Luglio 1981
Supplemento al n. 7

Period. mensile
sped. in abb. post. gruppo III/70

Anno VIII

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SETTIMO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

MONTECATINI T., 25 APRILE 1981
A cura di Paola Cerrai

DIRETTORE: **CARLO PUCCI**

SEGRETARIO DI REDAZIONE: LUIGI PAPINI

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci e non è in vendita.

LA PRESENTE RIVISTA VIENE STAMPATA CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40138 Bologna (Italia)
Luglio 1981
Supplemento al n. 7

Nota

Il VII Convegno dell'U.M.I. sull'insegnamento della matematica ha avuto luogo il 25 Aprile 1981 a Montecatini Terme.
Il Convegno si è concluso in un solo giorno essendosi, come l'anno passato, svolto successivamente al Congresso del C.O.A.S.S.I. tenutosi, sempre a Montecatini Terme, nelle due precedenti giornate.
Il Convegno ha visto la partecipazione, oltre che di numerosi docenti universitari e della scuola secondaria, anche di alcuni insegnanti della scuola elementare.
Dopo il saluto e il ringraziamento a tutti i partecipanti da parte del Prof. Pucci, presidente dell'U.M.I., il Prof. Prodi ha riferito sulle varie attività della C.I.I.M. nel periodo Aprile 80 - Aprile 81.
Successivamente il Prof. Villani è intervenuto sul problema della prova scritta di matematica nella scuola media inferiore.
Ha fatto seguito la relazione dei Proff. Manara, dell'Università di Milano, e Proverbio, dell'Università di Cagliari, i quali si sono soffermati su "Astronomia di posizione e Geometria dello spazio", diffondendosi sugli aspetti comuni alle due scienze e sulla loro evoluzione nella storia; sul tema esposto dai due relatori si è svolto un ampio dibattito.
Ha concluso il Convegno una tavola rotonda su "Logica e Linguaggio formalizzato nella scuola secondaria superiore".
Su questo argomento sono state riferite, in successive relazioni, le opinioni e le esperienze dei vari nuclei di ricerca didattica di Firenze, Palermo, Napoli, Genova, Savona, Pisa, Torino, Padova.

I testi delle relazioni sono pubblicati integralmente negli Atti, nello ordine cronologico di esposizione.

La necessità di una sollecita pubblicazione degli Atti del Convegno non ha consentito di riprodurre gli interventi nei dibattiti seguiti alle relazioni, non forniti dai diretti interessati. E' stata fatta eccezione solo per gli interventi di tipo organizzativo successivi alla relazione del Prof. Prodi.

Come sempre, l'elenco dei partecipanti è compilato secondo l'ordine alfabetico della provincia della sede di lavoro.

P. Cerrai

ELENCO DEI PARTECIPANTI

BARI: CANDELA Innocente, PERTICHINO Michele, RONCHI Palmira.

CAGIARI: CAPUTO Giulia, FORTELEONI Giuseppina, GRUGNETTI Lucia, LAI Tania, MARCHETTI Franca, MONTALDO Oscar, NACCARATO Giuliano, PROVERBIO Edoardo.

CATANIA: LIZZIO Angelo, MAMMANA Carmelo.

COSENZA: D'APRILE Margherita.

CREMONA: LEANI Achille.

FERRARA: BORGATO Maria Teresa, PEPE Luigi.

FIRENZE: CAMPEDELLI Maria Giuditta, CASADIO Giuseppina, FOCARDI Enrica, GIORGETTI CAPOCASA Anna, GIUNTINI Sandra, PIRILLO Giuseppe, PUCCI Carlo, SIMONETTI Carla, SIBANI ZOLO Serena, ZAPPA Guido.

GENOVA: AMANDOLA Margherita, BELCASTRO Alessandro, BOERO Paolo, FRACASSINA Grazia, FURINGHETTI Fulvia, ROSSI ARTIACO Anna Maria, SPALLAROSSA Emilia.

LIVORNO: BRUNI CIAMPINI Maria Luigia, ROMEO Paola.

MACERATA: TEODORI Alba Rosa.

MILANO: FACCHINELLI Claudio, MANARA Carlo Felice, MANARA Margherita, MANARA CICUTA Maria Piera, MONARI Teresa, PAGANI Andrea, PESCI Angela.

NAPOLI:	GATTO Romano, GERLA Giangiacomo, LONGO Giuseppe, MANCUSO Santi,MIGLIARDINI Rita,MORELLI Aldo, NELLI Dora, PAVONI Teresa, RIGUTTI Mario, SANTANIELLO Maria Antonia, VITTONE Alberto Angelo.
PADOVA:	MORGANTINI Edmondo, FERRO Ruggero, SCUDELER Antonio, SCIMENI Benedetto, TONI Paolo.
PALERMO:	ALFANO Luisa, D'AMICO CANNATA Giovanna, LOREFICE Maria Fiorella, SPAGNOLO Filippo.
PARMA:	ARTUSI CHINI Liliana, SPERANZA Francesco.
PAVIA:	BAZZINI CHIMIENTI Luciana, BERNINI Elena, FERRARI Mario, MAGENES Enrico, TORRE Anna.
PERUGIA:	BRINDISI Francesco, BRUNELLI Maria Pia, CHIANELLI Carlo, ROSIGNOLI Carlo, TANCREDI Rita.
PISA:	CHECCUCCI Vittorio, CERRAI Paola, GIUNTINI Paola, MARIOTTI Maria Alessandra, PISANESCHI Paolo, PISTELLI Giuliana, PRODI Giovanni, SCIACCA BANTI Renato,VILLANI Vinicio.
PISTOIA:	FERACI Fabrizio, RABUZZI Alessandro, RUGANTI Riccardo, SOLDI Vasco.
ROMA:	BARRA Mario, GHERARDINI Piergiorgio, LANCIANO Nicoletta, RIZZI Bruno, ZELASCHI Letizia.
SAVONA:	BATROVICH Cristina, CERRO Franca, CICERI Carlo, DESTEFANIS SPOTORNO Maria, RAMBALDI Giacomo, SGUERSO Cristina, SPOTORNO Bruno.

TORINO:	ARZARELLO Ferdinando, BOSCIA Renato, CIGNETTI Alberto, DEL GIUDICE Valeria, DEL SEDIME Piero,GALLARAI Lucia, GALLO Elisa, MORINA Sergio, MOSCA Miranda, VALABREGA Elda.
TREVISO:	DI GIORGI Aurelio, ZANINI Giorgio.
TRIESTE:	DAL MASO Dino, TORELLI Giovanni.
UDINE:	CASARSA Franco, FALESCHINI Daniele.
VENEZIA:	CAVAGGIONI Giuliana.

E' inoltre intervenuto il Prof. Felice MAMMANA *Ispettore del Ministero della P.I.*

Intervento del Prof. C. Pucci Presidente dell'U.M.I.

Da sette anni l'U.M.I. organizza ogni primavera un convegno dedicato ai problemi dell'insegnamento della matematica.I problemi sono vasti e complessi, relativamente esiguo è il numero delle persone competenti ed impegnate sui problemi generali, didattici ed organizzativi, della scuola, ancora più esiguo è il numero di dette persone impegnate nel settore matematico. Nonostante questo, vari risultati positivi sono stati già ottenuti e si può essere abbastanza fiduciosi nella concretezza operativa dei nostri studi, sperimentazioni e dibattiti per la loro organicità e sistematicità. Anche un piccolo gruppo di persone che svolge un'opera costante di orientamento in un certo settore riesce, sia pure dopo anni, ad avere una notevole influenza. Gli atti di questo convegno saranno pubblicati, come quelli dei precedenti convegni, come Supplemento del Notiziario dell'U.M.I. e saranno inviati anche a tutti i partecipanti.

L'Unione Matematica Italiana ringrazia tutti i presenti per la loro collaborazione al comune impegno per un migliore funzionamento della scuola italiana.

Giovanni Prodi - "Relazione sull'attività della C.I.I.M. nel periodo Aprile 80 - Aprile 81".

1 - Dal 6 all'11 ottobre u.s. si è svolto a Trento, con il supporto finanziario ed organizzativo del Centro Interuniversitario di Ricerca Matematica (C.I.R.M.) un convegno dedicato ai "Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare". A questo convegno erano stati invitati alcuni dei più rinomati specialisti stranieri: S. Krigowska, E. Fischbein, F. Papy, Z. Dienes, A. Abele, G. Walther, K. Härtig, oltre al prof. M. Laeng. Erano stati invitati anche più di trenta

studiosi italiani, che hanno portato, nelle loro comunicazioni, i risultati di varie sperimentazioni.

Il convegno è indubbiamente riuscito in modo soddisfacente; la C.I.I.M. ha deciso di pubblicarne gli atti, ma, più che di atti in senso formale, si tratterà di un volume agile (attualmente in corso di stampa presso la soc. editrice "La Scuola", di Brescia) che porterà molti interessanti spunti e che potrà essere utilmente letto dagli insegnanti elementari.

Il convegno di Trento ha segnato l'ingresso della C.I.I.M. in un settore nuovo: quello della scuola elementare. La C.I.I.M. ha preso l'iniziativa di compilare uno schedario di tutti coloro che compiono sperimentazioni di un certo rilievo nell'insegnamento della matematica per la scuola elementare. Inoltre la C.I.I.M. sta impegnandosi per la realizzazione di un piccolo convegno dedicato alla preparazione matematica degli insegnanti elementari; nel quadro di queste iniziative, la C.I.I.M. ha proposto che il convegno del COASSI per la primavera del 1982 sia dedicato alla preparazione scientifica degli insegnanti elementari.

Infine, la C.I.I.M. si interessa di un problema di cui ormai si parla molto: la riforma dei programmi di insegnamento per la scuola elementare, che datano dal 1955. In ogni sede in cui è possibile farsi sentire, la C.I.I.M. dichiara la disponibilità dei matematici a collaborare a questo importante compito.

2 - Come è noto, la C.I.I.M. è stata fortemente coinvolta nella preparazione dei nuovi programmi per la Scuola Media.(E' il caso di sottolineare questa circostanza perchè, malgrado la piena disponibilità della C.I.I.M., le occasioni di collaborazione con il Ministero della P.I. sono state finora rarissime). Successivamente, un rappresentante della C.I.I.M., il

prof. Villani, ha fatto parte di una Commissione incaricata di fissare le norme per l'esame di Licenza Media, questa Commissione ha già concluso i suoi lavori; attualmente, il prof. Villani sta conducendo una inchiesta sul modo con cui può essere condotta la prova scritta di matematica, sulla base del regolamento approvato. Egli ha chiesto ai vari insegnanti, ad autori di libri di testo, a docenti universitari impegnati nella didattica, di preparare un tema secondo le nuove disposizioni. Il materiale è già in fase di raccolta, e verrà pubblicato su un supplemento del "Notiziario" dell'U.M.I. prima dell'inizio del nuovo anno scolastico.

3 - Nel settore delle scuole secondarie superiori sono state prese varie iniziative:

a) Si è cercato di diffondere quanto più possibile il "Syllabus" (Conoscenze e abilità nel campo della matematica per l'ingresso alle facoltà scientifiche). Le verifiche casuali che sono state fatte hanno dimostrato che il "Syllabus" è ancora assai poco conosciuto. La C.I.I.M. si propone di invitare, tramite i direttori degli istituti matematici, i docenti del primo anno di matematica , fisica, ingegneria a dare diffusione a questo documento invitando (anche attraverso la stampa locale) gli studenti a tenerlo presente. Naturalmente, i singoli docenti potranno anche diffondere un "Syllabus" diverso da quello della C.I.I.M.: ma sembra comunque importante che da parte delle università venga esercitata una certa pressione che favorisca un rinnovamento dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori.

b) Per la prima volta la C.I.I.M. ha partecipato alla "Annual High School Mathematics Examination", una prova che coinvolge circa 400.000 studenti delle classi finali delle scuole secondarie di vari paesi. La traduzione e la riproduzione del testo sono state curate dal Seminario Didattico dell'Istituto di Matematica dell'Università di Pisa; sono più di mille gli studenti italiani che si sono cimentati o si cimenteranno in questa prova. Questa competizione è senza dubbio di notevole interesse, anche se, probabilmente i risultati di questo primo anno non saranno molto significativi, soprattutto perchè gli allievi delle scuole italiane non sono preparati alle prove basate su test a risposte multiple.

4 - L'"iter" per la costituzione del "Centro Interuniversitario per la Didattica della Matematica"(C.I.D.M.) è ormai ad un punto soddisfacente: il Rettore dell'Università di Pisa ha inviato lo schema di convenzione ai Rettori delle sedi in cui operano nuclei di ricerca didattica per la Matematica. Non appena saranno pervenute le risposte si potrà procedere alla formalizzazione della convenzione.

Lo statuto del Centro consentirà l'inserimento di tutte le altre sedi universitarie che lo desiderino.

5 - La C.I.I.M. ha intensificato i rapporti con la Soc. "Mathesis" ritenendo che essa costituisca tuttora un insostituibile ambiente di aggregazione per gli insegnanti secondari di matematica. Nella perdurante impossibilità del Prof. de Finetti, presidente della "Mathesis" di prendere parte alle riunioni della C.I.I.M., il Prof. Bruno Rizzi è stato invitato a sostituirlo; nello stesso tempo, la C.I.I.M. ha delegato il Prof. Carmelo Mammana a partecipare alle riunioni del direttivo della "Mathesis".

Intervento del Prof. V. Villani

A seguito della legge 368 del 16/6/77 e del D.M. 9/2/79, stanno gradualmente entrando in vigore i nuovi programmi d'insegnamento per la Scuola Media dell'obbligo. Con l'anno 1981-82 si completerà l'intero ciclo secondo i nuovi programmi e quindi per l'estate 1982 è prevista anche l'entrata in vigore di una nuova normativa per le prove di licenza media. A questo riguardo, una commissione consultiva nominata dal Ministro per la P.I. ha elaborato delle proposte che, per quanto concerne la prova scritta di matematica, prevedono un'unica prova, articolata su 3 o 4 quesiti, in sostituzione del tradizionale "problema" (o "relazione"). Le proposte della commissione sono state già pubblicate sul Notiziario della U.M.I., ma non ancora tradotte dal Ministro in un Decreto. Tuttavia alla C.I.I.M. e alla Commissione Scientifica dell'U.M.I. è sembrato opportuno promuovere fin d'ora una raccolta di esempi di prove scritte di matematica, redatte in conformità con le indicazioni della suddetta commissione consultiva, da pubblicare tempestivamente sotto forma di supplemento al Notiziario U.M.I., in modo da fornire agli insegnanti della Scuola Media una serie di spunti e suggerimenti per il loro lavoro di programmazione didattica, in linea con i nuovi programmi. Sono stati interpellati i Nuclei di Ricerca Didattica della Scuola Media, vari autori di libri di testo e altri docenti che hanno svolto attività nel settore della Scuola Media. Le proposte che perverranno alla C.I.I.M. e che verranno ritenute in linea con la nuova normativa saranno pubblicate al più presto, quasi certamente prima dell'estate. Per rendere efficace questa iniziativa, si cercherà di dare ampia diffusione alla pubblicazione, interessando anche i Distretti scolastici, gli I.R.R.S.A.E. e le associazioni degli insegnanti della Scuola Media.

INTERVENTI NEL DIBATTITO

Pepe: A proposito degli Istituti regionali già nominati da Prodi desidero richiamare l'attenzione sulla necessità che l'interesse e la domanda di partecipazione che hanno determinato il nascere in questi anni di diversi organismi, si evolvano in una vigile attenzione sul loro funzionamento. E' infatti prevedibile un intervento in questo settore delle forze politiche ed in primo luogo dei partiti. Questo intervento non è da de precare in sè, in quanto i partiti rappresentano un'articolazione importante della nostra democrazia, ed è quindi opportuno che contribuiscano all'individuazione di competenze e di disponibilità in relazione ad un disegno generale; d'altra parte a questo intervento deve corrispondere un'attenta vigilanza al livello della società civile, di quanti operano con competenze specifiche nei vari settori. Questa vigilanza potrebbe anche comportare una denuncia civile di eventuali lottizzazioni che si concludessero nel determinare una politica culturale degenerativa o antiquata, con la designazione di persone particolarmente incompetenti.

Il Prof. Magenes domanda informazioni sul Gruppo di Ricerca Didattica del C.N.R. e sul Centro Interuniversitario per la didattica della matematica. Chiede, in particolare, se si pensa che valga la pena portare avanti entrambe le iniziative, considerato che le persone che se ne occupano sono le stesse.

In secondo luogo, osserva che il venir meno delle prospettive di riforma della scuola secondaria superiore, spegnendo gli entusiasmi, ha prodotto una crisi dei Nuclei di Ricerca Didattica.

Infine, il Prof. Magenes sottolinea l'opportunità dell'utilizzazione degli insegnanti "a metà tempo" per i corsi di aggiornamento.

Il Prof. Scimeni fa presente che i gruppi di Ricerca Didattica del C.N.R. sono organismi ancora poco definiti, ed esprime l'opinione che,per ora, sia necessario insistere in entrambe le direzioni: i gruppi C.N.R. e il Centro Interuniversitario.

Il Prof. Montaldo osserva che il convegno U.M.I. posto di seguito a quello del COASSI finisce col restare soffocato, e propone, quindi, di orga nizzare tre giorni di convegno unico COASSI - UMI.

Intervengono nel dibattito anche i Proff. Boero, Manara, Prodi.

Carlo Felice Manara - Edoardo Proverbio - "Astronomia di posizione e Geometria dello spazio".

1. - Matematizzazione e linguaggio della scienza

1.1 L'argomento "Astronomia di posizione e geometria dello spazio", inserito nella discussione sulla didattica della matematica, può essere inquadrato ragionevolmente - a parere di chi scrive - nel grande argomento della matematizzazione della realtà. In altre parole, le osservazioni sui moti degli astri, della sfera celeste e dei pianeti, possono costituire uno stimolo efficace per la costruzione della geometria dello spazio; ed in questo ordine di idee la geometria può essere considerata come il " primo capitolo della fisica", cioè come il primo passo verso la matematizzazione della esperienza sensibile. Invero, in certo senso, la geometria dello spazio fisico può essere considerata come una dottrina che razionalizza le nostre esperienze sui corpi rigidi, almeno per quanto riguarda la loro mutua posizione e la loro forma; e quindi i postulati della geometria classica (euclidea) potrebbero essere considerati come delle ipotesi iniziali, dei "principi" secondo la visione classica, che sono fondati su una evidenza sperimentale accettata come di valore assoluto, e che a loro volta fondano tutta la costruzione teorica successiva, che costituisce una spiegazione razionale delle proprietà geometriche dei corpi. Inoltre i contenuti offerti dalle osservazioni e dalla astronomia di posizione debbono poter servire anche come stimolo per un passo ulteriore, al di là della geometrizzazione della realtà, e cioè per la costruzione e lo studio di quegli strumenti matematici che sono fondamentali per ogni operazione di matematizzazione della realtà sensibile. A nostro parere infatti uno dei problemi didattici fondamentali della matematica potrebbe essere formulato dicendo che, ad ogni fase dello sviluppo intellettuale del discente, deve corrispondere un insegnamento ad un tale livello di astrazione e di rigore che il discente stesso sia stimolato non soltanto all'impiego del linguaggio matematico per conoscere certi contenuti, ma anche allo studio degli strumenti matematici presi in sè, perchè può constatare direttamente la potenza e la fecondità degli strumenti concettuali e formali che la matematica gli offre per la conoscenza della realtà; in modo che da questa constatata potenza e fecondità il discente sia indotto anche all'apprendimento rigoroso del linguaggio matematico fatto oggetto di studio a sè stante.

In questo ordine di idee si può pensare che l'apprendimento della matematica, intesa come linguaggio fondamentale della conoscenza scientifica, debba in qualche modo seguire le stesse fasi dell'apprendimento di una lingua comune, per esempio della lingua materna: ad una prima fase di apprendimento, nella quale la lingua viene usata per imitazione, e nella pratica quotidiana delle necessità della vita e delle relazioni elementari della società, segue una fase nella quale la lingua stessa diventa oggetto di studio, nella sua morfologia e nella sua sintassi. In questo modo il discente prende coscienza del fatto che egli non soltanto riesce ad esprimere le proprie idee con maggiore chiarezza e precisione, ma riesce anche ad avere un maggiore numero di idee. Sarebbe invece a nostro parere contestabile uno studio della lingua che, come primo passo, facesse la lingua stessa oggetto di studio, senza che la constatazione delle possibilità espressive legate all'uso della lingua, come mezzo di conoscenza e di interpretazione del mondo esterno, giustifichi la fatica e l'impegno dell'apprendimento.

Pensiamo che si possano ripetere delle considerazioni analoghe per quanto riguarda lo studio della matematica, almeno - ripetiamo - nel suo aspetto di linguaggio della scienza. E' tuttavia da ricordare il fatto che in generale il linguaggio matematico è privo di ridondanze, ha una precisione molto superiore a quella del linguaggio comune, e permette delle deduzioni rigorose, che si riducono spesso a delle manovre sui simboli secondo leggi formali, e cioè a dei calcoli. E queste circostanze rendono l'insegnamento della matematica spesso più gravoso di quello del linguaggio letterario, ma ne fondano anche il valore formativo, come stimolo all'astrazione ed alla concettualizzazione chiara, precisa senza sbavature, ed alla deduzione coerente e rigorosa.

L'evoluzione storica del progresso mostra i successi del metodo matematico adottato come linguaggio principale della scienza; e proprio in questa evoluzione storica si possono trovare numerosi spunti didattici stimolanti.

1.2 E' un luogo comune che la geometria e l'astronomia siano fra le scienze, le più antiche. E' questione invece più discussa quella che riguarda i motivi per i quali queste due scienze siano emerse ed abbiano poi avuto sin dai tempi più remoti quel grandioso sviluppo, ancora in atto. Personalmente, siamo convinti che la curiosità, come affermava il Bailly nella sua celebre "Storia dell'Astronomia"(1), ed i problemi strutturali, come sembrano propugnare i più accesi sostenitori dello approccio assiomatico in campo geometrico, costituiscano <u>una</u> componente fra quelle responsabili della crescita di questa, come di altre scienze, mentre siamo più propensi a ritenere che motivazioni più profonde, di carattere *problematico* , stiano alla base non solo dell'emergere ma anche della rinascita e delle rivoluzioni che in epoche cruciali hanno caratterizzato lo sviluppo di queste stesse scienze (2). Non è tuttavia questa la sede più adatta per motivare simili opinioni, ci preme invece sviluppare alcune riflessioni, apparentemente estranee alla questione posta, in merito allo stretto legame che, in alcune circostanze storiche di non secondario rilievo, si è manifestato fra i problemi astronomici e modelli e teorie geometriche. L'interesse di questo accostamento è a nostro avviso duplice, poichè se da una parte esso si ricollega in qualche modo direttamente al problema posto in precedenza, riguardante l'origine e lo sviluppo dell'astronomia e della geometria, di notevole rilievo storiografico ed epistemologico, sul quale, ripetiamo, non intendiamo qui soffermarci, dall'altra, la possibilità di mettere in evidenza i nessi esistenti fra problematiche astronomiche e soluzioni geometriche, presenta a nostro avviso interessanti implicazioni di carattere didattico ed interdisciplinare, che si prestano ad individuare nuovi possibili territori di programmazione dell'insegnamento della matematica, ma anche dell'astronomia, nella scuola secondaria superiore.

Possiamo infatti già sin d'ora anticipare che le problematiche astronomiche che saranno prese a pretesto per altrettanti approcci geometrici e che, in altre parole, costituiscono, o hanno costituito, le motivazioni per proporre ed elaborare teorie geometriche, sono tutte contenute nei programmi ministeriali della scuola secondaria superiore. La stessa definizione di "astronomia matematica", con la quale i programmi di astronomia sono presentati nella scuola secondaria, nella misura in cui riflette una visione assai riduttiva dell'astronomia, costituisce una conferma, a livello semantico, dell'esistenza di una connessione non marginale fra alcune aree della conoscenza astronomica e sviluppi matematici e geometrici.

2. - Geometria ed astronomia:storia di una relazione.

2.1 Lo sviluppo dell'astronomia nell'antichità, le cui fasi iniziali si possono identificare con l'emergere della civiltà babilonese, è essenzialmente basato sulla definizione empirica di relazioni fra diversi fenomeni astronomici periodici, legati al moto della Luna ed al moto apparente del Sole, e sulla istituzione di un sistema preciso di riferimento sulla sfera celeste, rispetto al quale potessero essere riferite le posizioni delle stelle e degli altri corpi celesti, e definiti i movimenti di questi stessi corpi per mezzo di teorie e modelli matematici. L'elaborazione di questi ultimi e lo sviluppo della matematica e della algebra babilonese appaiono strettamente connesse con motivazioni e problematiche di carattere astronomico. Lo stesso successivo sviluppo della geometria euclidea e archimedea in Grecia è stato largamente influenzato da problemi di carattere numerico e grafico la cui origine non è difficile da individuare in una serie di quesiti e di sollecitazioni di derivazione astronomica(3).L'ampio sviluppo di queste tecniche e di algoritmi geometrici e matematici per la soluzione di problemi astronomici costituisce anzi il dato peculiare di un aspetto del concetto di "matematizzazione" dei fenomeni naturali come si era sviluppato nella scienza greca ed alessandrina. Aspetto che si identifica con lo sforzo dei filosofi naturalisti, degli Ionici, fino ad Eudosso, Apollonio, Archimede e

Tolomeo di rendere ragione, di spiegare l'essenza delle cose, enunciando delle ipotesi sulla costituzione del mondo, che fondasse attraverso il procedimento deduttivo, la spiegazione delle cose stesse.

L'altro aspetto, di origine pitagorica, pone invece l'idea stessa di numero e di figura geometrica come fondamento della realtà oggettiva e tende quindi a considerare la matematica e la geometria non come strumento per interpretare la natura ma come sostanza della stessa realtà naturale. Se riteniamo infatti valido l'imperativo fonda mentale della scienza greca, secondo la quale ogni teoria deve " sozein tà fainòmena", cioè rendere ragione delle cose così come appaiono (i fenomeni), bisogna riconoscere che tale imperativo è stato interpretato in modo del tutto opposto dai filosofi naturalisti e da quelle correnti di pensiero che più di altre risentiranno l'influenza delle concezioni metafisiche di Platone. L'influsso di queste concezioni è più evidente nel periodo pre-alessandrino ma si ritrova anche successivamente nella misura in cui le applicazioni della matematica e lo sviluppo di nuovi algoritmi matematici venivano praticamente finalizzati per rappresenta re i fenomeni, con scarsa preoccupazione in merito alla realtà fisica di questi ultimi. Così, ad esempio, non solo il calcolo delle eclissi era basato su tabelle che fornivano la grandezza delle eclissi mese per mese, quando in realtà questi fenomeni si presentano ad intervalli di 5 - 6 mesi, ma le stesse tabelle delle eclissi e del moto dei pianeti erano fondate su scarsi elementi osservativi, mentre veniva prestata la più grande attenzione al problema di costruire modelli matematici formalmente corretti (4). Questa tendenza a ridurre il peso dei dati empirici allo stretto indispensabile, se riflette certamente la scarsa attendibilità che veniva allora attribuita ai dati osservati a causa della notevole incertezza di questi ultimi, esprime, come si è detto, un orientamento presente in una parte della scienza greca ed ellenistica. La tendenza cioè ad enfatizzare il metodo deduttivo ed a considerare la dimostrazione matematica più che come linguaggio "della" scienza come linguaggio "nel" quale la scienza dovrebbe in qualche modo riconoscersi.

Malgrado questa tendenza alla formalizzazione dei fenomeni naturali, resta il fatto che in epoca ellenistica l'affermarsi di metodi matematici e geometrici appare quasi sempre associato alla soluzione di problemi di ordine pratico. Ciò è particolarmente interessante per quanto riguarda i nessi fra problematiche astronomiche e lo sviluppo di teorie geometriche. Ed è su questi accostamenti che riteniamo opportuno attirare l'attenzione anche per il valore didattico e metodologico che attribuiamo a questo tipo di approccio alla geometria, con particolare riferimento ai programmi di insegnamento della scuola secondaria superiore.

2.2 Speciale importanza i problemi astronomici hanno avuto come stimolo allo sviluppo della geometria sferica e della geometria descrittiva(5). E' tuttavia necessario segnalare che nel periodo ellenistico e nella astronomia alessandrina buona parte dei problemi che oggi afferiscono alla geometria dello spazio erano ridotti a problemi piani mediante una oculata combinazione di elementi di geometria descrittiva e proiettiva e di metodi trigonometrici. La trigonometria piana, di derivazione babilonese, era essenzialmente basata sull'impiego di tavole delle corde che sottendono ad un dato angolo in un cerchio di raggio unitario, invece che sullo uso di funzioni trigonometriche la cui introduzione avvenne molto più tardi (6). Il legame tra le due funzioni si ha dalle relazioni (fig.1)

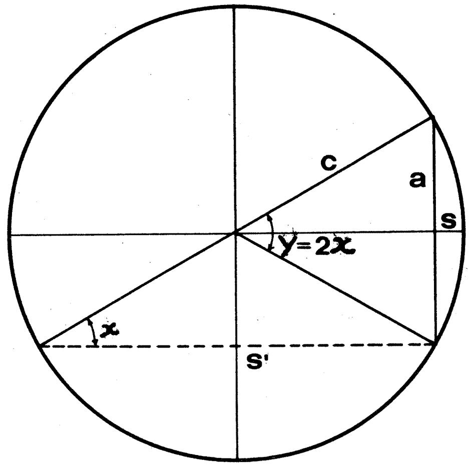

Figura 1

$\mathrm{crd}\ 2x = 2a/c$

$\sin x = a/c \qquad (c=1)$

da cui si deduce

$\mathrm{crd}\ 2x = 2 \sin x.$

Nell'Almagesto, Tolomeo (II sec. d.C.) calcola una tavola delle corde di mezzo in mezzo grado facendo ricorso alle relazioni

$$s_n = \mathrm{crd}\ y_n = \mathrm{crd}\ (360/n)$$

$$s'_n = \mathrm{crd}\ (180 - y_n) = (4c^2 - s_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

che legano il lato s_n di un poligono regolare all'angolo al centro (fig.1), e ad un importante teorema sui quadrilateri iscritti in un cerchio che permette di trovare il valore di crd (x+z) e di crd (x/2) (7).

Facendo uso di questo algoritmo e della teoria degli epicicli, sviluppata da Apollonio (267? -190?) proprio per spiegare il moto irregolare della Luna e del Sole, ma soprattutto dei pianeti, Tolomeo costruì, come è noto, un modello geometrico dell'universo che costituì, sino a Copernico, un punto di riferimento anche per i successivi sviluppi della astronomia araba.

E' facile osservare che la teoria degli epicicli che sta a fondamento del modello Tolemaico, richiede essenzialmente l'uso di tavole trigonometriche e la conoscenza della geometria del cerchio e della sfera su cui torneremo fra breve(8). Se riferiamo i movimenti dei corpi celesti ad un sistema di coordinate eclittiche geocentriche (fig. 2), usate da Tolomeo, ma già note ai babilonesi a cui risale la scoperta dello Zodiaco (prima del IV sec. a. C.), si ha, con notazioni moderne, per le coordinate ortogonali di un punto P_2 che ruota con velocità uniforme attorno ad un centro P_1, pure esso mobile con moto regolare lungo una circonferenza:

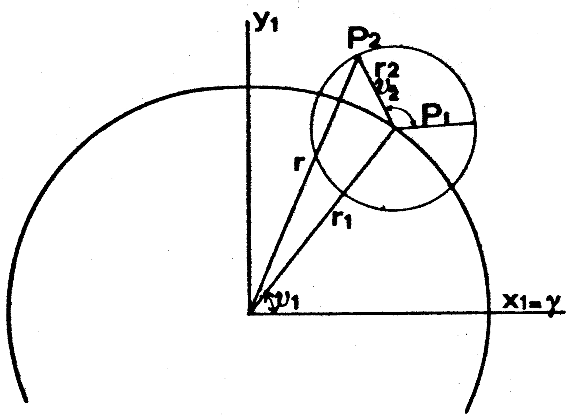

Figura 2

$x_2 = r_1 \cos v_1 + r_2 \cos v_2$ $\qquad$ $y_2 = r_1 \sin v_1 + r_2 \sin v_2$

in cui r_1 ed r_2 sono rispettivamente i raggi del cerchio deferente e dello epiciclo, mentre,

$v_1 = v_{0,1} + n_1(t-t_o)$ $\qquad$ $v_2 = v_{0,2} + n_2(t-t_o)$,

sono le anomalie vere, espresse in funzione dei moti medi n e del tempo t.

Le coordinate polari di P_2 sono invece date dalle espressioni:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1),$$

$$\sin(v - v_1) = \frac{r_2}{r} \sin(v_2 - v_1).$$

Le quali esprimono moti generalissimi, che si riducono, come è facile osservare, anche a traiettorie ellittiche se si pone $v_1 = -v_2$.

La teoria di queste ultime curve, e cioè delle sezioni coniche, sviluppata nell'antichità da Eudosso (408? - 355) e da Menecmo (c. 350 a.C.) discepolo di Platone, e che trova completa sistemazione nell'opera di Apollonio, ebbe origine invece dallo studio delle curve generate dalla proiezione dell'ombra del Sole su una superficie piana e cioè dallo studio degli orologi solari (9). Questa teoria ebbe inoltre stretti legami sia con la "algebra geometrica" così come essa si presentava all'epoca di Archimede e di Apollonio, sia con altre importanti applicazioni astronomiche. In particolare la teoria delle sezioni coniche presenta stretti collegamenti, come conseguenza di un teorema provato da Apollonio (10), con la teoria delle proiezioni stereografiche di cerchi sulla sfera in cerchi sul piano, che tanta importanza rivestì nella progettazione e costruzione di astrolabi, e cioè degli strumenti più versatili conosciuti nell'antichità ed usati per la determinazione delle distanze angolari di oggetti celesti e terrestri dall'orizzonte o dallo zenit, per il calcolo della posizione del Sole e delle stelle rispetto al meridiano ed all'orizzonte e per la determinazione della latitudine e dell'ora.

Il metodo delle proiezioni stereografiche, attribuito ad Ipparco ed usato da Tolomeo nel suo "Planisphaerium", assume grande importanza storica e didattica, poichè costituì in un'epoca in cui la trigonometria sferica era sconosciuta, l'unico mezzo per risolvere i problemi sferici.

Ad un livello qualitativo la geometria della sfera era stata già studiata da Eudosso e nel IV sec. a.C., mentre Euclide ed Autolico affrontarono in modo abbastanza primitivo problemi di astronomia sferica. Solo successivamente tuttavia, con l'introduzione dei concetti di coordinate e di sistemi di coordinate celesti si apre la possibilità di risolvere direttamente i problemi sferici, che così grande rilievo presentano in astronomia sferica. Alla base di questi sviluppi sta un teorema dimostrato da Menelao (c. 100 d.C.) - il quale stabilì per primo che la geometria sferica doveva essere basata sulla considerazione di archi di cerchio massimo - riportato nell'Almagesto di Tolomeo. Si rese così possibile risolvere importanti problemi di trasformazione delle coordinate. Sulla sfera celeste infatti, sempre con le notazioni attuali, gli elementi del triangolo sferico SP_iP_j, nel quale S è la posizione dell'astro osservato e P_i, P_j sono i poli dei cerchi massimi di riferimento C_i e C_j (fig. 3),

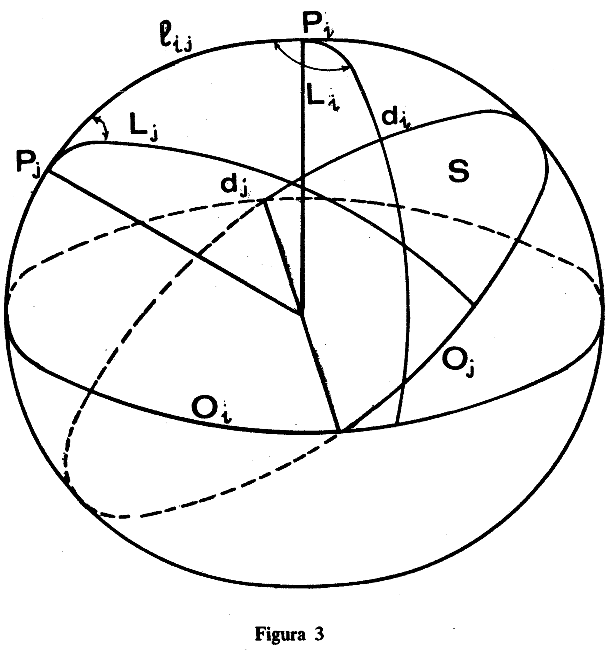

Figura 3

sono legati dalle seguenti semplici relazioni trigonometriche:

$\cos d_j = \cos d_i \cos l_{ij} + \sin d_i \sin l_{ij} \cos L_i$,

$\sin d_j \cos L_j = \cos d_i \sin l_{ij} - \sin d_i \cos l_{ij} \cos L_i$,

$\sin d_j \sin L_j = \sin d_i \sin L_i$.

Come si è già detto, oltre alle coordinate sferiche orizzontali riferite all'orizzonte ed allo zenit, già all'epoca di Ipparco erano usate le coordinate <u>equatoriali</u>, riferite all'equatore ed al polo Nord celeste, e le coordinate <u>eclittiche</u>, riferite invece all'eclittica ed al polo boreale di quest'ultima. Accanto a questi sistemi altrettanto antico è il sistema cosiddetto di coordinate <u>orarie</u>. I piani di riferimento fondamentali, fra loro ortogonali, di questi sistemi sono così rappresentati:

Sistema di riferimento	Piani di riferimento fondamentali	
Orizzontale	Orizzontale	Meridiano
Orario	Equatore	Meridiano
Equatoriale	Equatore	Cerchio orario per gli equinozi
Eclittico	Eclittica	Coluro per gli equinozi

Con riferimento a questi piani è possibile definire poi le coordinate sferiche di un punto S della sfera celeste. Il nome della coordinata ed il valore che assumono gli elementi <u>d</u> ed <u>L</u> del generico triangolo sferico SP_iP_j in funzione di queste stesse coordinate, risultano:

Sistema di riferimento	Coordinate sferiche	d	L	l_{ij}
Orizzontale	z = distanza zenitale	z	$180-A$	
	A = azimut			$90-\varphi$
Orario	d = distanza polare	d	H	
	H = angolo orario			
Equatoriale	d = distanza polare	d	$90+\alpha$	
	α = ascensione retta			ε
Eclittico	e = distanza polare	e	$90-\lambda$	
	λ = longitudine			

I parametri φ ed ε necessari per permettere la trasformazione reciproca delle coordinate orizzontali ed orarie e delle coordinate equatoriali ed eclittiche, sono semplicemente la latitudine astronomica del luogo di osservazione e l'obliquità dell'eclittica. Il passaggio infine dalle coordinate orarie a quelle equatoriali e viceversa è retto dalla semplice relazione $t = H + \alpha$, essendo t il tempo siderale, definito anche come angolo orario dell'equinozio di primavera.

3.- Geometria e astronomia: proposte didattiche

3.1 Lo stesso legame operativo che sussiste fra concetti e problemi astronomici e geometrici, suggerisce, a nostro avviso, nell'ambito della geometria euclidea, alcune proposte didattiche a livello della scuola secondaria che tenteremo qui di delineare (11). Come si è visto, l'osservazione dei fenomeni astronomici può fornire molte e fondamentali occasioni per la spiegazione scientifica della realtà. In questo ordine di idee- ripetiamo- la geometria ci si presenta quindi come il primo momento della spiegazione, una prima schematizzazione del cosmo, operata a livello geometrico. Questa "spiegazione" del mondo fisico, per esempio quella che Euclide dà con i suoi postulati, cioè con le ipotesi fondamentali della sua geometria può condurre, e conduce di fatto storicamente, ad un'ulteriore analisi quantitativa dei fenomeni. Rimane pertanto solo un ulteriore facile passo da compiere per passare dalla spiegazione puramente geometrica alla descrizione delle cose che viene fatta mediante i numeri, attraverso l'operazione di misura.

Sempre seguendo lo stesso ordine di idee, la figura elementare costituita dalla superficie sferica (che nel seguito indicheremo brevemente col vocabolo "sfera") fornisce un primo oggetto di attenzione e di studio. A titolo puramente esemplificativo potremmo citare gli argo menti che riguardano i poligoni sferici (in particolare i triangoli sfe rici) ed i problemi che si connettono ad essi. In questo campo numerosi sono gli spunti didattici che l'insegnante potrebbe identificare ed utiliz zare, e ci limitiamo qui ad indicarne alcuni.

Anzitutto la osservazione del fatto che la superficie sulla quale noi viviamo non è un piano; e quindi che quella superficie piana, che ci appare come la superficie più semplice ed elementare, in forza di una elaborazione fantastica della realtà sperimentale, non è affatto la superficie sulla quale ci accade di dover realmente vivere e operare. Da questa constatazione si potrebbe passare alle considerazioni riguardanti la similitudine, la esistenza di una unità di misura "naturale" per le lunghezze nel caso della sfera (ed il relativo collegamento storico con la vicenda della definizione del metro) e l'insieme dei problemi riguardan ti la rappresentazione piana, o su superfici che si sviluppano su un pia no, di una sfera, con le rilevanti applicazioni geodetiche e cartografiche ed i problemi di proiezione stereografica, i cui risultati astronomici riguardanti in particolare la teoria degli orologi solari e dell'astro labio sono stati illustrati in precedenza. A questi temi si potrebbero collegare problemi di conciliazione tra esigenze pratiche e opportunità di conservazione di certe proprietà. Riteniamo inoltre che un approccio geometrico che vada al di là della geometria dell'eguaglianza e della simi litudine e che affronti, sia pure in modo elementare, lo studio delle proprietà proiettive delle figure geometriche del piano e della sfera tro vi abbondanti agganci in altri campi dell'insegnamento (si pensi all'impor tanza dell'uso della proiettività per una piena comprensione dell'arte ri nascimentale (12). In generale, si potrebbe dire che il confronto del piano con la sfera potrebbe dare occasione a tutta una gamma di spunti didattici, e condurre ad analizzare e ad approfondire l'analisi dei punti di partenza e del significato della costruzione della geometria delle due superfici.

Collegati con i problemi della rappresentazione della sfera sono, come si è detto, anche i problemi che riguardano la proiezione, e questa operazione è strettamente collegata col problema della definizione e dello studio delle coniche sulla cui importanza astronomica pensiamo sia superfluo insistere.

3.2 Dagli argomenti a cui abbiamo brevemente accennato si può passare facilmente a quelli che riguardano più genericamente la rappresentazione della realtà con l'impiego del linguaggio matematico. In questo campo l'operazione fondamentale è quella della misura delle grandezze. Un approccio geometrico della teoria della misura costituisce a nostro avviso una via di notevole valore euristico per una più profonda comprensione del significato dei processi di "matematizzazione" come punto di equilibrio fra la necessità del "rigore matematico" e quella della "approssimazione fisica". In questo ordine di idee gli argomenti tratti dalla astronomia di posizione possono offrire numerose occasioni per far notare la precisione e la fecondità degli strumenti offerti dalla matematica; addirittura possono aiutare a far capire come <u>non</u> si potrebbe dare, spesso, alcuna conoscenza scientifica che prescinda dalla matematica. E permettono inoltre di far capire come gli strumenti matematici si inseriscano nel procedimento tipico fondamentale della scienza moderna, procedimento costituito dal continuo ciclo formato dalla formulazione delle ipotesi, dalla deduzione, dalla conferma o falsificazione sperimentale, dallo stimolo alla formulazione di ulteriori ipotesi.

In questo campo si presentano numerose le occasioni per lo impiego delle convenzioni della geometria analitica, e degli sviluppi della trigonometria piana e sferica (13). In tal modo queste dottrine cesserebbero di avere il carattere di insiemi di formule astratte e poco motivate, ma potrebbero acquistare l'aspetto di procedimenti molto semplici per rappresentare con numeri e con formule le relazioni e le proprietà degli enti della geometria, e per risolvere i problemi di questa scienza. Pure su questa linea si pongono i problemi riguardanti i sistemi di coordinate ed i cambiamenti dei sistemi di riferimento; i problemi collegati con quelli della ricerca di invarianti e quindi di proprietà obiettive delle realtà osservate, indipendentemente dalle diverse circostanze nelle quali si trova l'osservatore o delle diverse convenzioni adottate da questi.

E qui si potrebbe offrire la possibilità di osservare che le diversità di collocazione dell'osservatore possono essere utilizzate e messe a profitto per le misure, come avviene per esempio nel caso della parallasse per misurare la distanza dei corpi celesti.

Infine l'astronomia di osservazione può offrire un campo di considerazioni molto feconde a proposito del significato delle leggi fisiche e dei procedimenti che conducono alla loro formulazione. Si hanno infatti numerose occasioni per analizzare il significato della precisione delle osservazioni, il significato degli errori e dei procedimenti teorici per minimizzare gli errori. Collegati con questi argomenti sono anche quelli che si riattaccano alle operazioni con numeri approssimati, ed al significato delle informazioni che ci sono offerte dalle operazioni su numeri cosiffatti. Nello stesso ordine di idee entrano le considerazioni che si ricollegano alle operazioni di interpolazione (con le applicazioni degli sviluppi in serie) e di calcolo, con valori forniti dalle tavole numeriche o dalle macchine.

La storia delle vicende della scienza fisico-matematica può fornire molti spunti didattici per l'insegnamento della matematica e della fisica. Infatti sarebbe forse un poco imprudente liquidare le teorie dei secoli scorsi come "sbagliate" o "superate"; invero lo studio della storia del pensiero scientifico offre spunti di meditazione sul vero significato della conoscenza scientifica e sui suoi successi, ed anche sui suoi limiti.

Per concludere ci pare che l'idea di collegare in qualche modo l'insegnamento della geometria a concetti e fenomeni di carattere astronomico possa costituire, non solo dal punto di vista storico, un significativo punto di riferimento per sviluppare proposte di itinerari didattici nuovi nell'insegnamento della matematica.

Note e riferimenti bibliografici

(1) Bailly J.S., La storia dell'astronomia, Bassano, Remondini,1791.

(2) Su questo tema si veda l'interessante intervento di F.E. Browder in Proceed. of the American Academy Workshop on the Evolution of Modern Mathematics (Boston, Mass., 1974).

(3) Ampi riferimenti agli stimoli che l'astronomia ha avuto nello sviluppo della matematica greca ed alessandrina sono dati nel volume di O. Neugebauer, The exact Sciences in Antiquity, Dover Public. New York, 1969, (trd. it., Le scienze esatte nell'antichità, Feltrinelli, 1975).

(4) Un esempio della maggiore confidenza che gli antichi assegnavano ai dati calcolati rispetto a quelli dedotti dagli strumenti di osservazione è dato dal fatto che anche Tolomeo determinava le coordinate eclittiche delle stelle con riferimento alla posizione della Luna, la cui longitudine veniva dedotta direttamente dalla teoria del moto (cfr. Neugebauer, The exact sciences in antiquity, p. 185).

(5)Cfr. in particolare l'opera citata di Neugebauer e, dello stesso autore: A History of Ancient Mathematical Astronomy (Three parts), Springer - Verlag, 1975.

(6)Le funzioni seno e coseno vennero introdotte dall'astronomo indiano Aryalhatta (nato 476 d.C.), quelle di tangente e cotangente dallo arabo Alhabas (770 - 870?), che le usò per la determinazione della lunghezza dell'ombra di uno gnomone.

(7)Cfr. Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy, p. 22.

(8)Nell'Almagesto di Tolomeo sono date molte interessanti applicazioni della trigonometria piana alla soluzione di complessi problemi astronomici, come ad esempio il problema di trovare la lunghezza del raggio dell'epiciclo lunare e la posizione dell'apogeo dell'orbita della Luna (Cfr. Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy, pag. 210 - 214).

(9)Cfr. Neugebauer, The exact Sciences in Antiquity, p. 218. Si veda anche dello stesso autore: On the Astronomical origin of the theory of Conic Sections, Proc. Amer. Philos. Soc., 92,1948, pag.136-138. Secondo Neugebauer la teoria degli orologi solari è probabilmente alla origine anche di uno dei classici problemi della matematica greca e cioè del problema della trisezione degli angoli.

(10)Apollonio, Coniques, par Paul Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1959,p.9.

(11)Ci pare opportuno segnalare che anche nell'ambito della geometria non euclidea esistono importanti connessioni fra strutture geometriche e fenomeni astronomici. Basta pensare ai moderni problemi cosmologici ed allo stretto legame che la relatività assegna alla geometria ed alla fisica dello spazio.

(12)Un interessante approccio agli stimoli ed alle applicazioni della geometria proiettiva in epoca rinascimentale si trova in M. Kleine, Mathematics in Western Culture, Oxford Univ. Press, 1953 (trad. it., La matematica nella cultura occidentale, Feltrinelli, 1976). In particolare si vedano il Cap. X (Pittura e prospettiva) ed il Cap. XI (Una scienza figlia dell'arte: la geometria proiettiva).

(13)I fondamenti di trigonometria piana e sferica sono stati sostanzialmente basati in epoca alessandriana sui teoremi di Tolomeo e di Menelao che presentano ancora oggi indubbio interesse didattico.

INTERVENTI NEL DIBATTITO

Artiaco: La relazione che abbiamo ascoltato riguarda (nei suoi sviluppi tecnici e didattici) la scuola media superiore. Come insegnante della scuola media dell'obbligo penso che argomenti di astronomia collegati alla costruzione di abilità geometriche possano essere trattati anche nella scuola elementare e media. In effetti capita spesso di sentire bambini che fanno domande del tipo: dove va il sole di notte? Quando ci sono le nuvole il sole sorge? Dove è attaccata la terra?.... Si tratta di domande che non sono solo i bambini più "acculturati" a porsi; costruire una risposta ad esse attraverso il lavoro scolastico può avere la funzione non solo di fare conoscere le risposte giuste ma anche di stimolare nei bambini e nei ragazzi una curiosità positiva verso la cultura e ciò può aumentare la motivazione allo studio anche in altri campi (sappiamo bene come operatori nella scuola quanto sia a volte difficile far superare ai ragazzi il senso di estraneità che essi provano nei confronti dei fatti culturali!). Inoltre a livello di scuola media argomenti di astronomia si prestano assai bene a rendere concreto il tema dei programmi ministeriali "geometria come prima rappresentazione del mondo fisico" (per un esempio di programmazione e sperimentazione in questa direzione rinvio alla documentazione annuale stampata dal gruppo C.N.R. di Genova).

Vorrei ora entrare brevemente nel merito della relazione. Il limite che mi pare di cogliere in una esposizione del tipo di quella ascoltata qui è che non si esce dal rapporto geometria - astronomia nel senso che manca qualsiasi sistema di riferimento a cui ancorare questo rapporto. Su quali bisogni di conoscenza esso si è sviluppato? A quale realtà storica, economica, culturale è intrecciata l'evoluzione delle conoscenze scientifiche in campo astronomico? O le conoscenze scientifiche in questo campo sono frutto soltanto di attività speculative "disinteressate"?

Mi rendo conto che quando un insegnante si preoccupa di motivazioni alla conoscenza che non si riducano soltanto al piacere di conoscere in sè la reazione più immediata è quella di credere che non si voglia approfondire (ad esempio) la trigonometria o la geometria ma che ci si voglia rifugiare in una superficiale " storia della scienza" o "filosofia della scienza" saltando a piè pari il problema della costruzione delle abilità disciplinari e del loro possesso analitico ed ap profondito. A mio parere invece (ed è su questa ipotesi che lavoriamo a Genova) la costruzione della capacità di matematizzare fatti reali a qualsiasi livello (elementare, medio, superiore,...) raggiunge un maggiore grado di consapevolezza e di gratificazione se legata al contesto ed alle motivazioni per cui le conoscenze scientifiche si sono sviluppate nella storia. "Possesso consapevole degli strumenti disciplinari " non vuol dire "capacità di capire e ripetere dimostrazioni" ma capacità di loro uso in situazioni diverse, di loro adattamento a problemi nuovi; una tale consapevolezza è favorita e stimolata dalla conoscenza delle problematiche a cui quegli strumenti hanno dato una risposta e da cui hanno ricevuto l'impulso all'approfondimento "interno" ed alla sistemazione teorica.

Proprio nel cercare di costruire abilità geometriche collegate a problemi astronomici in I° media ci siamo accorti che occorreva da parte nostra approfondire i legami esistenti nelle diverse epoche storiche tra astronomia e agricoltura,tra astronomia e potere religioso, tra astronomia e viaggi in mare aperto, altrimenti tutto si sarebbe ridotto ad una "trovata" didattica per introdurre la geometria in modo più piacevole. Non si tratta di suggerire agli allievi facili determinismi nella complessa dinamica dei rapporti tra società e conoscenze scientifiche, nè tantomeno di presentare una matematica al servizio dell'agricoltura, quanto di cogliere problematicamente l'intreccio tra scienza e bisogni degli uomini.

E' per questa strada, a mio parere, che passa la "ricomposizione della luce bianca" di cui si parlava nella relazione (ove per "luce bianca" si intende la"realtà"), altrimenti il processo che si mette in moto è solo una ricomposizione parziale tra discipline che lascia la realtà scomposta in uno spettro sempre più indistinto.

Boero: La relazione che abbiamo ascoltato concerne alcuni aspetti del rapporto tra geometria ed astronomia; dal punto di vista didattico mi sembra opportuno accennare ad altri collegamenti tra geometria e matematica che possono consentire di inquadrare meglio lo stesso rapporto tra geometria e astronomia in sede storica ai fini di un più efficace lavoro in classe.

Anche senza voler accettare la tesi di Neugebauer ("Le scienze esatte nell'antichità", ed. Feltrinelli) secondo cui l'astronomia babilonese ed egizia si sarebbe sviluppata più su un supporto di tipo aritmetico che su un supporto di tipo geometrico, è evidente (in base alla documentazione storica disponibile) che alle origini lo sviluppo della conoscenza astronomica si intreccia con lo sviluppo del calcolo aritmetico e insieme con lo sviluppo della geometria; problemi come quello della costruzione dei calendari e della previsione delle eclissi non sono nemmeno formulabili senza un supporto concettuale di natura aritmetica!

Nell' "Almagesto" di Tolomeo la costruzione delle "tavole delle corde" pone problemi di natura geometrica (risolti ricorrendo all'armamentario dei teoremi scoperti e dimostrati nei secoli precedenti) e problemi di calcolo intrecciati ai precedenti (ordini di approssimazione nel calcolo delle radici, scansione delle tavole.....).

In epoca moderna lo studio delle orbite non è solo "geometria delle orbite" ma anche"calcolo delle orbite" (con tutti i problemi di elaborazione dei dati sperimentali che daranno un potente impulso, all'inizio del XIX secolo, allo sviluppo del calcolo delle probabilità e della statistica).

Dal punto di vista didattico tutto ciò può suggerire (in relazione all'età degli allievi ed alle conoscenze già possedute) interessanti itinerari didattici per presentare l'aritmetica e la geometria, il "calcolo con gli infinitesimi" e la geometria, la trigonometria e la teoria degli errori non come compartimenti stagni ma come "serbatoi di strumenti di indagine scientifica" a cui attingere mezzi importanti e interagenti tra loro per padronanza dei fatti astronomici.

Il rapporto tra geometria ed astronomia può poi suggerire (se collegato all'evoluzione della cultura umana) interessanti spunti di natura didattica per quanto riguarda la scuola secondaria superiore e possibili confronti tra problematiche scientifiche e problematiche storico - filosofiche. Non possiamo dimenticare (e forse sarebbe stato opportuno parlarne estesamente, in una relazione destinata ad un pubblico di insegnanti) che la geometria collegata all'astronomia ha rappresentato storicamente uno dei nodi attorno ai quali si è sviluppato il dibattito sui fondamenti della matematica e, più in generale, della conoscenza scientifica: la "verità fisica" della geometria euclidea ha coinciso per molto tempo con l'identificazione dello spazio in cui si svolgono i fenomeni astronomici con lo "spazio euclideo", la piena legittimità dei modelli non euclidei di "spazio" e la loro pari dignità con lo "spazio euclideo" si è realizzata in connessione significativa con lo sviluppo delle teorie fisiche e astronomiche di questo secolo.

Collegandomi al precedente intervento di Anna Maria Artiaco, mi sembra che i problemi di astronomia siano adatti per piani di lavoro didattico che dalla scuola elementare alle scuole superiori consentono agli allievi di rendersi conto di come la costruzione delle conoscenze astronomiche si è intrecciata , nella storia, alla costruzione e allo uso via via più avanzato e "raffinato" della matematica (geometria, aritmetica, calcolo, statistica...) e all'evoluzione della cultura e dei bisogni degli uomini. Naturalmente, si tratta di dosare opportunamente e graduare le difficoltà "tecniche" e "culturali": alla scuola elementare può bastare confrontarsi con bisogni elementari di conoscenza sui fatti astronomici più "evidenti" per i bambini (movimenti apparenti della luna e del sole, regolarità delle ombre e dei loro movimenti...), al liceo può essere utile (accanto ad un approfondimento tecnico della trigonometria e della geometria nello spazio) una informazione, condotta quanto più è possibile su testi originali, sulla nascita e sugli sviluppi dell'astronomia moderna e sul significato culturale ed ideologico delle "scoperte" astronomiche.

Gerla: Concordo pienamente sulla esigenza di non dimenticare che la geometria è anche un ramo della fisica, il primo e più importante esempio di organizzazione razionale che l'uomo ha fatto della propria esperienza. Resto però alquanto perplesso circa il tempo da dedicare, nell'insegnamento della geometria, al rapporto geometria - astronomia.

Infatti se la geometria è, al momento del suo costituirsi, formalizzazione dell'esperienza, credo che l'esperienza cui deve fare riferimento un insegnante debba essere principalmente quella che è naturale patrimonio di ogni studente: quella della riga e del compasso, del movimento dei solidi, della misurazione delle distanze.

Inoltre lo studio dell'astronomia se ha il pregio indiscutibile di stimolare l'interesse e la fantasia degli studenti, presenta anche un pericolo. Se a tale studio non dovesse corrispondere anche, ad esempio, lo studio della matematica finanziaria, del calcolo delle probabilità, della statistica, dei calcolatori tascabili e, più in generale, della storia contemporanea, della economia, del diritto, dell'educazione civica, verrebbe a rafforzarsi in tali studenti il convincimento che la scienza, e più in generale la cultura, abbia poco a che fare con i problemi posti dalla vita quotidiana e con la propria futura professione (la cultura come hobby). Vista così la scienza può diventare al più uno strumento di evasione, e quindi potenzialmente di alienazione, non certo di conoscenza.

Speranza: Sappiamo che la geometria tridimensionale ha visto ridurre notevolmente il suo "spazio" nelle Scuole superiori. In effetti, una trattazione rigorosa della geometria, più che l'apprendimento e la comprensione immediata di aspetti geometrici ha per scopo la presentazione di un sistema razionale(cfr. ad es. (1)). Bisogna trovare, in tutte le fasce scolastiche, delle motivazioni alla trattazione della geometria spaziale; e fra queste mi sembrano particolarmente notevoli l'astronomia, la cristallografia e i metodi di rappresentazione grafica.

L'astronomia può fornire ottime motivazioni a livello sia di scuola elementare, sia di scuola media, sia di scuole superiori. Rispetto alle elementari, nelle medie si cercherà di porsi più sistematicamente "al di fuori della Terra", e si farà più precisa la costruzione di modelli matematici. Nelle scuole superiori si utilizzeranno strumenti matematici più potenti (trigonometria, calcolo infinitesimale). Ma ad ogni livello (e soprattutto nella scuola dell'obbligo) occorre partire dai dati sperimentali, cioè da quello che osserviamo effettivamente. Un confronto fra il"sistema geocentrico rudimentale" (quello che tiene conto solamente dei moti più evidenti), il sistema tolemaico, il sistema copernicano - galileiano, e la versione di Keplero è di estremo interesse come raffronto fra "modelli cinematici" (cfr. (2)). Ho notato che, purtroppo siamo troppo abituati a lavorare in modo deduttivo sul sistema di Keplero - Newton, nella migliore delle ipotesi a spiegare tutto come applicazione delle leggi della dinamica.

Si osservi anche che nelle trattazioni tradizionali (e anche in molti libri anche di buon livello) le distanze astronomiche sono semplicemente <u>date</u>; mentre sarebbe di grande interesse trovarle, o per lo meno studiare dei modi per arrivarci; purtroppo, il più delle volte occorrerebbero delle osservazioni molto precise, o osservazioni al crepuscolo, il che non si accorda con i normali orari scolastici.

Bibliografia

(1) Hans Freudenthal, Mathematics as an Educational Task, Reidel Publ. Comp., Dordretch.

(2) George Polya, Metodi matematici per l'insegnamento delle scienze fisiche, (trad. ital. di B.R. Bellomo Bove), Zanichelli, Bologna 1979.

Pepe: Prodi ci ha ricordato la difficoltà del calcolo effettivo della durata del giorno.E' questo uno dei tanti problemi che si pongono naturalmente, e quindi sono stati posti molti secoli fa, ma che hanno soluzioni non semplici (un problema di questo tipo è la misura del cerchio).

Per tali problemi è quasi impossibile condurre uno studio che ne ripercorra l'evoluzione storica per ragioni di tempo e di effettiva difficoltà. La storia diventa allora espediente retorico (e come tale va giudicato) e contribuisce più che altro all'ampliamento dell'ambito nozionistico.

Il partire da considerazioni di **astronomia sferica** per introdurre lo studio della geometria euclidea porterebbe a sovrapporre a questa un cappello piuttosto ingombrante, tanto è vero che il Clairaut, proponendosi di scrivere un nuovo trattato di geometria "per problemi" (Elemens de gêometrie, 1741, trattato che ebbe larghissima diffusione), dopo aver esaminato la possibilità di partire da problemi astronomici, la escluse preferendo cominciare con le questioni della misura dei terreni, anche questi storicamente alla base della geometria.

Per quanto riguarda il particolare riferimento che avrebbe la astronomia alla geometria dello spazio (euclideo a tre dimensioni) occorre rilevare che se ci si limita all'astronomia sferica questo riferimento può sfuggire, dato che la superficie sferica ha due dimensioni (a questo livello è ragionevole considerare i pianeti ciascuno su una sua sfera).

D'altra parte se certe relazioni di trigonometria sferica si possono ricavare da considerazioni di triedri, queste considerazioni sono sì semplici, ma anche laboriose e forse finirebbero con l'avere in un programma della scuola media superiore uno spazio eccessivo.

Se si esce poi dall'astronomia sferica per un vero problema tridimensionale, si presenta subito almeno il problema dei tre corpi; sole,luna, terra, che come tutti sappiamo è molto difficile. La sua prima semplificazione: due corpi (sole, terra), oltre a farci tornare ancora nel piano, per essere risolto richiede in qualche modo la soluzione di un'equazione differenziale ordinaria che non è agevole ottenere in modo elementare.

Questo non significa che su particolari questioni geometriche un riferimento a problemi dell'astronomia sferica non sia stimolante e la relazione introduttiva è molto interessante per le proposte che contiene.

Si può aggiungere che un'opportuna presentazione della teoria dei logaritmi (argomento che deve avere un suo posto nell'insegnamento della matematica nelle scuole superiori) aderente allo sviluppo storico della teoria, si ottiene confrontando la difficoltà di fare il prodotto di due numeri: $0,a_1a_2a_3...a_7$ e $0,b_1b_2b_3...b_7$ (come spesso era necessario per calcoli astronomici di una qualche attendibilità). Prima si usavano le formule trigonometriche; ad esempio:

$$\text{sen } x \cos y = \tfrac{1}{2}(\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y))$$

e si poneva:

$$0,a_1a_2a_3... = \text{sen} x \quad , \; 0,b_1b_2b_3... = \cos y$$

e si utilizzavano poi delle tabelle per risalire a x e y, si calcolavano $x + y$, $x - y$, si tornava alle tabelle, si risommava e si divideva per due. Con i logaritmi usando la relazione:

$$\log xy = \log x + \log y$$

le operazioni da fare sono solo le seguenti: sommare i valori tabulati $\log x$ e $\log y$, e leggere sulle tabelle l'antilogaritmo di questa somma.

Facchinelli: In un intervento precedente del Prof. Manara si è ribadita la necessità di una autonomia della matematica, di una ragione sufficiente per il suo studio, da ricercarsi all'interno di essa.

Vorrei a questo proposito obiettare, richiamando una situazione di fatto con cui noi insegnanti non possiamo non fare i conti: la reazione di rigetto che l'uomo della strada e anche la persona di cultura, non di formazione scientifica, presenta nei confronti della matematica.

Sono laureato in matematica e ho provato anch'io il fascino per la struttura pura ed incontaminata, come di mondo delle idee platonico, peculiare della matematica, ma temo che sia proprio questa impostazione a causare quell'effetto.

Credo che i matematici non debbano vergognarsi delle umili origini, legate al concreto, che la matematica ha avuto, e che da queste origini debbano invece trarre gli spunti per motivarne lo studio.

Ho fiducia che un insegnamento che si preoccupi di più delle motivazioni, individuabili nelle connessioni con il concreto e con la cultura tradizionalmente intesa, nella rilevanza filosofica della matematica, possa essere lo strumento giusto per evitare la reazione di rigetto.

Naturalmente questa è una speranza, la cui fondatezza potremo verificare solo in futuro. Comunque l'immagine aristocratica di una matematica chiusa nella "turris eburnea" della sua astrattezza mi sembra almeno altrettanto riduttiva di quella gentiliana, di disciplina puramente strumentale alla tecnologia.

Intervengono nel dibattito anche i Proff. Barra, Del Sedime, Manara, Prodi, Proverbio, Villani, Zappa.

<u>Tavola rotonda su " Logica e linguaggio formalizzato nella scuola secondaria superiore ".</u>

Relazione della Prof.ssa M. G. Campedelli (Firenze).

Il N.R.D. di Firenze ha lungamente meditato sul problema dello insegnamento della logica nelle scuole secondarie. Ne ha considerato le motivazioni, gli obiettivi, i contenuti e, ritenendo opportuno svolgerlo, ha fatto in merito alcune considerazioni.

L'introduzione della logica matematica nei corsi delle superiori non è vista come fine a se stessa, cioè come lo studio di uno - o più- capitoli, ma come l'occasione per puntualizzare, completare, inquadrare un lavoro già esistente.

In questo ordine d'idee i contenuti non possono essere molto vasti, ma necessariamente limitati e condizionati alla possibilità d'inserirsi nel normale programma della classe.

Inoltre, occorre tenere sempre presenti due diverse esigenze: da un lato, è necessario introdurre una serie di nozioni che essendo alla base della disciplina, occorre siano acquisite dai ragazzi al più presto e, dall'altro, l'assoluta necessità di non agire prima che certe capacità di astrazione e di critica si siano formate nell'alunno.

Dal punto di vista didattico, non si può partire addirittura dal linguaggio formalizzato: sarebbe come voler presentare l'algebra, senza aver già studiato l'aritmetica. Si cercherà, quando sia possibile, di sfruttare l'affinamento di linguaggio conquistato anche tramite le discipline letterarie.

Con ragazzi di quattordici - quindici anni si possono presentare le proposizioni e alcune delle più importanti operazioni della logica bivalente. Non è lecito altro che accennare brevemente alle variabili proposizionali: trattarle infatti con ampiezza a livello di primo anno di scuola superiore appare prematuro dal punto di vista didattico e si potrà lavoravi in pieno quando gli studenti avranno del tutto acquisito il concetto di funzione. Soltanto allora sarà consentito tradurre il linguaggio comune in quello della logica matematica: si perverrà così ad un linguaggio formalizzato, in cui i simboli non indicheranno soltanto proposizioni, ma anche altre situazioni che presentano solamente due possibilità. In un primo tempo invece le proposizioni sono dunque considerate come costanti, ossia viene attribuito loro un valore di verità ben determinato.

L'introduzione dei connettivi "$\sim$, $\wedge$, $\vee$ " non presenta parti colari difficoltà; gli allievi debbono realizzare una presa di coscienza del loro significato e debbono acquisire la tecnica, che però non deve consistere in una passiva compilazione delle tavole di verità , che nel caso di più proposizioni risulterebbero veramente complesse.

Per quanto la logica moderna non consideri più il vero e il falso come nozioni appartenenti al senso comune, ma semplicemente come dei simboli, ci sembra didatticamente indispensabile, in un primo tempo, non perdere di vista il linguaggio, esemplificando le formule in termini del linguaggio comune, e invitando i ragazzi ad analizzare l'uso dei connettivi nella lingua italiana, e a riflettervi lungamente. Solo in un secondo tempo si potrà lavorare secondo il metodo matematico ed anche gli allievi sapranno riconoscere che la logica opera sulle proposizioni o su altri enti a due valori di verità così come la geometria sui punti, le rette, i piani e le figure in genere che non esistono nella realtà, anche se vi hanno in essa un'immagine concreta, che può darne un'idea.

E' noto che il parallelismo fra operazioni logiche e operazioni insiemistiche coinvolge, oltre la definizione di operazione, anche le loro proprietà formali e un confronto tra l'uguaglianza d'insiemi e le espressioni equiveridiche. In un primo tempo si potranno rilevare le analogie più immediate: soltanto più tardi, una volta introdotta la relazione di "equiveridicità" sarà possibile studiare le operazioni logiche anche dal punto di vista delle loro proprietà.

Il collegamento di cui si sta trattando è di notevole rilevanza didattica: la ricerca di matrici comuni e di metodi analoghi in ambiti diversi è un aspetto fondamentale dell'educazione scientifica; inoltre, il mutuo influenzarsi delle due teorie consente continui passaggi dall'una alla altra e, in sostanza, un alleggerimento della trattazione.

Il compito di condurre gli allievi alla piena acquisizione dell'uso dell'implicazione materiale e dell'equivalenza logica è molto delicato,e può essere affrontato in classe quando i giovani abbiano dimostrato di aver acquisito una discreta maturità.

Deve dunque passare un certo tempo, abbastanza lungo, fra la introduzione dei primi elmenti e l'addentrarsi un pò nello studio della logica.

E' molto importante invitare i ragazzi ad un raffronto critico tra calcoli con i numeri e mettere in rilievo le questioni riguardanti la validità di un ragionamento, strettamente legate alla trattazione ipotetico - deduttiva della geometria.

Quest'ultimo argomento troverà spazio soprattutto in un liceo. Accanto ad esso, offrirà interesse studiare le applicazioni della logica di Boole ai circuiti. Si può riservare questa parte agli studenti degli istituti tecnici, per far loro intuire l'importanza e il fascino del pensiero che sta dietro il fatto tecnico; tuttavia riteniamo che tale aspetto potrebbe interessare molto anche gli studenti dei licei, abituati a guardare alla matematica soltanto come a una disciplina prettamente speculativa.

Queste proposte didattiche che abbiamo presentato sono state sperimentate in alcune classi, ma non in modo del tutto organico, proprio perchè si trattava di impostare un lavoro di ricerca didattica. Sono raccolte in un quaderno, che, pur con gli ampi limiti che presenta e le vaste possibilità di critiche che offre, vuole essere una prima guida per chi si avvia nell'avventura intellettuale di introdurre qualche cosa di logica matematica nelle scuole secondarie.

Relazione della Psicologa L. Alfano (Palermo)

E' proprio dello studioso del comportamento umano interessarsi ad ogni stimolazione culturale che possa contribuire alla formazione dello uomo e del cittadino.

Ogni forma di insegnamento si propone questo compito. In questa prospettiva si è sviluppata la collaborazione tra noi, componenti del Nucleo di Palermo; abbiamo cercato di uscire dalla nostra rispettiva professionalità al fine di proporci tutti come animatori di ricerca, tutti come educatori, tutti come correttori, tutti come valutatori.

La nostra finalità precipua è - e rimane - la validazione di un particolare metodo per l'insegnamento della matematica nella scuola medio - superiore.

La meta è ambiziosa (sperimentazione nel quinquennio; validazione dell'esperimento anno per anno e alla fine del quinquennio).

E' nostra viva speranza non solamente operare una verifica della validità del metodo in sè e per sè; ma anche l'intensità dell'aiuto che il metodo è in grado di fornire per consentire al gruppo di allievi (classe) e al singolo allievo (individuo) una forte strutturazione dei concetti acquisiti e la possibilità di generalizzazione delle acquisizioni apprese in occasione della formazione delle capacità matematiche ed altre capacità di ragionamento messe in gioco dall'insegnamento di altre discipline.

Presentazione del piano sperimentale

L'ipotesi di lavoro prevedeva una verifica dell'ipotesi che il metodo ideato e le schede costruite dal Nucleo di Ricerca di Palermo fossero più idonei a formare una "consapevolezza matematica" nell'allievo, di quanto non accadesse con il metodo tradizionale.

Il fatto di introdurre concetti inerenti al problema del linguaggio formalizzato (al primo anno di scuola media secondaria) - tematiche che verranno sviluppate successivamente dagli insegnanti di lettere, di filosofia o di altre discipline.

A tal fine, dopo numerose riunioni di "affiatamento" del Nucleo, miranti ad "omologare" "linguaggi" e "conoscenze", "gerghi", abitudini professionali specifiche, si è passato alla vera e propria "ricerca sperimentale", seguendo le tappe:

1° - Presentazione dell'esperimento agli allievi;

2° - Amministrazione della scheda da parte dei docenti (sia formative che di verifica).

3° - Formulazione da parte dei docenti di un giudizio sintetico sull'allievo (dato senza tenere conto di ciò che si valutava) (valutazione globale).

4° - Amministrazione di test fattoriali (batteria di G. Lepore, Ed. O.S.) (lavoro eseguito dagli psicologi L. Alfano e R. Russello).

5° - Comunicazione dei risultati agli allievi (eseguita dalla psigologo L. Alfano, secondo tecniche e principi deontologici propri della categoria professionale).

6° - Amministrazione di un test di profitto (Questionario I) alla fine del primo quadrimestre sulle due prime unità di insegnamento (Insiemi - Linguaggio formalizzato).

7° - Amministrazione del Questionario II alla fine del 2° Quadrimestre sulle altre due unità (Relazioni - Assiomi di incidenza nella geometria euclidea).

La parte più delicata ed elaborata del lavoro del Nucleo palermitano è stata quella relativa alla costruzione e alla correzione e valutazione del Questionario I. Il Questionario II è in corso di amministrazione:

si riferirà in altra sede e con più approfonditi ragguagli sui risultati dell'esperimento del primo anno.

Tuttavia è possibile fornire qui alcuni dati, ricavati dalla elaborazione statistica e dall'esame ispettivo dei risultati:

Tab. I

Variabili:

a) Giudizio sintetico dell'insegnante (espresso secondo una nomenclatura indotta dallo psicologo (Ottimo - Buono - Medio - Scarso - Molto Scarso)

b) Batteria fattoriale di G. Lepore (ed. O.S. - Firenze) per i fattori Coord. occhio - mano (rapidità); coord. occhio - mano (precisione); Rapidità e precisione: percezione simboli (numeri, parole); calcolo elementare; problemi; capac. spaziali (in piano) (in prospettiva); analogie verbali I e II.(Test. 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10).

c) Questionario 1: I unità (Insiemi)

II Unità (Introduzione al linguaggio formalizzato)

c 1 - Punteggio per la prima unità

Valutazione per la 1° unità

C 2 - Punteggio per la 2° unità

Valutazione per la 2° unità

c 3 - Punteggio totale (unità 1 + unità 2)

d) Questionario II: III Unità: Relazioni

IV Unità: Assiomi di incidenza nella geometria euclidea

d1: Punteggio per la III unità

Valutazione per la III unità

d2: Punteggio per la IV unità

Valutazione IV unità

Tab. II

DESCRIZIONE DEL GRUPPO SPERIMENTALE

Tab. II

Allievi	SCUOLA
24	-IV ginnas. Liceo Classico "G. Garibaldi" - Palermo
28	-I Liceo Linguistico Prov.le di Palermo
22	-I Liceo Linguistico Prov.le di Palermo
28	-I Liceo Linguistico Prov.le di Palermo
21	-I Liceo Linguistico Prov.le di Palermo
103	TOTALE

Tab. III

DESCRIZIONE DEL GRUPPO DI CONTROLLO

Allievi	SCUOLA
24	-I Liceo Linguistico Prov.le di Palermo
24	TOTALE

N.B. : Sia il gruppo sperimentale che il gruppo di controllo possono essere considerati omogenei come composizione; le scuole sono infatti ubicate in quartieri abitati in prevalenza da persone appartenenti a media e alta borghesia (Quartiere Libertà - Quartiere Resuttana).

Tab. IV

CLASSIFICAZIONI AL QUESTIONARIO I (scala pentenaria a intervalli compensati):

Classe	P.G.	Insiemi N	P.G.	Ling.form. N	P.G.	Totale N
OTTIMO	38-34	5	34-28	7	64-65	6
BUONO	33-30	11	27-23	9	54-52	10
MEDIO	29-15	34	22-12	35	51-29	35
SCARSO	14-11	11	11-7	9	28-22	10
M.SCARSO	10-0	6	6-0	7	19-0	6
		67		67		67

Tab. V

PRIMI RISULTATI AL QUESTIONARIO I

Insiemi	gamma = 10	variazione = 9
	Media : 16,68	
	Md : 23,20	
	Moda : 31,00	
Linguaggio formalizzato	gamma = 8	variazione = 33
	Media : 27,50	
	Md : 17,32	
	Moda : 19	
Totale (insiemi + linguaggio formalizzato)		
	gamma = 81	
	Media : 40,44	
	Md : 41,15	
	Moda : 53	

Il Nucleo intende proseguire con rigore l'esperimento nel corso del quinquennio, in maniera da completare, con gli adeguati strumenti psicometrici, la validazione dell'intera sperimentazione per i Licei classici e linguistici considerati.

Relazione del Prof. A. Morelli (Napoli)

Ritengo necessario accennare prima alle varie cause che ostacolano e impediscono un lavoro serio di sperimentazione per innovazioni metodologiche e di contenuti: le carenze strutturali della scuola, l'assenteismo degli alunni, la cattiva preparazione fornita, in generale, nella scuola dell'obbligo, l'impreparazione dei docenti su certi argomenti.

Non è facile dire che cosa l'U.M.I. e la C.I.I.M. possano ancora fare per migliorare la situazione che, specialmente negli istituti tecnici e professionali si va facendo sempre più difficile; ma in qualche questione si potrebbe intervenire. Ad esempio; I) Si dovrebbe cercare di migliorare i corsi di Matematica e Fisica in riferimento alla didattica, come già si diceva al Convegno di Sestri. Fra l'altro, se, come si propone, debbono essere insegnati nella scuola media gli elementi di logica, così come quelli di calcolo delle probabilità e di statistica, occorre che gli insegnanti sappiano qualcosa di più degli elementi e che l'apprendano nei corsi universitari, prima che in corsi di aggiornamento. 2) Si dovrebbe istituire un corso di laurea per la formazione degli insegnanti di Matematica e Scienze nella scuola dell'obbligo, come si progettava già qualche anno fa. 3) Aspettando che si affrontino e si risolvano i grossi problemi della riforma della scuola media superiore e dell'aggiornamento degli insegnanti, si dovrebbe prendere subito posizione sul problema dell'esame di maturità, affinchè venga modificato al più presto: esso, così com'è, è una delle cause principali dell'abbassamento generale della preparazione dei giovani che escono dalla scuola media.

Venendo al tema in discussione riporto alcuni pareri dei componenti del Nucleo di Napoli, maturati dopo varie discussioni e considerazioni sulle esperienze svolte, anche se non si è avuta, per le difficoltà dette, la possibilità di effettuare verifiche abbastanza varie e valide. I) Si ritiene utile introdurre con gradualità le nozioni ed i concetti fondamentali di algebra astratta e di logica con un linguaggio rigoroso e formalizzato. E' ormai fuori discussione l'importanza di abituare i ragazzi alle sintesi ed ai collegamenti che le idee unificanti dell'algebra ed il rigore della logica consentono. E' necessario però mantenersi entro certi limiti: ad esempio sembrano molto efficaci il linguaggio ed il simbolismo moderno per introdurre il concetto di limite, ma risulta dannoso il loro uso continuo anche per esprimere concetti e relazioni molto semplici.

2) E' inopportuno premettere tali nozioni e concetti in capitoli iniziali da trattare all'inizio della scuola media superiore. E' più urgente avviare i ragazzi alla scoperta di una matematica attraente e significativa dal punto di vista delle applicazioni riferendosi a problemi interessanti, più o meno reali o di fantasia, più o meno autentici. La formazione metodologica e culturale e l'informazione applicativa sono due esigenze che debbono coesistere ad ogni livello ed i mezzi per soddisfarle non sono separabili; ma in certe fasi si preferisce indicare prima le possibili applicazioni della matematica e poi l'inquadramento in un contesto generale. D'altronde la formazione metodologica e culturale si realizza già con lo sviluppo di teorie non tanto generali. Fra due modi possibili di procedere: a) trattare delle relazioni, in particolare della relazione di equivalenza e cogliere l'occasione per introdurre la relazione di parallelismo per sviluppare un argomento di geometria; b) trattare della relazione di parallelismo sviluppando la geometria euclidea e cogliere l'occasione per introdurre la relazione di equivalenza in generale, anche riferendosi ad altre situazioni incontrate, si preferisce seguire la seconda via.

3) E' opportuno fare riflessioni e confronti sui procedimenti di dimostrazioni e di calcolo. Una buona conoscenza della logica permette certamente di approfondire certi confronti e sviluppare certi discorsi; ma bastano le nozioni fondamentali per far notare che si ha una implicazio

ne, oppure una equivalenza, oppure una dimostrazione per assurdo, ecc...; ciò che si ritiene importante è che si insista su queste osservazioni e si esca, quando è possibile, dall'ambito della matematica. Ad esempio, della prima legge delle inverse si può parlarne anche nel dimostrare, a proposito della termodinamica, l'equivalenza dei principi di Kelvin e di Clausius, notando che essa si stabilisce utilizzando due volte la proposizione $(\sim B \Rightarrow \sim A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$; mentre una ottima occasione per parlare della seconda legge delle inverse si presenta già in geometria a proposito dei teoremi diretti ed inversi riguardanti le reciproche posizioni di una retta ed una circonferenza o di due circonferenze su un piano.

4) Si ritiene necessario giustificare una eventuale introduzione sistematica degli elementi di logica col mostrare delle applicazioni alla risoluzione di problemi interessanti.

Relazione della Prof.ssa F. M. Furinghetti (Genova)

Il mio contributo a questa tavola rotonda non è una cronaca ragionata di esperienze di insegnamento o un'esposizione costruttiva di possibilità future, ma solo una riflessione sulle perplessità, unite ad un certo interesse, del nostro gruppo nei riguardi di Logica e Linguaggi Formalizzati. Tale atteggiamento è originato da fatti, noti, penso, a chi si occupa di insegnamento secondario.

Prima di tutto le capacità di apprendimento e di astrazione degli alunni di scuola secondaria superiore sono tali da far dubitare di poter spingere l'introduzione di nozioni di Logica al di là dei primi ovvi elementi istituzionali ed in ogni caso si nutrono forti dubbi che tali nozioni possano essere "apprezzate" nel loro giusto valore.

In considerazione di ciò, poichè nell'attuale situazione della Scuola Secondaria Superiore lo spazio per l'introduzione di argomenti alter nativi a quelli dei programmi tradizionali ha da essere ritagliato, con notevole impegno di programmazione e lavoro degli insegnanti, a scapito di altri argomenti, spesso non ci si sente di convogliare le proprie forze verso un argomento così astratto sacrificandone altri quali per esempio l'acquisizione di una maggiore capacità di lettura, nella fattispecie in termini matematici, della realtà che ci circonda. In particolare queste considerazioni valgono per chi, come nel caso del nostro gruppo, opera in Istituti tecnici o professionali.

E' anche vero però che non si possono considerare Logica e Linguaggi Formalizzati allo stesso modo di altri argomenti del programma (sia tradizionali che alternativi), poichè certi principi di logica, anche se non enunciati esplicitamente, sono immanenti nel modo di operare del matematico. Non a caso fino dall'inizio del nostro secolo la figura del logico e quella del matematico si sono identificate (basti pensare agli illustri esempi di Peano e Russel) con , se mai, una lieve subordinazione del logico al matematico.

La scissione di queste due figure ha segnato l'inizio della cultura moderna, non solo in campo matematico, e l'impostazione di un nuovo modo di "fare matematica".

In contrasto con questo dato oggettivo c'è però il fatto che fino a non molti anni fa nei curricula dei futuri insegnanti di matematica (o dei matematici tout-court) non compariva un corso di Logica mentre d'altro canto era diffusa la convinzione che imparare la matematica implicasse automaticamente imparare la Logica. Questa convinzione è tutt'ora diffusa: nasce spesso dall'equivoca ed arbitraria identificazione che si fa tra saper la Logica e saper ragionare per cui non sono insolite nè sorprendenti le conclusioni che ho sentito ad un recente convegno sull'insegnamento della matematica nelle facoltà di Architettura (Firenze, marzo 81).In tale sede i relatori non matematici, docenti di Scienze delle Costruzioni e quindi utenti principali dei vari corsi di Analisi e Geometria tenuti presso le facoltà di Architettura hanno detto di aspettarsi da tali corsi: l'acquisizione di un linguaggio scientifico e la capacità di comunicare attraverso tale linguaggio, nonchè l'abitudine al "ragionamento".

Questo punto di vista che vede nella matematica il mezzo più adatto per affinare le capacità logiche e quindi... imparare la Logica è oltre che un pò riduttivo nei confronti dell'insegnamento matematico, anche un pò obsoleto poichè attualmente si tende piuttosto ad affermare che un retroterra culturale logico è addirittura una premessa irrinunciabile per una corretta acquisizione di certe parti della matematica.

Per esemplificare gli effetti di questi due differenti punti di vista cito il caso emblematico della Geometria euclidea argomento su cui necessariamente l'insegnante più o meno consciamente deve fare scelte nei confronti dell'assetto logico.

Come è noto essa è stata ritenuta un esempio insuperato del modo di pensare deduttivo (nel senso aristotelico). Da certe premesse assunte come vere, seguono certe conclusioni, necessariamente vere e lo studente deve fare continuamente i conti con la sua capacità di ragionare se vuole condurre in fondo un esercizio. Per questo fatto la Geometria euclidea è stata nella tradizione accostata al latino nel suo ruolo di palestra per il ragionamento (v.ad es. Annali della Storia d'Italia, vol. III, articolo di Besana e Galluzzi).

Questo approccio non è del tutto corretto nei riguardi degli studenti poichè si dà un significato "assoluto" ad una scienza senza fornire gli strumenti, non dico per verificare, ma anche solo per percepire questo assoluto. Restano vaghi e nebulosi i modi di scelta dei fatti assunti come veri, mentre la mancanza di certi postulati rende grottesco il preseguimento del rigore.

Naturalmente anche la posizione completamente opposta, sempre per restare al campo geometrico, (per es. quella di Dieudonné e dei Bourbakisti) non manca di suscitare le perplessità ben note da un punto di vista didattico, anche se è inattaccabile dal punto di vista logico, e forse più onesta.

Queste due posizioni possono, come anche noi abbiamo sperimentato, essere mediate ricorrendo ad esempio alla geometria analitica evitando così sia di ingannare lo studente con teorie carenti, sia di sovraccaricarlo di un bagaglio troppo formale che snatura il carattere essenzialmente intuitivo della Geometria.

Da questo esempio vorrei astrarre conclusioni un pò più generali, che sono quelle a cui per ora informiamo il nostro lavoro.

Ad un livello di buon senso quotidiano mi sembra che si possa essere d'accordo sul fatto che la matematica (come ogni altro insegnamento del resto!)può e deve insegnare a ragionare. Non è detto che ciò debba avvenire necessariamente passando attraverso uno studio sistematico della Logica: per esempio nel passare da una situazione concreta alla sua schematizzazione matematica il lavoro di esame critico dei dati, con elaborazione di tabelle, grafici, grafi, diagrammi di flusso, può rivelarsi un buon addestramento all'uso delle proprie "possibilità logiche".

In ogni caso, entrando più nel "tecnico" direi che si possono introdurre nozioni di Logica e linguaggi formalizzati senza travalicare le capacità di apprendimento dei ragazzi. Le tabelle di verità, l'uso corretto di o, e, se.... allora, A implica B, sono alla loro portata e molte sono le occasioni per introdurne un uso corretto (per es. proprio la geometria). Tali nozioni non possono che giovare quantomeno nel senso di una acquisizione di capacità di usare correttamente il linguaggio usuale che non è traguardo da poco nella Scuola Secondaria. L'uso corretto di tali nozioni è dunque auspicabile, anzi, in certi casi imprescindibile e può contribuire sia a far apprendere più correttamente la matematica sia ad esaltare quelle qualità di bellezza e dignità che riconosciamo a tale disciplina.

Non sembra però possibile, se non in casi particolari e motivati (e vedremo in seguito un esempio), andare molto oltre questi primi elementi a meno di non introdurre un'ulteriore parte di programma fine a se stessa e della quale ben pochi degli attuali studenti, come ho detto, possono apprezzare l'intima bellezza. Aggiungo però che mi pare giusto, qualora se ne presenti l'occasione, segnalare le problematiche nascoste (per es. sull'assiomatizzazione della geometria euclidea) facendo anche intravvedere gli sviluppi eventuali e rinunciando piuttosto ad un argomento se non è possibile seguire questa linea.

Quanto si è detto sottintende tra l'altro che l'insegnante abbia una buona cultura "logica". A questo proposito può essere interessante rilevare che tra gli insegnanti di matematica da me avvicinati i laureati nell'indirizzo applicativo sembrano quelli che hanno le idee più chiare sull'argomento. Questo fatto non è sorprendente nè inspiegabile e può offrire spunti di lavoro anche per l'insegnamento secondario. Tali laureati hanno acquisito nozioni istituzionali di Logica in corsi specifici ed in un secondo tempo hanno visto applicazioni di tali nozioni nei vari "corsi di programmazione".

In questa ottica la situazione (e le considerazioni precedenti nei riguardi dell'introduzione di Logica e Linguaggi Formalizzati nella Scuola Secondaria Superiore) è completamente ribaltata. Non esiste più il problema della ricerca di spunti o di giustificazioni per questa introduzione anzi è unanimemente riconosciuto che occorre premettere alcune nozioni quali connettivi logici, tabelle di verità, Algebra di Boole, Nozioni di teoria logica (Assiomi, regole di inferenza, teoremi), Sintassi, Semantica ai corsi di introduzione alla programmazione per liberarli da un puro tecnicismo e per dar loro carattere formativo e non nozionistico.

La trasmissione di queste nozioni (di per se notevolmente astratte) in forma finalizzata (e quindi motivata) ne rende più facile l'acquisizione da parte degli studenti ed anche possibile, in un secondo tempo, l'utilizzo in ambiti diversi da quello informatico.

Relazione del Prof. B. Spotorno (Savona)

Ogni qual volta si affronta un problema didattico di una certa ampiezza sembra opportuno ribadire le finalità educative cui il progetto di soluzione del problema si ispira: potrà allora essere utile ricordare che nella prospettiva pedagogica del Gruppo di Savona:

- non si insegna Matematica per "insegnare a pensare"; questo ovviamente dovrà essere un utile sottoprodotto dell'insegnamento matematico ma non può e non deve esserne il fine
- si insegna matematica perchè la Matematica è una scienza con contenuti suoi propri la cui conoscenza è indispensabile per capire il mondo contemporaneo; si afferma con questo la "dignità" della cultura matematica come parte essenziale della cultura del nostro tempo.

In questa prospettiva diviene evidente che allorchè si parla di Logica si intende intanto parlare di Logica formale o come anche si dice di Logica matematica; d'altra parte poichè la Logica formale, nata e cresciuta in simbiosi con lo studio dei fondamenti della Matematica ha contribuito a chiarire i metodi della ricerca matematica stessa, ciò che in questo senso vi è di sostanziale dovrà permeare l'insegnamento matematico nelle scuole secondarie superiori; a tal fine sarà necessaria una attenzione privilegiata alla fondazione delle teorie con cui si pone un rapporto fra percezione e realtà, attenzione presente a tutti i livelli allo spirito dell'insegnante, ma che andrà con gradualità sviluppata ed approfondita; ed un primo momento, in cui la "riflessione logica" sarà rivolta all'analisi della struttura del linguaggio naturale, seguirà un momento in cui la riflessione verterà più propriamente sul linguaggio matematico, per pervenire infine a porre il problema di una revisione critica delle conoscenze acquisite e di una loro coerente sistemazione.

I. Per ciò che concerne l'analisi del linguaggio naturale il primo compito dell'insegnante non può essere che quello di una analisi sintattica del periodo per una chiarificazione dei significati, ottenuta nel riconoscere la struttura interna della frase: compito tanto più necessario oggi che l'approssimazione nell'espressione del pensiero diviene più grave; in questa prospettiva ogni occasione può essere buona: dall'enunciato di un teorema alla esposizione di una situazione di fatto, alla descrizione del progetto di un modello interpretativo di una data situazione reale; non mancano esempi di proposizioni (volutamente?) "indecidibili" nel loro significato, sia nel campo della pubblicità che in quello impiegato nei "mass-media"; esempi particolarmente utili possono essere poi trovati e discussi nella lettura di significativi articoli tratti dai Codici.

Nel quadro concreto poco sopra brevemente delineato particolare attenzione dovrà essere posta nella chiarificazione del concetto di "deduzione". Chiarita e ribadita l'incertezza di fondo ed il quadro probabilistico entro cui opera la Ricerca, si avrà cura di distinguere in primo luogo fra i dati della percezione individuale e la loro descrizione verbale; di rilevare poi come raramente descrizioni significative siano direttamente verificabili dal soggetto che le esprime ma come sempre esse siano conseguenza di un complesso apparato concettuale, tramite appunto l'esperienza sensibile e il linguaggio.

Il gioco della deduzione è interno a questo apparato concettuale: a mezzo della deduzione è il processo di implicazione; sarà bene rilevare il carattere formale di questo processo che, proprio perchè è un processo, è esterno all'oggetto del discorso e ne investe invece la struttura sintattica. E' ben noto ad ogni insegnante la fatica necessaria per far conseguire ai propri allievi uno sforzo di puntualizzazione del proprio pensiero ma forse è meno noto, e purtuttavia dovrebbe essere fondamentale nel comune argomentare della gente, la distinzione fra l'affermare che dalla "premessa A" si deriva "B" e l'asserire la verità di "se A allora B": nel primo caso A è assunto come vero, nel secondo è assunta come vera l'intera proposizione "se A allora B": ancora una volta esempi significativi possono essere tratti dai Codici.

2. E' evidente che in particolare nell'ambito dell'analisi di quella parte del linguaggio naturale che è il linguaggio matematico; le precedenti distinzioni potranno essere discusse mettendo in luce la struttura della dimostrazione. Tutta una serie di concetti abitualmente impiegati nelle esposizioni delle teorie del primo ordine possono venire tradotti, senza falsarne troppo il senso e indipendentemente da ogni formalizzazione,

nel linguaggio matematico tradizionale in uso nella scuola: si parlerà così di teorie, assiomi e teoremi, di dimostrazioni, di implicazione logica, e di equivalenza fra proposizioni, si dimostrerà che una proposizione è conseguenza logica, in una teoria, di un gruppo di premesse assunte come vere.

Come è chiaro soggiace a tutto questo il concetto di Sistema (o Teoria) formale, concetto che trova la sua prima più semplice e naturale interpretazione nell'introduzione del linguaggio algebrico: è infatti nell'algebra elementare che il giovane viene a scontrarsi con un mondo di simboli, di espressioni, di regole di trasformazione, storicamente giustificato nel suo porsi, ma vivo solo in virtù dell'insieme delle convenzioni stabilite. Come ogni insegnante sa questo impatto è duro e lenta è l'acquisizione del formalismo ma pare indubbio che di esso non resterà a lungo traccia se verrà acquisito soltanto con l'ausilio di un gran numero di esercizi ripetitivi; comunque vadano le cose sarà certamente preferibile chiarire con pazienza quello che si fa passo dopo passo ponendo distinzioni linguistiche precise che prefigurino appunto quelle proprie di una teoria formale. Dunque l'introduzione di lettere a designare "costanti" o "variabili", formule a designare "termini", proposizioni, da distinguere in aperte o chiuse a seconda dell'introduzione o meno di quantificatori: questo ovviamente senza ricorrere (o ricorrendo in via del tutto accessoria e con noncuranza) ad un adeguato simbolismo, ma all'interno del linguagggio naturale e nel trattare i comuni temi dell'algebra elementare: uso di operatori, di simboli di eguaglianza e diseguaglianza, formule come programmi di calcolo, equazioni ed identità. In questo lavoro costituisce un sussidio didattico di eccezionale validità l'uso dei calcolatori: il formalismo diviene una necessità, la distinzione fra "termini aritmetici" e "termini logici" è la chiave per la costruzione di corretti diagrammi di flusso con le consuete istruzioni di assegnazione o di scelta alternativa, la nozione di Alfabeto, di "parole chiave" di formule ben formate diviene spontanea.

Ancora in questa prospettiva assumono un senso tecnico preciso (e l'uso del calcolatore con i suoi circuiti ne fornisce una giustificazione plausibile) i connettivi logici ed il conseguente calcolo proposizionale, un cenno all'algebra di Boole; un esplicito riferimento agli insiemi è indispensabile e permette un primo approccio alla distinzione fra la definizione intensionale ed estensionale di un insieme: l'implicazione si arricchisce con l'uso dei quantificatori, possono essere ricordate le formule del sillogismo e l'importanza da esse assunta nella logica medioevale.

3. Se nel progressivo sviluppo della geometria si ha cura di mettere in luce i passi che conducono da una semplice descrizione di fatti ad una teoria assiomatica allora la geometria analitica diviene il primo esempio di un modello sintattico di una teoria formale. Solitamente non viene intesa così poichè la geometria di Cartesio è pensata come una estensione teorica di quella Euclidea; didatticamente sembra un errore poichè si perde una utile occasione per una prima conoscenza del concetto di modello.

D'altra parte, giunti ormai alla fine di un curriculum di scuola media superiore si porrà l'esigenza di ricapitolare quanto in questi anni in forma più o meno episodica si sarà fatto nei riguardi dell'Analisi o della Geometria.

Nel primo caso, in possesso da tempo di un modello aritmetico dei numeri reali si porrà il problema di un cenno sulla loro sistemazio ne formale, nel secondo quello della discussione critica della formalizzazione standard (Euclidea o meglio Hilbertiana) di cui la geometria Cartesiana ha offerto un modello.

Il discorso sull'indipendenza, sulla geometria assoluta, su modelli Euclidei di alcune proposizioni di geometria iperbolica si impone come necessario fatto culturale e non come un episodico discorso di un professore"brillante": così può essere se l'intero corso a questi risultati è stato prefigurato. Il modello "aritmetico" dei reali e della geometria pongono il problema di una chiarificazione del concetto di numero: in possesso ormai di maturità sufficiente e di un bagaglio di idee e metodi lentamente assimilati il problema potrà essere discusso in momenti successivi:

- il linguaggio naturale porta con sè il concetto di classe e di elementi di una classe.
- insiemi troppo grandi pongono in difficoltà questo approccio intuitivo
- è possibile una fondazione assiomatica
- la sua consistenza non può essere garantita da un modello a meno che...

Ampiezza, profondità, adeguatezza dei temi alla classe saranno ovviamente motivi di scelte del singolo insegnante: a mio parere il discorso va fatto.

Conclusioni. "Logica" nelle scuole medie superiori? Certamente sí se si intende mettere in luce le strutture profonde del linguaggio naturale e di quello matematico in particolare; questa scelta esige una strategia didattica che non confini gli elementi di logica nel primo (o ennesimo) capitolo del corso ma con gradualità venga suddivisa lungo l'arco dell'insegnamento, ponendo come finalità l'acquisizione di una equilibrata visione del senso della cultura matematica nel più generale quadro della cultura contemporanea.

Acquisizione dell'uso del formalismo? No, se si intende riferirsi all'acquisizione (che certamente dovrebbe essere troppo superficiale e pertanto inutile) di speciali tecniche di calcolo. Sí, se si pretende che l'allievo ne capisca il senso sia in riferimento alle applicazioni tecniche e linguistiche sia in riferimento alla chiarificazione dei rapporti percezione - linguaggio - conoscenza.

Relazione della Prof.ssa M. A. Mariotti (Pisa)

Credo che si possa essere d'accordo che uno degli obiettivi fondamentali dell'educazione matematica sia quello di educare l'allievo a ragionare in modo corretto e rigoroso.

Si tratta di insegnare non tanto delle tecniche, se pure possono esserci degli aspetti meccanici anche in questo, ma più che altro un metodo, di formare un comportamento mentale, che possa essere utile anche in altri campi, diversi dalla matematica, pur mantenendo caratteristiche proprie.

Sembrerebbe allora assai semplice raggiungere tale scopo sfruttando la conoscenza, ormai raffinata, della logica formale: si insegna logica, l'allievo impara cosa significa ragionare in modo corretto e così ragiona in modo corretto. L'affermazione è volutamente paradossale, ma vediamo qualche aspetto dell'errore.

Intanto la logica formale è essa stessa una teoria formalizzata e come tale si è liberata di tutto quell'apparato psicologico che accompagna il comune ragionare e di tutte quelle complesse sfaccettature del linguaggio naturale, nel quale siamo soliti fare i nostri ragionamenti. Insegnare logica quindi comporterebbe difficoltà analoghe o superiori a quelle che normalmente si incontrano nell'introdurre un qualsiasi sistema formalizzato; ma questo potrebbe non essere un problema; si può insegnare di tutto e anche con buon esito, ma è lecito domandarsi se lo scopo che ci eravamo prefissi potrebbe essere raggiunto constatando quanto sia difficile ravvisare nelle complesse formule della logica simbolica quei semplici e piani ragionamenti che ci sono assai più familiari. Non sarà forse meglio acquisire una capacità al ragionamento logico semplicemente imitando e riproducendo per analogia ragionamenti già fatti, cercando pian piano di raggiungere un'autonomia tale da consentire scoperte originali? Il problema diventa allora per l'insegnante quello di guidare l'apprendimento verso la scoperta e la conquista di questo strumento delle nostre riflessioni, senza che tale strumento diventi esso stesso oggetto principale di riflessione.

Consideriamo ora un aspetto importante dell'educazione al ragionamento "logico": l'aspetto linguistico. I nostri ragionamenti sono sempre espressi attraverso un linguaggio ed è sul linguaggio che vorrei porre l'attenzione. Il problema è molto complesso e,quindi vorrei limitarmi a fare solo qualche osservazione.

Per imparare a parlare di matematica, l'allievo deve imparare l'uso di una terminologia e di una sintassi adeguata. Il vantaggio, ma anche contemporaneamente la difficoltà del linguaggio matematico (in questo diverso dal linguaggio di altre scienze), sta nella sua mancanza di ambiguità: ogni termine è accuratamente definito ed il suo uso controllato da regole, ma è proprio questo aspetto così originale che crea delle difficoltà. La mancanza di libertà espressiva, dovuta alla necessità di seguire delle regole, rende il linguaggio rigido e il suo uso impaccia il ragionamento. La presenza di simboli, se da un lato alleggerisce le difficoltà di epressione e quindi di comprensione, dallo altro acquista reale utilità solo se il simbolo introdotto è realmente familiare a chi lo usa. (La nostra mente ha molto bisogno di suggestioni per produrre e finchè un simbolo non è carico di tali suggestioni il suo uso può essere pericoloso o quanto meno inutile).

Naturalmente il livello di formalizzazione del linguaggio matematico varia di pari passo con lo sviluppo della teoria e secondo le esigenze ad essa connesse. Ad esempio in algebra si raggiunge un alto livello di formalizzazione: le espressioni e il loro "calcolo" rappresentano un esempio di linguaggio formalizzato, che proprio come tale ha certe caratteristiche di automatismo che lo rendono particolarmente adatto a certe utilizzazioni.

Non si può dire altrettanto per la geometria; seppure niente viene lasciato nel vago: infatti ogni termine, ogni elemento del linguaggio, ha un suo uso ben codificato, attraverso gli assiomi e le definizioni, pur tuttavia non si raggiunge un grado di formalizzazione analogo a quello dell'algebra. Di qui alcune delle difficoltà proprie della geometria.
Per fare un esempio prendiamo la definizione di cerchio come "luogo geometrico dei punti equidistanti da uno stesso punto...". In tale definizione manca un riferimento esplicito ad un elemento,per altro importantissimo, quale il raggio del cerchio; è lasciato alla capacità di autonomia dello allievo il cogliere o meno la presenza di questo elemento.

Manca spesso una simbologia appropriata e i lunghi giri di parole necessari per l'esposizione di una dimostrazione, rendono più complesso lo sviluppo deduttivo della teoria.

Naturalmente si potrebbe auspicare una maggiore formalizzazione della geometria ed è questo aspetto, forse, che rende preferibili certe trattazioni di carattere algebrico; ma anche questa strada non può essere considerata priva di pericoli e di difficoltà, basti pensare a tutti gli aspetti intuitivi che in una algebrizzazione della geometria andrebbero perduti.

Abbiamo detto all'inizio che non sembrava opportuno sviluppare una trattazione a sé stante della logica formale, bensì lavorare ad una graduale acquisizione da parte dell'alunno di un particolare "abito mentale". Ci possono essere però, delle situazioni in cui su certi modi di ragionare sia necessario fare qualche riflessione; ad esempio, se si definisce una equazione come una relazione di uguaglianza "aperta", ossia passibile di essere vera o falsa, il problema di risolvere una equazione si traduce in un problema di dipendenza logica tra due relazioni, dipendenza che può essere reversibile o meno. Il discorso è naturalmente legato ad un contesto specifico, ma è passibile di essere ampliato e può dare buoni spunti per delle considerazioni di carattere generale. Analogamente, in contesti specifici e per fini pratici di semplicità di schematizzazione, può essere utile l'uso di determinati simboli logici; andranno considerati, però, più come abbreviazioni di frasi che nel loro reale valore formale. Si potrà usare il simbolo di implicazione $\Rightarrow$, oppure la doppia implicazione $\Leftrightarrow$ nel significato di "se...allora" e rispettivamente, "condizione necessaria e sufficente", o perfino i quantificatori universale ed esistenziale.

Ovviamente in una fase finale del corso di studi (ad esempio nell'ultimo anno) potrebbe essere interessante un ripensamento generale sui processi logici che hanno accompagnato lo studio della matematica: potrebbe essere interessante e formativo un breve corso di logica formale. Ma, forse, ancora più utile potrebbe essere per l'insegnante dedicare una particolare attenzione ad una analisi dei processi logici inerenti i vari argomenti trattati nei propri corsi. Un'attività di questo tipo può costituire uno strumento molto utile per capire certe difficoltà, per prevenirle ed eventualmente per individuare i possibili rimedi atti a superarle.

Relazione del Prof. F. Arzarello (Torino)

Si può affermare, in prima approssimazione, che la logica matematica (=LM) rappresenta un momento tipico della matematica di questo secolo, quale scienza "astratta". Quasi tutte le principali branche in cui è oggi suddivisa la LM (teoria dei modelli, teoria della ricorsività, ecc.)si caratterizzano infatti in quanto studiano concetti fortemente astratti: ad es., in teoria dei modelli non si studia tanto questa o quella struttura in particolare, ma le proprietà delle strutture in generale; analogamente, oggetto della ricorsività è la nozione astratta di algoritmo e sue generalizzazioni,ecc.. D'altro canto, la logica è da sempre connessa con l'arte del ragionamento corretto, per es. in matematica, e con una sua codifica e descrizione operativa precisa.

Entrambi i tipi di esemplificazione comprendono momenti di "formalizzazione" più o meno spinta (come del resto tutte le discipline matematiche); è a questi aspetti "formali" che viene ridotta spesso la LM nella scuola media (analogo slittamento subisce per es. la teoria degli insiemi diventando "insiemistica"). E' comunque indubitabile che l'astrazione e il ragionamento formale sono due parametri essenziali per la LM. Si tratta di momenti delicati nell'insegnamento, a ogni livello, e spesso gli insegnanti, sfiduciati, rinunciano a lottare perchè gli allievi acquisiscano queste capacità. Capita anche che l'astrazione e il ragionamento formale siano visti con sospetto e che si contrappongano loro categorie diverse, ad esempio quelle dell'intuizione e della concretezza.

Il mio intervento consiste in alcune osservazioni ed esemplificazioni su questa contrapposizione, che non ha ragione di sussistere, e su come si possa intendere il ruolo della LM nella scuola media. Lo spazio mi costringe a procedere per punti schematici.

1) Occorre distinguere tra ragionamento formale e ragionamento formalizzato. Le tipiche contrapposizioni "intuizione-formalizzazione", con l'enfasi posta sulla creatività della prima e la sterilità della seconda(1) tendono a confondere i due aspetti riducendo il primo al secondo.
La contrapposizione esasperata può avere conseguenze perlomeno dubbie; accanto ai rischi di eccessivo formalismo (che sono i più scontati) vi è un pericolo speculare: quello della falsa concretezza e della confusione del metodo matematico con quello sperimentale, proprio delle scienze naturali. Sarà quindi opportuno:

2) Distinguere tra ragionamento empirico e ragionamento intuitivo.
La discussione è affrontata magnificamente nel libro di M. Krygovska, Didattica della matematica, tradotto a cura dell'UMI, cui rimando. In sostanza, il matematico non procede come il naturalista, il quale va alla ricerca di una legge generale che contenga i casi particolari conosciuti. Di fronte alla successione: 1 + 2=3, 1 + 2 + 3=6,..., il matematico va alla ricerca di una legge che dica come devono essere le cose. In altre parole dall'esame della successione giunge alla legge con un ragionamento intuitivo, non ancora rigoroso. A questo punto, il ragionamento empirico sarebbe concluso; non così quello intuitivo: vi è ancora una lacuna da colmare; occorre una sorta di "legalizzazione formale" del ragionamento intuitivo. Naturalmente, il problema è di trovare un giusto equilibrio tra il momento intuitivo e quello formale(2).

3) *Il ragionamento formale*. Si può asserire che il giovane ragiona formalmente se egli, consapevolmente, cerca di dimostrare secondo la logica una certa tesi, partendo da un gruppo definito di altre tesi, che in una data situazione sono state ritenute corrette intuitivamente o sono state precedentemente dimostrate. Ciò comporta un uso più dosato e completo del metodo assiomatico. Esso spesso è presentato come un monolito immobile: si danno gli assiomi e poi si derivano i teoremi "ragionando" in base a regole deduttive non meglio esplicitate. Esso invece coinvolge ben altre categorie mentali ed è comunque necessario spezzarlo in bocconi più digeribili e dargli una veste più snella e dinamica. I punti essenziali sono:

a) preparare il terreno con una organizzazione locale deduttiva del materiale di insegnamento, con graduale ampliamento delle deduzioni. In particolare occorre sviluppare l'idea che la certezza matematica è sempre del tipo: "se A allora B", e quindi acquisire il concetto di inferenza (la LM trova qui collocazione naturale; cfr. gli esempi alla fine).

b) l'assiomatizzazione è la chiave di volta dell'astrazione matematica: da un lato come *matematizzazione* , ovvero presa di coscienza di questo carattere di astrazione; dall'altro, come *interpretazione*, cioè presa di coscienza del carattere relazionale della matematica (ad es. gli assiomi di gruppo descrivono realtà estremamente diverse).

4) Alcuni *esempi* di come la LM possa contribuire a fare acquisire alcune delle capacità sopra descritte (in particolare cfr. 3a).

i) equazioni e disequazioni sono un ottimo tipo di esercizi per studiare le relazioni di inferenza in presenza di variabili quantificate (in forma molto semplice). (3° anno scuola media, biennio);

ii) in un certo argomento matematico (ad es. le isometrie) su cui si sia giunti a una sufficiente acquisizione di teoremi intuitivi, si propone di costruire in forma logicamente corretta vari enunciati a partire da un certo stock disordinato di frasi, in modo da ottenere la dimostrazione formale di un teorema (2°, 3° anno scuola media superiore);

iii) lo studio dei limiti e della continuità preparato con uno studio sui quantificatori (nascosti, non algoritmici, alternati,ecc.) (ultimi anni scuola media superiore);

iv) stesura di programmi per calcolatrici programmabili, al fine di risolvere problemi di varia natura: è un contesto "naturale" in cui proprietà e teoremi matematici necessitano di una versione formale per potere stendere il programma opportuno.

(1) Cfr. la controversia tra C. Segre e G. Peano sul primo numero della Rivista di Matematica; cfr. anche le posizioni estreme di Bourbaki e di Lakatos sull'argomento. Si noti che l'esasperata formalizzazione auspicata da Peano fornì l'estro a facili strali e argomentazioni contro la logica formale. Se esse sono comprensibili in un Segre o in Poincaré, stonano alquanto cinquant'anni dopo in Lakatos.

(2) A. Weil paragona l'assiomatica alle vie di comunicazione e ai rifornimenti nelle retrovie (Collected papers, vol. I, Springer, pag. 254). L'analogia vale, a mio parere, anche per il lavoro dell'insegnante di matematica.

Relazione del Prof. R. Ferro (Padova).

Il problema dell'introduzione di elementi di logica matematica nelle scuole secondarie richiede un'analisi su cos'è la logica matematica e sull'opportunità di presentare alcuni suoi aspetti a studenti delle scuole superiori.

Il tentativo di rispondere alla prima domanda non è dei più agevoli: ci sono vari punti di vista sulla logica matematica. Alcuni la considerano come un'analisi del ragionamento matematico, altri come uno studio della precisione e dei limiti che un linguaggio pone allo studio di una struttura, altri ancora sottolineano l'aspetto di fondazione della matematica, altri poi ne fanno uno strumento per un'analisi del peso dei principi della matematica partendo dai più costruttivi. E tutto questo senza voler essere esaustivi.

Comunque ci sono alcuni aspetti che sono comuni a tutte le posizioni. Da una parte il linguaggio formalizzato, dall'altra il livello di astrazione, e i due aspetti sono strettamente legati.

Infatti la logica analizza strutture generali astratte includenti un linguaggio e la formalizzazione del linguaggio stesso è indispensabile per precisare l'oggetto d'indagine.

Questi aspetti ci permettono già di formulare alcune considerazioni.

E' inutile accedere a certi livelli di astrazione se non se ne colgono le motivazioni, rimarrebbero pura forma. Questo rischio è già presente nell'usuale insegnamento della matematica, tanto che molti studenti la considerano un inutile esercizio formale totalmente sganciato da ogni altra disciplina e dalla vita reale. Cosa succederebbe della logica matematica se non ci fosse la minima idea dei problemi che questa tenta di chiarire? Non per niente ogni manuale di logica matematica nell'iniziare, mentre non pone prerequisiti specifici, richiede al lettore una "maturità matematica". C'è da chiedersi se gli studenti delle superiori possiedono una maturità matematica.

Forse allora l'azione da svolgere dovrebbe puntare ad uno sviluppo della maturità matematica sia legando la matematica alle altre discipline, sia analizzando la matematica da un punto di vista critico.

Un esempio può forse chiarire meglio quanto si vuole sostenere. Nelle prime classi superiori spesso si introducono i numeri reali mediante la costruzione di questi dai razionali (generalmente con le sezioni di Dedekind).

Per gli studenti detta costruzione risulta il più delle volte una "inutile pedanteria matematica" senza alcun senso reale.

Sostanzialmente i numeri reali li sapevano usare già prima e li continueranno ad usare dopo senza che la costruzione abbia portato alcun concreto giovamento. Anzi la pesantezza della costruzione e la sua, in un certo senso, inutilità rafforzano la posizione psicologica che considera la matematica inutile peso che si è costretti a sopportare. Peggio poi per quelli che hanno attentamente seguito la costruzione: essi spesso si rafforzano nell'idea della effettiva realtà dei numeri reali così come costruiti, nella assoluta mancanza di problemi sulla loro costruzione, di una sistemazione definitiva dei numeri reali, spinti così verso un illuminismo acritico.

E che shock quando ci si accorge poi che i reali si possono costruire anche in modi diversi, che il teorema di unicità a meno di isomorfismi è fondato su principi almeno tanto problematici quanto i numeri reali stessi, che ci sono anche gli iperreali, che i reali sono troppi da potere asserire di averne una precisa conoscenza.

D'altra parte si potrebbe proporre una diversa presentazione dei numeri reali.

Preliminarmente si esaminerebbero i limiti dei numeri razionali per far sorgere l'opportunità di avere a disposizione certi nuovi enti come soluzione dei precedenti problemi. Questi enti poi dovranno avere un opportuno comportamento da precisarsi mediante la presentazione di proprietà fondamentali da cui si possano dedurre le altre proprietà (presentazione matematica). Rimarrà allora aperto, e questo andrà precisato e sottolineato, il problema della consistenza degli assiomi, e qui si potrà introdurre la costruzione di Dedekind come un (non il) modello che mostra la consistenza relativa degli assiomi, e si potrà non insistere molto sulla costruzione, dandone eventualmente solo una traccia, ma precisare come si colloca nel contesto dello sviluppo del corso.

L'insegnante con una preparazione logico matematica saprebbe fare i dovuti collegamenti con l'impostazione assiomatica della geometria e far vedere come il problema della consistenza degli assiomi richieda una precisazione su ciò che si può dedurre da essi, come sia cioè un problema che ha lo stesso sistema matematico e quanto si può dedurre in esso come oggetto d'indagine, come si sia dunque ad un livello d'astrazione superiore (ma motivato dal preciso contenuto del problema che si sta affrontando), come sia necessaria una precisazione formale del linguaggio.

Un tale insegnante rivelerebbe inoltre come la dimostrazione di consistenza sia relativa, sostanzialmente perchè non si può dare una dimostrazione di consistenza assoluta di teorie che contengono l'infinità dei numeri naturali. Egli farebbe inoltre notare la non elementarietà degli assiomi archimedeo e di completezza, e la non numerabilità dei reali con l'apertura che ciò comporta alla problematica della approssimazione e all'utilizzazione pratica dei numeri reali. E tutto ciò senza dover introdurre la logica matematica.

Questo esempio suggerisce come potrebbe essere visto l'inserimento della logica matematica nelle superiori, cioè solo come guida all'insegnante nel precisare come affrontare la problematica della matematica.

Al di là dell'esempio, un insegnante con una preparazione anche in logica matematica saprebbe mettere in luce la differenza tra contenuto e modo di esprimere certi contenuti, saprebbe dire cosa sono le formule matematiche (ad esempio come fa il Keisler in Elementary Calculus) e come queste differiscano e si allaccino ai problemi della matematica, saprebbe far notare come la matematica si ponga in genere ad un livello di astrazione superiore a quello della computazione sia quando non esegue ma indica come computare, sia quando si pone problemi sui metodi di calcolo.

Con osservazioni del tipo appena detto si può precisare dove si colloca la programmazione delle macchine calcolatrici, esigenza oggi molto sentita, senza doverne fare oggetto specifico del corso, ma lasciando ad altro momento l'apprendimento del manuale delle istruzioni d'uso di una specifica macchina calcolatrice per chi può esserne interessato.

Partendo dal punto di vista sopra espresso, è stato impostato il corso di aggiornamento in logica matematica per insegnanti organizzato dalla sezione padovana della Mathesis.

Non ci si è limitati al solo aggiornamento degli insegnanti, bensì si è voluto vedere se detta impostazione potesse poi sortire effetti concreti una volta trasferita nella pratica dell'insegnamento.

Non avendo la possibilità di accedere a specifici gruppi di ricerca didattica, e senza quindi alterare minimamente il normale svolgimento dei corsi, si è pensato di ricorrere ad incontri supplementari facoltativi, quasi conferenze, in cui presentare un ripensamento critico sulla problematica della matematica, e valutarne poi l'efficacia in qualche modo.

Sono da sottolineare subito i limiti della sperimentazione: questi incontri facoltativi sono stati infatti cinque di quasi due ore nel pomeriggio a cadenza settimanale presso il liceo scientifico G. Bruno di Mestre (VE), e tre mattutini di cinquanta minuti ancora a cadenza settimanale presso l'istituto tecnico industriale Marconi di Piove di Sacco (PD). Da osservare anche che gli incontri di Mestre si sono tenuti nel '79 mentre a Piove di Sacco si sono svolti nel '81.

Poco altro c'è da dire sugli incontri se non che erano a libera partecipazione e che nel poco tempo disponibile si è cercato di toccare i temi della credibilità della matematica, dei problemi posti da una presentazione sia mediante definizioni esplicite sia assiomatica, dei problemi che sorgono dall'uso di insiemi infiniti.

Nello scorso mese di marzo poi, è stato somministrato in entrambe le scuole un test che è dunque risultato a distanza di circa due anni dagli incontri a Mestre, e "a caldo" invece a Piove di Sacco.

Il test (riportato alla fine) è stato presentato sia a studenti che avevano presenziato agli incontri sia ad altri studenti, in entrambi i casi volontari.

Anche nel questionario si è voluta mantenere una attenzione per problemi per così dire metamatematici. Alcune domande non sono state formulate con la massima precisione per cercare di valutare più libere reazioni da parte degli studenti, e comunque le domande non sono quelle classiche di un compito di matematica. Il tutto ha suscitato interesse negli studenti.

C'è da dire che non si ha alcuna pretesa che i dati ottenuti siano in alcun modo probanti di alcuna posizione. Il test non vuole essere che la proposta di una possibile direzione per cui incamminarsi per una eventuale sperimentazione didattica.

La prima parte del questionario proposto (1, 2, 3, 4, 5, 6) tendeva a realizzare un'analisi della situazione dopo gli incontri, e a dividere il campione in gruppi da confrontarsi.

Da queste prime risposte è sembrato di poter leggere l'alta disponibilità dimostrata a ripetere l'esperienza.

La restante parte del questionario tendeva a verificare più precisamente l'effetto degli incontri sia dal punto di vista dei bisogni manifestati (7, 13) da coloro che hanno risposto, sia dal punto di vista delle conoscenze matematiche (9, 10, 11, 12), sia dal punto di vista della loro opinione sulla matematica (7, 8, 14, 15) sia infine dal punto di vista della loro capacità di analisi logica (16, 17, 18).

Molte risposte sono sembrate significative.

Alcune potrebbero denunciare una mancanza di collegamento tra informazioni acquisite in successivi anni di corso (10).

Altre potrebbero indicare differenze tra gli allievi provenienti da sezioni diverse e la necessità di una migliore unità organizzativa di programmazione didattica (10, 11, 17).

Altre ancora permettono di rilevare maggiori sicurezze operative e concettuali là dove la matematica, per scelta degli insegnanti o per particolare indirizzo dell'Istituto, è stata collegata alla trattazione di altre discipline scientifiche (12).

Alcune risposte sono interpretabili come denuncia di insufficienza di informazioni proposte dalla scuola (7, 13).

Durante lo svolgimento del test si è notata una difficoltà molto marcata nel rispondere a domande la cui formulazione presentava una certa complessità logica (17, 18).

Ringrazio vivamente il Prof. Antonio Scudeler per la sperimentazione a Piove di Sacco e la Prof. Giuliana Righi per la sperimentazione a Mestre e per la stesura dei commenti ai risultati del questionario.

QUESTIONARIO

1) Hai frequentato le lezioni extra sulla matematica organizzate

A si (saltare alla domanda 3) B no

2) Se la risposta alla domanda 1) è no, perchè

A non ti interessano le attività nelle ore extrascolastiche

B non ti interessa la matematica

C non avevi tempo in quelle ore

D altri motivi (specificare) ....

....

3) Se l'esperienza fosse ripetuta, andresti a seguire gli incontri?

A si B no

Rispondere solo se la risposta alla 1) è stata si

4) Le lezioni extra seguite ti sono interessate

A molto B poco C niente

5) Ritieni di aver imparato qualcosa di nuovo?

A si B no

6) E' cambiato il concetto che avevi della matematica?

A si B no

7) Se si, perchè ora per te è

A più astratta

B più chiara

C più utile

8) Pensi che la matematica sia più

A una costruzione umana

B un riscontro di fatti oggettivi

9) Due insiemi sono ugualmente numerosi

A se hanno lo stesso numero di cose

B mai

C se esiste una corrispondenza biunivoca da uno su tutto l'altro.

10) Gli insiemi infiniti sono

A tutti ugualmente numerosi

B non tutti ugualmente numerosi

11) Il problema di confrontare due numeri reali per vedere qual'è maggiore

A non presenta alcuna difficoltà

B è insolubile a volte

C può essere difficile

12) Chi è maggiore tra $3,14\sqrt{2}$ e $1,41\pi$; e chi tra $3,141\sqrt{2}$ e $1,414\pi$.

13) La nostra conoscenza dei numeri reali è limitata dal fatto che sono

A troppo numerosi

B poco studiati

C descritti male nelle scuole

14) "I calcoli eseguiti con le calcolatrici sono facili e perfettamente esatti".

A vero B falso

15) A La conoscenza matematica dell'umanità è completa, restano solo da fare i calcoli di volta in volta necessari per le singole applicazioni.

B La matematica è un settore della conoscenza umana con molti, importanti e fondamentali aspetti tutti da chiarire.

16) A La matematica ha un unico modo di intendere la parola "esiste"

B In matematica ci sono vari livelli di esistenza

17) I postulati e gli assiomi sono

A affermazioni di fatti evidenti

B affermazioni necessariamente sempre vere

C affermazioni su un concetto (ad esempio retta, numero, somma) che servono a precisarlo

18) "Comunque scelte delle affermazioni su un concetto, queste lo individuano"

A vero B falso

INTERVENTI NEL DIBATTITO

Dal Maso: Il mio intervento è fondato sulla esperienza da me acquisita nell'insegnamento della matematica presso l'Istituto Tecnico Nautico di Trieste, nel periodo 1966 - 74.

E' noto che, a livello elementare, in ogni campo della matematica, prima si impara ad operare concretamente con enti di una certa classe e poi si avverte l'esigenza di formalizzare questi calcoli in modo da poter pervenire a semplificazioni delle operazioni da eseguire, senza far intervenire realmente gli oggetti su cui si opera. Ad esempio, prima si impara a fare i calcoli numerici e solo più tardi si avverte l'esigenza di formalizzare questi calcoli, mettendo in evidenza le proprietà formali delle operazioni, o meglio, introducendo un alfabeto, una sintassi e le regole di calcolo: nasce così il formalismo del calcolo letterale.

Ispirandomi a tale considerazione generale, nel primo anno del Nautico, cercavo di portare avanti contemporaneamente il formalismo del calcolo letterale e quello della logica. Per quanto concerne la logica, dopo aver assunti come primitivi i concetti di proposizione, di vero e di falso e di aver precisato che nella logica ci si occupa di proposizioni alle quali spetta in maniera inequivocabile l'attributo di vero o di falso, corredavo questa esigenza con esempi e controesempi ragionevoli. Per familiarizzare gli allievi all'uso corretto dei connettivi di congiunzione, di disgiunzione e di negazione, cercavo, su semplici esempi, di indurre gli allievi stessi a trovare da soli il valore di verità della congiunzione di due proposizioni, della disgiunzione e delle loro negazioni. Qualche incertezza manifestavano nel dedurre il valore di verità della negazione della congiunzione di due proposizioni: dipendeva dalla scelta dell'esempio. Per l'implicazione tutti erano d'accordo che, nell'ipotesi che p fosse vera, p implica q avesse lo stesso contenuto di verità di q, meno chiaro appariva che p implica q fosse comunque vera nell'ipotesi che p fosse falsa: accettavano questa definizione attribuendo una specie di beneficio del dubbio su q nel caso che p non fornisse informazioni. Introdotti i connettivi di implicazione e di coimplicazione ne davo la lettura più consueta: se p, allora q; da p segue q; p è condizione sufficiente per q; q è condizione necessaria per p.

A questo punto sorgeva l'esigenza di introdurre un formalismo (cioè un alfabeto, una sintassi e regole di calcolo) che permettesse di esprimere proposizioni, anche complicate, mediante i connettivi introdotti e di semplificare queste proposizioni composte senza fare appello al significato e al valore di verità delle singole proposizioni componenti. Nel seguito del corso questo formalismo dimostrerà tutta la sua utilità, ma inizialmente ritenevo opportuno appassionare gli allievi al calcolo delle proposizioni e alla traduzione di proposizioni del linguaggio comune in espressio ni del linguaggio formalizzato e viceversa. Passavo poi alla realizzazione di circuiti elettrici ad interruttori atti a risolvere operazioni logiche. Questo era l'argomento che più attraeva gli allievi, i quali, data una proposizione composta, riuscivano, e in maniera autonoma, a tracciare il circuito relativo e quelli ad esso equivalenti, dimostrando in tal modo di saper applicare correttamente le proprietà dei connettivi.

A questo punto gli allievi avevano imparato ad usare correttamente la congiunzione e, la disgiunzione o, la negazione, l'implicazione, la coimplicazione, l'articolo determinativo e quello indeterminativo. Per gli scopi del corso occorreva ancora insegnare agli allievi il significato di proposizioni come: "per ogni oggetto di un certo insieme è vera una data proposizione dipendente da quell'oggetto", "esiste un oggetto di un certo insieme per cui è vera una data proposizione dipendente da quell'oggetto". Introducevo quindi i quantificatori, ne deducevo la regola di negazione e provavo con esempi la non commutatività dei quantificatori universale ed esistenziale. Subito dopo passavo alla formulazione di definizioni notevoli della matematica (come: l'insieme A ha massimo, m è il massimo di A, A è limitato superiormente, la funzione f non è crescente in A, la funzione f è non crescente in A, ecc.) e alla loro traduzione simbolica.

A conclusione del mio intervento posso affermare che gli elementi di logica formale,così introdotti nel primo anno del Nautico, mi consentivano di sviluppare in maniera più agevole ed organica le ulteriori parti del corso (probabilità, geometria, trigonometria, continuità, limiti, calcolo differenziale e integrale), realizzando anche nelle successive formalizzazioni una notevole economia di pensiero.

Intervengono nel dibattito anche i Proff. Boero, Ferro,Gerla, Prodi.

INDICE