Agosto-Settembre 1980
Supplemento ai nn. 8 - 9

Period. mensile
sped. in abb. post. gruppo III/70

Anno VII

NOTIZIARIO

DELLA

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SESTO CONVEGNO SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

MONTECATINI T., 27 APRILE 1980
A cura di Paola Cerrai

DIRETTORE: CARLO PUCCI
SEGRETARIO DI REDAZIONE: LUIGI PAPINI

EDIZIONI DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Il presente Notiziario viene distribuito gratuitamente ai soci e non è in vendita.

LA PRESENTE RIVISTA VIENE STAMPATA CON UN CONTRIBUTO FINANZIARIO DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Autorizzazione N. 4462 del Tribunale di Bologna in data 13 luglio 1976
Tecnoprint - Via del Legatore 3 - 40138 Bologna (Italia)
Settembre 1980

Nota

Il VI Convegno dell'U.M.I. sull'insegnamento della matematica, svoltosi il 27 aprile 1980 a Montecatini Terme,ha visto la partecipazione di numerosi docenti universitari e della scuola secondaria.

Il Convegno ha avuto una durata minore rispetto a quella degli anni precedenti,essendosi i lavori congressuali esauriti in un solo giorno. In realtà,il Convegno si è posto come naturale prosecuzione del Congresso tenutosi,sempre a Montecatini Terme,nelle due precedenti giornate:Congresso, quest'ultimo,promosso dalla Confederazione delle Associazioni Scientifiche Italiane (COASSI),ed avente ad oggetto l'insegnamento delle materie scientifiche in Europa.

Il Convegno è stato aperto dalla relazione del Prof. G.Prodi sul "Syllabus" di matematica per l'accesso alle facoltà scientifiche.All'esposizione delle origini e degli scopi del "Syllabus" ha fatto eco un'ampia e approfondita discussione,dalla quale è emerso l'estremo interesse per un'iniziativa che tende a porsi come un significativo contributo al dibattito sull'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore,in vista di una riforma che si auspica non troppo lontana.

Il secondo tema del Convegno concerneva l'insegnamento della statistica nella scuola secondaria.

Dapprima,il Prof. A.Zuliani ha elencato le esperienze straniere in questo campo,soffermandosi sulle tendenze manifestatesi nella Repubblica Federale Tedesca,Ungheria,Svezia,Inghilterra e Galles.Il Relatore ha sottolineato il divario di sviluppo esistente fra questi paesi e l'Italia,dove il livello di sperimentazione è ancora allo stato embrionale,anche a causa della scarsa attenzione dedicata all'insegnamento della statistica nei programmi universitari.

Nella relazione successiva,il Prof. L.Piccinato si è soffermato su "Alcuni aspetti elementari dell' inferenza statistica".Premessa l'esposizione delle nozioni elementari di statistica,ed avvalendosi di esempi di comune utilizzazione,il Relatore ha richiamato l'attenzione sulle controversie esistenti in merito all'approccio metodologico ai problemi statistici, e sulla conseguente difficoltà di tratteggiare un "programma" per l'insegnamento della statistica nella scuola secondaria.

I testi delle relazioni sono pubblicati integralmente negli Atti. Il dibattito seguito alle relazioni è solo parzialmente riportato negli Atti. La necessità di una sollecita pubblicazione degli Atti del Convegno non ha consentito,infatti,di riprodurre tutti gli interventi non forniti dai diretti interessati.

Nei precedenti Convegni sull'insegnamento della matematica era sempre stato dato ampio spazio agli interventi dei rappresentanti dei Nuclei di Ricerca didattica.In questo Convegno,disponendo di una giornata soltanto, non c'era la possibilità di sviluppare questa rassegna.

Per rimediare a questa carenza,i direttori dei nuclei sono stati invitati a mandare una breve relazione sull'attività da loro svolta.Pubblichiamo in Appendice le relazioni che ci sono pervenute.

Per comodità di consultazione,si è ritenuto opportuno riprodurre, infine, nell'Appendice il testo del "Syllabus" (peraltro già pubblicato alla fine di marzo nel Notiziario dell'U.M.I. e,all'inizio di aprile,dalla rivista Tuttoscuola).

L'elenco dei partecipanti è compilato secondo l'ordine alfabetico della provincia della sede di lavoro.

P.Cerrai

ELENCO DEI PARTECIPANTI

ANCONA: CAROSATI Lucio, LEONORI Lucia.

AVELLINO: RUSSO Canio.

BARI: MILELLA Anna Antonia, PERTICHINO Michele.

BOLOGNA: GHESINI Nadia.

CAGLIARI: BERTOLINO Francesco, CAREDDA Carla, DEPLANO Sandro, FIORI Michela, GRUGNETTI Lucia, LOY CRISTINI M.Paola, MONTALDO Oscar, RACUGNO Walter.

CATANIA: LIZZIO Angelo, MAMMANA Carmelo.

COSENZA: COSTABILE Pietro, D'APRILE Margherita.

FERRARA: CUPINI Giovanni.

FIRENZE: ASTORRE M.Luisa, CAMPEDELLI M.Giuditta, CAPACCIOLI Carlo, CHITI Giuseppe, DEL GIALLO MAGALDI Anna, DOLFI Cesarina, FOCARDI Enrica, GHERARDELLI Francesca, GIORGETTI CAPOCASA Anna, GIUNTINI Sandra, PIRILLO Giuseppe, PUCCI Carlo, QUATTRINI SPALLA Giuseppina, RABUZZI Alessandro, ROSATI L.Antonio, ROSATI VOCINO M.Rosaria, SIMONETTI Carla, TAVIANI MEALLI Elisabetta, ULIVI Elisabetta, ZAPPA CASADIO Giuseppina, ZAPPA Guido.

GENOVA: BOERO Paolo, FERRARI Pier Luigi, FURINGHETTI Fulvia, GIGLIO Simonetta, LEMUT Enrica.

IMPERIA: BONGIOANNI Luisella, FERRARI Marisa, LUCIANA Laura, MAINI Giorgio.

LECCE: LENZI Domenico.

LIVORNO: CIAMPINI BRUNI M.Luigia,LUCCHESI Primalba.

MASSA: BENESPERI Marta.

MILANO: BRAMBILLA Maura,DE MICHELE Leonide,TOSI Armida.

MODENA: BARTOLINI BUSSI Maria,LORIA Arturo,TRIPICIANO Giulia.

NAPOLI: CUNDARI LO PRESTI Giuseppina,DI CESARE Luciana,MIGLIARDINI Rita,MORELLI Aldo,PALLADINO Franco,SANTANIELLO M.Antonia.

PADOVA: BUSULINI Franca,MONTANARI Rossana,MORGANTINI Edmondo,PATUZZO GREGO Paola,RAVAGNAN Roberta,SCIMENI Benedetto,SEMBENOTTI Loredana,ZULIANI Alberto.

PALERMO: CANNATA Domenica,CANNIZZO Aurelio,D'AMICO Giovanna,GIACALONE Ermanno,LOREFICE M.Fiorella,SPAGNOLO Filippo,TRIPICIANO M.Maddalena,VALENTI Santi,VISALLI Natalia.

PARMA: ARTUSI CHINI Liliana,SPERANZA Francesco.

PAVIA: BAZZINI CHIMIENTI Luciana,BERNINI Elena,BERTOLUZZA Carlo, FERRARI Mario,MAGENES Enrico,PESCI Angela,PINTACUDA Nicolò, REGGIANI Maria.

PERUGIA: CALABRESE Pantaleo,VIBI Romano.

PISA: CALIGO Domenico,CERRAI Paola,CHECCUCCI Vittorio,DE GIORGI Ennio,FRANCAVIGLIA Sebastiano,GIUNTINI Paola,MARIOTTI M.Alessandra,PISANESCHI Paolo,PISTELLI Giuliana,PRODI DENTELLA Silvia,PRODI Giovanni,VALENTINI Liliana,VILLANI Vinicio, ZARRILLI Michela.

PISTOIA:	CIOTTA Antonio,FERACI Fabrizio,SOLDI Vasco.
RAVENNA:	CARAVITA Edoardo,MANAVESI Cesarina,SACCHI M.Carla.
ROMA:	CANNIZZARO Lucilla,DALL'AGLIO Giorgio,de FINETTI Bruno, FERRANTE Loretta,PELLEREY Michele,PICCINATO Ludovico,RIZZI Bruno,SCOZZAFAVA Romano,ZELASCHI Letizia.
SALERNO:	FIORICA Francesca.
SAVONA:	BATKOVICH Cristina,BENEDETTO M.Teresa,CICERI Carlo,RAMBALDI Giacomo,SCOTTO Stefano,SGUERSO Cristina,SPOTORNO Bruno, VIGANEGO Gabriella.
TARANTO:	BINDO Tiziana.
TORINO:	ARZARELLO Ferdinando,BOSCIA Renato,CHIUSANO Giancarlo, CIGNETTI Alberto, DELSEDIME Piero,GALLARA' Lucia,GALLIGANI Paola,GALLO Elisa,GATTESCHI Gianluca,MOSCA Miranda,PAOLATI Sara,SCAGLIOTTI Gisella,SCIENZA Giuseppe,VALABREGA Elda.
TRENTO:	OSS Armida,ZACHER Giovanni.
TRIESTE:	CRISCIANI Fulvio,DAL MASO Dino,FURLANI Marco,PENCO ZENNARO A.Maria,RAGAZZONI TORELLI M.Clotilde,TORELLI Giovanni.

Sono inoltre intervenuti:

ORLANDINI Ettore	Ispettore del Ministero della P.I.
ROGERSON Alan	Research Director of the SMP.

Apre il Convegno il Presidente dell'UMI,prof.Pucci,che saluta gli intervenuti e ringrazia i relatori professori Zuliani,Piccinato ed in particolare Prodi per il lavoro da loro predisposto che sarà oggetto di dibattito nel convegno.Ricorda che da sei anni l'UMI organizza ogni anno un convegno sui problemi dell'insegnamento della matematica e che questi convegni sono una periodica occasione di controllo per il lavoro svolto e di studio per nuove iniziative;gli atti dei convegni sono stati sempre puntualmente pubblicati come supplementi del notiziario dell'UMI.

Rileva che quest'anno per la prima volta il convegno dell'UMI si svolge di seguito al convegno didattico organizzato dal COASSI;in esso è stata fatta un'analisi ed un confronto sui problemi dell'insegnamento delle materie scientifiche nelle scuole secondarie in Europa.Rileva anche che il dibattito,svoltosi nei due giorni precedenti,ha particolarmente interessato i matematici;fra i partecipanti vi sono stati oltre cento matamatici,molti dei presenti.

Le informazioni raccolte sul livello di preparazione fornito dalle scuole secondarie francesi,britanniche,tedesche e svedesi saranno particolarmente utili per l'esame del Syllabus;così pure le informazioni relative ai programmi delle scuole secondarie in detti paesi saranno utili per il secondo tema all'ordine del giorno.

Pucci dà quindi la parola al prof.Prodi per la sua relazione.

GIOVANNI PRODI - "IL "SYLLABUS" DI MATEMATICA PER L'ACCESSO ALLE FACOLTA' SCIENTIFICHE" .

1.L'idea di pubblicare un "Syllabus" di matematica per l'accesso alle facoltà scientifiche affiorò durante l'assemblea straordinaria dell'UMI, in occasione del Congresso di Palermo.La discussione fu lunga e vivace:molti furono i consensi,ma non mancarono le perplessità.La CIIM,comunque,decise di attuare la proposta,con fiducia nella sua sostanziale utilità,ed anche con la convinzione che solo l'esperienza avrebbe potuto mettere in evidenza gli inconvenienti,consentendo,successivamente,di eliminarli o ridurli.

Il "Syllabus"-pubblicato alla fine di marzo nel Notiziario dell'UMI e,all'inizio di aprile,dalla rivista "Tuttoscuola"-si propone,in primo luogo,di dare un aiuto ed un orientamento ai giovani.

Purtroppo è molto difficile per un allievo di una scuola secondaria avere un'idea abbastanza precisa dell'importanza dei vari temi in cui l'insegnamento della matematica si articola.Si deve ammettere che,fra tutte le materie,la matematica corre più di ogni altra il rischio di passare via incolore e insignificante.Troppo spesso l'insegnamento si limita alle pur necessarie manualità del calcolo:mancano le motivazioni e le aperture.Non è neppure facile per un giovane misurare le sue autentiche attitudini e capacità.

Ma la pubblicazione del "Syllabus" ha avuto un secondo scopo,che del resto è strettamente collegato al primo:quello di intervenire in modo efficace nell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie.Il "Syllabus" è coerente con le iniziative prese dalla CIIM negli ultimi anni e, in particolare,con la costituzione dei "nuclei di ricerca didattica".Questi "nuclei",in cui sono stati sviluppati progetti didattici di varia impostazione,hanno compiuto interessanti attività ed hanno raggiunto,al loro interno, un notevole livello di preparazione alla ricerca,ma,nella scuola italiana, rischiano di rimanere isolati.La scuola secondaria superiore italiana(a differenza,ad esempio,dalla scuola elementare) ha una grandissima capacità di difendersi dai corpi estranei;attorno a gruppi che possono portare pericolose novità e turbare la quiete si forma una specie di"cisti":gli intrusi sono costretti a vivere in uno spazio che si fa sempre più stretto e,alla fine,o per scoraggiamento o per eventi casuali,scompaiono.I "nuclei di ricerca didattica" rischiano questa fine.L'ambiente è raramente favorevole a sperimentazioni;

le stesse terminologie in uso:"insegnamento tradizionale" e "insegnamento sperimentale" sembrano designare realtà equivalenti,fra cui la scelta può dipendere solo dai gusti.Anzi,dopo molte sperimentazioni "selvagge", nell'opinione dei più l' "insegnamento tradizionale" può apparire come l'opzione più seria....Ebbene,per la CIIM era doveroso denunciare chiaramente il vuoto che si nasconde sotto questa nobile insegna della tradizione,e il modo più naturale ed obiettivo di fare la denuncia era quello di delineare il tipo di preparazione che è ragionevole esigere oggi da un giovane che varca la soglia di una facoltà scientifica,dopo cinque anni di scuola secondaria superiore.

2.La storia del "Syllabus" è breve,anche per la ragione che si è cercato -appunto- di agire rapidamente.E' stata fatta dapprima un'inchiesta fra una sessantina di docenti universitari scelti in modo pressochè casuale;le risposte sono state una trentina.Sono state preparate varie bozze,che sono state discusse e rifatte,una dopo l'altra,a vari livelli (*).Infine,si è svolta una discussione in seno alla CIIM,allargata a tutto l'Ufficio di Presidenza e alla Commissione Scientifica dell'UMI:da questo ultimo vaglio è uscito il testo che poi è stato pubblicato sul "Notiziario dell'UMI" e su "Tuttoscuola".Particolarmente importante è stata la pubblicazione su quest'ultima rivista,molto diffusa nell'ambiente scolastico e fra i genitori degli allievi.Devo rilevare che in questo modo il "Syllabus" è stato largamente diffuso senza alcuna spesa da parte dell'UMI.

3.Un breve commento del testo.Ci si è sforzati di evitare i due pericoli opposti:da un lato quello di fare un compendio di ciò che mediamente si insegna nella scuola secondaria,dall'altro quello di respingere in

(*) Sento il dovere di ringraziare in modo particolare V.Checcucci e V.Villani per la loro preziosa opera.

blocco tutto quello che vi si insegna,cosa che sarebbe stata ingiusta ed avrebbe prodotto nei giovani sfiducia e sconforto.Chi legge attentamente il "Syllabus"non mancherà di notare come si sia fatto leva su tutti i punti in cui l'insegnamento tradizionale si presenta ancora valido (si veda,ad esempio,la parte che riguarda la geometria).Malgrado ciò,può effettivamente accadere che il testo risulti sconcertante,proprio per il contrasto tra la semplicità dei mezzi richiesti e il carattere fondamentale delle nozioni e delle operazioni che sono coinvolte.Qualche volta- è noto - l'allievo gradirebbe una domanda "difficile",cioè complicata,ma tale da non dare pensiero.(in tutti i sensi):certe domande "facili" sconcertano.

Che accoglienza riceverà questo "Syllabus" ? E' troppo presto per saperlo.Personalmente,mi auguro che il "Syllabus" provochi polemiche,lettere sui giornali,costituzioni di comitati di genitori e di insegnanti indignati. Non amo la polemica,ma vorrei che il "Syllabus" "facesse notizia".Il mio timore è invece che anche questa volta si ordisca la "congiura del silenzio",come fu già,una decina di anni fa per i "Programmi di Frascati".Insomma,per usare l'immagine di prima,temo che anche il "Syllabus" finisca dentro ad una cisti....Penso che l'UMI farà bene ad interessare il più possibile la stampa e la televisione.Sarebbe bene organizzare dibattiti,inchieste ecc..:purtroppo,per queste cose abbiamo poco tempo e poche energie.Speriamo che gli insegnanti di matematica organizzino riunioni e dibattiti sul "Syllabus" in varie sedi.

4.Che utilizzazione fare del "Syllabus" ?Abbiamo detto chiaramente nella prefazione al documento che cosa non si deve fare con il "Syllabus": in particolare,il "Syllabus" non deve essere un prontuario ad uso degli esaminatori della maturità,almeno per questo anno.Solo quando il documento sarà stato diffuso,accettato,sarà insomma entrato nel costume,potrà anche diventare un documento base per l'esame finale.Per ora no.

Al contrario,sarà ottima cosa se i docenti di matematica del primo anno dell'Università si riferiranno a questo documento,dandolo come punto di partenza del loro insegnamento.Naturalmente,nelle sedi universitarie in cui si fa un "precorso",il "Syllabus" potrà essere accettato (e citato) come programma di base.A riguardo,mi pare utile segnalare che ci sono docenti universitari i quali,per conto loro hanno già fatto un "Syllabus",anzi hanno scritto libri di vario carattere e di varia mole,in funzione propedeutica agli studi universitari;cito quelli di cui sono venuto a conoscenza:

F.Bertolini: Preliminari di Matematica	E.Oppici (Parma)
B.Scimeni:Algebretta	Decibel Editrice (Padova)
G.De Marco :Analisi Zero	" " "
R.Magari :Riepilogo di matematica elementare	Tip.Senese (Siena)

Com'è detto nella prefazione,il "Syllabus" è un testo provvisorio e sperimentale destinato ad essere riveduto,sulla base delle critiche e delle proposte che emergeranno.Ritengo molto importante e utile il dibattito che si svilupperà in questa sala ora,dopo la mia breve presentazione.Il "Syllabus" potrà venire rivisto e aggiornato ogni due anni,e forse anche ogni anno:in questo modo speriamo che,a poco a poco,entri nella scuola italiana come elemento di stimolo e di rinnovamento.

INTERVENTI NEL DIBATTITO

*MORELLI:*Si fanno alcune osservazioni tenendo conto di una discussione che si è svolta in una riunione tenuta all'Università con docenti di scuola media e di esperimenti fatti in alcune classi.Si può dire in generale che l'iniziativa è accolta molto favorevolmente,pur non mancando dei pareri contrari. Si fanno però varie riserve e si sollevano alcuni problemi.

Sul modo di utilizzare il"Syllabus",si dovrebbe chiarire come realizzare l'auspicabile collaborazione fra docenti di scuola media e docenti universitari.Un insegnante ha dedicato alcune ore di lezione ad una discussione con la classe,ottenendo risultati positivi ed indicazioni interessanti.

In un'altra classe (V liceo scientifico del sottoscritto), è stato dato il testo ad una quindicina di allievi,sviluppando poi una discussione sulla base delle risposte scritte.Si può affermare che è indispensabile fornire delle risposte agli allievi o con un testo scritto o con l'intervento degli insegnanti.

Per quanto riguarda la struttura si rileva che sembra riuscita meno bene la parte "Conoscere".Sarebbe opportuno evitare un elenco freddo degli argomenti,ma presentarli con domande,con una maggiore sollecitazione degli studenti.

Sul contenuto e l'estensione del "Syllabus" diversi docenti ritengono che esso sia troppo difficile e,per studenti di alcuni tipi di scuola, troppo esteso.Altri ritengono,con il sottoscritto,che così com'è è adatto a fornire un quadro completo della preparazione degli studenti,realizzando così quello che dovrebbe essere uno degli obiettivi del "Syllabus".E' importante che gli studenti e soprattutto i docenti medi e universitari si rendano conto della situazione.Forse è opportuno aggiungere altre domande facili. Comunque la cosa più importante è che la valutazione della risposta venga fatta con molto buon senso.Possono bastare anche poche risposte giuste date da uno studente per poter dare un giudizio positivo sulle sue possibilità di intraprendere studi scientifici.Nella esperienza fatta risulta che il numero di risposte giuste date dagli studenti,anche validi,è molto basso,specialmente per l'aritmetica (facendo eccezione per gli studenti esperti nell'uso dei minicalcolatori) e per la geometria.Eppure confrontando questi studenti con altri di anni precedenti,si può essere sicuri che essi possono riuscire bene o anche eccellere iscrivendosi ad una facoltà scientifica.Una delle ragioni della insufficienza delle risposte è la difficoltà di fare da parte degli insegnanti,per vari condizionamenti,gli opportuni ritorni e collegamenti ad argomenti svolti in anni precedenti.Da qui la spinta che il "Syllabus" dovrebbe dare agli insegnanti ad effettuare più spesso questi ritorni.

Sarebbe opportuno dedicare una parte dell'ultimo anno di scuola media ad una revisione dei concetti fondamentali.

ORLANDINI: Ritengo innanzi tutto doveroso esprimere il compiacimento per un lavoro coraggioso e certamente utile.

Quello che ritengo necessario debba essere tenuto presente è il pericolo che può rappresentare una errata interpretazione del significato del "Syllabus", la quale può essere data da chi, visto quanto richiesto nel saper fare, pone come unico obiettivo dell'insegnamento appunto quel saper fare.

Infatti questo può portare a perdere di vista tutta la parte formativa e il valore culturale primo della matematica: occorre insistere su questo aspetto formativo mettendo in guardia i docenti perchè non ritengano necessariamente di avere sviluppato un valido insegnamento solo perchè i propri alunni sono in grado di risolvere gli esercizi del tipo di quelli proposti.

Altra osservazione è relativa alla scarsa incidenza delle possibilità offerte dalla statistica e dal calcolo delle probabilità.

Infine è positivo l'accesso all'uso delle calcolatrici tascabili però qui presentato come semplice strumento mentre avrebbe dovuto a mio parere, sottolineare la parte logica e concettuale che sta alla base del funzionamento di tali macchine. Si pensi che dei diagrammi di flusso si tratta già (almeno nei programmi) a livello di scuola media dell'obbligo.

In un seminario che ho realizzato con il contributo del Ministero della P.I. un gruppo di docenti esperti nell'insegnamento secondario ha riconosciuto l'importanza primaria che può assumere, proprio se fatto con tale prospettiva, l'uso delle calcolatrici programmabili o non.

SPERANZA: Nella fase di preparazione del "Syllabus", ho contattato alcuni insegnanti universitari,visto che esso era focalizzato non all'uscita dalle scuole secondarie,ma all'ingresso in certi corsi universitari.

La maggior parte degli insegnanti (e io con loro) hanno prestato l'attenzione,più che su certi contenuti,su aspetti metodologici,di richiesta di capacità di pensiero:in poche parole,saper distinguere fra verifica sperimentale e ragionamento;saper seguire un ragionamento;cogliere esempi e controesempi di proprietà;sensibilità ad aspetti elementari di logica e concetti insiemistici elementari;saper costruire e usare semplici modelli matematici,rappresentazioni grafiche,...;saper usare un calcolatore tascabile;saper riconoscere in situazioni diverse analogie,e saper seguire la costruzione di strutture soggiacenti,...,

Ovviamente,queste cose dovrebbero in buona parte essere possedute da tutti i maturati della Scuola superiore.

MILELLA: Penso che potrebbe essere molto utile tener presente il "Syllabus" come traccia,come guida del programma da svolgere nei corsi integrativi cioè in quei corsi che sono obbligati a frequentare gli studenti che hanno conseguito la maturità con un corso di studi di scuola secondaria di II grado della durata di quattro anni e non di cinque.Mi riferisco agli studenti provenienti dall'Istituto Magistrale e dal Liceo Artistico e che poi vogliono iscriversi a facoltà scientifiche.Dico questo perchè ritengo indispensabile dare a questi allievi i concetti base,le conoscenze che non hanno avuto nella scuola da loro frequentata in quanto molti argomenti non sono previsti dai programmi ministeriali vigenti.

TOSI: Insegno nella Scuola Europea di Varese e vivo il problema di conciliare i programmi di matematica in atto nei vari stati della Comunità e le rispettive tradizioni scolastiche.Fino ad ora il programma nazionale più diverso da quello vigente nelle Scuole Europee è il nostro,anche perchè rimasto invariato da troppo tempo.Sono molto grata all'iniziativa della CIIM con la pubblicazione di questo " Syllabus " ,anche in questa prima stesura , è abbastanza vicino ai contenuti dei programmi vigenti nelle Scuole Europee , peraltro in continua trasformazione.

Propongo che vengano sviluppati anche:due capitoli appena accennati sull' Algebra lineare e soprattutto sul Calcolo delle Probabilità , argomenti che da noi figurano in programma da anni. Soprattutto il secondo occupa spazi sempre più grandi , dopo l'ingresso della Gran Bretagna nella Comunità Europea.

ZULIANI: Anzitutto , un'informazione e una dichiarazione di disponibilità.L'informazione : la Società italiana di statistica ha istituito una commissione scientifica su " il ruolo della statistica nella formazione culturale della scuola dell' obbligo e della scuola secondaria superiore " , commissione che mi onoro di presiedere. Per iniziativa congiunta di essa e della Facoltà di Scienze statistiche, demografiche ed attuariali della Università di Padova si è svolto , nel settembre dello scorso anno , a Bressanone , un Convegno su " L' insegnamento pre - universitario della statistica , con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore " , i cui atti usciranno entro giugno. Era invitato fra i matematici il Prof. Prodi ed è stata una prima occasione di incontro.

La disponibilità è per collaborare nell'esplicitazione del " conoscere " e del " saper fare " , relativamente agli " Elementi di calcolo delle probabilità e statistica " previsti dal syllabus di matematica che il Prof. Prodi ha appena illustrato.

Infine , un' osservazione in margine ad alcuni interventi che hanno preceduto il mio. Partirò un pò alla larga. Allorchè l'efficienza del servizio di nettezza urbana fosse misurata in base al peso dei rifiuti rimossi , qualcuno potrebbe essere tentato di cercare solo oggetti pesanti , trascurando il resto ; con l' effetto di migliorare l'efficienza ma di lasciare le strade più sporche di prima. Si tratta di un tipico " effetto di ritorno " (Hatry , H.P. (1976) , " Issues in productivity measurement for local governments " in Holzer , M. (ed.) , Productivity in public organizations , Kennikat Press , New York). Per questo , forse , non si dovrebbe più misurare l'efficienza ? No di certo ! Occorre soltanto considerare diversi aspetti , quantitativi ma anche qualitativi , in una parola occorre guardare all' obiettivo. L' obiettivo , tornando a noi , è , principalmente, di indicare a docenti e studenti standard di insegnamento - apprendimento da conseguire , di riorientare l'insegnamento verso le capacità " cognitive " , rispetto a quelle " affettive " , pure rilevanti ; perchè , spesso , l'attenzione prevalente a queste rispetto a quelle , nella valutazione dei risultati scolastici , ha rappresentato un alibi , uno scarico di responsabilità.

Naturalmente , poi , non mancano i modi per evitare che il syllabus produca indesiderati effetti di ritorno. Ad esempio , si può proporne più d'uno (come in Inghilterra) ; o cambiare , anno per anno i tests relativi al " saper fare " (che già nel syllabus qui proposto sono indicati come esemplificativi).

QUATTRINI SPALLA : Ritengo positiva la nascita di un' iniziativa come quella del " Syllabus " , come fatto in sè , al di là del contenuto particolare. Questo " libretto " è infatti un primo passo verso una forma di collegamento fra i vari insegnanti e verso una chiarificazione degli obiettivi primari della scuola media superiore. Fino ad oggi gli insegnanti delle diverse scuole medie hanno sempre lavorato nell' isolamento , dando risposte personali e non confrontate sulle finalità del proprio lavoro. Attraverso un' iniziativa come quella del " Syllabus " si potrebbe tentare , utilizzando le varie questioni proposte , di dare un' indicazione su ciò che si ritiene debba realizzare l' insegnamento della matematica nelle scuole medie superiori , non soltanto come conoscenza specifica , ma soprattutto come strumento di cultura.

Vedo il " Syllabus " , in conclusione , come un primo passo verso un aggiornamento permanente , forma continua di confronto e di collegamento.

CALIGO : L' esperienza di vari quinquenni di insegnamento della Analisi matematica alle matricole universitarie (Matematica , Informatica , Ingegneria) mi induce a raccomandare che il " Syllabus " abbia un preambolo sintetico.

Il preambolo mi sembra necessario per avvertire che la lettura e la utilizzazione di uno strumento , palesemente opportuno , come un " Syllabus " richiede di conoscere sillabario , vocabolario ,grammatica e sintassi.

Troppo spesso , negli ultimi due o tre quinquenni , ci si trova di fronte a studenti che non sanno esprimersi o non sanno comprendere chiaramente un ragionamento , riconoscere un sofisma o un paradosso. Basta pensare quante volte è fatta confusione fra condizione necessaria e condizione sufficiente , fra ipotesi e tesi.

Dunque:domandiamo almeno un pò di collaborazione agli insegnanti di lettere e di filosofia !

Intervengono nel dibattito sul "Syllabus" anche i proff.Boero, Costabile,Francaviglia,Montaldo,Morgantini,Pelleray,Torelli.

ALBERTO ZULIANI - "LA STATISTICA NELLA SCUOLA SECONDARIA :ESPERIENZE DI ALTRI PAESI ED ORIENTAMENTI IN ATTO NEL NOSTRO"

Una breve premessa

1.-La vastità del tema che mi è stato affidato mi obbliga ad essere schematico e me ne scuso;spero che questo possa giovare,d'altra parte,alla chiarezza dell'esposizione.

2.-Ho esaminato le esperienze della Repubblica Federale Tedesca,della Ungheria,della Svezia,dell'Inghilterra e del Galles,oltre a quella italiana.Le quattro esperienze straniere considerate hanno ciascuna qualche caratteristica interessante per noi:la RFT ha introdotto l'insegnamento di stocastica (insegnamento integrato della statistica e del calcolo delle probabilità) nella sola scuola secondaria;l'Ungheria è nella situazione inversa:l'insegnamento è ben sviluppato nella scuola primaria e invece assai poco nella secondaria (si tratta quasi di un'occasione perduta,come avrò modo di considerare in seguito);in Svezia e U.K. (limitatamente ad Inghilterra e Galles) l'insegnamento della statistica è realizzato a tutti i livelli di studio,in modo assai articolato nel secondo caso.

3.-Faccio riferimento essenzialmente ai seguenti testi:H.Dinges (1979) per la RFT;T.Nemetz (1979) per l'Ungheria;V.Barnett (1980) per l'U.K.;A. Zuliani (1980) per l'Italia;un rapporto del National Board of Education (1980) per la Svezia.Gli apprezzamenti che riferisco nel testo sono degli autori precedenti;nel merito,in gran parte,li condivido.Inoltre, ho utilizzato i materiali di un convegno tenuto a Bressanone nel settembre dello scorso anno,per iniziativa congiunta della Facoltà di Scienze statistiche,demografiche ed attuariali dell'Università di Padova e della Società italiana di statistica,proprio sull'insegnamento della statistica al livello secondario superiore:in particolare mi sono riferito ai contributi di Colombo (1979),di Naddeo et al.(1979) e di Zuliani (1979).

4.-Cercherò di finalizzare l'esposizione;cercherò cioè di segnalare quelle caratteristiche delle esperienze straniere che mi sembrano particolarmente illuminanti o indicative per la situazione italiana.

5.-Farò qualche breve riferimento anche all'insegnamento della statistica e del calcolo delle probabilità nella scuola primaria.Spesso,questo è necessario per capire meglio la situazione al successivo livello di studi.

L'esperienza della R.F.T.

6.-Nella R.F.T. gli studenti seguono 11 anni di istruzione obbligatoria,ai quali si aggiungono 3 anni di istruzione secondaria.L'insegnamento di stocastica è stato introdotto nel Gymnasium pochi anni fa.L'importanza che viene assegnata ad esso è testimoniata dal fatto che soltanto l'algebra lineare e appunto la stocastica sono argomenti presenti nei syllabi di matematica di tutti gli Stati (lender) o come discipline basiche (spesso) o come materie opzionali (in qualche caso).

7.-Tuttavia,non sempre gli obiettivi dell'insegnamento sono chiari;nè sono univoci nei diversi stati.Si va:

-da fornire chiari concetti di probabile,aleatorio,frequente;

-a enfatizzare le differenze e le somiglianze nella descrizione causale e indeterministica dei fenomeni naturali;

-a fornire gli strumenti per leggere criticamente dati imprecisi;

-a far comprendere le possibilità e i limiti di conclusioni basate su dati statistici.

Si tratta di obiettivi tutti importanti,sotto diversi aspetti, che tendono d'altra parte a differenziare l'insegnamento della stocastica nelle diverse situazioni territoriali.Perciò,è difficile dire se i contenuti minimi dei corsi basici vengano in realtà sempre svolti.Essi comprenderebbero i concetti di evento,spazio degli eventi,frequenze relative, spazio di probabilità,indipendenza di eventi e prenderebbero inoltre in considerazione:distribuzioni,esperimenti casuali,formule fondamentali di combinatoria e di calcolo delle probabilità (basate sull'assiomatizzazione di Kolmogorof),distribuzioni binomiale e bernoulliana,anche come base per introdurre i problemi di stima e di verifica delle ipotesi.

8.-I contenuti opzionali sono spesso un arricchimento soltanto formale di quelli basici;oppure,un collage di argomenti con i quali l'insegnante è venuto in contatto durante i corsi di aggiornamento ai quali ha partecipato.

9.-Questa situazione dipende largamente dal fatto che gli insegnanti di matematica del gymnasium,cui è affidato l'insegnamento della stocastica possono non aver mai incontrato,nei loro corsi universitari,la statistica e il calcolo delle probabilità.

10.-Nella R.F.T.c'è un solo dipartimento di statistica (presso l'Università di Dortmund);non esiste una società nazionale di statistica e tutto il dibattito sull'insegnamento della stocastica si è svolto in ambito matematico.

L'impostazione dell'insegnamento risente di quest'ultima circostanza.Esso risulta in genere slegato da quelli delle scienze naturali e sociali;spesso,perchè gli insegnanti di stocastica non riescono a percepire quali siano gli aspetti della loro disciplina che sono i più rilevanti per le altre.Sovente,esso è staccato anche da quello degli altri argomenti di matematica.Si avverte fortemente l'esigenza di porre rimedio a questa situazione.

11.-Un'altra esigenza che emerge con vigore è quella di anticipare l'inizio dell'insegnamento della stocastica ai 10 anni.

12.-Alcune valutazioni sono state fatte dopo i primi anni di esperienza. Ecco le principali:

-occorrerebbe che,a partire dalle età di 10-16 anni,i ragazzi fossero abituati a raccogliere dati,organizzarli e discutere le conclusioni che si possono trarre da essi,relativamente alla vita di ogni giorno;

-elementi di calcolo delle probabilità dovrebbero certamente essere forniti,ma viene considerato antagonista allo sviluppo di un modo di pensare stocastico,l'enfasi sugli aspetti matematico-formali dell'insegnamento;

-le applicazioni non dovrebbero costituire mere illustrazioni;

-dovrebbe risultare chiaro che la competenza matematica non è circoscritta alle situazioni per le quali "risposte definitive possono essere fornite a problemi ben posti".

L'esperienza dell'Ungheria

13.-In Ungheria la scuola obbligatoria ha la durata di 8 anni.Successivamente l'83% dei coetanei prosegue gli studi:1/4 nel gymnasium che ha la durata di 4 anni;1/4 in scuole che avviano ad impieghi ed attività tecniche,ancora della durata di 4 anni;circa la metà in scuole professionali che durano 3 anni.

14.-L'insegnamento della stocastica è particolarmente esteso nella scuola primaria.Esso data,per l'intera nazione,dal 1974-75.Gli obiettivi che esso intende perseguire sono essenzialmente:

-mettere in grado di definire semplici modelli relativamente a situazioni concrete;

-mettere in grado di prendere decisioni corrette in condizioni di incertezza.

Negli otto anni di corso della scuola primaria,si impara a: raccogliere dati (1° anno);determinare le frequenze di risultati di esperimenti (2°);usare correttamente le espressioni:evento certo,impossibile possibile (3°);definire semplici tabelle (4°);rappresentare graficamente e calcolare frequenze relative (5°);calcolare probabilità in situazioni semplici (6°);applicare le formule di somma e prodotto di probabilità e risolvere problemi sull'indipendenza e la correlazione,apprezzando il significato dei due concetti (7°);definire lo spazio degli eventi e valutare frequenze relative e probabilità in casi semplici (8°).La dimensione curriculare,progettuale,dell'insegnamento è evidente.

15.-L'insegnamento secondario non è finora conseguente;l'accumulazione realizzata nella scuola primaria viene in gran parte dispersa.In sede di riforma del gymnasium,avvenuta nel 1973,tutti erano d'accordo sull'importanza dell'insegnamento della stocastica e tuttavia essa non è stata inclusa fra le materie obbligatorie;essenzialmente per i seguenti motivi:

-impreparazione degli insegnanti.In genere essi hanno una preparazione formale centrata sugli aspetti assiomatici del calcolo delle probabilità,ma non percepiscono con chiarezza nè i campi di applicabilità,nè reali applicazioni.Si deve tener presente che gli insegnanti possono non aver mai incontrato stocastica durante i loro studi universitari;

-la stocastica non è inclusa,nè si prevede di includerla,fra le materie oggetto di tests di uscita o di ingresso ai vari gradi di scuole;

-fattori di tempo:fare esperimenti è dispendioso.La stocastica fa parte della matematica e a quest'ultima si dedica un tempo di insegnamento considerato già troppo limitato;

-le aree tradizionali difendono i loro spazi;

-si afferma che l'insegnamento della statistica deve essere preceduto da quello del calcolo delle probabilità e questo da quello della combinatoria;ma a quest'ultimo,molti insegnanti oppongono particolare resistenza;

-non ci sono testi divulgativi sull'importanza della statistica.

Tuttavia,dal 1983,gran parte degli studenti che entreranno al gymnasium,e dal 1987 tutti,avranno frequentato la nuova scuola primaria: è forse credibile che allora si voglia disperdere il precedente patrimonio stocastico?

16.-Ma torniamo alla situazione attuale.Nel gymnasium si svolgono 5,4,3, 3 ore per settimana di matematica,rispettivamente nei quattro anni di corso.La stocastica è assente,tranne nella specializzazione "Matematica". In questa,l'insegnamento delle matematiche si svolge per 10,10 9 e 9 ore per settimana.Uno degli approfondimenti previsti riguarda la stocastica.Il relativo programma comprende la statistica descrittiva (15 ore al 1° anno);la combinatoria e la teoria della probabilità (34 lezioni al 2° anno);ancora teoria della probabilità (20 lezioni al 3° anno).Al 4° anno si possono fare opzioni fra tecnologia dei computer,ricerca operativa,statistica matematica.

17.-Nelle scuole che conducono a impieghi e professioni tecniche,soltanto in

3 specializzazioni su 75 vengono insegnate la probabilità e la statistica. Si tratta delle specializzazioni in "Ragioneria ed economia","Tecnologia dei computer","Amministrazione e finanza",con i seguenti programmi rispettivamente:

- -statistica descrittiva (100 lezioni al 3° anno) e statistiche di settore,industriali,agrarie,commerciali (120 lezioni al 4° anno);
- -combinatoria ed elementi di probabilità (30 lezioni al 3° anno) e statistica descrittiva (35 lezioni al 4° anno);
- -statistica descrittiva (66 lezioni al 4° anno).

18.-Nessun insegnamento di probabilità e statistica è svolto nelle scuole professionali,dove alla matematica sono dedicate 2,1,1 ore per settimana, rispettivamente nei tre anni di corso.

19.-Recentemente la Bolyai Janos Mathematical Society sta portando avanti un esperimento di aggiornamento del *curriculum* di matematica per le scuole secondarie.La stocastica è largamente presente,seguendo quanto avviato nella scuola primaria.

L'esperienza della Svezia

20.-In Svezia,l'istruzione obbligatoria ha la durata di 9 anni.Negli ultimi due si possono seguire corsi generali di matematica,più brevi (1/3 degli studenti) e corsi speciali,più lunghi (2/3 degli studenti).Il 75% degli studenti prosegue gli studi dopo l'obbligo:in scuole per l'avvio alle professioni sociali,economiche,industriali e terziarie della durata di 2 anni;oppure nel *gymnasium*,della durata di tre anni.Quest'ultimo si articola su diverse specializzazioni:tecniche e scientifiche (che raccolgono 1/4 degli studenti);umanistiche,economiche e sociali (cui si avviano i 3/4 degli studenti).

21.-Dal 1965,con l'ingresso della nuova matematica nella scuola,vi è entrata anche la statistica.L'impulso è stato dato dalle università che richiedevano per gli studenti una maggiore predisposizione all'approccio indeterministico nelle scienze.

In tempi recenti l'interesse è un pò calato,per vari motivi:

- -l'insegnamento svolto è considerato troppo teorico;
- -si è constatata,all'ingresso nel gymnasium,scarsa abilità da parte degli studenti nella soluzione di semplici problemi e nel calcolo;l'esigenza di colmare queste lacune è apparsa prioritaria ed il tempo necessario è stato sottratto alla probabilità e alla statistica;
- -dal 1975,i tests di accertamento non comprendono più argomenti di probabilità e di statistica.Questo elemento viene considerato particolarmente importante per spiegare il calo di interesse verso la probabilità e la statistica (tutto il mondo è paese!).

22.-Nella scuola primaria sono svolti i seguenti argomenti:

- -raccolta di dati e semplici rappresentazioni grafiche (1°-3° anno di corso);
- -statistica descrittiva (4°-9° anno);
- -concetto di probabilità (9° anno).

23.-Al gymnasium si privilegiano i rapporti della statistica e del calcolo delle probabilità con le altre discipline;fra 30 e 60 ore annue sono dedicate all'insegnamento delle due materie.Per gli indirizzi tecnico,scientifico ed economico,gli argomenti trattati sono i seguenti:statistica descrittiva rivisitata;concetto di probabilità;frequenze relative e stabilità delle frequenze relative;eventi indipendenti;distribuzioni uniforme,normale, binomiale,di Poisson;metodi campionari.Le discipline sostanziali dei diversi indirizzi contengono esse stesse molti argomenti di statistica.

24.-Recentemente,è stata introdotta al gymnasium un'innovazione importante: l'utilizzazione di 1/5 delle ore è lasciata alla scelta degli allievi e degli insegnanti.Ciò comporta una corrispondente riduzione dei syllabi.

Spesso viene proposta la contrazione o l'eliminazione dell'insegnamento del calcolo delle probabilità,considerato troppo teorico e difficile per gli alunni;forse,anche poco conosciuto dagli insegnanti.In proposito,occorre tenere presente che gli insegnanti del gymnasium devono aver ottenuto nel corso dei loro studi universitari 60 marks in matematica (1 anno di studio equivale a 40 marks),di cui soltanto 6 in statistica e probabilità.

In generale,ci si è attestati su un insegnamento di 15 ore di statistica e di 20 ore di calcolo delle probabilità,in media per anno.

25.-Un'importante azione di promozione dell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica è stata svolta nell'ambito dell'A.R.K. project (Analysis and conseguences of using pocket calculators in school).E' stato predisposto un testo sulla probabilità:Probability and simulating,with use of programmable minicalculators.In esso,con il metodo Monte Carlo, sono sviluppate numerose esemplificazioni che forniscono una preparazione intuitiva circa il calcolo delle probabilità.La proposta è assai importante,perchè altrimenti la maggior parte dei problemi di qualche rilievo sostanziale risulta al di fuori della portata dell'abilità analitica degli alunni.Per fare un esempio,uno dei problemi proposti (denominato Family planning) è il seguente:si suppone che le probabilità di nascita maschile e femminile siano ambedue pari a 0,50.In una società organizzata in modo che la famiglia prosegua nel generare finchè non nascano almeno un maschio e una femmina,la popolazione aumenterà,diminuirà o rimarrà costante nel tempo?Quale sarà la proporzione di maschi e femmine?Altre possibilità sono previste,ponendo le condizioni:fino ad avere almeno una femmina;almeno una femmina,ma al massimo tre figli;e così via .Incidentalmente,segnalo l'importanza dell'esempio che riconduce ad una valutazione collettiva fenomeni individuali:ciò che costituisce l'essenza del pensiero statistico.

L'esperienza di Inghilterra e Galles

26.-L'istruzione primaria dura 8 anni e si distingue in due cicli infant e junior education.E' obbligatoria anche l'istruzione secondaria per altri 5 anni di corso.Attualmente,coesistono tre tipi di scuola secondaria.La più importante è la comprehensive school,statale,che è frequentata da 3/4 degli alunni.C'è poi la grammar school,privata,che raccoglie l'8% circa degli alunni e rappresenta una forma residuale della vecchia struttura scolastica.Forme residuali rimangono anche nella scuola statale e rappresentano opzioni locali alternative alla comprehensive school:si tratta ancora di grammar schools e di secondary modern schools (1).Esse raccolgono il 18% circa degli alunni.

27.-Per comprendere il sistema scolastico dell'Inghilterra e del Galles,più che gli aspetti istituzionali è importante guardare all'organizzazione.Essa si fonda su tre articolazioni:definizione del syllabus;costruzione del curriculum;accertamento e certificazione.Quest'ultimo momento determina fortemente i contenuti,la temporizzazione dell'insegnamento e l'enfasi sugli argomenti.

28.-I livelli di accertamento ai 16 anni,cioè all'uscita dalla scuola secondaria,sono:

-il GCE (General Certificate of Education) gestito,in Inghilterra e Galles,da 8 National Boards of Examination che propongono numerosi syllabi a scelta.Il GCE può essere affrontato all'O level (Ordinary) o all'A level (Advanced).Esistono,talvolta,livelli intermedi (O-A level);

-il CSE (Certificate of Secondary Education) gestito regionalmente. Il suo livello più elevato corrisponde al 3° livello del GCE-O;il suo terzo livello è tarato sulla riuscita del 50° percentile fra quanti lasciano la scuola.

29.-La statistica è nei syllabi da oltre 20 anni.Nella scuola primaria l'insegnamento comprende:raccolta dei dati;tabelle e grafici;semplici interpretazioni;l'idea del campionamento.Scarsi sono i riferimenti al calcolo delle probabilità e purtroppo anche scarsi i collegamenti con le altre discipline.Si deve tener presente che da qualche anno gli insegnanti della scuola primaria devono aver ottenuto il GCE-O in matematica.

30.-Al livello secondario,nel 1976,l'80% delle scuole indicava di svolgere un qualche insegnamento di statistica;però,soltanto 3% degli alunni sostenevano il CSE o il GCE-O in statistica.Sempre nel 1976,il 20-25% del contenuto dei syllabi di biologia,economia e geografia era di carattere statistico (in generale quantitativo).

31.-Per valutare a pieno la pratica di insegnamento di statistica e calcolo delle probabilità occorre procedere ad una classificazione incrociata dei syllabi per soggetto (matematica e statistica,rispetto alle discipline utilizzatrici) e per livello (CSE,GCE-O,GCE-A).

32.-Storicamente,l'insegnamento della statistica e del calcolo delle probabilità è stato indotto dalla pressione delle discipline utilizzatrici e principalmente dalle scienze naturali e sociali che richiedevano,anche per gli alunni non orientati alla matematica,maggiore sensibilità all'approccio indeterministico e padronanza di uno strumentario statistico essenziale. Paradossalmente,in contrasto con questo stimolo,il syllabus che venne inizialmente definito ebbe uno stile matematico estremamente formale e risultò poco utile per gli studenti.

33.-Al livello CSE i 34 _syllabi_ di matematica comprendono tutti la statistica descrittiva e qualche cenno di probabilità;i due _syllabi_ specifici di statistica comprendono molti più argomenti,ma nessuno propone l'inferenza; nei _syllabi_ delle discipline utilizzatrici,la statistica compare assai poco.

34.-Al livello del GCE-O (oppure O-A),i _syllabi_ di statistica comprendono la descrittiva,la metodologia statistica per la ricerca empirica (essenzialmente regressione e correalzione),il calcolo delle probabilità,fino alle probabilità condizionate;eccezionalmente,sono trattati problemi di inferenza.

Viene ritenuto un fatto importante che i precedenti _syllabi_ si riferiscano a problemi di raccolta e classificazione dei dati,all'uso della statistica in contesti sociali (numeri indici,tassi di natalità e mortalità) ed usino prevalentemente concetti specificamente statistici,come quelli di regressione e correlazione.L'idea dell'inferenza viene fornita stimolando l'apprezzamento critico dei dati.

I _syllabi_ di matematica contengono statistica e calcolo delle probabilità in proporzione variabile (10% a 60% dell'intero contenuto). La proporzione risulta positivamente correlata con la vicinanza dell'epoca di loro definizione.

I _syllabi_ delle discipline utilizzatrici contengono quasi tutti almeno la statistica descrittiva.Spesso,propongono peculiari tecniche statistiche anche piuttosto sofisticate,senza però esporle criticamente.Tuttavia,ciò mette in luce un'esigenza reale.

35.-Al livello GCE-A,i 16 _syllabi_ di matematica contengono con varia intensità argomenti statistici (3 di essi hanno contenuto esclusivamente statistico).Due fra i syllabi più recenti,quello dell'Università di Londra e il JMB (Joint Matriculation Board) prevedono accertamenti basati sullo svolgimento di attività progettuali concrete.

Quanto ai contenuti,vi si trovano: statistica descrittiva;metodologia statistica per la ricerca empirica;analisi delle serie temporali, concetto e problemi di probabilità;distribuzioni probabilistiche;problemi di inferenza,fino all'analisi della varianza;alcune tecniche non parametriche;semplici processi stocastici;tecniche campionarie.

Spesso,però,i <u>syllabi</u> sono indebitamente formali,con enfasi sulle manipolazioni algebriche e numeriche;hanno pochi contatti con i problemi reali,non trattano adeguatamente il ruolo modellistico delle distribuzioni di probabilità e poco si soffermano sugli essenziali aspetti indeterministici del trattamento e dell'interpretazione dei dati.

I <u>syllabi</u> delle discipline utilizzatrici,al livello GCE-A,si spingono verso tecniche statistiche assai sofisticate.

36.-Uno dei motivi per i quali l'insegnamento della statistica non riesce a raggiungere pienamente i suoi obiettivi è che non si apprezza a pieno, da parte degli insegnanti,la natura essenzialmente interrelata dei metodi che essa propone;forse perchè ciò risulta in contrasto con l'approccio generalmente seguito dagli insegnanti di matematica in Inghilterra e Galles,basato sul passaggio sequenziale da un argomento all'altro,ciascuno considerato isolato e concluso.

37.-Al di là delle precedenti critiche,c'è naturalmente soddisfazione per quanto è stato fatto negli ultimi 20 anni.Forse in Inghilterra si insegna attualmente più statistica che in ogni altro paese.

Il principale strumento per una ulteriore espansione è ritenuto l'inserimento della statistica nei <u>syllabi</u> previsti per l'accertamento ai livelli CSE,GCE-O e GCE-A (2).

38.-Il clima sociale ed educativo,d'altronde,è tale che l'insegnamento della statistica è visto come una componente essenziale della preparazione degli alunni.Conseguentemente,sono all'opera attualmente uno Joint Educational Committee della Royal Statistical Society e dell'Institute of Statisticians ed uno School Council (3) Project on Statistical Education (POSE) presso l'Università di Sheffield.

Lo scopo è di introdurre la statistica utile per il cittadino, enfatizzando la sua rilevanza pratica,proponendo concetti e metodi,quasi interamente attraverso problemi reali,scelti in una vasta area di campi di applicazione.Il POSE edita,da due anni,la rivista Teaching Statistics,per gli insegnanti di alunni in età 9-19 anni.

Orientamenti in atto in Italia

39.-Al primo anno della scuola secondaria superiore si iscrivevano nel 1979 oltre 700.000 alunni che rappresentavano il 72,3% dei quattordicenni.Di essi,141.000 (20,2%) si indirizzavano al ginnasio e al liceo scientifico (scuole accademiche) e 559.000 (79,8%) agli istituti tecnici,professionali,magistrali,istituti d'arte e licei artistici (scuole vocazionali).

40.-La situazione dell'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica nelle scuole secondarie superiori è descritto nella tab.1.Si tratta di materie insegnate,quando ciò avvenga,negli ultimi anni di corso (3° e 4°;più raramente 5°).A questi livelli,la popolazione scolastica era,nel 1979,di circa 400.000 unità.Essa rappresentava il 45% della popolazione in età di 17 anni compiuti.

41.-Alcune tendenze si mettono in evidenza.L'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica trova qualche spazio nelle scuole vocazionali,mentre esso è del tutto assente nelle scuole accademiche.Nelle prime, esso coinvolge,a vari livelli di approfondimento,il 32% degli alunni del penultimo anno di corso (circa 88.000 unità);nelle seconde soltanto allo ultimo anno di corso dei licei scientifici (circa 79.000 alunni),si svolgono brevi cenni di combinatoria.

42.-Nell'ambito delle scuole vocazionali,l'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica si volge soprattutto nelle specializzazioni sociali ed amministrative.Nelle specializzazioni tecnico-industriali,le due discipline sono del tutto assenti,ad eccezione dell'indirizzo informatico (complessivamente 2.000 studenti al penultimo anno di corso;0,5% del totale).(tab.1)

43.-E' particolarmente grave che nei licei scientifici il calcolo della probabilità e la statistica siano completamente assenti.Altrettanto grave è che le due precedenti discipline non siano insegnate negli istituiti tecnici industriali.In altri termini,i futuri quadri tecnico-scientifici svolgono la loro preparazione scolastica secondo un approccio prevalentemente deterministico.

44.-Neppure gli istituti magistrali prevedono l'insegnamento del calcolo delle probabilità e della statistica (in queste scuole,alla matematica e fisica è dedicato soltanto il 12,5% dell'orario scolastico complessivo).Questa è una circostanza piuttosto preoccupante,poichè risulta attualmente,e risulterà in futuro,abbastanza difficoltoso svolgere un insegnamento stocastico precoce.

45.-Un'influenza notevole sulla presenza nei curricula del calcolo delle probabilità e della statistica,nei programmi,ha l'epoca nella quale i programmi stessi sono stati varati.Le due materie compaiono con maggiore frequenza,isolatamente o congiuntamente,mano a mano che l'epoca di definizione è più recente.Ciò indica l'emergere di un'esigenza,confermata dalle sperimentazioni in atto,che lascia ben sperare per il futuro.

46.-Anche il contenuto degli insegnamenti è in relazione con l'epoca di formulazione dei programmi.Per il calcolo delle probabilità,si va dal solo concetto frequentista di probabilità (in molti casi) ad un programma assai più articolato (in due casi) che comprende:spazio degli eventi,probabilità di un evento,probabilità condizionate;concetto di variabile casuale e variabili casuali fondamentali (Bernoulli,Poisson,Gauss),processi stocastici,serie aleatorie.Per la statistica,i programmi sono ancora più diversificati.In qualche caso,i contenuti si limitano alle sole rappresentazioni grafiche e tabellari;spesso,si aggiunge la statistica descrittiva più semplice (medie e variabilità);talvolta,sono presenti argomenti quali i rapporti,la perequazione,la regressione e la correlazione;soltanto raramente,i programmi prevedono argomenti inferenziali e relativi alle tecniche di campionamento.

47.-Per qualche indirizzo di studi,agli argomenti indicati in precedenza si aggiungono informazioni (ed utilizzazioni) relative alla documentazione statistica di settore (statistica economica,del turismo,ecc.).

48.-Quello delineato in precedenza è il quadro normativo dell'insegnamento.In realtà,nessuna verifica è stata mai tentata circa il suo effettivo livello. E' da presumere che esso sia inferiore a quello previsto.Ciò deriva essenzialmente dalla scarsa preparazione specifica degli insegnanti.

49.-Dal 1970,il ciclo breve dell'istruzione secondaria superiore (istituti professionali) è stato prolungato sperimentalmente,per una parte degli alunni,fino al 5° anno di corso.La quasi totalità dei corsi sperimentali (per il 93,0% degli alunni che li frequentano) prevede l'insegnamento di elementi di calcolo delle probabilità e di cenni di statistica descrittiva (tab.2). In un caso,è previsto un insegnamento abbastanza esteso di statistica che si spinge fino a quella inferenziale (n.8 della tab.2).

In definitiva,un altro 8,8% degli studenti secondari al penultimo anno di corso si avvicina ad argomenti di calcolo delle probabilità e di statistica.

50.-Dal 1971,in attesa della riforma della scuola secondaria superiore,iniziative di sperimentazione sono state avviate in alcune scuole.Esse coinvolgevano,nel 1979,circa 200 istituti,il 3% del totale.L'incidenza,in termini di classi e di alunni interessati,era però assai inferiore (meno dello 1%).In circa 70 sedi,la sperimentazione ha assunto un carattere fortemente innovativo rispetto alla scuola tradizionale.In 31 di esse,il calcolo delle probabilità e più spesso la statistica (in qualche caso la demografia) comparivano nei programmi.

Alle precedenti materie venivano destinate mediamente 3-4 ore settimanali di insegnamento.In 8 casi esse erano incluse fra le discipline dell'area comune;in 28 casi fra quelle di indirizzo (4).

51.-Un'altra sperimentazione che vale la pena di ricordare,per la qualità più che per la quantità,è quella condotta dall'Unione Matematica Italiana - Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica.Elemento particolarmente innovativo e qualificante di tale sperimentazione è la introduzione nei programmi del calcolo delle probabilità e di semplici applicazioni alla statistica (Gherardini e Pirillo,1976).

Calcolo delle probabilità e statistica nella prospettiva della riforma della scuola secondaria superiore

52.-Ormai dalla metà degli anni '60,e poi via via più intensamente a partire dal 1971,si è alimentato in Italia un vivace dibattito,relativo alla riforma della scuola secondaria superiore.E' possibile che alla metà degli anni '80 una riforma sarà realizzata.

Si tratterà allora di non sciupare il patrimonio accumulato dagli alunni nella scuola media (a quell'epoca,i nuovi programmi che prevedono l'insegnamento della probabilità e della statistica saranno stati adottati ormai da sei anni) e di individuare le linee di ulteriore sviluppo della formazione stocastica.

Si tratterà di non perdere l'occasione per recuperare un ritardo storico della nostra scuola, rispetto a quelle della maggior parte dei paesi sviluppati, che si esprime nella triplice direzione:

-dell'assenza di probabilizzazione della realtà fenomenica (5);

-del ruolo subalterno assegnato alle discipline sperimentali (6);

-della scarsa o nulla attenzione per gli aspetti quantitativi dei problemi (7).

53.-Due linee sembrano evidenziarsi, che possono completarsi reciprocamente. La linea dei matematici, per i quali l'enfasi è da porre sul calcolo delle probabilità, da sviluppare nell'ambito dell'insegnamento della matematica, anche con il fine di avvicinare la matematica alla realtà di ogni giorno che si presenta sempre mutevole ed aleatoria. La linea degli statistici, che pensano ad una formazione statistica strumentale, incorporata essenzialmente nelle discipline utilizzatrici (economia, tecnologia, chimica, fisica, ecc.), da riaggregare intorno ad alcuni concetti metodologici unificanti (SIS, (1970); Zuliani, (1979)), eventualmente nell'ambito dell'insegnamento della matematica.

54.-Sul fatto che le due linee siano complementari non occorre dilungarsi. A parte le evidenze degli altri paesi - la frontiera della qualità, si è visto, è la stocastica -, mi siano consentite due brevi riflessioni. Parecchi strumenti statistici, se non vengono inquadrati ed interpretati probabilisticamente, rischiano di diventare fonte di fraintendimenti e di pericolosi deduzionismi di tipo deterministico. Il calcolo delle probabilità ha ancora carattere essenzialmente formale e astratto, salvo per il controllo dell'esperienza; mentre la statistica ha carattere essenzialmente sperimentale, ha fondamento nei problemi, fin quasi a confondersi con le discipline sostanziali utilizzatrici (8). L'esigenza "statistica" di queste ultime può far sì che il processo di avvicinamento della matematica al reale avvenga compiutamente.

55.-Concludo rapidamente.In un'occasione non sospetta,chiudevo il rapporto per l'International Statistical Institute sull'insegnamento della statistica in Italia,nel modo seguente:"Queste due linee di sviluppo possono essere facilmente conciliate e l'azione congiunta di matematici e statistici potrà portare all'introduzione dell'insegnamento della stocastica nella scuola secondaria superiore 'riformata' " (Zuliani,1980).

In proposito,sono ottimista,secondo una definizione statistica della specie che prendo in prestito da un intervento di Kish (1978) all'American Statistical Association:"Un ottimista è una persona la quale pensa che il futuro è incerto".

TAB. 1 - L'INSEGNAMENTO DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E DELLA STATISTICA NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE IN ITALIA - ANNO 1979

N°	TIPO DI SCUOLA	MATERIE	ANNO NEL QUALE È STATO DEFINITO IL PROGRAMMA	PRESENZA DI ARGOMENTI (C)	ANNO DI CORSO NEL QUALE SI SVOLGE L'INSEGNAMENTO	NUMERO MEDIO DI ORE SETTIMANALI D'INSEGNAMENTO	TEMPO DEDICATO AD ARGOMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E DI STATISTICA (% RISPETTO AL TEMPO COMPLESS. DEDICATO ALLA MATERIA)	STUDENTI COINVOLTI IN MEDIA AL 3°-4° ANNO DI CORSO (%)	COMPETENZE DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E DI STATISTICA ACCERTATE AL MOMENTO DEL RECLUTAMENTO DEGLI INSEGNANTI (F)
1	ISTITUTO PROFESSIONALE; SPECIALIZZAZIONE CONTABILITÀ AZIENDALE	MATEMATICA APPLICATA	1966	B_1, C_1	3°	2	30 - 50	1,8	B_2, C_1, C_2, C_4
2	ISTIT. TEC. COMMERCIALE (ESCLUSO N. 3)	MAT., MAT. FIN., STAT. MAT.	1961	B_1	4°	2	40 - 60 (E)	19,0	B_2, C_1, C_2, C_4
3	ISTITUTO TECNICO COMMERCIALE; SPECIALIZZAZIONE PROGRAMMATORI	MAT., PROB., STAT.	1979	B_2, C_1, C_2 (D)	3°, 4°	5	20 - 30 (E)	0,3	B_2, C_1, C_2, C_4
4	ISTITUTO TECNICO PER IL TURISMO	ECON., STAT., SC. DELLE FIN.	1966	C_1, C_2	3°	3	40 - 60	0,5	D_1
5	ISTITUTO TECNICO FEMMINILE; SPECIALIZZAZIONE DIRIGENTI DI COMUNITÀ	RAGIONERIA, STAT.	1967	C_1, C_2	5°	2	100	0,1	NESSUNA
6	ISTITUTO TECNICO FEMMINILE; SPECIALIZZAZIONE ECONOME DIETISTE	RAG., MAT. FIN., STAT.	1967	C_1	5°	2	10 - 20	0,2	NESSUNA
7	ISTITUTO TECNICO PER PERITI AZIENDALI E CORRISPONDENTI IN LINGUE ESTERE	MAT., MAT. APPL., STAT.	1966	B_1	3°, 4°, 5°	3	20 - 30 (E)	0,8	B_2, C_1, C_2, C_4
8	ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE; SPECIALIZZAZIONE INFORMATICA	PROB., STAT., RIC. OPER.	1979	B_2, C_1, C_2, C_3, C_4 (D)	3°, 4°, 5°	3	80 - 90	0,5	B_2, C_1, C_2, C_4
9	ALTRE SCUOLE VOCAZIONALI (A)	—	1961-69	—	—	—	—	47,3	—
	-CORSI SPERIMENTALI DEGLI ISTITUTI PROFESSIONALI CHE PREVEDONO L'INSEGNAMENTO DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E/O DELLA STATISTICA (B)	VARIE	1970	VARIA	VARI	VARIO	VARIO	(8,8)	VARIA
10	LICEO SCIENTIFICO	MATEMATICA	1961	A	5°	3	0 - 5	20,0	B_2
11	GINNASIO E LICEO CLASSICO	—	1961	—	—	—	—	9,5	—
	TOTALE							100,0	
-	STUDENTI ISCRITTI AL 4° ANNO DI CORSO NELLA SCUOLA SEC. SUPER.							400.000	
	TASSO DI SCOLARIZZAZIONE PER I 17ENNI (%)							45,0	

Note alla tabella 1

a) Comprende gli altri istituti tecnici,gli altri istituti professionali,gli istituti magistrali,i licei artistici e gli istituti d'arte.

b) Per dettagli,vedi la tab.2.

c) A_1:cenni di calcolo combinatorio ;B_1:cenni di calcolo delle probabilità ; B_2: elementi di calcolo delle probabilità ;C_1: tabelle statistiche e rappresentazioni grafiche ;C_2: statistica descrittiva elementare (medie,variabilità); C_3: rapporti,perequazione,regressione e correlazione ;C_4: elementi di inferenza statistica.Cenni di calcolo combinatorio sono certamente fatti allorchè il programma preveda il calcolo delle probabilità.

d) Metà degli alunni seguono un programma leggermente ridotto e meno attuale nei contenuti.

e) Nel corso degli studi vengono fornite anche informazioni sulla documentazione statistica,con particolare riguardo all'economia.

f) Gli argomenti sono classificati secondo lo schema descritto nella nota (c); ad essi si aggiunge D_1: elementi di statistica economica.

TAB. 2 - L'INSEGNAMENTO DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E DELLA STATISTICA NEI CORSI SPERIMENTALI DEGLI ISTITUTI PROFESSIONALI IN ITALIA. ANNO 1979

N°	TIPO DI SCUOLA	MATERIE	ANNO NEL QUALE È STATO DEFINITO IL PROGRAMMA	PRESENZA DI ARGOMENTI (B)	ANNO DI CORSO NEL QUALE SI SVOLGE L'INSEGNAMENTO	NUMERO MEDIO DI ORE SETTIMANALI D'INSEGNAMENTO	TEMPO DEDICATO AD ARGOMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E DI STATISTICA (% RISPETTO AL TEMPO COMPLESSIVAMENTE DEDICATO ALLA MATERIA)	STUDENTI COINVOLTI IN MEDIA AL 3°-4° ANNO DI CORSO (%)	COMPETENZE DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E DI STATISTICA ACCERTATE AL MOMENTO DEL RECLUTAMENTO DEGLI INSEGNANTI (D)
1	ISTIT.PROF.PER L'AGRICOLTURA	MATEMATICA	1970	C_1	3°	4	0 - 5	10,3	$B_2.C_1.C_2$
2	ISTIT.PROF. PER IL COMMERCIO (I GRUPPO)	MATEMATICA	1970	$A_2.B_2.C_1$	5°	2	60 - 80	35,3	$B_2.C_1.C_2$
3	ISTIT.PROF. PER IL COMMERCIO(II GRUPPO)	INFORM. E STAT.AZ.	1970	$A_2.C_1.C_2$	5°	3	30 - 50	9,1	$B_2.C_1.C_2$
4	ISTIT.PROF.PER L'ARTIGIANATO (A)	MATEMATICA	1970	$A_2.B_2.C_1$	4°-5°	3	0 - 5	0,1	$B_2.C_1.C_2$
5	ISTIT.PROF. PER L'INDUSTRIA (I GRUPPO)	MATEMATICA	1970	$A_2.B_2.C_1$	4°-5°	4	0 - 5	39,9	$B_2.C_1.C_2$
6	ISTIT.PROF.PER L'INDUSTRIA (II GRUPPO)	MATEMATICA	1970	$A_2.B_2.C_1$	4°	3	10 - 20	0,6	$B_2.C_1.C_2$
7	ISTIT.PROF.PER L'INDUSTRIA (III GRUPPO)	MATEMATICA	1970	C_1	5°	3	10 - 20	13,5	NESSUNA
8	ISTIT. PROF. ALBERGHIERO	ORGANIZ.AZIEND. E STAT.	1970	$C_1.C_2.C_3.C_4$	5°	4	20 - 30	4,6	NESSUNA
	TOTALE							114,3 (c)	
	STUDENTI COINVOLTI NELLE PRECEDENTI SCUOLE AL 4° ANNO DI CORSO							35.000	
	-IN % DEGLI ISCRITTI AL 4° ANNO DI CORSO NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE							8,8	
	STUDENTI DI ALTRI CORSI SPERIMENTALI DEGLI ISTIT. PROF. NEI QUALI NON È PREVISTO L'INSEGNAMENTO DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E DELLE STATISTICA							2.500	

A) COMPRESI ALCUNI CORSI DELL'ISTITUTO PROFESSIONALE FEMMINILE.
B) VEDI LA NOTA (C) DELLA TAB. 1.
C) IL TOTALE SUPERA 100,0 PERCHÈ ALCUNI ALUNNI INCONTRANO IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E/O LA STATISTICA IN PIÙ DI UNA MATERIA.
D) VEDI LA NOTA (F) DELLA TAB. 1.

NOTE

1) Queste ultime durano in genere un anno in meno e offrono una gamma ridotta di possibilità di prosecuzione degli studi.

2) Un frangente è rappresentato dalla perdita di abilità nel calcolo e nella soluzione di semplici problemi che è stata riscontrata per gli studenti all'uscita dalla secondaria.Ciò ha portato ad un movimento di riflusso.Ci si dovrebbe però rendere conto che il cittadino deve innanzi tutto essere statisticamente strumentato,per capire e vivere criticamente il portato del mondo"statistico" nel quale è collocato.

3) Quindi,al massimo livello di riconoscimento.

4) Il totale supera 31 poichè le materie potevano essere contemporaneamente, a diverso livello di approfondimento,in ambedue i gruppi.

5) Eppure,il probabile rappresenta lo stato più naturale e più frequente delle nostre conoscenze e della nostra rappresentazione del mondo sociale;gli avvenimenti certi o impossibili sono invece casi estremi.Coerentemente,"nel processo storico dell'evoluzione degli atteggiamenti relativi alle enunciazioni scientifiche,si assiste ad un progressivo abbandono del contenuto deterministico,come prodotto da una metodologia sicura della propria verità,se non autoevidentemente vera.Il passo avanti decisivo viene fatto quando,tramite il linguaggio probabilistico, e la quasi conseguente metodologia statistica, si connette l'idea di variabilità agli oggetti osservabili o sperimentali,formanti la base empirica per le enunciazioni scientifiche.Variabilità intesa sia nel suo contenuto empirico,quale diversità fra i risultati di osservazioni o sperimentazioni,che nel suo contenuto logico - razionale di immanente impossibilità di previsione certa" (Naddeo _et al._, 1979,p.1).Di converso,l'avver-

sione all'incertezza si esprime anche forzando i concetti di probabilità e statistica per trasformare previsioni incerte in previsioni certe (ad esempio, ritenendo che sia meno rischioso giocare molti colpi,piuttosto che pochi o uno solo).Per acute e semplici osservazioni in questa direzione,cfr. de Finetti (1969),pp.52-56.

6) "Anche l'abbinamento di matematica e fisica,affidate ad un solo insegnante, esprimeva la scarsa considerazione per le pseudo-scienze empiriche gentilianamente concepite come un sapere 'astratto' destinato a risolversi nella superiore verità della filosofia" (Baglioni et al., 1977,p.12).E' bene,però, non fraintendere:matematica e fisica hanno rapporti privilegiati.Dice de Finetti (1969, p.14):"se la fisica non esistesse i matematici dovrebbero inventare una fisica astratta come sussidio e parte della matematica astratta".

7) Al livello universitario,questa situazione si è spesso concretata nella "compresenza di discipline,a contenuto sostanzialmente analogo,che si differenziano per l'utilizzazione o meno,prevalente o esclusiva,della statistica come tecnica conoscitiva" (Fortunati,1975, p.225).Più in generale, nella scuola, è sembrata evidenziarsi una progressiva perdita collettiva della cultura del risultato,la quale ha lasciato il posto ad una sorta di cultura della parola.

8) La posizione estrema,in questa direzione,è che "la giustificazione vera della statistica come tecnica conoscitiva si può ritrovare solo nel patrimonio specifico di conoscenze e nelle ipotesi specifiche che si assumono per sviluppare la conoscenza di singoli settori del reale" (Fortunati, 1975, p.223).

BIBLIOGRAFIA

Baglioni, G. et al. (1977), Scienze sociali e riforma della scuola secondaria, Torino,Einaudi.

Barnett, V. (1980), Statistical education in schools in England and Wales, mimeo.

Colombo, B. (1979), "Atteggiamento e proposte di alcune principali associazioni nazionali e internazionali di statistici sull'insegnamento pre-universitario della statistica ", Atti del convegno su 'L'insegnamento pre-universitario della statistica con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore',Bressanone, 19-21 settembre.

de Finetti, B. (1969),Il 'saper vedere' in matematica, Torino,Loescher

Dinges, H. (1979),"On stochastical thinking in German highschools",Atti del Convegno su 'L'insegnamento pre-universitario della statistica con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore',Bressanone, 19-21 settembre.

Fortunati,P. (1975),"Statistica,conoscenza e ricerca",Atti della XXVIII riunione scientifica della Società italiana di statistica, Padova 20-22 marzo.

Gherardini,P. e Pirillo,G. (eds.),(1976),"Le sperimentazioni didattiche nell'ambito matematico,in relazione al dibattito in corso sulla riforma della scuola secondaria superiore e alla revisione della scuola media dell'obbligo", Supplemento al Bollettino dell'Unione matematica italiana, serie IV,vol.XII.

Kish,L. (1978), "Chance,statistics and statistician", Journal of the American Statistical Association, vol.LXXIII,361.

Naddeo, A. et al. (1979), "L'insegnamento della statistica nella scuola media superiore nell'ambito dell'area fisico-naturalistica e tecnologica", Atti del Convegno su 'L'insegnamento pre-universitario della statistica con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore', Bressanone 19-21 settembre.

National Board of Education (1980), Statistical education in schools in Sweden, mimeo.

Nemetz,T. (1979), "Stochastics in Hungarian schools:pre-university level", Atti del Convegno su 'L'insegnamento pre-universitario della statistica con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore', Bressanone,19-21 settembre.

Società italiana di statistica (1970), Atti della tavola rotonda su 'L'insegnamento della statistica', Frascati,4-6 giugno.

Zuliani,A. (1979), "La formazione statistica nella scuola secondaria:alcune osservazioni di sintesi", Atti del Convegno su 'L'insegnamento pre-universitario della statistica con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore',Bressanone,19-21 settembre.

Zuliani,A. (1980), The teaching of stochastics in Italian upper secondary schools, Report for the International Statistical Insitute.

INTERVENTI NEL DIBATTITO

DALL'AGLIO: Dai dati che Zuliani ha riferito ho avuto un'impressione di notevole arretratezza della situazione italiana. Negli altri paesi si incontrano difficoltà nell'insegnamento di probabilità e statistica; in Italia dobbiamo ancora affrontare il problema.

E' opportuno cercare di vedere quali sono le cause di questa arretratezza, con la speranza di rimuoverle per il futuro. A me pare che le cause risiedano essenzialmente nella situazione universitaria. Abbiamo avuto in Italia, in particolare nel secondo quarto di questo secolo, una netta separazione tra probabilità e statistica; allo stesso tempo la probabilità non aveva riconoscimento accademico, e aveva solo cultori isolati. Ora per quest'ultimo aspetto i tempi sono cambiati i posti di professori universitari di probabilità ci sono e le ricerche si sviluppano. Trovo però che si ripropone il pericolo dello scollamento tra probabilità e statistica, che secondo me renderebbe pressochè impossibile un insegnamento valido nella scuola secondaria. Vorrei perciò lanciare un appello alle persone e alle organizzazioni qui presenti e responsabili in questo campo, per promuovere lo sviluppo della probabilità nell'università sia dal punto di vista quantitativo, sia da quello qualitativo, soprattutto per quanto riguarda i collegamenti tra probabilità e statistica.

GRUGNETTI: Il Nucleo di Ricerca e sperimentazione della didattica della matematica di Cagliari ha introdotto, già da tre anni, alcuni elementi di statistica e probabilità nella scuola media dell'obbligo, a partire dall'esame di situazioni concrete.

L'obiettivo di tale lavoro è quello di esaminare situazioni e problemi connessi con la realtà quotidiana, nell'ambito di una ricerca scientifica.

L'abitudine ad analizzare e rappresentare dati consente una critica consapevole delle situazioni più diverse,quali quelle connesse con l'economia,le scienze naturali e biologiche,la fisica,l'educazione sanitaria,la geografia.

Il calcolo combinatorio ed il concetto di probabilità di un evento possono trovare una introduzione motivata nell'ambito dell'esame della trasmissione ereditaria di alcune malattie.

Intervengono nel dibattito anche i proff.Boero,de Finetti, ,Dentella,Pintacuda,Prodi.

REPLICA DEL PROF.ZULIANI

Svolgerò brevi considerazioni sugli interventi relativi alla mia relazione,seguendo lo stesso ordine nel quale essi si sono succeduti.

Concordo con il Prof.Boero che occorra prestare particolare attenzione a quanto sta avvenendo nella scuola media,dopo l'introduzione dei nuovi programmi.

Se non mi sono soffermato su questo aspetto,è soltanto perchè il tema che mi è stato assegnato lo escludeva.Però,nella commissione della Società italiana di statistica cui ho accennato nel precedente intervento,qualcosa stiamo facendo.Anzitutto,si è avviato un sondaggio pilota su una settantina di professori di scuola media di Roma,Padova e Verona per valutare lo impatto dei nuovi programmi ed in particolare dell'introduzione della matematica del probabile.Ci si aspetta risultati deludenti,anche perchè è pensabile che gli insegnanti proporranno una materia che conoscono poco,come la matematica del probabile,il più tardi possibile.Se lo faranno.

Pensiamo di ripetere il sondaggio più estesamente il prossimo anno.Metterò a disposizione della CIIM i risultati.In secondo luogo, la Commissione della SIS ha intenzione di produrre materiali,tracce di lavoro,testi di sostegno specifici per la scuola media.

Il Prof.Prodi pone giustamente i due problemi centrali della preparazione degli insegnanti e,nel merito,della saldatura fra teoria e pratica.Inutile nasconderseli.Però,le esperienze straniere che ho illustrato mostrano con chiarezza che anche altrove gli stessi problemi si sono posti e si pongono e che spesso hanno trovato soluzione.

Il Prof.Dall'Aglio esprime qualche perplessità sull'efficacia d'un insegnamento "pervasivo" della statistica,svolto nell'ambito delle discipline utilizzatrici.Anch'io ritengo che si corra qualche rischio.Il pericolo maggiore è che la statistica non riesca a svolgere,nella formazione secondaria superiore,un ruolo proporzionale ai servizi che può rendere.Tuttavia,io credo che solo un insegnamento "pervasivo" consenta di provocare uno spostamento non effimero dell'asse metodologico della scuola secondaria superiore,integrando l'osservazione qualitativa con la misurazione del reale.La soluzione di un insegnamento autonomo,per converso,può far sì che la formazione statistica rimanga estranea alle discipline sostanziali e quindi che il linguaggio e il metodo statistico diventino una pista destinata a cancellarsi assai presto,perchè non battuta.

La Prof.ssa Dentella Prodi si chiede se il desiderio di proporre un insegnamento rinnovato non debba misurarsi con la preoccupazione di non aver assorbito a sufficienza le novità;e perciò se non ci sia il rischio di fare più male che bene ai ragazzi,riesponendo concetti poco metabolizzati.Il rischio è reale,anche se,in molti casi,le perplessità trovano la loro radice nella indisponibilità a misurarsi con un insegnamento assai più impegnativo dell'attuale.Nei limiti delle nostre scarse forze,aiuto agli insegnanti,da parte degli statistici,ci sarà.Vorrei poi fare un atto di fede.Personalmente,ritengo che la sperimentazione,la innovazione,quasi senza eccezioni,siano occasioni di crescita,per gli insegnanti e per gli allievi.

Il Prof.Del Sedime suggerisce di inquadrare storicamente i metodi statistici e anche gli argomenti di probabilità.E' un'esigenza che condivido in pieno.Dò uno spunto:pare certo che gli antichi sacerdoti,oracoli e stregoni conoscessero,almeno qualitativamente,le maggiori o minori probabilità delle diverse configurazioni ottenibili nel lancio degli astragali (ossicini del tarso usati anticamente come dadi) e che associassero quelle più probabili agli eventi che desideravano si verificassero, sostituendo così la propria volontà a "quella" degli dei;magari per far scoppiare una guerra.

Per annotazioni storiografiche sul metodo statistico,rinvio al bellissimo saggio del Prof.Scardovi che apre gli Atti del Convegno sui "Fondamenti dell'inferenza statistica" tenuto a Firenze nel 1976.

Voglio aggiungere,perchè sia chiaro il mio pensiero,che quantitativo non equivale ad oggettivo e che la statistica non è certamente "neutrale".

L'ultimo intervento del Prof.Pintacuda mi da la possibilità di anticipare qualche iniziativa che la Commissione della SIS intende portare avanti:

- costruzione di alcune biblioteche specializzate in didattica della statistica;
- redazione di numeri unici,sulle esperienze di insegnamento della statistica,ai quali dare diffusione ampia;
- produzione di materiali,di testi di sostegno,di schede di lavoro, con caratteristica interdisciplinare;
- varo di alcune iniziative di aggiornamento e di sperimentazione.

Certo si tratta di gocce nel mare;ma è quanto la sparuta schiera degli statistici è in grado di fare.

LUDOVICO PICCINATO -"ALCUNI ASPETTI ELEMENTARI DELL'INFERENZA STATISTICA".

1.Premessa

Vorrei anzitutto precisare che la "inferenza statistica" di cui parlerò in questa relazione è quel complesso di teorie e di metodi che non solo hanno natura "statistica",nel senso di avere a che fare con l'informazione su fenomeni reali,ma si basano anche (ed esplicitamente) su formalizzazioni di tipo probabilistico.E' questa l'accezione corrente,ma è il caso di ricordare che esistono ed hanno rilevante interesse teorico e pratico anche metodologie statistiche non probabilistiche,ad esempio quelle cui si ricorre per sintetizzare in qualche "indice" la descrizione di fenomeni complessi, come ad esempio il costo della vita oppure l'evoluzione demografica.

L'inferenza statistica è un momento fondamentale nel processo di acquisizione di nuove conoscenze,anche se ovviamente l'utilità di separare dal contesto una fase di "analisi statistica" può dipendere dal campo applicativo considerato e dal particolare tipo di problema in esame.In linea di principio,comunque,l'inferenza statistica è strettamente connessa con la tematica generale dell'induzione ed è pertanto naturalmente coinvolta in problematiche molto articolate e controverse di natura filosofica,logica,culturale in senso lato.Questa "complessità" della tematica statistica, anche se non sempre esplicitata,è certamente un motivo di interesse (è uno statistico che vi parla!) ma nello stesso tempo assicura a questo settore caratteristiche così specifiche,rispetto alle altre discipline matematiche,da poter disorientare chi vi si accosta dall'esterno.

Sotto questo profilo,poi,va ricordato un altro tipo di difficoltà. Il campo della statistica teorica è caratterizzato da profonde controversie "fondazionali";le diverse "scuole" esistenti differiscono non solo per i metodi di analisi proposti ma anche per il tipo di problemi che si considerano risolubili ed in generale per l'approccio complessivo ai problemi della statistica induttiva.Non è una situazione insolita nel mondo scientifico,anche se la vivacità e, talvolta, asprezza delle polemiche sono singolari; l'ostacolo principale per lo studioso che comincia ad interessarsi di questi temi mi sembra piuttosto il fatto che nella letteratura corrente spesso non si forniscano informazioni adeguate sul dibattito attuale, benchè questo sia tutt'altro che marginale rispetto alle stesse conseguenze pratiche.

Per questo motivo mi sembra utile in questa sede cercare di delineare la problematica statistica senza dare per conosciuta alcuna nozione in proposito (tranne le primissime nozioni di calcolo delle probabilità). Ritengo infatti che qualunque testo di statistica matematica rischi di essere profondamente fuorviante se non viene collocato nel dibattito in corso e valutato sia per il tipo di soluzioni che propone sia per il tipo di problemi che omette di menzionare.

2. Modello matematico di un esperimento

Il concetto fondamentale su cui si innesta una inferenza statistica formalizzata è quello di esperimento statistico. Sia dato un fenomeno reale, con struttura almeno parzialmente incognita, ed una osservazione collegata al fenomeno stesso. Assumiamo di essere in grado di elencare l'insieme delle possibili ipotesi, cioè delle spiegazioni del fenomeno; sia questo $H=\{h_1,h_2,\dots,h_k\}$. Infine denotiamo con $O=\{o_1,o_2,\dots,o_m\}$ l'insieme delle osservazioni a priori possibili, determinabile sulla base dello strumento di misura oppure, più in generale, della procedura sperimentale. Uno degli elementi di O, diciamo o_j, è il risultato effettivamente osservato. La natura "statistica" dell'esperimento sta in questo: la stessa osservazione è compatibile con più ipotesi diverse, anche se, ragionando in termini probabilistici, qualche ipotesi verrà rafforzata dalla osservazione o_j mentre altre ne saranno indebolite. Prendiamo in esame per contrasto un esperimento deterministico: in quest'ultimo caso si dovrebbe poter identificare una regola (un'applicazione di O su H) che associa ad ogni osservazione una ed una sola ipotesi.

Con gli esperimenti statistici non siamo invece nel campo della logica del certo, ma nel campo della logica dell'incerto. Questa incertezza, tuttavia, è in un certo senso controllata: si assumono infatti come parte del modello dell'esperimento le probabilità $p(o_j/h_i)$, cioè le probabilità delle osservazioni subordinate alle ipotesi. Utilizzando opportunamente queste, come vedremo, avremo modo di capire quale sia il contributo dell'esperimento alla informazione disponibile sul fenomeno.

Presenterò alcuni esempi scelti tra quelli più comuni nelle applicazioni; osservo qui che non è necessario assumere che H e O siano insiemi finiti, e che questo non porta che a piccole modifiche di carattere tecnico.

Esempio 1 (errori di osservazione). Una grandezza di valore incognito, μ, viene misurata n volte nelle stesse condizioni. Si ottengono i valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$; si assume che ciascuno di questi sia la somma di μ e di una componente accidentale incognita (positiva o negativa) e in generale diversa in ogni misurazione. In simboli:

$$(1) \qquad y_i = \mu + e_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Con giustificazioni sia matematiche che sperimentali, alle componenti accidentali $e_1, e_2, \ldots, e_n$ si attribuisce una stessa distribuzione di tipo normale (cioè di Gauss-Laplace) con media zero e varianza σ^2, eventualmente incognita. Si assume inoltre, di solito, che per σ^2 fissato gli errori sono stocasticamente indipendenti.

Le ipotesi sono qui i possibili valori di μ, diciamo per semplicità $H=R^1$; le osservazioni sono i punti $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$; le probabilità sono espresse, nelle condizioni indicate, da

$$(2) \quad \text{prob}\left[(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S|\mu\right] = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \int_S \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \Sigma_i (y_i - \mu)^2\right] dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$$

per $S \subset R^n$.

Esempio 2 (esperimento fattoriale con classificazione semplice) Si misura il contenuto di acido ascorbico in pomodori trattati con due concimi diversi

(C_1 e C_2);sia y_{ij}il risultato corrispondente al j-esimo pomodoro esaminato ($j=1,2,\ldots,n_i$) tra quelli trattati con C_i ($i=1,2$).Assumendo uno schema analogo al precedente si pone

(3) $$y_{ij} = \mu_i + e_{ij} \qquad (i=1,2;j=1,2,\ldots,n\ )$$

dove μ_iè l'effetto "vero" di C_i e le e_{ij}sono componenti accidentali cui si attribuirà ancora una distribuzione normale con media zero e varianza,eventualmente incognita,σ^2 (oppure σ_i^2, $i=1,2$).

Questo schema,che è uno dei più importanti nelle applicazioni sperimentali della statistica,può essere generalizzato in molti modi;uno dei più notevoli è di pensare a trattamenti caratterizzati da una o più variabili continue,diciamo da $x \in X$,ciò che porta a sostituire l'equazione precedente con

(4) $$y(x)=\mu(x) + e(x)$$

dove μ è l'incognita funzione di risposta,che si potrebbe pensare di approssimare con polinomi in x,e le y(x) sono misurate in corrispondenza a valori prefissati x_1 ,x_2 ,...,x_n .

Un elemento diverso rispetto all'esempio precedente è che,nella maggior parte dei casi (e in particolare nell'applicazione sommariamente descritta) σ^2 non è la varianza dello strumento,irrilevante in una situazione del genere,ma una varianza che caratterizza la produzione da parte della natura.Questo allargamento della teoria originaria degli errori,dovuto alla Scuola Biometrica di K.Pearson e ulteriormente approfondito da R.A.Fisher, ha costituito un fondamentale punto di partenza per il rapporto,oggi tradizionale,tra i metodi probabilistici e le discipline bio-mediche.

Esempio 3 (Sondaggi).Si ha un insieme $U=\{u_1 ,u_2 ,\ldots,u_N \}$ di unità ("la popolazione") ν delle quali ($\nu=0,1,\ldots,N$,incognito) hanno una determinata caratteristica.Per esempio:elettori con una determinata opinione,professionisti che siano anche evasori fiscali,pezzi difettosi in un prestabilito lotto,ecc.Si estraggono "a caso" (con reimbussolamento) n elementi,ottenendo un campione $\{u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_n}\}$,nel quale s unità ($0\leqslant s\leqslant n$)hanno la caratteristica in questione.

Il problema che si pone usualmente è di stimare la proporzione incognita $\theta=\nu/N$.Se sintetizziamo l'osservazione con la coppia (s,n) otteniamo,come è noto:

$$(5)\qquad p(s,n/\theta)=\binom{n}{s}\theta^s(1-\theta)^{n-s}\qquad\qquad(s=0,1,\dots,n)$$

<u>Esempio 4.</u>Un farmaco somministrato a n pazienti ha dato effetti soddisfacenti in s casi ($0\leqslant s\leqslant n$).Possiamo dire che lo schema è lo stesso dell'esempio precedente?In realtà non è facile,qui,definire esattamente la "popolazione" U,che è grosso modo l'insieme (non necessariamente finito) dei pazienti potenziali e tali da essere considerati nelle stesse condizioni rispetto alla efficacia del farmaco;ci si può però riferire ancora,con uno sforzo di idealizzazione,alla "proporzione" incognita di successi da indicare con θ (molti Autori parlerebbero qui di "probabilità incognita":questa espressione non è compatibile con l'uso della probabilità soggettiva ma,in una concezione restrittiva della probabilità,ricorda proprio che θ è una grandezza oggettiva ma incognita).

Si può quindi convalidare,anche in queste condizioni,la formula (5).Il confronto fra questo esempio e il precedente mostra come molti modelli sperimentali si possano vedere come estensione dei modelli di campionamento in senso stretto,e spiega come mai ne abbiano ereditato il linguaggio.Anche gli esempi 1 e 2 vengono usualmente descritti con il linguaggio della teoria dei campioni,con riferimento a "popolazioni normali".

La definizione del modello di un esperimento richiede naturalmente un'analisi sufficientemente approfondita del fenomeno reale in esame, analisi che può comprendere anche rilevanti elaborazioni teoriche. Negli esempi si è fatto ricorso alla teoria degli errori e alla sua estensione ai fenomeni naturali, alla teoria del campionamento da popolazioni sia finite che infinite. Nell'esempio che segue l'aspetto "matematico" è particolarmente semplice ma rende l'idea di come l'analisi matematica possa tradurre in caratteristiche formali delle informazioni di tipo empirico.

Esempio 5. Un congegno ha una durata di funzionamento X aleatoria. Assumiamo che il congegno non sia soggetto a usura. Questa sola caratteristica permette di identificare un insieme ben determinato di possibili leggi di probabilità per X, parametrizzate ad esempio con la vita media del congegno.

La mancanza di usura si può rappresentare matematicamente con la relazione

(6) $$\text{prob}(X \geqslant t+h / X \geqslant t) = \text{prob}(X \geqslant h) \quad ,$$

che è equivalente a

$$\text{prob}(X \geqslant t+h) = \text{prob}(X \geqslant t) \cdot \text{prob}(X \geqslant h)$$

e quindi, notoriamente, a

(7) $$\text{prob}(X \geqslant x) = \exp(-\theta x)$$

con θ positivo e arbitrario. La (7) corrisponde alla funzione di densità

(8) $$\theta \cdot \exp(-\theta x) \qquad (x \geqslant 0)$$

Il valor medio corrispondente alla (8) è $1/\theta$. Se si rilevano le durate di funzionamento di n congegni e risultano i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si può formulare un modello statistico in cui le ipotesi sono costituite da tutti i valori $\theta > 0$, i risultati sono i vettori $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_+^n$ e le probabilità, per ogni θ

fissato, sono facilmente esprimibili tramite la (8).
E' opportuno osservare che questo modello, detto esponenziale, ha oggi grande importanza pratica nell'ingegneria.

3. Modi di inferenza

Nella letteratura statistica, come si è detto, sono presenti numerosi orientamenti contrastanti, e sono quindi molte le classificazioni possibili. Quella principale si basa a mio parere sulla distinzione seguente:

a) metodi basati su "misure" (in senso lato) sull'insieme H delle ipotesi;
b) metodi basati su misure sull'insieme O delle osservazioni possibili.

Gli Autori classici come Gauss e Laplace hanno adottato un metodo del tipo (a), sia pure con il ricorso ad argomentazioni molto particolari (su cui torneremo). Procedure diverse, ma appartenenti alla stessa categoria, sono state sostenute da R.A.Fisher, anche se non sempre applicate in modo coerente dallo stesso Autore (che è unanimemente considerato il fondatore della statistica moderna, ma che si presta anche a letture diversissime tra loro). La stessa posizione è stata recuperata e approfondita nel secondo dopoguerra da Autori di diversa estrazione, generalmente inglesi (Barnard, Birnbaum, Hacking, Edwards, cioè i sostenitori della cosidetta "teoria del supporto"). Infine nella categoria (a) rientra pienamente la moderna impostazione neo-bayesiana (de Finetti, Lindley, Savage).

L'orientamento di tipo (b) è caratteristico della scuola "americana" (Neyman, E.S.Pearson, Wald) e comporta una identificazione della statistica induttiva con la teoria delle decisioni, in quanto le elaborazioni su O vengono finalizzate alla identificazione di un "comportamento ottimo". Questa scuola ha largamente dominato nell'ultimo mezzo secolo, al punto che è diffusa l'idea che le controversie sui fondamenti siano state definitivamente superate nella pratica e restino solo come tema di discussione "accademica".

L'argomento più noto e discusso nei dibattiti sui fondamenti è però quello che riguarda l'eventuale impiego delle"probabilità delle ipotesi". Nelle applicazioni,le probabilità delle ipotesi si possono in sostanza introdurre solo facendo ricorso alla teoria soggettivista della probabilità (da molti respinta,almeno nei contesti "scientifici"),mentre le probabilità del tipo $p(o_j /h_i)$ sono di solito dotate di interpretazione anche seguendo le impostazioni più restrittive.Questo è certo il punto che più colpisce nella proposta innovativa che de Finetti ha avanzato;e d'altra parte le argomentazioni di de Finetti sono tanto più stimolanti in quanto si riallacciano a temi particolarmente discussi nella cultura contemporanea come il mito della oggettività (si può veramente pensare che gli esperimenti "parlino da soli"?) e più in generale il ruolo del momento soggettivo nella ricerca (per verificare l'ampiezza della problematica coinvolta,si veda la relazione di Scardovi nella voce bibliografica n.8).Tuttavia,pur convenendo sul fondamentale ruolo anche costruttivo dell'opera di de Finetti,ritengo che dal punto di vista logico e matematico sia prioritaria la distinzione sopramenzionata,e che la questione della probabilità delle ipotesi vada posta all'interno dei due orientamenti descritti.Peraltro nel caso (b),per ragioni di omogeneità "ideologica",le probabilità iniziali non possono avere altro ruolo che quello di strumenti matematici utili solo per caratterizzare formalmente opportune classi di procedure,come lo stesso Wald sosteneva.

Nel seguito,basandomi su esempi,cercherò di dare un'idea dei modi caratteristici di procedure nell'ambito dei due orientamenti principali.

4.Elaborazioni sullo spazio delle ipotesi

Riprendiamo l'esempio 4 e supponiamo di avere fissato n=10 e di avere ottenuto s=4.Il risultato (insieme con il modello matematico dell'esperimento) determina così una <u>funzione di verosimiglianza</u> ("likelihood function")

$$l(\theta)= \binom{10}{4}\, \theta^4(1-\theta)^6 \qquad 0\leqslant \theta \leqslant 1 \tag{9}$$

che associa ad ogni $\theta \in [0,1]$, come misura del suo "supporto sperimentale", la quantità $p(4,10/\theta)$. A titolo di esempio calcoliamo la (9) per alcuni punti:

θ :	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$l(\theta)$:	0.0	0.09	0.25	0.11	0.01	0.0

L'ipotesi che esce più rafforzata dall'esperimento eseguito è $\theta=0.4$; escono invece molto indebolite le ipotesi $\theta \geqslant 0.8$. Si può intendere che la funzione di verosimiglianza esprima lo specifico contributo informativo dell'esperimento.

In un certo senso, l'informazione acquisita aumenta con il numero delle prove. Consideriamo un secondo esperimento con n=20 e s=8 e confrontiamo le funzioni di verosimiglianza **relative**

(10) $$\hat{l}(\theta)=l(\theta)/(\max_{\theta} l(\theta)).$$

Si trova:

θ :	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\hat{l}(\theta)$ per n=10	0.00	0.35	1.00	0.45	0.02	0.00
$\hat{l}(\theta)$ per n=20	0.00	0.12	1.00	0.20	0.00	0.00

Come si vede, per n=20, $\hat{l}(\theta)$ è più concentrata intorno a $\theta=0.4$; ciò indica, tra l'altro, una maggiore "attendibilità", rispetto al caso precedente, della "stima di massima verosimiglianza" 0.40.

Per gli studiosi che rifiutano l'uso delle probabilità delle ipotesi, l'analisi statistica non può andare oltre; c'è però così il rischio che il fatto che l'esperimento favorisca p.es. più l'ipotesi $\theta=0.4$ che l'ipotesi $\theta=0.6$ sia interpretato come una giustificazione "assoluta" della maggiore "plausibilità" di 0.4 rispetto a 0.6, mentre, in ciascun contesto specifico, possono essere disponibili informazioni esterne che p.es. tendono a favorire più 0.6 che 0.4 . Con l'impostazione neo-bayesiana anche le informazioni esterne all'esperimento vengono formalmente introdotte nello schema, e rappresentate da una legge di probabilità (detta <u>iniziale</u>) sull'insieme delle ipotesi. Qui indicheremo con $p_0(\theta)$ la corrispondente funzione di densità; allora il risultato dell'esperimento serve ad "aggiornare" la valutazione iniziale, generando la cosiddetta distribuzione finale che risulterebbe qui espressa (teorema di Bayes) da

$$p_1(\theta)=p_0(\theta)\cdot l(\theta)/(\int_0^1 p_0(\theta)\cdot l(\theta)\, d\theta\ ). \tag{11}$$

La legge p_1 permette di dare la risposta adeguata a qualunque problema inferenziale posto; ad esempio quale sia il valore θ più probabile (tenuto conto del risultato!), quale sia la probabilità che $\theta>0.5$, ecc. Queste risposte, dunque, si basano in linea di principio su tipi di informazioni diverse: quelle a priori rispetto all'esperimento, sintetizzate in $p_0(\ .\ )$, e quelle prodotte dall'esperimento, sintetizzate in $l(\ .\ )$ (si noti che nemmeno queste ultime sono veramente "oggettive", perchè il risultato viene comunque interpretato e utilizzato tramite il modello matematico). Nelle diverse situazioni applicative possono essere più influenti le une o le altre. Nel campo sperimentale è facile che l'esperimento sia progettato in modo di acquisire "molta" informazione; allora $l(\theta)$ è molto concentrata e $p_0(\theta)$ può essere approssimata da una costante nella regione in cui $l(\theta)$ non è praticamente nulla. Ne viene l'approssimazione

$$p_1(\theta)\simeq l(\theta)/\int_0^1 l(\theta)\, d\theta \tag{12}$$

Gli Autori dell'800 usarono sistematicamente la formula (12) non come approssimazione e nei limiti detti, ma come conseguenza dell'assunzione $p_0(\theta)=\text{cost}$ che si voleva rappresentasse l' "ignoranza a priori". E' facile rendersi conto che un'assunzione del genere a rigore è ingiustificabile, e che introduce nello schema una rigidità generalmente inaccettabile. Un uso induttivo corretto del teorema di Bayes appare condizionato dall'adozione di un concetto di probabilità sufficientemente ampio,e quindi,tranne casi un pò artificiali,della probabilità soggettiva.

Per chiarezza vorrei riscrivere la (11) con riferimento al modello di esperimento descritto all'inizio del paragrafo 2.Posto:

$p(h_i)$=probabilità (iniziale) di h_i $(i=1,2,\dots,k)$

$p(o_j/h_i)$=probabilità di o_j $(j=1,2,\dots,m)$ condizionata ad h_i $(i=1,2,\dots,k)$

$p(h_i/o_j)$=probabilità di h_i

e ammesso che ogni o_j possa verificarsi insieme ad una ed una sola delle ipotesi,si ha:

(13) $$p(h_i/o_j)=p(h_i)p(o_j/h_i) \;/\; \left(\sum_{i=1}^{K} p(h_i)p(o_j/h_i)\right)$$

che è la formulazione abituale del teorema di Bayes.

5.Elaborazioni sullo spazio delle osservazioni

Manteniamo il riferimento all'esempio 4 e sia θ^* l'incognito valore "vero" del parametro θ.Consideriamo,nel quadro di un orientamento di tipo (b),il problema della stima di θ^*.Si cerca allora una funzione $d(s,n)$ (funzione di decisione) che abbia valori in $[0,1]$ (l'insieme dei possibili θ) e sia "vicina" a θ^*,qualunque sia θ^*.Un metodo molto usato per precisare questa vicinanza è di ricorrere,se esiste,ad una funzione di decisione d^* tale che:

(14) $E(d^*/\theta)=$ per ogni θ ("non distorsione")

(15) $var(d^*/\theta)\leqslant var(d/\theta)$ per ogni θ e ogni altra f.di decisione d non distorta,dove naturalmente:

$$E(d/\theta)=\sum_{s=0}^{n} d(s,n)\; p(s,n/\theta)$$

$$\mathrm{var}(d/\theta)=\sum_{s=0}^{n}(d(s,n)-E(d/\theta))^2\cdot p(s,n/\theta).$$

Nel nostro esempio esiste una ed una sola soluzione,cioè $d^*(s,n)=s/n$.Va notato che (14) e (15) assicurano a d^* un buon comportamento in media,non in corrispondenza al risultato particolare osservato;anzi la valutazione di ciascuna funzione di decisione è pienamente determinata dal solo modello dell'esperimento.

L'altro classico problema inferenziale è quello di scegliere tra diverse alternative H_o e H_1,per esempio tra

(16) $$H_o:\ \theta^*\leq\theta_o \qquad\qquad H_1:\ \theta^*>\theta_o$$

dove θ_o è dato.Ogni soluzione è rappresentata da un insieme $Z_1\subset O$ (detto zona critica) tale che

$$\begin{array}{lll} \text{se } (s,n)\in Z_1 & \text{si accetta } H_1 & \text{(cioè si rifiuta } H_o) \\ \text{se } (s,n)\notin Z_1 & \text{si accetta } H_o. & \end{array}$$

Qui vengono considerate funzioni di decisione le funzioni indicatrici delle possibili zone critiche.Viene considerata "ottima" una zona critica Z_1^* tale

(17) $$\mathrm{prob}\,((s,n)\notin Z_1^*/\theta)\leq\mathrm{prob}((s,n)\notin Z_1/\theta) \qquad \text{per ogni } \theta>\theta_o$$

e ogni Z_1 tale che:

(18) $$\sup_{\theta\leq\theta_o}\ \mathrm{prob}((s,n)\in Z_1/\theta)=\sup_{\theta\leq\theta_o}\ \mathrm{prob}((s,n)\in Z_1^*/\theta).$$

La (17) assicura di sbagliare conclusione il meno possibile quando H_o è falsa,mentre la (18) assicura che si tratta di procedure in qualche modo equivalenti quando H_o è vera.In pratica,si prefissa un valore α (generalmente piccolo) per le quantità (18) e si affronta il problema di ottimo rappresentato da (17).Al solito non sempre esistono soluzioni,ed allora si debbono indebolire i requisiti;nel caso dell'esempio una zona critica "ottima" esiste ed è del tipo

(19) $$Z_1^{*} = \{ (s,n): \quad s \geq c(\alpha,n) \}$$

dove $c(\alpha,n)$ è facilmente calcolabile (facendo uso delle tavole della distribuzione binomiale) quando α e n sono dati.

Anche per questo problema - ma è vero per tutti i metodi conformi all'orientamento che stiamo esaminando - la valutazione di una procedura non è legata al risultato osservato ma all'esperimento nel suo complesso;il risultato sperimentale (benchè sia un dato) viene in realtà trattato come una variabile aleatoria.Non si deve introdurre una distribuzione iniziale,ma la decisione adottata dipende comunque da altre scelte convenzionali (la non distorsione,la condizione (18),e simili).

Nell'ambito di questa scuola,dunque,le conclusioni inferenziali non dipendono soltanto dalla funzione di verosimiglianza effettivamente ottenuta,come nell'altro orientamento (a parte eventualmente l'introduzione delle probabilità delle ipotesi) ma per così dire anche dalle funzioni di verosimiglianza potenzialmente realizzabili,ma non veramente realizzate.In questo aspetto si può vedere il nucleo delle contraddizioni interne allo schema in questione;per una trattazione più dettagliata e sistematica dell'argomento posso rinviare al mio articolo espositivo "la teoria delle decisioni statistiche , in corso di stampa sul BUMI.Nel prossimo paragrafo vedremo un esempio classico di tali contraddizioni o paradossi.

6.Un confronto

I metodi di tipo (a) e di tipo (b) si ispirano dunque a punti di vista profondamente diversi;tuttavia è possibile che,dal punto di vista pratico e salvo il diverso tipo di giustificazione logica,alcune procedure operative possano essere in comune e quindi godere di una doppia giustificazione. Ad esempio,la scelta di opportune distribuzioni di probabilità iniziali può far coincidere - praticamente - un metodo di tipo "neo-bayesiano" con un metodo di tipo Neyman-Pearson-Wald.Ha avuto per esempio una notevole influenza un testo di D.V.Lindley del 1965 ("Introduction to probability and statistics from a Bayesian viewpoint",Cambridge Univ.Press) in cui sistematicamente i metodi neo-bayesiani vengono presentati come "rilettura", senza modifiche pratiche,dei metodi tradizionali.Ritengo che questa impostazione sia in generale una forzatura,spiegabile all'epoca con il peso di una tradizione ancora insufficientemente sottoposta a critica (e lo stesso autorevole studioso ha mostrato successivamente ben altri convincimenti); è chiaro però che può avere interesse riuscire a identificare,in definitiva, le assunzioni nascoste che consentono alle impostazioni di tipo (b) di far emergere in modo "quasi"automatico una conclusione da ogni esperimento. Si deve avvertire però che non esistono regole di corrispondenza generali, come ovvia conseguenza del fatto che non esiste un modo unitario e organico per affrontare i vari problemi nell'ambito dell'orientamento (b).Tutt'al più si può osservare che le conclusioni tendono usualmente a coincidere quando le informazioni sperimentali sono più numerose,perchè allora si riduce il peso delle assunzioni collaterali,implicite o esplicite che siano,e diventa quasi certo (anche in senso tecnico) che il "campione" riproduce fedelmente la "popolazione".Ho sostenuto in precedenza che il contrasto fondamentale tra gli orientamenti si basa sul fatto di riconoscere o meno nella funzione di verosimiglianza la rappresentazione completa dell'informazione prodotta da un esperimento.Questo punto può essere chiarito da un esempio classico.

Riprendiamo in esame l'esempio 4.Sia E_1 l'esperimento che consiste nel prefissare n=10;si è ottenuto s=4 sicchè la funzione di verosimiglianza relativa risulta

$$\hat{l}_1(\theta)= (\theta/0.4)^4\ ((1-\theta)/0.6)^6 \tag{20}$$

L'insieme delle osservazioni potenziali è in questo caso:

$$O_1 = \{(0,10),(1,10),\ldots\ldots,(10,10)\}$$

Consideriamo ora un esperimento E_2 strutturato diversamente.Si prefissa il numero s=4 di successi e si procede fino ad ottenere appunto s successi;la componente incerta del risultato è quindi n.E' facile rendersi conto che così si ha:

$$O_2 = \{ (4,4),(4,5),\ldots,(4,n),\ldots \}$$

(21) $$p(s,n/\theta)=\binom{n-1}{s-1}\theta^4(1-\theta)^6 \qquad (n=s,s+1,\ldots.)$$

La funzione di verosimiglianza relativa $\hat{l}_2(.)$ coincide con la (20).Adottando i metodi del tipo (a),i due esperimenti hanno dato dunque la stessa informazione,perchè $\hat{l}_1=\hat{l}_2$.Adottando i metodi del tipo (b) non vi è motivo che sia così,stante la diversità di O_1 e O_2 e quindi tra le probabilità (5) e le probabilità (21).In effetti,usando gli stessi criteri (14) e (15),si può dimostrare che

(22) $$d^*(4,10)=\begin{cases} 4/10 & \text{nel caso } E_1 \\ 3/9 & \text{nel caso } E_2 \end{cases}$$

Questo esempio può essere utilizzato dal lettore come un criterio per scegliere tra gli orientamenti (a) e (b).Si hanno 4 successi in 10 prove ripetute (prove terapeutiche,nell'esempio,ma si può pensare per semplicità a estrazioni da un'urna con composizione incognita);se si ritiene che sia importante distinguere se si è prefissato s=4 oppure n=10,allora l'intuizione del lettore è conforme ai metodi di tipo (b).Se si ritiene invece che questa distinzione sia inutile l'intuizione corrisponde allo schema (a).

La mia opinione è che,visto il risultato,la differenza tra E_1 ed E_2 sia solo una questione di intenzioni non realizzate (che cosa il ricercatore avrebbe fatto se il risultato fosse stato diverso) e quindi irrilevanti.

7. Altri problemi

Abbiamo esaminato, sia pure sommariamente, le principali controversie esistenti nel campo della teoria statistica con riferimento al caso in cui sia stato completamente formulato il modello matematico dell'esperimento, e che interessi in definitiva sapere quale sia la "vera struttura" del fenomeno in esame.

Molti problemi tradizionalmente affrontati dalla statistica non rientrano in questo quadro, e per questi quindi la discussione svolta risulta insufficiente. Mi limito a citare i principali:

a) problemi di previsione. Può interessare non la "struttura" di un fenomeno (che è tra l'altro un aspetto in qualche modo idealizzato) ma il risultato di osservazioni future, riferibili (in termini intuitivi, che richiederebbero precisazioni) allo "stesso fenomeno" già sottoposto ad osservazione. Non c'è alcuna difficoltà ad una trattazione di tipo neo-bayesiano; l'argomento è invece difficile da inquadrare nello schema Neyman-Pearson-Wald e la letteratura tradizionale ha finito con il trascurare l'argomento stesso, tranne in casi particolari.

b) problemi di scelta dell'esperimento. Ogni modello di esperimento si compone di una parte che cerca di descrivere matematicamente una realtà empirica e di una parte che descrive la procedura di osservazione. A priori, la scelta di quest'ultima può essere ottimizzata in un insieme di procedure disponibili (esempi: scelta della dimensione del campione, scelta della regola di arresto in un procedimento sequenziale, ecc.).

In questo caso viene meno la distinzione fondamentale tra orientamenti di tipo (a) e di tipo (b), ed è corretto considerare aleatorio lo stesso risultato sperimentale. Permane la questione delle probabilità delle ipotesi, ma sono recuperabili molti aspetti dei procedimenti di tipo (b).

c) modelli sperimentali incompleti. Nell'esempio 1 ci si può ad esempio chiedere se gli errori di osservazione hanno o no una distribuzione di probabilità normale,senza pensare di poter elencare ed elaborare tutte le alternative possibili.Mancando l'introduzione dell'insieme delle ipotesi,la funzione di verosimiglianza non può essere costruita.R.A.Fisher suggerì per questa situazione la cosiddetta "teoria della significatività pura";una revisione critica moderna è dovuta a G.Pompilj che ha introdotto il concetto di "conformità" di un risultato sperimentale ad una determinata ipotesi, in un modo compatibile con la logica neo-bayesiana.Una strada diversa per affrontare lo stesso problema è di accettare senz'altro come insieme delle ipotesi l'insieme di tutte le possibili distribuzioni di probabilità (modelli non parametrici).La complessità di questo spazio bilancia in un certo senso la poca restrittività dell'assunzione;sono stati ottenuti comunque risultati notevoli,anche dal punto di vista neo-bayesiano.

8.Commenti finali

Ho cercato con questa relazione di indicare i punti che considero nodali nella teoria dell'inferenza statistica,e di fornire un quadro di riferimento per valutare criticamente la letteratura anche didattica a tutt'oggi esistente,ai vari livelli.Ma da tutto ciò non si può certo trarre in modo automatico una proposta di "programma" per un insegnamento della statistica nella scuola secondaria.

Pur dichiarando la mia incompetenza in quest'ultimo specifico campo,mi sembra di poter suggerire alcune considerazioni.

La prima è che conviene prendere atto della esistenza di profonde divergenze tra gli studiosi del settore;è un fatto non certo superabile in tempi brevi che i testi più influenti e diffusi siano tra loro sostanzialmente contradditori,e non solo propongano metodi di analisi differenti ma assumano implicitamente che siano diversi i tipi di esigenze che i metodi statistici-probabilistici sono chiamati a soddisfare.In queste condizioni un obiettivo ragionevole,forse minimale,è cercare di fornire comunque gli strumenti concettuali essenziali non solo per affrontare coerentemente i problemi che emergono dalle esperienze reali,ma anche per orientarsi in modo critico e consapevole nella stessa letteratura e per saper leggere quindi analisi e risultati qualunque sia la logica cui sono riferiti.

Un secondo punto che mi permetto di suggerire è di non ridurre l'inferenza statistica all'applicazione pedestre di formule prefabbricate (chi ha esperienza della letteratura statistica sa che questo pericolo è tutt'altro che remoto).Si deve recuperare ai metodi statistici e probabilistici il loro valore di strumento concretamente utile ai fini di una conoscenza più approfondita dei fenomeni;questo richiede,ovviamente,un rapporto diretto con discipline sperimentali e di ricerca "sul campo",e quindi un particolare sforzo teorico e pratico degli insegnanti,anche in senso interdisciplinare.Questi stessi problemi si pongono allo stesso modo a livello universitario e di pratica scientifica (quanti "test" pubblicati in appendice a ricerche sociali o sperimentali non sono altro che l'adesione ad una prassi rituale del tutto staccata dall'effettivo processo di riflessione critica?).E' dunque difficile,oggi,richiamarsi a "modelli" collaudati,pienamente soddisfacenti e imitabili;forse in pochi casi come in questo sono così indistinguibili un serio impegno nella didattica e un serio impegno nella ricerca.

9.Nota bibliografica

Indichiamo alcuni testi in cui si approfondisce il confronto fra le diverse impostazioni della statistica:

1.D.R.Cox,D.V.Hinkley:Theoretical statistics.Chapman and Hall,London 1974.

2.V.Barnett:Comparative statistical inference.Wiley,London 1973.

3.Autori vari:Induzione e statistica.Corsi CIME,1959.

4.B.de Finetti:Probability,induction and statistics.Wiley,London 1972.

5.L.J.Savage e altri:The foundation of statistical inference.Methuen, London 1962.

Citiamo infine gli atti di alcuni convegni dedicati allo stesso tema:

6. Foundations of statistical inference,a cura di V.P.Godambe e D.A.Sprott, Holt,Rinehart and Wiston,Toronto 1971.

7. Proceedings of conference on foundational questions in statistical inference,a cura di O.Bandorff-Nielsen,P.Blaesild,G.Schon,Dpt.of theoretical Statistics,Univ.of Aarhus 1974.

8. I fondamenti dell'inferenza statistica.Dipartimento statistico dell'Univ. di Firenze,1978.

9. Atti del convegno su Induzione Probabilità e Statistica,Univ.di Venezia, 1979.

INTERVENTI NEL DIBATTITO

*PINTACUDA:*Dalla relazione risulta chiaramente che molti dei manuali di statistica di ampia diffusione sono scarsamente fondati,e si riducono a raccolte di "test" da applicarsi meccanicamente.C'è qualche libro che imposta con chiarezza il problema dei fondamenti della statistica?

*PICCINATO:*Molta manualistica corrente effettivamente presenta un solo punto di vista e non approfondisce,talvolta nemmeno menziona,i punti critici e in genere il dibattito sui fondamenti.Ho citato nella bibliografia alcuni testi che informano proprio su questi temi.

*SCOZZAFAVA:*Se stiamo parlando di inserimento della statistica nell'insegnamento secondario,è chiaro che perseguiamo uno scopo essenzialmente formativo più che nozionistico.Non è possibile allora avere dubbi su quale approccio alla statistica debba essere adottato,fra i due possibili che ci ha ricordato la relazione di Piccinato.Il problema non è tanto quello di maggiori o minori difficoltà "tecniche" nell'uso dell'uno o dell'altro approccio in certi o in certi altri tipi di problemi,quanto il fatto che solo l'impostazione di tipo bayesiano poggia su solide basi logico-probabilistiche.Gli schemini rigidi e privi di coerenze sono dannosi a qualunque livello di insegnamento;a maggior ragione,dovendosi innovare l'insegnamento secondario con un argomento come la statistica,è bene non partire col piede sbagliato.E' vero che i metodi cosiddetti "classici" spesso funzionano,ma (per fare un parallelo) anche la somma di una serie è spesso uguale,in pratica,alla somma di alcuni suoi termini:tuttavia nessuno si sente autorizzato ad esporre la teoria delle serie omettendo il concetto di convergenza e quello di resto.

D'altra parte un'introduzione a livello elementare delle principali idee dell'inferenza statistica è possibile anche senza l'uso di sofisticati algoritmi di analisi multivariata:anche i più semplici esempi di campionamento si prestano a mettere in guardia,con opportuni (e facili) esempi e controesempi,contro valutazioni effettuate tenendo conto solo dei risultati del campionamento e non delle probabilità iniziali (che in molti casi si calcolano agevolmente come frequenze relative su sottoinsiemi del campione considerato,note prima del campionamento).In conclusione,l'introduzione della statistica nell'insegnamento secondario è opportuno che sia vista come l'acquisizione di un diverso modo di pensare (probabilistico,induttivo) e non (o,almeno,non soltanto) come l'introduzione di una nuova particolare tecnica di carattere matematico.

*PICCINATO:*La mia posizione personale è che i metodi del tipo Neyman-Pearson -Wald siano intrinsecamente contradditori,almeno nelle valutazioni post-sperimentali.Tuttavia credo che debba essere resa disponibile un'informazione ampia sui vari tentativi che sono stati fatti per "risolvere" il problema dell'induzione,anche quando questi siano risultati poco soddisfacenti.

*PRODI:*Ho l'impressione -pur non essendo un esperto- che senza la nozione di "probabilità a priori" tutto il processo induttivo risulta concettualmente infondato.Mi domando poi:come mai,dopo un'impostazione fondamentalmente valida come quella di Laplace (sulla "probabilità delle cause") si è abbandonato il punto di vista Bayesiano?Per difficoltà tecniche?Per motivi filosofici?

*PICCINATO:*Fisher cita espressamente l'uso delle probabilità "a priori" come il fondamentale elemento di critica agli Autori classici.Posso azzardare una motivazione a questo atteggiamento:nelle scienze sperimentali,cioè il settore in cui Fisher operava,l'"esperimento" si pone come momento ben definito e in un certo senso isolato nel processo induttivo.Si può forse capire perchè,in un tale contesto,le informazioni "a priori" appaiono troppo labili per avere diritto di presenza esplicita.Come controprova,posso citare il fatto che la "Business School" di Harvard (con Raiffa e Schlaifer) è stato uno dei centri di più attiva promozione dei metodi neo-bayesiani.Nei problemi economico-aziendali sarebbe ovviamente assurdo considerare valide ("scientifiche") solo le informazioni generate da esperimenti formalizzati.Comunque,la rottura insanabile con i classici è secondo me dovuta a Neyman e Pearson,con lo spostamento dell'attenzione dallo spazio delle ipotesi allo spazio dei risultati.

*BERTOLUZZA:*La statistica,in un certo senso,si occupa del modo con cui si possono ricavare informazioni da esperimenti.Allora:ci sono collegamenti fra la statistica induttiva e la teoria dell'informazione?

*PICCINATO:*Le misure di informazione e in particolare l'entropia,sono state usate nell'inferenza statistica sia per definire il "valore" di un esperimento,sia in connessione con il problema della scelta di una distribuzione di probabilità iniziale.Posso citare in proposito i recenti lavori di J.M.Bernardo pubblicati sugli Annals of Statistics (1979) e sul Jour.Roy.Statistical Society (Series B),sempre 1979.

Interviene nel dibattito anche il Prof. Loria.

Chiude il Convegno il Prof. Pucci che saluta e ringrazia i partecipanti.

APPENDICE

Metodologia nella s.m.inf.

Relazione sull'attività del N.R.D. di Bari a cura del Prof.C.Di Comite

Il nucleo di Bari ha in atto una sperimentazione sull'insegnamento della matematica (e della matematica soltanto) in alcune classi di scuola media inferiore.

La sperimentazione è essenzialmente di tipo metodologico:si parte dalla realtà,con problemi in forma grezza e giochi,si guidano i ragazzi a schematizzare le situazioni reali e a scoprire le leggi che permettono di risolvere i problemi proposti e infine si ritorna alla realtà per interpretare e risolvere altri problemi mediante le leggi trovate;si cerca di abituare i ragazzi alla riflessione,alla critica,al ragionamento,alla sintesi,trovando motivazioni appropriate,ponendo domande,discutendo e facendo indagini sperimentali (misurazioni,elaborazioni e confronto dei risultati,ecc.);si favorisce l' attività di manipolazione,in particolare nell'insegnamento della geometria,la maggior parte della quale viene "vista" mediante fogli di carta piegati,perforati,incollati,che i ragazzi singolarmente o a gruppi manipolano.

Non si tratta ovviamente di un metodo d'insegnamento originale (l'originalità può trovarsi talvolta nel modo in cui vengono impostati e affrontati i singoli problemi) ed è facile trovarsi d'accordo su di esso; risulta assai più arduo metterlo costantemente in pratica con profitto.Per cercare di attuarlo sono stati preparati da docenti universitari appunti dettagliati in cui sono presentati giochi e problemi,sono posti dei quesiti, date chiarificazioni e indicazioni per costruzioni,proposti spunti per discussioni,suggerite indagini,ecc.Questi appunti vengono discussi in riunioni settimanali con tutti i docenti del nucleo,vengono quindi dattiloscritti, fotocopiati e distribuiti ai ragazzi delle classi in cui si sperimenta.

Alcune riunioni sono dedicate all'analisi dell'andamento della sperimentazione nelle singole classi ed i docenti sperimentatori trimestralmente compilano delle relazioni riassuntive.

I docenti sperimentatori sono affiancati in ogni classe da un laureando che,per un intero anno scolastico,prende parte attiva al lavoro in classe aiutando,imparando e redigendo una sorta di diario sull'andamento della sperimentazione.

I risultati ottenuti sinora non sono omogenei sia per quanto riguarda le singole classi che per quanto riguarda i vari argomenti.

Gli insegnanti sperimentatori hanno una lunga esperienza didattica e,sulla base di questa,in questi anni,hanno riscontrato in generale,da parte dei ragazzi,un interessamento più accentuato e più diffuso con qualche exploit inaspettato anche da parte dei meno pronti;la comprensione dei vari argomenti è parsa generalmente buona e,specialmente nelle terze classi,dopo tre anni di lavoro,si nota un atteggiamento mentale aperto e critico.

Gli argomenti che hanno destato maggiore interesse,con punte di entusiasmo talvolta,sono stati quelli di geometria;difficoltà si sono trovate invece per l'argomento "frazioni".

In generale è osservato che mentre i ragazzi sembrano comprendere bene i vari argomenti e prendono parte attiva alla discussione e al lavoro in classe,poi hanno difficoltà a ricordare e ad esprimersi,anche perchè non sono abituati a rileggere gli appunti distribuiti e a studiare le poche cose da ricordare;la situazione diviene ancora più preoccupante in qualche classe in cui i ragazzi,anche a causa di condizioni sociali particolari,rifiutano i compiti a casa.

Si osserva infine che il materiale preparato,che rispecchia la traccia del programma di matematica della scuola media elaborata dal nucleo di Bari,è risultato sovrabbondante rispetto a ciò che si è riusciti a sperimentare effettivamente e ciò per vari motivi,il principale dei quali è che, se si vuole veramente che ciò che si fa sia chiaro,proficuo e ben motivato per tutti o quasi tutti i ragazzi,il tempo richiesto deve essere adeguato.E' stato quindi necessario operare delle scelte per cercare di conciliare lo aspetto formativo dell' insegnamento della matematica con la necessità dell'acquisizione di nozioni ritenute basilari.

Si ritiene che il lavoro del nucleo di Bari sia risultato proficuo oltre che per i ragazzi coinvolti nella sperimentazione (ma ciò potrà eventualmente essere comprovato o smentito nel seguito),per i docenti universitari che hanno acquisito un'esperienza che possono trasferire nel loro insegnamento specialmente per quanto riguarda l'indirizzo didattico del corso di laurea in matematica,per i docenti sperimentatori che hanno approfondito gli aspetti culturali e didattici della materia che insegnano e sono già diventati in qualche caso degli aggiornatori dei loro colleghi,per i laureandi che hanno fatto un anno di tirocinio prima della laurea.

Tuttavia il lavoro di sperimentazione non può proseguire indefinitamente con il ritmo e l'impegno che richiede nei primi anni.Ultimata la preparazione del materiale,anche se questo non è mai definitivo ma può essere costantemente migliorato e ampliato,il nucleo di Bari pensa di continuare a lavorare con incontri più diradati nel tempo,senza tuttavia lasciare morire l'iniziativa,che si ritiene utile a tutti i livelli.

Il problema che si pone è quello della diffusione del materiale preparato e dell'aggiornamento di un numero sempre maggiore di insegnanti. Si cercherà di risolvere questo problema mediante la stampa di una rielaborazione del materiale preparato e mediante eventuali corsi di aggiornamento gestiti dal nucleo.

Quanto all'opportunità della diffusione di iniziative analoghe, che non può che essere giudicata positivamente,si auspica che queste iniziative siano sempre collegate con l'università e coinvolgano un numero sempre maggiore di docenti universitari e di scuola media ovviamente.

Relazione sull'attività del N.R.D. di Catania a cura del Prof.C.Mammana

L'emanazione dei nuovi programmi della Scuola media da una parte ha fatto perdere attualità a certi tipi di sperimentazione didattica (per es. ricerca di nuovi argomenti da introdurre nei curricula di matematica) dall'altra ha creato tutta una serie di nuovi problemi.

Il Nucleo di ricerca didattica di Catania ha individuato due problemi e intorno ad essi ha impegnato la propria attività negli ultimi due anni.

1)Aggiornare su l'intero nuovo programma di matematica tutti i docenti di un campione abbastanza consistente (per es. quelli di un intero distretto). Tale aggiornamento doveva principalmente tendere ad elaborare proposte didattiche di come presentare tutti i vari argomenti e possibili tracce di svolgimento del programma.

2)Sperimentare in classe eventuali tracce <u>complete</u> di tutto il programma di matematica.

Pertanto l'anno 1978-79 è stato dedicato allo svolgimento di un corso di aggiornamento per i docenti di un intero distretto scolastico sui nuovi programmi della Scuola media nel senso indicato prima.Tale corso di aggiornamento ha portato alla elaborazione di due tracce didattiche (+) che il Nucleo ha ritenuto di dover verificare nella pratica dell'insegnamento.

Per questo,con l'inizio dell'anno scolastico 1979-80,sono stati formati due gruppi di docenti della scuola media (*),che,guidati dai componenti del Nucleo,hanno dato inizio ad una sperimentazione <u>comparata</u> delle due

---

(+) Si tratta delle tracce pubblicate nel Supplemento al N.10 del NUMI 1979.

(*) Si tratta di otto docenti che operano in varie scuole,con situazioni scolastiche-ambientali diverse tra loro.Si ha notizia che le stesse tracce sono sperimentate,senza il controllo del Nucleo,anche in altre scuole.A fine anno si conta di raccogliere i risultati di queste sperimentazioni indipendenti.

Schede di controllo sul livello di apprendimento degli alunni_

tracce.

Il metodo di lavoro seguito da entrambi i gruppi consiste in:

a) preparazione ed impostazione didattica degli argomenti da svolgere;

b) relazione dei docenti di Scuola media di ciascun gruppo sulle eventuali difficoltà incontrate nella pratica dell'insegnamento in relazione all'impostazione didattica concordata;

c) preparazione di schede di controllo dello stato di apprendimento degli alunni.

Da un primo esame dell'attività fin qui svolta e dalla analisi delle schede di controllo,il Nucleo ritiene positiva la verifica delle due tracce relativamente al programma del primo anno ed intravede la possibilità della loro unificazione.

Le prospettive per il futuro vengono allora individuate in due direzioni:

1°) continuazione della verifica delle due tracce relativamente al programma del secondo anno;

2°) sperimentazione,relativamente al programma del primo anno,suggerita dall'analisi comparata dei risultati ottenuti dai due gruppi nel corrente anno.

Una volta compiute la sperimentazione delle due tracce (si ritiene che la sperimentazione nella forma attuale,prima verifica e successiva riprova,si potrà completare fra tre anni) il Nucleo si propone di individuare e verificare ulteriori argomenti che potranno essere presi in considerazione in vista di un aggiornamento dei programmi di matematica della Scuola media.

Relazione sull'attività del N.R.D. di Firenze a cura della Prof.ssa M.G.Campedelli

I) Premesse

Il lavoro che il N.R.D. sta svolgendo durante questo anno sco-

Schede

lastico è dedicato al primo biennio delle secondarie superiori e al primo anno del triennio secondo un piano che,pur tenendo conto delle particolari situazioni contingenti,comprende i diversi tipi di scuole.Nel quadro del programma sperimentale già articolato lo scorso anno,l'opera del N.R.D. si è specialmente rivolta in due direzioni:

1)elaborazione di schede;

2)introduzione della logica nell'insegnamento matematico.

Riteniamo utile evidenziare che il Nucleo fiorentino,pur operando come un gruppo unitario,ha inteso lasciare ad ogni componente la più ampia libertà didattica ed ha consentito di rielaborare secondo le proprie inclinazioni personali,la preparazione culturale e la sensibilità di ognuno, gli argomenti svolti.In questo ordine di idee,la sperimentatrice prof.G.Zappa Casadio ha potuto realizzare,nel liceo classico ove insegna,un lavoro a carattere interdisciplinare.

II)Elaborazione di schede

Dopo aver esaminato a lungo la questione ed averne considerato le molteplici sfaccettature,i componenti il N.R.D. hanno deciso di presentare, durante il corso dell'anno scolastico,tre schede,ognuna delle quali deve avere un proprio carattere e una propria finalità;esse sono state preparate per gli allievi del primo anno del biennio e per quelli della prima classe del triennio.I tempi sono i seguenti:

prima scheda:mese di ottobre;

seconda scheda:mese di febbraio (inizio);

terza scheda:mese di maggio.

a)Le prime schede-Sono state preparate con i seguenti obiettivi:fornire una informazione sul livello delle conoscenze iniziali degli alunni che provengono dalle medie inferiori e di quelli che affrontano il triennio delle superiori;saggiarne inoltre le capacità logiche.Ambedue le schede sono state realizzate attraverso domande poste in forma diretta,senza guida alla risposta e riguardanti argomenti fondamentali di cui si suppone la completa padronanza. Il rendimento,nelle diverse classi dei diversi tipi di scuola,è stato omogeneo e,purtroppo,modesto.L'esperienza è apparsa del tutto positiva per i docenti,anche se hanno perso molte delle proprie illusioni;sarà ripetuta il prossimo anno,con le indispensabili migliorie.

b) Le seconde schede - Sono state preparate collegialmente nel modo seguente una parte comune ed alcune domande diversificate a seconda del programma svolto dai singoli docenti,del tipo di scuola e del numero di ore settimanali di lezione.Una volta fissati gli obiettivi (verifica delle conoscenze tecniche, della proprietà di linguaggio e della capacità di rielaborazione dei dati) e i contenuti,si sono stabiliti dei criteri comuni di valutazione.Le schede sembrano offrire la possibilità di una verifica più capillare di quella realizzata con i compiti tradizionali,pur non discostandosi molto dai risultati di quelli;rivelano meglio le lacune e le difficoltà,offrendo lo spunto per organizzare,attraverso la loro correzione in classe,un proficuo lavoro di ripensamento.

c) Le terze schede - Sono ancora in fase di elaborazione;si propongono i seguenti obiettivi:

1) un lavoro di ripensamento da parte degli allievi su quanto hanno appreso durante questo anno scolastico;

2) una verifica del loro impegno;

3) un confronto con la situazione iniziale.

III)Introduzione della logica

I componenti il Nucleo hanno lungamente discusso sulle motivazioni didattiche che giustificano l'inserimento della logica nell'insegnamento medio superiore,sui metodi e sui contenuti.Si è giunti infine alla stesura di un programma e di un quaderno comprendente,oltre il testo,anche una serie di esercizi atti a evidenziare il carattere con cui l'argomento voleva essere presentato.

a) Motivazioni- Le motivazioni più immediate risiedono nel carattere interdisciplinare della logica,che conduce ad un'unità di metodo nell'insegnamento.

b) Metodi- Si parlerà esplicitamente di un nuovo argomento solo per le parti strettamente tecniche;si faranno applicazioni,per quanto è possibile,entro un programma tradizionale.Una semplice modifica dei programmi porterebbe probabilmente ad un arido indottrinamento,ed espellere le nuove nozioni dalla mente sarebbe solo questione di tempo.Non si propongono quindi tanto delle novità,quanto un modo nuovo di organizzare il proprio pensiero,uno studio dei mezzi,tenendo sempre presente il fine.Per ottenere ciò occorre dominare lo strumento ed insegnare la tecnica,ma ad ogni nuova conoscenza deve corrispondere un incremento critico.Si eviterà di presentare la logica come una disciplina chiusa in se stessa,e mentre il linguaggio geometrico sarà una opportuna palestra,il filone algebrico offrirà l'occasione di stimolanti confronti.

c) Contenuti- Nell'ordine di idee su esposto,lo studio dell'algebra elementare acquisterà sapore e sarà collocato in giusta prospettiva se alle proprietà formali del calcolo numerico si contrapporranno,notando analogie e differenziazioni,quelle dei calcoli senza numeri:insiemistica e algebra delle proposizioni.Per quanto riguarda la geometria,dall'osservazione che i primi elementi di logica si trovano già attualmente in un programma tradizionale,scaturisce un inserimento che è chiarificatore di circostanze nuove e contemporaneamente apre un discorso critico da sviluppare quando la maturità dell'alunno lo permetterà.Chiarire quindi il termine "ragionamento logico" ed introdurre un meglio definito "inferenza logica",è qualcosa che è necessario nello studio della logica,ma giova anche allo studio della geo-

Algebra elementare

metria.Parlare esplicitamente di forme non valide di ragionamento e portare esempi di ragionamento indiretto,può evitare agli alunni difficoltà ed errori banali che tanto spesso si riscontrano e che sono i più faticosi da estirpare.

d) Età- Si ritiene che i migliori allievi siano quelli di circa quindici anni,perchè al disotto di questa età si può ancora insegnare la tecnica,ma fa difetto la capacità critica,al disopra vi è già un irrigidimento nel proprio modo di pensare.

IV Conclusione

I componenti il N.R.D. ritengono di poter valutare del tutto positivamente l'opera di sperimentazione svolta nell'ambito del Nucleo stesso. Riconoscono ad essa la realizzazione di due obiettivi :la possibilità di svolgere un'opera didattica veramente proficua ed un arricchimento della propria personalità di docenti,sia dal punto di vista culturale che umano.Considerano indispensabile poter proseguire nella via iniziata,poichè il lavoro impostato fino ad ora è stato programmato con una prospettiva di sviluppi futuri, che portino ad estendere,nel prossimo anno scolastico,la sperimentazione al secondo corso del triennio,in vista di un successivo completamento dell'intero ciclo.

Relazione sull'attività del N.R.D. di Genova-Scuola Media a cura del prof. P.Boero

a) obiettivi del nucleo e metodo di lavoro seguito

a.1) verificare(attraverso la sperimentazione in un numero sufficientemente elevato di classi di ambienti diversi) una ipotesi di insegnamento della Matematica integrato in un progetto(triennale)di insegnamento delle Scienze, aperto a collegamenti con l'insegnamento dell'Educazione Tecnica,della Storia,della Geografia e dell'Educazione Linguistica.

a.2) verificare l'efficacia di strategie per il coinvolgimento e l'aggiornamento degli insegnanti di Scienze basate su momenti di studio e di approfondimento a livello adulto dei temi (disciplinari,pedagogici,culturali generali) del progetto e su momenti di programmazione didattica e di produzione di materiali didattici per il lavoro in classe.

a.3) verificare la possibilità di un collegamento tra l'insegnamento delle Scienze (della Matematica in particolare) e l'insegnamento delle altre discipline che evidenzi il valore conoscitivo dei metodi e degli strumenti scientifici nei confronti di problemi propri di altri ambiti disciplinari (esempio:economia,tecnologia).

I metodi di lavoro seguiti si distinguono in:

metodi di lavoro per gli insegnanti e per i ricercatori del nucleo:

gli insegnanti del nucleo (19) ed i ricercatori universitari (9) lavorano

- collegialmente,attraverso una ventina di incontri (di 3-4 ore l'uno) all'anno per la revisione delle aree tematiche del progetto e per la verifica del lavoro di programmazione e di approfondimento svolto dai gruppi in cui si articola il nucleo.
- per classi parallele,attraverso riunioni settimanali dedicate alla programmazione nelle classi I,nelle classi II e nelle classi III(a rotazione)
- attraverso gruppi di lavoro (di 3-6 persone),per programmare i singoli temi in cui si articola il progetto e per affrontare problemi specifici (nel 1979/80:uso dei calcolatori tascabili,valutazione e verifica del progetto, significatività dei contenuti culturali,percorsi di apprendimento matematico,diversificazioni locali del progetto).In tutto,nel 1979/80 hanno funzionato 18 gruppi di lavoro.In media,ogni membro del gruppo partecipa a due riunioni alla settimana.Al gruppo sono aggregati 51 insegnanti di Scienze (che sperimentano il progetto nelle classi I - 21 di essi completamente,gli altri

parzialmente- e,parzialmente,nelle classi II);20 insegnanti di lettere (che sperimentano un piano di lavoro collegato al nostro piano di lavoro per la classe II);8 insegnanti di educazione tecnica (che studiano proposte per una sperimentazione nel 1980/81 collegata al progetto).I 51 insegnanti di Scienze aggregati al gruppo si riuniscono ogni 15 giorni,gli insegnanti di Lettere ed Educazione Tecnica ogni 2-3 settimane.

metodi di lavoro in classe:

circa un terzo dell'attività in classe è coperta da lavoro guidato su schede che servono ad uno o più dei seguenti scopi:-analisi di pensare dei ragazzi su un certo argomento,"provocazione" di discussioni su esso;-approfondimento dei temi;-addestramento tecnico;-sistemazione di argomenti;-verifica dei livelli strumentali e/o di conoscenza dei temi che si sono raggiunti.Le schede sono preparate dai gruppi di programmazione e discusse (e verificate) nelle riunioni per classi parallele.

Alle schede di lavoro guidato vengono affiancate:-letture (per storicizzare il tema affrontato,per sistemare conoscenze,ecc.);alcune delle letture sono tratte da testi (scolastici e non),altre sono elaborate ad hoc;-esperienze, uscite,attività manipolative;-discussioni in classe;-lezioni (prevalentemente per tirare le fila del lavoro e per sistemare i concetti introdotti);-relazioni compilate dai ragazzi,tabelloni,ecc.per verificare la padronanza dei temi trattati.

b) scopi raggiunti e difficoltà incontrate

Per a.1,il nucleo si è dato i seguenti strumenti di verifica:

-strumenti per identificare il campione che sperimenta il progetto (questionari iniziali "diagnostici",parametri socioculturali per l'estrazione sociale dei ragazzi)

-strumenti di comunicazione standardizzata dell'andamento del lavoro in classe (libro di bordo della sperimentazione,che ogni insegnante compila per ognuna delle 25 unità didattiche in cui si articola il progetto;il libro di bordo contiene informazioni sull'esito -in termini di apprendimento- dell'unità didattica e sulle difficoltà incontrate sulle singole schede di lavoro guidato)

-griglie per la verifica degli apprendimenti disciplinari (riferite ai programmi ministeriali ma più dettagliate di essi)

Attraverso questi strumenti di verifica si può dare la seguente valutazione dei risultati raggiunti:

-l'ipotesi di insegnamento integrato della matematica produce risultati elevati (in termini di:estensione delle conoscenze nelle classi,autonomia nel possesso delle conoscenze-cioè capacità di trasferirle da un ambito all'altro-,possesso operativo dei concetti e degli strumenti matematici),con difficoltà per quanto concerne alcuni aspetti dell'aritmetica (scomposizione in fattori primi,MCD ed mcm,calcolo rapido di espressioni con frazioni) e il teorema di Pitagora.

-negli ambienti socialmente e culturalmente deprivati il progetto non"raggiunge i casi di emarginazione sociale grave e non interagisce con ragazzi privi di dotazioni culturali minime (leggere,scrivere,riconoscere i numeri, sommare numeri interi).

Per a.2),la dimensione raggiunta dal nucleo ed il fatto che tutti i 19 insegnanti sono ricercatori (nel senso che producono materiali e piani di lavoro) sembra una verifica probante (in positivo);per a.3),la verifica è positiva per Lettere (per contenuti sociali ed economici),mentre per Educazione Tecnica non vi è ancora stato lavoro in classe.

c) prospettive per il futuro

-concludere la sperimentazione del progetto triennale con le attuali 14 classi II

-estendere l'impegno per i collegamenti con educazione tecnica

-approfondire la ricerca (avviata) sui percorsi di apprendimento matematico, sulla base della ingente documentazione rappresentata dalle schede di lavoro guidato.

Relazione sull'attività del N.R.D. di Napoli a cura del prof.A.Morelli

Il Nucleo di ricerca didattica di Napoli sta svolgendo,nell'ambito di un contratto con il C.N.R.,un'attività di ricerca,con sperimentazione in alcune scuole di Napoli,di nuove metodologie e contenuti per l'insegnamento della matematica nelle scuole medie superiori in particolare nelle terze classi.Essa si aggancia a quella svolta negli anni scorsi,riguardante l'insegnamento della matematica nei bienni.

Mentre si sta provvedendo,alla luce delle esperienze fatte,ad una riformulazione del programma per le classi del biennio,ridimensionandone i contenuti,si sta procedendo alla verifica di quello indicato per le terze classi.

Si è fissato un programma per le terze classi che possa essere di riferimento per tutti i tipi di scuola,nel senso che gli argomenti indicati possono essere trattati in tutte le terze classi,anche se in misura diversa e con qualche diversa modalità;ciò per realizzare una maggiore uniformità ed eliminare certe differenze eccessive ed ingiustificate che si riscontrano nei programmi ministeriali.Gli argomenti sono

1)Geometria analitica.

2)Geometria euclidea del piano (completamento) precisando ed allargando il discorso sul metodo assiomatico;elementi di geometria dello spazio.

3)Equazioni e disequazioni;sistemi di equazioni e disequazioni.

4)Considerazioni e precisazioni sugli insiemi numerici già introdotti e sulle strutture algebriche;introduzione e studio delle funzioni radice,potenza,esponenziale e logaritmo.

5)Lunghezze,aree e volumi.

6)Trigonometria.

Per quanto riguarda i contenuti,nonchè le differenze che si propongono nello svolgimento del programma nelle classi di scuole di diverso tipo,si osserva che:la geometria analitica in ogni caso deve avere un ruolo fondamentale,ma necessariamente nell'Istituto Magistrale deve essere limitata alle questioni lineari e a qualche semplice questione metrica;la trigonometria deve avere uno sviluppo maggiore nella terza classe degli Istituti Tecnici,mentre negli Istituti Magistrali e Professionali deve essere limitata all'introduzione dei concetti fondamentali e nei Licei sarà continuata negli anni successivi;il capitolo sulle equazioni e disequazioni va trattato più estesamente nel Liceo Scientifico,senza trascurare la discussione delle equazioni parametriche collegate a problemi non soltanto geometrici.

Per quanto riguarda le innovazioni di carattere metodologico,si sta confermando l'efficacia dell'uso delle schede - lezioni per introdurre i concetti fondamentali con un'attiva e generale partecipazione degli alunni.

Sono state utilizzate alcune schede per le questioni lineari in geometria analitica e per il completamento dei fondamenti della geometria;si sta provvedendo attualmente alla sistemazione del punto 4) del programma, cercando di collegare,più di quanto si faccia tradizionalmente,i vari concetti,con tre schede sull'estensione del concetto di potenza ,la variazione della funzione potenza nei vari casi e lo studio delle funzioni esponenziale e logaritmo.Non è stato possibile organizzare un discorso organico e completo sul punto 5),ma bisogna tener conto della irregolarità di funzionamento delle scuole e del notevole numero di ore di insegnamento perdute.

Il Nucleo si riunisce,in linea di massima,una volta alla settimana;si preparano schede e problemi,si approfondiscono argomenti in relazione al programma e si analizzano e si discutono le proposte degli altri Nuclei. Gli sperimentatori sono quattro,ma collaborano attivamente sei aggregati,di cui quattro insegnano nella scuola media superiore.

Si ritiene opportuna la prosecuzione dell'attività dei Nuclei.In ogni caso si ritiene di notevole importanza il ruolo che ogni Nucleo può avere come centro di aggregazione e di collegamento fra docenti medi e universitari,nonchè di diffusione delle proposte degli altri Nuclei,specialmente dei progetti più organici e completi che si sono concretizzati in testi scolastici (il Nucleo di Napoli ha già organizzato,con questo scopo,alcuni corsi di aggiornamento).Un ruolo particolare possono svolgere i Nuclei per la diffusione e la utilizzazione del "Syllabus",che offre una ottima occasione per favorire utili contatti fra docenti di scuola media e docenti universitari,incontri fra docenti di una stessa scuola spesso isolati e discussioni e colloqui nuovi e interessanti con gli alunni delle ultime classi.

Relazione sull'attività del G.R.I.M.M. di Palermo a cura del prof.S.Valenti

Il gruppo di ricerca sulla "Sperimentazione di didattica della matematica nella scuola media dell'obbligo" lavora dal mese di ottobre del 1979 per la preparazione della sperimentazione stessa in 20 classi delle Scuole Medie di Palermo.Detta sperimentazione si attuerà a partire dall'anno scolastico 1980 - 81.

Il gruppo seguirà due "tracce" interpretative dei nuovi programmi e precisamente:

a) traccia cosiddetta "sperimentalistica";
b) traccia cosiddetta "linguistico-matematica".

In questi sette mesi di attività,il gruppo ha svolto:

1) lavoro seminariale su argomenti di matematica coordinati dal Prof.VALENTI;
2) lavoro seminariale su argomenti di linguistica coordinati dal Prof.LO PIPARO;
3) lavoro di consuntivo,organizzando (e partecipando a) un convegno sui contenuti e i metodi del progetto di sperimentazione (vedi N.U.M.I. maggio 1980);
4)...opera di persuasione,nel corso di un incontro indetto con i presidi presso il Provveditorato agli Studi di Palermo e promosso dal gruppo stesso;

5) indagini concrete sulle possibilità della "traccia sperimentalistica", collaborando attivamente coll'omologo gruppo di ricerca operante presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Palermo.

Gli obiettivi di fondo del gruppo sono:

I) l'interpretazione dei nuovi programmi secondo assi culturali diversificati;

II) la verifica della validità della sperimentazione prevista, attraverso la ricerca e l'adozione degli strumenti più idonei a garantire una valutazione massimamente obiettiva;

III) la formazione di insegnanti a loro volta "formatori", attraverso la formula dell'aggiornamento come ricerca.

Il gruppo si è proposto, come obiettivo del primo anno di lavoro, quello di allestire il materiale didattico da utilizzare a partire dall'80-81, ovviamente progettandolo in funzione di un organico adeguamento alle due linee che ispirano le "tracce" precedentemente elaborate. Il convegno di cui sopra ha avuto, a questo proposito, un ruolo di verifica, critica ed incentivo di rilevanza non trascurabile, soprattutto in riferimento alle metodologie di attacco. La globale partecipazione (attiva) degli insegnanti al convegno suddetto si è anche concretata in un utilissimo confronto del materiale che ciascun sottogruppo (uno per ogni "unità didattica") aveva in precedenza preparato; dal confronto si sono tratte preziose indicazioni che hanno consentito una vantaggiosa revisione del materiale stesso.

Fanno parte del gruppo sei insegnanti di lettere (in aggiunta ai venti di matematica): si è ritenuta indispensabile la loro presenza, oltre che ai fini di una generica "interdisciplinarità" di impostazione, anche in vista di un intervento marcatamente specialistico nella direzione dell'asse linguistico. Inoltre, all'interno del gruppo operano altri due insegnanti specificamente occupati nell'elaborazione di "tracce" inseribili in una futura sperimentazione nelle scuole elementari.E' infatti auspicato dall'intero gruppo l'obiettivo di proporre un'unica linea di sperimentazione volta ad operare sull'arco dell'intera fascia dell'obbligo.

Dall'esperienza di questi primi mesi è già emersa la constatazione che un gruppo di ricerca didattica può validamente programmare la sperimentazione solo in vista di un intervento il più vasto e articolato possibile (cioè su parecchie classi effettivamente sperimentali),non trascurando di coinvolgere,ogniqualvolta se ne presenti l'occasione,i docenti di tutte le altre discipline ragionevolmente collegabili alla matematica (quindi anche a livello universitario,data l'esiguità di "etichette" e competenze fatalmente presente nella scuola media ed elementare).Può essere un asserto ovvio,ma l'evidenza pratica induce a ribadirlo,confortato come esso risulta da circostanze oggettivamente sperimentate.

Relazione sull'attività del N.R.D. di Pavia a cura del prof.M.Ferrari

Il Nucleo di Pavia è sorto nel 1975 e si è subito impegnato a sperimentare il "Progetto Prodi" nel Liceo Scientifico T.Tamarelli di Pavia.A questa sperimentazione si è sempre mantenuto fedele cercando ogni anno di aumentare il numero delle classi sperimentali.

Nel corrente anno scolastico affronteranno gli esami di maturità le prime tre classi sperimentali.

Gli obiettivi che il Nucleo di Pavia ha cercato di perseguire sono:

-elaborazione di un nuovo curriculum:"Matematica come Scoperta" per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori,curriculum che innestandosi sui due volumi di G.Prodi,li continuasse in modo da coprire anche il triennio della scuola media superiore.Il contributo del Nucleo di Pavia ha riguardato,soprattutto,il Quaderno n.2 (di prossima pubblicazione) e le tre "Guide" per insegnanti;

-sperimentazione di tale "curriculum" per contribuire a rinnovare l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori;

-sviluppare una attività di formazione permanente per insegnanti sperimentatori ed aggregati.

Il metodo di lavoro seguito è stato,sostanzialmente,quello degli incontri periodici (settimanali) durante i quali si affrontavano problemi didattici,si discuteva il materiale elaborato,si risolvevano problemi.

Per quanto riguarda i risultati conseguiti possiamo dire che un primo traguardo,raggiunto e consolidato,è quello della costante collaborazione Università - Scuola Media con reciproco vantaggio per entrambe le istituzioni;un secondo traguardo è quello di aver,con successo,attirato l'attenzione e l'impegno e suscitato l'entusiasmo degli studenti per gli aspetti nuovi della matematica,come il calcolo della probabilità.Un test fatto recentemente dagli alunni delle tre quinte sperimentali ha dimostrato che essi avevano ben presenti e sapevano maneggiare con disinvoltura gli elementi di probabilità studiati cinque anni prima e non più ripresi negli anni successivi.

Un altro risultato positivo è rappresentato dal fatto che gli studenti delle classi sperimentali,rispetto agli altri,posseggono molti più strumenti matematici,senza aver apportato alcuna variazione nell'orario scolastico.E',inoltre,positivo il fatto che il nuovo curriculum abbia messo in risalto, fin dall'inizio,le capacità degli studenti bravi sviluppandone le doti di intuizione,di penetrazione,di ragionamento,di analisi critica delle situazioni. Un altro risultato positivo ci sembra quello di aver avvicinato gli studenti al libro di testo di matematica nel senso che il libro di testo viene letto e studiato e non usato solo per fare esercizi.

Naturalmente anche il Nucleo di Pavia ha incontrato,sulla sua strada,delle difficoltà.La prima è dovuta alla organizzazione scolastica:la scarsità delle ore a disposizione per l'insegnamento della matematica,ci ha costretti a tralasciare alcuni argomenti previsti nel curriculum,a comprimerne altri,a non dare sempre uno spazio adeguato agli esercizi ed ai problemi.

Una seconda difficoltà è legata all'attuale fase di elaborazione del curriculum ed è rappresentata dal contenuto numero di esercizi inseriti nei testi stampati.A questa difficoltà si è cercato di ovviare con esercizi ciclostilati.
Un'ultima difficoltà è rappresentata dal problema della valutazione al quale il Nucleo non ha ancora dedicato una sufficiente riflessione.

Il Nucleo ritiene che in Italia ancora non ci sia una seria scuola scientifica;per questo ritiene suo dovere continuare nella strada imboccata per poter contribuire,attraverso il curriculum che sta elaborando e sperimentando,alla nascita di una scuola a carattere scientifico,adeguata ai tempi attuali,per i giovani che si sentono particolarmente orientati verso le scienze.
Il Nucleo,infine,ritiene che questo curriculum possa ormai "uscire" dai Nuclei di Ricerca per essere adottato da gruppi di insegnanti e da insegnanti "isolati" (che già esistono).
Il materiale a disposizione è tale da dare a tutti una notevole sicurezza.

Relazione sull'attività del N.R.D. di Pisa a cura del prof.G.Prodi

Il Nucleo di Ricerca Didattica di Pisa (per la scuola secondaria superiore),uno dei primi istituiti,sta per concludere il suo quinto anno di attività.E' naturale che la presente relazione comprenda -sia pure a grandi linee- tutto questo arco di tempo.

In questi anni l' attività del Nucleo è stata non solo di sperimentazione,ma anche di elaborazione di materiale nuovo e di aggiornamento.

L'elaborazione di materiale ha riguardato la Guida al progetto di insegnamento "Matematica come scoperta",a cui hanno collaborato anche i Nuclei di Pavia e di Trieste,e la redazione del Quaderno n.1 per il triennio (a cui presto seguiranno i Quaderni n.2 e 3,anch'essi in collaborazione con i due Nuclei collegati).Ma,soprattutto,è stata preparata dagli insegnanti del Nucleo una grande quantità di problemi di vario tipo e di vario livello di difficoltà:ciò è particolarmente significativo per un gruppo che si proponeva soprattutto di verificare la possibilità di un insegnamento "per problemi".

L'attività di sperimentazione è stata condotta con impegno,ma è stata ostacolata da cause esterne,tra cui principalmente le seguenti:

a) la forte instabilità degli insegnanti e il frazionamento delle iniziative di sperimentazione.Nè a livello della burocrazia scolastica nè a quello sindacale le sperimentazioni promosse dal Nucleo hanno mai potuto ottenere quello "status" particolare di cui avrebbero avuto bisogno;
b) lo scarso numero di ore disponibili per la matematica,in quasi tutte le classi di struttura tradizionale;
c) i condizionamenti derivanti dall'obbligo di mantenere alcune mete dello insegnamento tradizionale (ad esempio,nel liceo scientifico,la preparazione alla prova scritta di maturità).

Un aspetto che emerge chiaramente dopo questi anni di esperienza è la lentezza con cui,nell'attuale situazione,si diffondono i processi innovativi.Dopo l'ampio corso di aggiornamento svolto dal Nucleo nel 1977 ben pochi insegnanti hanno accettato la proposta di proseguimento del lavoro. Altri si sono associati al Nucleo dopo un travaglio abbastanza lungo;ciò fa pensare che per la maggior parte degli insegnanti l'abbandono dell'insegnamento tradizionale comporti una crisi piuttosto intensa e complessa.

Solo in questi ultimi mesi,per la prima volta,è stato chiesto al Nucleo di orientare l'attività di una scuola sperimentale.Questo è un fatto importante,perchè finalmente darà modo al Nucleo di compiere una sperimentazione globale,disponendo di un orario settimanale adeguato.Inoltre si potrà, nell'ambito di questa attività,svolgere un seminario aperto a tutti gli insegnanti delle scuole secondarie superiori,con funzione di aggiornamento.

Nel quadro generale della scuola italiana,il continuo rinvio della riforma della scuola secondaria superiore ha un effetto di freno e di depressione,che è ben riscontrabile anche dal punto di vista dell'insegnamento della matematica.La maggioranza degli insegnanti non si impegna,attendendo che si crei un quadro giuridico e organizzativo certo;inoltre molti degli insegnanti, anche dei più preparati,sono poco disposti a studiare temi (quali,ad esempio,la statistica) che pur essendo importantissimi,appaiono ancora come "futuribili".

E' facile prevedere che,nel momento in cui verrà finalmente varata la riforma della scuola secondaria superiore,l'aggiornamento degli insegnanti apparirà come un compito essenziale e,nello stesso tempo,di dimensioni preoccupanti.Avendo presenti queste scadenze,si può affermare che il risultato più importante raggiunto in questo quinquennio dal Nucleo di Ricerca Didattica di Pisa è stato la formazione di una équipe di insegnanti che sono ormai in grado di svolgere un buon lavoro di aggiornamento riguardo ai colleghi. E' importante che questa équipe venga conservata e valorizzata per l'impatto che vi sarà con il problema dell'aggiornamento al momento della riforma.

Relazione sull'attività del N.R.D. di Torino a cura della prof.ssa E.Valabrega

Quando,alcuni anni fa,iniziò l'attività del nucleo torinese,gli obiettivi che ci ponevamo erano,in primo luogo,quello di tenere in contatto gli studenti dell'indirizzo didattico (docenti,cioè in formazione) con docenti agli inizi della loro attività nella scuola,e,in secondo luogo,di avviare una sperimentazione attenta soprattutto ai problemi della scuola di massa: non a caso nessuna delle classi sperimentali era,in quegli anni,di liceo: andavamo dall'istituto tecnico commerciale agli istituti professionali al liceo artistico.Eravamo cioè guidati da un interesse per la didattica universitaria da un lato e dal groviglio della riforma della scuola secondaria dall'altro.

Non mancarono le difficoltà:una sperimentazione puramente metodologica,non strutturale,che tocca scuole medie superiori di diverso tipo, difficilmente può prescindere dalla situazione concreta delle diverse scuole e procedere quindi in modo umiforme:si vide così,ad esempio,una maggiore attenzione per la probabilità e statistica nell'I.T.C. ,per la geometria nello I.T.I.S. Pure il dato positivo che ben presto emerse fu quello di vedere un piccolo gruppo di insegnanti che andava sempre più affiatandosi e prendeva l'abitudine a lavorare veramente insieme.Penso sia stato vantaggioso il metodo di lavoro seguito:da parte mia,del condirettore,degli aggregati non venivano avanzate che bozze di lavoro e bibliografie.L'elaborazione più minuta e il lavoro in classe rimaneva affidato decisamente ai docenti,senza vincoli precisi neanche sui testi,che,anzi,ci proponevamo di elaborare poi insieme in forma modulare (e qualcosa,se pure con molto ritardo,è uscito o sta uscendo).

Nonostante gli avvicendamenti degli insegnanti in varie scuole e gli smembramenti di classi,che molto restringono il campo di azione,si è venuta delineando una linea abbastanza chiara per la prima e buona parte della seconda,anche se il biennio,per le sue caratteristiche di conclusione della scuola dell'obbligo da una parte e di inizio di una scuola professionalizzante dall'altra,non è di interpretazione tanto immediata;d'altra parte il collegamento stabilito da studenti che svolgono tesi sperimentali attirava l'attenzione di altri docenti,proprio mentre si mostrava sempre più stagnante la situazione a livello legislativo e il nucleo aveva ormai raggiunto una maggiore sicurezza.

Così quest'anno il nucleo si è allargato comprendendo docenti di liceo classico e liceo scientifico.Manca l'istituto magistrale,presente l'anno passato (Peluso),scuola della quale abbiamo potuto riscontrare che è particolarmente delicata e degna di attenzione tutta speciale.Diventa così sempre meno facile procedere simultaneamente in classi con orari diversi e sempre più il nucleo diventa nucleo di ricerca:quest'anno l'accento è stato posto sul programma di geometria,coi suoi sviluppi nella terza,e sull'analisi coll'uso del calcolatore tascabile,sempre per il triennio.

E' innegabile la funzione di aggiornamento di un gruppo di questo genere,i cui componenti si alternano nell'esporre le relative esperienze; quanto alla sperimentazione rischia di arenarsi nelle secche della burocrazia. Sull'utilità globale non ho dubbi;ma,mentre in partenza mi parve vantaggioso che il nucleo si allargasse a macchia d'olio (come è avvenuto),oggi desidererei lavorare in un istituto sperimentale,coordinando la ricerca anche colle altre discipline (quanto meno italiano e altre discipline scientifiche).

SYLLABUS DI MATEMATICA (°)

CONOSCENZE E CAPACITÀ PER L'ACCESSO ALL'UNIVERSITÀ

Questo Syllabus è stato compilato in primo luogo per gli studenti che, dopo aver superato la maturità, intendono iscriversi ad un corso universitario che richieda una buona preparazione matematica (Matematica, Fisica, Ingegneria, Scienze dell'Informazione, Scienze Statistiche, Astronomia,...). Gli estensori di questo testo ritengono tuttavia che esso possa essere utile anche a coloro che intendono iscriversi ad uno dei numerosi corsi universitari in cui la matematica, pur non essendo oggetto di studio, o pur essendolo in modo marginale, viene impiegata come linguaggio o come strumento. Infine, questo Syllabus dovrebbe anche servire per verificare la preparazione matematica acquisita a conclusione della scuola secondaria: ma occorre riconoscere che, nell'attuale situazione della scuola italiana, sarebbe ingiusto esigerlo. Ciò non toglie, peraltro, che questo testo possa contribuire al dibattito sull'insegnamento della matematica

(°) Questo documento è stato approvato in una riunione della CIIM, allargata ai membri della Commissione scientifica dell'UMI, svoltasi a Firenze l'1/3/1980.

nella scuola secondaria superiore, nella prospettiva di una riforma che si auspica non troppo lontana.

Le esigenze di conoscenze e di abilità matematiche sono diverse per i diversi corsi universitari: ad esempio, proprio nel corso di laurea in Matematica molte nozioni vengono riprese daccapo e quindi potrebbero-in linea di principio - essere ignorate dagli studenti. Tuttavia, la velocità e l'ampiezza con cui si sviluppa un corso universitario di Matematica sono tali che risulta difficile seguirlo se le conoscenze elementari non sono già bene assestate, e se la mente non è già stata affinata ed allenata in modo assiduo e intelligente. Esaminando le esigenze di altri corsi di laurea ad indirizzo scientifico, si arriverebbe alla conclusione che,quanto alla preparazione matematica di base, le esigenze sono in larga parte comuni. Dunque, questo Syllabus, benchè non differenziato, potrà essere utile per l'accesso ad una vasta gamma di corsi universitari.

Il testo si divide in due parti affiancate: la prima si intitola "Conoscere" ed elenca alcune nozioni che si ritengono importanti; i punti contrassegnati con un asterisco si riferiscono a nozioni culturalmente rilevanti, che però possono essere tralasciate senza danno immediato. Nella parte "Saper fare" compaiono quesiti e problemi che servono ad esplicitare il significato delle nozioni, e possono servire agli studenti per verificare il grado di comprensione della teoria e l'abilità nell'utilizzazione dello strumento matematico. Un triangolino contraddistingue gli esercizi che richiedono anche un pizzico di inventiva.

E' ovvio che, mentre la prima parte ha una certa completezza - pur limitandosi sempre a temi veramente elementari - la seconda offre solo un piccolo saggio degli innumerevoli quesiti e problemi che si possono porre. Comunque, lo studente che sappia rispondere ad un buon numero di quesiti può sentirsi abbastanza tranquillo; se invece sono molti i quesiti a cui non sa rispondere, o per cui non trova riferimento nel suo curriculum scolastico, non può pensare che il rimedio sia semplicemente di approfondire lo studio dei particolari quesiti che sono qui proposti.....

La materia è ripartita in sei quadri. L'ultimo di questi ha un carattere particolare: contiene, in rapidi cenni, argomenti che non sono insegnati, o sono insegnati solo con estensione limitata, nelle scuole secondarie italiane, pur facendo parte dei programmi scolastici di molti paesi stranieri. Soltanto gli elementi di analisi matematica, che compaiono nei programmi di un certo numero di scuole secondarie italiane, sono indicati con qualche dettaglio. Ovviamente, gli argomenti contenuti in questo sesto quadro non sono da ritenersi come presupposti indispensabili.

Forse è la prima volta che nel nostro paese viene pubblicata una raccolta di conoscenze e abilità che si indicano ad uno studente orientato verso una facoltà scientifica: è inevitabile che l'iniziativa trovi qualche dissenso, sia riguardo al contenuto del documento che alla sua utilità. La forma schematica del Syllabus lascia inevitabilmente dei vuoti anche in questioni rilevanti, quali, ad esempio, le connessioni storico-culturali con altre discipline. Del resto, questo Syllabus ha carattere provvisorio e sperimentale. L'Unione Matematica Italiana si propone di aggiornare e modificare il testo in base alle proposte e alle critiche che emergeranno, e alle nuove esigenze che via via si riscontreranno.

1. GLI INSIEMI NUMERICI, L'ARITMETICA

Conoscere

Le frazioni numeriche: operazioni e disuguaglianze.

Rappresentazione decimale; in quali casi una frazione si può esprimere in forma decimale?

Numeri razionali relativi: proprietà delle operazioni; legge di annullamento del prodotto.
Come si giustifica la "regola dei segni" per il prodotto?

Disuguaglianze e loro proprietà fondamentali; volori assoluti; calcoli numerici approssimati.
Nozione intuitiva di numero reale.
Media aritmetica e media geometrica di due numeri positivi.
La divisione con resto fra gli interi naturali (un enunciato preciso che esprima il significato della divisione con resto di a per b..).
Divisibilità, massimo comun divisore, minimo comune multiplo. * Algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore.
Numeri primi (* Esistono infiniti numeri primi: come si può dimostrarlo?).
Scomposizione di un intero in fattori primi. (Un enunciato preciso, senza dimostrazione).

Saper fare

- *Delle due frazioni* $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n+1}$ *quale è la maggiore?*
- *Date le due frazioni* $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, *trovare una frazione strettamente compresa fra esse.*
- *Che significa 432 in base dieci? E in base cinque?*
- *Proseguendo indefinitamente la "divisione con la virgola" fra due interi, se questa non si arresta si trova un allineamento decimale periodico (almeno da un certo punto in poi); perchè?*
- *Risolvere l'equazione* $(2x-1)(2x+1)(3x+1)=0$.
- *Consideriamo i numeri del tipo* $x+y\sqrt{2}$, *con* x *ed* y *razionali (ad esempio:* $\frac{3}{7}+\frac{1}{5}\sqrt{2}$*). Dimostrare che sommando, moltiplicando e dividendo due numeri di questo tipo si ottiene un numero che è sempre dello stesso tipo.*
- *Se è* $2,3 \leq x \leq 2,5$ *ed è* $-1,6 \leq y \leq -1,4$, *fra quali limiti sono compresi i numeri* $x+y$, $x-y$, $x\cdot y$, $\frac{x}{y}$ *?*
- *Dati due numeri positivi, è più grande la loro media aritmetica o la loro media geometrica?*

- *Il prodotto di tre interi consecutivi è divisibile per 6: perchè?*
- *I numeri 1000003, 1000000 sono primi fra loro: perchè?*
- *E' vero questo enunciato: "se 6 è divisore di* $a\cdot b$, *allora 6 è divisore di* a *oppure di* b*"?*
- *Per l'addizione e la moltiplicazione fra interi si usa fare la "prova del 9"; come si può giustificare?*
- *Dimostrare che* $\sqrt{2}$ *non può essere un numero razionale; il numero* $1+\sqrt{2}$ *è razionale?*

2. L'ALGEBRA

Conoscere

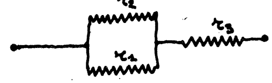
Elementi di calcolo letterale: uso delle lettere, uso delle parentesi. Polinomi (nozione di grado di un monomio, di un polinomio). Operazioni algebriche fra polinomi. Frazioni algebriche.

Divisione con resto fra polinomi (un enunciato preciso che esprima il significato della divisione fra due polinomi). Divisibilità di un polinomio per x-a.
I polinomi come funzioni e il teorema di identità dei polinomi (Un enunciato preciso, anche senza dimostrazione).

✱ Potenza n-esima del binomio.

Saper fare

- *Saper tradurre in una relazione matematica un enunciato del linguaggio parlato, come il seguente: "Se la somma dei reciproci di due numeri positivi è uno, la somma dei due numeri è uguale al loro prodotto". (Rendersi anche conto che l'enunciato è vero).*
- *Saper tradurre in una formula algebrica una semplice situazione di carattere fisico, economico, ecc... Ad esempio: esprimere la resistenza del circuito elettrico qui schematizzato.*



- *Saper semplificare un'espressione algebrica (riduzione dei termini simili, eliminazione dei termini opposti, ecc...). Saper trasformare un'espressione algebrica in un senso desiderato (Ad es.: scriverla come prodotto di più fattori, quando è possibile, oppure come somma di quadrati....).*
  Ad esempio: a) sviluppare $(x+y)^2+(x-y)^2$
  ▼*b) trasformare in un prodotto di fattori di secondo grado:* $(xu-yv)^2+(xv+yu)^2$.
  c) esprimere come somma di quadrati: $2x^2+2xy+2y^2$.
- *Eseguire la divisione del polinomio* x^4 *per il polinomio* x^2+1 *ed esprimere con un'uguaglianza il significato dell'operazione eseguita.*

3. LA GEOMETRIA

Conoscere

Conoscere il significato dei termini: assioma (postulato), teorema, lemma, corollario, ipotesi, tesi....
Elementi di geometria piana: incidenza, perpendicolarità, parallelismo.
Il postulato delle parallele.

Saper fare

- *Saper fare le costruzioni geometriche fondamentali con gli strumenti del disegno (riga e compasso): "squadratura del foglio", costruzione dell'asse di un segmento, della bisettrice di un angolo, del cerchio passante per tre punti assegnati,....*
- *Spiegare il significato di questa frase: "Una retta divide il piano".*
- *Saper condurre alcune semplici dimostrazioni geometriche, ad esempio, in*

(segue: GEOMETRIA)

Conoscere

Figure convesse, poligoni convessi. Trasformazioni geometriche del piano e loro composizione. (Simmetrie rispetto ad una retta e rispetto ad un punto; traslazioni e rotazioni; omotetie e similitudini).

Proprietà delle figure piane, particolarmente in relazione alle simmetrie.

I teoremi di Talete, di Euclide e di Pitagora.

Il parallelogrammo; i vettori e le operazioni su di essi.

Proprietà segmentarie ed angolari del cerchio (corde, secanti, tangenti; arco capace di un dato angolo).

Misura degli angoli; somma degli angoli interni e degli angoli esterni di un poligono convesso.

Corrispondenza biunivoca fra i numeri reali e i punti della retta.

Il piano cartesiano: rappresentazione delle rette, dei cerchi; della parabola, dell'ellisse, dell'iperbole (prendendo opportunamente gli assi).

Saper fare

relazione ai punti notevoli di un triangolo e alle proprietà dei parallelogrammi.

- *Esiste un triangolo i cui lati hanno misure a, b, c assegnate? In caso affermativo, come si costruisce?*
- *Trovare tutte le isometrie (congruenze) che trasformano in sè un rettangolo, e dire come si compongono. Lo stesso per il quadrato e per il triangolo equilatero.*
- *Come si costruisce un cerchio inscritto in un triangolo assegnato? E il cerchio circoscritto?*
- ▼ *E' data nel piano una circonferenza $\mathcal{C}$ ed un punto P che non sta su di essa. Quale è il punto di $\mathcal{C}$ più vicino a P? E quello più lontano? (Fare una dimostrazione chiara).*
- *Costruire un triangolo di cui sono noti alcuni elementi; ad esempio: la base, l'angolo opposto, l'altezza.*
- ▼ *Risoluzione sintetica di qualche semplice problema geometrico. Ad esempio:*
  - *a) Trovare le tangenti comuni a due cerchi assegnati.*
  - *b) Dato entro un angolo un punto, costruire un cerchio che passi per esso e sia tangente ad entrambi i lati dell'angolo.*
- *Saper tradurre analiticamente alcune fondamentali costruzioni geometriche, come: mandare da un punto la perpendicolare ad una retta assegnata, trovare il simmetrico di un punto rispetto ad una retta assegnata, eseguire una rotazione che porti il semiasse positivo delle x sul semiasse positivo delle y,....*
- *Saper riconoscere dall'equazione di un luogo, in un opportuno riferimento cartesiano, le sue proprietà di simmetria. Ad esempio: date due rette perpendicolari, studiare il luogo dei punti tali che la somma delle distanze*

(segue: GEOMETRIA)

<u>Conoscere</u>

Geometria dello spazio: incidenza, perpendicolarità, parallelismo. Angolo fra retta e piano. Diedri e triedri.

Poliedri convessi; *Formula di Eulero.

*Poliedri regolari.

La sfera; il cono, il cilindro.

<u>Saper fare</u>

da esse non superi 1.

- *Nel piano cartesiano si consideri l'insieme H formato dai punti che hanno entrambe le coordinate intere. Vi sono rette che passano per l'origine e non incontrano alcun altro punto di H? Come possono essere caratterizzate?*
- *"Saper vedere" una configurazione geometrica dello spazio. Ad esempio:*
  - *a) Che cosa si ottiene tagliando una sfera con un piano?*
  - *b) Tagliando un prisma (infinito) a sezione rettangolare con un piano?*
  - *c) Tagliando un cubo con un piano perpendicolare ad una diagonale? (Ci si può aiutare con un modellino).*
- *Dati nello spazio una retta $\mathcal{R}$ ed un punto P, individuare le rette passanti per P e*
  - *a) parallele a $\mathcal{R}$; b) ortogonali ad $\mathcal{R}$; c) ortogonali ed incidenti ad $\mathcal{R}$.*
- *Come si definisce la distanza fra due rette sghembe?*
- *Dato un cerchio ed un punto P fuori del suo piano, trovare il punto del cerchio più vicino e quello più lontano da P.*
- *Quattro punti non sono complanari; trovare i piani equidistanti da essi.*
- *Nello spazio, due cerchi non complanari che hanno una corda in comune stanno su una stessa sfera.*

4. IL LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI.

Conoscere

Linguaggio elementare degli insiemi: $x \in A$ (x appartiene ad A), $B \subset A$ (l'insieme B è contenuto in A, ovvero: B è un sottoinsieme di A); $A \cap B$ (intersezione di A e B), $A \cup B$ (unione di A e B), $A \setminus B$ (differenza fra A e B).

(x,y): coppia (ordinata); $A \times B$ (prodotto cartesiano di A per B).

Relazioni (in particolare: di equivalenza e di ordine).

Applicazioni (funzioni). Applicazioni iniettive, surgettive, bigettive.

Qualche elemento di calcolo combinatorio: dati gli insiemi finiti A e B, numero delle applicazioni di A in B (disposizioni con ripetizioni....), numero delle applicazioni iniettive di A in B (disposizioni semplici....). Numero dei sottoinsiemi di k elementi, in un insieme di n elementi (combinazioni ...).

Equazioni e disequazioni. Equazioni (e disequazioni) dedotte da una equazione (o disequazione) assegnata. Equazioni

Saper fare

- *Saper interpretare correttamente una formula insiemistica, come* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, *o una uguaglianza come:* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- *Quanto vale* $\sqrt{x^2}$?
- *Saper eseguire la composizione di due applicazioni, come (nell'ordine indicato):*

$$f: x \longrightarrow x^2-1\ ,\quad g: y \longrightarrow \frac{y}{2+y^2}$$

- *Saper rispondere a quesiti come questi:*
  - *a) quante sono le possibili giocate al totocalcio?*
  - *b) fra* n *persone che si salutano dopo una festa, quante sono le possibili strette di mano?*
  - *c) quante sono le diagonali di un poligono convesso di* n *vertici?*
  - *d) quante sono le possibili cinquine in un'estrazione del lotto?*
- *Dati due numeri* a, b, *distinti, sia* c *la loro media aritmentica. Vale allora, ovviamente, l'uguaglianza: (1)* $a+b = 2c$. *Da questa qualcuno ha dedotto successivamente le seguenti:*

  (2) $(a+b)(a-b)=2c(a-b)$; *(3)* $a^2-b^2=2ac-2bc$; *(4)* $a^2-2ac=b^2-2bc$;
  (5) $a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2$; *(6)* $(a-c)^2=(b-c)^2$; *(7)* $a-c=b-c$; *(8)* $a=b$.

  Quali dei passaggi fatti sono sbagliati? (Dal momento che la (8) contraddice l'ipotesi da cui siamo partiti).
- *Saper risolvere col solo ragionamento (applicando le proprietà delle disuguaglianze e dimenticando le "regolette" eventualmente apprese) disequazioni come queste, nel campo dei numeri reali:*

$$\frac{1}{x} - x \geq 3 \quad (x \neq 0)\ ;\quad \sqrt{x-1} \geq x-4 \quad (x \geq 1)\ ;\quad \frac{1}{x} + x \geq 2 \quad (x \neq 0).$$

Conoscere

e disequazioni fra loro equivalenti
Sistemi lineari in due equazioni e due incognite, e loro interpretazione nel piano cartesiano.
Radice n-sima (nell'insieme dei numeri reali positivi!).
Equazioni di secondo grado; relazioni fra i coefficienti e le radici.
Grafico di un trinomio di secondo grado.

Saper fare

- *Risolvere il seguente sistema contenente il parametro* λ : $\begin{cases} x - \lambda y = 1 \\ \lambda x - y = 1 \end{cases}$
- *Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme dei punti* (x,y) *per cui è:*

  a) $3x+2y \geq 1$ *b)* $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} |x+y| \leq 1 \\ |x-y| \leq 1 \end{cases}$
- *Data l'equazione* $ax^2 + bx+c=0$, *costruire un'equazione che ha come radici i quadrati delle radici di essa.*
- *Saper risolvere problemi come questo: dato un triangolo con i lati di lunghezza* a, b, c, $(a<b<c)$, *togliere da ciascun lato un segmento di lunghezza* x *in modo da ottenere un triangolo rettangolo.*

5. SUCCESSIONI, FUNZIONI ELEMENTARI

Conoscere

Successioni; progessioni aritmetiche e geometriche.
Limite di una successione; somma di una serie geometrica.
Potenze con esponenti razionali relativi (e base positiva!).
Funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche; loro rappresentazioni grafiche. Logaritmo decimale e sua relazione con la rappresentazione decimale dei numeri.
Lunghezza del cerchio e di un arco di cerchio.

Saper fare

- *Che espressione ha il termine generale* a_n *della successione così definita:* $a_0 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2$? *Quale è il suo limite?*
- *Che espressione ha il termine generale* a_n *della successione così definita:* $a_0 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$? *Quale è il suo limite?*
- *Quale è il maggiore dei due seguenti numeri:* $5^{\frac{2}{3}}$, $3^{\frac{3}{2}}$?
- *Per quali valori di* n *(intero) è* $(\frac{2}{3})^n \leq 10^{-7}$? *Può valere il segno di uguaglianza in questa relazione?*
- *Quale è la "parte intera" del logaritmo del numero* 3748279 *in base* 10?
- *Quale è la prima cifra decimale del logaritmo di 3 in base 10?*
- *Quante cifre ha il numero* 7^{900} *nella rappresentazione decimale? (Sapendo che* $\log_{10} 7 = 0,84509...$*)*
- *Saper "risolvere un triangolo", nel modo più semplice possibile, con*

(segue: SUCCESSIONI, FUNZIONI ELEMENTARI)
Trigonometria

<u>Conoscere</u>

Misura degli angoli in radianti.
✱ Calcolo di π .
Definizione del coseno, seno, tangente e prime proprietà. Criteri di congruenza dei triangoli e relativi problemi trigonometrici: teorema dei seni e teorema di Carnot. Grafici delle funzioni circolari. Teorema di addizione per le funzioni circolari. Definizione delle funzioni arcocoseno, arcoseno, arcotangente, e loro grafici. Disuguaglianza: $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$ (α in radianti, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).
Area di una regione piana (definita, ad esempio, con le quadrettature, come si fa in pratica con la carta millimetrata....).
Area dei poligoni ed equiscomponibilità. Area del cerchio.
Volume di un solido. Il principio di Cavalieri.
Volume del cilindro, del cono, della sfera.
Aree e volumi di figure simili.

<u>*Saper fare*</u>

l'uso di un calcolatore tascabile(✱) *che sia in grado di calcolare (oltre alle radici quadrate) le funzioni circolari e le loro inverse. Ad esempio: calcolare le ampiezze degli angoli di un triangolo i cui lati misurano: 25, 38, 47 cm..*

- *Saper semplificare e mettere in forma opportuna un'espressione trigonometrica. A questo scopo, occorre tener presenti le relazioni trigonometriche, che sono sostanzialmente le seguenti: relazione pitagorica: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ e formule di addizione. Fanno anche particolarmente comodo le formule di duplicazione e di bisezione, che sono una dirette conseguenza delle precedenti.*
- *Quale è il periodo della funzione $t \longrightarrow \sin(\omega t+k)$?*
- ▼ *Per quali valori di ω la funzione $x \longrightarrow \sin x + \sin(\omega x)$ risulta periodica?*
- *Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della superficie che lo limita?*

(✱) *E' importante che l'allievo sappia usare con sicurezza un calcolatore tascabile capace di calcolare, oltre alle radici quadrate, le funzioni elementari (funzioni esponenziali e logaritmi, funzioni circolari e loro inverse). Un calcolatore di questo tipo, con costo abbastanza modesto, rende inutili le tavole.*

6. COMPLEMENTI

A - ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

La conoscenza di qualche elemento di analisi matematica è utile non tanto per l'accesso ai corsi universitari di matematica quanto per i corsi in cui la matematica viene utilizzata fin dall'inizio (in particolare, i corsi di Fisica).

Conoscere

Limiti, continuità per funzioni di una variabile.

Derivata di una funzione; regole di derivazione.

Funzioni crescenti e decrescenti; massimi e minimi: convessità e concavità; flessi.

Integrale definito e sue prime proprietà.

Primitiva di una funzione; il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Calcolo di area e di volumi mediante integrazione.

N.B. Anche ai fini di una più profonda comprensione degli elementi dell'Analisi Matematica, è utile l'impiego di piccoli calcolatori programmabili: è molto istruttivo impiegarli per il calcolo di radici di equazioni, di integrali definiti, ecc...

Saper fare

- *Saper dimostrare alcune relazioni di limite applicando direttamente la definizione. Ad esempio*

$$\lim_{x \to x_o} \sqrt{x} = \sqrt{x_o} \quad (x_o > o)$$

- *Calcolare i limiti utilizzando i relativi teoremi (limite di una somma, di un prodotto, ecc...) Saper distinguere i termini "più grandi" da quelli "di ordine inferiore". Ad esempio, riconoscere che:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+\sin x}{x + x^2} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1+2x+3x^2}{2+5x^2} = \frac{3}{5}$$

- *Saper studiare sommariamente l'andamento di certe funzioni sulla base di soli dati "grezzi" (limiti, periodicità, simmetrie (funzioni pari, dispari), crescenza e decrescenza). Ad esempio:*

$x \to \frac{x}{x^2-1}$ *(Calcolare i limiti significativi; notare che è una funzione dispari; per quali valori si annulla?)*

$x \to \sin^2 x$ *(Quale è il suo periodo? Conviene tener conto che* $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$*)*

$x \to x+\frac{1}{x}$ *(E' una funzione dispari; quali sono i suoi limiti per* $x \to 0$ *e per* $x \to \infty$*? In quali intervalli è crescente o decrescente?).*

- *Saper studiare l'andamento di una funzione e tracciarne il grafico sulla base dello studio delle derivate. Ad esempio, studiare le funzioni:*

(segue: COMPLEMENTI)

Saper fare

$$x \longrightarrow \frac{\log x}{x} \quad ; \quad x \longrightarrow x^2 e^{-x} \quad ; \quad x \longrightarrow \frac{1}{1+\sin^2 x} \;.$$

B - ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE, con applicazioni alla fisica, alla ricerca operativa, ecc...

C - ELEMENTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA: si tratta di temi importantissimi in se stessi, che possono essere particolarmente utili a chi intraprende lo studio di una scienza sperimentale.

INDICE