora.

Il vantaggio di questo linguaggio è quello di essere potente, dal momento che con tali mezzi si possono esprimere concetti molto più complicati di una istruzione Pascal. Inoltre, coerentemente con il metodo Top-Down, prima si descrive a parole cosa deve essere fatto, senza preoccuparsi troppo dei particolari, poi si specifica via via sempre più in dettaglio, sostituendo ad una formulazione vaga (Introduci i dati) delle istruzioni più specifiche (read ...). Nei casi più complessi la traduzione non produrrà immediatamente delle frasi in linguaggio Pascal, ma formulazioni che, per affinamenti successivi, diventano via via più puntuali ed articolate.

Un altro vantaggio di utilizzare il linguaggio di progetto è di tipo pratico: sfruttando il computer come macchina da scrivere, è possibile appuntare fin dall'inizio le proprie idee utilizzando lo stesso editor del linguaggio di programmazione prescelto. E' più conveniente manipolare ed organizzare frasi sullo schermo piuttosto che farlo sulla carta, dal momento che cancellazioni, modifiche ed aggiunte sono facilitate. Questo modo di lavorare avrà anche il vantaggio, non secondario, di mantenere più a lungo l'attenzione dello studente sulla struttura del problema: se invece a questo punto gli chiediamo di lavorare con carta e matita, avrà l'impressione di perdere il proprio tempo a scrivere in "brutta" quello che dopo dovrà digitare in "bella".

Il testo digitato costituirà lo scheletro intorno a cui si svilupperà il programma vero e proprio, ed il fatto di usare uno strumento elettronico ci consente di ampliare le varie parti nell'ordine più utile, che non necessariamente è quello sequenziale. Durante il nostro lavoro racchiuderemo, in forma di commento, le iniziali formulazioni in linguaggio di progetto, così da conservare una minima documentazione delle idee originarie da cui eravamo partiti.

Il metodo Top-Down è essenziale per affrontare problemi complessi, e persino per il nostro semplice algoritmo esso si rivela utile, in quanto evidenzia il fatto che per fornire la risposta desiderata il nostro esecutore deve compiere due azioni, logicamente distinte, e le deve compiere in un ordine ben preciso.

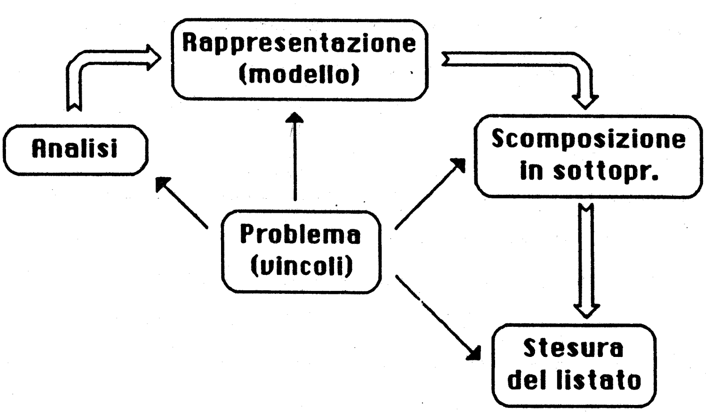
4. La digitazione del programma

Giunti finalmente a questo punto possiamo completare la digitazione del programma, che consiste essenzialmente in una traduzione in istruzioni Pascal del linguaggio di progetto, passando per eventuali affinamenti successivi, quando necessario.

Il risultato del nostro lavoro, vista la semplicità del problema proposto, dovrebbe essere il seguente, salvo variazioni di secondaria importanza:

```
program Rettangolo (input, output);
    var
        Base, Altezza : real;

begin
    writeln ('Introduci il valore di base e altezza ');          {Introduzione dei dati}
    readln (Base, Altezza);
    write ('L''area del rettangolo è ', Base * Altezza);     {Calcolo e presentazione del risultato}
end.
```



"Bene prof., ho finito il programma, posso fare qualcos'altro?". Finito? Ma se abbiamo appena incominciato! Fino ad ora si è solamente trovato una soluzione di massima, il programma certo funzionerà, se non abbiamo fatto errori di battitura, ma è ancora troppo presto per dichiarare definitivamente risolto il problema.

5. Lavorando col programma

E' giunto il momento della verifica del funzionamento del programma, quella fase che i programmatori in genere chiamano debug.

Contrariamente a quello che percepiscono comunemente gli studenti (e anche molti docenti) fare il debug di un programma non significa solamente cercare di eliminare tutti i fastidiosi errori, più o meno prevedibili, che si possono annidare nel listato. Fare il debug significa soprattutto verificare che il programma, che si suppone già funzionante, soddisfi veramente tutte quelle caratteristiche auspicate nella fase di progettazione, a partnre ovviamente dalla più importante, cioè che effettivamente risolva in modo soddisfacente il problema posto.

Ritorniamo quindi al nostro programma e proviamo a farne un piccolo debug. Cominciamo col verificare con l'allievo se è corretto il calcolo del-l'area di un rettangolo di 10 centimetri per 20.

Ecco cosa accade sullo schermo quando lanciamo il programma:

```
Introduci il valore di base e altezza
10
20
L'area del rettangolo è  2.0000000000E+2
```

E' quello che ci saremmo aspettati? Il numero 2.000000000E+2 è rappresentato in forma esponenziale. Il suo significato è il seguente

$$\boxed{2.0000000000E+2 = 2*10^2 = 2 * 100 = 200}$$

Il calcolo è dunque corretto, ma ci piacerebbe che la risposta visualizzata fose quella più leggibile all'utente, cioè l'ultima. In questo caso, consultando il manuale, scopriamo che una possibile soluzione al nostro nuovo problema consiste nel modificare l'istruzione writeln in questo modo:

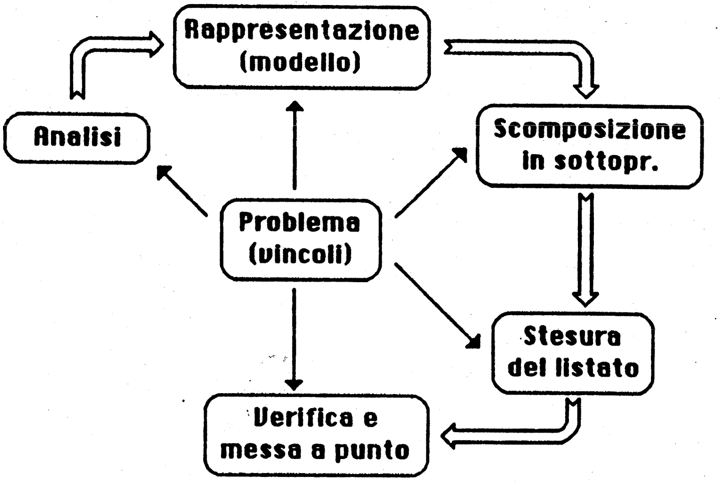
```
writeln ('L'area del rettangolo è', Base * Altezza: 7:2);
```

La presenza dei due punti dopo il prodotto di base ed altezza informa il calcolatore che si vuole un output con un certo formato. Il numero 7 indica che il valore va stampato occupando globalmente 7 caratteri, di cui 2 decimali. A questo punto l'output dovrebbe essere il seguente:

```
L'area del rettangolo è    200.00
```

Se per la stampa della parte intera del risultato fossero necessari più caratteri di quanti permessi dalla dichiarazione, questa sarebbe, in molte versioni, ignorata ed assunta automaticamente la larghezza necessaria.

Naturalmente vi sono altri metodi per risolvere il problema del formato dei numeri sullo schermo, qui ci interessa solamente vedere come è possibile correggere e migliorare il funzionamento di un programma.



Continuiamo dunque a fare delle prove, suggerendo allo studente di introdurre diverse coppie di valori. Noteremo, introducendo valori con diverse cifre decimali, che il dato in uscita non è proprio quello esatto, ma viene arrotondato. Possiamo naturalmente migliorare la precisione aumentando il numero di cifre decimali, per esempio portandolo a quattro o a sei, ma se proviamo ad introdurre valori con troppe cifre il problema si ripropone. Per di più, introducendo valori oltre un certo numero di cifre decimali (perchè non verificare quante?) il calcolatore incomincia ad essere in difficoltà.

Che cosa stiamo facendo? Semplicemente stiamo cercando di scoprire i limiti del nostro programa introducendo dei dati sempre più difficili da trattare.

In questo modo ci rendiamo conto che, mentre la formula Base*Altezza è sempre vera, il nostro programma non è però in grado di applicarla a qualsiasi coppia di valori.

Affronteremo in altra sede la questione dei limiti della potenza di calcolo dei computer, per adesso proseguiamo nel debug, accontentandoci di constatare che il nostro programma continua a funzionare nella quasi totalità dei casi pratici.

Mettiamo ora a più dura prova il programma Rettangolo, fornendo dei dati numerici inverosimili: cosa succede se chiediamo l'area di un rettangolo di metri 0 per 3, oppure di metri 3 per -4?

Il calcolatore tratta i dati con le regole dei numeri algebrici, mentre noi sappiamo che le misure geometriche devono essere positive! Il programma in sé non è sbagliato, e potremmo magari decidere che, se l'utente è così sciocco da fornire dati errati dovrà rassegnarsi a ricevere risposte prive di senso, come quella che il rettangolo ha area -12.

Molto spesso, tuttavia, il problema non è aggirabile: vi sono casi in cui i dati da introdurre sono molti, vi sono situazioni in cui non è immediatamente evidente se un dato è errato o una risposta assurda, e infine chiunque può compiere, per distrazione, degli sbagli mentre digita i dati.

La soluzione a tutto ciò esiste e consiste nell'effettuare un adeguato controllo dei dati in ingresso. Naturalmente questo può complicare, in varia misura, il programma, ma lo rende molto più affidabile. Vedremo più avanti come sia possibile raggiungere un accettabile compromesso fra affidabilità e semplicità, ed accantoniamo per il momento il problema del controllo dell'input.

6. Messa a punto e migliorie successive

Il debug e l'uso effettivo e continuato di un programma consentono in genere di evidenziare errori, difetti, situazioni e possibilità di sviluppo che in precedenza non si erano prese in considerazione.

Lo sanno bene i programmatori professionisti, che dopo aver distribuito una prima versione (release) dei loro prodotti si mettono subito al lavoro per le successive.

Torniamo al nostro programma Rettangolo, che sembra quasi del tutto sviscerato. In realtà sono ancora possibili ulteriori miglioramenti ed espansioni.

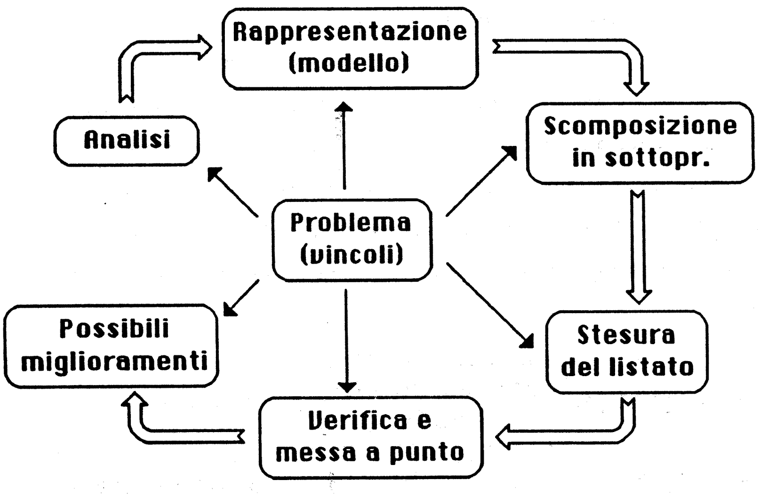
Per esempio vi è tutto il discorso delle unità di misura: misure ed area andrebbero espresse rispettivamente in cm e cm^2, oppure in dm e dm^2 e così via. Il nostro programma invece presuppone che queste operazioni siano fatte dall'utente, come pure che l'utente provveda a convertirle da sé le unità di misura, se necessario (... un rettangolo di 12 cm per 1.6 dm ...).

Altre possibili espansioni potrebbero essere quelle di alalrgare l'ambito del problema dei dati in uscita (per esempio fornendo anche perimetro e diagonale) o nei dati in ingresso (accettando informazioni alternative, come base e perimetro, base e rapporto fra base ed altezza, area e base e così via).

Ulteriori migliorie di tipo marginale potrebbero essere i miglioramenti dei messaggi su video, come:

Introduci il valore di base e altezza del rettangolo

Concludiamo qui il discorso sulle migliorie di un programma. Siamo partiti dal problema apparentemente banale, di calcolare l'area di un rettangolo noti i valori di Base ed Altezza. Adesso sappiamo di disporre di un programma funzionante entro determinati limiti di precisione, per certi valori di input corretti e prescindendo dalle unità di misura. Inoltre ci rendiamo conto che è implicitamente richiesto un uso intelligente del programma stesso, e quindi che l'utente non può ignorare le regole della geometria sull'argomento.



Se pensassimo di far usare il nostro programma Rettangolo solamente a persone di nostra conoscenza, per esempio ad un parente o ad un amico, basterebbero probabilmente poche parole di spiegazione e dei semplici avvertimenti; nel caso invece di un programma destinato a chiunque, uno scritto con tutti i dettagli d'uso diventa indispensabile, ed è questo il motivo per cui tutti i buoni programmi sono corredati da una documentazione ampia e ricca di esempi sui possibili usi.

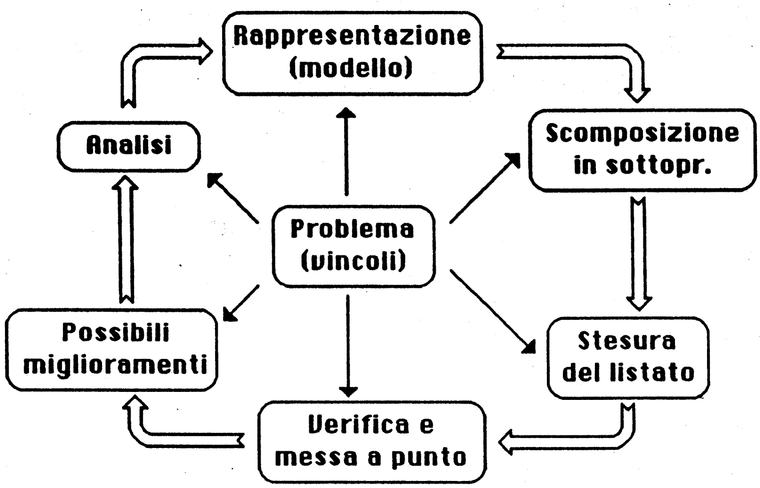
E' probabile che, giunti a questo punto, lo studente intelligente incominci ad intuire che nessun problema, neppure il più banale, può essere affrontato in modo sbrigativo con il calcolatore.

7. Mettendo tutto insieme

Per finire, riassumiamo in uno schema tutte le tappe che si dovrebbero percorrere per costruire un buon programma:

1. Analisi del problema
2. Rappresentazione dei dati
3. Scomposizione in sottoproblemi
4. Stesura del listato
5. Verifiche e debug
6. Documentazione e successive migliorie

Abbiamo visto che la costruzione di un buon programma è un processo suddiviso in tappe ben precise, in ciascuna delle quali sono richieste conoscenze e competenze appropriate. Così nell'analisi entrano la comprensione dei termini del problema, nella rappresentazione la conoscenza di come l'esecutore tratta i dati, nella scomposizione le tecniche top-down, nella stesura e nel debug la conoscenza del linguaggio di programmazione e la capacità di usare il calcolatore, nei possibili miglioramenti infine la capacità di generalizzare.



L'efficacia del lavoro in ogni fase dipende strettamente dalle fasi precedenti. Una buona analisi facilita enormemente la scomposizione del problema in sottoproblemi e la stesura del listato, così come un buon progetto semplifica il lavoro di chi deve costruire un edificio, mentre al contrario abitazioni costruite senza alcun progetto non sono affidabili e possono crollare da un momento all'altro.

D'altra parte tutte le fasi di soluzione sono egualmente importanti: chi progetta edifici, sa benissimo, e deve sempre ricordare, che quello che è destinato a tramutarsi in mattoni, porte e finestre, e ne tiene conto mentre sviluppa le sue idee, così come chi analizza un problema per risolverlo con il calcolatore alla fine si aspetta che un programma funzionante gli dia le risposte attese, e quando tale programma sarà realizzato, il più delle volte sentiremo anche i programmatori più esperti e preparati affermare:

"Se dovessi rifarlo, farei questo e quel miglioramento, terrei conto di ...".

Ecco perchè programmare si impara programmando: solo dopo che questo processo sarà stato percorso un numero adeguato di volte e si sarà acquisita una sufficiente esperienza in ogni fase potremo dire di possedere gli strumenti minimi per risolvere i problemi matematici con il calcolatore.

Molti studenti che si cimentano nella programmazione per la prima volta tendono a farlo in modo improvvisato, senza alcun criterio, ottenendo risultati modesti e fermandosi delusi dopo le prime difficoltà.

Al contrario un buon metodo di lavoro seguito con pazienza non solo aiuta a costruire programmi migliori, ma soprattutto facilità l'abitudine a ragionare e a risolvere efficacemente i problemi: in poche parole, un <u>uso intelligente del calcolatore</u>.

Cacciabue R.A.(*), Mascarello M.(**), Scarafiotti A.R.(**)

(*) I.T.I.S. "Giorgi", Genova

(**) Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino

APPROCCIO ALL'ANALISI NUMERICA: SPERIMENTAZIONE SUI PROGRAMMI DEL TRIENNIO DEGLI I.T.I. PER PERITI IN INFORMATICA

Presentiamo in questo lavoro di didattica un intervento in due parti; nella prima R. Cacciabue presenta il suo lavoro di sperimentazione nell'approccio all'analisi numerica, specificando per le singole classi obiettivi e metodi, in ordine alle scelte di programma.

Nella seconda parte, M. Mascarello e A.R. Scarafiotti suggeriscono qualche sviluppo ulteriore, cercando di focalizzare i punti base della prima parte.

Premessa

Nel programma degli I.T.I. periti in informatica compare nella quarta classe il modulo di "Analisi numerica", parallelamente a quello di "Analisi infinitesimale".

Tuttavia, già nella terza classe, è previsto il laboratorio di matematica (2 ore settimanali) e si presenta perciò l'occasione per gettare le basi del discorso numerico.

Ciò appare tanto più opportuno se si considera che:

1) gli allievi provengono di norma da un biennio in cui non sono svolti argomenti propedeutici all'analisi numerica;

2) il piano di studi dell'indirizzo informativo prevede in terza 6 ore di informatica (4 sono di laboratorio), in cui vengono trattati argomenti quali:

struttura fisica di un elaboratore; rappresntazione interna dei dati; aritmetica del calcolatore.

Quest'ultimo fatto, se da un lato appiana la strada e fornisce motivazioni al modulo di analisi numerica, dall'altro rende necessario affrontare al più presto concetti quali: approssimazione, errore, troncamento di un processo iterativo, ecc..

Finalità della sperimentazione

Il lavoro svolto, che è solo agli inizi, si propone principalmente di far prendere all'allievo, che costantemente si trova a rapportarsi coll'elaboratore sia nella fase di programmazione che in quella di interpretazione dei dati, precisa coscienza dell'approccio differente che bisogna avere nell'affrontare i problemi quando si lavora nel discreto piuttosto che nel continuo, in insiemi numerici finiti anziché infiniti, con algoritmi che prevedono un numero finito di passi e che forniscono risultati certamente non esatti piuttosto che con processi iterativi che portano a risultati esatti dopo infiniti passaggi.

Oggetto della sperimentazione

La sperimentazione avviata ha due aspetti: uno metodologico, l'altro contenutistico.

Nella classe terza, l'ipotesi che si vuole verificare, dal punto di vista del metodo, è la seguente: l'allievo diventa padrone dei concetti-base dell'analisi numerica solo se la fase di sistemazione avviene durante/dopo una prima fase di "manipolazione", in cui l'elaboratore assume il ruolo di strumento di indagine.

Tale lavoro preparatorio avviene ponendosi come obbiettiva la ricerca di uno zero approssimato di un polinomio intero. Le motivazioni della scelta di tale argomento risiedono nel fatto che, se da un lato esso rappresenta un naturale sviluppo delle conoscenze che l'allievo ha acquistato nel biennio, dall'altro la risoluzione approssimata di equazioni e sistemi si ritiene possa essere assunta quale asse portante del lavoro di laboratorio nell'arco del triennio.

Nella classe quarta, l'ipotesi metodologica consiste nel concepire il lavoro all'elaboratore come momento di stimolo per approfondire da un lato le questioni teoriche e per affinare, dall'altro, la coscienza critica rispetto ai risultati ottenuti ed agli algoritmi che hanno permesso di ricavarli.

Per i contenuti, si rimanda alla successiva descrizione.

A questo riguardo va osservato che lo scollamento presente tra il lavoro svolto nelle due classi potrà essere colmato anticipando alla quarta lo studio di alcuni dei metodi approssimati per risolvere equazioni, argomento previsto dai programmi ministeriali per la classe quinta.

Descrizione del lavoro

Classe terza (laboratorio, secondo quadrimestre).

Problema: ricerca di uno zero reale approssimato di un polinomio p(x) in un intervallo $[h, k]$.

Obiettivi

- Confrontare metodi più o meno efficaci per calcolare il valore di P(x);
- fissare il concetto di zero collegandone l'esistenza alla continuità e al cambiamento di segno di P(x);
- fissare il concetto di polinomio come funzione continua;
- introdurre i concetti di approssimazione e tolleranza.

Metodo

Il problema è stato proposto suddiviso nei seguenti sottoproblemi (inizialmente i dati in ingresso sono grado e coefficienti del polinomio P(x), supposto ordinato in senso decrescente):

- visualizzare P(x) in forma canonica;
- determinare P(a) avendo come dato in ingresso il valore a della variabile

indipendente;

- ottimizzare il calcolo di P(a) attraverso l'utilizzo del metodo di Horner;
- visualizzare una tabella di valori di P(x) per un x [h, k] con h e K dati;
- attraverso l'osservazione dei valori della tabella (segno di P(x) nei successivi estremi di suddivisione di [h, k] e le iterate utilizzazioni della tabella stessa, pervenire alla conoscenza di uno zero approssimato di P(x) ovvero alla consapevolezza di non poterne accertare l'esistenza nell'intervallo;
- realizzazione di un programma che ricerchi automaticamente uno zero di P(x) all'interno di un opportuno intervallo [h, K].

Dopo la spiegazione del problema, vengono date le specifiche fondamentali per la sua risoluzione ed, eventualmente, alcuni suggerimenti. Gli allievi, divisi in gruppi di 2 o 3 persone ciascuno, in un numero di ore prestabilite, devono realizzare prima un diagramma a blocchi e poi un programma per l'elaboratore che consegua gli obiettivi stabiliti. Al raggiungimento di tappe fondamentali, essi devono presentare una relazione atta a spiegare la struttura ed il funzionamento del programma stesso. Il programma iniziale si arricchisce fino alla completa risoluzione del problema.

Strumenti

Non si è fatto uso di testi, ma esclusivamente di materiale fornito dall'insegnante.

Elaboratore M24 Olivetti; sistema operativo MS-DOS.

Linguaggio di programmazione Turbo Pascal.

Tempi: 16 ore

Osservazioni

Al monte ore vanno aggiunte altre 10 ore che, dedicate allo studio della grafica dell'elaboratore in ambiente Pascal, hanno permesso di giungere alla rappresentazione di P(x) in [h, k].

Tutti i gruppi hanno raggiunto l'obiettivo finale; un gruppo ha ricavato tutti gli zeri di P(x) esistenti in [h, k].

Classe quarta (laboratorio, primo e secondo quadrimestre).

Problema 1: dato il termine generale a_n di una successione monotona convergente ad 1, predisporre un programma che permetta di verificare numericamente la convergenza:

- visualizzando un gruppo di termini della successione compresi tra due indici scelti a piacere;
- determinando $n_0 = f(\varepsilon)$, dove $0 < \varepsilon < 1$, tale che per qualsiasi $n > n_0$ si abbia $| a_n - 1 | < \varepsilon$;
- visualizzazione $| a_n - 1|$ per il gruppo di termini scelti.

Problema 2: predisporre un programma in grado di calcolare un valore approssimato del numero di Nepero, con approssimazione prefissata, per osservare il ruolo degli errori di troncamento e di approssimazione". A tal fine, visualizzare una tabella che riporti il valore in ingresso x, 1/x, 1+1/x, (1+1/x)^x per un numero di termini scelto a piacere, con un passo anch'esso assegnato a piacere.

Obiettivi

- Capire il concetto di convergenza di una successione tramite la manipolazione diretta di valori;
- capire le differenze tra dimostrazione e verifica;
- essere coscienti dei limiti di validità dei risultati forniti dall'elaboratore, sia rispetto agli insiemi numerici in cui si opera sia rispetto al concetto matematico (per esempio, osservare le limitazioni di ed n, per il primo problema).

Problema 3: date (n+1) coppie ordinate di valori (x, y), determinare il polinomio interpolatore di Newton di grado n, col metodo delle differenze divise. Rappresentare graficamente il polinomio e, qualora i punti dati appartengano al grafico di una funzione predefinita nel linguaggio Pascal, rappresentare anche la f(x) interpolata.

Obiettivi

- Capire il significativo di interpolazione;
- impadronirsi del metodo per costruire il polinomio di Newton;
- verificare graficamente, quando possibile, la precisione con cui il polinomio approssima la funzione da interpolare.

Metodo

Vale quanto detto per la classe terza, ma ora il problema viene presentato globalmente e gli allievi devono analizzarlo, suddividendolo in sottoproblemi. Il programma costruito viene fatto girare su diversi esempi per far emergere osservazioni critiche circa i limiti di validità del programma stesso.

Strumenti

Si è fatto uso del testo adottato per il corso, che si è dimostrato adatto ed esauriente: Foresti-Pepe, "Analisi infinitesimale e numerica", Sansoni, Firenze, 1984.

Per il resto, vedere classe terza.

Tempi: Problema 1, 12 ore; problema 2, 4 ore; problema 3, 10 ore.

Osservazioni

Per il terzo problema, non si è avuto il tempo di completare il lavoro con la stima di un massimante per l'errore.

Il problema 2 è stato molto utile per motivare agli occhi degli allievi la necessità di dimostrazioni teoriche. La loro sorpresa, infatti, è stata grande nello scoprire quali grossolani errori può commettere la macchina, ritenuta fino ad allora potentissima ed infallibile.

Un gruppo ha realizzato, spontaneamente, un secondo programma in linguaggio FORTRAN per tentare di migliorare i risultati: speranza vana, visto che il numero di Nepero risulta in una prova compreso tra 3 e 4!

Parte seconda

Vogliamo ora focalizzare alcuni punti della relazione appena svolta. Nella premessa, si fa cenno ad alcuni concetti: approssimazione, errore, troncamento di un processo iterativo.

Sono gli argomenti presentati nei primi capitoli di ogni buon testo di matermatica numerica.

La nostra proposta (di validità didattica da verificare) è, al riguardo, quella di anteporre durante la classe terza una presentazione di questi concetti-base, risalendo da esempi concreti, ma arrivando ad una formalizzazione che permetta l'apprendimento "definitivo". La ripresa dei concetti in classe quarta dovrebbe render stabile la base cognitiva, non presentando ai ragazzi alcuna novità di sostanza, ma una (semplice) ristrutturazione critica, su esempi ragionati, di quanto già acquisito, tentando al più qualche generica estensione.

In concreto, secondo noi, prima di iniziare l'esperienza di laboratorio in matematica numerica della classe quarta, dovrebbero essere garantire come acquisite alcune idee base; queste dovrebbero poi essere via via "riconosciute" come irrinunciabili per le esperienze di laboratorio; per i casi specifici sarà cura del docente proporre occasioni di riscontro in esempi concreti.

Per cercare di individuare alcune idee guida per il lavoro di laboratorio, prendiamo in esame alcune note al "Corso introduttivo di informatica"(*) tra cui ci pare valido scegliere e proporre quanto segue.

- Prima di "accendere uno strumento di calcolo" devo imparare che:

1) Il calcolatore opera con un numero finito di cifre, perciò il suo utilizzo può portare a risultati errati; ad esempio:

$$(1+0.0000001)-1 = 0.0000001 = 10^{-7}$$

se eseguiamo il calcolo indicato al 1º membro con un calcolatore (Commodore 64) otteniamo

$$1.00117177\ 10^{-7}.$$

2) La rappresentazione dei numeri può essere fatta in basi diverse, cioè la scelta della base può influire su 1); ad esempio 1/5 in base 10 si scrive 0.20,

---

(*) R. Bevilacqua, D. Bini, M. Capovani, O. Menchi, Elementi di Matematica Numerica, Progetto Strategico del C.N.R. - Tecnologie e Innovazioni Didattiche.

cioè si rappresenta con un numero finito di cifre, mentre 1/5 in base 2 è rappresentato dallo sviluppo periodico: 0.0011001100...

3) Il calcolatore non può rappresentare numeri arbitrariamente grandi o arbitrariamente piccoli.

4) Per uno stesso problema è importante scegliere procedimenti di calcolo (algoritmi) per cui sia minima l'incidenza degli erori al punto 1) (ovvero algoritmi numericamente stabili).

Se sui primi tre punti possiamo immaginare che l'insegnante di Informatica lavori abbondantemente, dato il programma che deve svolgere, sul quarto la matematica numerica può e deve dire molto. Infatti la necessità di ricercare algoritmi numericamente stabili è un punto che va chiarito bene su più esempi già nella terza classe. Ne proponiamo qualche modello elementare.

I) Sia $a=1$, sia $b=a^2-1$, sarà $b=0$;
sia $a=1+\varepsilon$, sia $b=a^2-1$, sarà $b=2\varepsilon+\varepsilon^2$ (1)

la (1) mostra come un "errore ε " in a, incide sul valore di b. Questo fatto si verifica perchè la "cifra sicura" di a (cioè 1) si perde per sottrazione nel calcolo di b; ossia

se $a=5$, $b=a^2-1$ allora $b=\underline{24}$
se $a=5+$, $b=a^2-1$ allora $b=\underline{24}+10\varepsilon+\varepsilon^2$

II) Si voglia valutare $f(x)=x(\sqrt{x^2+1}-x)$ con $x=10^4$, $x=10^6$, $x=10^8$. Si utilizzi in alternativa $f(x)=x/(\sqrt{x^2+1}+x)$. La seconda formula è valida; perchè?

Dai pochi cenni precedenti, su un'ampia base di esemplificazione, dovrebbe incominciare a formarsi nello studente un'idea corretta della matematica numerica: come si era imparato nella scuola elementare che la somma di due numeri dati esiste ed è unica, ora si acquisisce il concetto di errore (da distinguere dall'idea di scorrettezza, di sbaglio ...) che deriva dal concetto di approssimazione. Nasce anche la strategia di lavoro: poiché il calcolatore opera con un numero finito di cifre, devo imparare a "scegliere algoritmi" che le "salvino" al meglio, devo sapere che, per lo più, i risultati saranno approssimati.

Con le esperienze di laboratorio di terza si vuole "preparare" in qualche modo i ragazzi a sviluppare un procedimento per individuare un'approssimazione di x_0, eventuale zero di P(x) su $[h, k]$. allora è opportuno dare una volta per tutte i criteri di arresto di un metodo iterativo, a prescindere dalla indagine sulla sua convergenza, che in questo spunto sappiamo verificata. La tolleranza ε ($\varepsilon \geq 0$) sarà fissata tenendo conto dello strumento di calcolo utilizzato e si introdurrà in questa occasione la definizione di <u>errore assoluto</u> (in un metodo iterativo).

$E_{ass} = | x_{i+1} - x_i |$; di <u>errore relativo</u>;

$E_{rel} = E_{ass}/\min(| x_i | ,| x_{i+1}|)$;

<u>criteri di arresto</u>: $E_{ass} < \varepsilon$, $E_{rel} < \varepsilon$

Questi concetti, acquisiti in terza, saranno poi ripresi in quarta, prima dell'approccio alle successioni definite per ricorrenza.

Il modulo numerico della quarta diventa su questo tema particolarmente importante, proprio perchè permette di dare luce al processo di "dimostrazione" di un risultato di convergenza, ben diversificato da una verifica numerica o da una congettura numerica che possa in qualche modo indurre a preparare la rigorosa deduzione del risultato.

Già in terza, lavorando in laboratorio, si tende a coniugare esperienze numeriche con l'acquisizione di "fatti matematici" (ad esempio la continuità, la continuità dei polinomi ...); in quarta l'esperienza numerica avvicina lo studente, poco disponibile ai discorsi astratti e ben formalizzati, ai nuovi temi dell'Analisi infinitesimale, avviandolo ad essere almeno un buon utilizzatore.

Il recupero di interesse per le questioni teoriche, di cui si parla nella prima parte, ci conferma che si esce dal laboratorio di matematica numerica con una nuova maturità, un desiderio di certezze.

Non pensiamo qui di prolungare il discorso sul Problema 3: secondo noi il tema dell'interpolazione in una classe di I.T.I. andrebbe affrontato ad ampio respiro, collegandolo con il problema degli zeri di f(x). Ciò sarà possibile se verrà assunto, come si è intenzionati a fare, quale asse portante nell'arco del triennio, appunto la ricerca degli zeri di una funzione. Per ora, invece, si è trattato solo di un'esercitazione sui polinomi di Newton allo scopo di rendere gli studenti abili in senso "informatico" a mani ggiar formule.

Lavoro svolto nell'ambito dei contratti C.N.R. per la didattica n. 86.02102.01 e n. 87.00986.01.

Alba di Carlo (*), **Guglielmo Trentin** (**)
(*) Torino
(**) Istituto Tecnologia Didattiche, CNR - Genova

USO DELLE RETI DI PETRI NELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Questo lavoro suggerisce il possibile uso di linguaggi formali nella didattica della matematica tendente a favorire l'attività di strutturazione della conoscenza. In particolare le applicazioni che verranno proposte consentono l'individuazione di classi di problemi, l'autoverifica dell'apprendimento e la gerarchizzazione di un dominio di conoscenza.

PREMESSA

Nei Nuovi Programmi per il biennio della Scuola Secondaria Superiore viene assegnata particolare importanza a due elementi: l'interpretazione matematica del reale e l'esigenza di formalizzazione. Tali elementi "...arricchiscono e completano quella valenza formativa e quell'ufficio culturale che l'insegnamento matematico possiede da sempre: lo sviluppo della capacità logica che si realizza nell'economia di pensiero, nel gusto della verità e nell'apprezzamento dell'astrazione dei concetti"[1].

In realtà anche nel passato questi elementi hanno avuto un ruolo importante nell'insegnamento della matematica, un ruolo però non sufficientemente esplicitato e precisato.

Fra coloro che si sono occupati dell'approccio alla formalizzazione dei problemi, ricordiamo G.Polya [2][3]; egli afferma che "...risolvendo un problema enunciato a parole con l'impostare equazioni, lo studente *traduce* una situazione reale in termini matematici".

Lo schema di risoluzione proposto da Polya può essere riassunto nelle seguenti fasi.

^ FASE. *Comprensione del problema in termini di incognita, dati, condizione*: la condizione è sufficiente, insufficiente o sovrabbondante per determinare l'incognita? E' contraddittoria in termini? Quali sono le varie parti della condizione?.

II^ FASE. *Compilazione di un piano*: individuazione di un problema noto di poco differente da quello dato o di un problema noto che soddisfi una parte della condizione (concetto di scomposizione in sotto-problemi o di risoluzione attraverso una sequenza di passi essenziali).

III^ FASE. *Sviluppo del piano attraverso la verifica di ogni passaggio o sotto-problema*: si può riconoscere manifestamente che ogni passaggio è esatto? Si può dimostrarne l'esattezza?

IV^ FASE. *Verifica del risultato e controllo del procedimento*: è possibile ottenere il risultato in altro modo? Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema? Il risultato è dimensionalmente corretto? Nel caso di problemi letterali è possibile la particolarizzazione? E ancora, nel caso di un problema numerico come si può effettuare la generalizzazione?
Seguendo lo schema proposto è vero che si perviene alla soluzione di un singolo problema, ma si può notare che:" Una soluzione..... può diventare uno *schema*, un modello che potrete vantaggiosamente imitare nel risolvere problemi simili" [3] (classe di problemi).

Le attività di:
- ridurre il problema alla forma più semplice, ricorrendo a qualche inevitabile semplificazione o astrazione,
- individuare, mobilitare ed organizzare le conoscenze pertinenti con il dominio dei contenuti relativo al problema,

- formalizzare tali conoscenze in un modello o in uno schema,

risultano tipiche ed essenziali nel processo di analisi di un qualsiasi sistema e quindi vengono esercitate in un campo di applicazione ben più vasto che la risoluzione di problemi. La descrizione data da Polya, seppur chiara e sufficientemente esaustiva, anche dal punto di vista applicativo, non definisce strumenti precisi e lascia ampio spazio alla "fantasia " individuale.

Nell'ottica di un'applicazione all'indagine e alla strutturazione dei domini di conoscenza, l'adozione del procedimento descritto, con le attività ad esso connesse, potrebbe essere facilitata dall'uso di un linguaggio formale.

In questo senso, nel presente lavoro, saranno formulate alcune proposte ed alcune ipotesi sul possibile uso delle Reti di Petri [4] come linguaggio per la formalizzazione di strutture conoscitive in ambito matematico.

LE RETI DI PETRI COME LINGUAGGIO FORMALE

Le Reti di Petri rappresentano in maniera più o meno esplicita la base concettuale di qualunque metodologia di specifica [5], pertanto costituiscono uno strumento per la descrizione e l'analisi di modelli, siano essi sistemi, domini di conoscenza, etc....

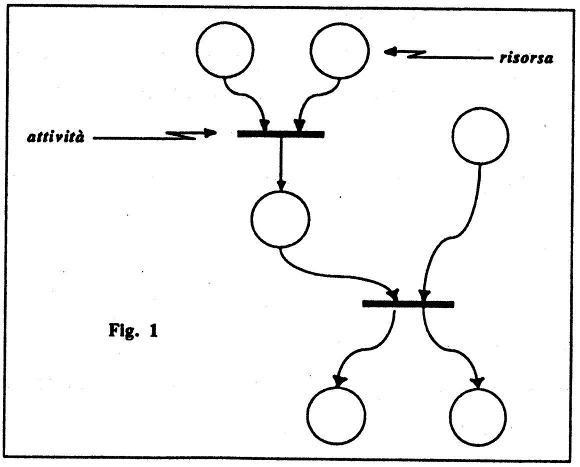


Fig. 1

Una Rete di Petri è un grafo orientato in cui sono rappresentati due tipi di nodi (fig.1): ***risorse***, indicate con cerchi, ed ***attività***, indicate con segmenti. Un arco del grafo che parte da una risorsa e termina in un'attività indica che la risorsa è necessaria per svolgere quell'attività. Analogamente un arco che parte da un'attività e termina in una risorsa, indica che la risorsa è il prodotto dell'attività stessa.

Nel caso specifico della rappresentazione dei contenuti matematici, le attività corrispondono alle abilità che devono essere esercitate (abilità di calcolo, assegnazione di incognite, risoluzione di equazioni, etc...) o, se si vuole, alla classe di compiti che bisogna essere in grado di svolgere.

In questo contesto le risorse identificano gli elementi necessari per poter svolgere un'attività (teorema di Pitagora, conoscenza dei metodi di scomposizione in fattori di un polinomio, conoscenza del calcolo dei prodotti notevoli, etc...) o il prodotto dell'attività stessa (insieme di appartenenza delle soluzioni, radici di un'equazione, etc...).

La formalizzazione di un modello in termini di Reti di Petri avviene attraverso vari stadi. Il primo riguarda la rappresentazione generalizzata del modello, in cui si analizza il dominio dei contenuti, se ne identificano le risorse e le attività principali specificandone le interconnessioni, si controlla la correttezza sintattica della rete ottenuta.

Negli stadi successivi si procede al raffinamento delle attività descritte nella rappresentazione generalizzata. Per ognuna di esse si procede:

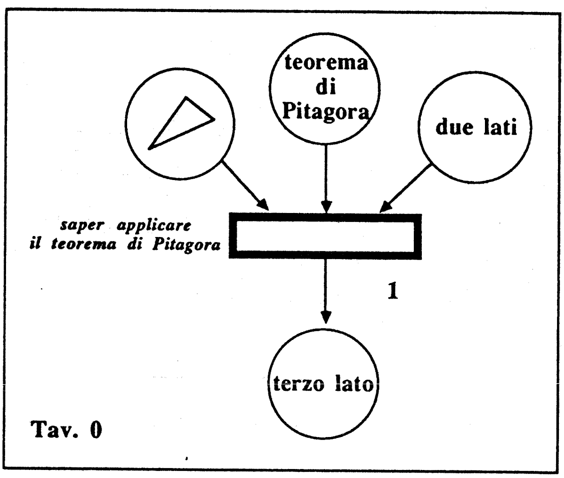
- all'analisi del corrispondente dominio dei contenuti;
- all'identificazione delle attività di livello subordinato che rappresentano un prerequisito per poter svolgere l'attività in esame;
- alla rappresentazione in termini di Reti di Petri di tali attività subordinate;
- alla verifica della correttezza sintattica della sotto-rete.

Ad ogni passo di raffinamento è consigliabile associare una descrizione linguistica relativa alle attività ed alle risorse prese in esame.

Ovviamente il numero dei passi di raffinamento è strettamente correlato al grado di dettaglio che si vuol dare al modello.

UN ESEMPIO

Per chiarire quanto precedentemente esposto, nelle tavole che seguono viene illustrata una possibile rappresentazione in termini di Reti di Petri delle abilità connesse all'applicazione del teorema di Pitagora. Per convenzione vengono indicate con un rettangolo le attività di cui si vuol fornire un ulteriore raffinamento, con un segmento le altre.



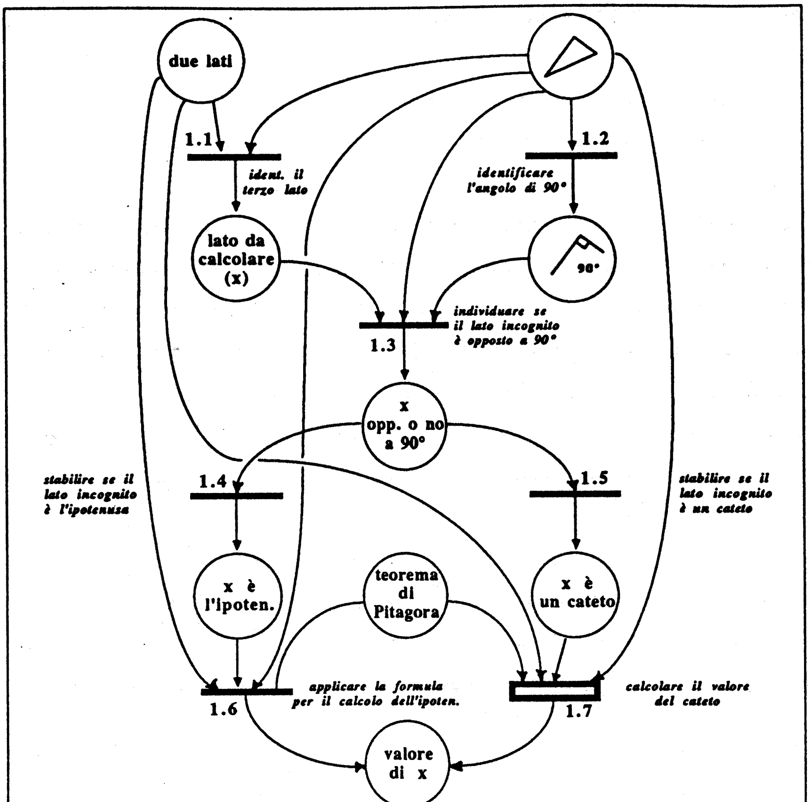
DESCRIZIONE LINGUISTICA TAV. 0

Rappresentazione generalizzata del modello *(in questa rete viene definito l'obiettivo che si vuol raggiungere).*

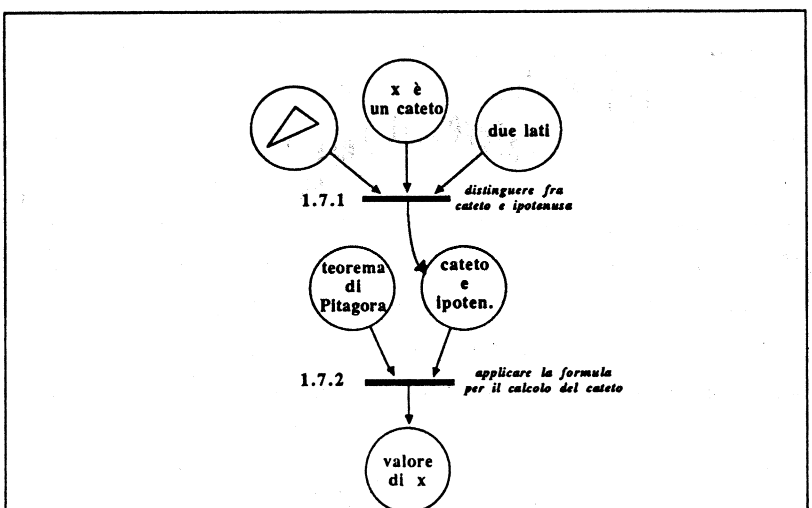
Attività: ricavare, applicando il teorema di Pitagora, il terzo lato di un triangolo rettangolo dati gli altri due.

Risorse di ingresso: il triangolo rettangolo, il valore di due lati, il teorema di Pitagora.

Risorse di uscita: il valore del terzo lato.


due lati
1.1
ident. il
terzo lato
1.2
identificare
l'angolo di 90°
lato da
calcolare
(x)
90°
individuare se
il lato incognito
è opposto a 90°
1.3
x
opp. o no
a 90°
stabilire se il
lato incognito
è l'ipotenusa
1.4
1.5
stabilire se il
lato incognito
è un cateto
x è
l'ipoten.
teorema
di
Pitagora
x è
un cateto
applicare la formula
per il calcolo dell'ipoten.
1.6
1.7
calcolare il valore
del cateto
valore
di x

Tav. 1


x è
un cateto
due lati
1.7.1
distinguere fra
cateto e ipotenusa
teorema
di
Pitagora
cateto
e
ipoten.
1.7.2
applicare la formula
per il calcolo del cateto
valore
di x

Tav. 1.7

DESCRIZIONE LINGUISTICA TAV. 1

Primo livello di raffinamento *(viene fornita una veduta d'insieme delle attività connesse all'applicazione del teorema).*

Attività: identificare sulla figura il lato incognito e l'angolo di 90 gradi; verificare se il lato incognito è opposto all'angolo retto onde stabilire se si tratta di un cateto o dell'ipotenusa; applicare la formula del teorema nel caso specifico.

Risorse di ingresso: il triangolo rettangolo, il valore di due lati, il teorema di Pitagora.

Risorse intermedie: il lato incognito del triangolo raffigurato, l'angolo retto, l'informazione sulla posizione del lato incognito rispetto all'angolo retto (opposto o no), l'informazione sul tipo di lato incognito (ipotenusa o cateto).

Risorse di uscita: il valore del terzo lato (cateto o ipotenusa).

DESCRIZIONE LINGUISTICA TAV. 1.7

Secondo livello di raffinamento *(viene dettagliata l'attività relativa al calcolo del cateto).*

Attività: distinguere sulla figura fra cateto e ipotenusa noti ed applicare la formula per il calcolo del cateto incognito.

Risorse di ingresso: il triangolo rettangolo, il valore di due lati, il cateto incognito, il teorema di Pitagora.

Risorse intermedie: posizione sulla figura del cateto e dell'ipotenusa noti.

Risorse di uscita: il valore del terzo lato (in questo caso del cateto).

TRE PROPOSTE D'USO DELLE RETI DI PETRI NELLA DIDATTICA

1) CLASSE DI PROBLEMI

Da quanto detto emerge che proporre agli studenti l'elaborazione di una Rete di Petri relativa ad un particolare dominio di conoscenza (il contenuto di un teorema o il testo di un problema) significa stimolarli a

- analizzare le informazioni ricevute o i dati del problema;
- individuare quali tra le proprie conoscenze sono correlabili con l'oggetto di studio;
- strutturare (formalizzare) gli elementi del dominio di conoscenza stabilendone le connessioni logiche;
- controllare la correttezza della rete elaborata.

Ci sembra di poter affermare che ciascuna di tali attività, fondamentale nel processo di costruzione e di strutturazione della conoscenza personale [6], sia, per così dire, l'immagine di ciascuna delle fasi proposte da Polya; in questo caso però gli elementi devono essere esplicitati, connessi graficamente, collegati e controllati secondo regole precise.

Esperienza proposta

L'ipotesi di lavoro trae lo spunto dal fatto che nel secondo anno del Liceo Scientifico gli studenti sono spesso chiamati a risolvere problemi riguardanti l'applicazione dell'algebra alla geometria.
Si assegnino alla classe, in lezioni successive, problemi relativi al triangolo rettangolo; per esempio

In un triangolo rettangolo la somma dei lati misura cm. 24 e la somma dei quadrati dei tre lati misura cmq. 200. Determinare l'area del triangolo (dopo aver risolto il problema, costruire la relativa Rete di Petri arrestandosi al secondo livello di raffinamento).

lI problema è di semplice risoluzione; riportiamo il sistema così come potrebbe essere impostato da uno studente:

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 200 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

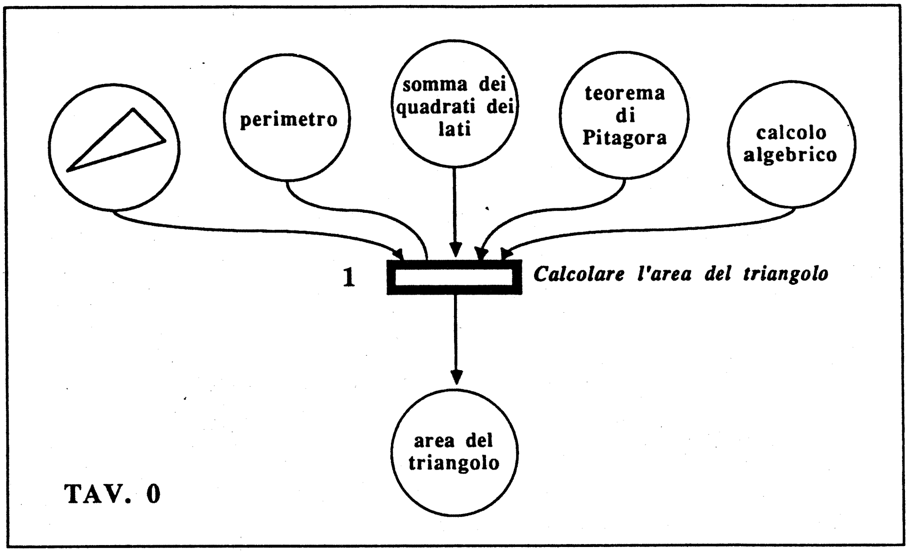
trascurando z, il cui valore non è richiesto dal problema, dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x \cdot y = 48 \end{cases}$$

da cui l'area del triangolo misura cmq. 24.

Nella successiva fase di stesura della Rete di Petri sarà necessario porre particolare attenzione alla relativa descrizione linguistica, dalla quale dovranno emergere tutti i prerequisiti concettuali cui bisogna far riferimento per "attivare la risoluzione del problema".
Ad esempio, riferendosi al problema proposto, non è del tutto corretto indicare genericamente il calcolo algebrico come risorsa d'ingresso, ma se ne devono esplicitare le sole parti utilizzate (sistema simmetrico, equazione associata, equazione di secondo grado, risoluzione dell'equazione di secondo grado mediante la scomposizione in fattori e la legge di annullamento del prodotto, etc).
Allo stesso modo le attività dovranno essere descritte facendo riferimento alle abilità matematiche coinvolte e le risorse, comprese quelle intermedie, dovranno essere discusse, nel senso che sarà necessario stabilire se sono compatibili con i termini del problema e se hanno significato geometrico.
E' chiaro a questo punto che i prodotti terminali della rete rappresentano i risultati richiesti dal problema.

I grafi che seguono mostrano una possibile formalizzazione della procedura di risoluzione del problema.



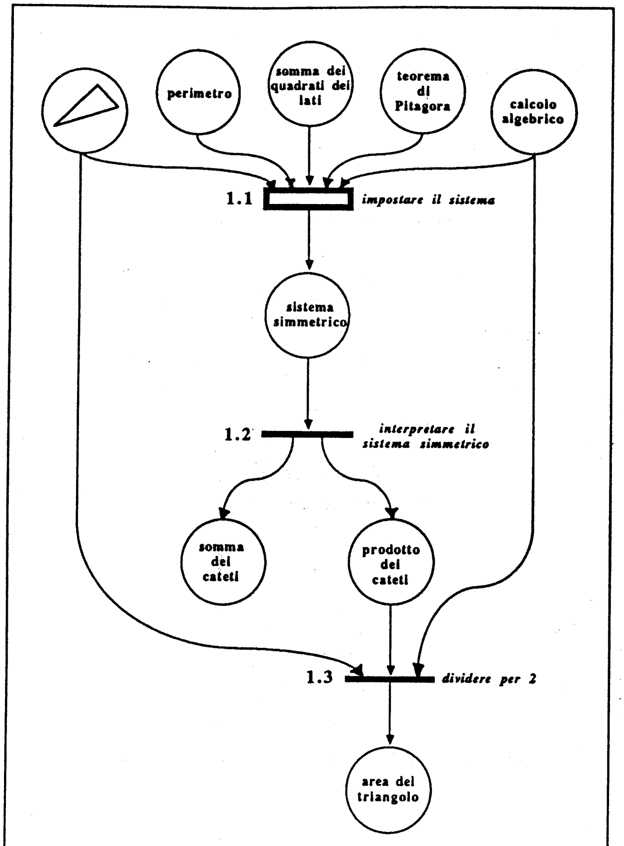
DESCRIZIONE

Rappresentazione generalizzata del modello (Tav. 0).

Attività: Dati il perimetro e la somma dei quadrati dei lati di un triangolo rettangolo, determinare l'area del triangolo stesso.

Risorse di ingresso: il triangolo rettangolo e le relative proprietà, il valore del perimetro, la somma dei quadrati dei lati, il teorema di Pitagora, nozioni di calcolo algebrico (calcolo di radicali, sistemi di secondo grado e/o in somma e prodotto ed equazioni di secondo grado).

Risorse di uscita: il valore dell'area del triangolo rettangolo.



TAV. 1

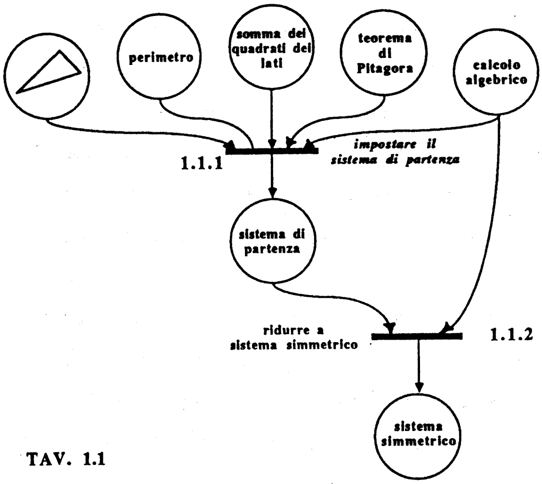
Primo livello di raffinamento (Tav. 1): veduta d'insieme delle attività connesse alla risoluzione del problema.

<u>Attività</u>: impostare il sistema e ridurlo a sistema simmetrico; interpretare il sistema simmetrico ottenuto; calcolare l'area del triangolo rettangolo.

<u>Risorse di ingresso</u>: il triangolo rettangolo e le relative proprietà, il valore del perimetro, la somma dei quadrati dei lati, il teorema di Pitagora, nozioni di calcolo algebrico (calcolo di radicali, sistemi di secondo grado e/o in somma e prodotto ed equazioni di secondo grado).

<u>Risorse intermedie</u>: il sistema simmetrico ottenuto dal sistema di partenza, la somma e il prodotto dei cateti.

<u>Risorse di uscita</u>: il valore dell'area del triangolo rettangolo.



TAV. 1.1

Secondo livello di raffinamento (Tav. 1.1): dal sistema di partenza al sistema simmetrico.

Attività: impostare un sistema a partire dai dati del problema (facendo l'assegnazione delle incognite) e ricondurlo a sistema simmetrico.

Risorse di ingresso: il triangolo rettangolo e le relative proprietà, il valore del perimetro, la somma dei quadrati dei lati, il teorema di Pitagora, nozioni di calcolo algebrico (sistemi di secondo grado e/o in somma e prodotto ed equazioni di secondo grado).

Risorse intermedie: il sistema di partenza.

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 200 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

Risorse di uscita: il sistema simmetrico.

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x \cdot y = 48 \end{cases}$$

Può accadere che problemi espressi in termini differenti utilizzino, per la risoluzione, la stessa relazione o lo stesso teorema; in tal caso le relative Reti di Petri risultano analoghe, talora identiche. Ciò permette di affermare che la rete descrive non solo il procedimento risolutivo di un unico problema ma la struttura del dominio di conoscenza relativo a problemi con stesso schema risolutivo anche se con diversa formulazione o diversi dati numerici.

Se il lavoro di classe viene svolto in modo attivo, richiedendo l'analisi e il confronto delle reti prodotte dai singoli, c'è da attendersi una presa di coscienza degli allievi rispetto alle proprie conoscenze matematiche, al proprio modo di operare e di utilizzare le competenze acquisite.

Infatti usare le Reti di Petri "a posteriori" per descrivere come il problema è stato risolto, induce lo studente a riesaminare il procedimento seguito, avendo cura, per ciascuna tappa, di:

A) individuare le risorse (triangolo rettangolo, teorema di Pitagora, area, perimetro, etc.);

B) definire ciascuna risorsa relativamente all'uso che ne è stato fatto, e cioè:

B.1) assegnazione delle incognite:

- pongo il lato **AB** = **x**, **AC** = **y**, **BC** = **z**, essendo BC l'ipotenusa,
- uso le incognite per esprimere la relazione del teorema di Pitagora,

$$x^2 + y^2 = z^2$$

- uso le incognite per esprimere la prima relazione data dal problema (il perimetro),

$$x + y + z = 24,$$

- uso le incognite per esprimere la seconda relazione data dal problema

$$x^2 + y^2 + z^2 = 200,$$

B.2) individuazione del tipo di sistema ottenuto:
sistema di secondo grado di tre equazioni a tre incognite,

C) per ogni argomento (attività) individuare ed esplicitare i prerequisiti (raffinamento), determinare cioè quali sono le conoscenze minime cui far riferimento al fine di stabilire il grado di dettaglio,

D) evidenziare i possibili schemi alternativi. Il confronto delle reti proposte dagli studenti farà emergere diversi possibili approcci alla risoluzione dello stesso problema, e renderà evidente che in differenti situazioni potrà essere preferibile una impostazione piuttosto che un'altra, nonostante siano entrambe corrette.

2) AUTOVERIFICA DELL'APPRENDIMENTO

E' opinione abbastanza comune che una componente importante del lavoro scolastico sia la produzione originale, da parte dello studente, di materiale che esprima il livello di conoscenza raggiunto rispetto ad uno specifico argomento di studio [7].
Costruire una Reti di Petri richiede l'analisi di tutti gli elementi utilizzati, la verifica della loro interconnessione e l'individuazione delle eventuali risorse sovrabbondanti e/o mancanti (la risorsa x è veramente una risorsa necessaria per l'attività in esame? la risorsa x è disponibile? la risorsa x è sufficiente e/o deve essere utilizzata congiuntamente ad altre risorse?); questo permette al singolo di modellare, affinare e se è il caso correggere il proprio schema concettuale relativamente a uno specifico contenuto.
In tal modo proporre agli studenti la realizzazione di una Rete di Petri su argomenti fondamentali del programma scolastico, significa indurli ad un'autoverifica su temi specifici. Infatti, le difficoltà che occorrono durante la creazione della rete, guidano lo studente

da un lato all'individuazione degli argomenti a lui non noti e tuttavia necessari per la completa e corretta descrizione del dominio in esame e dall'altro alla scelta del "materiale" per il loro recupero (il capitolo del libro, le domande da chiarificatrici da porre all'insegnante, ecc.....).
Esiste un altro aspetto da non sottovalutare. Alcune volte, nonostante la persistenza di carenze di tipo cognitivo, gli studenti riescono ugualmente a risolvere equazioni di secondo grado (complete o incomplete) e a individuare l'insieme di appartenenza delle soluzioni; in questo caso rilevare le carenze sui prerequisiti sarebbe molto difficoltoso. Il fatto invece di dover "mettere su carta" la propria conoscenza, organizzandola e motivandola, favorisce il rilevamento del grado di acquisizione anche dei particolari.
Analogamente la descrizione linguistica, associata a ciascuna fase di raffinamento, è occasione di autoverifica. Infatti il compito di illustrare le singole attività implica la conoscenza di ciò che si deve descrivere e l'acquisizione di un linguaggio proprio relativo al particolare argomento.

3) DALLA RETE DI PETRI ALLA GERARCHIA DI UN DOMINIO DI CONOSCENZE

L'uso qui proposto delle Reti di Petri rappresenta un'applicazione didattica di uno strumento usato in campo informatico per la formalizzazione e la modellizzazione di sistemi. Anche a livello scolastico si può pensare di utilizzare le peculiarità di tale strumento, abituando gli studenti alla scomposizione dei problemi in sottoproblemi e alla gerarchizzazione dei sottoproblemi così individuati.
In questo senso sono già state condotte esperienze basate sull'uso dell'elaboratore finalizzate alla realizzazione di un test diagnostico da parte degli studenti [6]. Il sistema autore impiegato, DELFI [8], richiede la gerarchizzazione del dominio di

conoscenza su cui investigare. E' stato quindi compito degli allievi formalizzare l'argomento del test producendo la gerarchia dei contenuti. L'elaborazione della gerarchia ha evidenziato chiare difficoltà rispetto alla delimitazione del dominio, in particolare nella definizione dei compiti associati a ciascun nodo.
Presumibilmente l'uso delle Reti di Petri avrebbe agevolato tale descrizione fornendone una rappresentazione più completa e leggibile in quanto la struttura stessa della rete avrebbe determinato i confini del contenuto, le relazioni fra i "nodi", i legami logici e di subordinazione esistenti.

CONCLUSIONI

Ci sembra che il compito di costruire una Rete di Petri induca lo studente a prendere coscienza del proprio livello di apprendimento e gli consenta di intervenire in modo attivo nei settori in cui egli rileva delle carenze. In effetti il procedimento di costruzione della rete può essere paragonato all'osservazione di un oggetto con un ingrandimento sempre maggiore. Questo dovrebbe impedire la possibilità di confusione anche tra argomenti che manifestano una certa attinenza. In ogni caso infatti si è obbligati a stabilire, esplicitandoli, i confini entro i quali si opera e a focalizzare le attività da esercitare grazie alle risorse disponibili.
La formalizzazione in termini di Reti di Petri di argomenti particolarmente significativi potrebbe entrare nella prassi didattica. Al termine di un ciclo, biennio o triennio, lo studente sarebbe in possesso, non solo di una serie di schemi che rappresentano l'immagine delle conoscenze acquisite, strutturate secondo dei nessi espliciti, chiari e corretti, ma anche di uno strumento di analisi utilizzabile in diversi campi di applicazione.
In effetti le abilità di

- scomporre un'attività in sottoattività,
- individuare le risorse pertinenti a ciascuna sottoattività e correlarle in funzione degli ulteriori raffinamenti,

- distinguere, in base al prodotto dell'attività, l'assegnazione delle varie risorse,

non sembrano legate esclusivamente alle attività inerenti le discipline di tipo scientifico-matematico ma sono suscettibili di applicazione anche in altri settori, si pensi all'analisi storica o alla linguistica.
L'abitudine all'uso delle Reti di Petri in diversi contesti, anche su argomenti di materie curriculari differenti, probabilmente determinerebbe negli studenti una forma mentis tesa ad economizzare il pensiero, ottimizzando i percorsi e i risultati legati alla matematizzazione del reale. Sarebbe facilitato l'approccio scientifico ai vari oggetti di studio o di ricerca e, senza limitare la creatività tipica del pensiero divergente [9], ne risulterebbe stimolata la focalizzazione e la convergenza su specifici argomenti, ove necessario.

BIBLIOGRAFIA

[1] Comitato per l'aggiornamento dei programmi di Matematica per le scuole Secondarie Superiori: "Nuovi Programmi di Matematica per il biennio della scuola Secondaria Superiore". Roma, 24 Gennaio 1986, Bollettino UMI, 2, Febbraio 1986.

[2] G.Polya, *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, Feltrinelli Editore, Milano 1976.

[3] G.Polya, *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, Vol.I e II, Feltrinelli Editore, Milano 1970.

[4] J.L.Peterson, *Petri net theory and the modelling of systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1981.

[5] M.Ferraris, V.Midoro, G.Olimpo, *Petri Nets as a modelling tool in the development of CAL courseware*, "Computer Education", Vol.8, N.1, pp.41-49, 1988.

[6] A.Di Carlo, M.T.Galizia Angeli, *Un test di valutazione per produrre pensiero matematico: un'esperienza*, VIII Convegno Nazionale Didattico, Atti, Cagliari 28-30/4/1988.

[7] A.Di Carlo, M.T.Galizia Angeli, G.Trentin, *Diagnostic tests in learning evaluation: an alternative use in the knowledge organizing*, VI ICME, Short Communications, Budapest 1988.

[8] M.Ferraris, V.Midoro, G.Olimpo, G.Trentin, *DELFI: un sistema per la valutazione diagnostica dell'apprendimento*, Congresso Annuale AICA, Atti, Vol.1, pp.435-451, Roma 24-26 Ottobre 1984.

[9] A.J. Cropley, *La creatività*, Ed. La Nuova Italia, Firenze 1976.

Fulvia Furinghetti

Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova

UN QUESTIONARIO PER INSEGNANTI DI MATEMATICA DELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

1. Descrizione dei lavori di preparazione del questionario.

Nell'ottobre del 1987 l'I.R.R.S.A.E. Liguria ed il C.I.D.I. di Genova hanno chiesto a me ed al Gruppo Ricerca Educazione Matematica di cui sono responsabile di collaborare, per quanto concerne la parte scientifica, alla preparazione di un convegno sull'insegnamento della matematica nei *bienni della scuola secondaria superiore*.

Tra le attività che abbiamo impostato nell'ambito di questa consulenza si colloca la redazione del questionario oggetto di questa nota. Ad esso invero avevamo già precedentemente pensato come punto di partenza per un lavoro di studio che stiamo conducendo sulla costruzione di curricula del biennio, alla luce delle proposte dei *nuovi programmi* e dei tentativi di corsi *sperimentali*, conseguenti al *Piano Nazionale Informatica*.

Il lavoro di preparazione del questionario si è svolto mediante vari pomeriggi di studio, in cui si sono vagliate le possibili linee di ricerca, sulla base della letteratura internazionale sull'argomento.

Gli aspetti essenziali della filosofia che sottende il questionario, risultato finale di questo lavoro, sono esposti in /C-F 89/.Ne segnaliamo qui di seguito solo due punti che riteniamo caratterizzanti. Il primo concerne le *problematiche metodologiche* dell'insegnamento. Infatti sottolineiamo che volutamente abbiamo un po' tralasciato il discorso sui contenuti, che invece è al centro di altri questionari (per esempio /C-M 88/), poichè ci pare che a proposito dei nuovi programmi del biennio la preoccupazione sui nuovi contenuti, in particolare computer ed informatica, abbia messo in ombra i problemi di insegnamento-apprendimento della matematica che non concernono solo questo nuovo nei contenuti, ma anche la concezione globale dell'insegnante sul "fare matematica" nel biennio.

Il secondo punto è quello *educazionale* nel senso che si è considerato come obiettivo indagare su ciò che l'alunno della fascia d'età 14-16 anni può ragionevolmente apprendere piuttosto che ciò che sarebbe ideale (per l'insegnante o per la comunità matematica) che apprendesse.

Ai lavori di studio sui curricula che hanno portato al questionario hanno partecipato le insegnanti: Ivana Chiarugi, Anna Cuttica, Silvia Focardi, Graziana Gazzolo e, parzialmente Maria Masella. Esse sono professori ordinari di matematica nel biennio o nel quinquennio della superiore ed hanno anche fatto esperienza di insegnamento nella secondaria inferiore. La stesura finale del questionario è dovuta quasi totalmente a Ivana Chiarugi. All'inizio di gennaio 1988 abbiamo passato all'I.R.R.S.A.E. il testo del questionario. Tale ente, nelle persone dei professori Salvatore Cosma e Luigi Cuccurullo, ha curato la stampa (apportando alcune modifiche) e la distribuzione. Il professor Cosma ha curato la raccolta dei dati (febbraio 1989).

Il questionario è stato distribuito nei 108 istituti statali e 50 istituti privati della Liguria, purtroppo non ai singoli insegnanti, ma invitando le segreterie a farne fotocopie. Per questa ragione il dato di quanti insegnanti hanno risposto in rapporto al numero totale degli insegnanti della regione non è significativo di un eventuale non coinvolgimento poichè sono intervenuti fattori di tipo organizzativo quali collaborazione del preside, della segreteria, del personale,... . Probabilmente questo elemento ha anche un risvolto positivo poichè più insegnanti hanno collaborato a rispondere ad uno stesso questionario e quindi esso ha assolto alla sua originaria funzione di canovaccio di lavoro. Inoltre il campione che ha fornito le risposte può esser ritenuto più significativo poichè si è aggirato il fenomeno di "trascinamento ambientale" per cui in una stessa scuola tende a formarsi un unico orientamento di opinioni per influenze e condizionamenti reciproci di varia natura (abbiamo lavorato per classi di equivalenza).

Il questionario è stato distribuito anche ai partecipanti "non liguri" al convegno "Matematica oggi: dalle idee alla scuola" (Genova, aprile 1988).

2. Brevi note tecniche sul lavoro di redazione del questionario.

Poichè il questionario è nato oltre che come strumento di indagine, come strumento di lavoro per la discussione di nuovi curricula, si è scelto come forma di esposizione uno stile abbastanza "colloquiale" per poter afferrare quanti più possibili aspetti di una situazione ed instaurare una sorta di dialogo con l'interlocutore insegnante. Purtroppo abbiamo messo solo poche domande a risposta aperta , che invero sarebbero più interessanti, poichè abbiamo voluto evitare i ben noti inconvenienti nello spulcio delle risposte /C 88/, /B-P 88/. Questo nostro stile colloquiale ha comportato un numero molto alto di domande articolate a loro volta in sottodomande calibrate al fine della maggiore esaustività possibili. Il tutto deve aver richiesto tempo ed impegno agli insegnanti che hanno risposto, tanto che scherzosamente un mio collega ha osservato che il nostro più che un questionario è un corso d'aggiornamento mascherato da questionario. Malgrado ciò qualche intervistato ci ha fatto rilevare (giustamente) delle carenze ed avrebbe voluto un ulteriore raffinamento delle risposte. Per esempio, un insegnante ha scritto nello spazio riservato alle osservazioni che la risposta corretta alla domanda 3.2 argomento 4 (equazioni e sistemi di equazioni di grado superiore riconducibili al primo e secondo grado) è "non debbono essere svolti ma non "perchè non adeguati all'età dell'alunno" (motivazione A), bensì "perchè inutili" (motivazione da noi non segnalata esplicitamente). D'altra parte nelle nostre intenzioni tale motivazione era implicitamente espressa da B ("si possono svolgere se c'è tempo").

3. Dati grezzi raccolti.

Prima di esporre i dati raccolti espongo brevemente alcune osservazioni sui due campioni di indagine. Mi sembra che essi possano essere ragionevolmente accostati, poichè si tratta di insegnanti in entrambi i casi motivati, che si sono preoccupati di rispondere, sobbarcandosi un ulteriore lavoro. Molti insegnanti della Liguria hanno partecipato al convegno, ma sono stati invitati a non rispondere una seconda volta se avevano già precedentemente risposto.

I dati di seguito riportati si riferiscono a questi due campioni e mi sembra possano essere significativi per chi si occupa di *problemi di insegnamento della matematica*. Essi si configurano come una fotografia di un aspetto del mondo scolastico in relazione alla matematica al momento della discussione dei nuovi programmi per il biennio.

Per considerazioni a margine di questi risultati e correlazioni significative, di cui ho fatto cenno nella mia comunicazione orale al convegno sull'insegnamento della matematica di Sorrento rimando a miei scritti successivi. Aggiungo solo che ho messo in bilancio che qualcuna delle risposte non sia del tutto sincera (magari anche solo a livello inconscio). Anzi, quando si passa a confrontare tra di loro le risultanze di certe domande collegate si nota talvolta contraddizione. Allora il questionario, più che una foto di gruppo della situazione, dà la misura del sogno di quello che l'insegnante vorrebbe fosse il suo insegnamento rispetto a quello che le circostanze permettono che esso sia.

Numero totale questionari esaminati 414, di cui 79 di partecipanti al convegno, prov. Genova 156, prov. Imperia 70, prov. La Spezia 50, prov. Savona 69.

Docenti solo del corso di matematica		*353*
"	*anche di fisica*	*45*
"	*di informatica*	*16*

Bibliografia.

/B-P 88/ E. Ballatori- M.A. Pannone, *Didattica della probabilità e della statistica nella scuola statistica nella scuola dell'obbligo*, Edizioni scolastiche B. Mondadori, Milano, 1988.

/C-M 88/ A. Ceretto - A.M. Marin,*"Indagine sui prerequisiti ideali per l'accesso ad un tirennio di un Istituto Secondario Superiore"*, 1988.

/ C 88/ J. Chastenet de Gery, "Faut-il qu'un questionnaire soit ouvert ou fermé?", *Actes du Colloque International "Formation, évaluation, sé- selection par questionnaires fermés"* Marne-la-Vallée, 1988,pp 62-67.

/C-F 89/ I. Chiarugi-F. Furinghetti, "La Matematica nei bienni: nuovi programmi e vecchi problemi. Presentazione di un questionario di indagine su questo tema", in a cura di Fulvia Furinghetti *Matematica oggi: dalle idee alla scuola* , B. Mondadori, Milano, 1989.

Ringrazio di cuore il segretario generale dell'I.R.R.S.A.E. Liguria professoressa Maria Pia Bozzo per aver favorito questa ricerca. Ringrazio per la collaborazione paziente la dottoressa Venera Molino e la signora Gianna Bacin che mi ha aiutato nella raccolta di alcuni dati.

I DATI RIPORTATI SONO QUELLI FORNITIMI DALL' I.R.R.S.A.E. LIGURIA CHE HA IN DEPOSITO I QUESTIONARI. SE AVRO' LA POSSIBILITA' DI PRENDERNE VISIONE COMPLETERO' IL QUADRO DEI DATI.

IRRSAE-Liguria

GRUPPO RICERCA EDUCAZIONE MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI GENOVA

QUESTIONARIO

su "L'insegnamento della matematica nei bienni delle Scuole Secondarie Superiori"

Destinatari: Docenti di Matematica del biennio e del triennio

Presentazione:

Il presente questionario ha lo scopo di raccogliere opinioni sull'insegnamento della Matematica nel biennio della Scuola Secondaria Superiore.

Dalle risposte noi cercheremo di dedurre non tanto qual è la situazione attuale dell'insegnamento della matematica nella scuola, quanto le opinioni e le aspettative degli insegnanti sulle prospettive di cambiamento (entrata in vigore dei nuovi programmi ecc.).

Sono graditi commenti, osservazioni, aggiunte, proposte di ulteriori domande che puoi segnare nello spazio bianco in fondo.

Ovviamente ogni eventuale elemento atto all'identificazione non sarà reso noto.

Dei risultati complessivi del questionario, verrà data ampia diffusione.

Istruzioni

Barrare le caselle che interessano. Per talune domande è possibile scegliere anche più di una risposta.

Grazie per la collaborazione e buon lavoro...

PARTE 0
Domande di carattere informativo

0.1. Nome della Scuola ______________________________

0.2. Laurea ______________________________

0.3. Tipo di Scuola ______________________________

0.4. Insegni nel biennio e/o nel triennio |B| |T|

0.5. Da quanti anni insegni? |____|

0.6. Sei titolare solo del corso di Matematica? 353 |SI| |NO|

Se NO:

0.7. di Fisica 45 |SI|, 0.7.1. di Informatica 16 |SI|

0.8. Libri di testo di Matematica attualmente usati nelle tue classi ______________________________

0.9. In caso di entrata in vigore dei nuovi programmi e/o del tuo inserimento in corsi sperimentali, quali libri di testo di matematica tra quelli attualmente pubblicati, riterresti opportuno adottare?

____

____

0.10. Hai seguito o stai seguendo il corso di formazione relativo al "Piano Nazionale di Informatica"? 174 |SI| |NO|

0.11. Hai già introdotto nozioni di Informatica nel tuo corso di Matematica? 135 |SI| |NO|

0.12. Hai già usato Software Didattico? 87 |SI| |NO|

0.13. Stai svolgendo un programma di tipo sperimentale? 129 |SI| |NO|

Se SI:

0.14. Collegato con il P.N. Informatica? 82 |SI| |NO|

PARTE 1
Domande a carattere generale

1.1. Conosci i programmi di Scienze Matematiche-Fisiche-Chimiche-Naturali della Scuola Media di 1° grado entrati in vigore nel 1979?

272 |SI| |NO|

1.2. Ritieni necessario un lavoro di raccordo tra scuola media di 1° grado e il Biennio della Secondaria Superiore? 325 |SI| |NO|

1.3. Sei a conoscenza dell'esistenza dei nuovi programmi del Biennio?

334 |SI| |NO|

Se SI:

1.4. Conosci i testi di tali programmi? 277 |SI| |NO|

1.5. Ritieni che l'insegnamento della matematica nel Biennio debba essere lo stesso in ogni tipo di scuola? |SI| |NO|

1.6. Ritieni che l'insegnamento della matematica nel Biennio e nel Triennio debba avere caratteristiche diverse e una sua finalizzazione in parte autonoma? 295 |SI| 46 |NO|

Se NO:

1.7. La "diversità" non è possibile per motivi:
- pedagogici (in relazione all'età) |_|
- di contenuti diversi |_|
- metodologici (alternanza insegnanti) |_|

(barrare la casella interessata)

1.8. Pensi sia produttiva una attività interdisciplinare nel biennio?

353 |SI| 43 |NO|

1.9. Ritieni che nel biennio sia utile un laboratorio di informatica?

290 |SI| 53 |NO|

1.10. Conosci, almeno a grandi linee, i progetti innovatori presenti a livello nazionale?

1. L. LOMBARDO RADICE 212 |SI| 143 |NO|
2. G. PRODI 171 |SI| 155 |NO|
3. F. SPERANZA 105 |SI| 191 |NO|
4. B. SPOTORNO-VILLANI 206 |SI| 141 |NO|

1.11. Pensi che l'ambiente scolastico (opinioni e comportamenti dei colleghi, atteggiamenti dei genitori, comportamenti del capo di Istituto, ecc.) influenzi il tuo modo di lavorare? 22 |SI| |NO|

Se SI:

- positivamente |_| (puoi fare qualche esempio) ____________________

____

____

- negativamente |_| (puoi fare qualche esempio) ____________________

____

____

1.13. Ritieni che la programmazione didattica sia un problema importante nel tuo lavoro? 232 |SI| 54 |NO|

1.14. Pensi che una preparazione di tipo pedagogico gioverebbe al tuo lavoro di insegnante? 215 |SI| 132 |NO|

1.15. Ritieni che la valutazione sia un problema "centrale" nel tuo lavoro? 250 |SI| 156 |NO|

PARTE 2
Domande su abilità e conoscenze da acquisire nel biennio?

2.1. Quando inizi il tuo lavoro nel Biennio dai per acquisite certe conoscenze?
272 SI 69 NO

Se SI:
2.2. Ad esempio, quali delle seguenti?

- Le quattro operazioni con i numeri decimali: scelte delle operazioni nella risoluzione dei problemi; tecnica di calcolo scritto delle operazioni ☐
- Proporzioni ☐
- Percentuali ☐
- Proporzionalità diretta ☐
- Proporzionalità inversa ☐
- Ordine di grandezza ☐
- Le approssimazioni numeriche ☐
- Sistemi di numerazione in base diversa da dieci ☐
- Calcolo di espressioni con le frazioni ☐
- Calcolo con le lettere ☐
- Assi cartesiani ☐
- Grafici di fenomeni empirici ☐
- Grafici di semplici funzioni ☐
- Calcolo di perimetri ed aree ☐
- Qualche enunciato di teorema ☐
- Qualche enunciato di teorema di geometria euclidea ☐
- Conoscenza delle trasformazioni geometriche elementari ☐
- Uso, anche se "non critico" della calcolatrice tascabile non programmabile ☐

Uso dei primi elementi di programmazione di un calcolatore ☐

Concetto intuitivo di diagramma di flusso (es. Ricette ecc.) ☐

Elementi di base dei linguaggi degli insiemi: unione, intersezione... ☐

Padronanza dei significati di alcuni quantificatori: ∀, ... ☐

Equazioni di primo grado ☐

Elementi di statistica descrittiva ☐

Elementi di probabilità ☐

Se NO:

2.3. Ritieni tuo compito riprenderle in considerazione e se necessario costruirle? 178 SI NO

2.4. Tra le seguenti "filosofie" di lavoro nel Biennio qual è la più vicina alla tua? 287 A 178 B C

A Il lavoro didattico deve essere finalizzato soprattutto all'acquisizione di tecniche di calcolo e all'acquisizione di procedimenti risolutivi, poiché tutto ciò è propedeutico agli anni successivi e nello stesso tempo contribuisce a sviluppare nello studente abilità matematiche e disciplina mentale.

B Nella scelta dei contenuti e dell'itinerario didattico l'obiettivo principale è sviluppare le capacità di ragionamento e di lavoro autonomo dello studente, senza curarsi se qualche nozione "tradizionale" è trascurata. Infatti: - o lo studente imparerà tali nozioni al momento in cui esse saranno utili (grazie alla acquisita maturità), - o non capiterà mai allo studente di averne bisogno (e, allora, perché impararle?).

C L'insegnamento della matematica nel biennio della secondaria superiore deve mirare, prioritariamente, alla maturazione concettuale degli elementi di base della matematica in previsione della continuazione degli studi (anche differenziati) del triennio.

D Il lavoro didattico deve mirare a un compromesso tra:

A e B ☐
A e C ☐
A e B e C ☐

2.5. Qual è la tua opinione sulle conoscenze e sulle capacità (1) (2) (3) (4) nel biennio?

[A] non devono essere acquisite (perché richiedono tempo che va a scapito di altre attività più importanti)

[B] non possono, in generale, essere acquisite (perché non in sintonia con il normale sviluppo intellettivo dello studente)

[C] si possono acquisire nel Biennio oppure recuperare in seguito al momento opportuno

[D] devono essere acquisite a questa età proprio perché la loro acquisizione è peculiare di questa età (in seguito non si recuperano)

[E] devono essere acquisite, perché poi nel triennio saranno supposti noti

(1) Competenze di calcolo	A	B	C	D	E
-manipolazione di espressioni numeriche elementari		1	8	156	277
-espressioni elementari con lettere		1	2	116	247
-manipolazione di espressioni numeriche di media complessità			148	46	83
-manipolazioni di espressioni con lettere			196	66	99
-manipolazione di espressioni numeriche comunque complesse			10	110	232
-manipolazione di espressioni con lettere comunque complesse			34	36	218
-uso "ragionato" della calcolatrice tascabile non programmabile			122	40	57

(2) Conoscenze di tecniche risolutive	A	B	C	D	E
-algoritmi di base. Esempi: soluzioni di equazioni e disequazioni; soluzione di sistemi lineari per sostituzione; moltiplicazioni e divisioni di polinomi di grado qualunque; ...			20	113	298
-altri algoritmi più sofisticati che rendono più elegante e rapida in certi casi la soluzione dei problemi . Esempi: Regole di Ruffini, alcuni artifici per risolvere alcuni tipi di sistemi; equazioni; ...)			22	48	83
-Risoluzione per "via grafica" di equazioni e disequazioni			221	68	183

(3) Conoscenza di concetti (in riferimento all'età in oggetto) 185 hanno risposto

-Rappresentazione posizionale dei numeri	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-proprietà delle operazioni e degli insiemi numerici	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-errore	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-radici di un'equazione	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-sistemazione assiomatica di argomenti matematici	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-relazioni, corrispondenze e funzioni	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-luogo geometrico	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-invariante di una trasformazione	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-elemento di separazione tra due classi contigue	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-congiunzione e disgiunzione alternativa di due proposizioni	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-algoritmo	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-sintassi e semantica di un linguaggio	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-modello deterministico di un fenomeno reale	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-modello non deterministico di un fenomeno reale	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-probabilità e frequenza di un evento	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]

(4) Capacità di apprendimento

-saper ripetere una spiegazione	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-saper fare un esercizio analogo ad altri già fatti	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-saper fare una dimostrazione analoga ad altre già fatte	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-saper applicare una spiegazione appena udita alla soluzione di un esercizio	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-anticipare con un ragionamento deduttivo lo sviluppo di una spiegazione	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-generalizzare una proprietà	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-sapersi destreggiare in un esercizio o in una dimostrazione assolutamente nuovi	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
-saper utilizzare le nozioni acquisite per costruire un modello matematico di un fenomeno reale	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]

PARTE 3

Domande sugli argomenti da trattare nel Biennio

3.1. Tra i seguenti "orientamenti possibili" di lavoro quali sono quelli più vicini ai tuoi?

36 [A] 90 [B] 20 [C] 40 [D] 314 [E] 70 [F] 117 [G] 234 [H]

(sono possibili più risposte)

[A] L'importante è che nel biennio ci sia una selezione "attitudinale alla matematica"; non importa su quali argomenti gli studenti lavorano

[B] L'importante è che nel biennio gli studenti lavorino seriamente, non importa su quali argomenti

[C] E' sufficiente che nel biennio gli studenti imparino i primi elementi del programma tradizionale

[D] Nel biennio gli studenti devono imparare approfonditamente il programma tradizionale

[E] Il programma tradizionale va integrato con argomenti più vicini al recente sviluppo della matematica, dopo averlo depurato delle incrostazioni inutili.

[F] Tutta l'impostazione dell'insegnamento attuale va rivista per quanto riguarda i contenuti

[G] Tutta l'impostazione dell'insegnamento attuale va rivista per quanto riguarda la metodologia

[H] Per essere più interessante sviluppare il programma mediante itinerari didattici che mettano in relazione alle varie parti della matematica (geometria, algebra, ...)

3.2. Ritieni che nel biennio gli argomenti 1...18 413 hanno risposto

[A] non debbano essere svolti (perché non adeguati all'età dell'alunno)

[B] si possono svolgere se c'è tempo

[C] dovrebbero essere svolti nelle loro linee essenziali

[D] dovrebbero essere svolti approfonditamente in quanto forniscono un modello di ragionamento matematico di base sfruttabile anche in altri ambiti

[E] dovrebbero essere svolti approfonditamente perché occorre acquisire una elevata manualità necessaria nel triennio

1. proprietà del campo reale	48 A	15 B	191 C	75 D	40 E
2. scomposizione in fattori di un polinomio	25 A	2 B	131 C	67 D	188 E
3. equazioni letterali con discussione	26 A	10 B	168 C	103 D	63 E
4. equazioni e sistemi di grado superiore riconducibili al I e II grado	8 A	75 B	153 C	60 D	153 E
5. calcolo approssimato	A	B	C	59 D	182 E
6. equazioni di grado qualsiasi	3 A	80 B	156 C	94 D	11 E
7. calcolo proposizionale	A	B	C	D	E
8. linguaggi di programmazione	A	B	C	D	E
9. strutture dei dati	A	B	C	D	E
10. uso del calcolatore nella risoluzione di certi problemi matematici	A	B	C	D	E
11. geometria euclidea	8 A	13 B	161 C	156 D	44 E
12. trasformazioni geometriche	A	B	C	D	E
13. metodo delle coordinate	A	B	C	D	E
14. elementi di teoria degli insiemi	A	B	C	D	E
15. probabilità	A	B	C	D	E
16. statistica descrittiva	A	B	C	D	E
17. storia della matematica	A	B	C	D	E
18. elementi di algebra lineare (vettori, matrici)	A	B	C	D	E

Nucleo di Ricerca didattica

Dipartimento di Matematica - Modena

IL TEOREMA DI CARNOT NELLA "GEOMETRIE DE POSITION"

A) Gli studi di storia della matematica arricchiscono notevolmente la preparazione degli insegnanti. Collocare concetti e teorie nello spazio culturale dell'epoca in cui si sono formati permette di approfondirne il significato, di comprendere meglio il valore e la portata degli "errori", la necessità e i limiti della ricerca di rigore, il ruolo della evidenza intuitiva e della dimostrazione.

Naturalmente, non sosteniamo affatto che durante la lezione ci si deva far carico di tutto lo spessore storico dei concetti e delle teorie: ciò esporrebbe a un sicuro fallimento. Siamo però convinti che la lezione migliora se anche l'insegnante di matematica è in grado di percepire questo spessore, se è abituato a leggere e interpretare i testi classici. Questo infatti non solo produrrebbe i benefici indiretti che sempre derivano da un aumento di consapevolezza e da una più ampia qualificazione; ma avrebbe anche ricadute didattiche immediatamente efficaci in almeno tre direzioni:

- La storia è una sorgente inesauribile di problemi e suggerimenti concreti; gli ostacoli epistemologici superati nella costruzione delle scienze matematiche corrispondono spesso puntualmente ad altrettante difficoltà che si presentano nel processo di apprendimento. E' così possibile elaborare percorsi didattici particolarmente vantaggiosi a cui difficilmente si sarebbe pervenuti per altra via.

- Il passaggio dal presente al passato e viceversa instaura un circolo ermeneutico che non solo rende più avvincente il discorso, ma esige di collegare la matematica alle altre attività umane e in definitiva la mette in rapporto più stretto con la realtà.

- La lettura in classe dei testi originali è una esperienza di grande interesse: integrata alle normali lezioni può essere di stimolo per aprirle ad attività transdisciplinari (con l'eventuale contributo di altri docenti). Non è inoltre raro che per questa via si giunga a una maggiore generalità in alcuni enunciati fondamentali.

Lo specifico della nostra ricerca didattica deriva dal fatto che solo alcuni dei testi che l'insegnante può (e deve) leggere sono direttamente affrontabili in classe; la maggior parte richiede trascrizioni e commenti per mediare la durezza dell'impatto (diversità di linguaggio e notazioni simboliche, ma soprattutto di condizionamenti culturali).

B) Un esempio. Si propone agli insegnanti di presentare il Teorema di Carnot attraverso idee e letture prese dalla "Géométrie de Position" (1803): un'opera scritta con intenti esplicitamente didattici, tenendo presenti gli allievi dell'"Ecole Polytechnique". Essa costituisce uno dei punti di convergenza dei percorsi storici (tutti strettamente collegati ai temi che si trattano nella scuola superiore) che hanno portato alla armonizzazione dei rapporti tra algebra e geometria, al chiarimento del concetto generale di numero, alla sistemazione rigorosa dei fondamenti del calcolo infinitesimale. Entro il conflitto algebra-geometria il concetto di "quantità negativa" ha avuto un ruolo importante come generatore di crisi. In una ottica di realismo geometrico intuitivo (la concezione della matematica dominante a quell'epoca, almeno fino a Cauchy compreso, era di tipo fortemente contenutistico) questo concetto di "quantità negativa" non appariva infatti controllabile con la teoria delle proporzioni, incrinava la coerenza delle operazioni di confronto fra grandezze, ecc. (Cfr. "Dissertazione preliminare" e, ivi, le citazioni dalla "Encyclopédie").

Carnot intende rimettere a posto le cose senza rinunciare ai vantaggi dell'algebra (ormai la geometria euclidea -per varie ragioni- ha perduto irreversibilmente il ruolo di modello insuperabile di rigore così a lungo mantenuto). Per raggiungere lo scopo, egli si appoggia su due convinzioni profonde: - che una espressione matematica ha valore solo nella misura in cui rappresenta una <u>operazione</u> ben determinata; - che è opportuno, se ciò giova alla chiarezza, introdurre anche nella matematica pura considerazioni <u>cinematiche</u> sul movimento e la velocità.

Sono proprio queste sue convinzioni (la seconda delle quali, benché si fondasse su una ormai solida tradizione, ancora duramente contestata ai suoi tempi) che danno ai suggerimenti di Carnot una valenza didattica attuale, tanto più in quanto possiamo discuterne pregi e limiti alla luce delle nostre consapevolezze.

Il metodo ideato da Carnot per chiarire il concetto di quantità negativa (e per scorprire nuove relazioni e proprietà) è basato sulla distinzione tra valore e quantità, sull'uso di sistemi correlativi che si trasformano l'uno nell'altro "per gradi insensibili" (gioca qui in modo essenziale l'idea di continuità; inoltre l'analisi di tali movimenti di trasformazione gli consente di portare il discorso sul concetto di infinitesimo e sul calcolo infinitesimale), sulla definizione di grandezze inverse, sulla interpretazione dei segni come segni di correlazione.

Seguiremo brevemente, nelle sue tappe principali(*), l'esposizione di Carnot, sottolineando l'interesse del doppio movimento che conduce dal particolare al generale e viceversa, sia per via cinematica che con manipolazioni algebriche.

Il linguaggio del nostro autore, talvolta ancora legato a moduli espressivi mutuati dalla teoria delle proporzioni e ora in disuso, è sempre assai semplice: non di rado, insistentemente ripetitivo. Così la lettura in classe, se guidata con opportuni commenti, presenta solo modeste difficoltà. Le considerazioni svolte in A) trovano qui piena conferma.

(*) Brani e paragrafi tradotti:

- Dalla "Dissertazione preliminare": pp. 1-10; 18-23;
- Dalla "Conclusione": par. 435, pp. 480-483;
- Dalla "Introduzione": par. dal 2 all'8 compreso;
- Dalla "Sezione prima": parr. dal 9 all'11; dal 19 al 32; dal 48 al 52;
- Dalla "Sezione seconda": parr. 78, 87, 146, 147, 163, 254, 255, 257, 258, 259, 260.

(**ED. CRAPELET-DUPRAT, PARIS XI-1803**)

Questi brani e paragrafi sono il minimo che l'insegnante dovrebbe leggere. Il Teorema di Carnot si trova illustrato nella sezione seconda: parr. 146, 147, 163 (primo metodo); par. dal 254 al 260 (secondo metodo).

Nucleo di Ricerca didattica

Dipartimento di Matematica - Modena

MATERIALI DIDATTICI PER LO STUDIO DELLE OMOLOGIE AFFINI

A) - Attraverso la osservazione guidata delle ombre solari, si illustrano alcune caratteristiche del processo che conduce da una situazione concreta a un modello matematico astratto (e, inversamente, da questo a una sua interpretazione particolare).

Come tappa intermedia, si è utilizzata la costruzione di modelli fisici: sottolinenado, anche per questa via, la necessità di semplificare e schematizzare i fenomeni attraverso la scelta delle idee e conoscenze da formalizzare nel modello, che non è dunque una semplice "descrizione" delle esperienze eseguite.

I materiali presentati possono trovare impiego:

- sia per legare alla realtà e fissare nella memoria nozioni acquisite attraverso una presentazione formale di tipo deduttivo;

- sia per introdurre allo studio delle equazioni catesiane di una omologia affine procedendo dal concreto all'astratto.

Nella presente esposizione è privilegiato quest'ultimo itinerario: ma sono ovvie le modifiche occorrenti nel caso si preferisca il primo. Come prerequisiti, si presuppongono nozioni elementari sulle trasformazioni puntuali tra piani sovrapposti (isometrie, omotetie, similitudini); i concetti di raggio luminoso e di proiezione.

Tenuto conto del livello di età, si è poi arrestato il discorso nel momento in cui si doveva affrontare la cinematica delle ombre, facendo riferimento ai gruppi continui di trasformazioni. Il tema potrà eventualmente essere sviluppato, a partire dalle premesse qui poste, nel triennio successivo.

- Si è voluto anche mostrare che un approccio multimediale può vivacizzare la lezione, rendere più attraente il luogo di lavoro, sollecitare curiosità, arricchire di contenuti intuitivi i concetti astratti. In ciò consiste l'insostituibile vantaggio delle aule attrezzate per la produzione e l'uso dei materiali.

La povertà dei mezzi e delle tecniche è una scelta precisa: che rende agevole -e di basso costo- riprodurre, modificare, sostituire tutti gli oggetti che servono di "supporto" al discorso qui sviluppato. Poiché infatti la progettazione e la realizzazione di questi oggetti (se avviene anche con il contributo -che deve essere richiesto e attentamente considerato- degli studenti) sono momenti altamente significativi nelle attività di studio e di apprendimento, appare giusto che sia favorito il continuo rinnovarsi del materiale didattico.

B) DIAPOSITIVE:

- Prima serie: si fa notare che a causa della grande distanza a cui ci si trova dal sole, i raggi proiettanti sono (quasi) paralleli; che esiste una corrispondenza oggetto-ombra; che questa corrispondenza è molto complicata. Ciò che viene proiettato è infatti il contorno apparente degli oggetti reali.

- Seconda serie: si può tentare una semplificazione scartando gli oggetti naturali o di uso comune e sostituendoli con modelli fisici di solidi geometrici. Ma la difficoltà non è risolta. Solo il caso della sfera appare "semplice".

- Terza serie: si ricorre allora a profili di metallo o legno, modelli fisici di figure bidimensionali. Muovendoli liberamente nello spazio, si nota un collegamento più stretto tra forma dell'oggetto e forma dell'ombra (analisi di alcuni invarianti). E' in generale più facile che nei casi precedenti risalire dall'ombra al tipo di oggetto che viene proiettato (però si presentano degenerazioni).

- Quarta serie: usando il sole, è impossibile cambiare la posizione della sorgente in tempi brevi; questo si può invece fare in laboratorio, dove è anche agevole mutar giacitura al "piano di arrivo". (Ancora: analisi di alcuni invarianti).

- Quinta serie: nelle esperienze precedenti, la legge di corrispondenza oggetto --> ombra (piano di "partenza" --> piano di "arrivo") era funzione del tempo. Ma vincolando l'oggetto a un piano fisso (per es.: lastra di vetro) e bloccando in posizione fissa anche sorgente e piano di arrivo, quella legge di corrispondenza risulta indipendente dal tempo. Comportamento dell'ombra in questo caso. Compare una retta luogo di punti uniti.

- Sesta serie: ruotando il piano di partenza attorno alla retta luogo di punti uniti, la legge di corrispondenza oggetto ombra torna ad essere funzione del tempo; si perviene, in modo continuo, dalla corrispondenza iniziale alla identità (quando i piani sono sovrapposti).

- Settima serie: si può tuttavia operare in modo da ritrovare la corrispondenza iniziale anche dopo la sovrapposizione dei piani. Basta materializzare l'ombra (prima di dare avvio alla rotazione) ricalcandola per esempio con un pennarello.

E' inoltre possibile spostare la sorgente in modo da compensare il moto rotatorio del piano di partenza attorno alla retta luogo di punti uniti, per far sì che l'ombra proiettata sia -durante tutta la rotazione- sempre quella che aveva prima che tale rotazione incominciasse (e quindi la legge di corrispondenza oggetto ombra sia di nuovo indipendente dal tempo). Questa possibilità si coglie subito costruendo:

- MODELLI FISICI A FILI TESI: si noti che, una volta sovrapposti i due piani (quello di partenza e quello di arrivo) nessuna interpretazione di tipo ottico è più possibile. Ma i modelli fisici considerati realizzano corrispondenze non necessariamente legate all'interpretazione ottica. Definizione e classificazione delle omologie affini attraverso la manipolazione dei modelli a fili tesi. Rapporto di omologia. Inizia qui il processo di formalizzazione.

- LUCIDI (per lavagna luminosa) - prima serie: dedicata alle costruzioni grafiche; - seconda serie: dedicata alla deduzione delle equazioni; - terza serie: dedicata al significato geometrico del determinante di una omologia affine.

- COMPUTER: in possesso delle equazioni dell'omologia affine, si possono trasformare figure più complesse e immagini di funzioni con l'aiuto di un plotter. Alcuni esempi danno origine a una ottava serie di diapositive.

- Un FILM CONCLUSIVO ripercorre tutto il precedente itinerario con immagini in movimento. In più, mostra come verificare che la trasformata F' di una figura F (piana) mediante le equazioni di una omologia affine, costituisce effettivamente un' ombra solare di questa figura: a quali condizioni?

Ada Sargenti
ITIS "G.B. Pininfarina", Moncalieri (Torino)

UN APPROCCIO EURISTICO ALLA GEOMETRIA ANALITICA E ALL'ANALISI MATEMATICA*

Premessa

L'introduzione dell'Informatica nella didattica della Matematica riveste una doppia valenza. Può infatti contribuire a sviluppare l'abitudine al rigore logico e formale, anche al di fuori dell'ambito strettamente teorico dell'insegnamento della Matematica, ma può fornire altresì un valido supporto per una modifica di metodologie didattiche, che pur non tralasciando il momento ipotetico-deduttivo, valorizzino anche la ricerca e l'induzione.

La sperimentazione che viene presentata fa riferimento a questo secondo utilizzo.

Problemi di metodologia nell'insegnamento dell'analisi

Al contrario di quanto comunemente si pensa (è interessante a questo proposito osservare come la ricerca in campo didattico sia ampia per quel che riguarda la scuola dell'obbligo, scarsa per il biennio della secondaria superiore, praticamente inesistente per il triennio), i problemi di metodologia nell'insegnamento della Matematica nelle classi terminali delle superiori sono tutt'altro che trascurabili. Specialmente per quel che riguarda l'Analisi i testi propongono schemi che ricalcano fedelmente testi universitari, senza tener assolutamente conto delle diverse capacità in studenti di età differenti. Del resto i concetti di derivata e integrale vengono utilizzati abbondantemente (ad esempio negli Istituti Tecnici in discipline professionalizzanti) senza che si sia ben compreso il loro significato. Invece un approccio euristico porta, attraverso un processo di induzione, ad una maggior consapevolezza sui concetti stessi. Consapevolezza che deve naturalmente essere seguita da una sistematizzazione rigorosa dei concetti acquisiti, anche attraverso procedimenti deduttivi.

Tali considerazioni prescindono dall'Informatica, ma trovano in essa un valido supporto per un reale cambiamento di metodologia, che senza gli strumenti informatici sarebbe poco "economico", nel senso che i tempi necessari per affrontare un argomento dal punto di vista induttivo risultano più lunghi di quelli necessari per affrontare lo stesso argomento in modo deduttivo. Risultano comunque eccessivi senza l'utilizzo di un elaboratore che permetta di trattare in tempi reali una vasta casistica del problema oggetto di ricerca.

Derivate

Un esempio di quanto detto sopra è quello che permette di giungere al concetto di funzione derivata di una funzione, calcolando il coefficiente angolare di rette secanti la curva immagine, passanti per punti successivi le cui ascisse hanno differenze costanti.

L'utilizzo di software già predisposto con possibilità di utilizzo della grafica (ad esempio un foglio elettronico come Lotus 123) permette di operare su più funzioni elementari x --> ax^n, x --> sin x, x --> e^x, ..., purchè si abbia l'avvertenza di escludere dall'intervallo di studio eventuali discontinuità della funzione.

Integrali

Per giungere euristicamente al teorema fondamentale del calcolo infinitesimale si può porre il classico problema di calcolare l'area di una superficie piana, avente come parte del contorno, un tratto di curva immagine di f(x), come somma delle aree dei trapezoidi che si ottengono suddividendo l'intervallo| a, b| in n parti uguali.

Richiedendo di calcolare le successive somme parziali e di confrontare il grafico della funzione che così si determina con quello della curva che rappresenta f(x), si giunge a scoprire il legame che intercorre tra derivazione e calcolo delle aree.

Studio di funzioni

E' possibile affrontare alcuni argomenti che sono strettamente collegati all'analisi anche senza possedere nozioni rigorose in questo campo.

Infatti, utilizzando l'elaboratore è possibile scoprire come si giunge, con successivi passaggi, dal grafico di una funzione $x \to f(x)$ a quello di $x \to af(x-h)+k$.

Inoltre è possibile introdurre allo studio della variazione della funzione calcolando i successivi rapporti y/x, y^2/x^2, ... per x costante.

* Lavoro svolto nell'ambito del contratto CNR per la didattica n. 86.02102.01 dal titolo: Ipotesi di nuovi curricula negli Istituti Tecnici Industriali per l'insegnamento della matematica appoggiato a strumenti informatici; sperimentazione didattica ed analisi della strumentazione informatica di supporto.

Giuliano Testa

Vicenza

SPERIMENTAZIONE DI MATEMATICA ED INFORMATICA IN UNA PRIMA LICEO SCIENTIFICO

Nell'anno scolastico 1987/88 ho condotto nella classe 1ªC (25 alunni) del Liceo Scientifico "G.B. Quadri" di Vicenza una sperimentazione didattica, nell'ambito del Piano Nazionale dell'Informatica. Nei mesi di giugno e settembre ho prodotto due scritti sul lavoro svolto:

1. relazione di fine anno - argomenti:

- riflessioni sul concetto di sperimentazione (centralità dello studente in formazione);
- commento alla Circolare Ministeriale sulla Sperimentazione (elementi salienti: continuità con la scuola media; introduzione dell'informativa);
- commento ai programmi (contenuti);
- relazione sulla classe e programma svolto.

2. documentazione dell'attività svolta in classe

In questa sede mi limiterò a presentare le linee portanti della sperimentazione attuata, rimandando per i dettagli ad un mio articolo pubblicato su "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate" (in Atti del XVIII Seminario del Centro Ugo Morini, Paderno del Grappa, Treviso, dicembre 1988).

La sperimentazione si è articolata in tre fasi successive:

A. Conoscenza ed omogeneizzazione della classe (Sett/Otto);

B. Iniziazione alla geometria (Nov/Feb);

C. Iniziazione all'aritmetica e all'informatica (Mar/Giu).

Le motivazioni che hanno suggerito la suddetta articolazione sono di ordine pedagogico/didattico (soprattutto per la fase A.) e tecnico (per la fase C.: il laboratorio di informatica è entrato in funzione nel Marzo '88).

Obiettivi della fase A

- verifica delle conoscenze di base (aritmetica, geometria);

- chiarezza espositiva;
- uso appropriato dei termini;
- abilità e velocità di calcolo (per es. ricorso alla proprietà distributiva);
- introduzione e manipolazione di simboli;
- semplici dimostrazioni (aritmetica).

Obiettivi della fase B

- analisi di proprietà del piano familiari allo studente, proiettata ad una successiva rielaborazione (mediante concetti algebrici);
- visione unitaria della geometria (ruolo fondamentale delle simmetrie assiali);
- deduzioni parziali, a partire da casi concreti, come premessa ad una rielaborazione successiva (processo a spirale).

La fase B si è sviluppata in due momenti successivi:

1. Introduzione

Si è cercato di affinare l'intuizione geometrica, mediante esercizi del tipo: "Quanti piani puoi individuare fissando nello spazio 4 punti?".

- Il ben noto "gioco del dizionario" ha consentito agli studenti di comprendere, con naturalezza e facilità, che non è possibile definire ogni termine: da qui la necessità di introdurre termini primitivi.

- L'analisi di semplici dimostrazioni ha messo in evidenza la necessità di stabilire dei punti di partenza: si è trattato di un primo incontro con il concetto di postulato.

- Ampio spazio è stato dedicato alla discussione del concetto di uguaglianza e alla sua distinzione da quello di identità.

2. Isometrie (nel piano)

Nello studio delle isometrie ha avuto un ruolo centrale la pratica di disegno e la successiva riflessione sui risultati ottenuti ha portato gli studenti a rieaminare in un'ottica nuova il concetto stesso di geometria. Ciò è avvenuto con gradualità e grande impegno da parte degli studenti, che hanno anche proposto notazioni e terminologie proprie.

Gli argomenti affrontati sono stati i seguenti:

- individuazione di simmetrie in figure già note (ricorso intuitivo al concetto di distanza);
- composizione di simmetrie (apertura ad idee centrali della matematica gruppi di trasf.);
- classificazione delle isometrie (pari, dispari; punti uniti; simmetrie assiali, traslazioni, rotazioni, glissosimmetrie);
- (riduzione di una simmetria piana al prodotto di al più 3 simmetrie assiali: argomento non svolto per mancanza di tempo).

Obiettivi della fase C

Il dover "comunicare" ad una macchina, in grado soltanto di eseguire certe operazioni di natura fisica, un problema da risolvere, pone lo studente nella necessità di utilizzare un linguaggio simbolico, elaborato dalla macchina a livello puramente sintattico, perchè incapace di qualsiasi interpretazione semantica: quest'ultima spetta allo studente. Dunque, da una situazione molto concreta (comunicazione con un perfetto "idiota") nascono l'esigenza di una formalizzazione assai raffinata ed, insieme, l'attribuzione di significato a sequenze di segni.

L'aritmetica è indubbiamente un campo privilegiato di indagine e ricerca ed ho orientato in questo senso l'approccio all'informatica.

I contenuti più significativi sono stati:

- la selezione	IF ... THEN ... ELSE
- cicli	FOR, REPEAT, WHILE
- funzioni ricorsive	fibonacci, potenza, fattoriale, MCD, somma e prodotto, ...

Si è trattato in sostanza di una rivisitazione dell'aritmetica al calcolatore.

Osservazioni

1. L'obiettivo centrale che mi ero prefisso era quello di stimolare la curiosità degli studenti ed il desiderio di operare, di scoprire fatti nuovi, di impadronirsi di concetti e tecniche di risoluzione. L'uso del calcolatore, in particolare, si è rivelato efficacissimo sia sul piano dei rapporti interpersonali (eliminazione delle barriere studente/studente e insegnante/studente), sia sul piano dell'apprendimento, per due motivi almeno:

- l'ansia di commettere errori era drasticamente ridotta, se non annullata (il computer non emette giudizi);
- i processi di formalizzazione, alquanto elevati, avvenivano su basi concrete (vera e propria manipolazione fisica).

2. Gli studenti hanno acquisito, anche se ovviamente in misura diversa, la capacità di sapersi muovere in situazioni nuove, perchè educati a ricercare dentro di sé la fiducia di poter fare.

3. Il lavoro presentato può sembrare poco organico: in realtà mi ero proposto, con il primo anno di sperimentazione, di preparare il terreno, creando negli studenti un atteggiamento attivo nei confronti della matematica, con la speranza di poter proseguire negli anni successivi in due direzioni:

- analisi di nuovi problemi e costruzione di nuovi strumenti per la loro risoluzione;
- graduale assiomatizzazione.

Purtroppo, invece, non potrò verificare la validità dell'impostazione, né apportare gli eventuali correttivi, né portare a compimento l'opera intrapresa: il Preside infatti (sollecitato anche da alcuni genitori assai preoccupati per lo "strano" modo di insegnare) ha ritenuto il mio operato non conforme alle indicazioni del Piano Nazionale dell'Informatica ed ha quindi deciso di affidare la classe ad altra persona.

4. Alcuni testi rivelatici particolarmente utili nella preparazione delle lezioni e degli esercizi sono:

- G.C. BAROZZI, **Aritmetica, un approccio computazionale**, Zanichelli, 1987;

- L. BAZZINI-M.FERRARI, **Il mondo dei numeri naturali**, SEI, 1987;
- R.P. BURN, **A pathway into number theory**, CUP, 1982;
- M. FERRARI, **Le isometrie piane**, in Atti del XVII Seminario del Centro U. Morin: La didattica della geometria, 1987;
- P.TONI, **Disfide matematiche a scuola**, Muzzio, 1985.

Lista dei Partecipanti

Acanfora Fausto (Napoli); Accascina Giuseppe (Roma); Addonizio Federico (Benevento); Adduce Raffaele (Caianello); Alessandrella Cesare (Melito); Aliquò Maria (Roma); Alloni Marina (Torre del Greco); Amato Assunta (Napoli); Ambrisi Emilio (Mondragone); Ambrosio Cesira (Piano di Sorrento); Ammendola Silvana (Napoli); Amoruso Anna (Torre Annunziata); Anastasio Giuseppe (Capri); Andreozzi Maria (Napoli); Angeloni Edda (Teramo); Anglani Donatella (Torre Annunziata); Annunziata Rita (Torre del Greco); Antoniazzi Franco (Vicenza); Apa Giuseppina (Napoli); Arciello Paola (Napoli); Ardizio Francesco (Trecase); Argentini Ivano (Terni); Astore Cini Maria Luisa (Firenze); Attanasio Assunta (Benevento); Auletta Francesco (Frattamaggiore); Auriemma Maddalena (Somma Vesuviana); Autore Angela (C.Mare di Stabia); Aversa Vincenzo (Napoli); Avolio Pietro (Napoli); Bagnato Carmela (Napoli); Barbato Virginia (Terni); Barbero Anna Maria (Torre Annunziata); Barbi Gabriella (Napoli); Barlotti Adriano (Firenze); Barra Mario (Roma); Bazan Maria Chiara (Castelfranco Ven.); Bazzini Luciana (Pavia); Benincasa Ada (Napoli); Bennici Concetta (S. Giorgio a Creman.); Bernardi Claudio (Roma); Betti Patrizia (Piacenza); Bianchi Bianca (Modena); Bibbò Giovanni Bartolomeo (Napoli); Biliotti Mauro (Lecce); Billi Annamaria (Napoli); Bisogni Clementina (Napoli); Bobbio Enzo (Napoli); Bocchetti Carlo Lucio (Cologno Monzese); Boccia Teresa (S. Giovanni Vesuv.); Bolletta Raimondo (Roma); Bologna Simona (Pavia); Bornoroni Silvana (Roma); Borrelli Ciro (C. Mare di Stabia); Borrelli Ettore (Napoli); Borrelli Virginia (Donnici inf.); Bortolan Laura (Parma); Bossio Iolanda (Napoli); Brenci Ascoli Bartoli Maria Teresa (Roma); Broja Rosa (Napoli); Bruno Zaccaria Angela (Napoli); Burrai Gino (Roma); Bussi Mariolina (Modena); Calabrese Maria (Napoli); Cambiaso Daniela (Genova); Candela Innocente (Putignano); Cannizzaro Lucilla (Roma); Cantalupo Antonia (Agropoli); Capone Vincenzo (Napoli); Caponio Domenica (Santeramo); Cardelli Liliana (Teramo); Carile Saveria Pierina Maria (Napoli); Carillo Maria (Napoli); Cascone Carmelina (C. Mare di Stabia); Caserta Vittoria (Napoli); Casilli Maria Rosaria (Napoli); Casillo Maria (Nocera Inferiore); Casolaro Ferdinando (Napoli); Castagnola Ercole (Milano); Castellani Castallano (Terni); Castellano Rosalia (Meta); Cavallaro Bruna (Roma); Cavallaro Mario (S. Antonio Abate); Cedrazzi Fiammetta (Besana); Celentano Adriana (Roma); Cerasoli Mauro (L'Aquila); Cercignani Carlo (Milano); Cervo Egidio (Sartano); Cervo Giulia (Nola); Cesare Giuseppina (Napoli); Chesi Carla (Napoli); Ciarrapico Lucia (Roma); Cicenia Salvatore (S. Giuseppe Vesuv.); Ciceri Carlo (Savona); Cigliano Vittoria (Napoli); Cirillo Salvatore (Napoli); Citterio Giovanni Rodolfo (Albiate); Cocchiararo Silvana (Napoli); Coluzzi Leda (Latina); Coluzzi Maria Antonietta (Latina); Comite Corrado (Napoli); Conte Francesco (Saviano); Coppola Berenice (Napoli); Coppola Matilde (Torre del Greco); Corazziere Giuseppe (S. Valentino Torio); Costantino Luisa Anna (Fondi); Costantino Vincenza (Fondi); Cozzolino Antonietta (Salerno); Cristiano Virginia (Frattamaggiore); Cruciani Rosanna (Roma); Cuoco Aurelio (Nocera Inferiore); Curtotti Nazario (Portici); Cuttica Anna (Genova); D'Andria Nicla (Roma); D'Angelo Carmela (Napoli); D'Angelo Giuseppe (Napoli); D'Atri Annamaria Grazia Elvira (Napoli); D'Avino Sabato (Somma Vesuviana); D'Esposito Francesco Saverio (Sant'Agnello); D'Ingecco Brunilde (Terni); D'Urso Giuseppe (Riposto); Danese Mario (Caserta); De Angelis Angelo (Roma); De Angelis Carmine (Palermo); De Benedetti Giovanna (Novi Ligure); De Biase Eugenio (Torre Annunziata); De Crescenzo Pasquale (Nola); De Cristofaro Giampiero (Napoli); De Feis Giuseppina (Napoli); De Grandis Annalisa (Piombino Dese); De Luez Anna (Napoli); De Maio Agnello (Vico Equestre); De Maio Elisabetta (Portici); De Maio Luigi (S. Agnello); De Martino Maria (Napoli); De Mori Gabriella (Vicenza); De Mori Guglielmina (Vicenza); De Nuccio Sergio (Campobasso); De Rosa Italia (Napoli); De Vivo Clorinda (Napoli); Della Ragione Giovanna (Napoli); Di Carlo Alba (Torino); Di Cataldo Francesco (Venezia); Di Guilmi Gina (Napoli); Di Maio Amelia (Roma); Di Maio Giosuè (Napoli); Di Martino Rita (Torre Annunziata); Di Modica Marisa (Acqui Terme); Di Salvatore Rita (Napoli); Dileo Vittoria (Monopoli); Dolcetti Mariano (Piano di Sorrento); Dvornicich Roberto (Pisa); Elli Dino (Novi Ligure); Esposito Adriana (Piano di Sorrento); Esposito Antonio (Pomigliano d'Arco); Esposito Buoncunto Maria Rosaria (Sorrento); Esposito Giovanni (Napoli); Esposito Luigi (Piano di Sorrento); Esposito Viola (Marigliano); Facchini Alberto (Udine); Faggiano Luciano (Modugno); Faggio Angela (Milano); Fagiani Simonetta (Terni); Falaschi Pietro (Livorno); Fanucci Stefania (Milano); Farroni Annamaria (Napoli); Farsi Bartoli Maria Luisa (Siena); Fase Anna (Afragola); Fei Donata (Firenze); Felician Belloli Gabriella (Trieste); Ferraro Giovanni (Afragola); Ferri Osvaldo (L'Aquila); Ferro Ruggero (Padova); Figà Talamança (Bologna); Fiordilino Silvana (Agropoli); Fiori Carla (Modena); Fiscarelli Leonardo (Benevento); Flamma Rita (Napoli); Fontana Nicola (Napoli); Franchi Anna Maria (Cecina); Franciosi Lilia (Napoli); Furinghetti Fulvia (Genova); Furlani Marco (Trieste); Galletti Laura (Napoli); Gallo Gaveglio Elisa (Torino); Garassino Silvia (Torino); Gargiulo Maria Luisa (Piano di Sorrento); Gargiuolo Pietro (Salerno); Garofalo Rosina (Latina); Gasparo Maria Grazia (Firenze); Gatto Romano (Napoli); Gazzolo Graziana (Genova); Genovese Bruno (Salerno); Gentiletti Angela (Napoli); Gentili Giovanna (Lecce); Giacinti Giuseppe (Terni); Giacomello Maria Pia (Brescia); Gioia Marina (Villaricca); Giordano Gabriele (Napoli); Girasoli Maria Gabriella (Modena); Grasso Stefania (Latina); Grecele Afra (Vicenza); Grella Ida (Avellino); Grieco Vera (Napoli); Grugnetti Lucia (Selargius); Guardascione Raffaella (Pozzuoli); Guida Mario (Caserta); Iacomella Alba (Maglie); Iadanza Patrizia (Portici); Iaderosa Rosa (Cesano Boscone); Ianniello Olga (Mondragone); Immediata Silvano (Bellizzi); Incorvata Maria Gregorio (Portici); Interi Giovanni (Chiaramonte Gulfi); Intini Festa Giuliana (Napoli); Iorio Margherita (Diamante); Ipsevich Maria Cristina (Roma); Isonni Battista (Desenzano sul Garda); Jengo Letizia (Roma); La Porta Myria (Napoli); Lambertini Laura (Ferrara); Lanave Mariantonietta (Bari); Lania Licia (Messina); Lantelme Jourcin Lucia (Salsomaggiore); Lembo Clementina (Monopoli); Lenzi Domenico (Lecce); Leoci Giovanna (Monopoli); Leonori Lucia (Ancona); Lepore Luigi (Montella); Letizia Maria (S. Barbara); Lettieri Alfonsina (Napoli); Limauro Anna Maria (Napoli); Limongelli Maria Grazia (Parma); Lizzio Angelo (Acireale); Lolli Gabriele (Torino); Lorefice Maria Fiorella (Palermo); Loscalzo Ippolita (C. Mare di Stabia); Lunardon Guglielmo (Napoli); Maddaluna Concetta (Cercola); Magi Eugenio (Firenze); Magni Cecilia (Montevarchi); Maiorano Lidia (Battipaglia); Malara Nicolina Antonia (Modena); Mammana Carmelo (Catania); Mancinotti Berardino (L'Aquila); Mantovani Maurizia (Padova); Maraschini Palma (Roma); Maraschini Walter (Roma); Marcello Carolina (Caserta); Marchini Carlo (Lecce); Maresca Anno (Piano di Sorrento); Maresca Giovanna (Sorrento); Maresca Giuseppe (Vico Equestre); Margiotta Giovanni (Roma); Marino Anna (Torre del Greco); Marrazzo David (Calolziocorte); Martinez Annalisa (Modena); Massaro Giancarlo (Caserta); Matarazzo Erminia (Napoli); Mauro Raffaele (Terracina);

Mautone Felicia (Marigliano); Mazzarelli Nicola (Portici); Mazzocca Francesco (Napoli); Melino Antonia (Napoli); Melis Elena (Napoli); Menghini Marta (Roma); Menichetti Sperandia (Cagliari); Mercurio Caterina (Benevento); Mereu Maria Cristina (Napoli); Micale Biagio (S. Giovanni La Punt.); Miccolupi Nicola (Benevento); Micillò Nicola (Napoli); Miele Cornelia (Napoli); Miglionico Maria Cristina (Torre del Greco); Migliorato Renato (Messina); Milano Amelina Anna (Vico Equestre); Milazzo Filippo (Catania); Milella Anna (Bari); Milo Pasquale (Napoli); Minicucci Giuseppina (Pozzuoli); Miranda Maria Luisa (Napoli); Mobilio Marina (Terracina); Monaco Rachele (Torre Annunziata); Montineri Valentina (Terni); Montoro Raffaele (Nocera Inferiore); Morelli Aldo (Napoli); Mussinelli Cristina (Milano); Mussinelli Cristina (Milano); Napoli Antonieta (Frattamaggiore); Nardiello Pietro (Napoli); Negrini Paolo (Bologna); Nelli Dora (Napoli); Niccoli Ciro (Napoli); Nuvolone Mario (L'Aquila); Orlando Maria (Napoli); Pacini Annamaria (San Vincenzo); Pagano Biagio (Boscoreale); Palma Mauro (Roma); Palma Michelina (Fondi); Palmisani Cesare (Caserta); Palomba Nicodemi Giovanna (Napoli); Palomba Teresa (Torre del Greco); Palumbo Domenica (Benevento); Papa Maria (Napoli); Parlato Maria Rosaria (Torre del Greco); Parziale Salvatore (Latina); Paschini Lidia (Casate Novo); Pasquarelli Giuseppe (Portici); Paternò Albina (Castellamare Stabia); Pavoni Teresa (Napoli); Pellegrini Pasqualina (Cagliari); Pellegrino Consolato (Modena); Pennisi Mario (Catania); Percario Zelinda (Grosseto); Pergola Marcello (Modena); Perretta Arcangelo (Vico Equestre); Perrotta Anna (Napoli); Perrotta Luigi (Marano); Perrotti Vanda (Napoli); Persico Roberto (S. Agnello); Petraroli Margherita (Napoli); Petré Letizia (Napoli); Petrillo Annamaria (Napoli); Petrone Antonietta (Mondragone); Pianese Antonio (Giugliano); Pica Mecarelli Adelia (Terni); Pintus Giulia (Cagliari); Pisa Massimo (Roma); Pisaneschi Paolo (Pisa); Pittelli Angiola (Rende); Pizzolongo Del Grosso Maria Maddalena (Portici); Planeta Paola (Napoli); Pontillo Mario (Napoli); Prisco Biagio (Benevento); Prodi Giovanni (Pisa); Pucciarelli Anna (Napoli); Pugliese Antonio (Napoli); Quagliano Francesco d'Assisi (Gragnano); Quaranta Immacolata (Napoli); Quattrini Spalla Giuseppina (Firenze); Ragagni Maria (Bologna); Rambaldi Giacomo (Savona); Reibaldi Pellegrino (Torre Annunziata); Remondini Sandro (Roma); Renza Concetta (Benevento); Renzi Marisa (Terni); Repola Boatto Adele (Ancona); Ribelli Giancarlo (Polpenazze); Riccardi Rosa (Napoli); Ricciardi Renata (Piano di Sorrento); Riccio Cecilia (Napoli); Rinaldi Biagio (Napoli); Ripamonti Angela (Milano); Roca Giuseppina (Napoli); Rocchetti Giannina (Ancona); Romano Carmela (Napoli); Romano Luigi (Napoli); Romano Maria Angelina (Marigliano); Roncolini Maria Luisa (Roma); Rosati Carmelina (Benevento); Rosati Maria Rosaria (Firenze); Rosati Mario (Padova); Rota Ebe (C. Mare di Stabia); Russo Vincenza (Napoli); Rutella Rosina (Ercolano); Saggese Giulia (Napoli); Salerno Pasqualino (Benevento); Sangianantoni Vincenzo (Nocera Inferiore); Sannino Alfonsina (Torre del Greco); Sannino Silvana (Napoli); Sansone Anna Maria (Napoli); Santaniello Aurelia (Napoli); Santaniello Vincenzo (C. Mare di Stabia); Santoro Maria Cherubina (Napoli); Saracino Romeo (C. Mare di Stabia); Saravo Walter (Montella); Sargenti Ada (Torino); Scagliotti Gisella (Torino); Scalabrì Anna (Napoli); Scarafiotti Abete Anna Rosa (Torino); Scarpati Mario (Portici); Schiavo Catello (C. Mare di Stabia); Sciarrone Caterina (Napoli); Scimemi Benedetto (Padova); Scotti Arnaldo (Ferrara); Serino Margherita (Pozzuoli); Serra Carmela (Ottaviano); Sguerso Cristina (Savona); Siano Annamaria (Atripalda); Siniscalco Edvige (Napoli); Siviglia Paolo (Verbania-Intra); Sivolella Rita (Salerno); Sorrentino Clementina (Torre del Greco); Spilimbergo

Francesca (Oderzo); Staropoli Franco (Tropea); Stasi Luigi (Benevento); Succi Francesco (Roma); Succi Maria Rosaria (Napoli); Succi Rosanna (Roma); Taviani Mealli Elisabetta (Sesto Fiorentino); Tazza caterina (Terni); Teneriello Maria Antonietta (Napoli); Testa Giuliano (Vicenza); Tocchi Amalia (Napoli); Toni Paolo (Padova); Tortese Pietro (Napoli); Tortora Gennaro (Arco Felice); Tortora Roberto (Napoli); Trani Lina (Nocera Inferiore); Trentin Guglielmo (Genova); Trombetta Maurizio (Udine); Tuccillo Fernando (Napoli); Urciuoli Maria Rita (C. Mare di Stabia); Vaccaro Francesco (Torre Annunziata); Vaccaro Viginia (Napoli); Vacirca Vincenzo (Catania); Valabrega Elda (Torino); Valenza Antonio (Latina); Vastola Rita (S. Giorgio a Creman.); Vazza Aldo (Piano di Sorrento); Veccia Filomena (S. Nicola La Strada); Vellone Anna (Caserta); Verde Vincenzo (Napoli); Vezzoli Alessandro (Erba); Viglietto Giovanni (Napoli); Virno Letizia (Napoli); Vita Vincenzo (Roma); Volpe Patrizia (Borgomanero); Volpe Rosa Maria (Santeramo); Voto Maria Libera (Torre del Greco); Vulcano Valentina (Napoli); Zanoli Carla (Modena); Zecca Minà Sarina (Latina); Zolo Sibani Serena (Firenze).

INDICE

L. Ciarrapico Manna - Nuovi programmi di matematica per la scuola secondaria superiore . . . . pag. 3

A. Facchini - Considerazioni a margine di una indagine sui libri di testo di matematica per le scuole secondarie superiori . . " 17

C. Cercignani - Insegnare la matematica a chi non intende diventare matematico: una sfida per i docenti della scuola secondaria " 30

A. Barlotti - La matematica nelle scuole secondarie superiori: il ruolo della geometria . . . . " 42

G. Lolli - Matematica e ragionamento . . . . " 49

B. Scimemi - Il 6^{o} Congresso ICME (Budapest, 1988): relazione . . . . " 78

R. Dvornicich - Relazione sulle olimpiadi di matematica . . . . . . " 89

M. T. Ascoli Bartoli - Alcune considerazioni suggerite dall'attuazione del P.N.I. . . . . " 92

C.L. Bocchetti - Laboratorio di matematica nel biennio: un metodo di lavoro" 98

R.A. Cacciabue, M. Mascarello e A.R. Scarafiotti - Approccio all'analisi numerica: sperimentazione sui programmi del triennio degli I.T.I. per periti di informatica . . . . " 112

A. di Carlo e G. Trentin - Uso delle reti di Petri nella didattica della matematica . . . . " 122

F. Furinghetti - Un questionario per insegnanti di matematica della scuola secondaria superiore . . . . " 140

Nucleo di ricerca didattica - Dip.to di Matematica, Univ. di Modena -
I - Il Teorema di Carnot nella "Géometrie de position" . . . . " 154

II - Materiali didattici per lo studio delle omologie affini . " 157

A. Sergenti - Un approccio euristico alla geometria analitica e all'analisi matematica . . . . " 160

G. Testa - Sperimentazione di matematica ed informatica in una prima liceo scientifico . . . . " 163

Lista dei partecipanti " 168